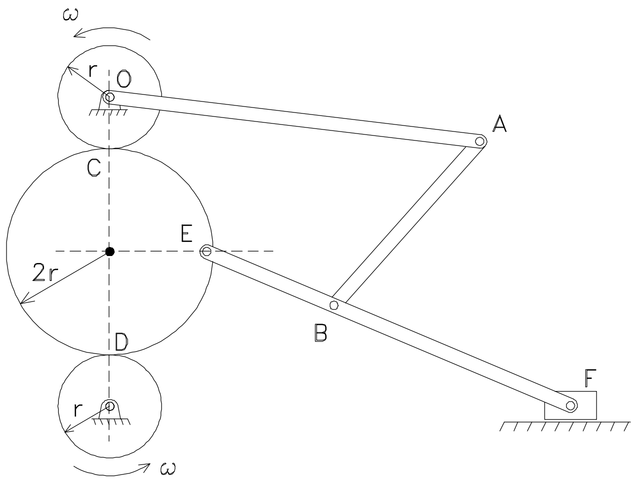
2. PROBLEMAS DE CINEMÁTICA PLANA

2.1. Problemas resueltos

1.- Determinar, gráficamente, la posición del Centro Instantáneo de Rotación (CIR) de la barra AB



SOLUCIÓN

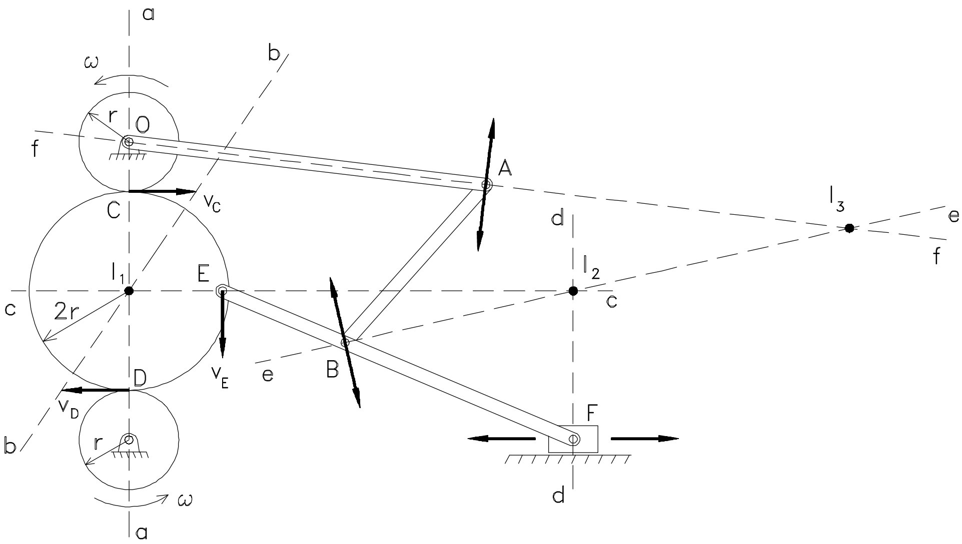
Para poder determinar, de forma gráfica, la posición del CIR de la barra AB es necesario conocer la dirección de las velocidades de dos puntos de dicha barra, siempre y cuando dichas velocidades no sean paralelas. En caso contrario será necesario conocer también los correspondientes módulos.

Dado que la barra OA es una manivela articulada en O a la bancada, la velocidad del punto A será perpendicular a la dirección de dicha barra OA. Como el punto A es al propio tiempo un punto de la barra cuyo CIR se trata de determinar, puede afirmarse que dicho CIR se hallará sobre la recta ff perpendicular a la velocidad de A (ver figura de la página siguiente).

En lo que concierne al punto B, al ser un punto intermedio de la barra EF, no se puede identificar de forma directa la dirección de su velocidad y, por tanto, se deberá recurrir a un procedimiento indirecto, que permita encontrar el CIR de la barra EF.

El extremo F de esta barra tiene una velocidad que es paralela a la bancada, independientemente de su sentido, y por tanto el CIR de EF se deberá hallar sobre la recta perpendicular a dicha velocidad, es decir, la recta dd.

El extremo E, por su parte, está articulado a un disco cuyo movimiento está condicionado por el de los rodillos periféricos que mantienen contacto sin deslizamiento con respecto de éste . Como consecuencia de la condición de contacto sin deslizamiento los puntos del rodillo superior y del disco que coinciden en C tienen la misma velocidad. Lo propio ocurre con los puntos del rodillo inferior y del disco que coinciden en D. Pese a que ambas velocidades son paralelas, lo que llevaría a una indeterminación, el hecho de que los radios de ambos rodillos y sus respectivas velocidades angulares sean iguales permite afirmar que los módulos de las velocidades de C y D son idénticos. Dado que el CIR del disco debe estar sobre la recta perpendicular a la dirección de la velocidad de C y D, puede afirmarse que dicho polo de velocidades se halla sobre la recta aa perpendicular a ambas.



Por otra parte, el hecho de que la velocidad de los puntos de un sólido sea proporcional a la distancia al CIR, permite afirmar que el polo se hallará sobre la recta bb que une los extremos de los respectivos vectores velocidad. El hecho de que el CIR del disco pertenezca simultáneamente a ambas rectas permite afirmar que éste es el punto I_1 de intersección entre ambas. En este caso, al ser ambos vectores de velocidad opuestos y del mismo módulo, llevan a que el punto I_1 coincida con el centro del disco.

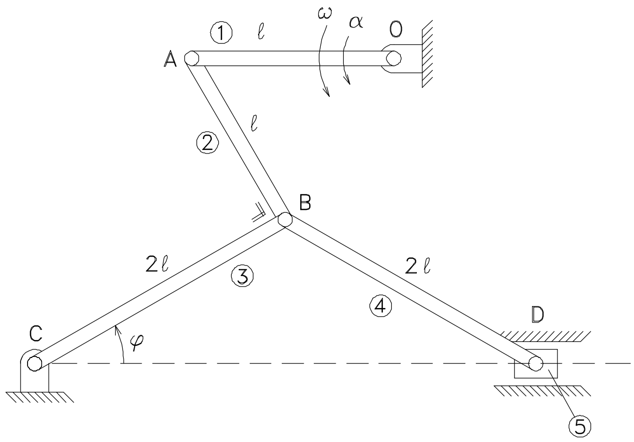
Una vez identificado el punto I_1 como CIR del disco, queda determinada la dirección de la velocidad de todos los puntos del mismo, y en particular la del punto E, que será ortogonal a la recta I_1E. Dado que el punto E pertenece simultáneamente al disco y a la barra EF, puede afirmarse que el polo de velocidades de esta última barra se hallará sobre la recta cc perpendicular a la dirección de la velocidad de E. La conclusión final para esta barra será que el CIR de la misma se hallará en la intersección de las rectas cc y dd, por tanto, en el punto I_2.

El razonamiento, ahora, es reiterativo; si el punto B pertenece a la barra EF, su velocidad debe ser perpendicular a la recta I_2B. Al ser B un punto de la barra AB, el polo de velocidades de ésta última deberá hallarse sobre la recta ee. Por lo que el CIR de la barra AB estará en el punto I, intersección de las rectas ee y ff perpendiculares, respectivamente, a las velocidades de los puntos B y A.

2.- La figura representa un dispositivo para prensar. En el instante considerado en la figura, la manivela OA de longitud ℓ es horizontal y son conocidas su velocidad y aceleración angulares. El ángulo en B es recto. Determinar:

a) Velocidad del punto B.

b) Aceleración del punto D.



SOLUCIÓN

a) El punto D sólo puede tener aceleración en la dirección horizontal dada la existencia de una guía que fuerza el movimiento en esta dirección. El módulo de la aceleración podrá deducirse a partir de la relación entre las aceleraciones de los dos puntos, B y C, que pertenecen al mismo sólido, la barra BC:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\omega}_4 \times (\vec{\omega}_4 \times \overrightarrow{BD}) + \vec{\alpha}_4 \times \overrightarrow{BD}$$

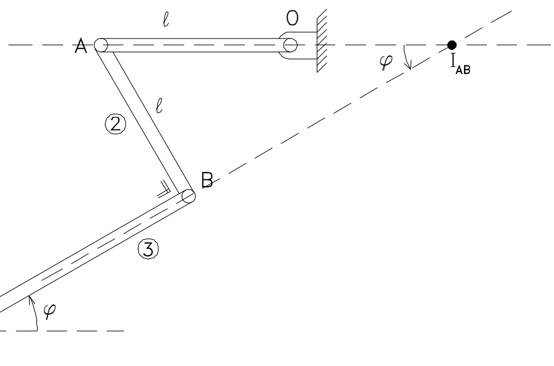
En esta expresión son desconocidas $\vec{a}_B$, ω_4 y α_4.

Para determinar $\vec{a}_B$ será necesario hallar ω_3 y α_3, ya que, teniendo en cuenta que el punto B pertenece a la manivela CB, se podrá establecer:

$$\vec{a}_B = -\omega_3^2\,\overrightarrow{CB} + \vec{\alpha}_4 \times \overrightarrow{CB}$$

Para poder determinar la velocidad angular de la manivela CB, será necesario encontrar la velocidad lineal del punto B. Para ello se recurrirá a la barra AB, cuyo CIR es fácil de localizar como consecuencia de que sus extremos estén enlazados a sendas manivelas, OA y CB respectivamente. Este hecho permite conocer la dirección de las velocidades de ambos puntos, A y B, y además se conoce el módulo de la velocidad del punto A.

El punto A, por pertenencer a una manivela que gira entorno de O, describe una trayectoria circular alrededor de dicho punto. La velocidad de A es, por tanto, perpendicular a la dirección de la barra OA y el CIR de la barra AB se halla sobre la recta que tiene dirección radial y pasa por los puntos O y A.



El punto B pertenece también a otra manivela, CB. Por idénticas razones su velocidad es perpendicular a la barra CB y, en consecuencia, el CIR se halla en la recta que pasa por C y B.

La intersección de ambas rectas define el punto I_{AB}. El triángulo AB I_{AB} es un triángulo rectángulo en B, cuyo cateto AB es de longitud conocida, ℓ, y cuyo ángulo opuesto es también conocido φ. En consecuencia:

$$\overline{I_{AB}A} = \frac{\ell}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Sabidos estos datos y dado que el punto A tiene una velocidad lineal conocida se podrá determinar ω_2. Se tiene

$$v_A = \omega\ell = \omega_2 \overline{I_{AB}A} = \frac{\omega_2 \ell}{\operatorname{sen}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega \operatorname{sen}\varphi$$

Dado que se conoce ω_2 , podrá determinarse la velocidad lineal del punto B

$$v_B = \omega\ell = \omega_2 \overline{I_{AB}B} = \frac{\omega_2 \ell \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \omega\ell\cos\varphi$$

Si se tiene en consideración que el punto B pertenece también a la barra CB, se podrá escribir:

$$v_B = \omega_3 \overline{CB} = \omega_3 2\ell$$

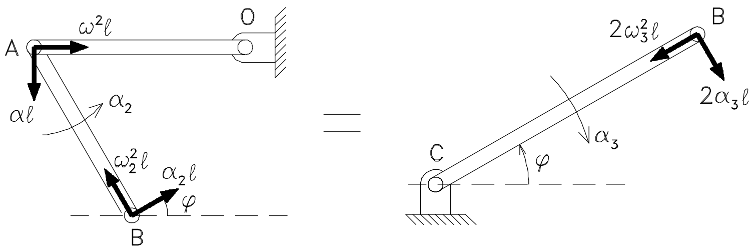
En consecuencia, igualando ambas expresiones se llega a

$$\omega_3 = \frac{\omega\cos\varphi}{2}$$

La velocidad angular de la barra BD es igual y opuesta a la de la barra CB; basta considerar que ambas forman siempre ángulos suplementarios con la horizontal, de modo que la cantidad que en uno crece, el otro decrece. En consecuencia se podrá escribir:

$$\omega_4 = \frac{\omega\cos\varphi}{2}$$

b) Será necesario determinar el valor de la aceleración α_3, para ello se plantearán los diagramas de aceleración correspondientes al punto B como punto de la barra AB y como punto de la barra CB.



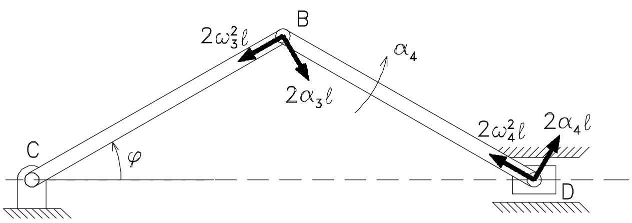
Proyectando sobre la dirección AB, y sustituyendo el valor conocido de ω_2 ,quedará:

$$\alpha_3 = \frac{\alpha}{2}\cos\varphi + \frac{\omega^2}{2}(1 - \operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\varphi$$

Por idénticas razones a las ya expuestas con respecto de la velocidades angulares, puede afirmarse que la aceleración angular de 4 será de sentido contrario a la de 3 y con su mismo módulo, de modo que será posible determinar la aceleración del punto D:

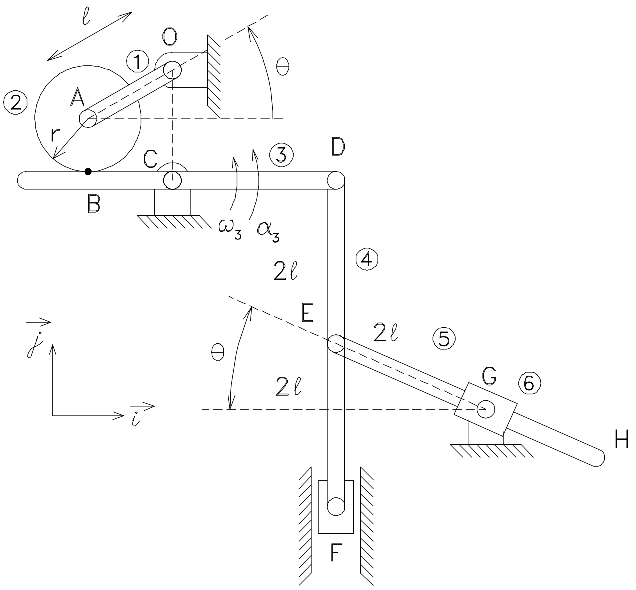
$$\vec{a}_D = \omega_3^2\,\overrightarrow{BC} + \vec{\alpha}_3 \times \overrightarrow{CB} + \omega_4^2\,\overrightarrow{DB} + \vec{\alpha}_4 \times \overrightarrow{BD}$$

El diagrama de aceleraciones que corresponde a esta ecuación vectorial permite identificar la simetría de los vectores respecto de la horizontal. De ello resulta que el punto D, como era de esperar, sólo tiene componente horizontal de la aceleración y ésta vale, teniendo en cuenta la figura adjunta:



$$a_D = -4\omega_3^2\ell\cos\varphi + 4\alpha_3\ell\operatorname{sen}\varphi$$

con los valores de ω_3 y α_3 antes obtenidos .



3.- En el dispositivo de la figura el disco no desliza en el contacto B con la barra 3 , la cual gira con ω_3 y α_3 conocidas. Hallar, para la posición considerada:

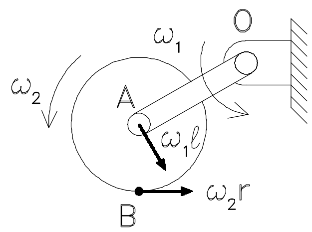
a) Velocidad angular del disco 2.
b) Aceleraciones angulares α_1 y α_2.
c) Aceleración angular del disco 2.
d) Velocidad angular de la guia 6.
e) Aceleración del punto E.

(Datos: CD = DE = EF = EG = 2 ℓ, $\angle$C = $\angle$D = 90º)

SOLUCIÓN

a) Tomamos el sentido trigonométrico como positivo para las velocidades angulares ω_1 , ω_2 de los sólidos 1 y 2, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad del punto B del disco, con base en A y aplicando la fórmula de velocidades para el sólido 2, será

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB}$$

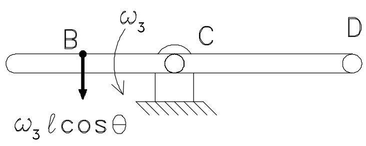


La figura ilustra geométricamente la fórmula anterior. Con su ayuda, y utilizando la base de proyección del enunciado, obtenemos:

$$\vec{v}_{B_2} = \omega_2 r\,\vec{i} + \omega_1 \ell \left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}\right)$$

Por otra parte, es evidente que la velocidad del punto B de la barra 3 vale

$$\vec{v}_{B_3} = -\,\omega_3 \ell \cos\theta\,\vec{j}$$



Como no hay deslizamiento en el contacto B, se cumple:

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_3}$$

Igualando las componentes de las velocidades del punto B de 2 y de 3 que acabamos de calcular, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$-\omega_3 \ell \cos\theta = -\,\omega_1 \ell \cos\theta$$
$$0 = \omega_2 r + \omega_1 \ell \,\mathrm{sen}\,\theta$$

cuya resolución da

$$\omega_1 = \omega_3$$

$$\omega_2 = -\frac{\omega_3 \ell \cos\theta}{r}$$

Estos resultados también hubieran podido hallarse determinando el CIR I_2 del disco 2. Es fácil ver que I_2 es el punto de intersección de las líneas OA y CB. A partir de este momento el proceso sería el usual cuando se utiliza el CIR.

b) Para determinar α_1 y α_2 tendremos en cuenta que el disco 2 se mueve sobre la barra 3 sin deslizar. Concretamente, estudiaremos la aceleración del punto B_2 por composición de movimientos, tomando como referencia fija el laboratorio y como referencia *móvil* la barra 3. Se tendrá

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}^{\,r}_{B_2} + \vec{a}^{\,a}_{B_2} + \vec{a}^{\,c}_{B_2} \qquad (1)$$

Calculemos cada uno de los sumandos de la expresión anterior. La aceleración de B_2 relativa a la barra 3 es la aceleración del CIR de un disco que no desliza, y se sabe que viene dada por

$$\vec{a}^{\,r}_{B_2} = \omega_r^2 r\,\vec{j}$$

donde ω_r es la velocidad angular relativa del disco respecto la barra, que en nuestro caso vale

$$\omega_r = \omega_2 - \omega_3$$

Por tanto, tenemos

$$\vec{a}^{\,r}_{B} = (\omega_2 - \omega_3)^2 r\,\vec{j}$$

La aceleración de arrastre del punto B_2 es, por definición, su aceleración absoluta como punto solidario de la referencia móvil, que ahora es la barra. De ahí que

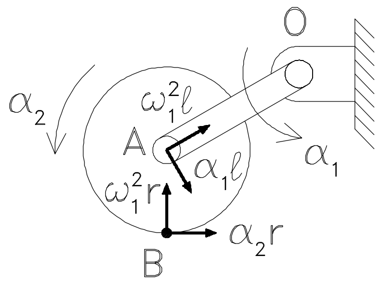
$$\vec{a}^{\,a}_{B_2} = \vec{a}_{B_3} = \omega_3^2 \ell \cos\theta\,\vec{i} - \alpha_3 \ell \cos\theta\,\vec{j}$$

Para la aceleración de Coriolis, será

$$\vec{a}^{\,c}_{B_2} = 2\vec{\omega}_3 \times \vec{v}^{\,r}_{B_2} = 2\vec{\omega}_3 \times \vec{v}_{B_2/3} = 0$$

porque la velocidad de B_2 respecto 3 es, por definición, la velocidad de deslizamiento en el contacto B, que en nuestro caso es nula.

También podemos calcular la misma aceleración de B_2 aplicando la fórmula de aceleraciones para el sólido 2. Tomando como punto base el centro A del disco, tendremos:



$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_2A}$$

La figura adjunta ilustra geométricamente la fórmula anterior.
Ayudándonos de este diagrama, y utilizando la base propuesta en el enunciado, quedará

$$\vec{a}_{B_2} = \alpha_1\ell\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}\right) + \omega_1^2\ell\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right) + \alpha_2 r\,\vec{i} + \omega_2^2 r\,\vec{j} \qquad (2)$$

Resumiendo, para la aceleración de B_2 tenemos la expresión (1) con los valores obtenidos anteriormente para la aceleración relativa, de arrastre y complementaria, y también disponemos de la expresión (2) que acabamos de hallar. Igualando componentes en estas dos expresiones quedará

$$\alpha_2 r + \alpha_1\ell\operatorname{sen}\theta + \omega_1^2\ell\cos\theta = \omega_3^2\ell\cos\theta$$
$$\omega_2^2 r - \alpha_1\ell\cos\theta + \omega_1^2\ell\operatorname{sen}\theta = -\alpha_3\ell\cos\theta + (\omega_2 - \omega_3)^2 r$$

que es un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas α_1 y α_2 buscadas. La segunda ecuación nos permite obtener directamente

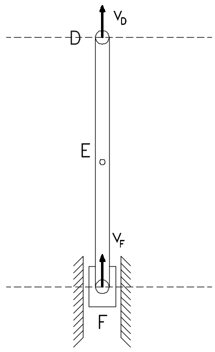
$$\alpha_1 = \alpha_3 + \omega_1^2\operatorname{tg}\theta + \frac{(2\omega_2 - \omega_3)\omega_3 r}{\ell\cos\theta}$$

donde ω_1 y ω_2 son los valores obtenidos en el apartado **a)**. Despejando α_2 en la primera de las ecuaciones del sistema, tendremos

$$\alpha_2 = \frac{\left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\ell\cos\theta - \alpha_1\ell\operatorname{sen}\theta}{r}$$

donde ω_1 , ω_2 y α_1 son los valores ya obtenidos.

c) El movimiento de la barra 4 se transmite al sólido 5 y, en definitiva, a la guía. Procedamos, pues, inicialmente al estudio de la barra 4. Las perpendiculares a las di-recciones de $\vec{v}_D$ y $\vec{v}_F$ son rectas paralelas, por tanto el CIR I_4 está en el infinito (o, propiamente, no existe). Esto significa que la barra 4 está en *traslación instantánea*, o sea



$$\omega_4 = 0$$

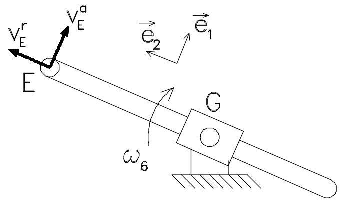
y, en consecuencia, todos sus puntos tienen igual velocidad. Es decir:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D = \omega_3 2\ell\,\vec{j} \qquad (3)$$

Como la barra 5 se mueve dentro de la guía 6 que, a su vez, gira con velocidad angular desconocida ω_6 , procederemos a calcular la velocidad del punto E por composición de movimientos. Tomaremos como referencia fija el laboratorio, y como referencia *móvil* la guía 6. Será

$$\vec{v}_E = \vec{v}_E^{\,r} + \vec{v}_E^{\,a}$$

La velocidad relativa de E tiene la dirección de la barra 5. La velocidad de arrastre de E es, por definición, la velocidad de este punto supuesto solidario de la guía 6; en consecuencia, su dirección será perpendicular a la barra 5, y su módulo valdrá $\omega_6 2\ell$. En el diagrama adjunto se resume lo obtenido. Proyectando en la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de la figura, se tiene



$$\vec{v}_E = v_E^r\,\vec{e}_2 + v_E^a\,\vec{e}_1 = v_E^r\,\vec{e}_2 + \omega_6 2\ell\,\vec{e}_1$$

Haciendo lo mismo con (3), tenemos:

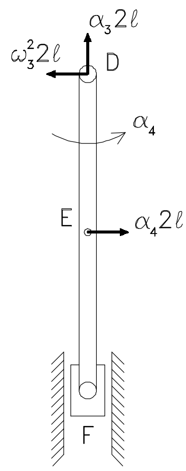
$$\vec{v}_E = \omega_3 2\ell\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_1\right)$$

Igualando componentes en las dos últimas expresiones, queda finalmente

$$\omega_6 = \omega_3 \cos\theta$$

Obsérvese, para concluir este apartado, que el resultado obtenido tiene una interpretación geométrica inmediata. La velocidad relativa y de arrastre de E son, simplemente las componentes de $\vec{v}_E$ en las direcciones 2 y 1.

d) Para hallar $\vec{a}_E$ utilizaremos la fórmula de aceleraciones para un sólido, tomando como punto base el D, ya que la aceleración de éste es conocida. Es decir:

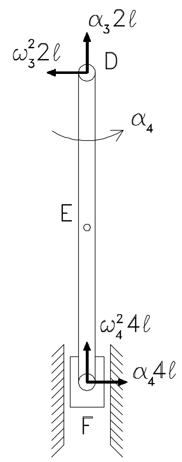


$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,t}_{ED} + \vec{a}^{\,n}_{ED} = \left(\alpha_4 - \omega_3^2\right) 2\ell\,\vec{i} + \alpha_3 2\ell\,\vec{j} \qquad (4)$$

El diagrama adjunto expresa gráficamente la aceleración buscada del punto E. Así, en cuanto conozcamos α_4, quedará totalmente determinada esta aceleración $\vec{a}_E$.

Sabemos que, como la barra 4 tiene un movimiento de traslación instantánea, la velocidad angular ω_4 es nula en el instante considerado. Pero es importante advertir que esto no implica que también se anule la aceleración angular de dicha barra (como ocurriría si la traslación fuera *permanente* en lugar de instantánea). ¿Cómo hallar, pues, α_4?

La observación del mecanismo nos dice que el punto F tiene un movimiento rectilíneo vertical, y que, por tanto, se cumple:



$$a_F^x = 0$$

Relacionando los puntos F y D, tenemos

$$\vec{a}_F = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,t}_{FD}$$

como queda ilustrado por el diagrama adjunto. Teniendo ahora en cuenta las dos últimas expresiones, y ayudándonos del diagrama, podremos escribir

$$a_F^x = a_D^x + a_{FD}^x = \alpha_4 4\ell - \omega_3^2 2\ell = 0$$

De ahí que

$$\alpha_4 = \frac{\omega_3^2}{2} \qquad (4)$$

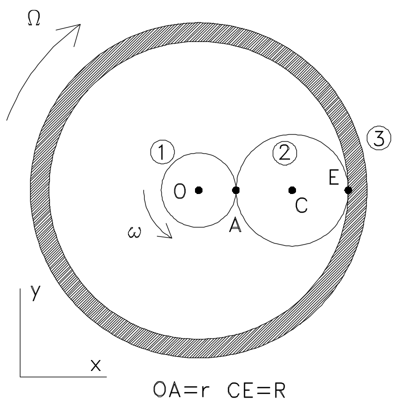
Sólo nos falta sustituir en (4) el valor que acabamos de hallar. Quedará:

$$\vec{a}_E = -\omega_3^2 \ell\,\vec{i} + \alpha_3 2\ell\,\vec{j}$$

4.- El mecanismo de la figura está formado por tres ruedas dentadas. Las ruedas 1 y 3 giran alrededor de O con velocidad angular constante, mientras que la rueda 2 se mueve con la única restricción de no deslizamiento en los puntos de contacto con 1 y 3. Se sabe que R = 2r y que $\Omega = 2\omega$. Se pide:

a) Tiempo necesario para que la rueda 2 dé una vuelta completa alrededor de O.

b) Hallar $\vec{a}_E$ en el caso particular que $\Omega = 0$.



SOLUCIÓN

a) La rueda 2 da una vuelta completa cuando su centro C la da también, pero no otro punto, puesto que sólo C describe una trayectoria circular alrededor de O, en este caso de radio r + R. De esta manera, el tiempo necesario para que la rueda 2 dé una vuelta completa es en realidad el tiempo que emplea el punto C en dar una vuelta alrededor de O. El tiempo se puede determinar como el cociente entre el ángulo girado por C alrededor de O en una vuelta (2π radianes) y la velocidad angular ω_C del punto C alrededor de O

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_C}$$

O bien, como el espacio recorrido por el punto C en una vuelta dividido por la velocidad del punto C. Siendo esta velocidad v_C el producto de la velocidad angular ω_c por el radio de giro r + R:

$$\tau = \frac{2\pi(R+r)}{v_C}$$

Sea como fuere, es necesario conocer la velocidad del punto C de la rueda 2, por lo que hay que calcular primero la velocidad angular ω_2 de la rueda. Para determinar la velocidad angular de un sólido en cinemática plana se puede buscar el CIR, o bien, relacionar dos puntos de velocidad conocida mediante la expresión de velocidades del sólido rígido. En general, para el caso de trenes epicicloidales es preferible este segundo método.

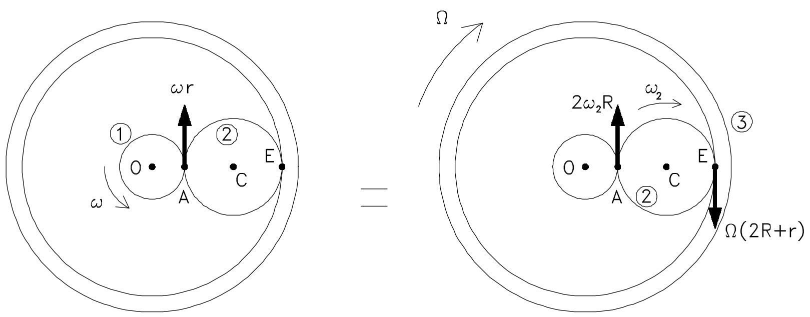
Se necesitan, pues, dos puntos de la rueda 2 de velocidad conocida; al no haber deslizamiento en los puntos de contacto entre esta rueda y las otras dos, resulta que

$$\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1} \qquad\qquad \vec{v}_{E_2} = \vec{v}_{E_3}$$

por lo que se relacionan los puntos A y E de la rueda 2 mediante la fórmula de velocidades en el sólido rígido:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_E + \vec{v}_{AE}$$

que gráficamente se representa como



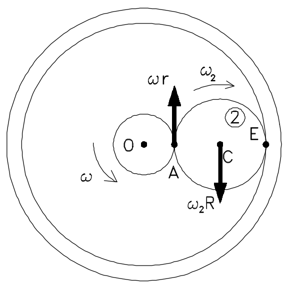
Ahora es fácil hallar la velocidad angular ω_2

$$\omega r = 2\omega_2 R - \Omega(2R + r)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega r}{2R} + \frac{\Omega(2R + r)}{2R} \quad (1)$$

Hay que tener muy en cuenta que ω_C es diferente de ω_2: una es la velocidad angular del punto C girando alre-dedor del punto O, y otra es la velocidad angular del sólido; velocidades que, en general, son diferentes. Conocida ω_2, ahora es fácil hallar $\vec{v}_C$:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$$



De la figura deducimos:

$$v_C = \omega r - \omega_2 R = \frac{\omega r}{2} - \frac{\Omega(2R + r)}{2R}$$

y ω_c valdrá:

$$\omega_C = \frac{1}{R + r}\left(\frac{\omega r}{2} - \frac{\Omega(2R + r)}{2R}\right) \quad (2)$$

sustituyendo ahora Ω y R según los datos del enunciado

$$\omega_C = \frac{3}{2}\omega\,\vec{k}$$

y el tiempo para completar una vuelta:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_C} = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\omega}$$

b) Si Ω = 0, el cuerpo 3 está parado y, en consecuencia, el sólido 2 describe un movimiento de rodadura sin deslizamiento sobre el cuerpo 3 fijo, siendo el punto E el punto de contacto entre estos dos cuerpos. En estas condiciones resulta ventajoso utilizar la expresión

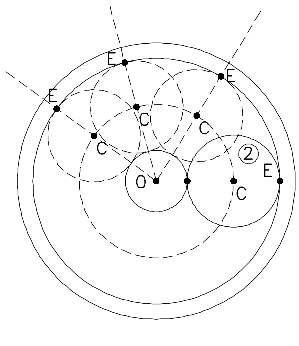
$$\vec{a}_E = -\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{SE}$$

donde ω_2 es la velocidad angular absoluta de la rueda 2 y $\vec{V}_{SE}$, velocidad de sucesión del punto E, es la velocidad con la que se desplaza el punto geométrico de contacto respecto del anillo 3.

La velocidad angular ω_2 no es la misma del apartado **a)**, al haber cambiado las condiciones cinemáticas. Se puede hallar fácilmente el nuevo valor de ω_2 sustituyendo Ω = 0 en el resultado (1) hallado en el apartado anterior.

$$\vec{\omega}_2 = -\frac{\omega r}{2R}\vec{k}$$

Para hallar la velocidad de sucesión es necesario determinar de qué manera se desplaza el punto geométrico de contacto. Se puede determinar que el punto de contacto entre las ruedas 2 y 3 está siempre alineado con los centros O y C, tal como muestra la figura.



Con ello, el punto geométrico de contacto describe una trayectoria circular alrededor de O de radio r + 2R, desplazándose solidariamente del punto C, lo que equivale a que su velocidad angular alrededor de O es la misma, ω_C. Sin embargo, igual que para ω_2, esta ω_C no tiene el mismo valor que en el apartado anterior. Igual que antes, sólo es cuestión de sustituir en (2):

$$\vec{\omega}_C = \frac{\omega}{6}\vec{k}$$

Y finalmente la aceleración del punto E:

$$\vec{a}_E = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega}{6} 5r \\ 0 \end{bmatrix} = -5\frac{\omega_2 \omega}{6} r\,\vec{i}$$

El resultado también se puede determinar mediante la expresión más general de la aceleración de un punto para el sólido rígido:

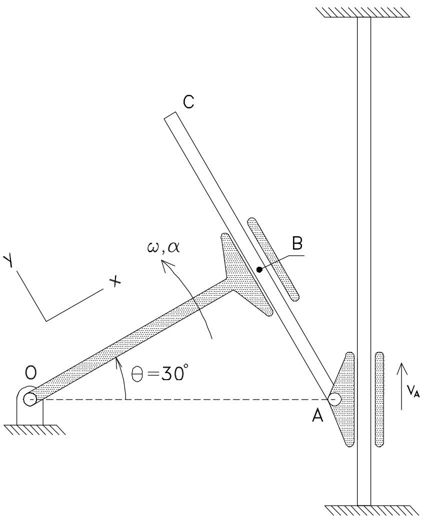
$$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}$$

en la que es necesario conocer la aceleración de otro punto del sólido. Según todo lo visto, sólo el punto C presenta un valor de aceleración conocido. La velocidad angular es ω_2 absoluta, y α_2 es cero al ser todas las velocidades angulares constantes. Se comprueba que para esta expresión es igualmente necesario conocer ω_2 y ω_C, y el resto de cálculos son más laboriosos.

5.- Se considera el mecanismo plano de la figura, en el cual la barra AC desliza dentro del collar B de la barra OB.. La longitud de OB es ℓ y el ángulo en B es de 90º . Hallar, en la posición indicada, en función de la velocidad y aceleración angulares de la manivela OB:

a) Velocidad de la barra AC relativa a la manivela OB.

b) Aceleración del punto A.



SOLUCIÓN

a) La presencia de la guía en B permite describir el movimiento de la barra con respecto de la manivela como un movimiento de traslación pura a lo largo de la guía. Todos los puntos de la barra AC tendrán la misma velocidad relativa a la manivela; en consecuencia bastará con estudiar la velocidad relativa de cualquier punto. El punto más adecuado parece ser el A, por cuanto se conoce la dirección de su velocidad que está forzada a tener dirección vertical, como consecuencia de la presencia de la guía exterior.

En estas condiciones, la velocidad del punto A podrá expresarse como suma de una velocidad de arrastre y una velocidad relativa:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_a + \vec{v}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{v}_A - \vec{v}_a$$

La velocidad del punto A es desconocida en módulo, pero definida en cuanto a dirección:

$$\vec{v}_A = \begin{bmatrix} v_A \operatorname{sen}\theta \\ v_A \cos\theta \end{bmatrix}$$

La velocidad de arrastre, por su parte, es la velocidad del punto A, suponiendo que perteneciera a la manivela OB, en consecuencia:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} \omega r \operatorname{tg}\theta \\ \omega r \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la velocidad relativa será

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} v_A \operatorname{sen}\theta - \omega r \operatorname{tg}\theta \\ v_A \cos\theta - \omega r \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que, por la estructura del dispositivo, la velocidad relativa debe ser en la dirección de la guía en B, la componente en dirección de la manivela OB debe ser nula, o sea:

$$v_A \operatorname{sen}\theta - \omega r \operatorname{tg}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A = \frac{\omega r}{\cos\theta}$$

Con este valor para la velocidad del punto A, puede encontrarse la velocidad relativa:

$$\vec{v}_r = 0$$

b) Para determinar la aceleración lineal del punto A, es necesario recordar que no se conoce la aceleración angular de la barra AC. Por otra parte, el punto A está obligado a moverse en la dirección de la guía y por consiguiente la aceleración de dicho punto deberá tener esta dirección. En consecuencia, la aceleración del punto A puede determinarse por composición de movimientos utilizando una referencia móvil solidaria de la manivela, que permitirá escribir:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Para determinar la aceleración de arrastre bastará aplicar la propia definición que establece que la aceleración de arrastre del punto A es la que tendría dicho punto si estuviera fijo en la referencia móvil OB:

$$\vec{a}_a = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}) + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} \alpha r \operatorname{tg}\theta - \omega^2 r \\ \alpha r + \omega^2 r \operatorname{tg}\theta \end{bmatrix}$$

Para determinar la aceleración de Coriolis, se utilizará el valor de la *velocidad relativa* que se ha encontrado anteriormente. Al ser ésta nula, también lo será la aceleración de Coriolis.

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 0$$

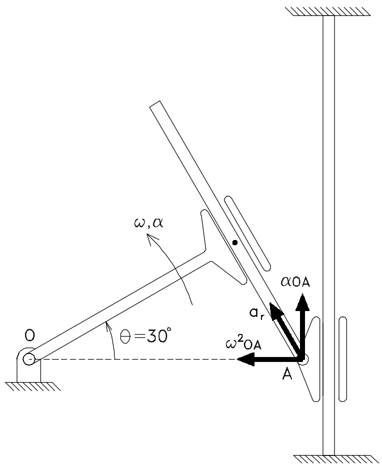
En lo que concierne a la aceleración relativa, lo único que se conoce es su dirección, perpendicular a la barra OB, sin conocerse el módulo:

$$\vec{a}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ a_r \end{bmatrix}$$

Sumando las componentes de la aceleración se llega a la expresión final de la aceleración del punto A:

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} \alpha r \operatorname{tg}\theta - \omega^2 r \\ \alpha r + \omega^2 r \operatorname{tg}\theta + a_r \end{bmatrix}$$

Expresión que permite establecer el siguiente diagrama de aceleraciones:



En esta última expresión, la única magnitud desconocida es la aceleración relativa; por otra parte, el hecho de conocer la dirección de la aceleración absoluta del punto A permite establecer una ecuación derivada del hecho de que no debe existir componente de la resultante en la dirección perpendicular a la guía vertical. Es decir:

$$\frac{\omega^2 r}{\cos\theta} + a_r \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad a_r = -\frac{\omega^2 r}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}$$

Sustituyendo este valor, de la aceleración relativa, en la expresión general de la aceleración del punto A, se llega a

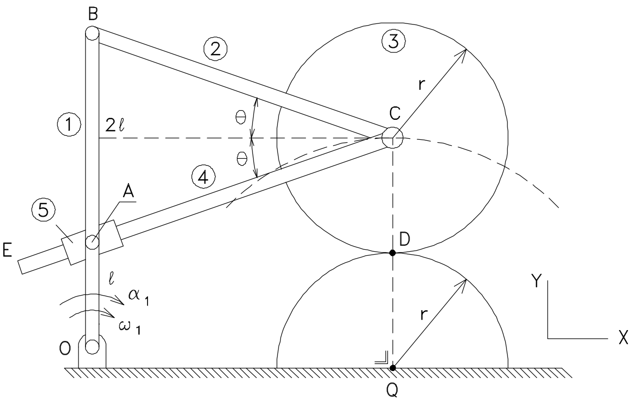
$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} \alpha r\, \mathrm{tg}\,\theta - \omega^2 r \\ \alpha r - \omega^2 r \cot g\theta \end{bmatrix}$$

6.- En el dispositivo de la figura, B y C son pasadores, el disco de centro C rueda sin deslizar en el contacto D, y la barra 4 desliza dentro de la guía 5, cuyo pasador A está montado sobre la barra OB. Se conocen ω_1 y α_1. Determinar en el instante considerado:

a) Velocidad angular de la barra 4.

b) Aceleración angular de la barra BC.

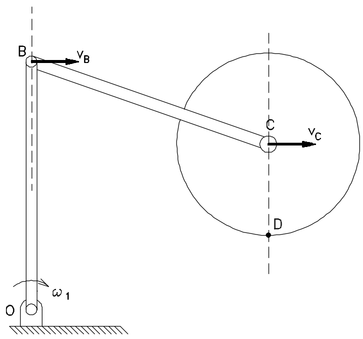
Datos: $OA = \ell$, $AB = 2\ell$, $\angle O = \angle Q = 90^o$



SOLUCIÓN

a) Si llamamos b a la distancia BC se verifica

$$b = \overline{BC} = \overline{AC} = \frac{\ell}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

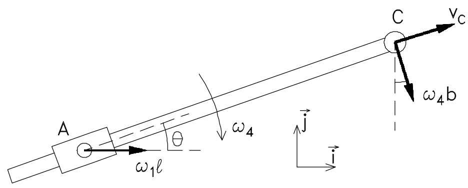


Vamos a estudiar la barra 2. El punto B tiene velocidad perpendicular a OB, y la de C es normal a CD ya que el CIR del disco 3 está en D; por tanto, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$ son paralelas. De ahí que el CIR de 2 se halle en el infinito: la barra 2 tiene un movimiento instantáneo de traslación, y en consecuencia

$$\omega_2 = 0 \quad , \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B = 3\omega_1 \ell\, \vec{i} \qquad (1)$$

La barra 4 se mueve en la guía 5, la cual, a su vez, gira. Esto sugiere que podremos hallar ω_4 estudiando el movimiento de un punto -como el C- mediante la fórmula de composición de velocidades. Así, tomando como referencia fija el laboratorio y como referencia móvil la *guía 5*, tendremos

$$\vec{v}_C = \vec{v}_r + \vec{v}_a \qquad (2)$$



La velocidad relativa de C tiene valor desconocido, pero su dirección es la de la barra 4 (ver figura). Por tanto, en la base del enunciado, será

$$\vec{v}_r = v_r\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right)$$

La velocidad de arrastre de C es, por definición, la velocidad absoluta de C, supuesto solidario de la referencia móvil. (Es evidente que $\omega_4 = \omega_5$).O sea:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{A_5} + \omega_4 \times \overrightarrow{AC}$$

La figura anterior ilustra esta última expresión. Utilizando la base ya considerada, tendremos

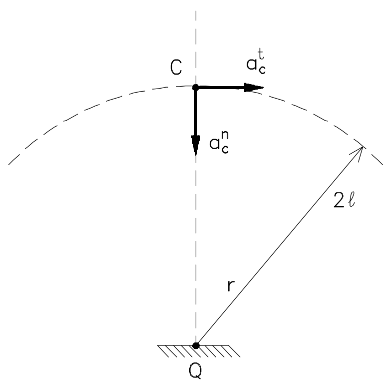
$$\vec{v}_a = \omega_1 \ell\,\vec{i} + \omega_4 b\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}\right)$$

Sustituyendo en (2) las expresiones obtenidas para las velocidades relativa y de arrastre, e igualando componentes con (1), se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3\omega_1\ell &= v_r\cos\theta + \omega_1\ell + \omega_4 b\operatorname{sen}\theta \\ 0 &= v_r\operatorname{sen}\theta - \omega_4 b\cos\theta \end{aligned}$$

que, una vez resuelto, nos da

$$\omega_4 = \frac{2\omega_1\ell\operatorname{sen}\theta}{b} = 2\omega_1\operatorname{sen}^2\theta$$

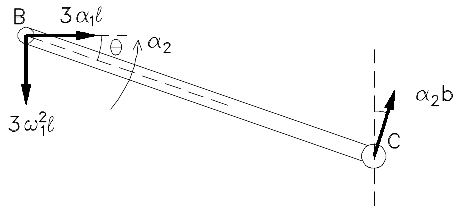


b) Para determinar α_2 procederemos a analizar el punto C. Este punto describe una circunferencia de radio 2ℓ y centro Q; por tanto, usando componentes intrínsecas, la aceleración de C será

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^t + \vec{a}_C^n \qquad (3) \qquad \text{con} \quad \vec{a}_C^n = \frac{v_C^2}{2\ell} = \frac{9}{2}\omega_1^2\ell$$

El diagrama adjunto muestra geométricamente esta aceleración.

Por otra parte, podemos calcular esta misma aceleración tomando C como punto de la barra 2, aplicando para esta barra la fórmula de aceleraciones con base en B, es decir:



$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^t \qquad (4)$$

Esta expresión está representada en el diagrama contiguo. Para obtener α_2, simplemente igualaremos las proyecciones de (3) y (4) sobre la perpendicular a $\vec{a}_t$ (que es la dirección vertical) , por cuanto el valor de la incógnita a_t no precisa ser hallado. Igualando, con la ayuda de los dos últimos diagramas, quedará:

$$\frac{9}{2}\omega_1^2\ell = 3\omega_1^2\ell - \alpha_2 b\cos\theta$$

y por tanto

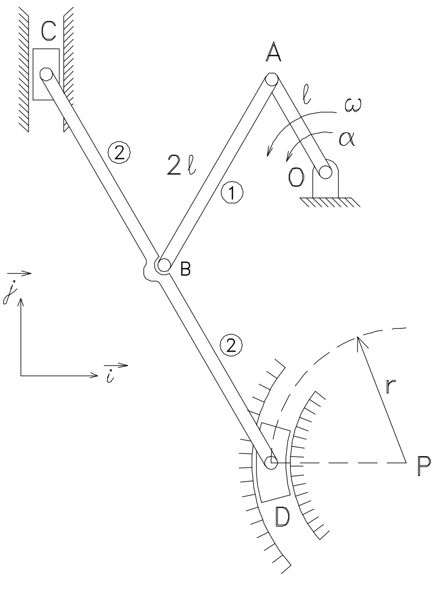
$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}\omega_1^2 \operatorname{tg}\theta$$

7.- En el mecanismo de la figura la barra OA, de longitud ℓ, se mueve con ω y α conocidas. El cursor D describe una circunferencia de radio r. Determinar, para la posición indicada:

a) Aceleración normal del punto D.

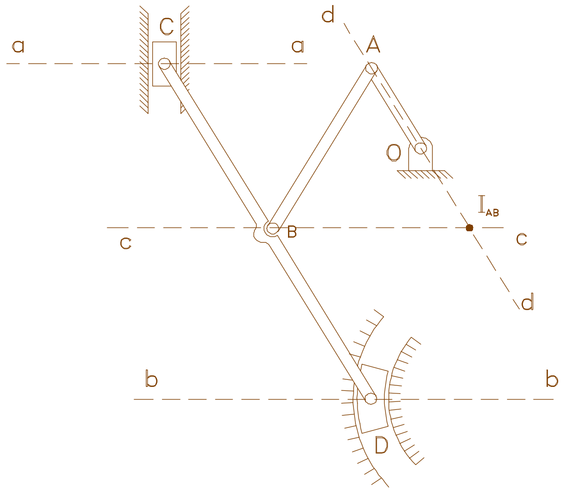
b) Aceleración angular de la barra AB.

(Datos: Las tres barras, en el instante de la figura, forman ángulos de 60º con la dirección horizontal, o eje x. BC = BD = 2ℓ).



SOLUCIÓN

a) Para resolver el primer apartado hay que considerar que, dado que el punto D describe una trayectoria circular, estará sometido a una aceleración normal. La dirección de ésta será radial y su sentido será hacia el centro de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. Para determinar el módulo de la aceleración será necesario encontrar el valor de la velocidad lineal con que el punto D recorre su trayectoria. Para hallar el valor de dicha velocidad se utilizará el CIR de la barra CD, cuya posición es fácil de localizar, dado que son conocidas las direcciones de las velocidades de dos



puntos de la barra.

En efecto, la velocidad del punto D debe ser tangente a la trayectoria, por consiguiente el CIR deberá hallarse sobre la perpendicular a dicha dirección, recta bb de la figura. Por su parte, el punto C describe una trayectoria rectilínea, por lo que el CIR se hallará sobre la perpendicular a esta trayectoria (recta aa. de la figura siguiente).

Dado que las rectas aa y bb *son paralelas y no coincidentes*, la intersección de las mismas se produce en el infinito y, por tanto, el movimiento instantáneo carece de velocidad angular. Se trata, en consecuencia, de un movimiento de *translación instantánea* y, por la definición de este movimiento, *todos los puntos de sólido CD están animados de la misma velocidad.* Para conocer la velocidad del punto D bastará determinar la velocidad de cualquier otro punto de la barra; el punto B parece especialmente adecuado si se considera que *pertenece simultáneamente a la barra AB*, cuyo movimiento está totalmente definido.

Para encontrar el valor de la velocidad del punto B será necesario recurrir al análisis del movimiento del sólido AB y a la determinación de la posición de su CIR. El punto B, por pertenecer a un sólido (CD) con movimiento de traslación, tendrá la misma velocidad que los demás puntos del mismo cuerpo; en consecuencia, el CIR deberá hallarse sobre la recta ortogonal cc. El punto A, por pertenecer a una manivela de centro O, describe una trayectoria circular alrededor del punto O. La velocidad de A será tangente a la trayectoria y, en consecuencia, el CIR de la barra AB se encontrará sobre la recta dd que, en este instante tiene una dirección radial a la trayectoria.

El CIR de la barra AB se encontrará en la intersección de las rectas cc y dd**,** es decir el punto I_{AB}. Por la especial geometría del sistema, el triángulo ABI_{AB} es un triángulo equilátero y, en consecuencia, la distancia $I_{AB}B = I_{AB}A = 2\ell$.

La velocidad del punto A, por pertenecer a la manivela, es conocida. El hecho de que el punto A pertenezca también a la barra AB permite determinar la velocidad angular de esta última barra:

$$\left.\begin{array}{ll} v_A = \omega\ell & (\text{Barra OA}) \\ v_A = \omega_1 \overline{I_{AB}A} & (\text{Barra AB}) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{\omega}{2}$$

Una vez conocida la velocidad angular de la barra AB y la posición de su CIR, es fácil determinar la velocidad del punto B y, por tanto, la de cualquier punto de la barra DC, en particular la del punto D.

$$v_D = v_B = \omega_1 \overline{I_{AB}B} = 2\omega_1\ell = \omega\ell$$

Determinada la velocidad lineal del punto D, la aceleración normal del punto D será:

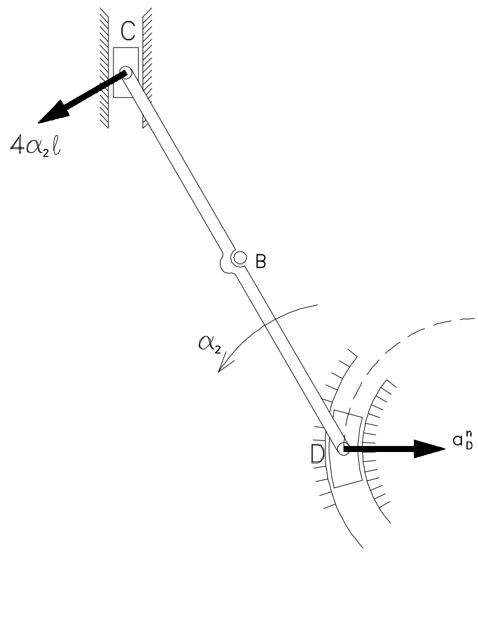
$$a_D^n = \frac{v_D^2}{r} = \frac{\omega^2\ell^2}{r}$$

b) Para hallar la aceleración angular de la barra AB *no podrá recurrirse a la derivación* de su velocidad angular puesto que ésta se ha hallado para una *posición particular*, en consecuencia se deberá utilizar un método indirecto para realizar el cálculo. Dicho procedimiento pasa por la determinación de la aceleración del punto B, dado que, al ser conocida la aceleración del punto A, ambas aceleraciones lineales se podrán relacionar a través de la expresión general

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}) + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{AB}$$

donde la única incognita que quedará será la aceleración angular que se está buscando.

Para poder realizar este proceso, de determinación de la aceleración de B, se volverá a trabajar con la barra CD, que no posee velocidad angular instantánea pero sí puede poseer aceleración angular α_2, que se deberá determinar. Para ello se recurrira a la ecuación que relaciona las aceleraciones de los puntos C y D, considerando además que el punto C tiene movimiento rectilíneo vertical y por lo tanto su aceleración debe tener esta dirección. La aceleración del punto C responde a la ecuación:



$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{DC}$$

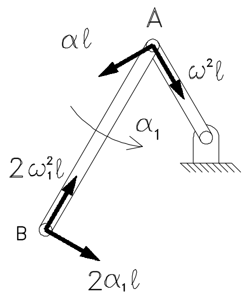
Hay que considerar que la aceleración tangencial del punto D es desconocida, pero en ningún caso *puede* *afirmarse que no exista* y también se sabe que será vertical (tangente a la trayectoria circular del punto D). La anterior ecuación vectorial podría representarse mediante el cinema de aceleraciones adjunto, donde no se ha representado la componente tangencial de la aceleración del punto D cuya dirección será vertical, la misma que debe tener la resultante de todas estas componentes que deben dar como resultado la aceleración del punto C, dirección forzada por la ligadura geométrica. En consecuencia, *la resultante de los vectores en la dirección horizontal debe ser nula* y, por tanto, se podrá escribir:

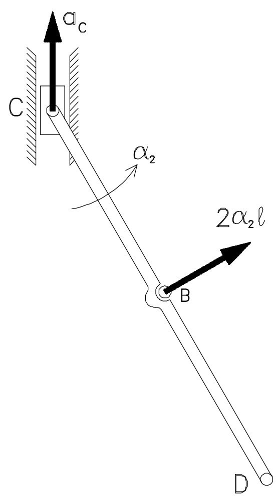
$$a_D^n = 4\alpha_2 \ell \operatorname{sen} 60 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\omega^2 \ell}{4r \operatorname{sen} 60}$$

Una vez determinada la aceleración angular del sólido CD, puede abordarse una de las componentes de la aceleración del punto B desde dos perspectivas distintas:

-Como punto de la barra CD.

-Como punto de la barra AB.





Como punto de la barra CD (figura de la derecha), la aceleración del punto B será:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{CB}$$

En esta expresión, nuevamente, el valor de $\vec{a}_C$ es desconocido, pero es fácil determinar el valor de la componente horizontal de la aceleración del punto B, que valdrá

$$a_B^x = 2\alpha_2 \ell \operatorname{sen} 60 = \frac{\omega^2 \ell^2}{2r}$$

Como punto perteneciente a la barra AB (figura izquierda), la aceleración de B será:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \omega_1^2\,\overrightarrow{BA} + \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{AB}$$

La componente horizontal de la aceleración del punto B, en este segundo caso, responderá a la expresión siguiente:

$$a_B^x = \omega^2 \ell \operatorname{sen} 30º - \alpha\ell \cos 30º + 2\alpha_1 \ell \cos 30º + 2\omega_1^2 \ell \operatorname{sen} 30º$$

Sustituyendo el valor conocido de la velocidad angular de la barra AB, ω_1, quedará:

$$a_B^x = \frac{3}{2}\omega^2 \ell \operatorname{sen} 30º - \alpha\ell \cos 30º + 2\alpha_1 \ell \cos 30º$$

Como ambas expresiones deben ser iguales, resultará:

$$\frac{\omega^2 \ell^2}{2r} = \frac{3}{2}\omega^2 \ell \operatorname{sen} 30º - \alpha\ell \cos 30º + 2\alpha_1 \ell \cos 30º$$

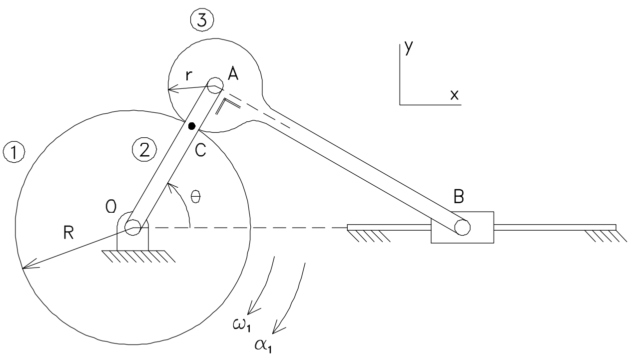
de donde se llega a:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega^2}{4\cos 30º}\left(\frac{1}{r} - 3\operatorname{sen} 30º\right)$$

8.- La rueda dentada 1 engrana con la rueda dentada 3, que es solidaria de la barra AB. La manivela OA no está acoplada con ninguna rueda. Si se hace girar la rueda 1 con ω_1 y α_1 conocidas, determinar en el instante considerado:

a) Velocidad del punto C_2 .

b) Aceleración angular de la biela AB.



SOLUCIÓN

a) Llamaremos ℓ a la distancia OB. Es claro que

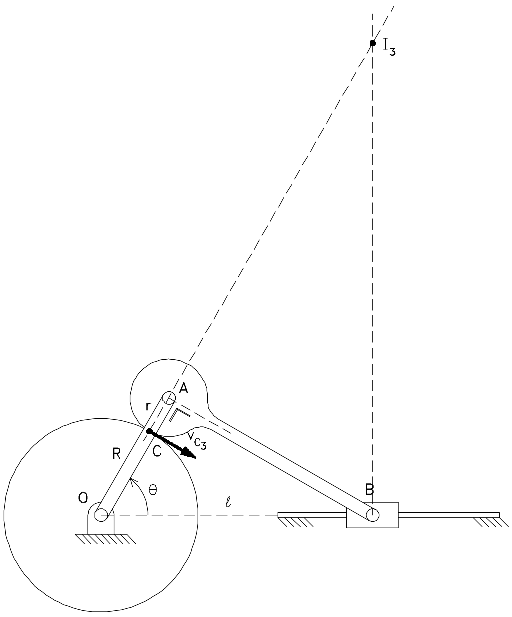
$$\ell = \overline{OB} = \frac{R + r}{\cos\theta}$$

Pasemos ahora a resolver la primera parte del problema. Para ello hallaremos el CIR I_3 del sólido 3 trazando perpendiculares a las velocidades de los puntos A y B (ver figura). La velocidad angular ω_3 se hallará teniendo en cuenta que conocemos la velocidad del punto C de 3, ya que, por la condición de contacto sin deslizamiento, se verificará

$$v_{C_3} = v_{C_1} = \omega_1 R$$

y, por tanto

$$\omega_3 = \frac{v_{C_3}}{\overline{CI_3}} = \frac{\omega_1 R}{\ell/\cos\theta - R} = \frac{\omega_1 R\cos\theta}{\ell - R\cos\theta}$$



La velocidad de A será

$$v_A = \omega_3 \overline{AI_3} = \frac{\omega_1 R\cos\theta}{\ell - R\cos\theta}\left(\frac{\ell}{\cos\theta} - R - r\right)$$

con lo cual la velocidad angular de la manivela OA valdrá en definitiva

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{R\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r}$$

y la velocidad de C_2 pedida

$$v_{C_2} = \omega_2 R = \frac{\omega_1 R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{R\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r}$$

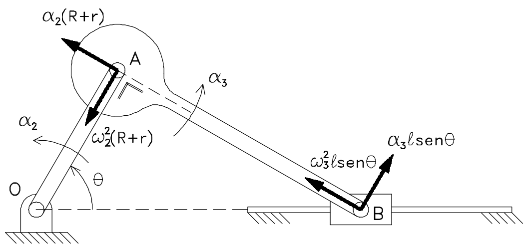
b) Para determinar α_3, una ecuación que se debe utilizar se deduce de la condición

$$a_B^y = 0 \qquad (1)$$

con la base indicada en el enunciado.

Aplicando la fórmula de aceleraciones para un sólido:

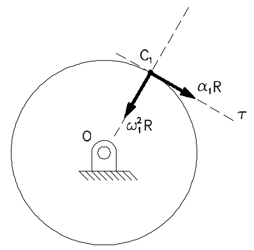
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$



Esta expresión se ilustra geométricamente en la figura adjunta. Con la ayuda de este diagrama la condición anterior se escribirá:

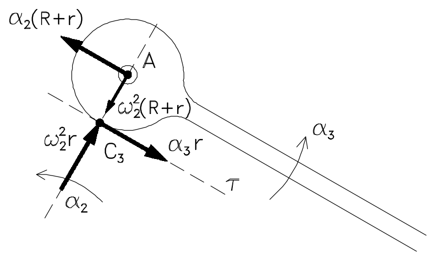
$$\alpha_3 \ell \,\text{sen}^2\,\theta + \omega_3^2 \ell \,\text{sen}\,\theta \cos\theta + \alpha_2 (R + r) \cos\theta - \omega_2^2 (R + r)\,\text{sen}\,\theta = 0 \qquad (1)$$

que es una ecuación con las incógnitas α_2 y α_3. El problema estará resuelto si conseguimos otra ecuación con las mismas incógnitas. Para conseguirla basta considerar que el contacto en C tiene lugar sin deslizamiento y, por tanto, deben ser iguales las componentes de las aceleraciones de C_1 y C_3 en la dirección de la tangente τ en el contacto C. Es decir



$$a_{C_1}^{\tau} = a_{C_3}^{\tau} \qquad (2)$$

Los dos diagramas muestran las aceleraciones de ambos puntos. No necesita comentario el valor de la aceleración de C de 1, ya que es prácticamente un dato. En cuanto a la aceleración de C_3, se ha deducido de la fórmula



$$\vec{a}_{C_3} = \vec{a}_A + \vec{a}_{C_3 A}$$

Por tanto, la relación (2) dará

$$\alpha_1 R = \alpha_3 r - \alpha_2 (R + r)$$

que es la segunda ecuación buscada. Despejando en ella α_2 , tendremos

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_3 r - \alpha_1 R}{R + r}$$

Basta ahora con sustituir este valor en (1) y se deducirá fácilmente la aceleración angular buscada, cuyo valor es

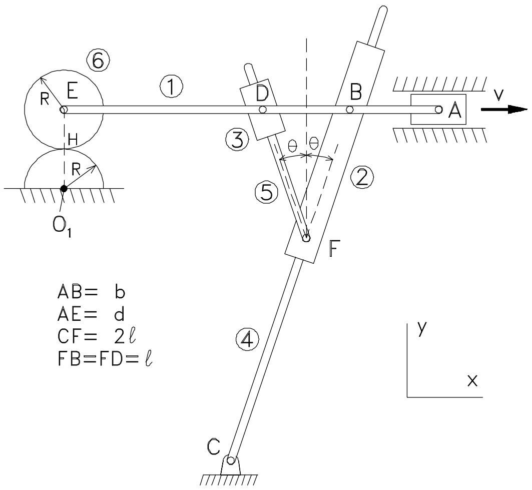
$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 (R + r)\,\text{sen}\,\theta - \omega_3^2 \ell \,\text{sen}\,\theta \cos\theta + \alpha_1 R \cos\theta}{\ell \,\text{sen}^2\,\theta + r \cos\theta}$$

donde ω_2 , ω_3 y ℓ son los valores obtenidos anteriormente.

9.- El sistema de la figura está constituido por la barra 1, la barra 4, que puede girar alrededor del punto fijo C, el sólido 2, que desliza a lo largo de la barra 4, y la barra 5, que se mueve por el interior de la guía 3. Los puntos A, B, D y E son articulaciones entre la barra AE y los demás sólidos.

El disco 6 rueda sin deslizar sobre el arco semicircular empotrado en la bancada. El punto H es el punto de contacto entre el disco y el arco semicircular fijo.

Las barras 4 y 5 forman, en el instante que se analiza, el mismo ángulo θ respecto de la vertical. La barra 1, en el mismo instante, tiene dirección horizontal y se conoce la velocidad de su extremo A, que es constante y de módulo v. En estas condiciones, determinar, usando la base de la figura:



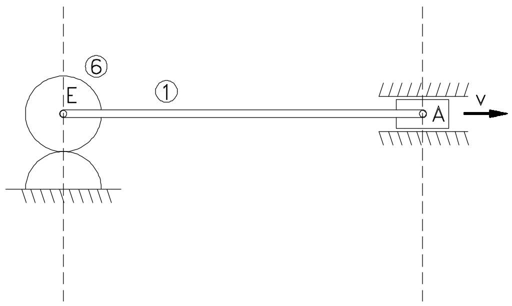
a) Velocidad angular de la barra 4.

b) Aceleración angular de la barra 4.

c) Velocidad relativa v_r del sólido 3 respecto del sólido 5.

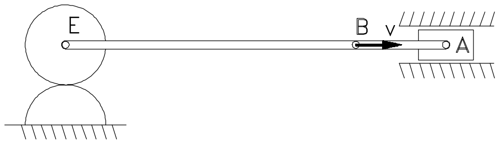
SOLUCIÓN

a) De todo el mecanismo, sólo se conoce la velocidad del punto A. El primer paso es, pues, determinar la velocidad angular ω_1 de la barra 1 para, a continuación, hallar la velocidad del punto B, que es el punto que luego permitirá calcular la velocidad angular ω_4 de la barra 4. Se procede a determinar el CIR de la barra 1



observándose que las rectas formadas son paralelas; en consecuencia, ω_1 es nula, la barra 1 tiene en este momento un movimiento de traslación instantánea, y todos sus puntosse mueven a igual velocidad, por lo que

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$



Por otra parte, el punto B pertenece al pasador 2, que puede deslizar respecto a la barra 4 y que es arrastrado por ésta. Resulta conveniente pues, describir el movimiento del punto B como una composición de movimientos en que la referencia móvil es precisamente la barra 4. En estas condiciones:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$

que, gráficamente, se representa en la fígura 1. Igualando la velocidad de B de la barra 1 y de la barra 2, se obtiene fácilmente:

$$\omega_4 = \frac{v\cos\theta}{3\ell}$$

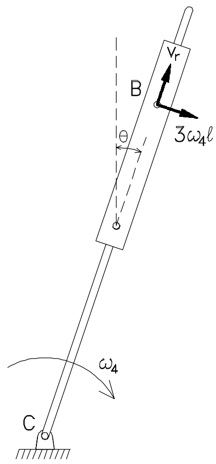
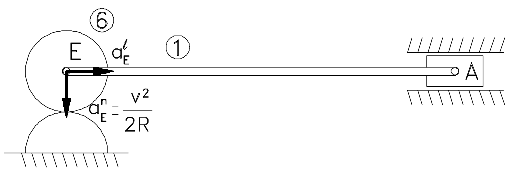


Figura 1

b) El proceso adecuado es en cierta manera el mismo que en el apartado **a)**, pero con de aceleraciones angulares. El primer paso es, pues, hallar la aceleración angular α_1 de la barra 1 relacionando dos puntos del sólido 1. Un punto es A, del cual se conoce que su aceleración es cero, al seguir una trayectoria rectilínea a velocidad constante. El segundo punto debe ser E, ya que no hay otro punto de la barra 1 que tenga trayectoria conocida.

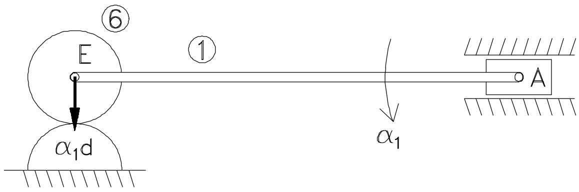
El punto E describe una trayectoria circular alrededor de O_1, por lo que su aceleración tendrá una componente normal conocida dirigida hacia O_1 y una componente tangencial desconocida. Gráficamente:



relacionándolo con el punto A mediante la expresión

$$\vec{a}_E = \vec{a}_A + \vec{a}_{EA}^{\,n} + \vec{a}_{EA}^{\,t}$$

cuya parte derecha se representa en la figura que se muestra a continuación:

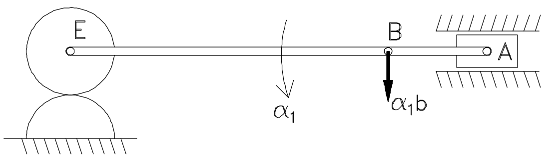


Utilizando las dos últimas figuras, e igualando componentes verticales, se deduce inmediatamente:

$$\alpha_1 = \frac{v^2}{2Rd}$$

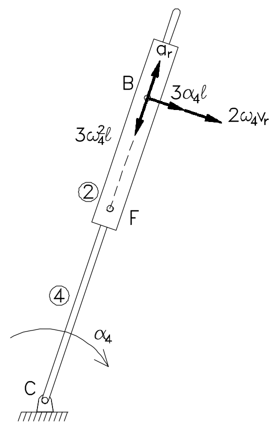
Conocida α_1, la aceleración del punto B de la barra 1 es

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \qquad (1)$$



Y finalmente ahora es posible determinar α_4, describiendo el movimiento del punto B como una composición de movimientos siendo la referencia móvil la barra 4:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad (2)$$



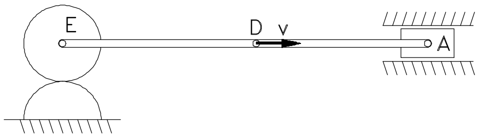
Igualando (1) y (2), y proyectando en la dirección perpendicular a CB, para plantear una sola ecuación con una sola incognita α_4 , tendremos:

$$\alpha_1 b \operatorname{sen}\theta = 3\alpha_4 \ell + 2\omega_4 v_r$$

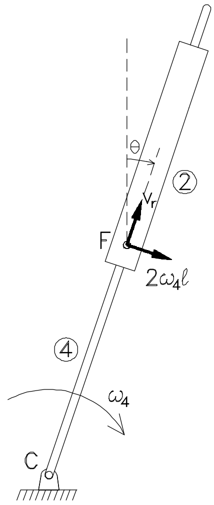
de donde:

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1 b \operatorname{sen}\theta}{3\ell} - \frac{2\omega_4 v_r}{3\ell}$$

c) La velocidad relativa v_r’ de la barra 3 respecto del sólido 5 es, en realidad, la velocidad relativa de cualquier punto de 3 respecto de 5, al ser el moviento relativo entre los sólidos 3 y 5 de traslación. Así, resulta ventajoso describir v_r’ como la velocidad del punto D del pasador 3 relativa a 5. El punto D pertenece a la barra 1, que se mueve en traslación instantánea, por lo que su velocidad es conocida e igual a la velocidad de A.



$$\vec{v}_D = \vec{v} \qquad (3)$$

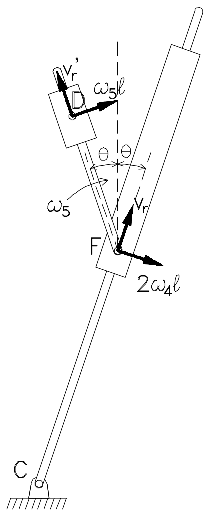


Por otra parte, el pasador 3 desliza por la barra 5 al tiempo que es arrastrado por ésta, por lo que el movimiento del punto D puede describirse como una composición de movimientos siendo 5 la referencia móvil

$$\vec{v}_D = \vec{v}_a + \vec{v}'_r \qquad (4)$$

y utilizar esta relación para hallar v_r'. En el término de arrastre se debe incluir la velocidad conocida de otro punto de la referencia móvil 5. Sólo el punto F puede aportar este dato. El punto F pertenece al sólido 2, sólido que presenta un movimiento resultante de una composición de movimientos, según se ha descrito en los apartados anteriores. De este modo, $\vec{v}_F$ se puede calcular mediante una composición de movimientos, siendo la referencia móvil la guía 4:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$



Conocida $\vec{v}_F$, se puede ahora representar gráficamente la expresión (4) según la figura adyacente. Ahora se pueden igualar (3) y (4) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo éstas V_r' y ω_5. En este caso, a causa de la geometría concreta del mecanismo en este instante, no resulta especialmente ventajosa la búsqueda de una base de proyección que dé una sola ecuación con una incógnita, ya que resolviendo de esta manera apareceran ángulos 2θ. Se utiliza en este caso la base propuesta en el enunciado, con lo que resultan las ecuaciones.

$$v = 2\omega_1\ell\cos\theta + \omega_5\ell\cos\theta + v_r\,\mathrm{sen}\,\theta - v'_r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$0 = -2\omega_1\ell\,\mathrm{sen}\,\theta + \omega_5\ell\,\mathrm{sen}\,\theta + v_r\cos\theta - v'_r\cos\theta$$

que se pueden resolver eficazmente mediante reducción, multiplicando la primera ecuación por sen θ y la segunda por -cos θ, y sumándolas después. El resultado es

$$v'_r = -v \operatorname{sen}\theta + 4\omega_1 \ell \cos\theta \operatorname{sen}\theta + v_r\left(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

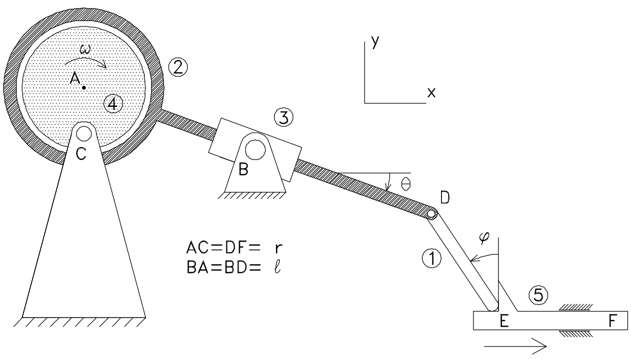
según sentido y dirección indicados en el diagrama.

Otra manera de calcular la velocidad de F es utilizando el punto B que, al pertenecer también al pasador 2, simplifica el proceso al no haber componentes relativas.

10.- La excéntrica redonda 4 gira en torno del punto A con velocidad angular constante ω conocida. La biela 3 abraza dicha excéntrica, que la mueve dentro de la guía 2. En C hay un pasador. La barra DF está en contacto en F con la pieza FE que se desplaza horizontalmente como consecuencia del movimiento de la biela. Determinar en el instante de la figura:

a) Velocidad horizontal de la pieza 5.

b) Aceleración de la biela 2 respecto la guía 3.



SOLUCIÓN

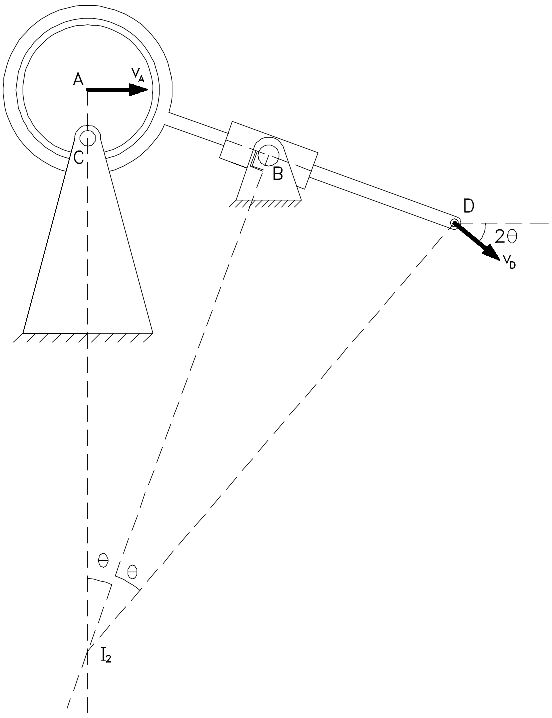
a) Para determinar la velocidad horizontal v_E de la pieza 5, hallaremos en primer lugar la velocidad de D. En este caso la opción más simple, dada la geometría del dispositivo, está en el uso del CIR I_2 de la biela 2. El punto A *es* de la biela y su velocidad es perpendicular a la línea CA, el punto B *de la biela* tiene la velocidad en la dirección AB. Trazando perpendiculares a las direcciones de ambas velocidades localizaremos el punto I_2 buscado (ver figura adjunta).

Conocido I_2, podemos pasar a determinar la velocidad de D. Como se cumple

$$\overline{AB} = \overline{BD}$$

el triángulo rectángulo I_2BA será igual al triángulo rectángulo I_2BD. Por tanto, tendremos

$$\overline{I_2A} = \overline{I_2D}$$



Esto significa que la velocidad de D y la de A son iguales en módulo, ya que estos puntos están a igual distancia del CIR I_2 , o sea:

$$v_D = v_A = \omega r$$

Por otra parte, la velocidad de D es perpendicular a I_2D, y de la figura se deduce que

$$\angle AI_2D = 2\theta$$

Por tanto el vector velocidad de D forma un ángulo 2θ con el eje x del enunciado. O sea, conocemos la velocidad de D en módulo y dirección (ver figura), de modo que

$$\vec{v}_D = \begin{bmatrix} \omega r \cos 2\theta \\ -\omega r \operatorname{sen} 2\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

La velocidad $\vec{v}_E$ que queremos determinar tiene dirección conocida, o sea

$$\vec{v}_E = \begin{bmatrix} v_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Considerando el sólido 4 y tomando como base el punto D será:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \omega_4 \times \overrightarrow{DE}$$

y teniendo en cuenta (1) y (2), utilizando la base propuesta en el enunciado, podremos escribir

$$\begin{bmatrix} v_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega r \cos 2\theta \\ -\omega r \operatorname{sen} 2\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell \cos\varphi \\ -\ell \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

que da lugar al sistema de ecuaciones:

$$v_E = \omega r \cos 2\theta + \omega_4 \ell \,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$0 = -\,\omega r \,\mathrm{sen}\, 2\theta + \omega_4 \ell \cos\varphi$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$\omega_4 = \frac{\omega r \,\mathrm{sen}\, 2\theta}{\ell \cos\varphi}$$

y sustituyendo en la primera

$$v_E = \omega r \cos 2\theta \left(1 + \mathrm{tg}\, 2\theta \,\mathrm{tg}\,\varphi\right) \quad \rightarrow \qquad (3)$$

Con esto hemos concluido este apartado. Antes de proceder a resolver el apartado siguiente convendrá calcular ω_2. Observando el diagrama construido antes, es inmediato que

$$\omega_2 = \frac{v_A}{\overline{I_2 A}} = \frac{\omega r \,\mathrm{sen}\, 2\theta}{2\ell}$$

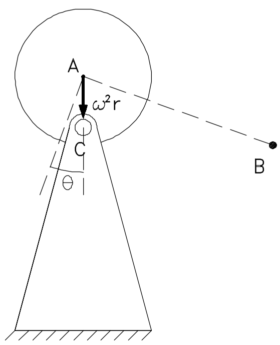
b) Con objeto de calcular la aceleración de la biela respecto la guía, estudiaremos el punto A. Aplicando la fórmula de aceleraciones para la excéntrica 1 será:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} \qquad (4)$$

En el diagrama de la página siguiente se determina geométricamente esta aceleración $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{A}}$.

También podemos calcular la misma aceleración de A mediante composición de movimientos. Tomando como referencia fija el laboratorio y como referencia móvil la *guía 3* , podremos escribir:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,r}_A + \vec{a}^{\,a}_A + \vec{a}^{\,c}_A \qquad (5)$$



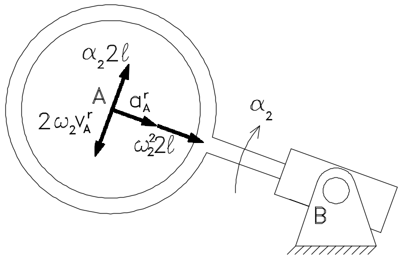
En el diagrama que acompaña se han trazado los vectores que corresponden a esta última expresión.

El valor buscado de a_r se obtendrá directamente igualando las proyecciones de (4) y (5) en la *dirección AB.* Ayudándonos con las figuras anteriores tendremos:

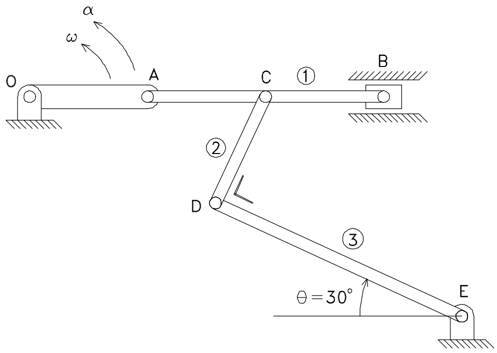
$$\omega^2 r \operatorname{sen} 2\theta = a_A^r + \omega_2^2 2\ell$$

y substityendo el valor de ω_2 dado por (3) se obtiene:

$$a_A^r = \omega^2 r \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{r \operatorname{sen}\theta}{2\ell}\right)$$



2.2. Problemas propuestos



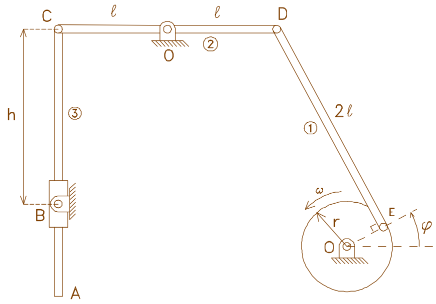
11.- En el mecanismo de la figura, la manivela OA gira con ω y α conocidas. Todos los puntos de articulación son pasadores. La guía en B se mueve horizontalmente. Para el instante de la figura el ángulo en D es recto. Determinar:

a) Velocidades angulares de las barras 1 y 3.

b) Aceleración $\vec{a}_B$.

c) Aceleración angular α_2 (empleando una única ecuación escalar).

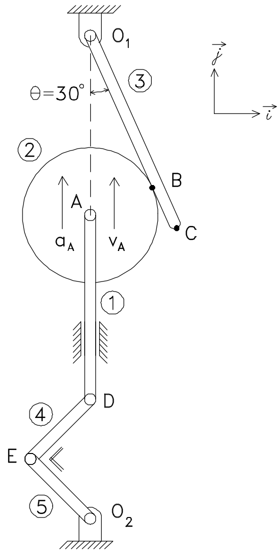
(Datos: OA = AC = CB = CD = ℓ , DE = 2ℓ)



12.- El volante de centro O del mecanismo de la figura gira con velocidad angular ω conocida y constante. Las barras 1 y 2 transmiten el movimiento a la barra 3, que desliza dentro del collar de centro B. Determinar, para el instante considerado, suponiendo que la *referencia móvil* es el collar en B, y utilizando el número mínimo de ecuaciones:

a) Aceleración de Coriolis del punto A.

b) Aceleración relativa de la barra 3.



13.- En el mecanismo de la figura, la barra AD está guiada verticalmente y lleva en el pasador A el disco 2 sobre el que se apoya la palanca 3, la cual puede girar alrededor de O_1 . Dicha palanca, de espesor despreciable, no presenta deslizamiento en el contacto B. La barra 1 está unida, en el pasador D , al sistema biela -manivela DE-EO_2 con O_2 fijo. En el instante considerado se conocen v_A y a_A (en el sentido de la figura); el ángulo en E es recto. Determinar:

a) Velocidad del punto C.

b) Velocidad angular de la barra 5.

c) Aceleración angular de la barra 3.

d) Aceleración del punto E.

(Datos: DE = EO_2 = ℓ , O_1B =2 ℓ , O_1C = 4 ℓ)

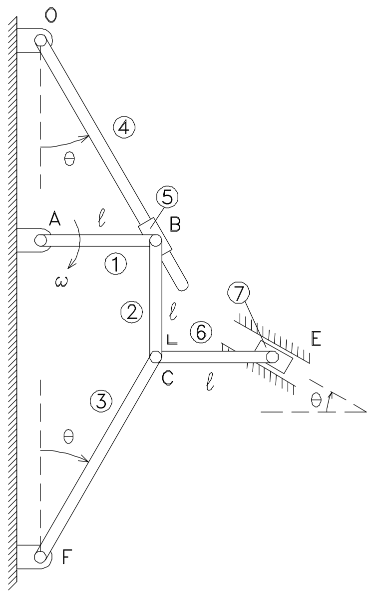
14.- En el mecanismo de la figura, la barra 1 gira con ω constante conocida. En función de los datos de la figura determinar, para el instante considerado, el valor del módulo, dirección y sentido de:

a) Velocidad del sólido 7.

b) Velocidad de la barra 4 respecto el pasador 5.

c) Aceleración del sólido 7.

d)

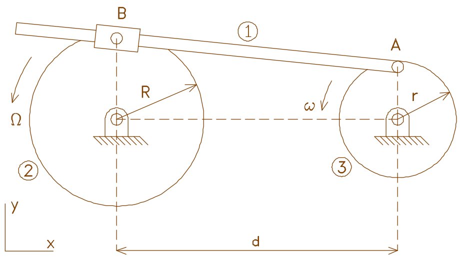


15.- La barra 1 de la figura tiene un pasador en A montado sobre el disco 3; dicha barra desliza a lo largo de la guía de centro B situado sobre el disco 2. Ambos discos giran con velocidades angulares constantes y conocidas. Se pide:

a) Velocidad angular de la barra 1.

b) Aceleración angular de la misma barra.

c) Aceleración de B_1 .



16.- Los puntos D, E y F son articulaciones de pasador. La barra DA gira con el collar 3 y desliza por el interior del mismo. El pivote en A se mueve a lo largo de la palanca 1 y ocasiona su rotación. En el instante de la figura se conocen la velocidad y la aceleración del pistón D. Determinar:

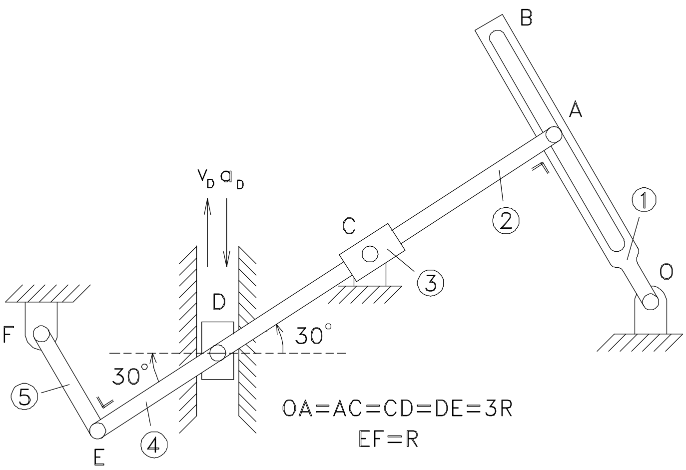
a) Velocidad del punto E.

b) Aceleración tangencial y normal de E.

c) Aceleración del punto D relativa al collar 3.

d) Velocidad angular de la palanca OB.

e) Aceleración de Coriolis de A_2 si la referencia móvil es la palanca 1.



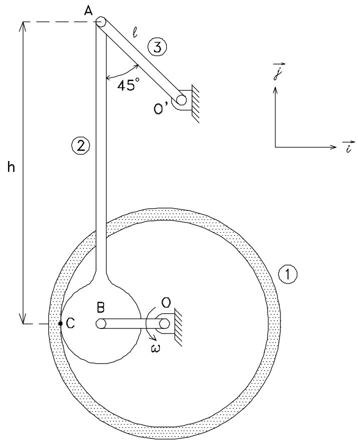
17.- Un mecanismo consta de la manivela O'A que pone en movimiento la biela AB y el balancín OB. La biela AB es solidaria de la rueda dentada de centro B que engrana con el piñón 1, que puede girar alrededor de O. En el instante de la figura AB y OB son perpendiculares. Si se supone que el balancín OB gira con ω constante, determinar:

a) Velocidad angular de la manivela 3.

b) Aceleración angular de dicha manivela.

c) Aceleración del punto C_1 .

Datos: OB = R, BC= r

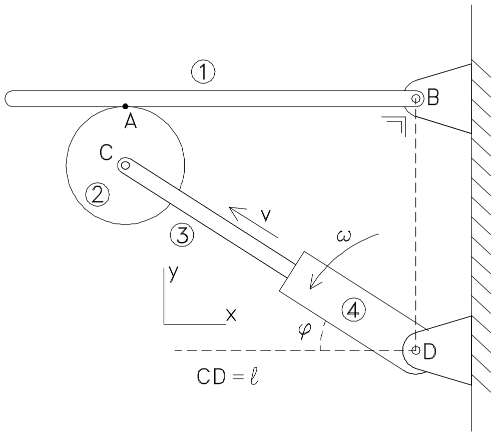


18.- El brazo telescópico DC del dispositivo considerado gira con velocidad angular ω constante y conocida; simultáneamente se alarga con velocidad v constante y conocida. El disco 2, de radio r, está en contacto sin deslizamiento con la barra 1 en el punto A. En el instante de la figura el ángulo en B es recto. Determinar, en la base de proyección indicada:

a) Valores de ω_1 y de ω_2.

b) Valor de α_2 , explicando la propiedad utilizada para deducirlo.

c) Valor de las aceleraciones relativa y complementaria del punto A_2 considerando como referencia móvil el brazo 1.

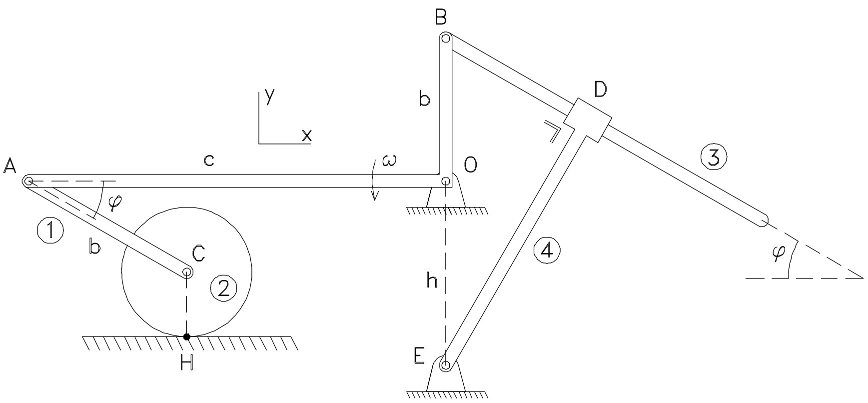


19.- En el dispositivo de la figura, la palanca acodada AOB gira con velocidad angular ω constante y conocida. La barra 3 desliza por el interior de la guía D, situada en el extremo de la manivela 4, que puede girar alrededor de E. La palanca 1 está articulada por su extremo A a la barra acodada, por su otro extremo lo está con el disco 2 que rueda sin deslizar alrededor del punto H. Determinar:

a) Velocidad angular ω_2 del disco 2 y aceleración $\vec{a}_H$ de su punto de contacto H con la bancada.

b) Aceleración angular α_2 del disco.

c) Módulos y sentidos de ω_3 y α_4.



20.- En el sistema de engranajes de la figura, el punto B gira con ω_B y α_B conocidas en torno del punto O fijo. El piñón 1, de centro O, tiene ω_1 y α_1 también conocidas. Se pide:

a) Valor de ω_2 y α_2.

b) Definir la velocidad de sucesión de A. Comprobar que $\vec{v}_{A/1} = \vec{v}_{A/2}$.