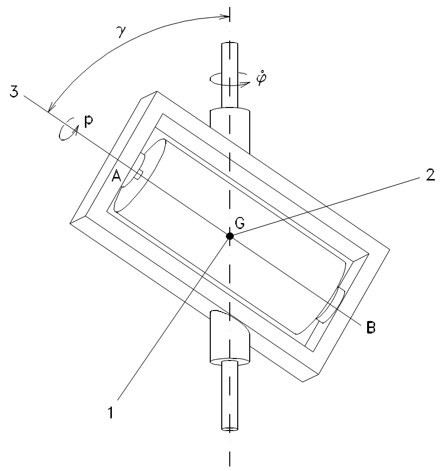
3. PROBLEMAS DE DINÁMICA DEL ESPACIO

3.1. Problemas resueltos

1.- Un cilindro homogéneo de masa m está montado en un marco, de masa despreciable, con una inclinación de ángulo γ respecto de la vertical. Este marco gira con velocidad angular $\dot{\varphi}$ constante en torno del eje vertical, mientras que el cilindro, a su vez, gira respecto del marco con p = cte. Sabiendo que el apoyo A no soporta esfuerzos axiales y que el centro de masas G equidista de los extremos A y B una distancia ℓ, determinar:

a) Reacciones en A y B.

b) Energia cinética del cilindro.



SOLUCIÓN

Dado que las reacciones que se deben calcular comportan la determinación de más de tres incógnitas, se deberán aplicar los teoremas vectoriales de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

La posición del centro de masas, que es al propio tiempo punto de intersección de los ejes físicos de rotación, implica que es un punto fijo y carece, por tanto, de aceleración:

$$\vec{a}_G = 0$$

La velocidad angular $\vec{\Omega}$ del rotor será la composición de las rotaciones del cilindro respecto del marco y la del marco respecto de la referencia fija; en consecuencia:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{p}$$

Para proceder a la determinación del momento cinético deberá elegirse un punto de reducción y un triedro de cálculo. El centro de reducción es, indudablemente, el centro de masas del cilindro, que es al propio tiempo punto fijo. La base de cálculo se elegirá considerando que el momento cinético es una magnitud instrumental que requiere ser derivada para aplicarla al teorema de su mismo nombre. En el caso que se está estudiando, al tratarse de un rotor simétrico respecto del eje AB, las magnitudes de inercia son independientes de cualquier rotación en torno de dicho eje, en consecuencia se adoptará una base solidaria del marco y con su misma velocidad angular $\vec{\dot{\varphi}}$. El eje 3 tendrá la dirección BA; el eje 2 será perpendicular al marco; el eje 1 será ortogonal a los dos anteriores y su sentido será tal que el triedro sea directo.

En estas condiciones, la velocidad angular del cilindro será:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\gamma \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\gamma + p \end{bmatrix}$$

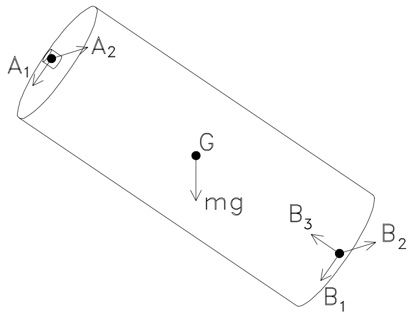
El momento cinético respecto del punto G se expresará mediante el vector

$$\vec{H}_G = \text{II}_G\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\gamma \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\gamma + p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I\,\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\gamma \\ 0 \\ I_3(\dot{\varphi}\cos\gamma + p) \end{bmatrix}$$

Tal como se ha indicado al seleccionar la base de cálculo, la variación temporal del momento cinético deberá considerar el hecho de que la base está en movimiento y no es solidaria del cilindro, sino sólo del marco; en consecuencia deberá aplicarse el operador derivada en base móvil

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3(\dot{\varphi}\cos\gamma + p)\,\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\gamma - I\,\dot{\varphi}^2\cos\gamma\,\text{sen}\,\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez determinadas las expresiones de la aceleración del centro de masas y de la variación temporal del momento cinético, se deberán identificar las acciones que se ejercen sobre el sólido en cuestión.



En el apoyo B actúa una fuerza de módulo y dirección desconocidos que da lugar, por tanto, a tres componentes. En el apoyo A actúa una fuerza de módulo desconocido de cuya dirección se sabe que no tiene componente en la dirección del eje 3, como consecuencia de que este apoyo no soporta esfuerzos axiales. En el punto G actúa, evidentemente, el propio peso del cilindro.

Una vez identificadas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo, puede procederse a aplicar los teoremas vectoriales.

Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G = 0$$

de donde se deducen las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$A_1 + B_1 + mg\,\mathrm{sen}\,\gamma = 0 \qquad (1)$$
$$A_2 + B_2 = 0 \qquad (2)$$
$$B_3 - mg\cos\gamma = 0 \qquad (3)$$

Teorema del momento cinético:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \Sigma\vec{M}_G = \begin{bmatrix} (B_2 - A_2)\,\ell \\ (A_1 - B_1)\,\ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

que da lugar a las dos ecuaciones escalares

$$(4) \qquad \ell\,(B_2 - A_2) = 0$$
$$(5) \qquad \ell\,(A_1 - B_1) = \dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma(I - I_3) - I_3 p\,\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

De la ecuación (3) se deduce directamente

$$B_3 = mg\cos\gamma$$

A partir de las ecuaciones (2) y (4), es fácil encontrar:

$$A_2 = B_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (5) se llega a los valores:

$$B_1 = \frac{-mg}{2} + \frac{1}{2\ell}\left[\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma(I - I_3) - I_3 p\,\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma\right]$$
$$A_1 = \frac{-mg}{2} - \frac{1}{2\ell}\left[\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma(I - I_3) - I_3 p\,\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\gamma\right]$$

La energia cinética del sistema responde a la expresión:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{H}_G = \frac{1}{2}\left[I_2\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\gamma + I_3(\dot{\varphi}\cos\gamma + p)^2\right]$$

2.- Una válvula de mariposa consiste en un disco homogéneo y uniforme, de masa m, montado en el interior de un conducto cilíndrico, de radio r, mediante dos apoyos A y B de tal forma que el disco puede girar entorno al eje AB, con respecto del conducto. Dicho movimiento se consigue aplicando un par M al eje AB.

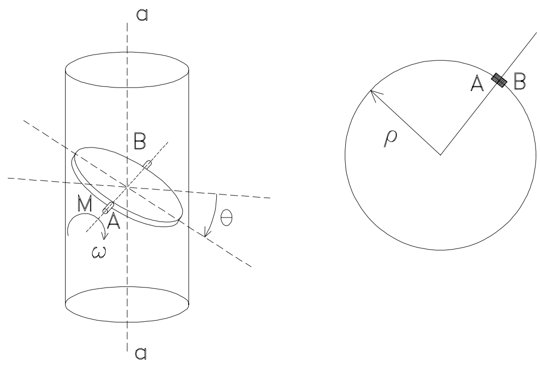
La válvula está montada en un vehículo, de modo que el eje del conducto -aa- es siempre vertical. Dicho vehículo recorre una trayectoria circular de radio ρ y lo hace a velocidad constante v, de tal forma que el eje AB siempre está dirigido hacia el centro de la trayectoria circular (ver planta).

Determinar:

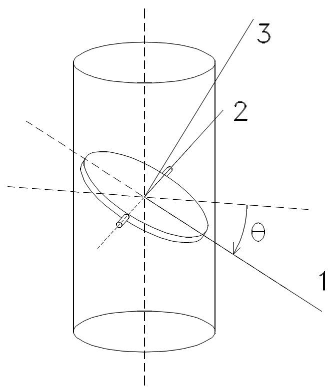
a) Velocidad y aceleración angulares absolutas del disco cuando éste gira con velocidad angular constante ω respecto del conducto.

b) ¿Qué par, M, debe aplicarse al eje AB para que la válvula se abra a velocidad constante ω respecto del conducto?

c) Determinar las reacciones en los apoyos A y B si el apoyo B no puede resistir esfuerzos axiales.



SOLUCIÓN



El sólido rígido objeto de este problema es una placa circular. Por las adecuadas consideraciones de simetría, puede concluirse que dicho sólido es rotor simétrico con respecto del eje perpendicular a la placa por su centro. Esta característica del sólido rígido que se ha de estudiar no permite hacer ninguna modificación en la resolución del problema, al no ser este eje ninguno de los ejes físicos de rotación del sólido. Como consecuencia de lo dicho, la base de proyección deberá ser solidaria del disco en cuestión.

La base de proyección estará constituida por el eje 2, que tendrá la dirección del eje AB y el sentido de A hacia B; el eje 3 perpendicular a la placa y dirigido hacia arriba; el eje 1 tendrá la dirección y sentidos necesarios para que el triedro sea directo. Esta base estará animada del mismo movimiento que tiene el disco y por tanto su velocidad angular será la de éste.

Dado que se piden tanto las reacciones en los apoyos como el par aplicado a la placa circular, se deberá recurrir a las ecuaciones derivadas de los teoremas vectoriales, exigiendo la aplicación tanto de la segunda ley de Newton como del teorema del momento cinético.

Este último teorema del momento cinético requiere la elección del punto de reducción. Cabe la posibilidad de utilizar el centro de masas G del sólido o la de considerar cualquier otro de sus puntos. Dado que no existe ninguno que pueda considerarse fijo en el espacio, parece adecuado escoger, como punto de reducción, el centro de masas del disco.

El hecho de que la válvula esté montada sobre un vehículo que describe una trayectoria circular y que el eje AB mantenga, en todo momento, la dirección radial hace que el disco esté animado de una velocidad angular vertical de módulo V/ρ. En estas condiciones, la velocidad angular absoluta del sólido rígido será:

$$\vec{\Omega}_{Dis} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \omega \\ \frac{v}{\rho}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Al ser la base de proyección solidaria del disco, su velocidad angular será la de éste. Al aplicar el operador derivada en base móvil resultará:

$$\dot{\vec{\Omega}}_{Dis} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{Dis}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_{Dis} \times \vec{\Omega}_{Dis} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{\rho}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ -\frac{v}{\rho}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v\omega}{\rho}\cos\theta \\ 0 \\ -\frac{v\omega}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

Para la aplicación de la segunda ley de Newton será necesario determinar la aceleración del centro de masas del cilindro. Para ello bastará considerar que el punto G describe una trayectoria circular de radio ρ con velocidad v conocida. Como consecuencia de lo dicho, bastará con determinar la componente de arrastre de la aceleración del punto G

$$\vec{a}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v^2}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la determinación de las reacciones en los cojinetes y del par aplicado en A por el motor, se utilizarán los teoremas vectoriales. Será necesario, por tanto, hallar el momento cinético del cilindro y estudiar su variación temporal. Al disponer de la posición del centro de masas G y puesto que la base es solidaria del disco, se podrá escribir:

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{v}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \omega \\ \frac{v}{\rho}\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{I\,v}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ I\,\omega \\ \frac{I_3 v}{\rho}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Dado que se ha escogido una base de trabajo solidaria del eje de revolución del cilindro, y que éste se halla fijo en la plataforma circular que se mueve con velocidad angular ω, la base estará animada de la misma velocidad angular. El hecho de proyectar en una base en movimiento obligará a determinar la variación del momento cinético mediante el operador derivada en base móvil. En consecuencia, se podrá escribir:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_{Dis} \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} \frac{v\omega}{\rho}\cos\theta\left(I_3 - 2I\right) \\ \frac{v^2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\left(I_3 - I\right) \\ -\frac{v\omega}{\rho} I_3\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

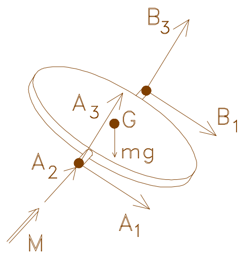
Por tratarse de un disco plano homogéneo y dada la elección de ejes que se ha realizado, se verificará que el momento de inercia respecto del eje 3 es igual a la suma de los momentos de inercia respecto de los ejes uno y dos. Por tanto $I_3 = 2I$.

Para la determinación de las reacciones en los apoyos y del par motor, se deberán aplicar los teoremas vectoriales. Previamente será necesario analizar el sistema de fuerzas actuantes sobre el sólido rígido.

En el apoyo A existirá una reacción de dirección y módulo desconocidos y el par debido al motor M; en el apoyo B existe una reacción contenida en el plano ortogonal al eje AB, el peso propio aplicado en el centro de masas G. Proyectando en la base escogida quedará:

Fuerzas:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{G} = \begin{bmatrix} mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$$



Momentos:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que se ha elegido como punto de reducción el centro de masas del cilindro, será necesario calcular el momento resultante, respecto de dicho punto, de todas las acciones que se ejercen sobre el cuerpo rígido. Para ello habrá que considerar las distancias al punto G de todos los puntos de aplicación de las diferentes fuerzas actuantes e incluir el momento M que se aplica directamente al eje AB por el motor. En estas condiciones, el momento resultante sobre el punto G de reducción será:

$$\Sigma\vec{M}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_3 - A_3)r \\ M \\ (A_1 - B_1)r \end{bmatrix}$$

Una vez analizado el campo de fuerzas y los momentos que actúan sobre el disco, pueden aplicarse los teoremas vectoriales que permitirán plantear las ecuaciones:
Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 + B_1 + mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ A_2 \\ A_3 + B_3 - mg\cos\theta \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v^2}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad A_1 + B_1 = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\
&(2)\quad A_2 = -\frac{mv^2}{\rho} \\
&(3)\quad A_3 + B_3 = mg\cos\theta
\end{aligned}
$$

Teorema del momento cinético:

$$
\Sigma\vec{M}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} (B_3 - A_3)r \\ M \\ (A_1 - B_1)r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta(I_3 - I) \\ -\frac{v\omega}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta\; I_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&(4)\quad r\,(B_3 - A_3) = 0 \\
&(5)\quad M = \frac{v^2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta(I_3 - I) \\
&(6)\quad A_1 - B_1 = -I_3\frac{v\omega}{\rho\, r}\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned}
$$

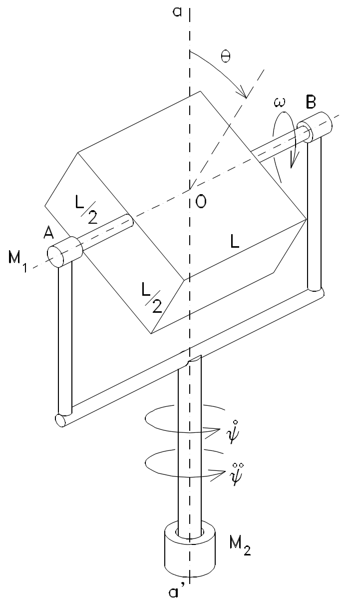
La ecuación (5) permite obtener el valor del par necesario:

$$
M = \frac{v^2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta(I_3 - I)
$$

De las ecuaciones (1) y (6) se obtiene:

$$
A_1 = -\frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} - \frac{I_3 v\omega\,\mathrm{sen}\,\theta}{2\rho r}
$$

$$
B_1 = -\frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} + \frac{I_3 v\omega\,\mathrm{sen}\,\theta}{2\rho r}
$$



La ecuación (2) permite escribir, directamente,

$$
A_2 = -\frac{mv^2}{\rho}
$$

De las ecuaciones (3) y (4) se deduce:

$$
A_3 = B_3 = \frac{mg\cos\theta}{2}
$$

3.- Un paralelepípedo homogéneo de masa m, cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es L/2, está soldado al eje AB, el cual está soportado por una horquilla y gira accionado por el motor M_1 con velocidad angular constante ω. Al propio tiempo la horquilla gira con velocidad angular $\dot{\Psi}$ y aceleración angular $\ddot{\Psi}$ en torno al eje vertical accionado por el motor M_2. Se sabe que el radio de giro de la horquilla respecto del eje a-a' es k y su masa M. Determinar, suponiendo que el apoyo B no soporta esfuerzos axiales:

a) Velocidad y aceleración angulares del paralelepípedo.

b) Aceleración del centro de masas del bloque.

c) Reacciones en A y B.

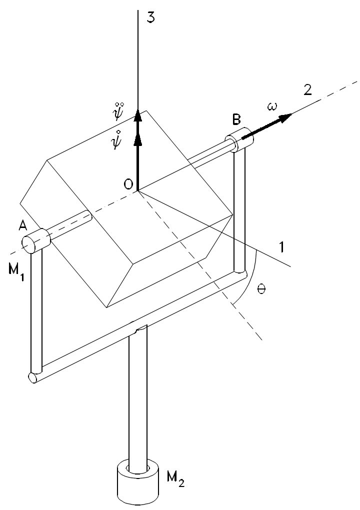
d) Momento necesario suministrado por el motor M_1.

e) Momento necesario suministrado por el motor M_2.

SOLUCIÓN

El paralelepípedo objeto de este problema es un semicubo. Mediante la aplicación de las consideraciones de simetría al cubo completo y utilizando la propiedad del sólido mitad, puede concluirse que dicho semicubo es rotor esférico con respecto del punto O, centro de la cara superior. Esta característica del sólido rígido que se ha de estudiar permite una gran flexibilidad a la hora de elegir la base de proyección.

Dado que se piden tanto las reacciones en los apoyos como los pares aplicados, se deberá recurrir a las ecuaciones derivadas de los teoremas vectoriales. El hecho de que se requieran más de tres incógnitas permite prever la necesidad de aplicar tanto la segunda ley de Newton como el teorema del momento cinético.



La aplicación del teorema del momento cinético requiere la elección del punto de reducción. Cabe la posibilidad de utilizar el centro de masas G del semicubo o la de considerar el punto O, de intersección de los ejes físicos de rotación, y por tanto fijo en el espacio.

Teniendo en cuenta el hecho de que el sólido es un rotor esférico con respecto al punto O, parece más adecuado elegir, como punto de reducción, dicho punto fijo. Ello permite adoptar cualquier base de proyección, puesto que, al tratarse de un rotor esférico, la matriz de inercia será indiferente a cualquier orientación de la base.

A fin de simplificar las proyecciones, es conveniente escoger una base solidaria del eje AB y, por tanto, animada de la velocidad $\vec{\dot{\Psi}}$, pero no de la velocidad $\vec{\omega}$. De este modo, el eje 2 tendrá la dirección del eje AB y el sentido de A hacia B; el eje 3 será vertical y dirigido hacia arriba; el eje 1 tendrá la dirección y sentidos necesarios para que el triedro sea directo.

En estas condiciones, la velocidad angular absoluta del sólido rígido será

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Al ser la base de proyección solidaria del eje AB, su velocidad angular será

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\dot{\psi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Para encontrar la aceleración angular del sólido rígido, deberá determinarse la variación temporal del vector velocidad angular. Para hallar esta derivada será necesario considerar que los vectores se han proyectado sobre una base móvil y por consiguiente será necesario utilizar el operador derivada en base móvil:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\,\omega \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

Para la determinación de la aceleración del centro de masas del semicubo, bastará con considerar que, tanto el punto O (fijo) como el punto G pertenecen al mismo sólido rígido, del cual se conocen su velocidad y aceleración angulares; por lo tanto se podrá aplicar la expresión general,

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OG}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} \left(\omega^2 + \dot{\psi}^2\right)\frac{L}{4}\operatorname{sen}\theta \\ -\frac{L}{4}\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta - 2\dot{\psi}\omega\frac{L}{4}\cos\theta \\ \omega^2\frac{L}{4}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Para determinar las reacciones en los cojinetes y el par aplicado en A por el motor, se utilizarán los teoremas vectoriales. Será necesario, por tanto, hallar el momento cinético del paralelepípedo y estudiar su variación temporal.

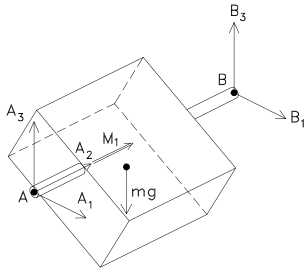
Al haber elegido el punto O como punto de reducción y dado que, respecto de dicho punto, se trata de un rotor esférico se podrá escribir:

$$\vec{H}_O = \mathrm{II}_O\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ I\,\omega \\ I\,\dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Dado que la base en que se está trabajando se mueve, para hallar la variación temporal del momento cinético se deberá aplicar el operador derivada en base móvil, en consecuencia:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_O = \begin{bmatrix} -I\,\dot{\psi}\,\omega \\ 0 \\ I\,\ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

Una vez determinada la aceleración del centro de masas del sólido y la variación temporal del momento cinético, será necesario analizar el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido rígido.



En el apoyo A existirá una reacción de dirección y módulo desconocidos y el par debido al motor M_1; en el apoyo B existe una reacción contenida en el plano ortogonal al eje AB, el peso propio aplicado en el centro de masas G. Proyectando en la base escogida quedará:

Fuerzas:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

Momentos:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que, por las razones indicadas, se ha elegido como punto de reducción el punto O, será necesario calcular el momento resultante, respecto de dicho punto, de todas las acciones que se ejercen sobre el cuerpo rígido. Para ello habrá que considerar las distancias al punto O de todos los puntos de aplicación de las diferentes fuerzas actuantes e incluir el momento M_1 que se aplica directamente al eje AB por el motor. En estas condiciones el momento resultante sobre el punto O de reducción será:

$$\Sigma\vec{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-L}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \\ \frac{-L}{4}\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_3 - A_3)L \\ M_1 + \frac{L}{4}\,mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ (A_1 - B_1)L \end{bmatrix}$$

Una vez analizado el campo de fuerzas y momentos que actúan sobre el paralelepípedo pueden aplicarse los teroremas vectoriales, que permitirán plantear las ecuaciones:

Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}_G \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 \\ A_3 + B_3 - mg \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \left(\omega^2 + \dot{\psi}^2\right)\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{L}{4}\left(\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\dot{\psi}\,\omega\cos\theta\right) \\ \frac{L}{4}\omega^2\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$(1)\quad A_1 + B_1 = m\left(\omega^2 + \dot{\psi}^2\right)\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$(2)\quad A_2 = -\frac{L}{4}\left(\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\dot{\psi}\,\omega\cos\theta\right)$$

$$(3)\quad A_3 + B_3 = mg + \frac{L}{4}\omega^2\cos\theta$$

Teorema del momento cinético:

$$\Sigma\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \left(B_3 - A_3\right)L \\ M_1 + \frac{L}{4}mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \left(A_1 - B_1\right)L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I\,\dot{\psi}\,\omega \\ 0 \\ I\,\ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$(4)\quad \left(B_3 - A_3\right)L = -I\,\dot{\psi}\,\omega$$

$$(5)\quad M_1 = -\frac{L}{4}mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$(6)\quad \left(A_1 - B_1\right)L = I\,\ddot{\psi}$$

De las ecuaciones (1) y (5), resultará:

$$A_1 = m\left(\omega^2 + \dot{\psi}^2\right)\frac{L}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{I\,\ddot{\psi}}{2L}$$

$$B_1 = m\left(\omega^2 + \dot{\psi}^2\right)\frac{L}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{I\,\ddot{\psi}}{2L}$$

De las ecuaciones (3) y (4), se obtendrá:

$$A_3 = \frac{mg}{2} + \frac{m\,L\,\omega^2\cos\theta}{8} + \frac{I\,\dot{\psi}\,\omega}{2L}$$

$$B_3 = \frac{mg}{2} + \frac{m\,L\,\omega^2\cos\theta}{8} - \frac{I\,\dot{\psi}\,\omega}{2L}$$

De la ecuación (2), directamente

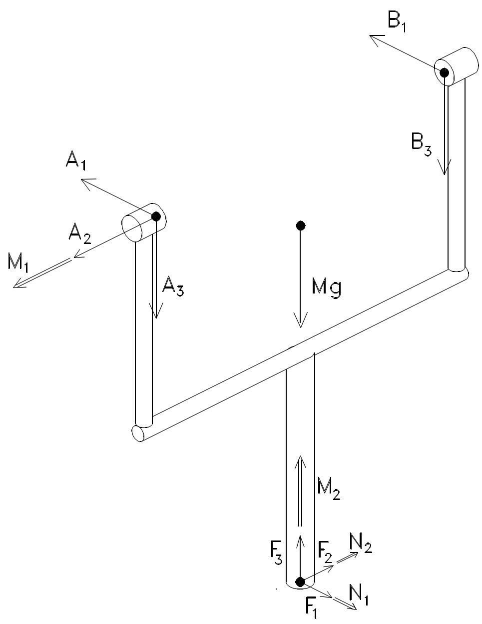
$$A_2 = -\frac{mL}{2}\left(\ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta - 2\dot{\psi}\,\omega\cos\theta\right)$$

La ecuación (5), por su parte, permite obtener:

$$M_1 = -\frac{L}{4}\,mg\,\text{sen}\,\theta$$

Para determinar el par necesario suministrado por el motor M_2, que permite el movimiento en las condiciones cinemáticas que se han especificado, será necesario establecer la ecuación del movimiento de la horquilla. Paso previo para ello es la determinación del conjunto de acciones que se ejercen sobre ésta.

Tal como se ilustra en la figura, como consecuencia de la tercera ley de Newton, en los puntos A y B actúan reacciones iguales y de sentido opuesto a las que se han supuesto en el paralelepípedo. También debe tenerse en cuenta el par reacción, de sentido opuesto al par motor M_1 considerado antes y actuando sobre el soporte en el punto A.



También se incluye el par M_2 creado por el motor inferior, y el peso Mg propio de la horquilla aplicado en su centro de masas. Finalmente, deben añadirse las acciones de enlace que mantienen la horquilla veritcal y, no obstante, le permiten girar alrededor de su propio eje. Como la horquilla *no puede trasladarse* en las direcciones 1, 2 y 3, *existirán* las fuerzas de enlace F_1, F_2 y F_3. Por otra parte, la horquilla únicamente puede girar en la dirección 3. O sea, las rotaciones alrededor de 1 y 2 en el punto F *no pueden efectuarse*. De ahí que *existan* los momentos de enlace N_1 y N_2 .

Dado que se conoce el radio de giro k de la horquilla, el momento de inercia de ésta, respecto del eje 3, será mk^2.

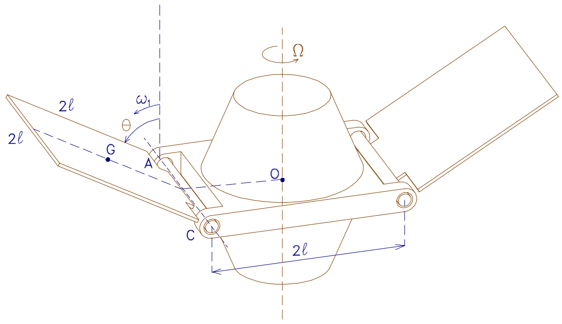
La tercera componente del teorema del momento cinético permite escribir:

$$M_2 - L\,A_1 - L\,B_1 = m\,k^2\ddot{\psi}$$

Esta última ecuación, combinada con la ecuación (6) encontrada anteriormente, permite determinar el valor del par M_2 necesario, que será:

$$M_2 = \left(I + m\,k^2\right)\ddot{\psi}$$

4.- Un satélite de comunicaciones consta de un cuerpo central, de altura 2ℓ, y dos paneles solares cuadrados de lado 2ℓ y masa m cada uno. Uno de estos paneles solares está articulado al cuerpo central, a mitad de su altura, mediante dos apoyos A y C. El apoyo C incluye un motor no visto, de par M, que sirve para extender el panel, pero no absorbe esfuerzos en dirección de la recta AC.



Cuando se realiza el proceso de extensión del panel solar, el satélite está girando con velocidad angular constante Ω y su punto O está animado de una aceleración lineal a de dirección paralela a AC. Como consecuencia de la acción del motor en C, el panel gira con una velocidad ω_1 constante con respecto del cuerpo del satélite. Determinar:

a) Aceleración angular absoluta del panel solar.

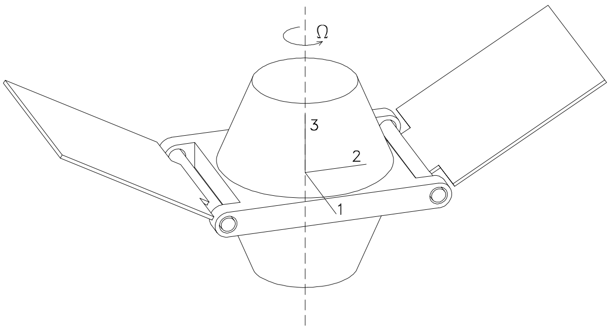
b) Aceleración absoluta del centro de masas del panel.

c) Reacciones en A y en C.

d) Par M necesario en el motor C para que se produzca el movimiento descrito.

SOLUCIÓN

Para realizar el primer apartado se utilizara una base 123, solidaria del cuerpo central del satélite y moviéndose con la velocidad angular $\vec{\Omega}$ de éste.



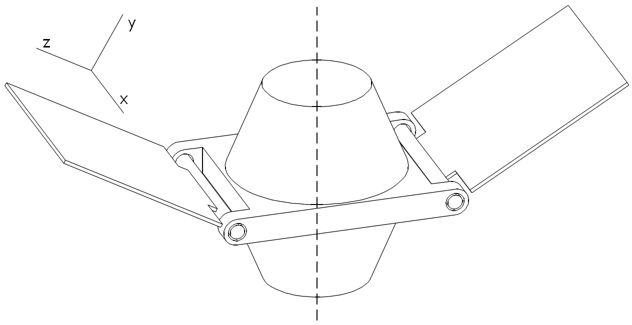
En este caso, la velocidad angular absoluta del panel solar tendrá dos componentes, una debida al arrastre con el satélite (Ω) y una componente relativa al cuerpo central del mismo (ω_1). En estas condiciones, pese a que las velocidades angulares involucradas sean constantes en módulo, siempre existirá aceleración angular. Es evidente que la velocidad angular relativa del panel no mantiene su dirección constante en el espacio y, por lo tanto, existe aceleración angular. Para determinarla, se podrá recurrir a la derivación en base móvil; las velocidades angulares del sólido y de los ejes de proyección son, en la base propuesta:

$$\vec{\Omega}_{Sol} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \qquad \vec{\Omega}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

Aplicando ahora el operador derivada en base móvil, quedará:

$$\dot{\vec{\Omega}}_{Sol} = \frac{d\vec{\Omega}_{Sol}}{dt} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{Sol}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_{Sol} = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega\ \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la determinación de los demás apartados será más cómodo trabajar con una base xyz solidaria del panel solar en la forma indicada en la figura. Ello se debe, fundamentalmente, a la necesidad de que, al aplicar el teorema del momento cinético, los términos de la matriz de inercia sean invariantes con el tiempo. Como, por otra parte, será necesario conocer la aceleración del centro de masas del panel para poder aplicar la segunda ley de Newton al sólido rígido, se deberá determinar en dicha base.



En esta nueva base la aceleración angular del panel tendrá la siguiente proyección:

$$\dot{\vec{\Omega}}_{Sol} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega\ \omega_1 \cos\theta \\ -\Omega\ \omega_1 \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Para la determinación de la aceleración del centro de masas, G, del panel se recurrirá al hecho de que el punto medio de la articulación del panel con el cuerpo central (llamado B) y el punto G pertenecen al mismo sólido y, por lo tanto, es posible utilizar la expresión:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\Omega}_{Sol} \times (\vec{\Omega}_{Sol} \times \overrightarrow{BG}) + \dot{\vec{\Omega}}_{Sol} \times \overrightarrow{BG}$$

El punto medio de la articulación B pertenece, simultáneamente, al cuerpo central del satélite y, en consecuencia, su aceleración valdrá:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OB})$$

de modo que sustituyendo los valores de los vectores, todos ellos conocidos, proyectados en la base de trabajo actual resultará:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OB}) + \vec{\Omega}_{Sol} \times (\vec{\Omega}_{Sol} \times \overrightarrow{BG}) + \dot{\vec{\Omega}}_{Sol} \times \overrightarrow{BG} = \begin{bmatrix} a + 2\,\Omega\,\omega_1 \ell \cos\theta \\ \Omega^2 \ell \cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) \\ -\Omega^2 \ell \operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) - \omega_1^2 \ell \end{bmatrix}$$

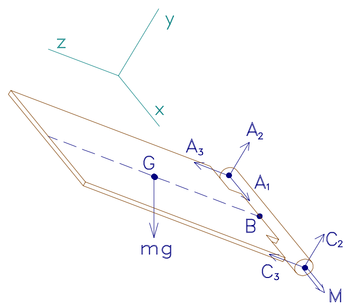
Para la determinación de las reacciones en los cojinetes y del par aplicado en A por el motor, se utilizarán los teoremas vectoriales. Será necesario, por tanto, hallar el momento cinético del panel solar y estudiar su variación temporal.

Al disponer de la posición del centro de masas G y puesto que la referencia es solidaria del sólido rígido, se podrá escribir:

$$\vec{H}_G = \mathrm{II}_G\,\vec{\Omega}_{Sol} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I' & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \Omega \operatorname{sen}\theta \\ \Omega \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\,\omega_1 \\ I'\Omega \operatorname{sen}\theta \\ I\,\Omega \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para hallar la variación temporal del momento cinético se deberá aplicar el operador derivada en base móvil, dado que la base en que se está trabajando se mueve con el cuerpo rígido, en consecuencia

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} (I - I')\,\Omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\ I'\Omega\,\omega_1 \cos\theta \\ (I' - 2I)\,\Omega\,\omega_1 \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$



Una vez se ha determinado el momento cinético y su variación temporal, se deberá realizar un análisis de las acciones que se ejercen sobre el sistema.

Fuerzas:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \operatorname{sen}\theta \\ -mg \cos\theta \end{bmatrix}$$

Momentos:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el sistema, respecto del punto G, será:

$$\Sigma \vec{M}_G = \overrightarrow{GC} \times \vec{C} + \overrightarrow{GA} \times \vec{A} + \vec{M} = \begin{bmatrix} M + C_2 \ell + A_2 \ell \\ -C_3 \ell - A_1 \ell + A_3 \ell \\ C_2 \ell - A_2 \ell \end{bmatrix}$$

Los teoremas vectoriales permiten plantear ahora las seis ecuaciones siguientes:
Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ C_2 + A_2 - mg \operatorname{sen}\theta \\ C_3 + A_3 - mg\cos\theta \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a + 2\Omega\, \omega_1 \ell \cos\theta \\ \Omega^2 \ell \cos\theta\, (1 + \operatorname{sen}\theta) \\ -\Omega^2 \ell \operatorname{sen}\theta\, (1 + \operatorname{sen}\theta) - \omega_1^2 \ell \end{bmatrix}$$

$$A_1 = m\, a + 2m\, \ell\, \Omega\, \omega_1 \cos\theta$$

$$(1) \quad C_2 + A_2 = m\, g \operatorname{sen}\theta + m\, \Omega^2 \ell \cos\theta\, (1 + \operatorname{sen}\theta)$$

$$(2) \quad C_3 + A_3 = m\, g\cos\theta - m\, \Omega^2 \ell \operatorname{sen}\theta\, (1 + \operatorname{sen}\theta) - m\, \omega_1^2 \ell$$

Teorema del momento cinético.

$$\begin{bmatrix} M + (C_2 + A_2)\, \ell \\ (A_3 - A_1 - C_3)\, \ell \\ (C_2 - A_2)\, \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - I')\, \Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ I'\Omega\, \omega_1 \cos\theta \\ (I' - 2I)\, \Omega\, \omega_1 \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad M + (C_2 + A_2)\, \ell = (I - I')\, \Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$(4) \quad (A_3 - A_1 - C_3)\, \ell = I'\Omega\, \omega_1 \cos\theta$$

$$(5) \quad (C_2 - A_2)\, \ell = (I' - 2I)\, \Omega\, \omega_1 \operatorname{sen}\theta$$

De las ecuaciones (1) y (3), resultará:

$$M = (I - I')\, \Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - m\, g\, \ell \operatorname{sen}\theta - m\, \Omega^2 \ell^2 \cos\theta (1 + \operatorname{sen}\theta)$$

De las ecuaciones (1) y (5), se obtendrá:

$$C_2 = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{2} + \frac{m\,\Omega^2 \ell \cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)}{2} + \frac{(I' - 2I)}{2\ell}\Omega\,\omega_1\,\text{sen}\,\theta$$

$$A_2 = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{2} + \frac{m\,\Omega^2 \ell \cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)}{2} - \frac{(I' - 2I)}{2\ell}\Omega\,\omega_1\,\text{sen}\,\theta$$

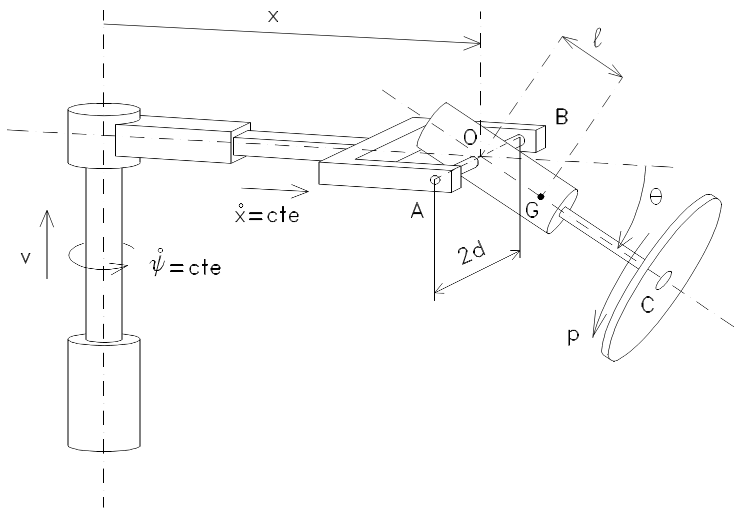
De las ecuaciones (2) y (4), junto con el valor de A_1, se obtiene:

$$A_3 = \frac{mg\cos\theta}{2} - \frac{m\,\Omega^2 \ell\,\text{sen}\,\theta(1+\text{sen}\,\theta)}{2} - \frac{m\,\omega_1^2 \ell}{2} + \frac{I'\Omega\,\omega_1\cos\theta}{2\ell} + \frac{m\,a}{2} + m\,\Omega\,\omega_1 \ell\cos\theta$$

$$C_3 = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{2} - \frac{m\,\Omega^2 \ell\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)}{2} - \frac{m\,\omega_1^2 \ell}{2} - \frac{I'\Omega\,\omega_1\cos\theta}{2\ell} - \frac{m\,a}{2} - m\,\Omega\,\omega_1 \ell\cos\theta$$

5.- El manipulador de la figura se mueve con v=cte. $\dot{x}$ =cte. y $\dot{\Psi}$ =cte. En su extremo se ha montado un motor que puede girar libremente en torno al eje AB. El disco y el rotor del motor son solidarios y giran con velocidad angular constante p en torno al eje OC. El centro de masas G del motor y el disco está sobre el eje OC a una distancia ℓ del punto O. El cojinete en B no puede absorber esfuerzos axiales. Determinar:

a) Velocidad angular de la horquilla.
b) Velocidad angular de la recta OC.
c) Aceleración angular del conjunto disco-rotor.
d) Aceleración del punto A.
e) Aceleración del punto G.
f) Reacciones en el apoyo A.



SOLUCIÓN

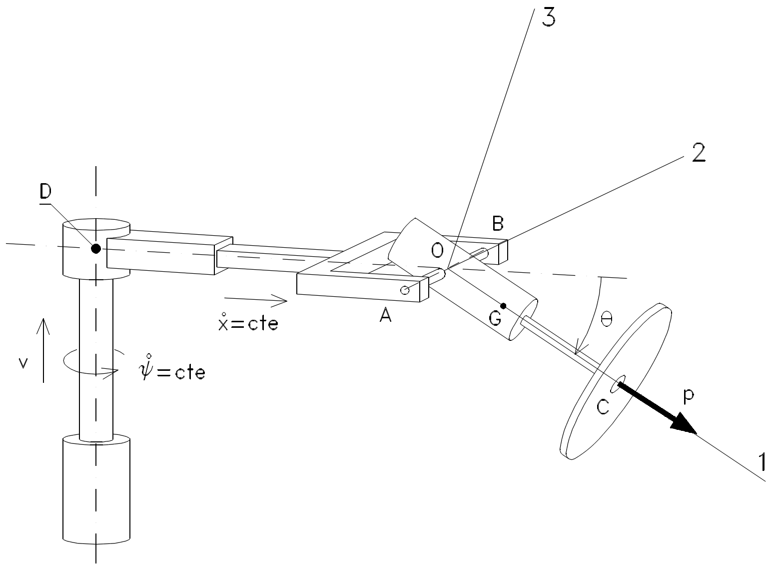
a) La horquilla soporte cambia de orientación como consecuencia, únicamente, del giro $\dot{\Psi}$ de la armadura entorno del eje vertical.

b) La recta OC, o lo que es equivalente, el estátor del motor, está afectada de un movimiento $\dot{\theta}$ respecto de la horquilla y ésta, a su vez, está animada del movimiento $\dot{\Psi}$ en torno del eje vertical. En consecuencia la recta OC estará animada de una velocidad angular que será la suma de ambas velocidades angulares $\dot{\theta}$ y $\dot{\Psi}$.

c) La velocidad angular del disco-rotor incluirá, además de las anteriores, la velocidad angular del rotor respecto del estátor que es p en la dirección de la recta OC de modo que:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{p}$$

Para hallar la aceleración angular es necesario encontrar la variación de la velocidad angular con el tiempo. Aunque el enunciado establece que $\dot{\Psi}$ y p son constantes, esta característica sólo se refiere a su módulo. Es evidente que, en el caso de la velocidad de rotación p, su dirección es variable como consecuencia de la existencia de las rotaciones $\dot{\Psi}$ y $\dot{\theta}$. En el caso de la velocidad $\vec{\dot{\theta}}$, su módulo puede variar, puesto que no hay razón que se oponga a ello, y en lo concerniente a la dirección, ésta efectivamente varía como consecuencia de la existencia de $\dot{\Psi}$.



Para poder encontrar la aceleración angular del disco-rotor, se deberá obtener la derivada de la velocidad angular absoluta respecto del tiempo. Para desarrollar el problema es necesario escoger una base de proyección. Dicha base se elegirá de forma que las proyecciones a realizar sean lo más sencillas posible y procurando que su movimiento sea fácilmente identificable. La base escogida, en este caso, será solidaria del estátor del motor (línea OC), de manera que el eje 1 tendrá la dirección OC, el eje 2 la dirección OB, mientras que el eje 3 será perpendicular a ambos y en el sentido que defina un triedro directo (dextrógiro) con los otros dos.

Dicho triedro, al ser solidario del estátor, estará animado de la velocidad angular de éste:

$$\vec{\Omega}_b = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

El sistema disco-rotor tendrá, por su parte, una velocidad angular que se podrá expresar como:

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{p} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + p \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Para determinar la aceleración angular del conjunto disco-rotor se deberá derivar este último vector $\vec{\Omega}$. Al estar expresado en una base móvil obligará a tener en cuenta este hecho y deberá utilizarse el operador derivada en base móvil:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\,\dot{\psi}\cos\theta \\ \ddot{\theta} + \dot{\psi}\,p\cos\theta \\ -\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \dot{\theta}\,p \end{bmatrix}$$

d) Antes de seguir adelante se calculará la aceleración del punto O que, por hallarse en la intersección de los ejes AB y OC, será útil tanto para la determinación de la aceleración del punto A como para la del punto G.

Dado que el punto O se halla en la horquilla, para encontrar su aceleración se considerará como referencia móvil el armazón giratorio vertical que se mueve con velocidad lineal v y angular $\dot{\Psi}$. En estas condiciones se tratará de un problema de composición de movimientos de modo que:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

La aceleración de arrastre se podrá determinar considerando que el punto O se mueve solidario con el armazón, de manera que

$$\vec{a}_a = \vec{\dot{\psi}} \times (\vec{\dot{\psi}} \times \overrightarrow{DO})$$

La aceleración relativa será nula, dado que se ha establecido que $\dot{x}$ = cte. La aceleración de Coriolis será:

$$\vec{a}_c = 2\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{x}}$$

De este modo, la aceleración del punto O, expresada en la base de trabajo que se ha establecido, será:

$$\vec{a}_O = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}^2 x \cos\theta \\ 2\ \dot{\psi}\ \dot{x} \\ -\dot{\psi}^2\ x \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

e) El punto G se halla sobre la recta OC, en consecuencia su aceleración podrá determinarse a partir de la del punto O, teniendo en consideración que ambos puntos pertenecen a una recta que está animada de una velocidad angular y de una aceleración angular conocidas, que son las del estátor, y que ya hemos visto que coincidía con los de la base adoptada. Por tanto:.

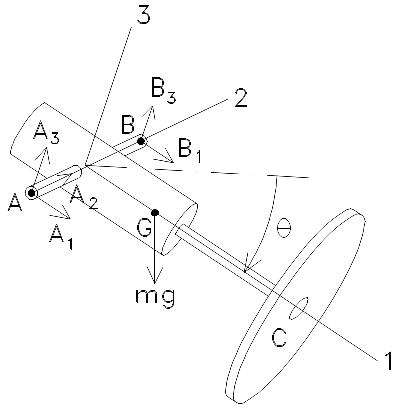
$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\Omega}_b \times (\vec{\Omega}_b \times \overrightarrow{OG}) + \dot{\vec{\Omega}}_b \times \overrightarrow{OG}$$

$$\vec{a}_G = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}^2 x \cos\theta - \dot{\theta}^2 \ell - \dot{\psi}^2 \ell \cos^2\theta \\ 2\dot{\psi}\ \dot{x} - 2\dot{\psi}\ \dot{\theta}\ \ell \operatorname{sen}\theta \\ -\dot{\psi}^2 x \operatorname{sen}\theta - \dot{\psi}^2 \ell \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \ddot{\theta}\ell \end{bmatrix}$$

La expresión de la aceleración angular de la base podrá determinarse derivando la velocidad angular de ésta:

$$\dot{\vec{\Omega}}_b = \frac{d\vec{\Omega}_b}{dt} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_b}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_b = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\ \dot{\theta} \cos\theta \\ \ddot{\theta} \\ -\dot{\psi}\ \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

f) Para hallar las reacciones en los apoyos será necesario un análisis de los campos de fuerzas y momentos que actúan sobre el sólido en cuestión. El diagrama de sólido libre permite identificar las tres reacciones en el apoyo A; en el apoyo B tan sólo existen dos reacciones, debido a que el cojinete en este apoyo no es capaz de absorber esfuerzos axiales. En el centro de masas se encontrará aplicado el peso del sistema.



Para determinar estas reacciones en los apoyos, se recurrirá a los teoremas vectoriales de la cantidad de movimiento y del momento cinético. Para aplicar éste último será necesario elegir una base de proyección, un punto de reducción y, en función de éstos, calcular la variación temporal del momento cinético respecto de dicho punto.

En estas condiciones y conocida la aceleración del centro de masas, se podrá escribir:
Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$A_1 + B_1 + mg\,\text{sen}\,\theta = -m\left(\dot{\psi}^2 x\cos\theta + \dot{\theta}^2\ell + \dot{\psi}^2\ell\cos^2\theta\right)$$
$$A_2 = 2m\,\dot{\psi}\left(\dot{x} - \dot{\theta}\,\ell\,\text{sen}\,\theta\right)$$
$$A_3 + B_3 - mg\cos\theta = -m\left(\dot{\psi}^2 x\,\text{sen}\,\theta + \dot{\psi}^2\ell\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \ddot{\theta}\,\ell\right)$$

de donde se deduce, directamente, que:

$$A_2 = 2m\,\dot{\psi}\left(\dot{x} - \dot{\theta}\,\ell\,\text{sen}\,\theta\right)$$

Para aplicar el teorema del momento cinético, se elegirá, en un primer planteamiento, el punto O, que no es un punto de aceleración nula, ni es el centro de masas ni, evidentemente, está acelerado hacia el centro de masas del motor. En lo concerniente a la base de proyección, la que se ha adoptado es válida, dado que, al ser rotor simétrico respecto del eje OC, el giro alrededor de dicho eje no modificará los momentos y productos de inercia y permitirá la existencia de un grado de libertad entre el sólido y la base. En estas condiciones podrá aplicarse la expresión general del teorema del momento cinético respecto de un punto arbitrario, que permitirá escribir:

$$\Sigma\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} + \overrightarrow{OG}\times m\,\vec{a}_O$$

El momento cinético, respecto de O es:

$$\vec{H}_O = \mathrm{II}_O\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I_1'\left(p - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\right) \\ I_2'\dot{\theta} \\ I_2'\dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Dado que el vector $\overrightarrow{H_O}$ se expresa en una base móvil, deberá tenerse en cuenta este hecho y utilizar el operador derivada en base móvil, de modo que

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b\times\vec{H}_O = \begin{bmatrix} -I_1'\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta \\ I_2'\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\text{sen}\theta\cos\theta\right) + I_1'\left(p - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta \\ -2I_2'\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta - I_1'\left(p - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\right)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

donde la aplicación del teorema de Steiner permite relacionar los momentos centrales de inercia con los empleados en esta ocasión, de modo que:

$$I_1' = I_1$$
$$I_2' = I_2 + m\ell^2$$

Teorema del momento cinético:

$$\Sigma\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} + \overrightarrow{OG} \times m\,\vec{a}_O$$

de donde se obtienen las ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}
d\left(B_3 - A_3\right) &= -I_1'\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta \\
\ell\left(mg\cos\theta\right) &= I_1'\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + I_2'\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) + m\dot{\psi}^2 x\ell\,\mathrm{sen}\,\theta \\
d\left(A_1 - B_1\right) &= -I_1'\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\theta} - 2I_2'\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2m\ell\,\dot{\psi}\,\dot{x}
\end{aligned}$$

De modo que combinando la tercera de las ecuaciones escalares, consecuencia de la aplicación del teorema de la cantidad de movimiento, con la primera de las que se acaban de obtener, se deduce que:

$$A_3 = \frac{I_1'}{2d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{I_1'}{2\ell}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + \left(\frac{I_2'}{2\ell} - \frac{m\ell}{2}\right)\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)$$

donde, si se considera lo dicho respecto de los momentos de inercia quedará:

$$A_3 = \frac{I_1}{2d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{I_1}{2\ell}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + \frac{I_2}{2\ell}\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)$$

en función de los momentos centrales de inercia. Combinando ahora la primera de las ecuaciones resultado del teorema de la cantidad de movimiento con la tercera de las que se obtienen del teorema del momento cinético, resultará

$$A_1 = \frac{m\ell\dot{\psi}}{d}\dot{x} - m\left[\dot{\psi}^2\cos\theta\left(x + \ell\cos\theta\right) + \dot{\theta}^2\ell + g\,\mathrm{sen}\,\theta\right] - \frac{I_1'}{2d}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\theta} - \frac{I_2'}{d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que, en función de los momentos centrales de inercia, será:

$$A_1 = \frac{m\ell\dot{\psi}}{d}\left(\dot{x} - \dot{\theta}\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \frac{m}{2}\left[\dot{\psi}^2\cos\theta\left(x + \ell\cos\theta\right) + \dot{\theta}^2\ell + g\,\mathrm{sen}\,\theta\right] - \frac{I_1}{2d}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\theta} - \frac{I_2}{d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Para contrastar los resultados se volverán a calcular las reacciones en A utilizando otro punto de aplicación del teorema del momento cinético. Se eligirá como punto de reducción el centro de masas G. En lo concerniente a la base de proyección, la que se ha adoptado es válida, dado que, al ser rotor simétrico respecto del eje OC, el giro alrededor de dicho eje no modificará los momentos y productos de inercia y permitirá la existencia de un grado de libertad entre el sólido y la base. En estas condiciones el momento cinético será:

$$\vec{H}_G = II_G \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I_1\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \\ I_2\dot{\theta} \\ I_2\dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Dado que el vector $\overrightarrow{H_G}$ se expresa en una base móvil, deberá tenerse en cuenta este hecho y utilizar el operador derivada en base móvil, de modo que

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{H}_G = \begin{bmatrix} -I_1\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta \\ I_1\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + I_2\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) \\ -I_1\dot{\theta}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - 2I_2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

En estas condiciones y conocidas la aceleración del centro de masas y la variación temporal del momento cinético pueden aplicarse los teoremas vectoriales:
Teorema del momento cinético:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \Sigma\vec{M}_G = \begin{bmatrix} d\left(B_3 - A_3\right) \\ \ell\left(B_3 + A_3\right) \\ d\left(A_1 - B_1\right) - A_2\ell \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen las ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} d\left(A_3 - B_3\right) &= I_1\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \ell\left(B_3 + A_3\right) &= I_1\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + I_2\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) \\ A_2\ell - d\left(A_1 - B_1\right) &= I_1\dot{\theta}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + 2I_2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

De las dos primeras se halla el valor de A_3:

$$A_3 = \frac{I_1}{2d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{I_1}{2\ell}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\psi}\cos\theta + \frac{I_2}{2\ell}\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)$$

Sustituyendo en la tercera los valores de B_1 y A_2 quedará:

$$A_1 = \frac{m\ell\dot{\psi}}{d}\left(\dot{x} - \dot{\theta}\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \frac{m}{2}\left[\dot{\psi}^2\cos\theta\left(x + \ell\cos\theta\right) + \dot{\theta}^2\ell + g\,\mathrm{sen}\,\theta\right] - \frac{I_1}{2d}\dot{\theta}\left(p - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \frac{I_2}{d}\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$