

4. PROBLEMAS DE DINÁMICA PLANA

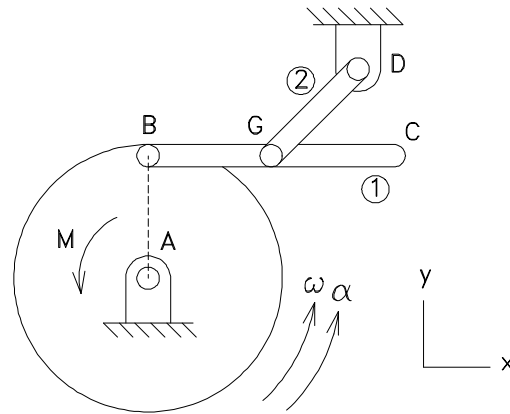
4.1. Problemas resueltos

1.- La rueda y las barras del dispositivo que se ilustra son homogéneas y se mueven en un plano vertical. La barra 1 tiene una masa $2m$; la barra 2 tiene masa m ; la rueda, también de masa m , gira con velocidad angular ω y aceleración angular α conocidas, bajo la acción de un par de valor M dado. En el instante de la figura, el ángulo en B es recto y la línea GD pasa por A. Hallar, para este instante:

a) Velocidad angular ω_1 y aceleración angular α_1 de la barra 1.

b) Componentes de la reacción en A (utilícese el mínimo número de ecuaciones).

(Datos: $AB = BG = GC = GD = \ell$).

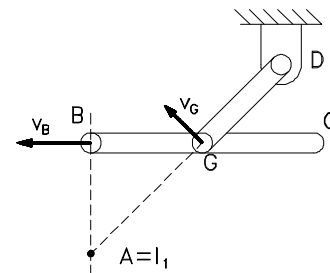


SOLUCIÓN

a) Para determinar la velocidad angular ω_1 determinaremos el CIR de la barra 1. Es inmediato ver que este CIR está en el punto A en el instante considerado. Por tanto, tendremos

$$\omega_1 = \frac{v_B}{BI_1} = \frac{\omega \ell}{\ell} = \omega$$

$$\omega_2 = \frac{v_G}{GD} = \frac{\omega_1 \cdot \overline{GI_1}}{GD} = \frac{\omega \ell \sqrt{2}}{\ell} = \omega \sqrt{2}$$



Para determinar la aceleración angular utilizaremos el punto B ya que es un punto de enlace (o sea común a la rueda y a la barra 1) y expresaremos su aceleración sucesivamente como punto de la rueda y como punto de la barra, es decir:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{a}_{BG}$$

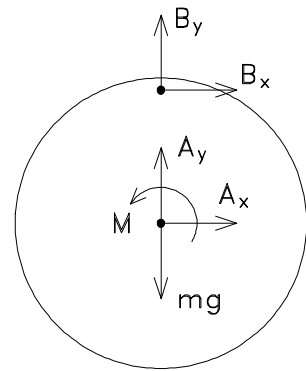
Los diagramas adjuntos expresan geoméricamente las fórmulas que acabamos de escribir. Nótese la importancia de atribuir sentidos positivos a las aceleraciones angulares, con objeto de poder trazar las aceleraciones tangenciales con el sentido correcto. Utilizando la base indicada en el enunciado e igualando las componentes de las dos expresiones de la aceleración de B, quedará

$$\begin{aligned} -\alpha \ell &= \omega_1^2 \ell + \frac{\omega_2^2 \ell}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2 \ell}{\sqrt{2}} \\ -\omega^2 \ell &= \alpha_1 \ell + \frac{\omega_2^2 \ell}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha_2 \ell}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$\alpha_1 = -\alpha - 2\omega^2(1 + \sqrt{2}) \quad \curvearrowright \quad \alpha_2 = -\omega^2(2 + \sqrt{2}) - \alpha\sqrt{2} \quad \curvearrowright$$

b) Ahora ya estamos en condiciones de efectuar el análisis dinámico. Trazamos el diagrama de sistema libre para el disco, como se muestra en la figura adjunta. Adviértase que A_x puede determinarse *directamente* -o sea, con una única ecuación- aplicando el teorema del momento cinético en el *punto B*, ya que al tomar momentos en B no aparecerán las fuerzas incógnitas que pasan por este punto. Pero el teorema debe utilizarse en su forma general, *no la simplificada*, puesto que para el punto B no se cumple ninguna condición simplificadora. Tomando el sentido positivo que se indica a continuación para los momentos, nos quedará



$$\curvearrowright \quad (M_B = I_G \alpha \pm m a_G d) \quad A_x \ell + M = I_A \alpha$$

Por tanto, la fuerza A_x valdrá

$$A_x = \frac{I_A \alpha}{\ell} - \frac{M}{\ell}$$

Hallando la suma de fuerzas

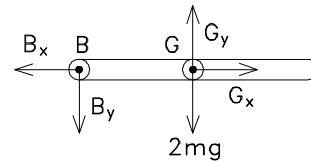
$$(F_y = m a_A^y = 0) \quad A_y + B_y - mg = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación muestra que el mero análisis del disco no permite hallar A_y , que depende del valor desconocido B_y . Para determinar este último estudiaremos la barra 1, cuyo diagrama de sistema libre se acompaña. El teorema del momento cinético en G, con el sentido positivo que se señala, nos da



$$(M_G = I_G \alpha) \quad B_y \ell = -I_G \alpha_1$$

El signo menos de α_1 obedece a que el sentido positivo elegido para los momentos -o sea para la rotación- es el antihorario y, en el apartado anterior, se ha elegido para α_1 el sentido horario, que es el contrario del actual. Con ello resulta



$$B_y = -\frac{I_G \alpha_1}{\ell}$$

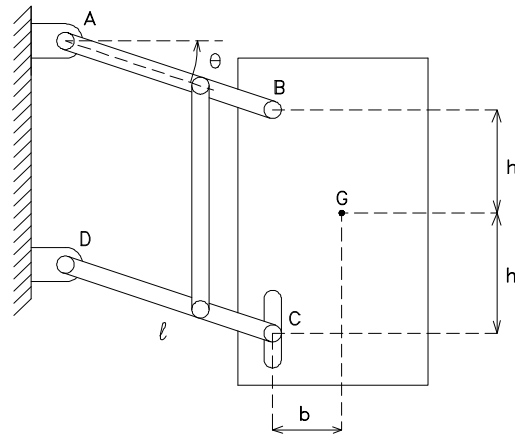
Y sustituyendo en (1) tendremos

$$A_y = mg + \frac{I_G \alpha_1}{\ell}$$

en donde deben substituirse I_G y α_1 por sus valores.

2.- La placa plana, homogénea y rectangular de la figura, cuyo centro de masas es el punto G, está articulada en B a la barra AB y se apoya en C en la barra CD. Dichas barras, de igual longitud ℓ se mantienen paralelas entre sí mediante una barra vertical articulada con ambas. El peso de las barras es despreciable frente al de la placa. Suponiendo que ésta parte del reposo en la posición en que $\theta=0^\circ$, determinar:

- Velocidad lineal del bloque cuando $\theta=30^\circ$.
- Aceleración angular de la barra AB para $\theta=30^\circ$.
- Reacciones sobre el bloque en B y C en el mismo instante.



SOLUCIÓN

a) El sólido en cuestión describe un movimiento de traslación curvilínea consecuencia del movimiento paralelo de las dos barras que lo sostienen. El hecho de que se trate de un movimiento de traslación permanente implica que la velocidad angular y la aceleración angular del bloque serán nulas en todo instante, y que, por tanto, la velocidad y aceleración de todos sus puntos será la misma.

Por otra parte, el hecho de que no existan fuerzas disipativas permite aplicar el teorema de conservación de la energía entre la posición inicial y una posición genérica cualquiera, de manera que la disminución de energía potencial implica un incremento igual de la energía cinética (la cual es nula en la posición inicial por partir del reposo), es decir:

$$-\Delta U = \Delta T$$

La disminución de la energía potencial puede calcularse fácilmente a partir del descenso del centro de masas:

$$-\Delta U = mg\ell \sin \theta$$

El incremento de energía cinética es su valor final por partir del reposo, en consecuencia:

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_G^2$$

e igualando ambas expresiones se deduce que

$$v_G = \sqrt{2g\ell \sin \theta}$$

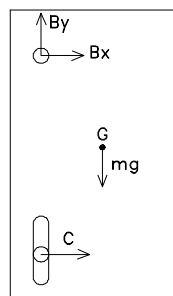
El hecho de tratarse de un movimiento de traslación implica, como ya se ha dicho, que todos los puntos de la placa tienen la misma velocidad. Concretamente, el punto B tiene la misma velocidad que G y, por tanto, la velocidad angular de la barra AB es:

$$\omega = \frac{v_B}{\ell} = \sqrt{\frac{2g \sin \theta}{\ell}}$$

Al haber encontrado una expresión genérica para la velocidad angular, ésta puede derivarse para hallar la aceleración angular, que resultará:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \dot{\theta} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{g}{\ell} \cos \theta$$

Para hallar las reacciones en los apoyos, será necesario analizar las fuerzas que actúan sobre la placa.



Por tratarse de un sólido en movimiento plano, no se producirán fuerzas en la dirección ortogonal al

plano del movimiento. En B aparecerá una reacción de módulo y dirección desconocida que dará lugar, por tanto, a dos componentes. En el apoyo C, por tratarse de un apoyo sobre una ranura lisa, se producirá una reacción de módulo desconocido y de dirección perpendicular a la ranura. En el centro de masas actuará el peso de la placa.

Una vez identificadas las acciones que se ejercen sobre el sólido, para aplicar los teoremas vectoriales será necesario calcular la aceleración lineal de centro de masas y la aceleración angular de la placa. Por tratarse de un movimiento de traslación permanente, ésta última será nula; en consecuencia:

$$\alpha = 0$$

El hecho de que el movimiento sea de traslación permanente permite, asimismo, afirmar que la aceleración de todos los puntos de la placa es la misma, por tanto:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B$$

Como el punto B pertenece, simultáneamente, a la placa y a la barra AB se podrá escribir:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B = \omega^2 \vec{BA} + \dot{\omega} \times \vec{AB} = \begin{bmatrix} -3g \sin \theta \cos \theta \\ g(2 - 3\cos^2 \theta) \end{bmatrix}$$

Conocidos los valores de las aceleraciones, lineal de G y angular de la placa, se podrán aplicar los teoremas vectoriales para el caso actual de movimiento plano.

Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G$$

da lugar a las ecuaciones:

$$B_x + C = -3mg \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

$$B_y - mg = mg(2 - 3\cos^2 \theta) \quad (2)$$

Teorema del momento cinético:

$$\Sigma M_G = I_G \alpha = 0$$

que proporciona la ecuación escalar

$$bB_y + h(B_x - C) = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (2) se obtiene directamente

$$B_y = 3mg \sin^2 \theta$$

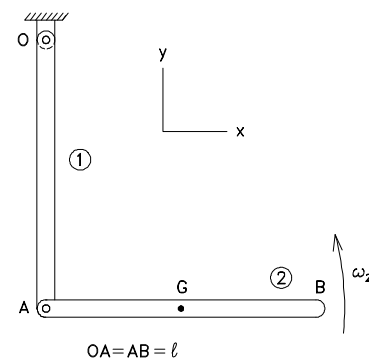
y resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones (1) y (3) se llega a:

$$B_x = -\frac{3}{2} mg \sin \theta \left(\cos \theta + \frac{b}{h} \sin \theta \right)$$

$$C = -\frac{3}{2} mg \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{b}{h} \sin \theta \right)$$

3.- Dos barras homogéneas, de masa m cada una, están situadas en un plano vertical y articuladas tal como se indica. La figura representa el instante inicial, en el cual la barra OA está en posición vertical mientras que la AB está horizontal. El sistema se pone en movimiento en esta posición con $\omega_1 = 0$ y ω_2 conocidas. Determinar, en el instante considerado:

- Aceleraciones angulares de las barras.
- Reacción horizontal A_x sobre la barra 2



SOLUCIÓN

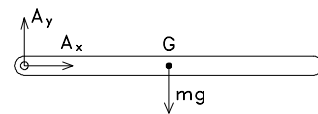
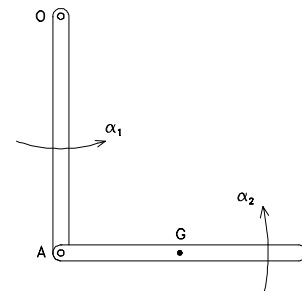
a) En el diagrama adjunto se señalan los sentidos positivos para las aceleraciones angulares. Es evidente que utilizando la base indicada podemos escribir

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} = 0 + \alpha_1 \ell \vec{i} = \alpha_1 \ell \vec{i}$$

Analicemos la barra 2 cuyo diagrama de sistema libre se acompaña. Para hallar α_2 aplicaremos el teorema del momento cinético en A. Como \vec{a}_A pasa por el centro de masa G de 2, el teorema adoptará la forma simplificada. Tomando para los momentos el sentido positivo que se señala, tendremos

$$\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ + \end{array} \right) \quad (M_A = I_A \alpha) \quad -mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \alpha_2$$

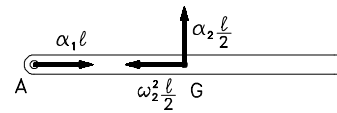
y por tanto



$$\alpha_2 = -\frac{3g}{2\ell} \quad \curvearrowright$$

b) Antes de aplicar el teorema de la cantidad de movimiento para 2 calcularemos \vec{a}_G , que vale

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{GA}$$



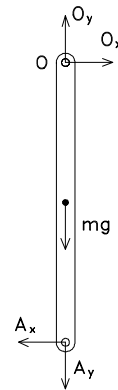
y por tanto su componente x será

$$a_G^x = \alpha_1 \ell - \omega_2^2 \frac{\ell}{2}$$

Por tanto, la suma de fuerzas para la barra 2, teniendo en cuenta el diagrama de sistema libre que se acompaña, valdrá

$$(F_x = ma_G^x) \quad A_x = m \left(\alpha_1 \ell - \omega_2^2 \frac{\ell}{2} \right)$$

La presencia de dos incógnitas indica que es menester una nueva ecuación para hallar A_x . La suministrará el análisis de la barra 1, cuyo diagrama de cuerpo libre se da. Adviértase que, por el principio de acción y reacción, la fuerza en A tiene las mismas componentes que en el diagrama para la barra 2, pero en *sentido contrario*. Tomando para los momentos el sentido positivo que se señala, tendremos



$$\quad \curvearrowright \quad (M_O = I_O \alpha) \quad -A_x \ell = \frac{1}{3} m \ell^2 \alpha_1$$

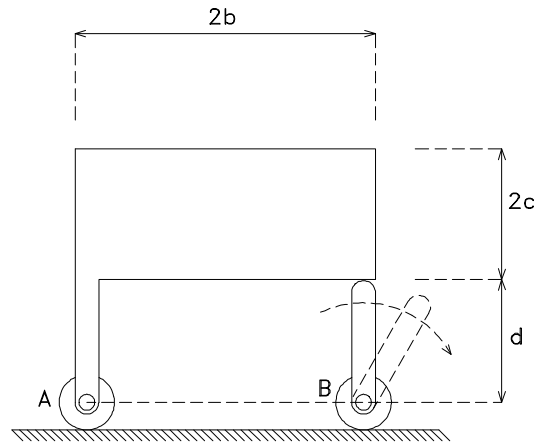
Ahora es inmediato resolver el sistema formado por las dos últimas ecuaciones, y resultará

$$A_x = -\frac{1}{8} m \omega_2^2 \ell$$

De paso, es inmediato calcular, aunque no se pide en el enunciado, que el valor para α_1 es

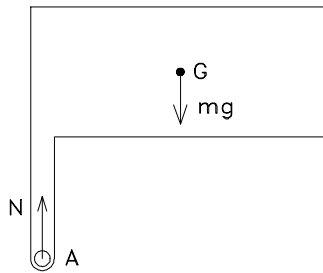
$$\alpha_1 = \frac{3}{8} \omega_2^2 \quad \curvearrowright$$

4.- Un bloque homogéneo, de masa m , está soportado del modo que se indica, mediante unos soportes y rodillos cuya masa es despreciable. En un instante determinado, el soporte B cede repentinamente. Encontrar en este momento los valores de la reacción en A y de la aceleración del punto A.



SOLUCIÓN

El cuerpo está inicialmente en reposo, pero en el momento en que el soporte B cede, el cuerpo adquiere una aceleración angular desconocida y que no se puede calcular por métodos cinemáticos. Se requiere, pues, en este caso, el uso de las relaciones dinámicas. En este instante, las acciones que tienen lugar sobre el cuerpo son el peso y la fuerza de contacto de A con el suelo, que, siendo la masa de los rodillos despreciable, tiene dirección vertical. Así, el diagrama del sólido libre para el cuerpo es:



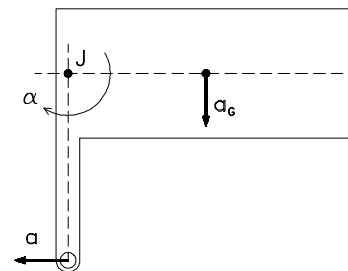
Como se ve, la única incógnita presente es precisamente la reacción en A.

Las ecuaciones necesarias son los habituales teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético, este último, aplicado en el centro de masas G, para trabajar con su expresión simplificada. Se tiene así:

$$\vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$M_G = I_G\alpha$$

De un primer análisis, se podría extraer que el número de incógnitas que se plantean es cuatro: la reacción en A, α , y las dos componentes de la aceleración del centro de masas. Sin embargo, esto no es así, puesto que el número de coordenadas independientes del sólido es dos: la posición del punto A (sólo



se puede desplazar horizontalmente) y la rotación del cuerpo. De este modo, el número real de incógnitas cinemáticas deberá ser dos. Por otra parte, si se observa que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo tiene dirección vertical, se concluye en consecuencia que la aceleración de G deberá ser vertical también, y se puede hallar la relación entre a y a_G usando el polo de aceleraciones J. Se verificará:

$$\begin{aligned} a_G &= \alpha b \\ a &= \alpha(d + c) \\ a &= \frac{a_G(d + c)}{b} \end{aligned} \quad (1)$$

Las ecuaciones de dinámica se pueden plantear ahora con una cualquiera de estas variables para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se escoge a_G . En estas condiciones, sólo interesa plantear el teorema de la cantidad de movimiento en el eje y:

$$N - mg = -ma_G \quad (2)$$

y el teorema del momento cinético:

$$Nb = \frac{m}{12} (4c^2 + 4b^2) \frac{a_G}{b} \quad (3)$$

formándose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La aceleración del centro de masas se puede hallar fácilmente por reducción, multiplicando la ecuación (2) por $-b$ y sumándola a (3):

$$\begin{array}{rcl} -Nb + mgb & = & ma_G b \\ Nb & = & m \frac{a_G}{12} \frac{4c^2 + 4b^2}{b} \\ \hline mgb & = & \frac{a_G}{12b} [12b^2 + 4c^2 + 4b^2] \end{array}$$

para obtener finalmente:

$$a_G = \frac{3gb^2}{4b^2 + c^2}$$

y ahora, aplicando (1):

$$a = \frac{3gb(d + c)}{4b^2 + c^2}$$

Sustituyendo ahora a_G en (2), se halla N:

$$N = mg \left[\frac{b^2 + c^2}{4b^2 + c^2} \right]$$

5.- El sistema de la figura se mueve en un plano vertical y el disco rueda sin deslizar. La masa de la barra OA es despreciable, la barra AB y el disco son homogéneos y de masa m cada uno de ellos. El resorte, de longitud natural nula, tiene una rigidez de constante conocida k .

Si el sistema parte del reposo en $\theta = 0$, determinar el valor de ω cuando la barra OA pase por la posición $\theta = 60^\circ$.

SOLUCIÓN

Como la magnitud pedida es una velocidad, aplicaremos el método energético. La figura muestra el diagrama de fuerzas para el sistema *total*. Consideremos previamente dos cuestiones: ¿cuáles son las fuerzas del diagrama que no trabajan?; para las demás ¿cuáles tienen energía potencial con expresión conocida?

Evidentemente la reacción en O no trabaja por ser O fijo. Tampoco trabaja la reacción en C pese a tener una componente horizontal debida al rozamiento. En efecto, el trabajo elemental de la reacción en C es

$$dW = \vec{C} \cdot d\vec{r} = \vec{C} \cdot \vec{v}_C dt = 0$$

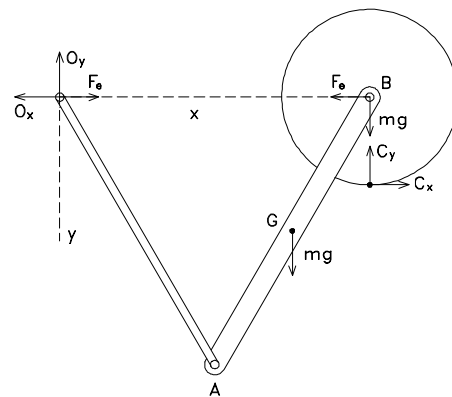
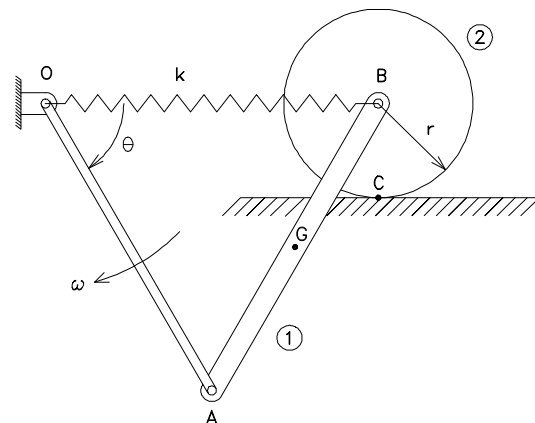
ya que el punto de contacto C tiene velocidad $v_C = 0$ al no deslizar.

Las demás fuerzas son conservativas -pesos y fuerzas F_e elásticas-, con expresiones bien conocidas para su energía potencial. O sea, todas las fuerzas que actúan sobre el sistema y trabajan, tienen también energía potencial conocida. Podemos, pues, aplicar el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$T + U = \text{cte}$$

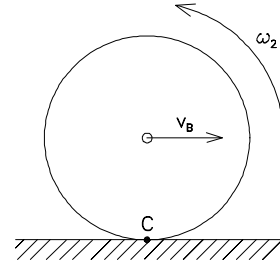
lo que significa que la suma de energía cinética y potencial para el sistema en la posición inicial es igual a la suma de ambas energías en la posición final. Con ello, el problema se reduce a calcular las expresiones de ambas energías. Señalemos que el sistema tiene una única coordenada independiente: mediante el ángulo θ de la figura queda definida la posición del sistema en un instante cualquiera. Así, usando la referencia Oxy, las coordenadas de los puntos G y B serán:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= 2\ell \cos \theta, \\ x_G &= \frac{3\ell}{2} \cos \theta \\ y_G &= \frac{\ell}{2} \sin \theta \end{aligned} \right\}$$



expresiones genéricas que derivadas respecto el tiempo dan

$$v_B = -2\ell\omega \sin\theta, \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= -\frac{3\ell\omega}{2} \sin\theta \\ \dot{y}_G &= \frac{\ell\omega}{2} \cos\theta \end{aligned} \right\}$$



donde se ha utilizado $\dot{\theta} = \omega$. Con ello, la velocidad de G vale

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \frac{\ell^2\omega^2}{4} (\cos^2\theta + 9\sin^2\theta)$$

y la velocidad angular ω_2 del disco será

$$\omega_2 = -\frac{v_B}{r} = \frac{2\ell\omega}{r} \sin\theta$$

donde el signo negativo obedece a que se ha tomado en la figura adjunta el sentido positivo para ω_2 , que es contrario al inducido por la rotación en torno a C con v_B (cuyo sentido positivo es el de x_B).

La energía cinética T_1 de la barra 1 puede calcularse aplicando el teorema de König

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

donde v_G deberá substituirse por el valor hallado antes e I_G viene dado por

$$I_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$

Señalemos que, como la barra 1 tiene movimiento plano, su movimiento instantáneo es una rotación en torno a su CIR I_1 . Con ello se podría escribir

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega^2$$

pero el cálculo del momento de inercia en torno a I_1 exigiría la aplicación del teorema de Steiner.

La energía cinética del disco T_2 es de cálculo inmediato, teniendo en cuenta que realiza una rotación

en torno a C. Es decir

$$T_2 = \frac{1}{2} I_C \omega_2^2 \quad \text{con} \quad I_C = \frac{3}{2} m r^2$$

Como consecuencia de lo dicho, la expresión de la energía cinética T del sistema, para una posición cualquiera y en función de ω , es la siguiente:

$$T = \frac{1}{8} m \ell^2 \omega^2 (\cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta) + \frac{1}{24} m \ell^2 \omega^2 + 3 m \ell^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

donde aún no se han reducido términos semejantes.

Pasemos al cálculo de las energías potenciales. La energía potencial gravitatoria del sistema, *si el nivel cero se toma en la horizontal por O*, vale

$$U_g = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta$$

La energía elástica será

$$U_e = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (2\ell \cos \theta)^2 = 2k\ell^2 \cos^2 \theta$$

Con lo que la energía potencial total será

$$U = U_g + U_e = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta \quad (2)$$

La conservación de la energía mecánica exige, como se señaló anteriormente, la siguiente igualdad entre energías iniciales y finales:

$$T_i + U_i = T_f + U_f$$

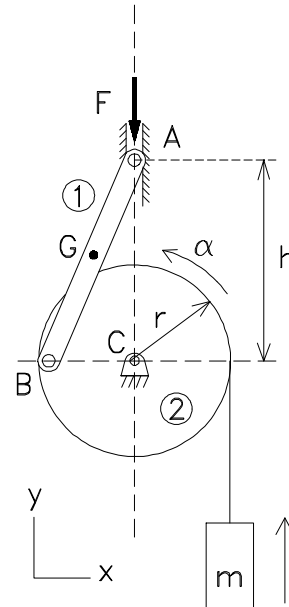
Teniendo en cuenta las expresiones (1) y (2) para las energías, y recordando que $\theta = 0$, $\omega = 0$ en el instante inicial y que $\theta = 60^\circ$ para el final, la conservación de la energía que acabamos de considerar nos dará

$$2k\ell^2 = T(60^\circ) + \frac{k\ell^2}{2} - \frac{mg\ell}{2} \sin 60^\circ$$

donde $T(60^\circ)$ es la energía cinética (1) para $\theta = 60^\circ$. Esta última expresión es una ecuación con la única incógnita ω , que es inmediato despejar.

6.- El dispositivo de la figura está situado en un plano vertical. El disco de masa m , que gira en torno del punto fijo C , arrastra el bloque de masa m mediante el cable inextensible que se indica. El sistema se propulsa mediante la fuerza F , desconocida, que actúa en el extremo A de la barra. La corredera A está restringida a moverse siguiendo la guía vertical. La barra 1 tiene masa m y todos los contactos son lisos. En el instante que se ilustra, el sistema parte del reposo y el disco tiene únicamente una aceleración angular α conocida. Determinar en este instante:

- Valores de α_1 y \vec{a}_G .
- Valor de la fuerza F .
- Reacción de la guía en el contacto con el extremo A (Utilícese una única ecuación).



SOLUCIÓN

a) Dado que el sistema parte del reposo en este instante, ninguna barra tiene velocidad angular y ningún punto está animado de velocidad lineal.

Establecida la premisa anterior se puede iniciar el estudio de la barra 1. Por las condiciones de ligadura, el punto A sólo puede tener aceleración en la dirección de la guía vertical. El punto B , por su parte, pertenece a los sólidos 1 y 2, pero su aceleración es, evidentemente, única. Dado que el disco 2 está animado de una aceleración angular α , la aceleración lineal del punto B será también vertical.

El hecho de que las aceleraciones de dos puntos de la barra 1 tengan la misma dirección, junto con la circunstancia de que en este instante el sólido no tenga velocidad angular, permite afirmar que la barra 1 no tiene aceleración angular: $\alpha_1 = 0$. En efecto, la relación entre las aceleraciones de A y B , que pertenecen al mismo sólido, puede expresarse mediante:

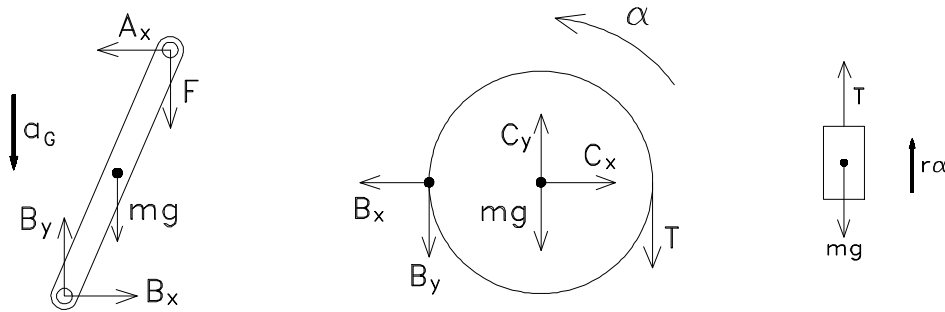
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_1 \times \vec{BA}$$

Caso de existir $\vec{\alpha}_1$, el producto de esta aceleración angular por el vector \vec{BA} sería perpendicular a este último y, en consecuencia, las aceleraciones de A y B no podrían ser paralelas.

Una vez deducido que $\alpha_1 = 0$, es fácil establecer que el sólido 1 realiza un movimiento de traslación instantánea (para la aceleración); en consecuencia todos sus puntos tienen, en este instante, la misma aceleración, es decir:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A = \vec{a}_B = -\alpha r \vec{j}$$

b) Para encontrar el valor de la fuerza F será necesario realizar un análisis de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los sólidos que constituyen el sistema.



En el diagrama de sólido libre de la barra 1 puede verse que en el extremo B actúan dos componentes derivadas de que existe una articulación. En el extremo A actúa por una parte la fuerza F vertical y por otra la reacción del apoyo que, al ser liso y sin rozamiento, es perpendicular a la guía. En el centro de masas existirá la acción del peso de la barra.

El diagrama de sólido libre del disco incluye las reacciones en la articulación B, opuestas a las que se han considerado en el diagrama anterior. En el centro existirán las reacciones derivadas del enlace de articulación con la bancada y el peso propio del disco. En el punto diametralmente opuesto a B se encontrará aplicada una tensión T producida por la existencia del cable, que siempre trabaja a tracción.

Finalmente el tercer diagrama, correspondiente al bloque suspendido. Sobre éste actúan solamente el peso propio y la tensión producida por el cable; esta última debe ser opuesta a la que se ha considerado en el disco.

En el diagrama correspondiente a la barra 1 existen cuatro fuerzas desconocidas, por lo que será necesario recurrir a ecuaciones adicionales. En cualquier caso, la aplicación de la segunda ley de Newton en su componente vertical permite escribir:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= ma_{G_y} \\ F + mg - B_y &= mr\alpha\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$F = B_y + mr\alpha - mg$$

Para encontrar B_y bastará aplicar el teorema del momento cinético al disco. Tomando el sentido antihorario como positivo, se podrá escribir:

$$\begin{aligned}\Sigma M_C &= I_C \alpha \\ B_y r - Tr &= I_C \alpha\end{aligned}$$

y por tanto

$$B_y = T + \frac{1}{2}mr\alpha$$

El valor de la tensión se podrá deducir del diagrama de sólido rígido del bloque. Téngase en cuenta que éste se mueve con una aceleración lineal que es la aceleración periférica del disco, en consecuencia:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \\ T - mg &= mr\alpha\end{aligned}$$

por lo que la tensión en el cable es

$$T = mg + mr\alpha$$

Sustituyendo sucesivamente los resultados obtenidos se llega a

$$F = \frac{5}{2} mr\alpha$$

c) Para determinar la reacción horizontal de la guía en el punto A se recurrirá a plantear, en el diagrama de la barra 1, la ecuación del momento cinético respecto del punto B:

$$\Sigma M_B = I_G \alpha \pm ma_G d$$

de donde resultará, tomando el sentido antihorario como positivo:

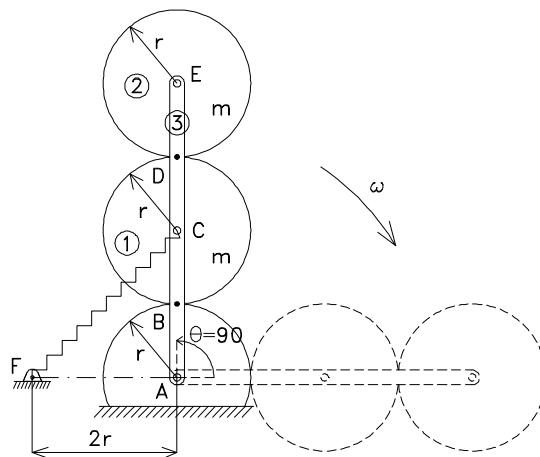
$$Fr - A_x h + mg \frac{r}{2} = m\alpha r \frac{r}{2}$$

Finalmente se obtendrá:

$$A_x = \frac{mr}{2h} (4\alpha r + g)$$

7.- La barra AE que se muestra en la figura, de masa m y longitud $2r$, se mueve en un plano vertical. Como consecuencia de la acción del resorte FC, de longitud natural despreciable, la barra gira alrededor de A. En los puntos C y E de la barra se han montado sendas ruedas de masa m y radio r , que no deslizan en los contactos B y D. Suponiendo que la barra AE tiene una velocidad angular ω conocida en la posición vertical, determinar:

- Velocidades angulares de las dos ruedas, ω_1 y ω_2 , en función de ω .
- Cuál debe ser la rigidez k del resorte para que la barra AE llegue a la posición horizontal, $\theta = 0$, con velocidad angular nula.



SOLUCIÓN

a) Para determinar las correspondientes velocidades angulares se recurrirá al hecho de que los puntos C y E pertenecen, simultáneamente, a dos cuerpos rígidos. También se utilizará la condición de ligadura que implica el hecho de que en los puntos B y D no exista deslizamiento.

En efecto, dado que el punto C pertenece a la barra AE, que gira alrededor de A, su velocidad instantánea es:

$$v_C = 2\omega r$$

Al propio tiempo el punto C pertenece al disco 1 cuyo punto B, por el hecho de no deslizar, tiene la misma velocidad que el correspondiente punto de la bancada; en consecuencia tiene velocidad nula. Por tanto, el punto B es el CIR del disco 1 y la velocidad de su centro C puede expresarse como:

$$v_C = \omega_1 r$$

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\omega_1 = 2\omega$$

Para hallar la velocidad angular del disco 2 se utilizará un procedimiento análogo. La velocidad del punto E, por pertenecer a la barra AE, es

$$v_E = 4\omega r$$

El punto E también es el centro del disco 2. Dado que en D se produce un contacto sin deslizamiento, el punto material D_2 , del disco 2, tiene la misma velocidad que el punto material D_1 que pertenece al disco 1. Por lo tanto se podrá escribir:

$$v_{D_2} = v_{D_1} = 2\omega_1 r$$

La velocidad del punto E podrá calcularse, en función de ω_2 , mediante la expresión que relaciona las velocidades lineales de dos puntos que pertenecen al mismo sólido, de modo que:

$$v_E = v_{D_2} - \omega_2 r$$

Igualando las expresiones de v_E se obtiene:

$$\omega_2 = 0$$

b) Las fuerzas de rozamiento, que garantizan el contacto sin deslizamiento en B y D, no trabajan por el hecho de que los contactos en B y D tienen lugar sin deslizar; por lo tanto en el movimiento del sistema mecánico no se produce disipación de energía. En consecuencia, se podrá utilizar el teorema de conservación de la energía:

$$E_f = E_o$$

La energía mecánica, en cada posición, será la suma de la energía potencial gravitatoria, la energía cinética y la energía potencial elástica de todos los elementos que constituyen el sistema.

$$E = U_g + U_e + T$$

Posición inicial (barra AE vertical):

La energía potencial gravitatoria se determinará tomando como nivel de referencia la recta horizontal que pasa por el punto A. En tales condiciones se sumarán las energías potenciales de la barra AE y de las dos ruedas situadas a diferentes alturas, de modo que:

$$U_g = mg2r + mg2r + mg4r$$

La energía cinética será la suma de las energías cinéticas de cada uno de los sólidos componentes. La de la barra AE se determinará considerando que se trata de un sólido que gira, con velocidad ω , en torno del punto fijo A. La energía cinética del disco 1 se podrá encontrar por aplicación del teorema de K oenig, sumando la energía cinética de traslación con el centro de masas y la energía cinética de rotación respecto de una referencia traslacional con éste. En el caso del disco 2, como sólo tiene movimiento de traslación, sólo habrá que considerar esta energía cinética.

$$T_{AE} = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_E^2$$

$$T = \frac{41}{3} m r^2 \omega^2$$

La energía potencial elástica se determinará a partir de la longitud del resorte; en este caso el hecho de que la longitud natural sea despreciable simplifica mucho los cálculos. Será:

$$U_{eo} = \frac{1}{2} k (2r\sqrt{2} - 0)^2 = 4kr^2$$

Posición final (barra AE horizontal):

En esta posición, la energía potencial gravitatoria será nula por pasar el sistema por el que se ha establecido como nivel cero de energía. La energía cinética será, igualmente nula, dado que se impone la condición de que $\omega = 0$. Quedará, por lo tanto, únicamente la energía potencial elástica.

dirección BE y la dirección perpendicular. Ayudándonos del diagrama adjunto, quedará

$$\vec{v}_{B_1} = \omega \ell (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2)$$

La velocidad de B_1 relativa a 2 tiene la dirección de la barra 2, pero su módulo es desconocido. Así pues

$$\vec{v}_r = v_r \vec{e}_1$$

La velocidad de arrastre es, por definición, la velocidad absoluta de B_1 suponiendo que es solidario de la referencia móvil, que en nuestro caso es la barra 2. Si a la velocidad angular ω_2 de la barra 2 se le atribuye el sentido positivo indicado en la figura adjunta, la velocidad de arrastre tiene dirección también conocida (perpendicular a EB), y tendremos

$$\vec{v}_a = v_a \vec{e}_2 = \omega_2 b \vec{e}_2$$

Sustituyendo ahora en (1) las expresiones obtenidas para las velocidades relativa y de arrastre, se obtiene:

$$\omega \ell (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) = v_r \vec{e}_1 + \omega_2 b \vec{e}_2$$

La igualación de componentes dará

$$v_r = \omega \ell \cos \varphi \quad \omega_2 = \frac{\omega \ell \sin \varphi}{b} = \omega \sin^2 \varphi$$

Obsérvese que los resultados obtenidos también se pueden hallar geoméricamente de forma muy breve; basta con proyectar la velocidad absoluta \vec{v}_{B_1} en las direcciones 1 y 2 (ya que éstas son las de la velocidad relativa y de arrastre). Esto se muestra en la figura adjunta.

Para la determinación de α_2 se seguirá el mismo método de antes. Esto es, se hará composición de movimientos para B_1 con las referencias fija y móvil anteriores. El teorema de composición de aceleraciones nos dice

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c \quad (2)$$

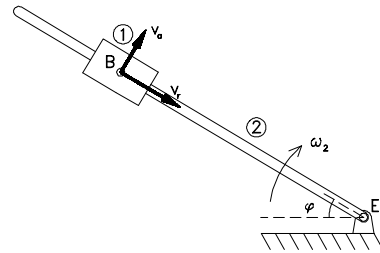
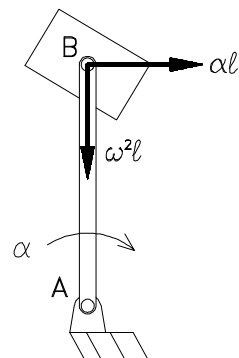
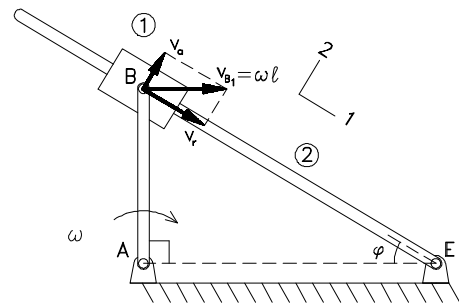


Figura 2



Las dos figuras que se adjuntan muestran geoméricamente el primer y segundo miembro de (2). Igualando componentes en (2) según la dirección 2, y ayudándonos de los dos diagramas, será

$$\alpha \ell \sin \varphi - \omega^2 \ell \cos \varphi = \alpha_2 b - 2\omega_2 v_r$$

De donde se obtiene

$$\alpha_2 = \frac{1}{b} (\alpha \ell \sin \varphi - \omega^2 \ell \cos \varphi + 2\omega_2 v_r)$$

con los valores de ω_2 y v_r obtenidos anteriormente.

b) Para determinar las reacciones en C y en D, empezaremos aplicando el teorema del momento cinético en el punto A para la barra AB. Utilizando el diagrama de cuerpo libre que se acompaña, y tomando el sentido positivo para los momentos que se indica a continuación, tendremos:

$$+ \curvearrowright \quad M_A = I_A \alpha \quad \Rightarrow \quad -B_x \ell - M = -I_A \alpha$$

y por tanto

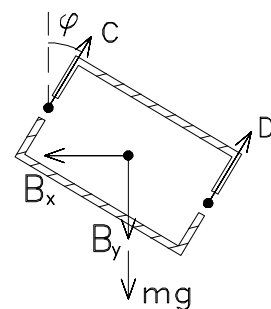
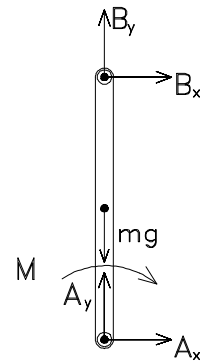
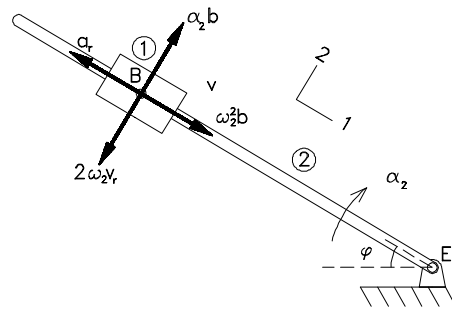
$$B_x = \frac{I_A \alpha - M}{\ell}$$

con

$$I_A = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Analicemos ahora la corredera 1. Trazamos su diagrama de cuerpo libre, en el cual las fuerzas C y D, por ser de contacto sin rozamiento, son normales a los puntos de contacto, o sea, a la barra 2. Obsérvese que las componentes de la fuerza \vec{B} , en virtud del principio de acción y reacción, tienen sentidos contrarios a los dibujados en el diagrama correspondiente a la barra AB.

El teorema del momento cinético en el punto B toma la forma simplificada, por ser B el centro de masa de la corredera. Se tendrá:



$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ + \end{array} \quad M_B = I_B \alpha \quad \Rightarrow \quad (D - C)r = I_B \alpha_2$$

es decir

$$D - C = \frac{I_B \alpha_2}{r} \quad (3)$$

Aplicando ahora el teorema de la cantidad de movimiento en la dirección x horizontal, se obtiene

$$F_x = m a_G^x \quad \Rightarrow \quad -B_x + (D + C) \sin \varphi = m \alpha \ell$$

o sea

$$D + C = \frac{m \alpha \ell + B_x}{\sin \varphi} \quad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que es inmediato resolver:

$$C = \frac{m \alpha \ell + B_x}{2 \sin \varphi} - \frac{I_B \alpha_2}{2r}$$

$$D = \frac{m \alpha \ell + B_x}{2 \sin \varphi} + \frac{I_B \alpha_2}{2r}$$

donde α_2 y B_x tienen los valores anteriormente determinados y cuya dirección y sentido son los indicados en el esquema.

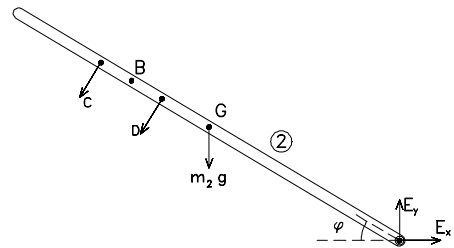
c) Para determinar la masa m_2 de la barra 2, bastará con trazar el diagrama de sistema libre para la barra 2 en la forma que se adjunta. Aplicando ahora el teorema del momento cinético en el punto fijo E, con el sentido positivo que se indica a continuación, se obtiene:



$$M_E = I_E \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 g \frac{h}{2} \cos \varphi + C(b+r) + D(b-r) = -I_E \alpha_2$$

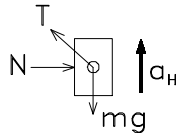
con

$$I_E = \frac{1}{3} m_2 h^2$$

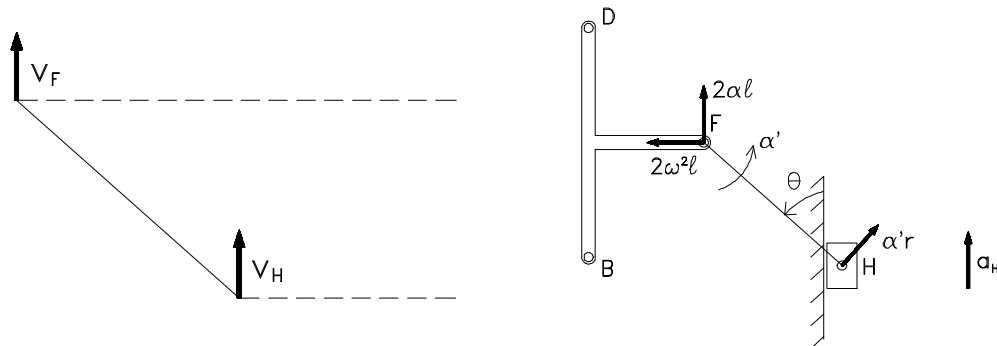


Como el sólido 2 está en traslación permanente, esta aceleración lineal será la de todos los puntos de dicho sólido. Simultáneamente carece de velocidad y aceleración angulares.

Para determinar la tensión del cable FH, se deberá recurrir al diagrama de sólido rígido del bloque H. En él se advierte la existencia de tres fuerzas: el peso propio, la tensión del cable y la reacción de contacto, de dirección perpendicular a la pared por ser ésta lisa.



La aceleración del bloque H está dirigida hacia arriba y es paralela a la pared, pero su módulo es desconocido. Para hallar la aceleración de H será necesario analizar la cinemática del cable FH.



La velocidad del punto F es vertical dirigida hacia arriba como consecuencia del movimiento de la barra 2 a la que pertenece. La velocidad del punto H es también vertical y dirigida hacia arriba como consecuencia de la restricción que impone la existencia de la guía vertical. En estas condiciones puede afirmarse que el CIR del cable se halla, en este instante, en el infinito y que el cable se halla en traslación instantánea. El cable no tiene velocidad angular, pero sí está animado de aceleración angular, ya que el movimiento de traslación es instantáneo. Del análisis del cinema de aceleraciones del punto H se deduce que, puesto que la aceleración resultante ha de ser vertical, las componentes horizontales deben cancelarse y, en consecuencia

$$\alpha' r \cos \theta = 2\omega^2 \ell \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{2\omega^2 \ell}{r \cos \theta}$$

Una vez determinado el valor de la aceleración angular puede encontrarse el módulo de la aceleración del punto H, que resultará ser de

$$a_H = 2\alpha\ell + 2\omega^2\ell \operatorname{tg} \theta$$

Para hallar el valor de la tensión bastará aplicar la segunda ley de Newton al bloque H, de modo que:

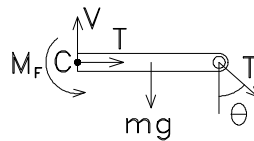
$$\Sigma F_y = ma_{H_y}$$

$$T \cos \theta - mg = 2m\ell(\alpha + \omega^2 \tan \theta)$$

de donde resultará

$$T = \frac{m}{\cos \theta} \left[g + 2\ell(\alpha + \omega^2 \tan \theta) \right]$$

b) Para determinar el momento flector en el punto C de la barra CF será necesario establecer, previamente, el diagrama de sólido libre correspondiente. En el extremo C actuarán las dos componentes T y V de la fuerza de enlace y el momento flector M_F , todos ellos de módulo desconocido. En el centro de masas actuará el peso y en el extremo F estará aplicada la tensión del cable.



El momento flector podrá encontrarse aplicando el teorema del momento cinético respecto del punto C. Se elige este punto con objeto de eliminar las dos fuerzas que actúan en él y cuyo módulo es desconocido. La aplicación del teorema del momento cinético, en el caso plano, lleva a:

$$\Sigma M_C = I_G \alpha \pm ma_G d$$

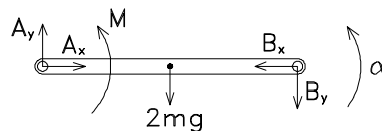
Considerando que el sólido en cuestión es parte de otro, que se encuentra en movimiento de traslación permanente, su aceleración angular será nula y, por tanto, tomando el sentido antihorario como positivo quedará

$$M_F - mg \frac{\ell}{2} - T \cos \theta \ell = m 2\alpha \ell \frac{\ell}{2}$$

de manera que el momento flector en cuestión será:

$$M_F = m \frac{g\ell}{2} + m\alpha \ell^2 + T \ell \cos \theta$$

c) Un paso previo para determinar el valor del par motor aplicado sobre la barra AB será analizar las fuerzas que actúan sobre el sólido 1. En el diagrama se puede ver que en la articulación A se representan dos componentes de módulo desconocido. En el centro de masas actuará el peso propio. En el extremo B estarán aplicadas las dos componentes que se derivan de la interacción con el sólido 2 mediante una articulación. Sobre la barra actúa también el par M aplicado por el motor externo.



Si se aplica el teorema del momento cinético con respecto del punto A, se eliminarán las dos acciones que se ejercen en dicho punto y se elimina también el efecto de B_x que, al ser horizontal, pasa por dicho punto. En consecuencia:

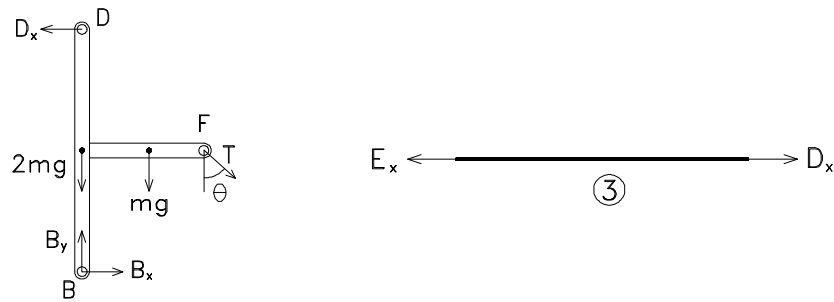
$$\Sigma M_A = I_G \alpha \pm m a_G d$$

$$M - B_y 2\ell - 2mg\ell = \frac{1}{12} m (2\ell)^2 \alpha + 2m\alpha\ell^2$$

donde se ha tomado el sentido antihorario como positivo. De la última ecuación se deduce:

$$M = 2B_y \ell + 2mg\ell + \frac{7}{3} m\ell^2 \alpha$$

donde es desconocido el valor de B_y . Para encontrarlo se recurrirá al estudio del sólido 2. En este caso las fuerzas aplicadas en B son idénticas a las que se han considerado anteriormente pero con sentidos opuestos. En el extremo F se ejerce la tensión del cable. En el punto D actúa la reacción derivada de la articulación que allí existe con el sólido 3. Al ser la barra 3 un sólido de masa despreciable sobre el que actúan sólo dos fuerzas, éstas han de ser concurrentes. En consecuencia, las fuerzas que se aplican en sus extremos tienen la dirección de la propia barra.



Si se aplica al sólido 1 la segunda ley de Newton, y se considera únicamente la ecuación escalar que corresponde a la dirección vertical quedará:

$$\Sigma F_y = m a_{G_y}$$

$$B_y - 3mg - T \cos \theta = 3m2\alpha\ell$$

Despejando el valor de B_y resultará:

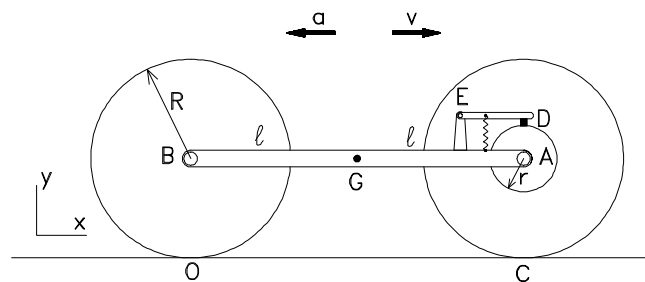
$$B_y = 3m(g + 2\alpha\ell) + T \cos \theta$$

lo cual, sustituido en la ecuación del par motor, permitirá obtener

$$M = 8mg\ell + \frac{43}{3} m\ell^2 \alpha + 2T\ell \cos \theta$$

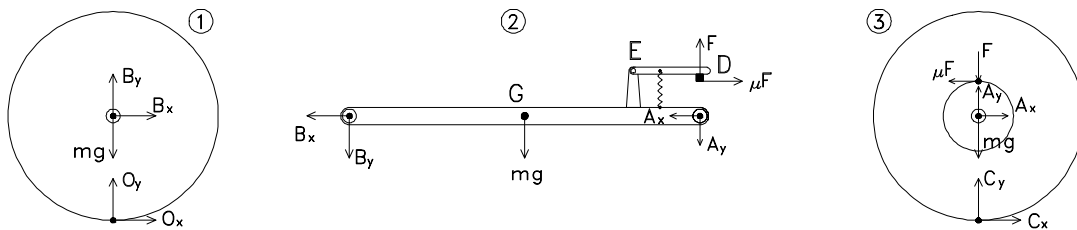
10.- La figura representa un vehículo con un sistema de frenado. En un ensayo de frenada, la acción del muelle hace que la zapata D roze con el tambor de radio r con una determinada fuerza. El coeficiente de fricción entre la zapata y el tambor es μ . En el instante inicial se conocen v y a del chasis, según se indica en la figura. No hay deslizamiento entre las ruedas y el suelo. Tiene masa m cada una de las ruedas (incluyendo el tambor de la rueda sobre la que se ejerce la frenada), así como el conjunto chasis-freno. Este sistema presenta su centro de masas en G. Determinar:

- Fuerza normal N_0 en D en el instante inicial.
- Valor de la reacción C_y sobre la rueda en el instante inicial.
- Se considera ahora que la fuerza que realiza la zapata sobre el tambor sigue una ley $N = N_0(1 + \theta)$, donde θ es el ángulo girado por las ruedas (en radianes) desde el momento en que se empieza a frenar. Determinar, en este supuesto, el espacio total recorrido por el vehículo hasta parar.



SOLUCIÓN

a) La cinemática del problema no plantea ninguna dificultad, por lo que se aborda de inmediato la parte dinámica. Los diagramas del sólido libre que se necesitan son:



El diagrama 3 presenta al conjunto formado por la rueda y el tambor de frenado (son un mismo sólido); se observa la fuerza F que efectúa la zapata sobre el tambor, así como la consecuente fuerza de fricción que aparece, oponiéndose al movimiento. El diagrama 2 corresponde al sistema formado por el chasis y el sistema de frenado. Interesa trabajar con este sistema y no desmembrarlo en cada uno de los componentes, puesto que no hay datos sobre la masa individual de cada uno de ellos y, además, tampoco

se piden reacciones en las uniones que se dan en el sistema. El diagrama 1 no presenta nada especial.

Del diagrama 3 interesa plantear el teorema del momento cinético en el punto C, puesto que así aparecen sólo dos incógnitas, entre ellas, la fuerza F de frenado. Se considera el sentido de giro antihorario como positivo para todo el problema.

$$\begin{aligned} M_C &= I_C \alpha \\ -A_x R + \mu F(R + r) &= \frac{3}{2} m R^2 \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

Con el fin de determinar A_x , se plantea el teorema de la cantidad de movimiento en dirección x para el sistema 2.

$$\begin{aligned} F_x &= m a_{G_x} \\ -B_x - A_x + \mu F &= -m \alpha R \end{aligned} \quad (2)$$

Aparece ahora una nueva incógnita B_x , que se calculará aplicando el teorema del momento cinético en el punto O de la rueda 1. Es decir

$$\begin{aligned} M_O &= I_O \alpha \\ -B_x R &= \frac{3}{2} m R^2 \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

De (3) se halla B_x inmediatamente:

$$B_x = -\frac{3}{2} m R \alpha$$

que, sustituyéndose en (2), y teniendo en cuenta (1), da lugar al siguiente sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas A_x y F:

$$\left. \begin{aligned} A_x - \mu F &= \frac{5}{2} m R \alpha \\ -A_x R + \mu F(R + r) &= \frac{3}{2} m R^2 \alpha \end{aligned} \right\}$$

Para hallar F con facilidad, se propone resolver el sistema por reducción, multiplicando (4) por -R, sumándose después a (5). De este modo, se halla la fuerza F, que en el instante inicial se denomina N_0 :

$$F = N_0 = \frac{1}{\mu} \frac{4mR^2\alpha}{r}$$

b) En este caso interesa plantear el teorema de la cantidad de movimiento en dirección y sobre la rueda 3:

$$F_y = 0$$

$$-F + A_y - mg + C_y = 0 \quad (4)$$

donde F se ha determinado en el apartado anterior. La ecuación contiene entonces dos incógnitas: C_y y A_y . Para hallar A_y , se plantea el teorema del momento cinético en el punto B para el sistema 2; dado que la aceleración del punto B pasa por el centro de masas del sistema analizado, se utiliza la expresión simplificada del teorema:

$$M_B = I_B \alpha$$

Como, además, el sistema considerado se traslada, quedará:

$$-\mu F_r - 2A_y \ell + 2F \ell - mg \ell = 0 \quad (5)$$

Ahora se puede despejar A_y de (5), para sustituirla en (4) y determinar C_y . Resultando:

$$C_y = \frac{3}{2} mg + \mu F \frac{r}{2\ell}$$

c) En este caso es necesario plantear el teorema de la energía cinética:

$$W = \Delta T \quad (6)$$

donde la variación de la energía cinética es

$$\Delta T = T_f - T_0 = -T_0 = -\left[2 \cdot \frac{3}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \right] = -\frac{7}{2} m \omega^2 R^2 \quad (7)$$

y el trabajo será

$$W = -\int F ds$$

donde ds es el diferencial de desplazamiento del punto D de la rueda respecto de la palanca de frenado:

$$ds = r d\theta$$

y la fuerza F , la fuerza de frenado sobre la rueda:

$$F = \mu N_0 (1 + \theta)$$

en consecuencia

$$W = -\int_0^{\theta} \mu N_0 (1 + \theta) r d\theta = -\mu N_0 r \int_0^{\theta} (1 + \theta) d\theta = -\mu N_0 r \left[\theta + \frac{\theta^2}{2} \right] \quad (8)$$

en el que el signo menos viene dado por ser un trabajo de rozamiento que se opone al movimiento. Sustituyendo ahora (7) y (8) en (6):

$$-\mu N_0 r \left[\theta + \frac{\theta^2}{2} \right] = -\frac{7}{2} m R^2 \omega^2$$

de modo que se obtiene una ecuación de segundo grado:

$$\frac{\theta^2}{2} + \theta - \frac{7mR^2\omega^2}{2\mu N_0 r} = 0$$

en la que sólo una solución tiene sentido físico:

$$\theta = -1 + \sqrt{1 + \frac{7mR^2\omega^2}{\mu N_0 r}}$$

Finalmente, el espacio recorrido e será el ángulo girado por la rueda (en radianes) multiplicado por el radio R de la misma. Es decir:

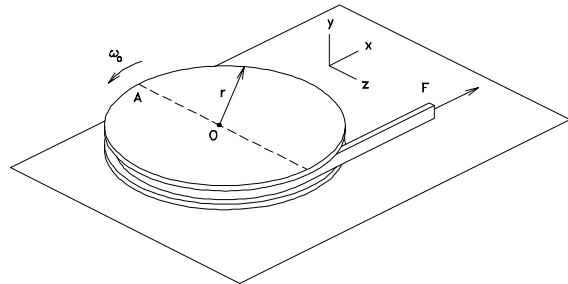
$$e = \theta \cdot R = \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{7mR^2\omega^2}{\mu N_0 r}} \right] R$$

4.2. Problemas propuestos

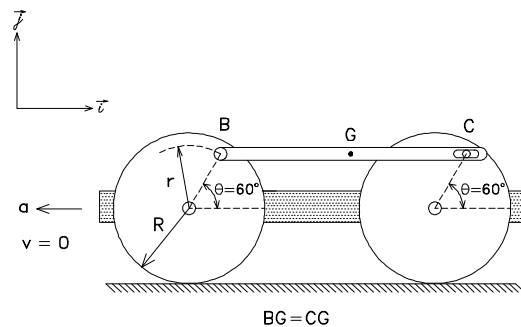
11.- Un disco homogéneo de masa m se mueve libremente, sin rozamiento, sobre un plano horizontal. En el instante que se ilustra, el disco gira con velocidad angular ω_0 conocida. En este momento, se aplica una fuerza constante en módulo y dirección F , también conocida, por medio de una cuerda arrollada a su periferia. Determinar:

a) Aceleración del punto A del disco en el instante considerado.

b) Velocidad angular ω del disco cuando haya dado media vuelta.

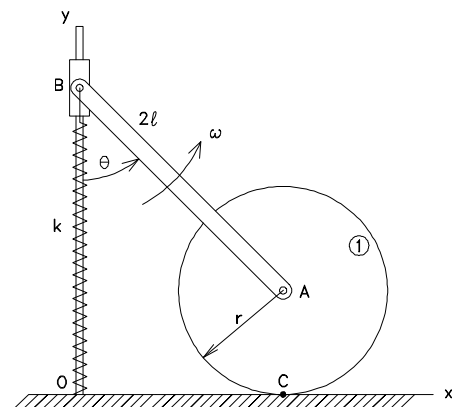


12.- Dos ruedas idénticas están montadas en un bastidor y giran sin deslizar sobre el plano horizontal. En el instante de la figura, el dispositivo parte del reposo e inicia su movimiento con aceleración a conocida. La barra de conexión BC, de masa m , está fijada a la rueda delantera mediante un pasador en B. En el otro extremo de la barra existe una ranura por cuyo interior puede moverse, sin rozamiento, el pivote C fijado en la rueda trasera. Sabiendo que G es el centro de masas de la barra, hallar las reacciones en B y C en el instante considerado.



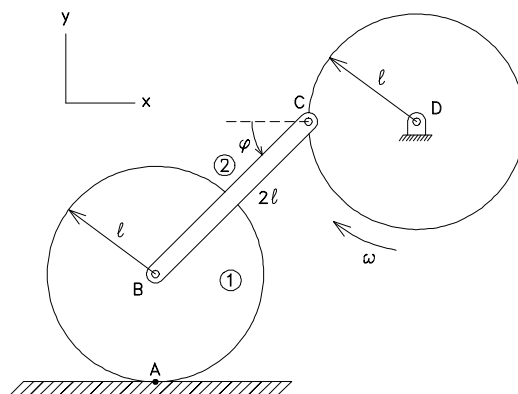
13.- El dispositivo de la figura está situado en un plano vertical. La barra homogénea AB tiene longitud $2l$ y masa m . Su extremo B está articulado a un collar que puede deslizar, sin rozamiento, por la guía vertical BO. El otro extremo, A, está unido por un pasador al centro de un disco homogéneo, de masa m y radio r , que rueda sin deslizar. El resorte OB tiene una rigidez k conocida y su longitud natural es r .

Suponiendo que el sistema parte del reposo en una posición inicial en la que $\theta = 60^\circ$, determinar la velocidad angular ω de la barra en la posición en la que $\theta = 90^\circ$.



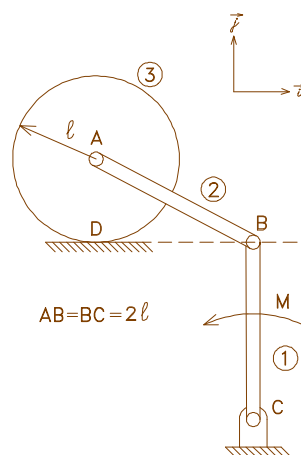
14.- El sistema mecánico que se ilustra está contenido en un plano vertical y está constituido por dos discos homogéneos de masa m cada uno y una barra, igualmente homogénea, también de masa m . La rueda superior gira en torno a su centro D , que está fijo, con velocidad angular ω constante y conocida. El disco inferior de centro B rueda, sin deslizar, por el plano horizontal, accionado por la barra de conexión BC . En el instante que se ilustra, determinar:

- Acercaciones angulares α_1 y α_2 .
- Fuerza horizontal B_x de la barra sobre el disco inferior.
- Reacción horizontal C_x de la rueda superior sobre la barra.



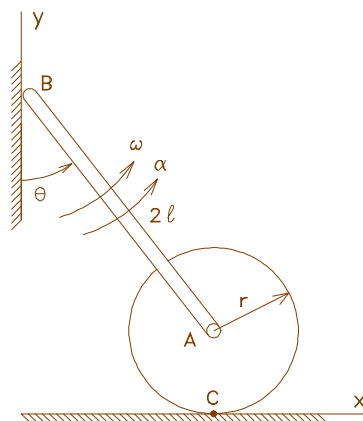
15.- El dispositivo de la figura parte del reposo, en la posición indicada, bajo la acción de un par de valor M conocido. En el movimiento subsiguiente el disco rueda sin deslizar. En el instante inicial la aceleración angular de la barra CB vale $\alpha_1 = 3M/(34m\ell^2)$ con el mismo sentido que el par M . Determinar en el instante inicial:

- Acercación angular de cada sólido.
- Reacciones en A y en B sobre la barra 2.



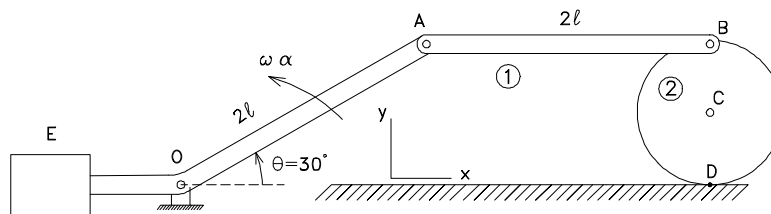
16.- La barra y el disco son homogéneos y de masa m cada uno. El radio del disco es r , mientras que la longitud de la barra es 2ℓ . El sistema está situado en un plano vertical y se abandona, en reposo, en una posición en la que θ es prácticamente nulo. En el transcurso del movimiento subsiguiente el extremo B de la barra se mantiene en contacto con la pared lisa vertical, mientras que el disco rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal. Determinar en un instante genérico:

- Velocidad angular ω y aceleración angular α de la barra, en función del ángulo θ .
- Velocidad y aceleración angulares ω_1 y α_1 , del disco.
- Componentes horizontal y vertical de la reacción sobre la barra en el punto A .



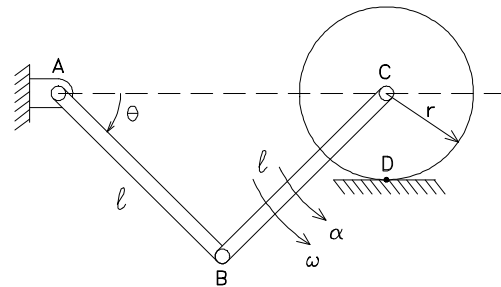
17.- El dispositivo de la figura se mueve en un plano vertical. La barra acodada EOA gira, con velocidad angular ω y aceleración angular α conocidas, como consecuencia de la existencia del contrapeso, de masa desconocida, situado en el extremo E. La rueda homogénea no desliza en D y tiene la misma masa m que la barra AB. En el instante que se ilustra, la barra AB está en posición horizontal. Determinar en este instante:

- Aceleraciones angulares α_1 y α_2 .
- Reacción horizontal B_x sobre la rueda.
- Reacción vertical A_y sobre la barra AB.



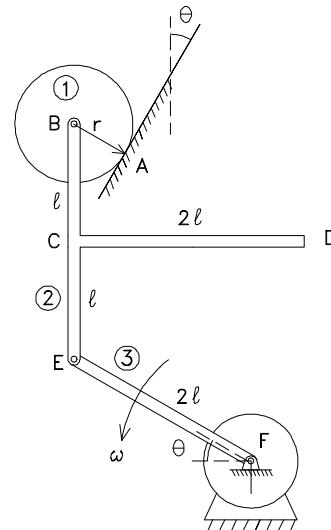
18.- En el dispositivo de la figura tanto las barras como la rueda son homogéneas y tienen masa m cada una de ellas. El sistema parte del reposo en la posición $\theta = 0$. Si el disco rueda sin deslizar en el contacto D, se pide:

- Determinar los valores de ω y α en función de θ .
- Encontrar, en función de ω y α , los valores de las dos componentes de la fuerza que actúa sobre el disco en el punto C.



19.- El mecanismo de la figura se mueve en un plano vertical. La barra EF gira, con ω constante y conocida, bajo la acción del motor que se ilustra. El disco 1, de masa m , no desliza en el contacto A con el plano inclinado. La barra CD, también de masa m , está soldada a la barra vertical EB en el punto C. Determinar en el instante de la figura:

- Aceleraciones angulares α_1 y α_2 .
- Fuerza de rozamiento F en el punto A.
- Momento flector M en la soldadura C.



. RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

5.1 Problemas de cinemática del espacio

11.- a)
$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_c \\ -\omega_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= 2\omega_c r \vec{k} \\ \vec{\alpha} &= -\omega_c^2 \vec{k} \\ \vec{a}_D &= -2\omega_c^2 r \vec{j} \end{aligned}$$

c)
$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} 2\omega_c^2 r \\ 2\omega_c^2 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

12.- a)

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \frac{(\Omega + \omega)(R - r \cos \theta)}{r(1 + \sin \theta + \cos \theta)} \\ -\frac{\Omega[R + r(1 + \sin \theta)] + \omega(R - r \cos \theta)}{r(1 + \sin \theta + \cos \theta)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\tau = \frac{2\pi R}{p_x r - \Omega R}$$

c)

No, puesto que estas componentes son constantes en una *base móvil*

$$\vec{\alpha} = -\frac{2\pi}{\tau} p_x \vec{k}, \text{ con } \vec{\Omega}_b = \frac{2\pi}{\tau} \vec{j}$$

13.- a)

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} -\omega_c \sin \varphi \\ -\omega_c \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{\omega}_r = \begin{bmatrix} -\omega_c \sin \varphi \\ -\omega_c (1 + \cos \varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } \omega_c = \frac{2\pi}{\tau}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_\rho &= \vec{\omega} \\ \vec{\omega}_\pi &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} -\omega_c^2 r (1 - \cos^2 \varphi) \\ -\omega_c^2 r \sin \varphi (1 + \cos \varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\vec{a}_D = \begin{bmatrix} -\omega_c^2 r \cos \varphi (1 + \cos \varphi) \\ \omega_c^2 r \sin \varphi (1 + \cos \varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

14.- a)

$$\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_1 \frac{z_4 z_2}{z_3 z_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_E = \omega_r r \vec{k}$$

c)

$$\vec{\alpha} = \omega_r \omega_1 \vec{k}$$

d)

$$\vec{a}_F = \begin{bmatrix} -\omega_r^2 r \\ 2\omega_r \omega_1 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

15.- a)
$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3 + \vec{p} = \begin{bmatrix} \omega_3 \cos \varphi + p \\ \omega_3 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \omega_3 = \frac{\omega_1 R_1 r}{R_1 r - R_2 R}, p = \frac{\omega_1 R_1 R_2}{R_1 r - R_2 R}; \vec{\alpha}_4 = -\omega_3 p \sin \varphi \vec{k}$$

b)
$$\vec{a}_c = 0$$

c)
$$\vec{a}_Q = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 R_2 \sin \varphi \\ \omega_3 (p + \omega_3 \cos \varphi) R_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16.- a)
$$\vec{\Omega}_e = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Omega \ell}{\ell - r} \\ \frac{\Omega(R + r - \ell)}{\ell - r} \\ \Omega \end{bmatrix} \text{ donde } \Omega = \frac{a}{v}; \vec{\Omega}_p = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\Omega}_\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

b)
$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} -\Omega \omega_y \\ \Omega \omega_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \quad \vec{v}_D = \begin{bmatrix} 2\omega_y(\ell - r) \\ -2\omega_x(\ell - r) \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{a}_D = \begin{bmatrix} -\Omega^2 \ell + 2\Omega \omega_x(\ell - r) \\ 2\Omega \omega_y(\ell - r) + a - \Omega^2 \ell \\ -(\omega_x^2 + \omega_y^2)(\ell - r) \end{bmatrix}$$

d)
$$\vec{a}_{A_1}^r = -\omega_1^2 r \vec{j} \text{ donde } \omega_1 = \frac{\omega_x(\ell - r)}{r}$$

e)
$$\vec{a}_{A_1} = \begin{bmatrix} -\Omega^2 \ell \\ a - (\Omega^2 + \omega_1^2) r \\ 0 \end{bmatrix}$$

17.- a)
$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \frac{R}{r+h} \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{\alpha} = -\omega_x^2 \frac{r}{R} \vec{k}$$

b) El EIR pasa por C y tiene una inclinación $\tan \beta = \omega_y / \omega_x = (r+h)/R$, o sea, es la recta CD, como es fácil deducir geoméricamente.

c) Es el cono de revolución engendrado por la recta CD al girar en torno al eje vertical DF.

d)

$$\vec{a}_{c_1} = \begin{bmatrix} -\omega_y \omega_x r \\ \omega_x^2 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

18.- a)

$$\vec{\alpha} = \frac{\Omega \omega}{k} \vec{j}; \quad \vec{a}_E = \begin{bmatrix} \Omega^2 \ell + 2\Omega \frac{\omega}{k} R \\ \Omega^2 d \\ \frac{\omega^2}{k^2} R \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{a}_G = (-\Omega^2 \ell + 2\Omega \omega r \cos \theta) \vec{i}$$

c)

$$\vec{v}_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\Omega d}{2} \\ 0 \\ \frac{\Omega d}{2} \end{bmatrix}$$

El EIRD pasa por un punto situado a $d/2 \vec{j}$ del punto C y tiene la dirección de la velocidad angular $\Omega (\vec{i} + \vec{k})$.

19.- a)

$$\vec{\omega}_r = \omega_r \vec{i} = -\frac{v}{r \cos \theta} \vec{i}; \quad \vec{v}_D = \begin{bmatrix} -\Omega R \\ -\omega_r r (\cos \theta + 1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} -\Omega^2 r \sin \theta \\ -\Omega^2 R \\ -\omega_r v \end{bmatrix}$$

c)

No, ya que $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C \neq 0$, donde $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ \Omega \end{bmatrix}$.

El eje instantáneo tiene la dirección de $\vec{\omega}$, y pasa por el punto I cuya posición es

$$\vec{CI} = \frac{(-\Omega v, -\Omega^2 \ell, \omega_r v)}{\Omega^2 + \omega_r^2}$$

20.- a)

$$\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = -\omega p \vec{i}, \quad \text{donde } \omega = \frac{2\Omega d - pr}{2d}$$

b)

$$\vec{v}_B = \frac{2\omega d^2}{2d - r} \vec{k}$$

5.2. Problemas de cinemática plana

11.- a)

$$\omega_2 = \frac{\omega \sin \theta}{2} \quad \curvearrowright \quad \omega_3 = \frac{\omega \cos \theta}{4} \quad \curvearrowright \quad \text{b) } a_B = \frac{3\omega^2 \ell}{2} \quad \longleftarrow$$

c) $\alpha_2 = \frac{5}{4}\omega^2 \cos \theta + 2\omega_3^2 + \frac{\alpha \sin \theta}{2}$ ↷

12.- a) $\vec{a}_A^c = 0$


b) $a_r = \frac{\omega^2 r^2}{\ell \cos^3 \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \sin \theta \right)$ ↑


13.- a) $\vec{v}_C = \frac{v_A}{2} (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$


b) $\omega_5 = \frac{v_A}{\sqrt{2}\ell}$ ↷

c) $\alpha_3 = \frac{1}{4\ell} \left(\frac{7v_A^2}{4\sqrt{3}\ell} + a_A \right)$ ↷

d) $\vec{a}_E = \left(\frac{a_A}{2} + \frac{v_A^2}{\sqrt{2}\ell} \right) \vec{i} + \frac{a_A}{2} \vec{j}$

14.- a) $v_E = \frac{\omega \ell}{\sin \theta}$ 


b) $v_r = \omega \ell \cos \theta$ 

c) $a_E = \frac{3\omega^2 \ell}{2 \tan^3 \theta \cos \theta} + \frac{\omega^2 \ell}{2 \tan \theta \cos \theta}$ 


d) $\alpha_4 = \frac{\omega^2 \cos^2 \theta}{2} (1 - \sin \theta \cos \theta)$ ↷

15.- a) $\omega_1 = \frac{(\Omega R - \omega r)(R - r)}{\ell}$ ↷ donde $\ell^2 = (R - r)^2 + d^2$


b) $\alpha_1 = \frac{(\Omega^2 R - \omega^2 r)d}{\ell^2} - \frac{2(\Omega R - \omega r)^2 (R - r)d}{\ell^4}$ ↷ c) $\vec{a}_{B_1} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 d - \alpha_1 (R - r) \\ -\omega^2 r - \alpha_1 d - \omega_1^2 (R - r) \end{bmatrix}$

16.- a) $v_E = \frac{v_D}{2}$ 

b) $a_E^n = \frac{v_D^2}{4R}$  $a_E^t = \frac{v_D^2}{4R} - \frac{a_D}{2}$ 

c) $a_r = \frac{v_D^2}{4R} + \frac{a_D}{2}$ 

d) $\omega_1 = \frac{v_D}{6R}$ ↷

e) $a_A^c = \frac{v_D^2 \sqrt{3}}{6R}$  donde $\theta = 30^\circ$

17.- a) $\omega_3 = \frac{\omega R}{\ell \sin \theta}$ ↷ ; $\omega_2 = \frac{\omega R}{h \tan \theta}$ ↷ b) $\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 h}{\ell \sin \theta} - \frac{\omega_3^2}{\tan \theta}$ ↷ donde $\theta = 45^\circ$

c) $\vec{a}_c = \begin{bmatrix} \omega_1^2 (R + r) \\ -\alpha_2 r \end{bmatrix}$, donde: $\omega_1 = \frac{\omega R + \omega_2 r}{R + r}$ ↷ y $\alpha_2 = \frac{\omega^2 R}{h} - \frac{\omega_3^2 \ell}{h \sin \theta} + \frac{\omega_2^2}{\tan \theta}$ ↷

18.- a) $\omega_1 = \frac{\omega \ell \cos \varphi - v \sin \varphi}{\ell \cos \varphi} \curvearrowright, \omega_2 = -\frac{\omega \ell \sin \varphi + v \cos \varphi}{r} \curvearrowright$
 b) $\alpha_2 = \frac{\omega^2 \ell \cos \varphi - 2\omega v \sin \varphi - \omega_1^2 \ell \cos \varphi}{r} \curvearrowright$
 c) $\vec{a}_{A_2}^r = -(\omega_2 - \omega_1)^2 r \vec{j} \quad \vec{a}_{A_2}^a = -\omega_1^2 \ell \cos \varphi \vec{i} - \alpha_1 \ell \cos \varphi \vec{j} \quad \vec{a}_{A_2}^c = 0$

19.- a) $\omega_2 = \frac{\omega c \operatorname{tg} \varphi}{r} \curvearrowright \quad \vec{a}_H = \omega_2^2 r \vec{j}$
 b) $\alpha_2 = \frac{\omega^2 c}{r} - \frac{\omega_1^2 b}{r \cos \varphi} \curvearrowright \quad \text{donde } \omega_1 = \frac{\omega c}{b \cos \varphi} \curvearrowright$
 c) $\alpha_4 = \frac{\omega^2 b}{(b+h) \operatorname{tg} \varphi} - \frac{\omega_3^2}{\operatorname{tg} \varphi} \curvearrowright, \text{ donde } \omega_3 = \frac{\omega b}{b+h} \curvearrowright$

20.- a) $\omega_2 = \frac{\omega_1(R+2r) + \omega_B(R+r)}{r} \curvearrowright \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1(R+2r) + \alpha_B(R+r)}{r} \curvearrowright$
 b) $\vec{V}_{SA} = (\omega_B + \omega_1)(R+2r) \vec{i}$

5.3 Problemas de dinámica del espacio

11.- a) $\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ \omega \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{\Omega}} = \begin{bmatrix} -\omega p \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{b) } M=0 \quad \text{c) } \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{m\omega^2 a}{2} + \frac{I\alpha}{2a} \\ -m\alpha a \\ \frac{mg}{2} + \frac{I_2 p \omega}{2a} \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{m\omega^2 a}{2} - \frac{I\alpha}{2a} \\ 0 \\ \frac{mg}{2} - \frac{I_2 p \omega}{2a} \end{bmatrix}$

12.- $\ddot{\psi} = \frac{mg\ell}{I_2 \dot{\phi}}$

13.- a) $\vec{a}_A = \begin{bmatrix} -p^2 b - 2p\dot{\psi} b \cos \theta + \dot{\psi}^2 h \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 b \cos^2 \theta \\ 2\dot{\psi} p b \sin \theta - \dot{\psi}^2 h \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 b \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{b)} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} mg \sin \theta + m\dot{\psi}^2 h \sin \theta \cos \theta \\ mg \cos \theta - m\dot{\psi}^2 h \sin^2 \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \quad (I' - I)\dot{\psi}^2 \cos \theta + I' \dot{\psi} p - mgh = 0$$

$$\text{14.- a)} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I\ddot{\theta}}{2\ell} + \frac{cmg}{2} \cos \theta \sin \varphi + \frac{mc}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \sin \varphi - \frac{mg}{2} \sin \theta \\ -\frac{I\dot{\theta}\dot{\varphi}}{2\ell} - \frac{mc\dot{\varphi}^2 \cos \varphi}{2} - \frac{mcg \cos \theta \cos \varphi}{2\ell} \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad M_1 = mcg \sin \theta \cos \varphi$$

$$\text{15.- a)} \quad \dot{\theta}^2 = -\frac{\ell}{I_2} (mg - F_0) \cos \theta + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta$$

$$\text{b)} \quad A_3 = \frac{mg \sin \theta}{2} + m \frac{\ell}{4} (\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta}) - \frac{F_0 \sin \theta}{4} - \left(\frac{I_3 - I_2 - I_1}{\ell} \right) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta$$

donde

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_2} \left[(mg - F_0) \frac{\ell}{2} - (I_1 - I_3) \dot{\psi}^2 \cos \theta \right] \sin \theta$$

16.- a)

$$M_2 = I\alpha \sin \varphi, \quad M_3 = I' \alpha \cos \varphi$$

b)

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} m\alpha\ell \\ m\omega^2 \ell - \frac{mg\ell}{r} + \frac{(I' - I)}{r} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{I'}{r} \omega \dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

17.- a)

$$B_2 = \frac{I_1 \ddot{\psi}}{2d} - \frac{M \dot{\psi}^2 h}{2} \quad B_3 = \frac{(M + m)g}{2} + \frac{mr(M_2 - mgr)}{2(I + mr^2)} - \frac{I\omega \dot{\psi}}{2d}$$

$$A_2 = -\frac{I_1 \ddot{\psi}}{2d} - \frac{M \dot{\psi}^2 h}{2} \quad A_3 = \frac{(M + m)g}{2} + \frac{mr(M_2 - mgr)}{2(I + mr^2)} + \frac{I\omega \dot{\psi}}{2d}$$

$$B_1 = -M \ddot{\psi} h \quad A_1 = 0$$

b)

$$T = m \left[g + \frac{M_2 r - mgr^2}{I + mr^2} \right]$$

18.- a)

$$A_2 = B_2 = mg \left(1 - \frac{m\ell^2}{I} \right) \sin \theta$$

$$A_3 + B_3 = 0$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} mg \left[\frac{2mg\ell^2}{I} + 1 \right] \cos \theta - \frac{I_1 \omega}{2d} \sqrt{\frac{2mg\ell}{I} \cos \theta}$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} mg \left[\frac{2mg\ell^2}{I} + 1 \right] \cos \theta + \frac{I_1 \omega}{2d} \sqrt{\frac{2mg\ell}{I} \cos \theta}$$

b)

$$\omega = \frac{mg}{I_1 \sqrt{\frac{2mg\ell}{Id^2}}} \left(\frac{2mg\ell^2}{I} + 1 \right)$$

19.-

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} m\ddot{\psi} \\ m\dot{\psi}^2 c \\ 2mg + T \end{bmatrix}, \quad \vec{N} = \begin{bmatrix} -I_{23}\dot{\psi}^2 - mgc + I_2\dot{\theta}\dot{\psi} \\ I_{23}\ddot{\psi} + T(d - \ell) \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

20.- a)

$$\vec{a}_G = \begin{bmatrix} 2\ell\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \\ -\ell(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2) \cos \varphi \\ -\ell\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 2m\ell\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \\ -\frac{mg}{2 \tan \varphi} - m\dot{\psi}^2 \ell \cos \varphi - m\frac{\dot{\varphi}^2 \ell}{2} \cos \varphi - \frac{I_2 \dot{\theta} \dot{\psi}}{2b \tan \varphi} \\ \frac{mg}{2} - \frac{m\ell\dot{\varphi}^2}{2} \sin \varphi - \frac{I_2}{2b} \dot{\theta} \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mb\ell\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}$$

c)

$$D = \frac{-E_2 \ell \sin \varphi + E_3 \ell \cos \varphi}{b \sin \frac{\varphi}{2}}$$

21.- a)
$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} -\omega^2 b(1+2\sin\theta)\cos\theta \\ 2\dot{\theta}^2 b + \omega^2 b(1+2\sin\theta)\sin\theta \\ -4\omega\dot{\theta}b\cos\theta \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} 2C_3b + M_1 &= -I'\dot{\theta}\Omega + (2I - I')\omega\dot{\theta}\cos\theta \\ M_2 &= -I'\omega\dot{\theta}\sin\theta \\ -bF\cos\theta - 2bC_1 &= (I' - I)\omega^2\sin\theta\cos\theta + I'\omega\Omega\sin\theta \\ -mg\sin\theta + F\cos\theta + C_1 &= -m\omega^2b(1+2\sin\theta) \\ -mg\cos\theta - F\sin\theta + C_2 &= 2m\dot{\theta}^2b + m\omega^2b(1+2\sin\theta) \\ C_3 &= -4m\omega\dot{\theta}b\cos\theta \end{aligned}$$

c)
$$T = \frac{1}{2}m\left[4\dot{\theta}^2b^2 + \omega^2b^2(1+2\sin\theta)^2\right] + \frac{1}{2}\left[I\omega^2\sin^2\theta + I'(\Omega + \omega\cos\theta)^2 + I\dot{\theta}^2\right]$$

5.4 Problemas de dinámica plana

11.- a)
$$\vec{a}_A = -\frac{F}{m}\vec{i} + \omega_0^2 r\vec{k}$$
 b)
$$\omega = \sqrt{\frac{4F}{mr}\pi + \omega_0^2}$$

12.-
$$\begin{aligned} B_x &= -ma\left(1 + \frac{r}{R}\sin\theta\right), \quad C_x = 0 \\ C_y = B_y &= ma\frac{r}{2R}\cos\theta + \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

13.-
$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\right)}$$

14.- a)
$$\alpha_1 = \omega^2 + \frac{2\omega_2^2}{\cos\varphi} \quad \Bigg\rangle, \text{ donde } \omega_2 = \frac{\omega}{2\cos\varphi} \quad \Bigg\rangle; \alpha_2 = \omega_2^2 \operatorname{tg}\varphi \quad \Bigg\rangle$$

b)
$$B_x = \frac{3}{2}m\ell\alpha_1$$
 c)
$$C_x = B_x + m\ell(\alpha_1 - \alpha_2\sin\varphi - \omega_2^2\cos\varphi)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{15.- a)} & \alpha_2 = 0 \quad \text{b)} \\
 & \alpha_3 = 2\alpha_1 \quad A_x = \frac{9M}{34\ell} \quad A_y = -\frac{6M}{17\ell\sqrt{3}} + \frac{mg}{2} \\
 & \quad \quad \quad B_x = -\frac{15M}{34\ell} \quad B_y = \frac{6M}{17\ell\sqrt{3}} + \frac{mg}{2}
 \end{array}$$

$$\text{16.- a)} \quad \omega^2 = \frac{g(1 - \cos \theta)}{\ell \left(\frac{2}{3} + 3 \cos^2 \theta \right)} \quad \alpha = \frac{3(2 + 18 \cos \theta - 9 \cos^2 \theta)g \sin \theta}{2\ell(2 + 9 \cos^2 \theta)^2} \curvearrowright$$

$$\text{b)} \quad \omega_1 = \frac{2\omega \ell \cos \theta}{r} \curvearrowleft \quad \alpha_1 = \frac{2\ell}{r} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \curvearrowleft$$

$$\text{c)} \quad A_x = -3m\ell(\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \quad A_y = m(g - \alpha \ell \sin \theta - \omega^2 \ell \cos \theta)$$

$$\text{17.- a)} \quad \alpha_1 = \alpha \cos \theta + \omega^2 \left(\frac{1}{4} - \sin \theta \right) \curvearrowleft \quad \alpha_2 = 2[\omega^2 \cos \theta (1 + \cos \theta) + \alpha \sin \theta] \curvearrowright \quad \text{donde } \theta = 30^\circ$$

$$\text{b)} \quad B_x = -\frac{3}{8}m\ell\alpha_2 \quad \text{c)} \quad A_y = \frac{mg}{2} - \frac{m\omega^2 \ell}{2} + \frac{m\alpha \ell \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}m\alpha_1 \ell$$

$$\text{18.- a)} \quad \omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{(1 + 12 \sin^2 \theta)\ell} \quad ; \quad \alpha = \frac{\frac{3}{2}g \ell \cos \theta (1 - 12 \sin^2 \theta)}{\ell^2 (1 + 12 \sin^2 \theta)^2} \curvearrowright$$

$$\text{b)} \quad C_x = 3m\ell(\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \\
 C_y = -\frac{mg}{2} + C_x \tan \theta - m\omega^2 \ell \sin \theta + \frac{m\alpha \ell}{\cos \theta} \left[\frac{1}{3} - \sin^2 \theta \right]$$

$$\text{19.- a)} \quad \alpha_1 = 2\omega^2 \frac{\ell}{r} \tan \theta \curvearrowleft \quad \alpha_2 = \frac{\omega^2}{\cos \theta} \curvearrowleft$$

$$\text{b)} \quad F = \frac{1}{2}m\alpha_1 r \quad \text{c)} \quad M = \frac{4}{3}m\alpha_2 \ell^2 - 2m\omega^2 \ell^2 \sin \theta + mg \ell \curvearrowright$$