1. PROBLEMAS DE CINEMÁTICA DEL ESPACIO

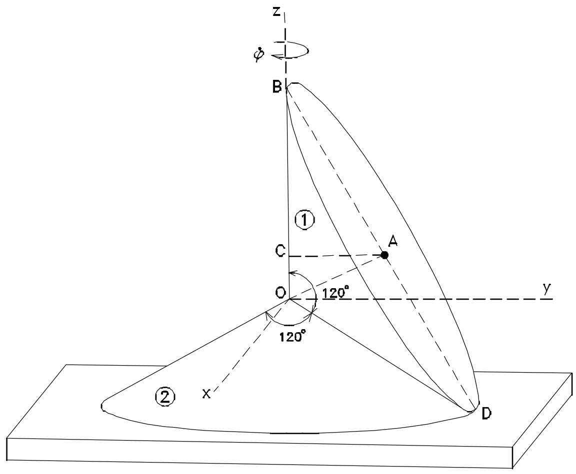
1.1. Problemas resueltos

1.- El cono 1 se mueve sin deslizamiento sobre el cono fijo 2. Ambos conos tienen una abertura de 120º. El ángulo φ girado por la recta CA, perpendicular al eje z , viene dado en función del tiempo por la expresión $\varphi = \frac{1}{2}kt^2$ donde k es constante. Sabiendo que OA= ℓ, determinar para el instante de la figura y utilizando la base de proyección indicada:

a) Velocidad angular $\vec{\omega}$ del cono móvil y velocidad angular $\vec{\omega}_r$ del mismo cono en torno de su eje OA.

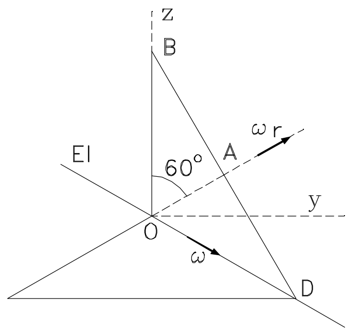
b) Aceleración angular del cono móvil.

c) Velocidad y aceleración del punto B del cono móvil.



SOLUCIÓN

a) Como el cono 1 se mueve sin deslizar, los puntos de la línea OD tendrán velocidad nula; por tanto, el eje instantáneo de rotación (conjunto de puntos de velocidad mínima) será la recta OD. Dado que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del cono tiene la dirección de dicho eje, tendremos en la base indicada:



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \operatorname{sen} 60^\circ \\ -\omega \cos 60^\circ \end{bmatrix} \qquad (1)$$

donde ω es incógnita.

El cono, para el observador del plano OAC , gira en torno al eje OA, que para él es fijo; por tanto, su velocidad angular $\vec{\omega}_r$ relativa a dicho plano tiene la dirección de OA. Es decir,

$$\vec{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \operatorname{sen} 60^\circ \\ \omega_r \cos 60^\circ \end{bmatrix} \qquad (2)$$

donde ω_r es desconocida.

La velocidad angular del plano OAC es $\vec{\dot\varphi}$, o sea:

$$\vec{\dot\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\varphi \end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde $\dot\varphi$ = kt.

Pero la velocidad angular absoluta del cono es la suma de la relativa al plano OAC y la propia del plano, o sea

$$\vec\omega = \vec\omega_r + \vec{\dot\varphi} \qquad (4)$$

Sustituyendo las expresiones dadas por (1), (2) y (3) en (4) e igualando componentes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \omega \operatorname{sen} 60^o &= \omega_r \operatorname{sen} 60^o \\ -\omega_r \cos 60^o &= \omega \cos 60^o - \dot\varphi \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es:

$$\omega = \omega_r = \dot\varphi$$

Por tanto las respuestas pedidas serán:

$$\vec\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\varphi \operatorname{sen} 60^o \\ -\dot\varphi \cos 60^o \end{bmatrix} \; (5) \;, \quad \vec\omega_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\varphi \operatorname{sen} 60^o \\ \dot\varphi \cos 60^o \end{bmatrix}$$

donde debe sustituirse $\dot\varphi$ por su valor kt.

b) Las expresiones que acabamos de obtener para la velocidad angular absoluta y la relativa del cono son genéricas, es decir, válidas en cualquier instante, en el supuesto de que la base de proyección (con direcciones x, y, z) de la figura sea *solidaria al plano OAC*. En efecto, la sección del dispositivo por dicho plano tiene siempre igual configuración geométrica y, por tanto, dará lugar a las mismas ecuaciones cinemáticas utilizadas en el apartado a). En consecuencia, subsistirán los resultados finales anteriormente obtenidos para las velocidades angulares.

Para obtener la aceleración angular $\vec\alpha$ del cono deberemos derivar en base móvil la velocidad angular dada en (5) en forma genérica, teniendo en cuenta que la base de proyección utilizada se mueve con velocidad angular

$$\vec\Omega_b = \vec{\dot\varphi}$$

por el hecho de haberla considerado solidaria al plano OAC. Aplicando la fórmula de derivación en base móvil

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\ddot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\dot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o \\ \ddot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\ddot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix}$$

donde $\dot{\varphi} = kt,\ \ddot{\varphi} = k$.

c) Para hallar la velocidad del punto B del cono aplicaremos la fórmula de velocidades para un sólido:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$$

Como el punto O es fijo, será

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\dot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = b\dot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o\,\vec{i}$$

con b = $\ell/\cos 60^o$.

Para hallar la aceleración de B, aplicaremos la fórmula de aceleraciones para un sólido tomando punto base en O fijo. Será:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}) \qquad (6)$$

donde es:

$$\vec{\alpha} \times \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o \\ \ddot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\ddot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o \\ 0 \end{bmatrix}$$

y también

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -\dot{\varphi}\cos 60^o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b\dot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o\cos 60^o \\ -b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\,60^o \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la (6) se obtiene el valor buscado de la aceleración de B:

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} b\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,60^o \\ -b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o - b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,60^o\cos 60^o \\ -\,b\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\,60^o \\ \end{bmatrix}$$

donde deben sustituirse b y los valores $\dot{\varphi} = kt,\ \ddot{\varphi} = k$.

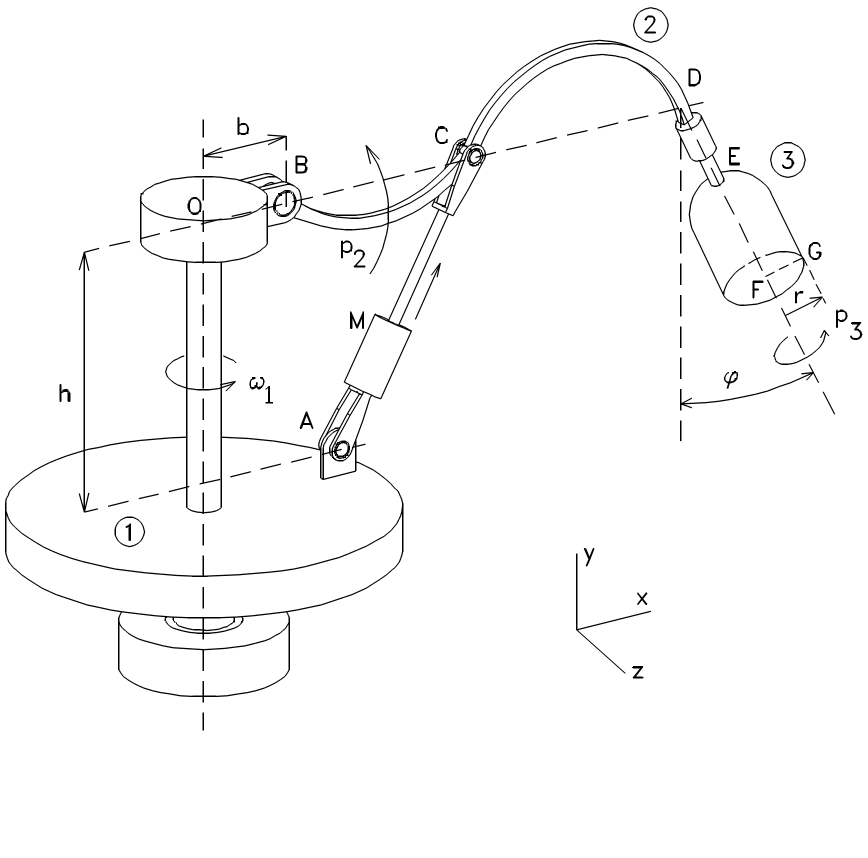
2.- La figura muestra, esquemáticamente, un dispositivo usual en los parques de atracciones. El rotor 1 gira con velocidad angular ω_1 constante . Al mismo tiempo, el accionamiento M hace que la distancia AC aumente. Como consecuencia de ello, el brazo 2 adquiere una velocidad angular p_2 constante con respecto al rotor. Finalmente, la cabina 3 está animada de un movimiento de rotación en torno a su propio eje, con una velocidad angular constante p_3 relativa al brazo 2. Determinar:

a) Velocidad del punto B respecto del observador de la cabina.

b) Aceleración de arrastre del punto G, si la referencia móvil es el brazo 2.

c) Velocidad de alargamiento de AC en el instante que se ilustra.

(Datos: BC = CD = ℓ , DE = EF = m, AC = n, la línea BCD es horizontal en el instante considerado y el punto G está en el plano vertical por BD.)



SOLUCIÓN

a) Dado que el observador en la cabina (cualquier posición es equivalente) se mueve con velocidad angular $\vec{p}_3$ con respecto del brazo BD (sólido 2), éste se mueve con velocidad $-\vec{p}_3$ respecto de la cabina y, en consecuencia

$$\vec{v}_B^r = -\vec{p}_3 \times \overrightarrow{DB} = -\begin{bmatrix} -p_3 \operatorname{sen}\varphi \\ p_3 \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2\ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_3 2\ell \cos\varphi \end{bmatrix}$$

b) La aceleración de arrastre de G es la aceleración absoluta con que la referencia móvil arrastra el punto, es decir, la aceleración absoluta de la partícula considerada solidaria de la referencia móvil (sólido 2). Por tanto, en este caso se trata de hallar la aceleración del punto G, suponiendo que no existe el movimiento relativo dado por $\vec{p}_3$, es decir, como si la cabina fuera solidaria del brazo BD.

El movimiento de la referencia móvil queda caracterizado por una velocidad angular $\vec{\omega}_2$ que vale:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{p}_2 + \vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Dado que existe un cambio de dirección de la velocidad angular $\vec{p}_2$, habrá una aceleración angular que aplicando la fórmula de derivación en base móvil será:

$$\vec{\alpha}_2 = \left.\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } \vec{\Omega}_b = \vec{\omega}_1$$

En estas condiciones, la aceleración de arrastre del punto G vendrá dada por la expresión:

$$\vec{a}_G^a = \vec{a}_B + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BG}) + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{BG} \qquad (1)$$

La aceleración del punto B, dado que dicho punto pertenece simultáneamente al brazo BD y al rotor 1, valdrá:

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos, tendremos:

$$\vec{a}_G^a = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \omega_1 p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 b - \omega_1^2 c_x - p_2^2 c_x \\ -p_2^2 c_y \\ 2\omega_1 p_2 c_y \end{bmatrix}$$

donde c_x y c_y son las componentes del vector $\overrightarrow{BG}$, o sea:

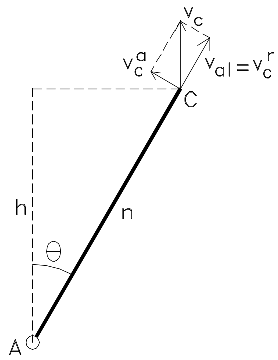
$$c_x = 2\ell + 2m \operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi$$
$$c_y = -2m\cos\varphi + r \operatorname{sen}\varphi$$

c) La velocidad del punto C, respecto de la plataforma 1, es consecuencia del movimiento de la barra BD y vale:

$$\vec{v}_C = \vec{p}_2 \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2\ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

Descomponiendo en la dirección AC y en una dirección perpendicular (haciendo *descomposición* de movimientos con referencia fija en la plataforma 1 y móvil en el accionamiento M). La primera será la velocidad de alargamiento del dispositivo mientras que la otra componente será consecuencia del giro del accionamiento entorno de la articulación A. Considerando además las dimensiones geométricas del dispositivo, quedará:

$$v_{al} = p_2\cos\theta \qquad \text{donde} \cos\theta = \frac{h}{m}$$



3.- La figura representa un robot de pintura. El sólido 1 sale del sólido 2 con una velocidad constante v respecto de éste. El sólido 2 gira con velocidad angular constante ω_2 respecto del sólido 3, alrededor del eje horizontal OF. El sólido 3 gira con velocidad angular constante ω_3 respecto de la bancada 4, alrededor del eje vertical EE' que pasa por O. Suponiendo una referencia (O,x,y,z), solidaria del sólido 2, determinar:

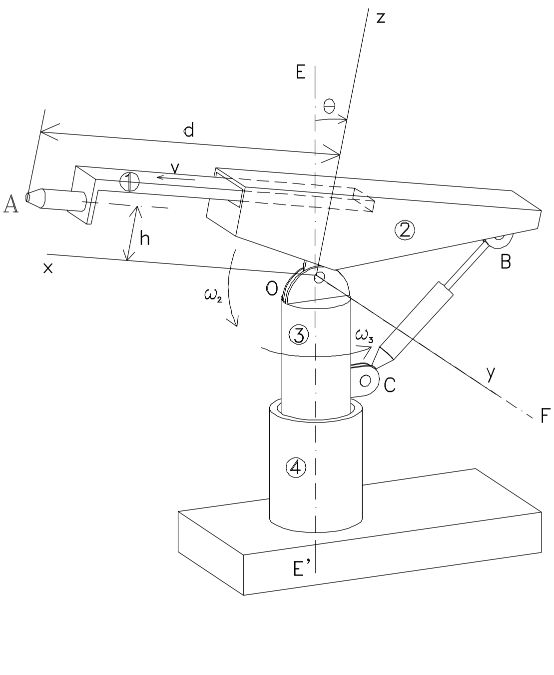
a) Aceleración angular del sólido 1 en la posición general que se indica.

b) Velocidad absoluta del punto A en el instante en que θ = 0.

c) Aceleración absoluta del punto A en el instante en que θ = 0.

d)

la ecuación del eje instantáneo de rotación del sólido.



SOLUCIÓN

a) La orientación del sólido 1 viene determinada por la del sólido 2 como consecuencia de que entre ambos existe, únicamente, un grado de libertad traslacional, condicionado por la unión prismática entre ambos. Aunque los módulos de las velocidades angulares involucradas en el cambio de orientación del sólido 1 son constantes, no ocurre lo mismo con sus direcciones. En efecto, la existencia de la velocidad angular ω_3 , en torno al eje vertical, hace que la velocidad angular ω_2 no sea constante en dirección. La velocidad angular absoluta del sólido 1, que es idéntica a la de 2, será

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

Para expresar dicho vector, se requerirá una base de proyección. Puede elegirse una base solidaria del cuerpo 2; el eje x puede tener la dirección del sólido 1 y el sentido hacia el punto A; el eje y tendrá la dirección del eje OF y sentido de O a F; el tercer eje será ortogonal a los otros dos y su sentido será tal que defina, junto con ellos, un triedro directo.

Una vez adoptada la base de proyección la velocidad angular del sólido 1 se podrá expresar como:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_3 \operatorname{sen}\theta \\ \omega_2 \\ \omega_3 \cos\theta \end{bmatrix}$$

Es evidente, observando la figura, que $\dot{\theta} = -\omega_2$. La expresión de la aceleración angular podrá deducirse, directamente, derivando la expresión de la velocidad,

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \begin{bmatrix} \omega_3\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ -\omega_3\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_2\omega_3\cos\theta \\ 0 \\ \omega_2\omega_3\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

b) Para determinar la velocidad lineal absoluta del punto A en el instante $\theta = 0$, podrá hacerse por composición de movimientos, utilizando una referencia móvil solidaria del cuerpo 2, de modo que

$$\vec{v}_A = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$

donde la velocidad de arrastre será la velocidad del punto A, suponiendo que dicho punto es solidario de la referencia móvil, es decir:

$$\vec{v}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 h \\ \omega_3 d \\ -\omega_2 d \end{bmatrix}$$

La velocidad relativa es la que tiene el punto A respecto del sólido 2, es decir la velocidad con que sale de su interior:

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de manera que

$$\vec{v}_A = \begin{bmatrix} \omega_2 h + v \\ \omega_3 d \\ -\omega_2 d \end{bmatrix}$$

c) Para determinar la aceleración absoluta del punto A en un instante determinado, lo más sencillo es utilizar nuevamente la composición de movimientos, con el cuerpo 2 como referencia móvil. Al no tener que aplicar el operador derivada, se puede trabajar en la posición particular deseada. La aceleración será:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

La aceleración relativa será nula dado que la velocidad con que se mueve el vástago 1 respecto de 2 es constante y vale v.

La aceleración de arrastre, en función de su definición, es la aceleración que tendría el punto A si se moviera solidariamente con el sistema móvil, en consecuencia:

$$\vec{a}_a = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OA}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 d - \omega_3^2 d \\ 2\omega_2 \omega_3 h \\ -\omega_2^2 h \end{bmatrix}$$

La aceleración de Coriolis del punto A será

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega_3 v \\ -2\omega_2 v \end{bmatrix}$$

Sumando las tres componentes resultará

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} -\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) d \\ 2\omega_3 \left(v + \omega_2 h\right) \\ -\omega_2 \left(2v + \omega_2 h\right) \end{bmatrix}$$

d) Para determinar el eje instantáneo de rotación del sólido 2 hay que observar que existe un punto de velocidad nula, el punto O. En consecuencia el eje instantáneo de rotación pasará por este punto y tendrá la dirección de la velocidad angular. En el instante $\theta = 0$, si $\omega_2 = \omega_3$, la velocidad angular absoluta del sólido 2 tendrá la dirección de la bisectriz del ángulo Oyz, en consecuencia:

$$X = 0$$
$$Z = Y$$

4.- El motor de la figura acciona, con velocidad angular ω_O constante, el árbol vertical solidario de las dos ruedas dentadas que engranan con los piñones C' y A', que a su vez mueven el resto del dispositivo. Los piñones C y C' son solidarios, y los piñones A y A' también son solidarios entre sí.

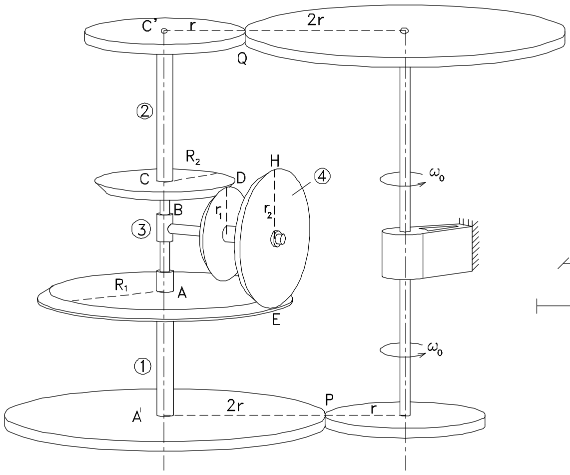
Los piñones cónicos de radios r_1 y r_2 están acoplados rígidamente (satélite) y están montados libremente sobre el árbol horizontal (manivela) que pasa por B. La manivela puede girar alrededor del eje vertical. Además, y tal como se indica en la figura, el piñón C engrana con el de radio r_1 , y el A con el de radio r_2 .

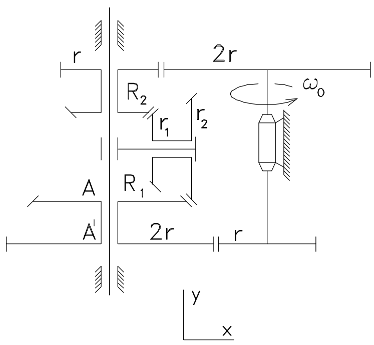
Determinar, utilizando la base de proyección indicada:

a) Velocidad angular absoluta de la manivela.

b) Aceleración, relativa a la manivela, del punto H en el instante de la figura.

c) Aceleración angular absoluta del satélite.





SOLUCIÓN

Utilizaremos como base de proyección la x, y, z, con x en la dirección del eje de la manivela y el eje y vertical.

a) Determinemos previamente las velocidades angulares de los sólidos 1 y 2. La condición de no deslizamiento (igualdad de velocidades lineales) en los contactos P y Q da inmediatamente:

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{j}, \qquad \text{con} \quad \omega_1 = \frac{-\omega_0}{2}$$
$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{j}, \qquad \text{con} \quad \omega_2 = -2\omega_0$$

Por comodidad dejaremos para el final la substitución de los valores de ω_1 y ω_2 que acabamos de encontrar. Llamando:

$$\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{j} = \text{vel. ang. absoluta de } 3$$
$$\vec{p} = p\,\vec{i} = \text{vel. ang. de 4 respecto 3}$$

tenemos que la velocidad angular absoluta $\vec{\omega}_4$ del satélite será

$$\vec{\omega}_4 = \vec{p} + \vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} p \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

donde deberemos determinar las incógnitas p y ω_3. Para ello es importante observar que el movimiento se transmite al satélite 4 (y en consecuencia a la manivela 3) por los contactos en D y E. Podemos determinar la velocidad angular de 4 conociendo las velocidades lineales de tres de sus puntos no alineados (B_4 que es fijo y , precisamente, E_4 y D_4). Veámoslo.

La velocidad del punto D del sólido 2 y la del D del sólido 4, aplicando la fórmula de velocidades para un sólido, serán:

$$\vec{v}_{D_4} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_4 \times \overrightarrow{BD} = \begin{bmatrix} p \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ pr_1 - \omega_3 R_2 \end{bmatrix} \quad , \ \vec{v}_{D_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 R_2 \end{bmatrix}$$

donde la velocidad de B es nula por ser B un punto fijo. Igualando ambas velocidades (condición de no deslizamiento) se obtendrá la ecuación:

$$-\omega_2 R_2 = pr_1 - \omega_3 R_2 \qquad (2)$$

Del mismo modo, las velocidades del punto E del sólido 1 y del E del sólido 4, aplicando la fórmula de velocidades para un sólido, serán:

$$\vec{v}_{E_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 R_1 \end{bmatrix} , \qquad \vec{v}_{E_4} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_4 \times \overrightarrow{BE} = \begin{bmatrix} p \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1 \\ -r_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pr_2 - \omega_3 R_1 \end{bmatrix}$$

La condición de no deslizamiento en E impone la igualdad de ambas velocidades, con ello se obtiene la ecuación:

$$-\omega_1 R_1 = -pr_2 - \omega_3 R_1 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3) se obtienen los siguientes valores para p y ω_3:

$$p = \frac{R_1 R_2}{R_1 r_1 + R_2 r_2}\left(\omega_1 - \omega_2\right), \qquad \omega_3 = \frac{R_1 r_1 \omega_1 + R_2 r_2 \omega_2}{R_1 r_1 + R_2 r_2} \qquad (4)$$

Podemos concluir, por tanto, que la velocidad angular absoluta de la manivela es

$$\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{j}$$

con ω_3 dado por (4).

b) Como ω_0 es constante, también lo serán ω_1, ω_2, ω_3 y p en virtud de los resultados anteriores. Por otra parte, para el observador de la manivela, el punto H describe una circunferencia de radio r_2 con velocidad angular p constante. Por tanto, la aceleración de H respecto la manivela sólo tendrá aceleración normal y valdrá:

$$\vec{a}_H^{\,r} = -p^2 r_2 \vec{j}$$

c) La expresión de la velocidad angular $\vec{\omega}_4$ dada en (1) con los valores de sus componentes determinados por (4) corresponde a un instante genérico, en el supuesto que la base de proyección sea *solidaria del plano vertical BDE*, o sea, de la manivela 3 (puesto que en dicho plano BDE se mantienen siempre las relaciones geométricas y cinemáticas que hemos deducido). Por tanto, la aceleración angular del satélite $\vec{\alpha}_4$ se obtendrá derivando en base móvil, con

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\omega}_3$$

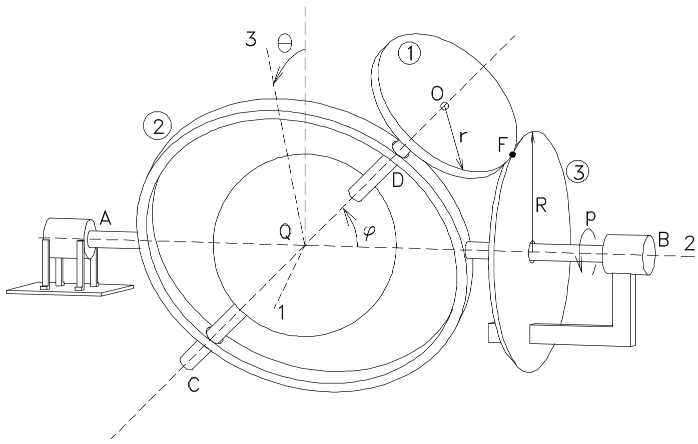
Se obtiene (teniendo en cuenta que en el caso presente la derivada en la base móvil es nula por la constancia de ω_o) el resultado siguiente:

$$\vec{\alpha}_4 = \left.\frac{d\vec{\omega}_4}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega_3 p \vec{k}$$

con los valores de p y ω_3 dados por (4).

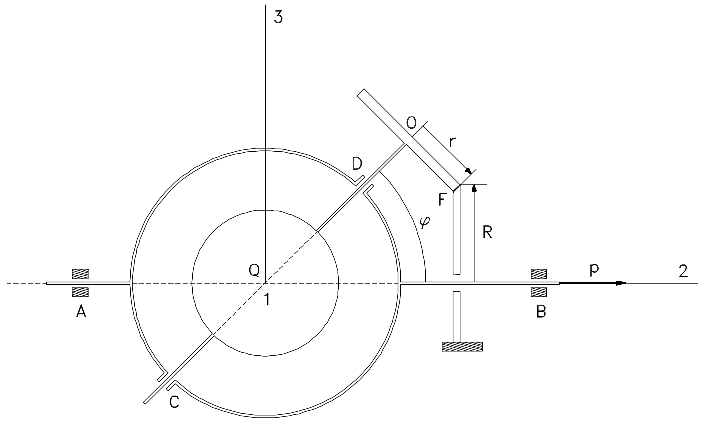
5.- Una trituradora está compuesta de una esfera hueca solidaria de un eje CO, en cuyo extremo se ha fijado la rueda dentada 1 de radio r. El eje CO está montado entre cojinetes en el anillo 2, que es solidario, a su vez, del eje AB que *pasa a través* de la rueda dentada 3, de radio R, que está fija a la bancada. El anillo 2 gira con velocidad angular constante p conocida. Determinar, utilizando la base de proyección de la figura:

a) Velocidad angular de la esfera y axoides.
b) Aceleración angular de la esfera.
c) Aceleración del punto F del engranaje 1 utilizando el método más breve.



SOLUCIÓN

a) Se tomará como base de proyección la de ejes 1,2,3 solidaria del anillo 2 y moviéndose con su misma velocidad. Como consecuencia de la elección realizada, la base cambiará de orientación con el tiempo y estará, por tanto, animada de una velocidad angular distinta de la de la esfera hueca. En un instante cualquiera, el esquema del dispositivo es el que se ilustra en la figura siguiente:



Es fácil advertir que la velocidad angular absoluta del tambor esférico consta de dos componentes, la de arrastre con el árbol AB, a la que se ha llamado $\vec{p}$, y la de rotación entorno del eje CO, que puede denominarse $\vec{\omega}_1$.

En estas condiciones la proyección de la velocidad angular del tambor sobre la base adoptada será:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ p + \omega_1 \cos\varphi \\ \omega_1 \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

donde la incógnita es el valor de ω_1.

Para poder determinar el valor de esta velocidad angular se deberá utilizar la condición de ligadura que establece el hecho de que el punto de contacto entre las ruedas 1 y 3 sea un punto de contacto sin deslizamiento. Al ser la rueda 3 una rueda fija, dicha condición permite afirmar que la velocidad del punto de contacto F será nula. Ello permite establecer, entre otras, la conclusión de que, puesto que el punto Q es la intersección de los ejes físicos de rotación y, por tanto, otro punto de velocidad nula, en este dispositivo el eje instantáneo de rotación es la recta QF. El axoide fijo es una superficie cónica generada por la recta que pasa por Q y se apoya sobre el disco 3. El axoide móvil es otra superficie cónica generada por la recta que pasa por Q y se apoya en la periferia de la rueda 1.

Para cuantificar el valor de la componente desconocida se recurrirá, tal como se ha indicado, a la condición cinemática del contacto sin deslizamiento del punto F:

$$\vec{v}_F = 0$$

La velocidad del punto F puede establecerse a partir de la velocidad del punto O, que pertenece al eje de rotación y por tanto no está afectado por $\vec{\omega}_1$, sino que solamente lo está por la componente $\vec{p}$. En estas condiciones:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OF}$$

la velocidad del punto O es:

$$\vec{v}_O = \begin{bmatrix} p\left(R + r\cos\varphi\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo que sustituido en la anterior ecuación, considerando la condición de ligadura cinemática, permite llegar a la expresión:

$$\vec{v}_F = 0 = \begin{bmatrix} p\left(R + r\cos\varphi\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p + \omega_1 \cos\varphi \\ \omega_1 \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \operatorname{sen}\varphi \\ -r\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\left(R + r\cos\varphi\right) - p\, r\cos\varphi - \omega_1 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta ecuación vectorial puede deducirse la correspondiente ecuación escalar que permite obtener el valor de la componente desconocida de la velocidad angular:

$$pR - \omega_1 r = 0 \qquad \Rightarrow \ \omega_1 = p\frac{R}{r}$$

De modo que la velocidad angular absoluta del tambor esférico será:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ p\left(1 + \frac{R}{r}\cos\varphi\right) \\ p\frac{R}{r}\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

b) Para hallar la aceleración angular de la esfera hueca, será necesario realizar dos consideraciones previas respecto de la componente $\vec{\omega}_1$ de la velocidad angular: Por una parte, que su módulo es constante al serlo el valor de p, R y r; por otra parte, y referido a la dirección, ésta es variable con el tiempo al ser modificada por la existencia de p. Para hallar la aceleración angular, por tanto, se deberá utilizar la expresión de la derivación en base móvil:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\omega}_1\cos\varphi \\ \dot{\omega}_1\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ p + \omega_1\cos\varphi \\ \omega_1\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\ \omega_1\operatorname{sen}\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo que, finalmente, lleva a un vector aceleración:

$$\dot{\vec{\Omega}} = p^2\frac{R}{r}\operatorname{sen}\varphi\ \vec{i}$$

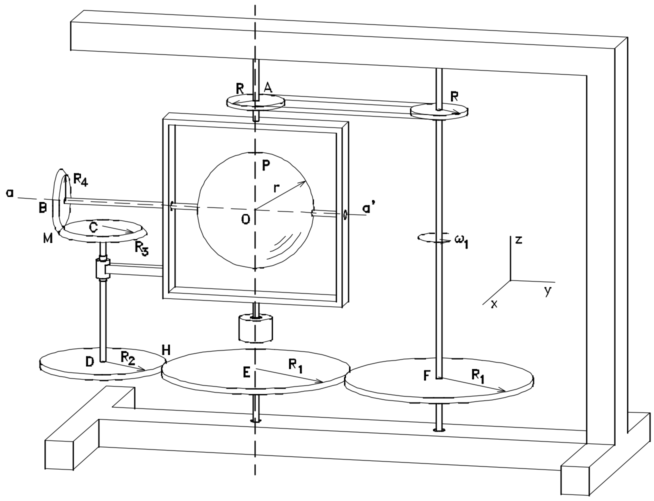
c) El punto F es el punto de contacto entre el sólido 1 y el sólido 3. Al estar este último fijado al suelo, la formula de la aceleración del punto de contacto se ve simplificada a

$$\vec{a}_F = -\vec{\Omega} \times \vec{V}_{SF}$$

siendo Ω la velocidad angular absoluta de la rueda 1 y $\vec{V}_{SF}$ la velocidad de sucesión del punto de contacto. Analizando la figura, se observa que el punto de contacto entre las dos ruedas siempre está contenido en el plano formado por los puntos A, B y O, plano que se mueve con velocidad angular $\vec{p}$. De este modo, el resultado es:

$$\vec{a}_F = -\begin{bmatrix} 0 \\ p + \omega_1\cos\varphi \\ \omega_1\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p\,R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p\ \omega_1 R\operatorname{sen}\varphi \\ -p^2R - p\ \omega_1 R\cos\varphi \end{bmatrix}$$

6.- El dispositivo que se ilustra consta de un marco cuadrado, que gira accionado por la polea de centro A solidaria del mismo y enlazada con el eje motor a través de una correa. En dicho marco, se halla montado un bombo esférico que puede girar, respecto del marco, en torno al eje a-a'. El eje del bombo está unido a una rueda dentada, de centro B y radio R_4, que engrana con el piñón de centro C . El eje de dicho piñón pasa por un cojinete solidario del marco y en su extremo opuesto está montada la rueda dentada con centro en D y radio R_2. Esta última engrana con la rueda de centro E que es accionada por la rueda con centro en F y que gira con el eje motor. Determinar:



a) Velocidad angular del tambor esférico.
b) Aceleración angular del tambor esférico.
c) Aceleración lineal del punto P, que en este instante ocupa la posición más alta del tambor.

SOLUCIÓN

A efectos del trabajo con las magnitudes vectoriales, se elegirá una base x,y,z solidaria del marco cuadrado que se utilizará como base de proyección para todo el problema. Dicha base, como es obvio, se mueve con la misma velocidad angular que el citado marco cuadrado, es decir ω_1, en la dirección del eje z.

a) Dado que la rueda de centro E gira con la misma velocidad angular que la rueda motriz F, como consecuencia de ser del mismo diámetro, podemos afirmar que la velocidad del punto H, que pertenece a dicha rueda E, valdrá:

$$\vec{v}_H = -\omega_1 R_1 \vec{i}$$

El punto H pertenece también a la rueda D, y en consecuencia su velocidad absoluta podrá determinarse a través de la ecuación que relaciona las velocidades de dos puntos de un mismo sólido y podrá escribirse:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_D + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{DH}$$

donde $\vec{\omega}_3$ es la velocidad angular absoluta del disco D y $\vec{v}_D$ es la velocidad absoluta de su centro. Dado que el centro del disco es arrastrado, junto con todo el eje vertical DC por el marco cuadrado, su velocidad es:

$$\vec{v}_D = \omega_1 (R_1 + R_2) \vec{i}$$

dado que la distancia entre el eje de giro del marco y el eje DC es la suma de los dos radios R_1 y R_2. El vector $\overrightarrow{DH}$ es, por su parte, un vector de módulo R_2 y de dirección $\vec{j}$, de modo que sustituyendo los valores de cada uno de los vectores conocidos, quedará:

$$-\omega_1 R_1 \vec{i} = \omega_1 (R_1 + R_2) \vec{i} + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{DH} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_3 R_2 \vec{i} = \omega_1 (2R_1 + R_2) \vec{i}$$

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{(2R_1 + R_2)}{R_2}$$

Esta velocidad angular que se acaba de encontrar es también la de la rueda C, que es solidaria de la D. El hecho de conocer este dato permite abordar el problema del disco B, que es solidario del tambor esférico y, por consiguiente, está animado de su misma velocidad angular. Para ello se trabajara con el punto M, que pertenece simultáneamente a los discos C y B y cuya velocidad absoluta ha de ser la misma, sea cual sea el camino que se elija para determinarla.

Por el hecho de ser el disco B solidario del tambor esférico, la velocidad del punto M será:

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega}_T \times \overrightarrow{OM}$$

La velocidad angular $\vec{\Omega}_T$ del tambor (y disco B) no tiene componente en la dirección del eje x, por cuanto el tambor tiene impedido dicho movimiento respecto del marco debido a la presencia del eje horizontal; en la dirección del eje z únicamente existe la velocidad angular ω_1 suministrada por la polea motriz; mientras que en la dirección del eje y horizontal no se conoce el valor de la velocidad angular. En consecuencia:

$$\vec{v}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -(R_1 + R_2 + R_3) \\ -R_4 \end{bmatrix} = \left[-\Omega_y R_4 + (R_1 + R_2 + R_3)\omega_1\right] \vec{i}$$

El punto material M, por el hecho de ser un punto de contacto sin deslizamiento, debe tener la misma velocidad absoluta sea cual sea el sólido al que pertenezca y, por tanto, como punto material del disco C, su velocidad se podrá calcular sumando a la velocidad absoluta del centro del disco - que es la misma que para el punto D por hallarse en el mismo eje - el producto de la velocidad angular absoluta del disco C por el vector CM.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{CM} = \omega_1 (R_1 + R_2) \vec{i} + \omega_3 R_3 \vec{i}$$

Igualando ahora las dos últimas expresiones que se han encontrado para la velocidad del punto M, y sustituyendo el valor hallado anteriormente para ω_3, se podrá determinar el valor de la única componente desconocida de la velocidad angular absoluta del tambor esférico. Obsérvese que, como cabía esperar, en ambas expresiones sólo se ha obtenido velocidad del punto M en la dirección x. En estas condiciones resultará:

$$\Omega_y = -\omega_1 \frac{2R_1R_3}{R_2R_4} \qquad (1)$$

Una vez encontrada la componente desconocida de la velocidad angular, ésta quedará:

$$\vec{\Omega}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1 \dfrac{2R_1R_3}{R_2R_4} \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

b) Para hallar la aceleración angular del tambor se deberá emplear la fórmula de derivación en base móvil; téngase en consideración que se ha determinado una velocidad angular absoluta pero se ha expresado en una base que esta girando con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ y por tanto:

$$\vec{\alpha}_T = \left.\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1\Omega_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Para determinar el valor de la aceleración del punto P bastará aplicar la ecuación que relaciona las aceleraciones de dos puntos cualesquiera de un sólido rígido:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\Omega}_T \times (\vec{\Omega}_T \times \overrightarrow{OP}) + \vec{\alpha}_T \times \overrightarrow{OP}$$

Es evidente que la elección del punto O como punto base para realizar el cálculo no ha sido arbitraria, ya que por encontrarse en la intersección de los ejes físicos de giro del tambor esférico, se trata de un punto cuya velocidad y aceleración es nula; ello simplifica la aplicación de la citada expresión que relaciona las aceleraciones de dos puntos del sólido.

Desarrollando la última expresión, quedará:

$$\vec{a}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} -\omega_1\Omega_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega_1\Omega_y R \\ -\Omega_y^2 R \end{bmatrix}$$

donde Ω_y viene dado por la expresión (1).

7.- Los tres sólidos de la figura son engranajes cuyo dentado no se muestra. El piñón cónico 2 gira con ω constante conocida, y el piñón 3 tiene Ω constante también conocida. Determinar:

a) Velocidad angular del piñón cónico 1.

b) Aceleración angular de dicho piñón.

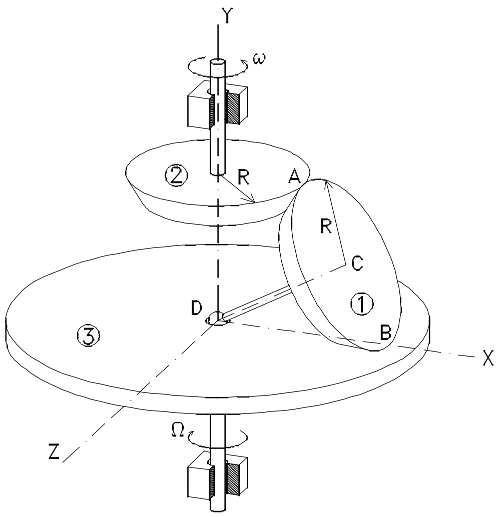


Figura 1

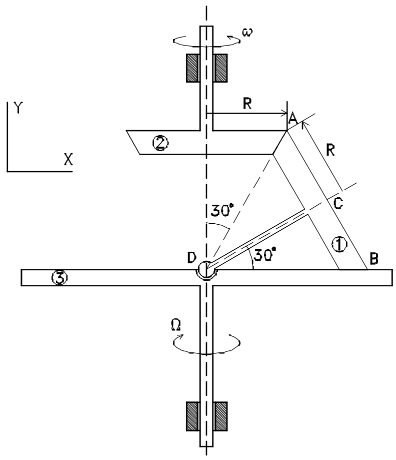


Figura 2

SOLUCIÓN

a) Se trata de determinar la velocidad angular $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ del sólido 1 cuyas tres componentes son desconocidas. Esta velocidad se podrá hallar si encontramos las velocidades lineales de tres puntos no alineados de dicho sólido. En el caso actual utilizaremos los puntos A, B y D del piñón 1, puesto que sus velocidades son fácilmente determinables.

Como el punto D es fijo, su velocidad es nula. Por otra parte, es inmediato que

$$\vec{v}_{A_2} = -\omega R \vec{k} \qquad (1)$$

$$\vec{v}_{B_3} = 2\Omega R \vec{k} \qquad (2)$$

Considerando el piñón 1 y utilizando la fórmula de velocidades para un sólido, tendremos

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R \\ R \operatorname{cotg} 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_z R\sqrt{3} \\ \omega_z R \\ \omega_x R\sqrt{3} - \omega_y R \end{bmatrix} \qquad (3)$$

y análogamente

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DB} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z 2R \\ -\omega_y 2R \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Como no hay deslizamiento en el contacto A, se cumple

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2}$$

Por lo tanto, igualando (3) y (1) se obtiene

$$\begin{aligned} &\omega_z = 0 \\ &\omega_x R\sqrt{3} - \omega_y R = -\omega R \qquad (5) \end{aligned}$$

Vamos a proceder igualmente en el contacto sin deslizamiento B. Es decir

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_{B_3}$$

Igualando (2) y (4) hallamos

$$-\omega_y 2R = 2\Omega R \qquad (6)$$

Así pues, para hallar las componentes de $\vec{\omega}$ basta resolver el sistema formado por las ecuaciones (5) y (6). Una vez resuelto se obtiene

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Omega + \omega)/\sqrt{3} \\ -\Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) La expresión que acabamos de obtener para $\vec{\omega}$ es genérica si suponemos la base de proyección X, Y, Z solidaria del plano vertical que pasa por el eje DC. En efecto, en este supuesto, *en cualquier instante* se cumple que la sección del mecanismo por el plano considerado es totalmente análoga a la de la figura 2, y en consecuencia subsisten las mismas relaciones. En definitiva, se mantiene el mismo valor de $\vec{\omega}$ obtenido en el apartado **a)**.

Como $\vec{\omega}$ está expresado en la base X, Y, Z que está en movimiento, la aceleración angular $\vec{\alpha}$ se calculará utilizando la fórmula de derivación en base móvil, es decir

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\omega} \qquad (7)$$

El punto interesante está en la determinación de la velocidad angular $\vec{\Omega}_b$ de la base. Es evidente que esta velocidad angular coincide con la velocidad angular $\vec{\omega}_c$ del punto C sobre su trayectoria, que deduciremos fácilmente del valor de la velocidad lineal de C. Para hallar esta última aplicamos de nuevo la fórmula de velocidades para un sólido

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} -(\Omega+\omega)/\sqrt{3} \\ -\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2R\cos^2 30^\circ \\ 2R\cos 30^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2\Omega-\omega)\dfrac{R}{2} \end{bmatrix}$$

por tanto

$$v_C = \frac{(2\Omega-\omega)R}{2}$$

Como el punto C describe una circunferencia alrededor del eje Y, pero en el sentido de rotación negativo de dicho eje (puesto que v_C tiene únicamente componente Z con sentido positivo), tendremos

$$\vec{\omega}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_C \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad \omega_C = -\frac{v_C}{\overline{DC}\cos 30^\circ} = \frac{\omega - 2\Omega}{3}$$

Concluimos, pues, que la velocidad angular de la base móvil que queríamos hallar tiene el valor

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\omega}_C = \frac{\omega-2\Omega}{3}\vec{j}$$

Para terminar basta aplicar la fórmula (7) y así obtenemos, para la aceleración angular deseada del piñón:

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_C \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix} = -\,\omega_C\,\omega_x\,\vec{k} = \frac{(\omega+\Omega)\,(\omega-2\Omega)}{3\sqrt{3}}\vec{k}$$

8.- La figura muestra uno de los mecanismos que se hallan en un telar. El movimiento se origina en el disco 1, que se mueve en torno a O_1 con ω y α conocidas. El movimiento se transmite por la barra 2 al cuerpo 3, que gira en torno a O_3. El cuerpo 3 arrastra el disco 4 de radio r_0 que gira alrededor de O_4 con velocidad angu-lar ω_o. Esta ultima velocidad angular mantiene para cualquier instante la relación $\omega_0 = k\,\omega_3$ (por la acción de un dispositivo no mostrado), donde k es una constante conocida. Por último, el disco 4 mueve el disco 6 mediante una correa que no desliza. Se pide:

a) Calcular la aceleración angular del cuerpo 3 .

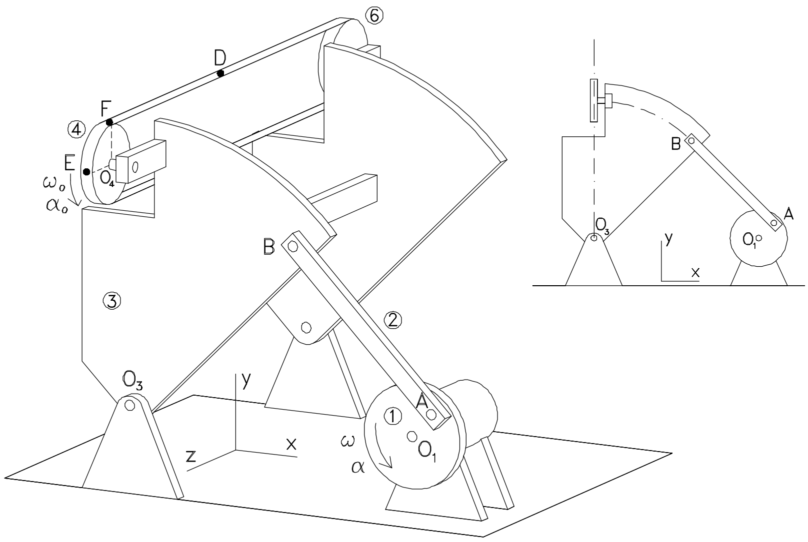
b) Aceleración del punto D de la correa.

c) Aceleración del punto E del disco 4.

d) Velocidad del punto D de la correa respecto del disco 4.

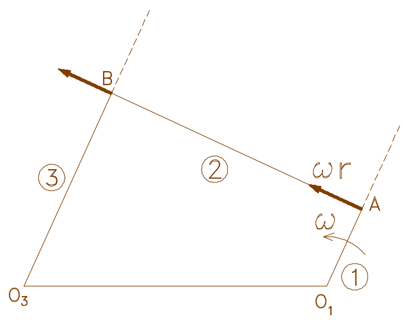
(Datos: ω y α del cuerpo 1, $O_1A = r$, $O_3B = R$, $AB = \ell$, $FD = d$.

Se sabe que en el instante considerado las líneas O_1A O_3B son paralelas y AB es perpendicular a O_1A)

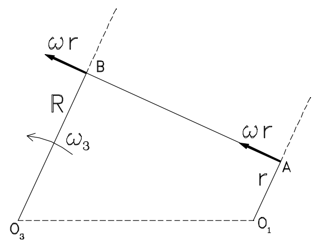


SOLUCIÓN

a) La transmisión del movimiento desde el disco 1 hasta el sólido 3 se realiza en el plano XY, por lo que resulta ventajoso trabajar este apartado según los criterios de la cinemática plana. El mecanismo formado por los cuerpos 1, 2, 3 y el suelo es en realidad un cuadrilátero articulado. Para hallar la aceleración angular del sólido 3 es de menester determinar antes las velocidades angulares de 2 y 3. Conocidos los datos para el disco 1, se procede a determinar el CIR de la barra 2 según se indica en la figura 1, donde se comprueba que las dos rectas formadas son paralelas y, en consecuencia, la barra 2 presenta en este momento un movimiento de traslación instantánea, con ω_2 nula pero α_2, como se verá, diferente de cero. En este caso, todos los puntos del sólido presentan la misma velocidad, por lo que



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$



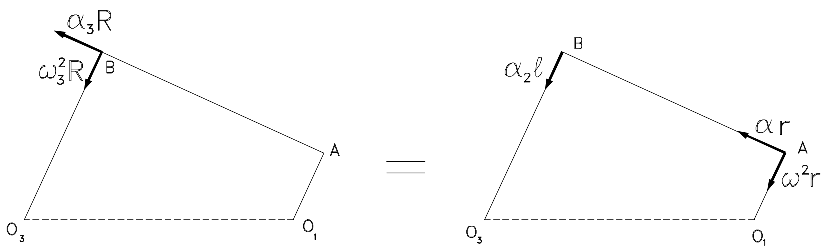
y entonces ω_3 resulta

$$\omega_3 = \frac{\omega r}{R}$$

Para hallar la aceleración angular del sólido 3, se relacionan dos puntos de la barra 2 con la expresión de la aceleración de un punto del sólido rígido, utilizando la nomenclatura propia de la cinemática plana. Los puntos a relacionar deben ser aquéllos de los que se conozca más datos a nivel cinemático; en este caso, los puntos A y B.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,t}_{BA}$$

representando los vectores gráficamente



que ahora se proyectan en la dirección de la recta AB, para determinar directamente la incógnita deseada que es α_3:

$$\alpha_3 R = \alpha r$$

y la solución

$$\vec{\alpha}_3 = \frac{\alpha r}{R}\,\vec{k}$$

b) En este caso, es conveniente observar que el punto D de la correa describe un movimiento rectilíneo respecto al sólido 3, por lo que resulta ventajoso plantear el problema como una composición de movimientos, siendo la referencia móvil el cuerpo 3 y la referencia fija el suelo, al ser requerida la aceleración absoluta del punto D.

Se podría considerar también la posibilidad de utilizar como referencia móvil el disco 4, sin embargo no es evidente el movimiento relativo que describe el punto D respecto a este disco, por lo que esta opción no es conveniente.

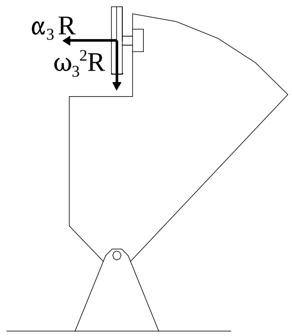
La aceleración del punto D descrita como una composición de movimientos es

$$\vec{a}_D = \vec{a}_a + \vec{a}_c + \vec{a}_r$$

donde la aceleración de arrastre es

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O_4} + \vec{\omega}_3 \times [\vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{O_4D}] + \vec{\alpha}_3 \times \overrightarrow{O_4D}$$

siendo la velocidad angular y aceleración angular las correspondientes a la referencia móvil 3. O_4 es un punto de la referencia móvil 3 de aceleración conocida, ya que describe una trayectoria circular de radio R a velocidad angular ω_3, por lo que su aceleración es:



Cualquier otro punto sería válido siempre que perteneciera al cuerpo 3 y pudiera determinarse su distancia con D. En el caso presentado, utilizando la base x y z del enunciado y sustituyendo, se halla:

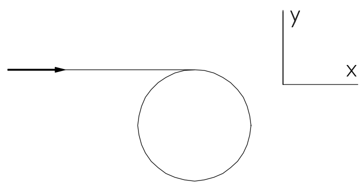
$$\vec{a}_a = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 (R + r_0) \\ -\omega_3^2 (R + r_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar los términos de Coriolis y relativo es necesario analizar el movimiento relativo entre el punto D y el cuerpo 3, que, como se ha comentado, es de movimiento rectilíneo. En este caso, la velocidad y aceleración relativa son

$$\vec{a}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_0 r_0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix}$$

$v_r = \omega_0 r_0$

$\alpha_r = \alpha_0 r_0$



tal como se deduce de la figura adjunta.

Hay que recordar que el módulo de ω_O es $k\omega_3$ y, al existir α_3 , ω_O no es constante y $\alpha_o = k\, \alpha_3$. La acelera-ción de Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix}$$

donde la velocidad angular es siempre la de la referencia móvil. En este caso, los dos términos son paralelos y la aceleración de Coriolis nula. El resultado final es

$$\vec{a}_D = \begin{bmatrix} \alpha_3(R + r_0) \\ -\omega_3^2(R + r_0) \\ k\alpha_3 r_0 \end{bmatrix}$$

c) El punto E pertenece al disco 4, así que se puede determinar su aceleración mediante la fórmula de aceleraciones del sólido:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_{O_4} + \vec{\Omega}_4 \times [\vec{\Omega}_4 \times \overrightarrow{O_4E}] + \dot{\vec{\Omega}}_4 \times \overrightarrow{O_4E} \qquad (1)$$

en la que es necesario conocer la aceleración de otro punto del mismo sólido. En este caso el punto O_4 , que se mueve con el sólido 4 igual que el punto O_4 del sólido 3, por lo que su aceleración es:

$$\vec{a}_{O_4} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix}$$

No vale cualquier punto de aceleración conocida; el punto escogido debe pertenecer al sólido que se esté analizando y, por ejemplo O_3 , de aceleración nula, no pertenece al sólido 4, por lo que su utilización sería errónea en este caso.

El disco se mueve con velocidad angular $\vec{\omega}_0$ respecto al sólido 3, que a su vez se mueve con velocidad angular $\vec{\omega}_3$ determinada anteriormente. De esta manera, la velocidad angular absoluta del disco 4 es la suma de las dos citadas

$$\vec{\Omega}_4 = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

y hay que calcular su aceleración angular aplicando el operador derivada en base móvil, ya que la componente $\vec{\omega}_0$ cambia de dirección debido al arrastre de $\vec{\omega}_3$. En estas condiciones:

$$\dot{\vec{\Omega}}_4 = \left.\frac{d\vec{\Omega}_4}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \omega_3\omega_0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión (1)

$$\vec{a}_E = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \omega_3\omega_0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix}$$

obteniéndose el resultado

$$\vec{a}_E = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R + 2\omega_3\omega_0 r_0 \\ -\omega_3^2 R - \alpha_0 r_0 \\ -\omega_0^2 r_0 \end{bmatrix}$$

El problema se puede resolver mediante composición de movimientos, utilizando como referencia móvil el sólido 3 (el movimiento relativo es fácil de calcular) y como referencia fija el suelo (se pide magnitud absoluta).

d) El movimiento relativo que describe el punto D respecto del disco 4 no es evidente; no es un movimiento rectilíneo; éste es relativo al chasis 3, como se ha comentado. Ante esta circunstancia, se hace necesario el cálculo analítico de esta velocidad relativa.

Se debe determinar un movimiento relativo respecto del sólido 4; el planteamiento del problema requiere del uso de composición de movimientos utilizando como referencia móvil el sólido 4

$$\vec{v}_D = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$

donde $\vec{v}_D$ es la velocidad absoluta y $\vec{v}_r$ es la velocidad de este punto D respecto a la referencia móvil 4. El término de arrastre es:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{O_4} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_4 D} \qquad (2)$$

en la que se requiere un punto de velocidad absoluta conocida de la referencia móvil, por ejemplo O_4, mientras que la velocidad angular es la absoluta de la referencia móvil 4.

Sin embargo, se observa que el movimiento relativo entre el punto D y el sólido 4 es absolutamente independiente del movimiento que describa el sólido 3, que arrastra a ambos. Ante este hecho, resulta conveniente para simplificar el problema considerar el chasis 3 como referencia fija y no el suelo, como es habitual, por lo que, por ejemplo, la velocidad absoluta del punto O_4 pasa a ser cero, y el mecanismo resultante de disco y correa es en realidad un problema de cinemática plana en el plano yz.

La expresión que se debe resolver sigue siendo (2), donde se sustituyen los valores teniendo en cuenta el sistema de referencias adoptado:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{O_4} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_4D} + \vec{v}_r$$

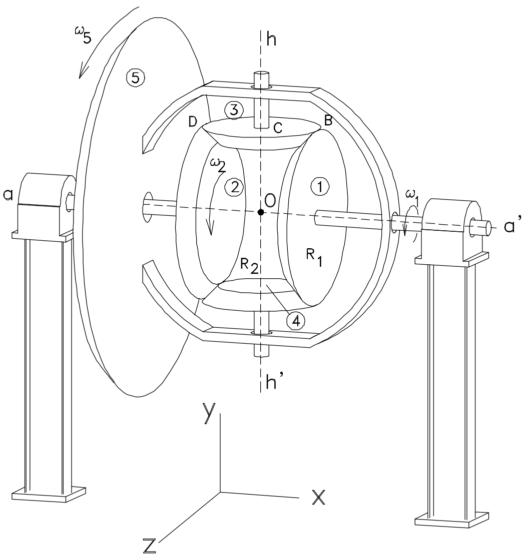
$$\vec{v}_r = \vec{v}_D - \vec{v}_{O_4} - [\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_4D}]$$

y el resultado es:

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si en lugar de escoger el sólido 3 como referencia fijam, se escoge el suelo, el planteamiento es del todo correcto y se debe llegar al mismo resultado, pero si se comprueba, se constatará una mayor dificultad de operaciones al aparecer el movimiento debido a $\vec{\omega}_3$.

9.- La figura muestra el esquema de un diferencial de coche montado sobre una bancada. Este mecanismo se utiliza para que las ruedas motrices rueden a la velocidad adecuada, distinta para cada rueda, cuando el vehículo toma una curva, evitando así que una de las ruedas tenga que deslizar. El diferencial consta de la caja 5 que gira en torno al eje a-a' con velocidad angular ω_5 desconocida; en esta caja están montados dos piñones planetarios 1 y 2 de igual radio R_1, que también pueden girar en torno de a-a', independientemente de la caja 5, y que están acoplados a los semiejes de las ruedas motrices. Los piñones 3 y 4 de radio R_2, llamados satélites, pueden girar independientemente uno del otro alrededor del eje h-h' y engranan con los planetarios.



Si los datos de que se dispone son la velocidad angular ω_1 del semieje 1 y la velocidad angular ω_2 del semieje 2, determinar:

a) Velocidad angular absoluta del satélite 3.

b) Aceleración absoluta del punto B del sólido 3.

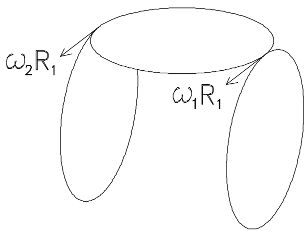
SOLUCIÓN

a) El movimiento del piñón 3 se corresponde con una composición de rotaciones; el piñón es arrastrado por la carcasa 5 a velocidad angular desconocida $\vec{\omega}_5$ alrededor del eje fijo a-a', al mismo tiempo que puede describir una rotación $\vec{\omega}_r$ alrededor del eje móvil h-h'. El cuerpo 3 no puede describir otro movimiento, por lo que su velocidad angular absoluta $\vec{\Omega}_3$ en la base indicada resulta

$$\vec{\Omega}_3 = \vec{\omega}_5 + \vec{\omega}_r = \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde los valores ω_5 y ω_r son desconocidos. Para hallar estos valores es conveniente, en este caso, relacionar tres puntos del sólido de velocidad conocida con la expresión de la velocidad de un punto del sólido rígido. En general, los tres puntos no deben estar alineados. Los puntos del sólido 3 que presentan velocidad conocida son D, B y O. Al ser el punto B en este momento un punto de contacto entre los sólidos 1 y 3, y al ser el movimiento de uno respecto de otro sin deslizamiento, la velocidad del punto B del sólido 1 y la velocidad del punto B del sólido 3 es la misma. De igual manera sucede con el punto D. Por otra parte, $\vec{v}_O = \mathbf{0}$, por ser la intersección de los dos ejes de rotación del piñón 3 y ser en consecuencia un punto fijo. En definitiva:

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_{B_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 R_1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_{D_2} = \vec{v}_{D_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 R_1 \end{bmatrix}$$



Se relacionan los tres puntos, por ejemplo, según:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{OB}$$
$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{OD}$$

Sustituyendo ahora las velocidades descritas anteriormente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_2 \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formándose el sistema de ecuaciones

$$\omega_1 R_1 = \omega_5 R_1 - \omega_r R_2$$
$$\omega_2 R_1 = \omega_5 R_1 + \omega_r R_2$$

y al resolverlo se hallan los valores de ω_5 y ω_r:

$$\omega_5 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$
$$\omega_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

siendo finalmente la velocidad angular absoluta del piñón 3:

$$\vec{\Omega}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot \dfrac{R_1}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En general los tres puntos no deben estar alineados, porque si así fuera, la componente de la velocidad angular en la dirección de la recta formada por los tres puntos podría no ser hallada. Sin embargo, en este caso otro punto de velocidad conocida del sólido 3 es el punto C, que gira alrededor del eje aa' a velocidad angular ω_5. Si se propusiera trabajar con los puntos B, C y D, se podrían formar las relaciones

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{CB}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{CD}$$

Y sustituyendo igual que antes

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_5 R_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_5 R_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se observa ahora que la componente ω_5 de la velocidad angular absoluta $\vec{\Omega}_5$ desaparece al realizar los productos $\vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{CB}$ y $\vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{CD}$, al estar los tres puntos alineados en la dirección de $\vec{\omega}_5$. Sin embargo, al depender v_C de ω_5, este término sigue apareciendo con lo que, finalmente, se puede determinar. En este problema concreto es posible hallar la velocidad angular absoluta relacionando tres puntos alineados, pero hay que recordar que no es el caso general.

Por otra parte, la solución tampoco podía ser hallada utilizando el eje instantáneo de rotación, al disponer de un sólo punto de velocidad nula (C).

b) Como se ha visto anteriormente, al ser el movimiento relativo entre los cuerpos 1 y 3 sin deslizamiento, la velocidad del punto B de contacto de cada uno de los sólidos es la misma. Sin embargo, esto no es cierto a nivel de aceleraciones, por lo que

$$\vec{a}_{B_1} \neq \vec{a}_{B_3}$$

De este modo, resulta necesario calcular directamente la aceleración pedida. El resultado se puede obtener de diferentes modos; se puede resolver mediante una composición de movimientos, o bien mediante la expresión de aceleración de un punto del sólido rígido. La resolución se plantea por el segundo método.

La expresión requiere que se conozca la aceleración de otro punto perteneciente al *mismo sólido*. De todos los puntos utilizados en el apartado **a)**, sólo los puntos C y O presentan aceleración conocida. Se escoge el punto O por ser este un punto fijo, según se ha comentado, y su aceleración entonces nula. La expresión que se debe resolver es

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{\Omega}_3 \times [\vec{\Omega}_3 \times \overrightarrow{OB}] + \dot{\vec{\Omega}}_3 \times \overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

en la que es necesario conocer la aceleración angular del sólido 3. En la expresión hallada para su velocidad angular, se observa que las dos componentes presentan módulo constante, pero la aceleración angular no es nula, dado que existe una variación en la dirección de los vectores que conforman $\vec{\Omega}_3$. Efectivamente, el vector $\vec{\omega}_r$ cambia de orientación por causa del giro de $\vec{\omega}_1$. Para hallar la aceleración angular se emplea el operador derivada en base móvil, recordando que el movimiento de la base debe ser tal que mantenga la expresión de $\vec{\Omega}_3$ genérica para cualquier posición del sistema.

$$\vec{\alpha}_3 = \left.\frac{d\vec{\Omega}_3}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_3$$

Es, pues, necesario que la base de proyección se mueva de tal forma que las componentes de la velocidad angular $\vec{\Omega}_3$ se mantengan siempre igualmente proyectadas en ella. En este caso, sólo la componente ω_r varía con ω_1, por lo que la velocidad angular de la base $\vec{\Omega}_b$, es en este caso $\vec{\omega}_5$. Sustituyendo:

$$\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_5\omega_r \end{bmatrix}$$

Hallada la aceleración angular, se procede a determinar la aceleración del punto B mediante la expresión (1), donde la velocidad y aceleración angular son las absolutas del satélite 3. Es decir:

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_5\omega_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo el resultado

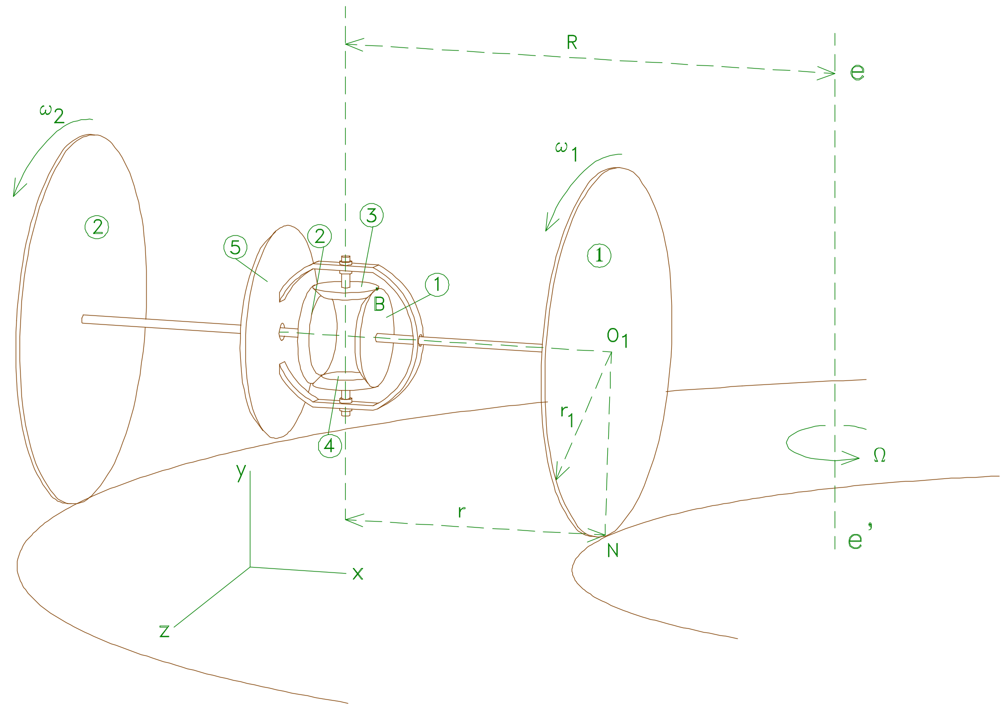
$$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -\omega_r^2 R_2 \\ -\omega_5^2 R_1 + 2\omega_5\omega_r R_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde los valores de ω_5 y ω_r se han obtenido anteriormente.

10.- Supóngase que el diferencial del ejercicio anterior está montado en un coche que está tomando una curva de radio R en torno al eje vertical e-e' con velocidad angular Ω constante y conocida. Las velocidades de rodadura de las ruedas son ω_1 y ω_2 desconocidas y no hay deslizamiento en el contacto con el suelo. Determinar:

a) Valor de ω_1.

b) Aceleración del punto B del planetario 1.



SOLUCIÓN

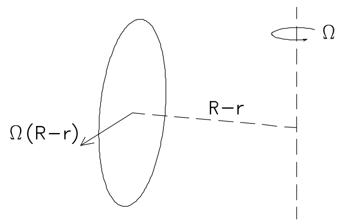
a) El problema presenta el mismo diferencial que en el problema 9, pero ahora montado en un chasis y tomando una curva, por lo que aparece una nueva velocidad angular $\vec{\Omega}$ que arrastra todo el conjunto.

Para solucionar este apartado no es necesario trabajar con el diferencial; como la rueda 1 gira ahora con velocidad angular absoluta $\vec{\Omega}_1$ de valor

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{\omega}_1 + \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplemente relacionando dos puntos de la rueda de velocidad conocida se podrá hallar la componente ω_1 deseada. Los puntos de velocidad conocida son N y O_1. La velocidad del punto N es cero por ser el movimiento de la rueda de rotación sin deslizamiento, por lo que la velocidad del punto N de la rueda es la misma que la velocidad del punto N del suelo, que es cero. Por otra parte el punto O_1 describe una trayectoria circular alrededor del eje e-e' de radio R-r y a velocidad angular **Ω**, por lo que su velocidad es

$$\vec{v}_{O_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega(R-r) \end{bmatrix}$$



Relacionando los dos puntos mediante la expresión

$$\vec{v}_{O_1} = \vec{v}_N + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{NO_1}$$

y sustituyendo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega(R-r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se halla

$$\omega_1 = \frac{\Omega(R-r)}{r_1}$$

b) La aceleración del punto B del planetario 1 se puede hallar por sólido rígido o por composición. Considerando el primer método, es primero necesario conocer otro punto del sólido 1 de aceleración conocida. El punto puede ser por ejemplo O_1, por tener trayectoria conocida, según se ha comentado en el apartado **a)**. La expresión que se debe utilizar para calcular la aceleración del punto B es

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{O_1} + \vec{\Omega}_1 \times [\vec{\Omega}_1 \times \overrightarrow{O_1B}] + \dot{\vec{\Omega}}_1 \times \overrightarrow{O_1B} \qquad (2)$$

Es también necesario calcular la aceleración angular del planetario 1. El movimiento del planetario es ahora diferente del mismo planetario del problema 9, al girar además alrededor del eje e-e' con velocidad angular Ω. Este giro ocasiona un cambio de dirección en el vector $\vec{\omega}_1$. Para hallar esta aceleración angular se deriva la velocidad angular absoluta del sólido 1 en base móvil, siendo $\vec{\Omega}$ la velocidad angular de la base:

$$\dot{\vec{\Omega}}_1 = \left.\frac{d\vec{\Omega}_1}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1\Omega \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (2) la velocidad angular absoluta del planetario 1 y su aceleración angular que se acaba de hallar, se tendrá:

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} \Omega^2(R-r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1\Omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r \\ R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuyo resultado es:

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} \Omega^2 R + 2\Omega\omega_1 R_1 \\ -\omega_1^2 R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

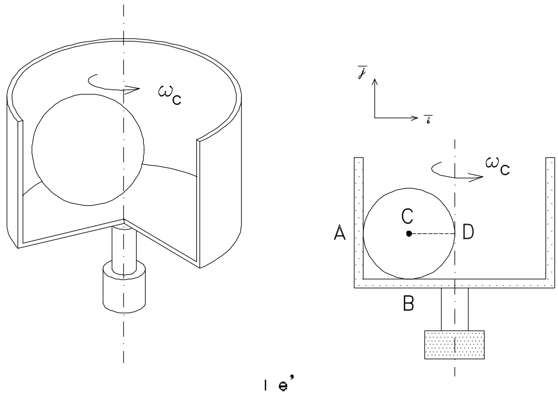
1.2. Problemas propuestos

11.- Una esfera de radio r se mueve en el interior de un cilindro de radio 2r, sin deslizar en sus puntos de contacto con la pared y el suelo. Si el centro C de la esfera describe una circunferencia con velocidad angular ω_C constante, hallar:

a) Velocidad y aceleración angular de la esfera.

b) Velocidad y aceleración del punto D.

c) Aceleración del punto A de la esfera, utilizando el método más breve.

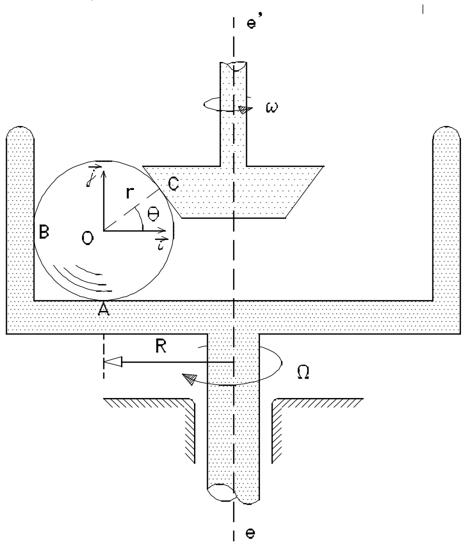


12.- La esfera de la figura se mueve en el interior del cilindro abierto que gira con Ω constante conocida, y se mantiene en contacto con la pieza cónica que gira con ω constante, también conocida. No hay deslizamiento en los contactos A, B y C.

a) Determinar la velocidad angular absoluta $\vec{\mathbf{p}}$ de la esfera en función de ω y Ω .

b) Hallar el tiempo τ que tarda la esfera en dar una vuelta en torno al eje e-e' para el observador del laboratorio.

c) El hecho de que las componentes p_x, p_y ,p_z sean constantes ¿implica que la aceleración angular de la esfera sea nula?. En caso negativo, determinar su valor.



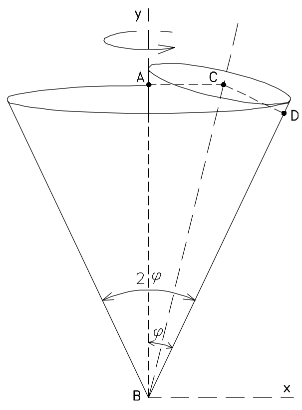
13.- El cono de abertura φ rueda sin deslizar sobre un cono fijo de abertura 2φ. El punto C, situado en el eje del cono móvil, describe una circunferencia de radio r cada τ segundos en el sentido indicado en la figura. Hallar para el cono móvil:

a) Velocidad angular absoluta y velocidad angular relativa al plano vertical ABC.

b) Velocidades angulares de rodadura y de pivotamiento.

c) Aceleración absoluta del punto A .

d) Aceleración absoluta del punto D por el método más breve.



14.- Una trituradora consta de un bombo esférico de radio r montado sobre el eje LN, que lleva soldado un piñón con z_1 dientes. El eje LN está montado sobre el marco giratorio 1 mediante cojinetes. Dicho marco está soldado al eje AB, que se pone en movimiento mediante la manivela BM. La rotación alrededor del eje LN se consigue mediante los piñones cónicos indicados en la figura, cuyos números de dientes respectivos son z_1, z_2, z_3 y z_4 . El último de estos piñones es fijo.

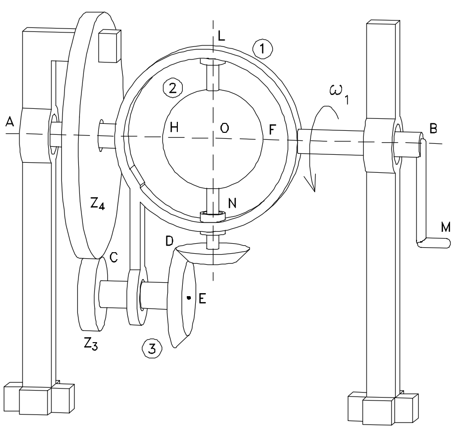
Determinar, suponiendo que la manivela se acciona con velocidad angular constante ω_1 conocida:

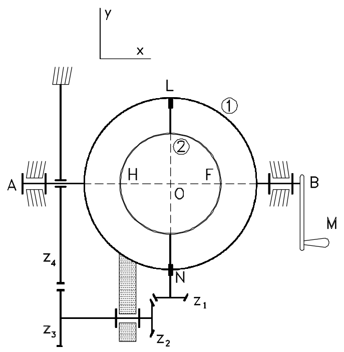
a) Velocidad angular absoluta del bombo esférico.

b) Velocidad del punto H del bombo.

c) Aceleración angular del bombo.

d) Aceleración del punto F perteneciente al bombo.



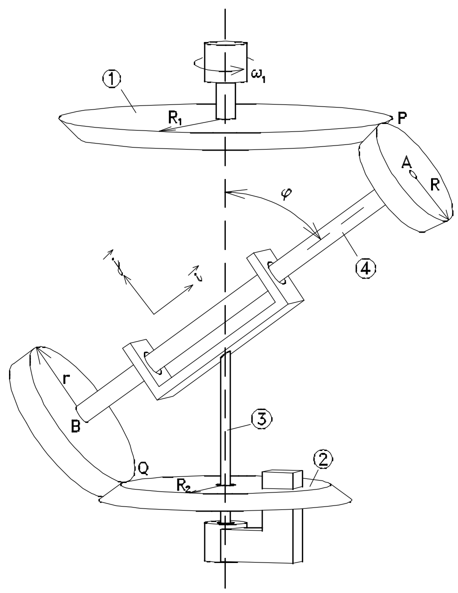


15.- En el dispositivo de la figura, la rueda dentada 1 de radio R_1 gira con ω_1 constante y conocida. La rueda dentada 2 está inmovilizada. La manivela 3 puede girar en torno al eje vertical. El movimiento se transmite a dicha manivela por la acción del árbol 4, del cual son solidarios dos engranajes (satélites) de radios respectivos R y r que engranan con los piñones 1 y 2 en P y Q. Determinar:

a) Velocidad angular y aceleración angular de los satélites.

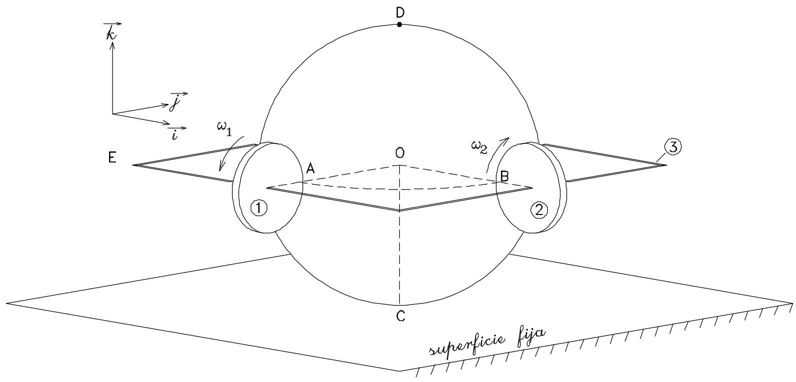
b) Aceleración de Coriolis del punto P del satélite si la referencia móvil es el piñón 1.

c) Aceleración del punto Q del satélite.



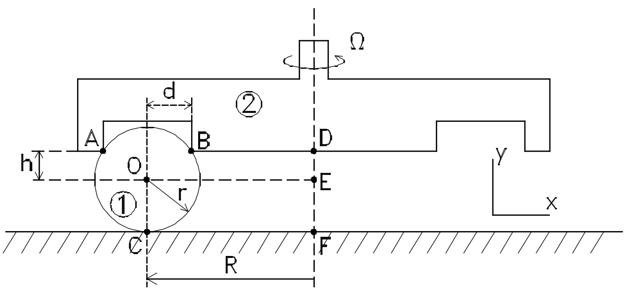
16.- La figura muestra el esquema del ratón utilizado en los ordenadores. En esencia consta de un chasis, aquí representado por la placa 3, que se mueve horizontalmente y que lleva una bola esférica. La placa es un cuadrado de centro O y lado 2ℓ con la cual es solidaria la base de proyección indicada. El centro de la bola, situado en O, se mueve solidariamente con la placa, y el contacto en C es sin deslizamiento. El punto E se mueve de modo que en cualquier instante se cumple $\vec{v}_E = v\,\vec{i}$ y $\vec{a}_E = a\,\vec{j}$, con v y a constantes y conocidas. Las ruedas 1 y 2 de radio r están montadas sobre la placa 3 y sus contactos con la esfera en A y B se producen sin deslizamiento. Las velocidades angulares ω_1 y ω_2 son desconocidas . Determinar:

a) Velocidades angulares absoluta, de rodadura y de pivotamiento de la esfera.
b) Aceleración angular de la esfera.
c) Velocidad y aceleración del punto D de la esfera.
d) Aceleración del punto A_1 relativa a la placa.
e) Aceleración absoluta de A_1 .



17.- La pieza 2 de la figura gira con Ω constante conocida en torno al eje vertical fijo. La esfera de radio r se mueve sin deslizar en los contactos A y B. Tampoco hay deslizamiento en el contacto C con la superficie fija. Determinar:

a) Velocidad y aceleración angular de la esfera.
b) Eje instantáneo de rotación de la esfera. Dibujarlo.
c) Axoide fijo.
d) Aceleración del punto C_1.



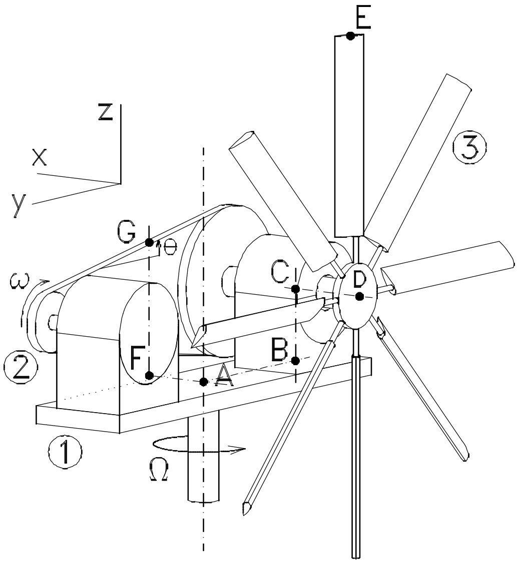
18.- Las palas 3 del ventilador de eje CD son propulsadas por el motor 2, que se mueve con ω constante y conocida respecto a la plataforma 1. La transmisión del movimiento es mediante una correa que es accionada por la polea de radio r del motor. La polea del ventilador es de radio kr. La plataforma 1 esta girando alrededor de un eje vertical fijo con Ω también constante y conocida. Determinar en el instante considerado:

a) Aceleración angular del sólido 3 y aceleración $\vec{a}_E$ del punto E.

b) Aceleración del punto G de la correa, la cual tiene inclinación θ respecto el eje y.

c) Supóngase ahora que la velocidad angular de las palas del ventilador relativa a 1 tiene módulo igual a Ω. Calcular la velocidad $\vec{v}_\lambda$ de deslizamiento del cuerpo 3, y determinar su eje instantáneo de rotación y deslizamiento.

Datos: AB = d, BC = h, AF = DC = ℓ, DE = R, FG = b.

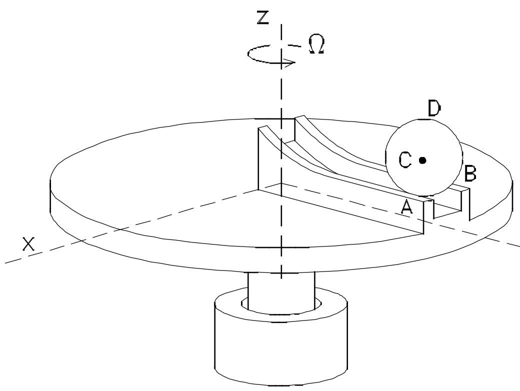


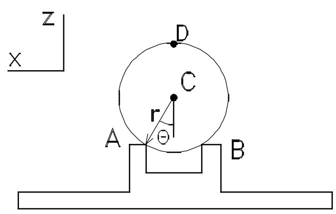
19.- La esfera de la figura se mueve sobre la plataforma de modo que el centro C tiene velocidad v constante y conocida respecto a la plataforma, y no desliza en los contactos A y B. Dicha plataforma gira con Ω constante conocida. En este momento, el centro C de la esfera está a una distancia R del eje de rotación de la plataforma. Determinar, utilizando la base indicada:

a) Eje instantáneo de rotación relativo de la esfera respecto a la plataforma. Calcular la velocidad angular $\vec{\omega}_r$ de la esfera relativa a la plataforma y la velocidad absoluta del punto D de la esfera.

b) Aceleración absoluta del punto A de la esfera.

c) Si el movimiento instantáneo absoluto de la esfera es puramente de rotación o no. Hallar su eje instantáneo.





20.- En el dispositivo de la figura, la plataforma 4 gira con Ω constante y conocida. El disco 3 gira con velocidad angular p, también constante y conocida, respecto a la manivela 2 por la acción del motor que hay en ella. El contacto en D es sin deslizamiento. La barra 1 de conexión tiene rótulas en B y en A. El collar B desliza a lo largo de la guía vertical, no pudiendo rotar alrededor de la misma. Determinar, para el instante considerado y en la base de proyección de la figura:

a) Velocidad y aceleración angular del disco 3.

b) Velocidad de B usando la equiproyectividad sobre la línea de unión.