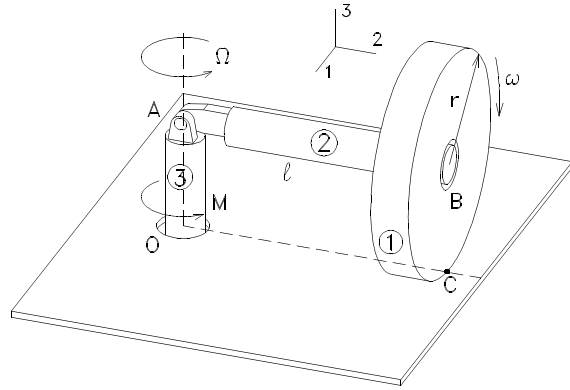


6.- Se aplica un par M conocido sobre el árbol vertical OA de masa despreciable, que está articulado con la barra AB de masa m y espesor despreciable. El disco también tiene masa m y espesor despreciable, de modo que el contacto C puede considerarse puntual. Si en dicho contacto no hay deslizamiento, y además se sabe que la reacción en C en la dirección CO es nula y que el árbol OA gira sin rozamiento en la articulación O , determinar:

- Aceleración angular $\dot{\Omega}$.
- Acciones de enlace en B .
- Momentos de las acciones de enlace en A .



SOLUCIÓN

a) Para hallar $\dot{\Omega}$ conviene determinar previamente la velocidad angular ω del disco respecto la barra AB puesto que no es un dato del problema. Los puntos B y C del disco tienen velocidad conocida; la de C es nula por ausencia de deslizamiento, y la de B se ve rápidamente que vale $\Omega \ell$. Usamos ahora la fórmula de velocidades para un sólido, que en nuestro caso es el disco, y será:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\Omega}_1 \times \overrightarrow{BC} \quad \text{donde} \quad \vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sustituyendo:

$$0 = \begin{bmatrix} -\Omega \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ \Omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega \ell + \omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene

$$-\Omega \ell + \omega r = 0 \quad , \quad \omega = \frac{\Omega \ell}{r} \quad (2)$$

La expresión (1) de $\vec{\Omega}_1$ es genérica, es decir, es válida en cualquier instante si suponemos la base 123 del enunciado *solidaria* de la barra AB . En consecuencia (2) también será genérica y podremos derivarla para obtener

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{\Omega} \ell}{r} \quad (3)$$

Acto seguido ya podemos plantearnos el cálculo de $\dot{\Omega}$. Podemos proceder mediante el método vectorial con los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético. El cálculo de $\dot{\Omega}$ exigirá, en este problema, el análisis por separado de los *tres* sólidos que integran el mecanismo. Esto es relativamente laborioso, ¿existe una alternativa más simple? Efectivamente, el método energético nos brinda el teorema de la energía cinética que, aplicado al sistema *total*, permite obtener $\dot{\Omega}$, que es lo que por el momento nos interesa. Señalemos -anticipando la parte **b)** del problema- que, desafortunadamente, el cálculo de las acciones de enlace en B, exigirá el análisis dinámico de, por lo menos, *dos* de los tres sólidos del sistema total. Tras estas consideraciones procedamos a calcular el valor de $\dot{\Omega}$ por el método energético.

El teorema de la energía cinética dice

$$\dot{W} = \dot{T} \quad (4)$$

En nuestro caso el sistema será el sistema total. \dot{W} es la potencia, o trabajo por unidad de tiempo, de las fuerzas que actúan sobre el sistema, que en nuestro caso son: acciones de enlace en O, en C, los pesos y el momento M. Afirmamos que la única fuerza que trabaja es el momento M. Veámoslo. El contacto en O es liso, por tanto las acciones de contacto en O sobre el árbol OA dan trabajo o potencia nulos. La figura 1 muestra las fuerzas de enlace en C sobre el disco (en la parte **b)** se consideran en detalle). La potencia de estas fuerzas es

$$\dot{W} = \vec{C} \cdot \vec{v}_C = 0$$

y su valor es nulo como consecuencia de la ausencia de deslizamiento en C. Por último, los pesos tampoco trabajan, ya que se mueven en un plano horizontal.

En virtud de lo antedicho la potencia de las fuerzas que actúan sobre el sistema es únicamente la del momento M y, por tanto, tendremos

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = M\Omega \quad (5)$$

Para encontrar el valor del segundo miembro \dot{T} del teorema de la energía cinética, habrá que determinar previamente la expresión genérica de la energía cinética T del sistema como suma de las de la barra 2 y el disco 1, o sea

$$T = T_2 + T_1$$

Como la barra tiene el punto A fijo, su energía cinética valdrá

$$T_2 = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{H}_{1A} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot (\Pi_{1A} \vec{\Omega})$$

donde Π_{1A} será la matriz de inercia de la barra en el punto A y en la base 123 ya utilizada antes. Esta base se toma *solidaria* de la barra, por consiguiente la matriz de inercia tendrá componentes constantes con el tiempo, tal y como es preceptivo. Adviértase además que la barra es un rotor simétrico en A para la dirección 2, y como el grosor se supone despreciable, el momento de inercia correspondiente a esta dirección será nulo. El valor común a los otros dos momentos principales de inercia se llama I'. Por tanto,

el valor de la energía cinética de la barra será

$$T_2 = \frac{1}{2} [0, 0, \Omega] \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Gamma \Omega^2$$

resultado genérico, por otra parte evidente, ya que la barra tiene movimiento plano.

Para hallar la energía cinética T_1 del disco aplicaremos el teorema de König para un sólido, es decir

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_2 \cdot \vec{H}_{2B} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_2 \cdot (\Pi_{2B} \vec{\Omega}_2)$$

ya que el centro B del disco es su centro de masa, y Π_{2B} es la matriz de inercia del disco para B en la base escogida. ¿Cual será esta base?. Exactamente la misma que en el caso anterior. En efecto, el disco es un rotor simétrico para B en la dirección 2. Por tanto, si la base 123 es *solidaria* de la barra AB, la matriz de inercia Π_{2B} del disco tendrá componentes constantes con el tiempo, tal y como debe ser. Obviamente la matriz será diagonal, puesto que las direcciones 123 en A son principales de inercia. Sustituyendo en la expresión anterior, tendremos:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m \ell^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} [0, -\omega, \Omega] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ \Omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m \ell^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} (I_2 \omega^2 + I \Omega^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{I_2 \ell^2}{r^2} + I \right) \Omega^2 \end{aligned}$$

donde se ha substituido el valor de ω dado por (2).

Como las expresiones obtenidas para las energías cinéticas son válidas en cualquier instante, podremos derivarlas respecto al tiempo, y quedará

$$\dot{T} = \dot{T}_2 + \dot{T}_1 = \left(\Gamma + m \ell^2 + \frac{I_2 \ell^2}{r^2} + I \right) \Omega \dot{\Omega} \quad (6)$$

Sustituyendo en el teorema de la energía cinética (4) las expresiones (5) y (6) se obtiene

$$M \Omega = \left(\Gamma + m \ell^2 + \frac{I_2 \ell^2}{r^2} + I \right) \Omega \dot{\Omega}$$

Con lo que el valor pedido de la aceleración angular valdrá

$$\dot{\Omega} = \frac{M}{I' + m\ell^2 + \frac{I_2 \ell^2}{r^2} + I} \quad (7)$$

b) Para determinar las acciones de enlace en B sobre el disco, utilizaremos los teoremas vectoriales. Como B es centro de masa del disco, el teorema del momento cinético adopta la forma simplificada

$$\vec{M}_B = \dot{\vec{H}}_B$$

El cálculo del momento cinético \vec{H}_B ya lo hemos realizado en el apartado anterior:

$$\vec{H}_B = \Pi_{2B} \vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \omega \\ I \Omega \end{bmatrix}$$

y derivando respecto al tiempo, teniendo en cuenta que la base es móvil, obtendremos

$$\dot{\vec{H}}_B = \frac{d\vec{H}_B}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_B}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \dot{\omega} \\ I \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \omega \\ I \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \Omega \omega \\ -I_2 \dot{\omega} \\ I \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \Omega^2 \frac{\ell}{r} \\ -I_2 \dot{\Omega} \frac{\ell}{r} \\ I \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (8)$$

en donde se han substituido ω y $\dot{\omega}$ por sus valores.

Con objeto de calcular el momento suma de las fuerzas exteriores trazaremos previamente el diagrama de sistema libre para el disco. En primer lugar determinaremos las acciones de enlace en B.

Para hallar estas acciones de enlace, se prescinde de todos los demás enlaces que actúan sobre el disco; en nuestro caso eliminamos el contacto C con el suelo que evita el deslizamiento del disco. Las traslaciones impedidas del disco *respecto a* la barra -en las direcciones 1, 2 ó 3- indican la existencia de fuerza de enlace en tales direcciones. En nuestro caso no existe posibilidad de traslación del disco en ninguna dirección, por tanto tendremos las fuerzas B_1, B_2, B_3 . Por otra parte, la única rotación posible del disco *respecto a* la barra AB tiene la dirección 2. Dicho de otro modo, las rotaciones impedidas tienen las direcciones 1 y 3; de ahí la existencia de los momentos de enlace M_1 y M_3 .

Determinemos ahora las acciones de enlace en C sobre el disco. Procederemos como antes y eliminamos ahora el enlace en B. Si en el contacto en C hay rozamiento suficiente para impedir el deslizamiento *respecto al suelo* -que es lo supuesto en el enunciado del problema al decir que no hay deslizamiento- nos encontramos con que las traslaciones están todas impedidas y que, en cambio las tres rotaciones son

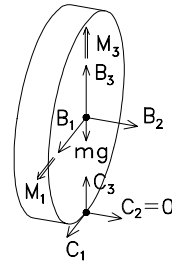


Figura 1

admisibles. Es decir, las acciones de enlace se reducen a las tres fuerzas C_1 , C_2 , C_3 . Sin embargo, el enunciado nos permite suponer $C_2 = 0$. La figura 1 resume gráficamente los resultados obtenidos en forma de diagrama de sistema libre.

Utilizando el diagrama de sistema libre para el disco, es inmediato que la suma de momentos en B vale

$$\vec{M}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ -r C_1 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

El teorema del momento cinético nos dice que el momento suma (9) es igual a la derivada del momento cinético obtenido en (8). La igualación nos da las tres ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= I_2 \Omega^2 \frac{\ell}{r} \\ -r C_1 &= -I_2 \dot{\Omega} \frac{\ell}{r} \\ M_3 &= I \dot{\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

El segundo teorema vectorial que aplicamos es el de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = m \vec{a}_G$$

En nuestro caso la suma de fuerzas, observando el diagrama de sistema libre dado en la figura 1, será

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 + C_1 \\ B_2 \\ B_3 + C_3 - mg \end{bmatrix}$$

y la aceleración del centro de masa B vale

$$\vec{a}_B = \begin{bmatrix} -\dot{\Omega} \ell \\ -\Omega^2 \ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aplicación del teorema de la cantidad de movimiento nos da otras tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + C_1 &= -m \dot{\Omega} \ell \\ B_2 &= -m \Omega^2 \ell \\ B_3 + C_3 - mg &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Se ha obtenido un sistema de *seis* ecuaciones con *siete* incógnitas (las acciones de enlace en B y en C) que permite determinar estas incógnitas, salvo B_3 y C_3 , ya que para su cálculo sólo contamos con la última ecuación del grupo (11). Necesitamos, pues, una *nueva* ecuación que procederá del análisis de la barra AB que vamos a abordar a continuación.

En la figura 2 se ha trazado el diagrama de sistema libre para la barra. Para obtenerlo debe procederse como antes para el disco. Adviértase que ahora las acciones de enlace para la barra en B son las ejercidas por el disco y -en virtud del principio de acción y reacción- serán las mismas que en la figura 1 pero ahora con el sentido contrario.

La ecuación que nos falta se obtendrá aplicando el teorema del momento cinético para la barra. Lo aplicaremos al punto A; en él toma la forma simplificada y además no intervienen las fuerzas de enlace A_1, A_2, A_3 desconocidas. La base utilizada es la misma de antes; con ello el momento cinético vale

$$\vec{H}_A = \Pi_{1A} \vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma' \Omega \end{bmatrix}$$

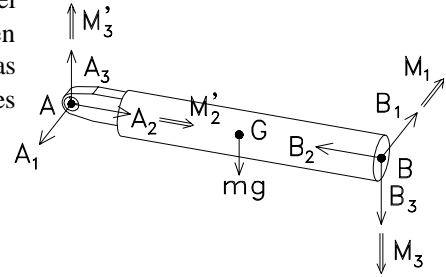


Figura 2

y derivando en base móvil

$$\dot{\vec{H}}_A = \frac{d\vec{H}_A}{dt} = \frac{d\vec{H}_A}{dt} \Big|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma' \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma' \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma' \dot{\Omega} \end{bmatrix}$$

La suma de momentos en A, con ayuda del diagrama de la figura 2, será

$$\vec{M}_A = \begin{bmatrix} -M_1 \\ 0 \\ -M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -B_1 \\ -B_2 \\ -B_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ell}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 - B_3 \ell - \frac{\ell}{2} mg \\ M_2' \\ -M_3 + M_3' + B_1 \ell \end{bmatrix}$$

Igualando el momento suma con la derivada del momento cinético se obtiene:

$$-M_1 - B_3 \ell - \frac{\ell}{2} mg = 0 \quad (12)$$

$$M_2' = 0 \quad (13)$$

$$-M_3 + M_3' + B_1 \ell = \Gamma' \dot{\Omega} \quad (14)$$

Las acciones de enlace en B ahora ya pueden determinarse completamente mediante los sistemas (10), (11) y la nueva ecuación (12). Es inmediato obtener los siguientes resultados:

$$M_1 = I_2 \Omega^2 \frac{\ell}{r} \quad , \quad M_3 = I \dot{\Omega} \quad , \quad B_1 = -\left(m + \frac{I_2}{r^2}\right) \dot{\Omega} \ell \quad ,$$

$$B_2 = -m \Omega^2 \ell \quad , \quad B_3 = \frac{-I_2 \Omega^2}{r} - \frac{mg}{2}$$

donde $\dot{\Omega}$ es el valor obtenido en (7).

c) Los momentos de las acciones de enlace en A que se piden en este apartado pueden encontrarse con las ecuaciones (13) y (14) que se acaban de obtener. Sustituyendo en la (14) los valores obtenidos en la parte anterior b) del problema para las incógnitas M_3 , B_1 y $\dot{\Omega}$, tendremos:

$$M'_3 = M_3 - B_1 \ell + I' \dot{\Omega} = I \dot{\Omega} + \left(m + \frac{I_2}{r^2}\right) \dot{\Omega} \ell^2 + I' \dot{\Omega} = \left(I' + I + m \ell^2 + \frac{I_2 \ell^2}{r^2}\right) \dot{\Omega} = M$$

O sea, los momentos pedidos de las acciones de enlace en A valen

$$M'_2 = 0$$

$$M'_3 = M$$

Es interesante preguntarse por qué se cumple la igualdad entre M'_3 y el momento motor M aplicado al árbol. La razón es clara intuitivamente, ya que la masa del árbol es despreciable. Para justificar la igualdad formalmente basta analizar este sólido 3. En efecto, el examen del enlace entre 3 y el plano horizontal nos lleva inmediatamente al diagrama de sistema libre de la figura 3.

El árbol 3 tiene movimiento de rotación alrededor del eje fijo e-e', con lo que el teorema del momento cinético se reduce a su forma elemental

$$M_e = I_e \dot{\Omega} = 0$$

con I_e nulo ya que la masa del cuerpo es despreciable. Por otra parte de la figura se deduce

$$M_e = M - M'_3$$

Estas dos últimas igualdades dan

$$M'_3 = M$$

tal como se quería demostrar. Adviértase el interés y la sencillez del estudio del árbol como consecuencia de la nulidad de su masa.

Para concluir, una observación final referente a la hipótesis $C_2 = 0$. Esta suposición se hizo con el único objetivo de simplificar los cálculos. En efecto, supongamos por un momento que C_2 no es nula. En este

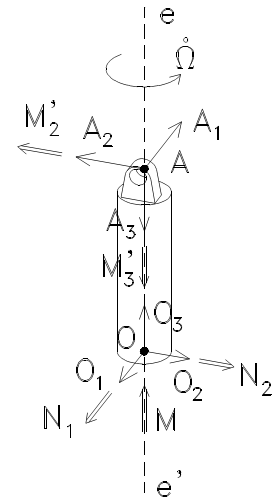


Figura 3

supuesto, se analizará el sistema aplicando los teoremas vectoriales a *cada uno* de los *tres* sólidos del dispositivo y se obtendrán $3 \times 6 = 18$ ecuaciones. Pero es inmediato cerciorarse de que el número de incógnitas es diecinueve. Es decir, se obtiene un sistema de ecuaciones simplemente indeterminado, lo que significa que no se pueden determinar los valores de todas las incógnitas (si nos mantenemos en el ámbito de la mecánica del cuerpo rígido). Esta indeterminación desaparecerá si, por ejemplo, se conoce el valor de C_2 , tal y como supone el enunciado.

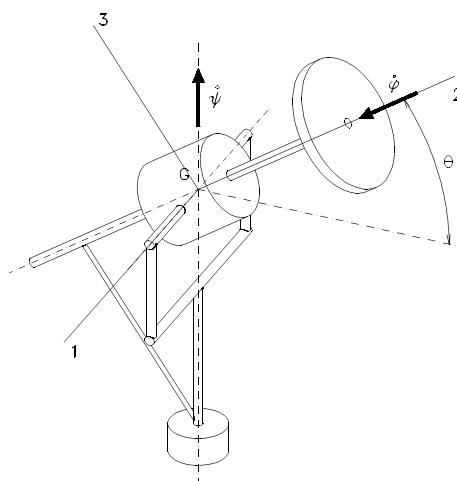
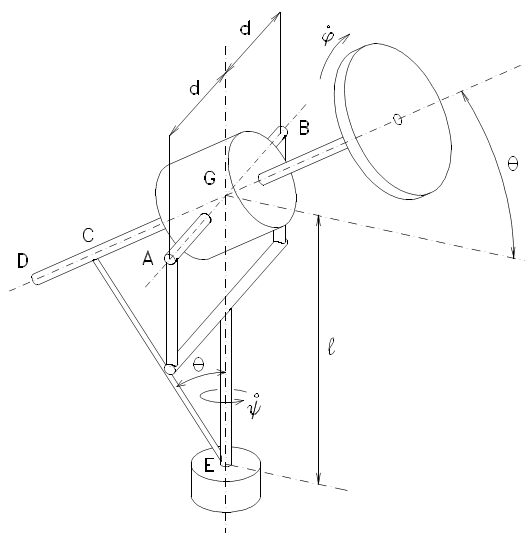
7.- El dispositivo de la figura está constituido por un motor que hace girar un disco. La barra CD, soldada al estátor del motor, actúa como contrapeso y hace que el centro de masas del conjunto disco-motor-barra se halle en el punto G. El disco, acoplado al rotor del motor, gira con velocidad angular constante $\dot{\phi}$ en torno de su eje. El estátor y la barra CD tienen la misma masa m que el conjunto disco-rotor. El eje AB fijo en el estátor se apoya en la horquilla, de masa despreciable, mediante sendos cojinetes en A y B; el cojinete en B no soporta esfuerzos axiales. La horquilla gira con velocidad angular constante $\dot{\psi}$ en torno del eje vertical. La inclinación, θ , del eje del rotor se mantiene constante por medio de un cable que une el contrapeso con el punto E del eje vertical. Dicho cable tiene la longitud necesaria para que sea perpendicular al contrapeso CD. Determinar, en el instante que se analiza:

- Reacciones en A y en B.
- Tensión en el cable CE.
- Valor de θ para el que la tensión del cable sea nula.

SOLUCIÓN

a) De la observación del dispositivo se deduce, en primer lugar, que el centro de masas, G, del dispositivo disco-motor-contrapeso es un punto fijo del espacio, ello es consecuencia de que el citado punto G se encuentra en la intersección de los ejes físicos de rotación del sistema, el eje vertical y el eje del motor. Este hecho permite establecer que el centro de masas del sistema tiene aceleración nula.

La otra consideración necesaria se refiere a la aplicación de las condiciones de simetría. Dada la



morfología del sistema, la aplicación del teorema del momento cinético respecto de G aconseja la elección de una referencia centrada en el punto G y cuya base esté constituida por un eje (1) en la dirección y sentido del segmento GA; el segundo eje (2) tendrá la dirección del eje del motor y sentido de G hacia el disco; el tercer eje será perpendicular a los anteriores y su sentido será tal que defina, junto con éstos, un triedro directo.

Una base de estas características, solidaria de la horquilla, permitirá simplificar los cálculos, ya que, como consecuencia de la simetría del sistema, los momentos de inercia serán independientes de la rotación $\dot{\phi}$ y, por el hecho de ser solidaria de la horquilla, y por lo tanto del estátor, también serán independientes de la velocidad angular $\dot{\Psi}$.

Así pues, resumiendo, se adoptará una referencia (G,1,2,3) solidaria de la horquilla y animada, por tanto, de la velocidad $\dot{\Psi}$; que es la misma con la que giran el contrapeso y el estátor del motor. El rotor y el disco solidario, por su parte, girarán además con la velocidad de rotación $\dot{\phi}$, de modo que su velocidad angular será:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Psi} \sin \theta - \dot{\phi} \\ \dot{\Psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

mientras que la velocidad angular de la base será:

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\dot{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Psi} \sin \theta \\ \dot{\Psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para poder aplicar los teoremas vectoriales, será necesario determinar la aceleración del centro de masas del sistema que, tal como se ha visto, será nula como consecuencia de hallarse en la intersección de los ejes físicos de rotación. En lo concerniente al momento cinético respecto del punto G, será necesario considerar que el sistema está constituido por dos partes distintas cuyos movimientos son diferentes. Por una parte la masa m constituida por el estátor y el contrapeso cuya velocidad es $\dot{\Psi}$ y cuyo momento cinético respecto del punto G es:

$$\vec{H}_G^e = \begin{bmatrix} I_1^e & 0 & 0 \\ 0 & I_2^e & 0 \\ 0 & 0 & I_1^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Psi} \sin \theta \\ \dot{\Psi} \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2^e \dot{\Psi} \sin \theta \\ I_1^e \dot{\Psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

donde $I_1^e = I_3^e$ por consideraciones de simetría, dado que el sistema estátor-contrapeso es un rotor simétrico respecto del eje 2.

El conjunto disco-rotor, que gira con velocidad angular $\dot{\phi}$, da lugar a otra componente adicional del momento cinético respecto de G, que valdrá:

$$\vec{H}_G^r = \begin{bmatrix} I_1^r & 0 & 0 \\ 0 & I_2^r & 0 \\ 0 & 0 & I_1^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Psi} \sin \theta - \dot{\phi} \\ \dot{\Psi} \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2^r (\dot{\Psi} \sin \theta - \dot{\phi}) \\ I_1^r (\dot{\Psi} \cos \theta) \end{bmatrix}$$

de modo que, el momento cinético del sistema completo, respecto del punto G, será:

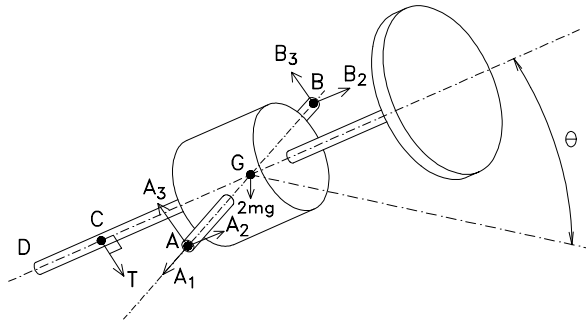
$$\vec{H}_G = \vec{H}_G^e + \vec{H}_G^r = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \dot{\psi} \sin \theta - I_2^r \dot{\phi} \\ I_1 \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

donde $I_2 = I_2^r + I_2^e$ y $I_1 = I_1^r + I_1^e$.

La variación temporal del momento cinético se deberá determinar a través del operador derivada en base móvil ya que el momento cinético se ha expresado en la base (1,2,3), que ya se ha visto que estaba animada de una velocidad angular. Es decir:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} (I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta - I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para aplicar los teoremas vectoriales será necesario estudiar, mediante el diagrama de sistema libre, las acciones que se ejercen sobre el sistema mecánico en estudio. Dado que el cojinete en B no resiste esfuerzos axiales, en dicho punto B actuará una fuerza de módulo desconocido y contenida en el plano ortogonal al eje AB; en consecuencia dicha fuerza tendrá únicamente componentes en las direcciones 2 y 3. En el punto A actuará una fuerza de módulo y dirección desconocidos que dará lugar a tres componentes de fuerza, en las direcciones de los tres ejes. En el punto G actuará el peso total $2mg$, en dirección vertical y sentido descendente. En la barra CD actuará una fuerza de tracción (se trata de un cable) en dirección CE y sentido hacia E y perpendicular al contrapeso CD.



A la vista de los sistemas de fuerzas y sus puntos de aplicación, los teoremas vectoriales permiten establecer las siguientes ecuaciones:

Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2mg \sin \theta \\ -2mg \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T \end{bmatrix} = 0$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A_1 &= 0 \\
 (2) \quad A_2 + B_2 &= 2mg \sin \theta \\
 (3) \quad A_3 + B_3 - T &= 2mg \cos \theta
 \end{aligned}$$

Teorema del momento cinético:

$$\Sigma \vec{M}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt} \Rightarrow \begin{bmatrix} T\ell \sin \theta \\ d(B_3 - A_3) \\ d(A_2 - B_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que lleva a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad T\ell \sin \theta &= (I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta \\
 (5) \quad B_3 - A_3 &= 0 \\
 (6) \quad A_2 - B_2 &= 0
 \end{aligned}$$

De (2) y (6) resulta:

$$A_2 = B_2 = mg \cos \theta$$

b) de la ecuación (4) se deduce:

$$T = \frac{(I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \cos \theta + I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \cotg \theta}{\ell}$$

El anterior resultado, junto con las ecuaciones (3) y (5) permite escribir:

$$A_3 = B_3 = mg \cos \theta + \frac{(I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \cos \theta + I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \cotg \theta}{\ell}$$

c) Para determinar el valor del ángulo θ que anularía la tensión en el cable, bastará con sustituir $T = 0$ en la ecuación (4), de modo que:

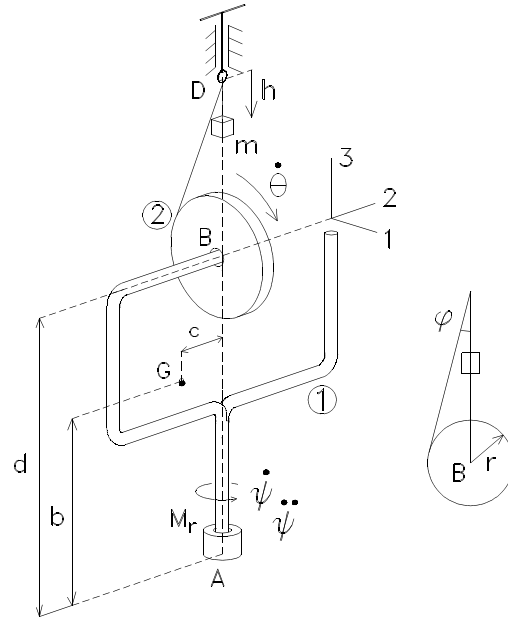
$$(I_1 - I_2) \dot{\psi}^2 \cos \theta - I_2^r \dot{\phi} \dot{\psi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

Despejando y prescindiendo del resultado $\theta = \pi/2$ quedará

$$\sin \theta = \frac{I_2^r \dot{\phi}}{(I_1 - I_2) \dot{\psi}}$$

8.- El marco 1, de masa m y centro de gravedad G , gira por acción del motor de par M_r con velocidad y aceleración $\dot{\Psi}$ y $\ddot{\Psi}$ conocidas. El disco de masa m y radio r está montado sobre el marco y gira accionado por el bloque de masa m suspendido de un cable que pasa por la anilla D . En el instante inicial, se conoce que $\dot{\theta} = 0$ y $h = 0$. Determinar, en el instante en que se muestra la figura:

- Valores de θ y $\dot{\theta}$ cuando el bloque ha recorrido la distancia vertical h .
- Valor de las acciones de enlace en B sobre el disco.
- Acciones de enlace en A sobre el marco 1, siendo la matriz de inercia del mismo en el punto A y para la base indicada:



SOLUCIÓN

a) y b) En este caso, la respuesta a las dos primeras preguntas se halla con el mismo planteamiento, que requiere la aplicación de los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético para el sólido disco. El punto más adecuado para la aplicación del momento cinético es el centro del disco B , con lo cual el teorema se reduce a la expresión

$$\vec{M}_B = \frac{d\vec{H}_B}{dt}$$

donde \vec{H}_B es el producto de la matriz de inercia del disco respecto al punto B por la velocidad angular absoluta del disco. Para la base de proyección dada, el disco es un rotor simétrico respecto al punto B , con lo que el momento cinético resulta

$$\vec{H}_B = \Pi_B \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \dot{\theta} \\ I \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Pi_A = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Para derivar el momento cinético, se debe utilizar el operador derivada en base móvil, donde la velocidad angular de la base es $\vec{\Psi}$, ya que el movimiento del disco $\vec{\theta}$ respecto a la base no modifica la matriz de inercia:

$$\frac{d\vec{H}_B}{dt} = \frac{d\vec{H}_B}{dt} \Big|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \ddot{\theta} \\ I \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \dot{\theta} \\ I \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 \dot{\theta} \dot{\psi} \\ I_2 \ddot{\theta} \\ I \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para el cálculo del momento de las fuerzas respecto al punto B, es conveniente representar el diagrama del sistema libre, en este caso, el disco:



Siendo entonces:

$$\vec{M}_B = \begin{bmatrix} M_1 \\ T \cdot r \\ M_3 \end{bmatrix}$$

que, al igualarlo con (2), da tres ecuaciones escalares

$$M_1 = -I_2 \dot{\theta} \dot{\psi} \quad (3)$$

$$T r = I_2 \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$M_3 = I \ddot{\psi} \quad (5)$$

en las que se hallan 5 incógnitas: M_1 , M_3 , T , $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$. Esto requiere la aplicación del teorema de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = m \vec{a}_G$$

En este caso, el centro de masas resulta ser un punto fijo, por lo que su aceleración es nula, mientras que con el diagrama del sistema libre se hallan las fuerzas, de lo que resultan las tres ecuaciones siguientes:

$$B_1 + T \sin \varphi = 0 \quad (6)$$

$$B_2 = 0 \quad (7)$$

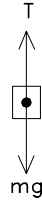
$$B_3 - mg + T \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

en las que aparecen nuevas incógnitas: B_1 , B_2 y B_3 . Hasta el momento pues, se contabilizan 8 incógnitas por seis ecuaciones. Sin embargo hay que tener en cuenta que la aceleración angular $\ddot{\theta}$ es la derivada temporal de la velocidad angular $\dot{\theta}$, con lo que esta relación aumenta el número de ecuaciones a siete. La

octava ecuación se halla del estudio del cuerpo colgante de masa m . El movimiento de este cuerpo es rectilíneo en la dirección del eje 3, por lo que

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (9)$$

y su diagrama de sistema libre es



de manera que (9) se transforma en

$$T - mg = -m\ddot{\theta}r \quad (10)$$

Al final se forma el sistema completo de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. De las ecuaciones (7) y (1) se halla :

$$\ddot{\theta} = \frac{m g r}{I_2 + m r^2} \quad (11)$$

Ahora, integrando se podría hallar $\dot{\theta}$, pero dado que $\ddot{\theta}$ no depende del tiempo, se puede utilizar la expresión

$$\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_i^2 = 2\ddot{\theta}\theta$$

donde

$$\dot{\theta}_i = 0$$

y θ es el ángulo girado por el disco al desplazar la masa una altura h :

$$\theta = \frac{h}{r}$$

siendo el resultado :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\ddot{\theta}\frac{h}{r}}$$

Conociendo estos valores, se puede hallar la tensión del cable T

$$T = \frac{I_2\ddot{\theta}}{r}$$

y también de las acciones de enlace, que son la fuerza \vec{B} y momento \vec{M}

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} -T \sin \varphi \\ 0 \\ m g - T \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} -I_2 \dot{\theta} \ddot{\psi} \\ 0 \\ I \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

Otro modo de calcular la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$, consiste en plantear el teorema de la energía cinética para el sistema formado por el cuerpo m y el disco 2, estudiado desde una referencia solidaria al sólido 1, y, en consecuencia, considerando sólo el movimiento plano relativo a la referencia. En este caso, se puede plantear:

$$W = \Delta T + \Delta U \quad (12)$$

donde la variación de energía cinética es

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_f - T_i = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2 \\ \Delta T &= \frac{1}{2} m (\dot{\theta} r)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

y la variación de energía potencial

$$\Delta U = U_f - U_i = -m g h$$

Finalmente, el trabajo del resto de fuerzas interiores y exteriores es nulo. Sustituyendo estos resultados en (12), se halla

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} \frac{g h}{r^2}$$

Como este resultado es genérico, se puede derivar para hallar $\ddot{\theta}$. Las magnitudes variables con el tiempo son la propia $\dot{\theta}$ y h , cuya derivada temporal \dot{h} es igual a $\dot{\theta} r$. Por tanto:

$$2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{4}{3} \frac{g}{r^2} \dot{\theta} r \quad \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{r}$$

Si se sustituye en la ecuación (11) el valor de I_2 por $1/2 m r^2$ se comprueba que el resultado es el mismo.

c) Para hallar las ecuaciones de enlace en el marco 2, es necesario plantear los mismos teoremas que antes, pero sobre el sólido 2. En este caso resulta conveniente aplicar el teorema del momento cinético en el punto A (punto fijo), y eliminar así las componentes de la fuerza A de las ecuaciones resultantes. De este modo:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{H}_A}{dt}$$

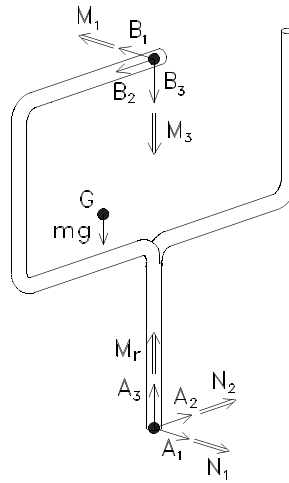
y el momento cinético será:

$$\vec{H}_A = \Pi_A \vec{\dot{\Psi}} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{23}\dot{\Psi} \\ I_{33}\dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Para derivar correctamente \vec{H}_A , se debe utilizar el operador derivada en base móvil, siendo en este caso la velocidad angular de la base $\dot{\Psi}$, al ser el marco un rotor genérico.

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_A}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{23}\ddot{\Psi} \\ I_{33}\ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{23}\dot{\Psi} \\ I_{33}\dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{23}\dot{\Psi}^2 \\ I_{23}\ddot{\Psi} \\ I_{33}\ddot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Para hallar el momento de las fuerzas aplicadas respecto al punto A es necesario dibujar el diagrama del sistema libre:



siendo ahora:

$$\vec{M}_A = \vec{AB} \times \vec{B} + \vec{BG} \times m\vec{g} + \vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{M}_r$$

con lo que las tres primeras ecuaciones escalares para este sistema serán:

$$\begin{aligned} N_1 - mgc + B_2d - M_1 &= -I_{23}\dot{\Psi}^2 \\ N_2 - B_1d &= I_{23}\ddot{\Psi} \\ M_r - M_3 &= I_{33}\ddot{\Psi} \end{aligned}$$

en las que aparecen las componentes B_1 , B_2 , M_1 y M_3 halladas en el anterior apartado. Las incógnitas son

pues N_1 , N_2 y el par motor M_r , con lo que se forma un sistema de tres por tres.

Para hallar las componentes de la fuerza \vec{A} , se debe aplicar el teorema de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = m \vec{a}_G$$

La aceleración del centro de masas del marco es fácil de hallar, al describir éste un movimiento circular alrededor del eje de rotación del sólido 2:

$$\begin{aligned} A_1 - B_1 &= m \ddot{\psi} c \\ A_2 - B_2 &= m \dot{\psi}^2 c \\ A_3 - B_3 - mg &= 0 \end{aligned}$$

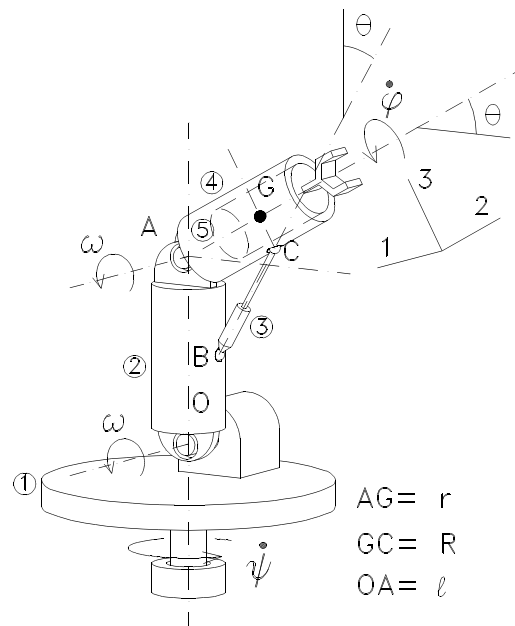
formándose un nuevo sistema de 3 x 3 para hallar las componentes A_1 , A_2 y A_3 .

El resultado es entonces:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} m \ddot{\psi} c - T \sin \varphi \\ m \dot{\psi}^2 c \\ 2mg - T \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \vec{N} = \begin{bmatrix} -I_{23} \ddot{\psi}^2 - mgc + I_2 \dot{\theta} \dot{\psi} \\ I_{23} \ddot{\psi} + Td \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

9.- La figura muestra un manipulador cuya base 1 gira alrededor del eje vertical con velocidad angular $\dot{\psi}$ constante. El brazo 2 gira con velocidad angular ω constante respecto a la plataforma, y el brazo 4 está formado por un rotor 5 y la propia carcasa 4. La carcasa gira con velocidad angular ω constante respecto al brazo 2, mientras que el rotor 5 gira alrededor de su eje longitudinal con velocidad angular $\dot{\varphi}$ respecto la carcasa 4. Los cuerpos 3 y 4 tienen masa despreciable, pero la masa de 5 es m , y su centro de gravedad es G . En A y O hay pasadores, y en B y C hay rótulas. Determinar:

- Aceleración del punto G .
- Ecuaciones que permiten determinar las acciones de enlace en A .
- Energía cinética del rotor 5.

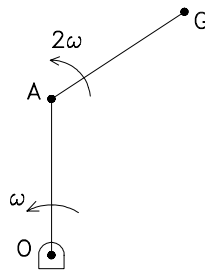


SOLUCIÓN

a) La aceleración del punto G del sólido 5 puede hallarse de diferentes maneras. Una de ellas es mediante una composición de movimientos, considerando como referencia fija el suelo y como referencia móvil la plataforma 1. Así, la aceleración de G es

$$\vec{a}_G = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

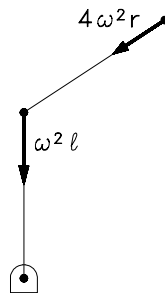
El movimiento relativo que describe el punto G respecto a la plataforma se corresponde con un movimiento plano según el siguiente esquema:



donde la velocidad angular del sólido 4 es 2ω conocida y constante. La aceleración relativa se halla relacionando el punto G con el punto A según

$$\vec{a}_G^r = \vec{a}_A^r + \vec{a}_{GA}^r$$

según se muestra en el siguiente diagrama.



Y proyectada esta aceleración relativa en la base del enunciado:

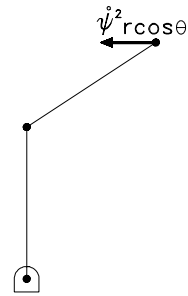
$$\vec{a}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega^2(\ell \sin \theta + 4r) \\ -\omega^2 \ell \cos \theta \end{bmatrix}$$

La aceleración de arrastre se puede hallar fácilmente al considerar el sistema de barras solidario de la plataforma:

$$\vec{a}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\psi}^2 r \cos^2 \theta \\ \dot{\psi}^2 r \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de la aceleración de Coriolis es necesario conocer la velocidad relativa:

$$\vec{v}_G^r = \vec{v}_A^r + \vec{v}_{GA}^r = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \ell \cos \theta \\ \omega (2r + \ell \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$



siendo la aceleración de Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \ell \cos \theta \\ \omega (2r + \ell \sin \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \dot{\psi} \omega (2r \sin \theta + \ell) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La suma de los términos hallados da la aceleración absoluta del punto G

$$\vec{a}_G = \begin{bmatrix} 2 \dot{\psi} \omega (2r \sin \theta + \ell) \\ -\dot{\psi}^2 r \cos^2 \theta - \omega^2 (\ell \sin \theta + 4r) \\ \dot{\psi}^2 r \cos \theta \sin \theta - \omega^2 \ell \cos \theta \end{bmatrix}$$

b) Para hallar las acciones de enlace en el punto A con un mínimo de ecuaciones, se hace necesario trabajar con el sólido 4 o con el sistema formado por el sólido 4 y el rotor 5. Sin embargo, no se conocen las condiciones de enlace entre estos dos sólidos, por lo que sólo se puede considerar el estudio del sistema formado por ambos. Como la carcasa 4 presenta una masa considerada despreciable frente a la masa del rotor, el centro de masas del sistema es el punto G, que es el punto más adecuado en este caso para aplicar el teorema del momento cinético, ya que permite el uso de la expresión simplificada de dicho teorema:

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt}$$

Dado que la masa del cuerpo 4 es despreciable, el momento cinético resultante es el correspondiente al

del sólido 5. Éste es el producto de la matriz de inercia por la velocidad angular absoluta de dicho sólido, que es

$$\vec{\Omega}_5 = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\omega} + \vec{\omega} + \vec{\dot{\phi}}$$

La matriz de inercia es la correspondiente a un rotor simétrico respecto a G, puesto que la masa de la pinza es también despreciable. Así, el momento cinético es

$$\vec{H}_G = \Pi_G \vec{\Omega}_5 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\omega \\ \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I\omega \\ I_2(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}) \\ I \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

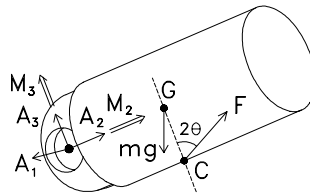
Como siempre, la derivada del momento cinético se realiza mediante el operador derivada en base móvil, siendo la velocidad angular de la base

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\omega} + \vec{\omega}$$

ya que una rotación del sólido debida a la velocidad angular $\dot{\phi}$ no afecta a la matriz de inercia, al ser el sólido 5 un rotor simétrico respecto al eje de rotación de $\dot{\phi}$. Hay que tener en cuenta que el ángulo θ que aparece en \vec{H}_G no es constante y que su derivada temporal es 2ω , ya que la inclinación del eje del rotor 5 respecto de la horizontal varía tanto con la velocidad angular ω del sólido 2 como con la velocidad angular ω de la carcasa 4. Por tanto:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 2I_2\dot{\psi}\omega\cos\theta \\ -2I\dot{\psi}\omega\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2I\omega \\ I_2(\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}) \\ I\dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta (I - I_2) - I_2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta \\ 2I_2\dot{\psi}\omega\cos\theta \\ \dot{\psi}\omega\sin\theta(2I_2 - 4I) + 2I_2\omega\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Para hallar el momento resultante de las acciones exteriores respecto el punto G, se dibuja el diagrama del sistema libre siguiente:



La fuerza del pistón hidráulico 3 sobre la carcasa 4 tiene la dirección de la barra 3 al tener ésta masa despreciable. Las acciones en el punto A son del tipo visto en problemas anteriores. De este modo, el momento respecto a G de las acciones descritas en el diagrama es

$$\vec{M}_G = \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{GA} \times \vec{A} + \vec{GC} \times \vec{F}$$

con lo que resultan tres ecuaciones escalares:

$$-A_3 r + FR \sin 2\theta = \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (I - I_2) - I_2 \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \quad (3)$$

$$M_2 = 2I_2 \dot{\psi} \omega \cos \theta \quad (4)$$

$$M_3 + A_1 r = \dot{\psi} \omega \sin \theta (2I_2 - 4I) + 2I_2 \omega \dot{\phi} \quad (5)$$

en las que aparecen un total de 5 incógnitas: F , A_1 , A_3 , M_2 y M_3 . Se hace necesario plantear el teorema de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = m \vec{a}_G$$

donde la aceleración del centro de masas G se ha calculado en el apartado **a**). Así:

$$A_1 = m a_{G_x} \quad (6)$$

$$A_2 - mg \sin \theta + F \sin 2\theta = m a_{G_y} \quad (7)$$

$$A_3 - mg \cos \theta + F \cos 2\theta = m a_{G_z} \quad (8)$$

siendo las ecuaciones (3), (4), (5), (6), (7) y (8) las seis que determinan la solución al problema.

c) Como no se halla un punto de velocidad cero, se debe utilizar la expresión general de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{H}_G$$

en la que se debe conocer la velocidad absoluta del centro de masas. Si se considera la composición de movimientos descrita en **a**), la velocidad \vec{v}_G se determina según:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_G^a + \vec{v}_G^r$$

siendo la velocidad de arrastre la velocidad del punto G moviéndose solidariamente con la plataforma:

$$\vec{v}_G^a = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la velocidad relativa se ha hallado en la expresión (1). La velocidad absoluta será la suma de ambos vectores:

$$\vec{v}_G = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} r \cos \theta \\ -\omega \ell \cos \theta \\ \omega (2r + \ell \sin \theta) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, hay que recordar que \vec{H}_G se ha calculado en (2), por lo que

$$\frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{H}_G = \frac{1}{2} [2\omega, \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}, \dot{\psi} \cos \theta] \begin{bmatrix} 2I\omega \\ I_2(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}) \\ I \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

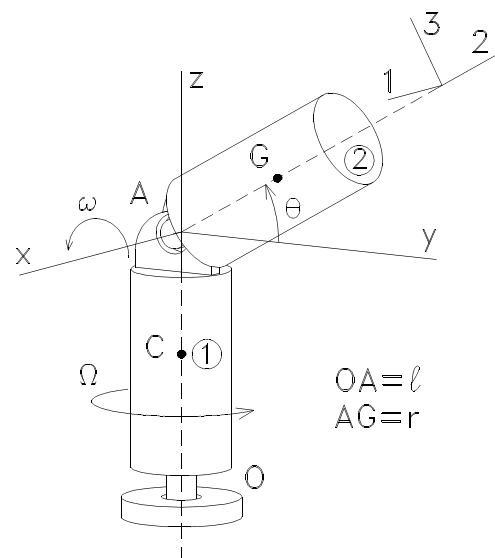
y el resultado final es:

$$T = \frac{1}{2} m [(\dot{\psi} r \cos \theta)^2 + (\omega \ell \cos \theta)^2 + [\omega(2r + \ell \sin \theta)]^2] + \frac{1}{2} [4 I \omega^2 + I_2(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi})^2 + I \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta]$$

10.- El dispositivo de la figura está formado por el brazo 1, que gira accionado por un motor alrededor del eje vertical con velocidad angular constante y conocida, Ω , y por el brazo 2 que gira respecto de 1 a velocidad angular constante y conocida, ω , accionado por otro motor no visto y situado en A. La masa de ambos cuerpos es m, y se pueden considerar rotores simétricos respecto de su eje longitudinal. Concretamente, se tiene como dato la matriz de inercia del sólido 2 para el centro de masas según la base 123, así como la matriz de inercia del sólido 1 respecto de O en la base xyz. Determinar:

a) Las acciones de enlace en el punto O, estudiando el sistema descompuesto de los dos sólidos.

b) Las acciones de enlace en el punto O, pero estudiando el sistema de los dos sólidos conjuntamente.



SOLUCIÓN

a) El primer paso consiste en estudiar el sistema formado por el sólido 2 para hallar las acciones de enlace en A y encontrar después las acciones de enlace en O

estudiando el brazo 1. Los teoremas a plantear son los conocidos del momento cinético y de la cantidad de movimiento, utilizando la base 123 para el sólido 2 con el fin de tener una matriz de inercia diagonal.

Los puntos que ofrecen más ventajas para aplicar el momento cinético son G y A, puesto que en los dos se puede emplear la forma reducida del teorema del momento cinético. Si se aplica en A, la fuerza de enlace A no realiza momento respecto de este punto, por lo que se reducirá el número de incógnitas en esta ecuación. De este modo:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{H}_A}{dt}$$

donde \vec{H}_A es

$$\vec{H}_A = \Pi_A \vec{\Omega}$$

pero hay que tener en cuenta que se conoce la matriz de inercia respecto de G, por lo que hay que calcular la matriz de inercia respecto de A aplicando Steiner:

$$\Pi_A = \Pi_G + \Pi_A^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I + m r^2 \end{bmatrix}$$

De este modo, resulta:

$$\vec{H}_A = \begin{bmatrix} I + m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I + m r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \omega + m r^2 \omega \\ I_2 \Omega \sin \theta \\ I \Omega \cos \theta + m r^2 \Omega \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para derivar \vec{H}_A hay que utilizar el operador derivada en base móvil:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_A}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_A$$

en la que $\vec{\Omega}_b$ es en este caso la velocidad angular absoluta del sólido, pues aunque éste es un rotor simétrico, no lo es respecto del eje de rotación de ω . Hay que tener en cuenta que el ángulo θ no es constante y que su derivada temporal es $\dot{\omega}$:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \Omega \omega \cos \theta \\ -I \Omega \omega \sin \theta - m r^2 \Omega \omega \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \omega + m r^2 \omega \\ I_2 \Omega \sin \theta \\ I \Omega \cos \theta + m r^2 \Omega \cos \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (I - I_2) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + m r^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ I_2 \Omega \omega \cos \theta \\ (I_2 - 2I) \Omega \omega \sin \theta - 2 m r^2 \omega \Omega \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para calcular la suma de momentos respecto de A se dibuja el diagrama del sistema libre mostrado en la figura 1, siendo, directamente, la suma de momentos respecto de A:

$$\vec{M}_A = \begin{bmatrix} M_1 - m g r \cos \theta \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

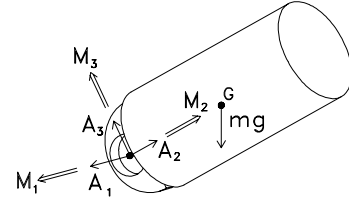


Figura 1

que al igualar a (1), da tres ecuaciones escalares:

$$M_1 - m g r \cos \theta = (I - I_2) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + m r^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (2)$$

$$M_2 = I_2 \Omega \omega \cos \theta \quad (3)$$

$$M_3 = (I_2 - 2I) \Omega \omega \sin \theta - 2 m r^2 \omega \Omega \sin \theta \quad (4)$$

en las que aparecen tres incógnitas: M_1 , M_2 y M_3 .

Para plantear el teorema de la cantidad de movimiento, es necesario calcular la aceleración del centro de masas. Ésta se puede hallar mediante una composición de movimientos, siendo la referencia fija el suelo y la referencia móvil el brazo 1. Sin más detalle, el teorema resulta en tres ecuaciones escalares, en las que aparecen las nuevas incógnitas A_1 , A_2 y A_3 :

$$A_1 = 2 m \Omega \omega r \sin \theta \quad (5)$$

$$A_2 - m g \sin \theta = m(-\omega^2 r - \Omega^2 r \cos^2 \theta) \quad (6)$$

$$A_3 - m g \cos \theta = m \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta \quad (7)$$

Como se ve, se tiene un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas, cada una de las cuales se puede hallar directamente de su ecuación. Esto no hubiese resultado así de haber aplicado el teorema del momento cinético en el punto G.

Conocidas pues las acciones de enlace en A, se procede a estudiar el brazo 1. En este caso es más apropiada la utilización de la base xyz por la misma causa que antes. También aquí la mejor opción es aplicar el teorema del momento cinético en el punto O, para eliminar incógnitas de las ecuaciones que se formen. Así pues:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$$

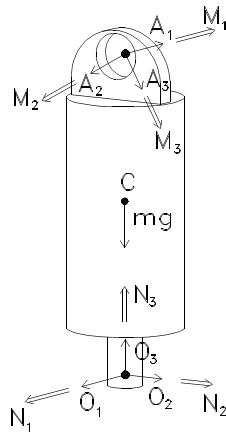
y el momento cinético, dados los datos de que se dispone:

$$\vec{H}_O = \Pi_O \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I' & 0 & 0 \\ 0 & I' & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I'_3 \Omega \end{bmatrix}$$

que se deriva en base móvil:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{H}_O}{dt} \Big|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I'_3 \Omega \end{bmatrix} = 0$$

En el diagrama del sistema libre debe tenerse en cuenta el principio de acción y reacción:



y las ecuaciones resultantes del teorema del momento cinético son:

$$N_1 - M_1 - A_3 \ell \sin \theta + A_2 \ell \cos \theta = 0 \quad (8)$$

$$N_2 + M_3 \sin \theta - M_2 \cos \theta - A_2 \ell = 0 \quad (9)$$

$$N_3 - M_3 \cos \theta - M_2 \sin \theta = 0 \quad (10)$$

y las del teorema de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
O_1 - A_1 &= 0 \\
O_2 + A_3 \sin \theta - A_2 \cos \theta &= 0 \\
O_3 - A_3 \cos \theta - A_2 \sin \theta - m g &= 0
\end{aligned}$$

Halladas M_1, M_2, M_3, A_1, A_2 y A_3 de las ecuaciones (2), (3), (4), (5), (6) y (7), se hallan las incógnitas O_1, O_2, O_3, N_1, N_2 y N_3 . Los valores obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (I_1 - I_2) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + m r \ell \cos \theta (\omega^2 + \Omega^2) + m \Omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta + m g r \cos \theta \\
N_2 &= I_2 \Omega \omega (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 I \Omega \omega \sin^2 \theta + 2 m \omega r \ell \sin \theta + 2 m r^2 \omega \Omega \sin \theta \\
N_3 &= 2 (I_2 - I) \Omega \omega \sin \theta \cos \theta - 2 m \omega \Omega r^2 \sin \theta \cos \theta \\
O_1 &= 2 m \Omega \omega r \sin \theta \\
O_2 &= m (-\omega^2 r \sin \theta - \Omega^2 r \cos \theta) \\
O_3 &= 2 m g - m \omega^2 r \cos \theta
\end{aligned}$$

b) En este caso se halla el mismo resultado que en el apartado **a)**, pero estudiando el sistema formado por los dos sólidos. Los teoremas a plantear son los mismos que antes, pero al aplicarlos hay que tener en cuenta que los dos sólidos tienen masa.

El teorema del momento cinético se aplica en el punto O, que al ser un punto fijo simplifica la expresión del teorema del momento cinético al tiempo que elimina el momento resultante de la fuerza O.

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que \vec{H}_O comprende el momento cinético de los dos cuerpos respecto de O, o sea

$$\vec{H}_O = \vec{H}_{O_1} + \vec{H}_{O_2}$$

y que luego habrá que derivar. Para mantener constante la matriz de inercia, cada momento cinético debe derivarse con el operador derivada en base móvil, siendo diferente la velocidad angular de la base para cada sólido; además, cada uno de ellos debe estudiarse con una base diferente. En estas circunstancias, el momento cinético de cada cuerpo debe calcularse por separado y también derivarse individualmente. Por ejemplo, para el sólido 1 el cálculo de \vec{H}_O resulta igual que en el apartado **a)**, por lo que su derivada temporal es nula:

$$\frac{d\vec{H}_{O_1}}{dt} = 0$$

Para el sólido 2 la cuestión no resulta tan sencilla, y debe calcularse \vec{H}_{O_2} mediante el teorema de Koenig

utilizando la base 123 (ya que el cálculo directo no se puede realizar en este caso porque el punto O no pertenece al sólido 2):

$$\vec{H}_{O_2} = \vec{H}_G + \vec{OG} \times m \vec{v}_G$$

\vec{H}_G ahora se puede hallar directamente de los datos del enunciado:

$$\vec{H}_G = I_G \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I \omega \\ I_2 \Omega \sin \theta \\ I \Omega \cos \theta \end{bmatrix}$$

y la velocidad de G se halla según la composición de movimientos descrita en a). Sustituyendo:

$$\vec{v}_G = \begin{bmatrix} -\Omega r \cos \theta \\ 0 \\ \omega r \end{bmatrix}$$

se llega al resultado:

$$\vec{H}_{O_2} = \begin{bmatrix} I \omega + m \omega r (\ell \sin \theta + r) \\ I_2 \Omega \sin \theta - m \Omega \ell r \cos^2 \theta \\ I \Omega \cos \theta + m \Omega r \cos \theta (\ell \sin \theta + r) \end{bmatrix}$$

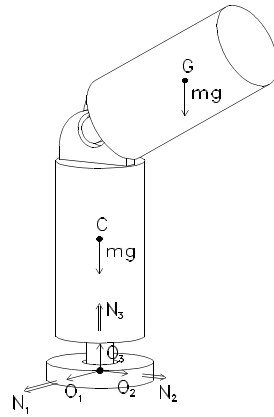
La derivada de \vec{H}_O debe hacerse utilizando el operador derivada en base móvil, siendo la velocidad angular de la base la misma que en (1). En este caso hay que estar atento, puesto que no se deriva sólo éste término, sino todos los términos que aparecen en el teorema de Koenig. Así pues, $\vec{OG} \times m \vec{v}_G$ debe estar también en una proyección genérica, lo que se cumple con el movimiento indicado de la base. Hay que recordar que la derivada temporal del ángulo θ es ω :

$$\frac{d\vec{H}_{O_2}}{dt} = \begin{bmatrix} m \omega^2 r \ell \cos \theta \\ 2 m \Omega \omega r \ell \cos \theta \sin \theta + I_2 \Omega \omega \cos \theta \\ m \omega \Omega r [\ell (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - r \sin \theta] - I \Omega \omega \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \omega + m \omega r (\ell \sin \theta + r) \\ I_2 \Omega \sin \theta - m \Omega \ell r \cos^2 \theta \\ I \Omega \cos \theta + m \Omega r \cos \theta (\ell \sin \theta + r) \end{bmatrix}$$

siendo el resultado:

$$\left. \frac{d\vec{H}_O}{dt} \right|_{123} = \begin{bmatrix} (I - I_2) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + m r \ell \cos \theta (\omega^2 + \Omega^2) + m \Omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 m \Omega \omega r \ell \sin \theta \cos \theta + I_2 \Omega \omega \cos \theta \\ (I_2 - I) \Omega \omega \sin \theta - 2 m \omega \Omega r^2 \sin \theta - 2 m \Omega \omega \ell r \sin^2 \theta - I \Omega \omega \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$

El diagrama del sistema libre es ahora:



en el que no aparecen las acciones de enlace en A por ser interiores del sistema. Si se quiere plantear el teorema en la base xyz, es necesario reprojectar el resultado de la derivada del momento cinético para el sólido 2 en esta base:

$$\left. \frac{d\vec{H}_{O_2}}{dt} \right|_{xyz} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \cos \theta - H_3 \sin \theta \\ H_2 \sin \theta + H_3 \cos \theta \end{bmatrix}$$

Así pues, se forman las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} N_1 - m g r \cos \theta &= H_1 \\ N_2 &= H_2 \cos \theta - H_3 \sin \theta \\ N_3 &= H_2 \sin \theta + H_3 \cos \theta \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento, hay que tener en cuenta que la aceleración presente es la aceleración del centro de masas del sistema, que se puede hallar según la igualdad:

$$m_1 \vec{a}_{G_1} + m_2 \vec{a}_{G_2} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{G_T}$$

En el apartado a) se ha calculado las aceleraciones de los centros de masa de cada uno de los sólidos, con lo que la aceleración del centro de masas del sistema total es:

$$\vec{a}_{G_T} = \begin{bmatrix} \Omega \omega \sin \theta \\ \frac{1}{2} (-\omega^2 r \sin \theta - \Omega^2 r \cos \theta) \\ -\frac{1}{2} \omega^2 r \sin \theta \end{bmatrix}$$

y el teorema resulta en las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 O_1 &= 2 m \Omega \omega \sin \theta \\
 O_2 &= 2 m \frac{1}{2} \left(-\omega^2 r \sin \theta - \Omega^2 r \cos \theta \right) \\
 O_3 - 2 m g &= 2 m \left(-\frac{1}{2} \omega^2 r \sin \theta \right)
 \end{aligned}$$

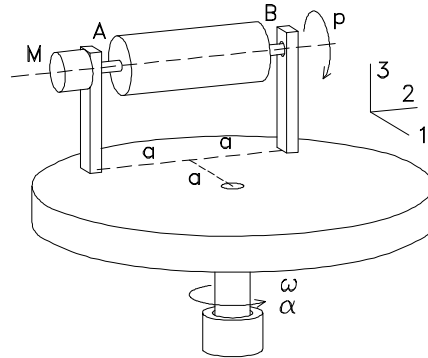
Como se puede ver, seis ecuaciones con seis incógnitas, en las que, si se hallan correctamente, se comprobará que el resultado de este apartado **b)** coincide con el de **a)**.

Como conclusión, puede decirse en favor de este último método que sólo es necesario calcular seis incógnitas, frente a las doce necesarias si se opta por estudiar los cuerpos uno a uno. Sin embargo, el cálculo de la derivada del momento cinético resulta harto complicado por el hecho de tener que aplicar Koenig, utilizar bases de proyección diferentes para cada sólido y considerar un movimiento de la base diferente también. La complejidad y carga conceptual de esta parte aconseja, en este caso, el estudio por separado de los dos cuerpos, pues aunque se plantean más ecuaciones, el sistema resultante no es difícil de resolver, al determinarse cada incógnita por separado. Sólo en sistemas ciertamente particulares resulta útil considerar un sistema formado por dos cuerpos, como se ha visto en problemas anteriores.

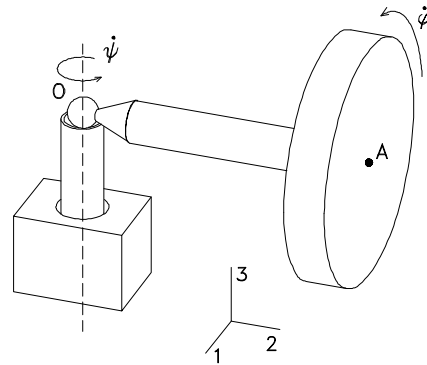
3.2. Problemas propuestos

11.- La plataforma horizontal gira con velocidad angular ω y aceleración angular α . Sobre ella está montado un soporte que sostiene un rodillo de masa m que gira con velocidad angular p . En el extremo A del rodillo se ha montado un motor de par M . El apoyo B no puede absorber esfuerzos axiales. Determinar:

- Velocidad y aceleración angulares del rodillo.
- Par M necesario para que el rodillo gire con p constante.
- Reacciones en los apoyos A y B.

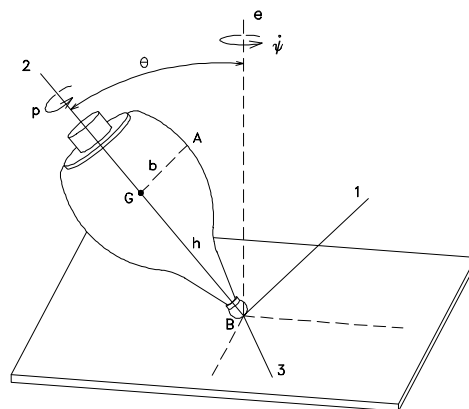


12.- El disco de masa m y radio r es solidario del árbol OA de longitud l cuya masa es despreciable y tiene una rótula en O . El disco se considera de pequeño espesor y está girando con $\dot{\Phi}$ constante y conocida. Si el eje OA se mueve horizontalmente, determinar la velocidad $\dot{\Psi}$ de OA alrededor de la vertical.



13.- La peonza de masa m de la figura se mueve con el punto B fijo sobre un plano vertical, y gira con velocidad angular p constante respecto al plano vertical B12. El eje 2 de la peonza gira en torno a la vertical Be con velocidad angular $\dot{\Psi}$ constante. El ángulo θ también es constante. El centro de masa es G. Se considera conocida la matriz de inercia de la peonza. Empleando la base de proyección 123, hallar:

- Aceleración del punto A de la peonza.
- Reacción del suelo en B.



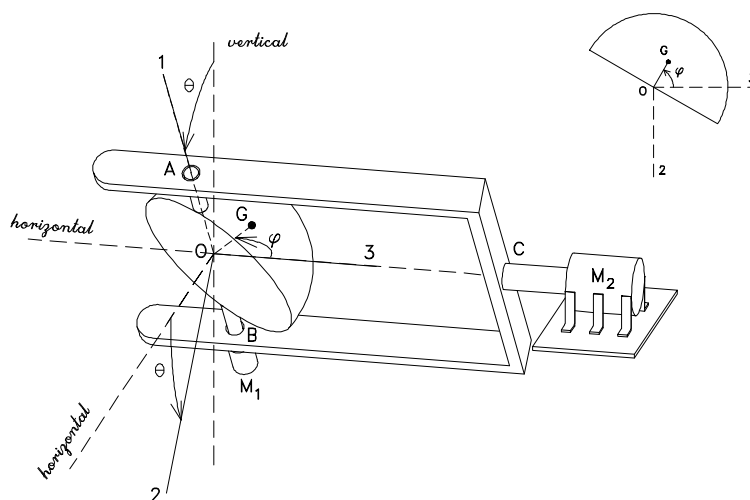
c) Relación entre las velocidades angulares p y $\dot{\Psi}$.

14.- En el dispositivo de la figura, la semiesfera maciza homogénea de masa m gira con velocidad angular constante $\dot{\Phi}$ conocida respecto a la horquilla ACB bajo la acción del motor M_1 . El motor M_2 de eje horizontal comunica a la horquilla una velocidad angular $\dot{\theta}$ y aceleración $\ddot{\theta}$ conocidas. El cojinete en A no determina fuerza axial. La masa del árbol AB es despreciable. Utilizando la base de proyección 123 de la figura, determinar:

a) Reacción en A.

b) Valor de M_1 .

Datos: $OG = c$, $OA = OB = l$



15.- La placa cuadrada homogénea de masa m y lado l está montada sobre la horquilla AB que gira con velocidad angular $\dot{\Psi}$ constante en torno al eje vertical fijo. Por medio de un cable, sujeto en el punto medio C del lado superior de la placa y que pasa por un pequeño anillo fijo P que se halla en la vertical del eje, se realiza sobre la placa una fuerza F cuyo valor viene dado por $F = F_0 \sin(\theta/2)$.

La placa parte del reposo relativo a la horquilla en posición horizontal y la distancia AB es aproximadamente igual a l . Determinar para el instante genérico que se indica:

a) Velocidad angular $\dot{\theta}$.

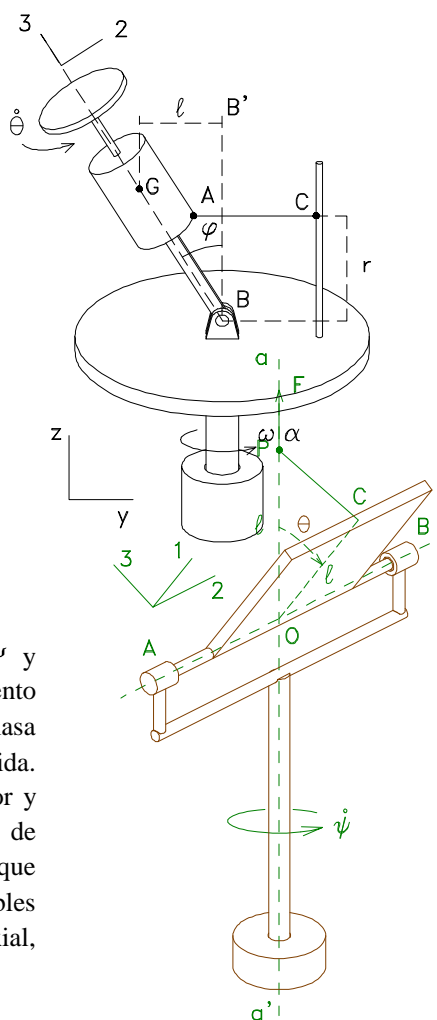
b) Valor de la reacción perpendicular a la placa en el apoyo A.

Datos: $OP = OC = l$, y se conoce la matriz de inercia de la placa para O.

16.- En el instante considerado en la figura, la plataforma gira alrededor del eje vertical BB' con velocidad angular ω y aceleración α conocidas. Sobre dicha plataforma se ha montado un motor cuyo rotor es solidario del disco que se muestra y que gira con velocidad angular $\dot{\theta}$, constante y conocida, respecto a la plataforma. En el punto B hay un pasador, y la inclinación φ del árbol BG se mantiene constante gracias al cable AC. La única masa apreciable es la del sistema rotor-disco cuyo valor es m , con centro de masa en G. Determinar:

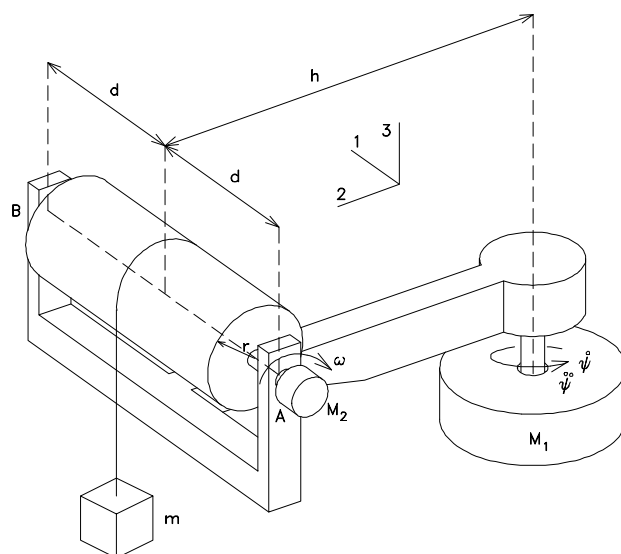
a) Momentos de las acciones de enlace en A.

b) Componentes de la fuerza de enlace en B en la base x,y,z.



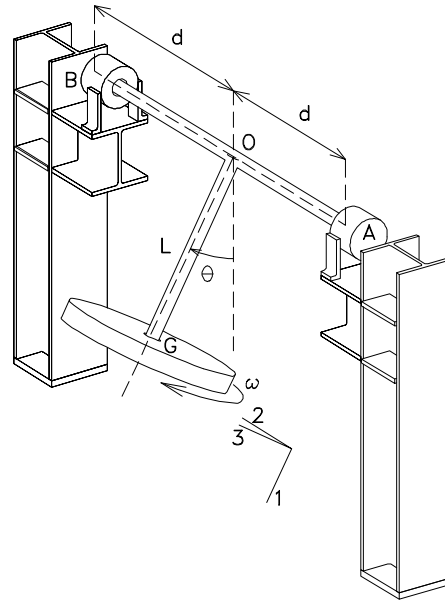
17.- El brazo de la figura gira con velocidad angular $\dot{\Psi}$ y aceleración angular $\ddot{\Psi}$ conocidas. El motor M_2 , de momento conocido, obliga a girar en torno al eje AB al tambor de masa M, cuya velocidad, en el instante considerado, es ω conocida. El cable indicado en la figura se enrolla sobre el tambor y obliga a ascender al bloque de masa m con aceleración de módulo desconocido. Se considera despreciable el ángulo que forma el cable con la vertical. Si las únicas masas apreciables son las ya indicadas, y el cojinete en A no ejerce fuerza axial, determinar:

- a) Reacciones en los cojinetes A y B.
b) Tensión del cable.

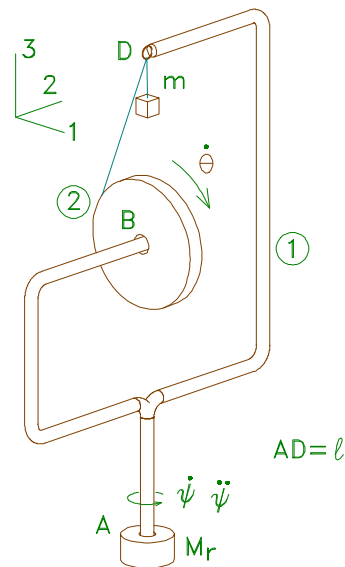


18.- La figura muestra un péndulo giroscópico formado por un soporte fijo que sostiene la barra en forma de T, cuya masa se considera despreciable, y que puede girar alrededor del eje AB. En el extremo G de la barra se ha montado un disco de masa m y radio R que gira respecto a la barra considerada con velocidad constante ω conocida. Si el sistema se abandona con el disco en rotación en la posición $\theta = 90^\circ$ con $\dot{\theta} = 0$, hallar:

- Reacciones en A y en B para una posición genérica en función del ángulo θ .
- Valor que debe tener la velocidad angular ω para que se anule la reacción en el cojinete A cuando el disco pasa por la posición más baja.

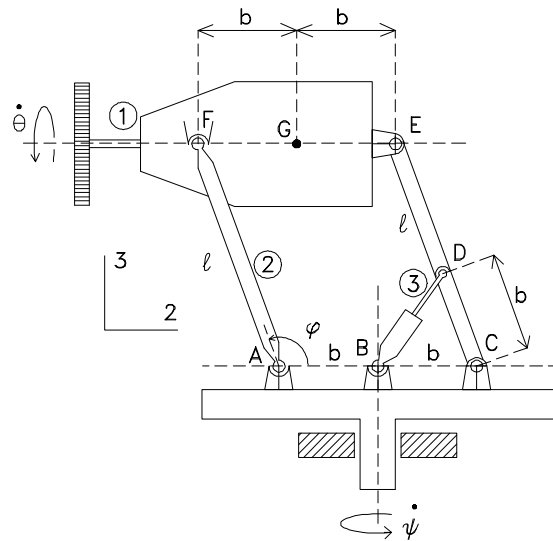


19.- La figura adjunta muestra el mecanismo del problema nº 8 modificado de tal forma que la anilla D está colgada de una prolongación del marco. Considerando que su matriz de inercia tiene la misma forma que antes y que su centro de gravedad no ve cambiada su posición, ¿cómo se modificarán las soluciones del problema nº 8 ?



20.- Una pulidora está montada sobre la plataforma de la figura que gira con $\dot{\Psi}$ constante. El disco pulidor junto con el rotor del motor constituyen un rotor simétrico en torno al eje EF, giran con $\dot{\Theta}$ constante, y el conjunto tiene masa m con centro de masa en G. La carcasa del motor tiene masa despreciable. El cilindro hidráulico BD acciona la barra CE de manera que $\dot{\Phi}$ es constante. En C y E hay pasadores, y las restantes articulaciones son rótulas. La masa del cilindro hidráulico es despreciable así como la de las restantes barras de conexión. Determinar, usando la base de proyección de la figura:

- Aceleración del centro de masa G.
- Acciones de enlace en E.
- Fuerza D ejercida por el cilindro hidráulico en D.



21.- En el dispositivo de la figura, el árbol vertical 4 gira con ω constante conocida. La barra AC gira con $\dot{\Theta}$ constante conocida, respecto a 4, por la acción del cilindro hidráulico 3. El disco 1 tiene masa m y gira con Ω constante conocida respecto a la barra 2. En A y C hay pasadores mientras que en E y B hay rótulas. Las masas de la barra AC y del cilindro hidráulico se consideran despreciables. En el instante de la figura las líneas CD y BE son paralelas. Utilícese la base mostrada en la cual la dirección 3 es normal al plano ACD. Se pide para el instante considerado:

- Aceleración absoluta del punto A mediante composición de movimientos.
- Obtener el sistema de ecuaciones que permite determinar las acciones de enlace en C y la fuerza F del cilindro hidráulico en B.
- Energía cinética del disco.

