Capítulo 2:

Capítulo 2:

Continuidad

Continuidad

Continuidad

Definición:

Decimos que f es ***continua*** en $x_0 \Leftrightarrow$ se verifica:

i) $\exists\ f(x_0)$

ii) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y es finito.

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Propiedades:

1) Sean f y g continuas en x_0, entonces se verifica:

a) $f \pm g$ es continua en x_0.

b) $f.g$ es continua en x_0.

c) $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

2) Si $Ig \subset Df$ y g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Funciones Discontinuas

Definición

Una función se dice ***discontinua*** en x_0 si no verifica una o más de las condiciones de la definición de continuidad.

Clasificación

1) ***Discontinuidad evitable***: se presenta cuando existe el límite finito *L* de la función en x_0 pero, o bien no está definida *f* en x_0, o bien $f(x_0)$ no coincide con el límite *L.*

2) ***Discontinuidad esencial***: se presenta cuando la función no tiene límite finito en x_0, o bien no existe el límite en x_0.

Veamos algunos ejemplos:

1. Analicemos la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

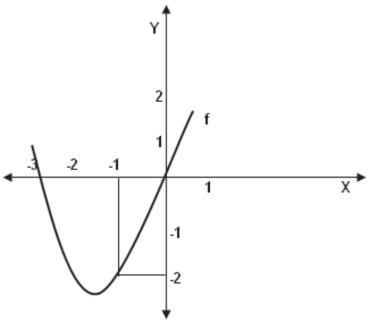
En caso de ser discontinuas, clasificar.

a) $f(x) = x^2 + 3x$ en $x_0 = -1$

i) $f(-1) = -2$

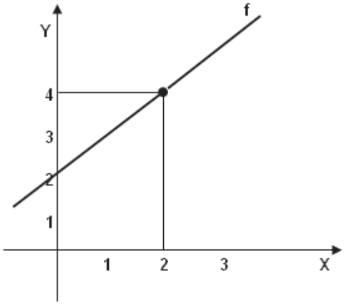
ii) $\lim\limits_{x \to -1} x^2 + 3x = -2$

iii) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$



Por lo tanto, *f* es continua en $x_0 = -1$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ en $x_0=2$



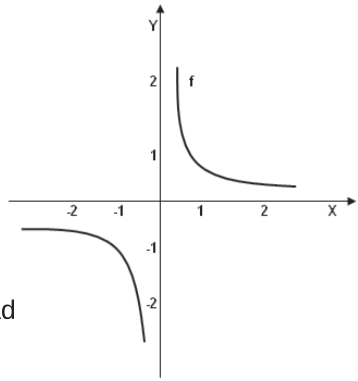
i) $\nexists \quad f(2)$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\,(x+2)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2} x+2=4$

Por lo tanto, presenta una discontinuidad evitable en $x_0=2$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x_0=0$



i) $\nexists\ f(0)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$

Por lo tanto, f presenta una discontinuidad esencial en $x_0=0$.

Nota: en el ejemplo b) podríamos redefinir, claramente, la función de la siguiente manera:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$$

Esta nueva función es continua en todo valor real. Por eso, la discontinuidad se denomina “evitable”.

Continuidad en un intervalo cerrado

Continuidad en un intervalo cerrado

Definición

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, si y sólo si:

i) f es continua $\forall x \in (a,b)$.

ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Veamos algunos ejemplos:

2. Estudiemos la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

Como las funciones polinómicas y exponenciales son siempre continuas, el único punto de análisis es $x_0 = 0$.

i) $f(0) = -5$

ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 5 = -5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$$

Por lo tanto, *f* es continua para todo valor de *x* real, salvo para $x_0 = 0$ donde se presenta una discontinuidad esencial.

b) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\le -2\\ 2x+3 & -2<x\le 1\\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x} & x>1\end{cases}$$

Los puntos a analizar son $x_0=-2$ y $x_1=1$.

- $x_0=-2$

i) $f(-2)=-1$

ii) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+1}=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} 2x+3=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)=-1$$

Por lo tanto, *f* es continua en $x_0=-2$.

- $x_1=1$

i) $f(1)=5$

ii) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+3=5\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Por lo tanto, *f* presenta una discontinuidad esencial en $x_1=1$.

c) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x\ne 1\\ 3 & x=1\end{cases}$$

i) $f(1)=3$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

iii) $$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$$

Luego, f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = 1$.

Prácticas vinculadas al tema:

Les sugerimos resolver los problemas 1 y 2 de la guía de trabajos prácticos.

Aplicación

Aplicación Informática

Análisis de Continuidad

Nombre del Archivo: **Análisis de Continuidad.xls**

Antes de utilizar la aplicación informática

Para acceder a los archivos, es importante volver a leer las recomendaciones detalladas en los siguientes apartados:

Página “x”: “Ingreso de Archivos”.
Página “x”: “Nivel de Seguridad”.

Objetivo: brindarle al estudiante una simple aplicación de los contenidos teóricos desarrollados en el libro, a través de algunas de las herramientas que pone a nuestra disposición Microsoft Excel. En esta oportunidad se desarrollan algunos ejemplos acerca de cómo evaluar y graficar la continuidad de un grupo de funciones elegidas de acuerdo a su representatividad.

¡Importante!: se recomienda leer la teoría antes de comenzar a utilizar este aplicativo.

Inicio de la aplicación informática

La primera hoja de esta aplicación es un panel de movimiento que cuenta con vínculos a las hojas del libro y al sitio web de Omicron System S.A.

Este panel se muestra en la Figura 1:

Figura 1

Para comenzar, debemos dirigirnos a la hoja "Evaluación" haciendo un clic con el Mouse sobre el botón "INGRESAR" de la hoja Menú o presionando la etiqueta ubicada en la parte inferior del archivo.

Hoja Evaluación

Esta hoja nos mostrará si determinada función es continua o discontinua, de acuerdo al dominio elegido y se puede observar en la Figura 2.

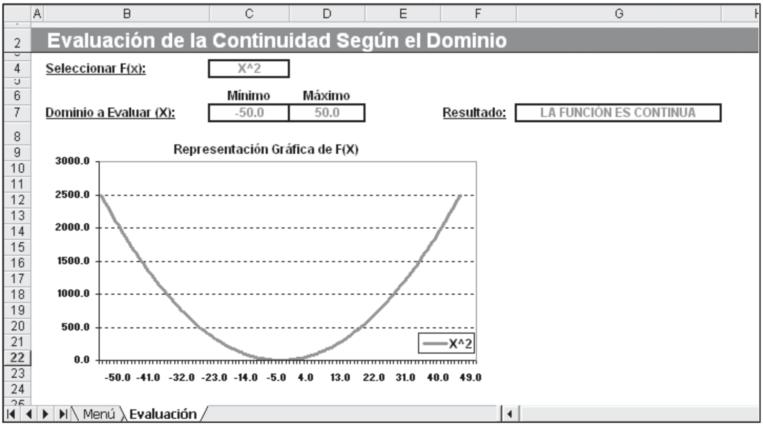


Figura 2

A tales efectos, realizaremos los siguientes pasos:

- Seleccionar la función matemática desde la lista desplegable que se encuentra en la celda C4 de esta hoja (a la derecha de”Seleccionar F(x):”), como se ve en la Figura 3.

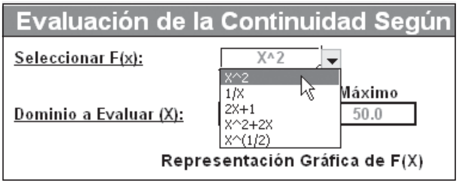


Figura 3

- Ingresar el dominio en el cual se desea evaluar la función seleccionada en el paso anterior. En el ejemplo de la Figura 4, el rango va desde X = -50 a X = 50.

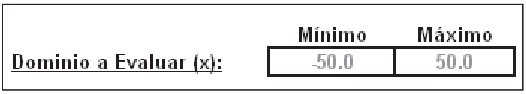


Figura 4

A continuación, podremos observar el gráfico de la función para los valores elegidos del dominio. En la Figura 5 se muestra el gráfico de:

$$F(x) = x^2, -50 \geq x \leq 50$$

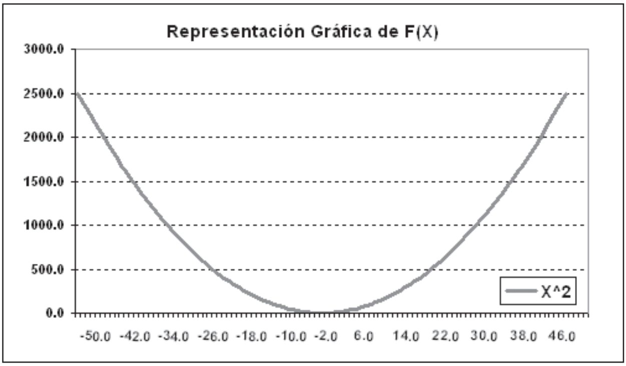


Figura 5

Por último, en una celda a la derecha de la hoja se indicará si la función es continua o discontinua para el dominio elegido. Veamos la siguiente figura correspondiente al ejemplo que estamos siguiendo.

Figura 6

Si hubiéramos elegido la función:

$$F(x) = \frac{1}{x} \quad ,-50 \geq x \leq 50$$

el resultado nos debería indicar que la función es discontinua ya que no está definida en X=0. Esto lo podemos ver en la Figura 7.

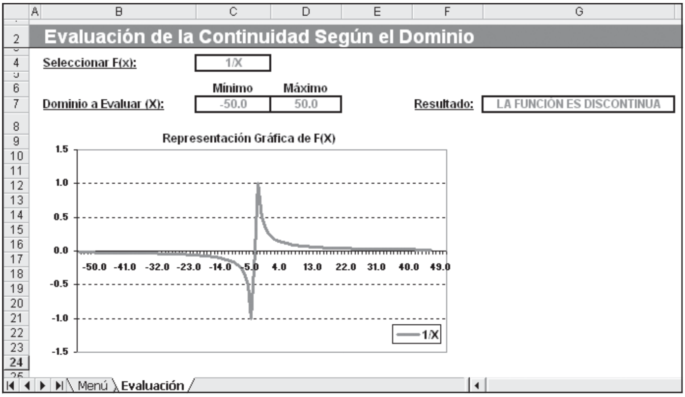


Figura 7

Es necesario realizar una aclaración importante al respecto. Debido a una limitación de Microsoft Excel, cuando la función no está definida en un punto o una serie de puntos, el gráfico considera como cero la imagen de la función en tales puntos. Por esta razón, el gráfico puede mostrar líneas que no corresponden a su correcta representación, como es el caso de la Figura 7, en donde vemos una recta que atraviesa el valor cero y que une los valores negativos de la función con los valores positivos. Cuando esto ocurra, deberá interpretarse como signo de discontinuidad en la función.

Funciones continuas en un intervalo cerrado

Funciones continuas en un intervalo cerrado

Teorema 1

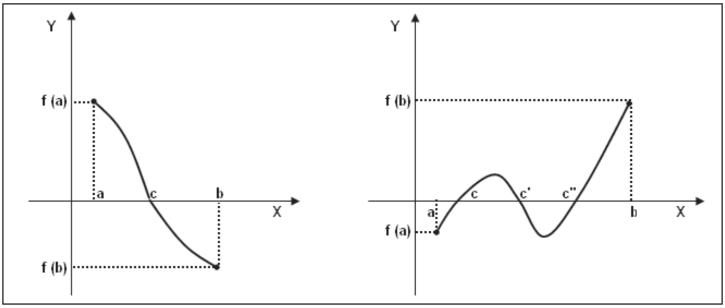
Sea f una función continua en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.

Teorema 2

Sea f una función continua en $[a,b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

Teorema 3: Teorema de Bolzano

Sea una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)>0$ y $f(b)<0$ (o bien, $f(a)<0$ y $f(b)>0$), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.



Corolario del teorema de Bolzano

Sea *f* continua en $[a,b]$ y sean x_0 y x_1 dos ceros consecutivos de *f* en el intervalo $[a,b]$, entonces $f(x)>0 \quad \forall\, x \in (x_0, x_1)$.

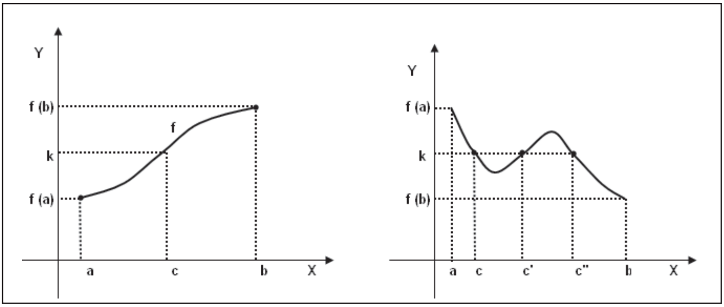
O bien, $f(x)<0 \quad \forall\, x \in (x_0, x_1)$.

Nota: el corolario anterior se podría generalizar diciendo: "Si una función f es continua en el intervalo (a,b) tal que $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces *f* tiene signo constante."

Estos teoremas serán de suma utilidad cuando veamos estudio de funciones.

Teorema 4: Teorema del valor medio

Sea *f* una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)<f(b)$ (o bien, $f(b)<f(a)$). Si $k \in IR$ es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=k$.



Generalización del teorema del valor medio

Sea *f* una función continua en $[a,b]$ y sea $k \in IR$ un valor comprendido entre el mínimo y el máximo de la función *f* en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$.

Nota: este resultado lo utilizaremos para demostrar el teorema del valor medio para integrales.

Aplicación

Aplicaciones Económicas

Funciones económicas discontinuas

Un gran número de funciones que se exhiben en los problemas de Administración y Economía presentan discontinuidades finitas.

Por ejemplo, la función de costo suele tener discontinuidades, ya que los costos unitarios disminuyen (o aumentan) en el caso de cantidades específicas.

Debe notarse que hay funciones que, aún siendo discontinuas, pueden presentarse con frecuencia como continuas. Esto es aplicable, por ejemplo, a las funciones de demanda y oferta de bienes vendidos por unidades como autos, paquetes de cigarrillos, computadoras, sillas, productos enlatados, etcétera.

Representar como continuas funciones que por naturaleza son discontinuas permite utilizar herramientas matemáticas que, de otro modo, nos sería imposible aplicar.

Veamos un ejemplo:

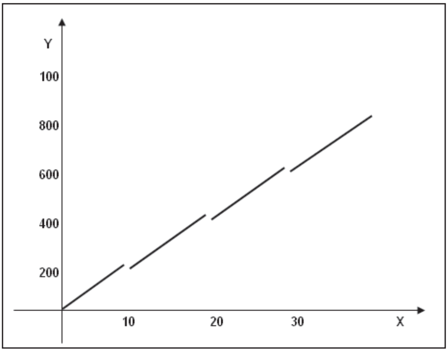
3. Un comerciante mayorista vende resmas de hojas para impresora A4 en lotes puestos en cajas, de acuerdo con la siguiente lista de precios:

- \$30 por caja con la compra de 10 cajas o menos.
- \$27.50 por caja con la compra de más de 10 cajas, pero no más de 20.
- \$25 por caja con la compra de más de 20 cajas, pero no más de 30.
- \$22.50 por caja con la compra de más de 30 cajas.

Sea *p* el precio y *x* la cantidad de cajas, la función de precio se puede representar algebraicamente como:

$$p = \begin{cases} 30x & 0 \le x \le 10 \\ 27.50x & 10 < x \le 20 \\ 25x & 20 < x \le 30 \\ 22.50x & x > 30 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



Capitalización continua

La operación por la cual un cierto valor inicial que denominamos ***capital*** se transforma en un valor final que denominamos ***monto***, recibe el nombre de ***capitalización.*** La transformación del capital en monto se consigue por la acción de dos factores: el ***tiempo*** y la ***tasa de interés.***

En el capítulo de funciones vimos que, si una suma de dinero es invertida y el interés capitaliza por intervalos definidos, el capital final se obtiene a través de la siguiente fórmula:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n}$$

Donde

$C_0 =$ capital inicial (capital en el momento cero).
$C_n =$ capital final o monto.
$i =$ tasa de interés unitaria, llamado el tanto por uno (interés que gana un capital de $ 1 en un período).
$n =$ cantidad de períodos.
$k\ n =$ número de subperíodos o períodos de capitalización.

Si consideramos al interés como función del tiempo, esto da origen a distintos montos. Veamos qué ocurre cuando una suma de dinero se capitaliza con una frecuencia cada vez mayor, calculando el monto en cada caso.

Dado un capital inicial de $100 colocado al 12% anual por el término de un año, los montos para distintos períodos de capitalización son:

- Capitalización anual ($k = 1$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1\cdot 1} = 112$
- Capitalización semestral ($k = 2$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2\cdot 1} = 112.36$
- Capitalización cuatrimestral ($k = 3$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{3}\right)^{3\cdot 1} = 112.4864$
- Capitalización trimestral ($k = 4$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4\cdot 1} = 112.55$
- Capitalización bimestral ($k = 6$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{6}\right)^{6\cdot 1} = 112.6162$
- Capitalización mensual ($k = 12$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 1} = 112.6825$

Los resultados anteriores permiten concluir que, a medida que aumenta la frecuencia de las capitalizaciones, se obtienen montos mayores.

¿Qué ocurriría si los intereses se capitalizaran en cada infinitésimo de tiempo?

En dicha situación diremos que estamos frente a un caso de ***capitalización continua*** y el monto a obtener podría calcularse mediante el siguiente límite:

$$\overline{C_n} = \lim_{k\to\infty} C_0 \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n} = C_0 \lim_{k\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}}\right]^{\frac{i}{k}k\,n} = C_0\ e^{i\,n}$$

Luego: $\overline{C_n} = C_0\ e^{i\,n}$.

Observemos que, como el monto aumenta al aumentar la frecuencia de las capitalizaciones, $\overline{C_n}$ representa el mayor monto que puede obtenerse para una tasa nominal ***i***.

Veamos algunos ejemplos:

4.

a) Calculemos el monto que produce un capital de $20000 colocado durante 5 años al 6% nominal anual:

i) con capitalización mensual.

$$C_0 = 20000$$
$$i = 0.06$$
$$n = 5$$

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n} = 20000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12\ \ 5} = 26977$$

ii) con capitalización continua.

$$\overline{C_n} = C_0\ e^{i\,n} = 20000\ e^{0.06\ \ 5} = 26997.18$$

b) El interés obtenido al cabo de 4 años fue de $1000 con un capital inicial de $5000 y un régimen de capitalización continua. Se pide averiguar la tasa de interés nominal anual.

$$
\begin{aligned}
&C_0 = 5000 \\
&I = \overline{C_n} - C_0 = 1000 \quad \Rightarrow \quad \overline{C_n} = 6000 \\
&n = 4
\end{aligned}
$$

$$\overline{C_n} = C_0\ e^{i\,n} \quad \Rightarrow \quad 6000 = 5000\ e^{i\,4} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5} = e^{i\,4} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{6}{5}\right) = 4\,i$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0.04558$$

Por lo tanto, la tasa es del 4,56 % anual.

Prácticas vinculadas al tema:

Les recomendamos resolver el problema 3 de la guía de trabajos prácticos.

Aplicación

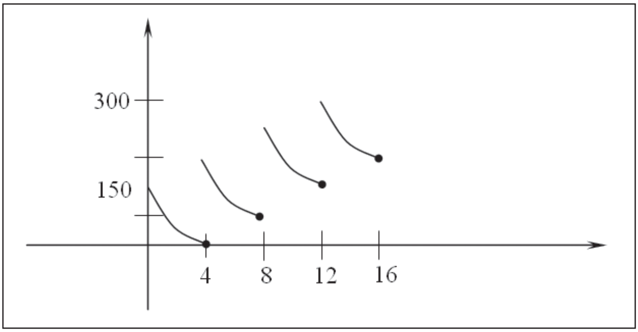
Aplicaciones Biológicas

Un paciente recibe una inyección de 150mg de una medicina cada 4 horas.

En la gráfica que sigue vemos la concentración $f(t)$ de la sustancia en sangre pasadas *t* horas.

a) Calculemos $\lim\limits_{t \to 12^-} f(t)$ y $\lim\limits_{t \to 12^+} f(t)$

b) ¿Es esta función continua? ¿Cuáles son sus puntos de discontinuidad?



Solución:

a) $\lim\limits_{t\to 12^-} f(t) = 150$ $\lim\limits_{t\to 12^+} f(t) = 300$

b) Es una función discontinua. Cada 4 horas se presenta un salto.

[Práctica 2]

Práctica 2

Continuidad

1) Hallar y clasificar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{x^2-x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+8}$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2-9x-12}{x^3-7x^2+12x}$

d) $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$

e) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$

f) $f(x)=1+2^{\frac{1}{x^2}}$

g) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ -\dfrac{1}{2} & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x>0 \end{cases}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}$

2) Encontrar los valores de $a \in IR$ y $b \in IR$ tal que la función $f(x)$ sea continua.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-ax & x\geq 1 \\ 21+ax & x<1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} ax+e^{\frac{1}{x-2}} & x<2 \\ 1+a & x=2 \\ 2x+b & x>2 \end{cases}$

Aplicación

Aplicaciones Económicas

3) Resolver los siguientes problemas.

a) Calcular el monto y los intereses que produce un capital de \$10.000 colocado durante 2 años y medio al 18% nominal anual:

i) con capitalización mensual.
ii) con capitalización continua.

b) Calcular el capital que, colocado durante 3 años y 9 meses al 8% trimestral capitalizable en forma continua, se transforma en \$4980.

c) Determinar en cuánto tiempo un capital de \$3000 se transformaría en \$9666 si se lo colocara al 9% cuatrimestral de interés con capitalización continua.

d) ¿A qué tasa de interés nominal anual debería colocarse un capital de \$2850 para producir en 2 años y con capitalización continua un monto de \$3481?