Definíciók

Mátrixok

12.1.

Legyenek *m* és *n* pozitív egész számok. Az

$$A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{K}$$

függvényeket ($\mathbb{K}$ feletti) $m \times n$-es mátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{K}^{m \times n}$ jelöli. Az A mátrix *(i, j)* helyen felvett *A(i, j)* helyettesítési értékét az *i*-edik sor *j*-edik elemének (a *j*-edik oszlop *i*-edik elemének) nevezzük, jelölése: a_{ij} , vagy pedig $(A)_{ij}$. A mátrixot (n-edrendű) négyzetes mátrixnak nevezzük, ha $m = n$, vagyis ha ugyanannyi sora van, mint amennyi oszlopa.
Az $m \times n$-es mátrixokat $m \times n$-es táblázatként szokás megadni, innen ered a definícióbeli "sor-oszlop" szóhasználat is:

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & ... & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & ... & A(2,n) \\ & \vdots & & \\ A(m,1) & A(m,2) & ... & A(m,n) \end{bmatrix}$$

Az A mátrix a_{11} , a_{22} , ... elemeit diagonális elemeknek, a táblázatban ezeket összekötő képzeletbeli egyenest a mátrix főátlójának (diagonálisának) nevezzük. A főátló persze csak négyzetes mátrix esetén felel meg a táblázat "igazi" átlójának.

Megemlítünk néhány nevezetes mátrixot:

- Nullmátrixnak nevezzük azt a mátrixot, melynek minden eleme 0. Ha nem okoz félreértést, a nullmátrixot a 0 szimbólummal fogjuk jelölni.
- Sormátrixnak nevezzük az egyetlen sorból álló mátrixot, tehát $\mathbb{K}^{1 \times n}$ elemeit. A sormátrixokat sorvektoroknak is szokás nevezni,
- Oszlopmátrixnak nevezzük az egyetlen oszlopból álló mátrixot, tehát $\mathbb{K}^{m \times 1}$ elemeit. Az oszlopmátrixokat oszlopvektoroknak is szokás nevezni. A "sorvektor", "oszlopvektor" elnevezések okára később fogunk visszatérni (14.8 megjegyzés)
- Egy *A* négyzetes mátrixot alsó háromszögmátrixnak nevezünk, ha főátlója felett minden elem 0, azaz ha j > i esetén $a_{ij} = 0$.
- Egy *A* négyzetes mátrixot felső háromszögmátrixnak nevezünk, ha főátlója alatt minden elem 0, azaz ha j < i esetén $a_{ij} = 0$.
- Egy *A* négyzetes mátrixot diagonálmátrixnak nevezünk, ha egyszerre alsó és felső háromszögmátrix, tehát, ha a főátlón kívüli elemei nullák: $a_{ij} = 0$ ha $i \neq j$. A négyzetes mátrixok körében fontos szerepet játszik az egységmátrix:

12.2.

Az $I \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrixot ($n \times n$-es) egységmátrixnak nevezzük, ha:

$$(I)_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ ha } i \neq j, \\ 1 \text{ ha } i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

12.4

Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{mxn}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Az

$$A + B \in \mathbb{K}^{mxn}, \qquad (A + B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

mátrixot az A és B mátrixok összegének, a

$$\lambda A \in \mathbb{K}^{mxn}, \qquad (\lambda A)_{ij} := \lambda \cdot (A)_{ij}$$

mátrixot pedig az A mátrix λ-szorosának nevezzük.

12.7

Legyen $A \in \mathbb{K}^{mxn}$, $B \in \mathbb{K}^{nxp}$. Az

$$AB \in \mathbb{K}^{mxp}, \qquad (AB)_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

mátrixot az A és B mátrix (ebben a sorrendben vett) szorozták nevezzük.

12.9

Legyen $f(x) := c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ egy polinom, $\mathbb{K}$-beli együtthatókkal. Ekkor $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$f(A) := c_k A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I$$

Fontos művelet a transzponálás és az adjungálás.

12.10

Legyen $A \in \mathbb{K}^{mxn}$. Az

$$A^T \in \mathbb{K}^{nxm}, (A^T)_{ij} := (A)_{ji}$$

mátrixot az A transzponáltjának, az

$$A^* \in \mathbb{K}^{nxm}, (A^*)_{ij} := \overline{(A)_{ji}}$$

mártixot pedig az A adjungáltjának nevezzük.

A felülvonás a komplex konjugáltat jelenti. Itt érdemes megállapodni abban, hogy a konjugálást valós számokra is értelmezzük: valós szám konjugáltja önmaga (összhangban a valós tengelyen lévő komplex szám konjugáltjával).
Ezért rögtön látható, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a transzponálás és az adjungálás művelete ugyanaz.

12.12

Legyen $A, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. C-t az A inverzének nevezzük, ha

$$AC = CA = I$$

(Itt I az $n \times n$ egységmátrixot jelöli.) Az A inverzét így jelöljük: A^{-1}.

12.13

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

a.) Az A mátrixot regulárisnak (invertálhatónak) nevezzük, ha létezik inverze, azaz ha $\exists A^{-1}$.

b.) Az A mátrixot szingulárinak (nem invertálhatónak) nevezzük, ha nincs inverze, azaz ha $\nexists A^{-1}$.

Determináns

13.1 Fogalom

Legyen $n \geq 2$ és $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ egy négyzetes mátrix, továbbá (*i,j*) egy sor-oszlop indexpár ($i, j \in \{1, ..., n\}$). Töröljük *A*-ból az *i*-edik sort és *j*-edik oszlopot. A visszamardó $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot az *A* mátrix (*i,j*) indexpárhoz tartozó részmátrixának nevezzük, és A_{ij}-vel jelöljük.

Ezek után rekurzív módon értelmezzük a $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ függvényt:

13.2

1. Ha $A = [a_{11} \in \mathbb{K}^{1 \times 1}]$, akkor $\det(A) := a_{11}$

2.Ha $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, akkor:

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot a'_{1j}$$

,

ahol az $a'_{1j} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ neve: **előjelezett aldetermináns (kofaktor)**

A fenti definícióban a determinánst az első sor szerinti kifejtéssel értelmeztük.

Vektorterek

14.1

Legyen $V \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy V $\mathbb{K}$ feletti vektortér, ha léteznek az $x + y$ (összeadás) és $\lambda x = \lambda \cdot x$ (szorzás számmal) műveletek úgy, hogy teljesülnek a következő axiómák:

I.)
1.) $\forall x, y \in V : x + y \in V$
2.) $\forall x, y \in V : x + y = y + x$
3.) $\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z)$
4.) $\exists 0 \in V \ \forall x \in V : x + 0 = 0$
5.) $\forall x \in V \ \exists (-x) \in V : x + (-x) = 0$

II.)
1.) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall x \in V : \lambda x \in V$
2.) $\forall x \in V \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$
3.) $\forall x \in V \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
4.) $\forall x, y \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
5.) $\forall x \in V : 1x = x$

V elemeit vektoroknak, $\mathbb{K}$ elemeit skalároknak nevezzük. $\mathbb{K}$-t pedig a *V* skalártartományának nevezzük.

14.9

Legyen $A \in \mathbb{K}^{mxn}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Az

$$Ax \in \mathbb{K}^m, \ (Ax)_i := a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \quad (i = 1, ..., m)$$

vektort az A mátrix és az x vektor (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

Alterek

14.11

Legyen W a V vektortér egy nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy W altere V-nek (W altér V-ben), ha W vektortér a V-beli műveletekre nézve.

Generált alterek

15.1 Lineáris kombináció

Legyen $k \in \mathbb{N}^+, x_1, ..., x_k \in V$ egy vektorrendszer, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$. A

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$$

vektort (ill. magát a kifejezést is) az $x_1, ..., x_k$ vektorrendszer (vagy egyszerűen csak vektorok) $\lambda_1, ..., \lambda_k$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.
A lineáris kombinációt triviálisnak nevezzük, ha minden együtthatója 0 (ennek eredménye nyilván a nullvektor), nem triviálisnak, ha van nem 0 együtthatója.

15.4

A *Lineáris kombináció* formulával értelmezett W^* alteret, az $x_1, x_2, ..., x_k$ vektorrendszer által generált (vagy kifeszített) altérnek nevezzük, és $\mathrm{Span}(x_1, x_2, ..., x_K)$-val jelöljük.

15.5

Legyen W a V egy altere. Azt mondjuk, hogy W-nek van vges generátorrendszere, ha

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ \ \exists x_1, x_2, ..., x_k \in V : \mathrm{Span}(x_1, x_2, ..., x_k) = W$$

.

Ez esetben az $x_1, x_2, ..., x_k$ vektorrendszert a W altér egy (véges) generátorrendszerének nevezzük.

15.6

Ammenyiben $\mathrm{Span}(x_1, x_2, ..., x_k) = V$, az $x_1, x_2, ..., x_k$ vektorrendszert röviden csak generátorrendszernek nevezzük.

15.11

A V vektorteret véges dimenziósnak nevezzük, ha van véges gen.rendszere, azaz, ha

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ \ \exists x_1, x_2, ..., x_k \in V : \quad \mathrm{Span}(x_1, x_2, ..., x_k) = V$$

Azt a tényt, hogy V véges dimenziós, így jelöljük: $\dim(V) < \infty$

15.12

A V vektorteret végetlen dimenziósnak nevezzük, ha nincs véges gen.rendszere, azaz, ha

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ \forall x_1, x_2, ..., x_k \in V : \quad \mathrm{Span}(x_1, x_2, ..., x_k) \neq V$$

Azt a tényt, hogy V végtelen dimenziós, így jelöljük: $\dim(V) = \infty$

Lineáris függetlenség

16.1

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ egy vektorrendszer a V vektortérben. Ezt a vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük, ha lineáris kombinációi közül csak a triviális lin. kombináció eredményez nullvektort, azaz ha

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

A rendszert lin. összefüggőnek nevezzük, ha nem független, azaz, ha:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \lambda_i \text{ nem mind } 0\text{:} \;\; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

Bázis, dimenzió

17.1 Bázis fogalom

Az $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ vektorrendszert (V-beli) bázisnak nevezzük, ha gen.rendszer is és lineárisan független is.

17.3

A fenti lineáris kombináció együtthatóit a vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

17.10

A véges dimenziós (és nem $\{0\}$) vektortér bázisának közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük, és $\dim(V)$-vel jelöljük. Megállapodunk még abban is, hogy $\dim(\{0\}) := 0$

Rang

18.1

Legyen V egy vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, \dots, x_k \in V$.
Az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer által generált altér dimenzióját a vektorrendszer rangjának nevezzük.
Jele: $\operatorname{rang}(x_1, \dots x_k)$. Tehát

$$\operatorname{rang}(x_1, \dots, x_k) := \dim(\operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k))$$

18.3

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Az A i-edik sorában álló elemek alkotják az i-edik sorvektort:

$$s_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n \;\; (i = 1, \dots, m)$$

A sorvektorok által generált ($\mathbb{K}^n$-beli) alteret a mátrix sorvektorterének (sorterének) nevezzük.
Jele: S(A)

18.4

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Az A j-edik oszlopában álló elemek alkotják a j-edik oszlopvektort:

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \ \ (j = 1, ..., n)$$

Az oszlopvektorok által generált ($\mathbb{K}^m$-beli) alteret a mátrix oszlopvektorterének (oszlopterének) nevezzük.
Jele: O(A)

18.8

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
dim(O(A)) és dim(S(A)) közös értékét az A mátrix rangjának nevezzük, és rang(A)-val jelöljük. Tehát

$$\text{rang}(A) := \dim(S(A)) = \dim(O(A))$$

18.10

Legyenek m és n pozitív egész számok. Az m egyenletből álló, n ismeretlenes lin.egyenletrendszer ált. alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \underline{a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n} &\underline{= b_m} \end{aligned}$$

ahol az $a_{ij} \in \mathbb{K}$ együtthatók és a b_j jobb oldali konstansok adottak. Ezt az alakot a lineáris egyenletrendszer skalár alakjának nevezzük. Keressük az $x_1, ..., x_k$ ismeretlenek összes olyan ($\mathbb{K}$-beli) értékét, amelyre mindegyik egyenlőség igaz. Egy ilyen $x_1, ..., x_k$ értékrendszert a lin. egyenletrendszer egy megoldásának nevezzük.

18.11

A lineáris egyenletrendszert konzisztensnek nevezzük, ha van megoldása, inkonzisztensnek (ellentmondásosnak), ha nincs megoldása.

Vezessük be az

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^m$-beli vektorokat. Ezzel egyenletrendszerünk az alábbi, egyszerűbb alakba írható:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b$$

amit az egyenletrendszer vektoros alakjának nevezünk. A vektoros alak alapján a feladat így is megfogalmazható: Előállítható-e a b vektor az $a_1, ..., a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, és ha igen, akkor adjuk meg az összes lehetséges előállítás együtthatóit.

Hat pedig bevezetjük az

$$A := [a_1 ... a_n] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

mátrixot (melyet az egyenletrendszer mátrixának, vagy együtthatómátrixának nevezünk) valamint az $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ vektort, akkor egyenletrendszerünk legtömörebb alakja:

$$Ax = b$$

Ezt az alakot az egyenletrendszer mátrixos alakjának nevezzük.
A feladat tehát az összes olyan $\mathbb{K}^n$-beli vektor megkeresése, melyet x helyébe írva a (18.2) egyenlőség igaz. Egy ilyen vektort (amennyiben létezik) az egyenletrendszer egy megoldásának, vagy megoldásvektorának nevezünk.

18.13

Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldáshalmazuk ugyanaz.

18.15

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Ekkor az $Ax = 0$ lineáris egyenletrendszert homogén rendszernek nevezzük. Azt is szoktuk mondani, hogy $Ax = 0$ az $Ax = b$-hez tartozó homogén rendszer.
Jegyezzük meg, hogy a homogén rendszer mindig megoldható, mivel a nullvektor biztosan megoldása ($0 \in O(A)$).

18.17

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Az M_h alteret at A mátrix nullterének vagy magjának nevezzük.
Jelölés: $\mathrm{Ker}(A)$
Tehát

$$\mathrm{Ker}(A) := M_h = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$