Capítulo 1:

Capítulo 1:

Límite

1. Límite Finito

Introducción:

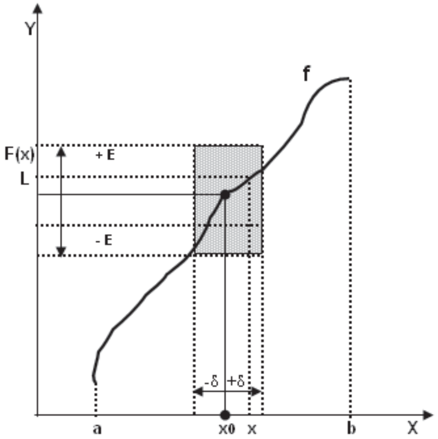
Sea f una función definida en todos los puntos del intervalo (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$. Vamos a estudiar, ahora, cómo se comporta $f(x)$ cuando *x* se acerca a x_0, independientemente de lo que valga f en x_0.

Definición:

Sea f una función definida en todos los puntos del intervalo (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$.

Decimos que $f(x)$ tiene ***límite*** L cuando x se acerca a x_0 (notándolo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$) $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\, (\delta = \delta(\varepsilon)) \quad / \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Este gráfico ilustra la definición anterior.



Veamos un ejemplo:

1. Los invitamos a calcular un límite utilizando algunas propiedades que enunciaremos más adelante:

$$\lim_{x\to 2}\left[x^3+2\ln(x^2-3)\right]=\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}2\ln(x^2-3)=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\lim_{x\to 2}\ln(x^2-3)=$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\ln\left(\lim_{x\to 2}x^2-3\right)=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\ln\left[\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-\lim_{x\to 2}3\right]=$$

$$=2^3+2\ln(2^2-3)=8+2\ln 1=8$$

Nota: en general, para determinar analíticamente el valor de un límite, si $x_0\in Df$ y la función está definida por una única expresión algebraica, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
La justificación de este procedimiento se verá más adelante con la noción de *continuidad.*

Resumiendo, en el ejemplo anterior reemplazamos el valor de x por 2, realizamos los cálculos correspondientes y encontramos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 2}\left[x^3+2\ln(x^2-3)\right]=2^3+2\ln(2^2-3)=8$$

Veamos un ejemplo:

2. Ahora, calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x-2}{\sqrt{1-3x}}=\frac{(-1)^2+5(-1)-2}{\sqrt{1-3(-1)}}=-3$$

Prácticas vinculadas al tema:

Les recomendamos resolver los problemas 1, 2 y 3 de la guía de trabajos prácticos.

A continuación, enunciamos algunas de las propiedades que hemos usado en los ejemplos anteriores.

Propiedades del límite

1) *Unicidad del límite*: Sea *f* definida en todo (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

2) Sea $k \in IR$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces se verifica:

a) $\longrightarrow$ $L < k \Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) < k$.

b) $\longrightarrow$ $L > k \Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) > k$.

3) Sean *f, g* y *h* tres funciones definidas en un intervalo (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$ y tales que:

i) $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$

ii) $\longrightarrow$ $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in (a,b) \quad x \ne x_0$

Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

4) Sean *f* y *g* dos funciones definidas en (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$ y tales que:

i) $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

ii) $\longrightarrow \exists \delta > 0 \quad / \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

5) Si $f(x) = k$ con *k* constante, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$.

6) Sean *f* y *g* dos funciones definidas en (a, b), salvo quizá en $x_0 \in (a, b)$ y tales que:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$.

Entonces:

a) $\longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = L_1 \pm L_2$

b) $\longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$

c) $\longrightarrow L_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

d) $\longrightarrow L_1 > 0 \quad \Rightarrow \longrightarrow$ *i)* $\longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x) = \ln L_1$

.... $\longrightarrow \qquad \longrightarrow$ *ii)* $\longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$

Los invitamos a analizar cómo funciona la definición de límite.

Veamos algunos ejemplos:

3. Probemos el siguiente límite por definición:

$$\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5$$

Dado $\varepsilon > 0$ buscamos $\delta > 0$ tal que si $|x - 1| < \delta$, entonces:
$|(3x + 2) - 5| = |3x - 3| = 3\,|x - 1| < \varepsilon$

Por lo tanto, tomando $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ resulta que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces
$|f(x) - L| = |(3x + 2) - 5| = |3x - 3| = 3\,|x - 1| < 3\,\delta \leq 3\,\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Como queríamos demostrar.

Observemos que si $\varepsilon = 0.10$ entonces $\delta = 0.0\hat{3}$ y si $\varepsilon = 0.01$ entonces $\delta = 0.00\hat{3}$ ·

4. Utilizando la definición, probaremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Dado $\varepsilon > 0$ buscamos $\delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$, entonces:

$$|x^2 - 4| = |(x-2)\,(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < \varepsilon$$

Aquí no se puede proceder como en el ejercicio anterior, ya que si despejamos nos quedaría

$|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$, con lo cual δ dependería de ε y de la variable $\boldsymbol{x}$ y eso no debe ocurrir.

Luego, vamos a ***acotar***: Sea $\delta' = 1$, entonces

$$|x-2| < \delta' \;\Rightarrow\; |x-2| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x-2 < 1 \;\Rightarrow\; 1 < x < 3 \;\Rightarrow\; 3 < x+2 < 5$$

Por lo tanto:

$$|x-2|\,|x+2| < |x-2|\,5 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \therefore \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{5}$$

Pero no hay que olvidar que tomamos un valor particular de δ (δ' =1) y, por consiguiente:

$$\longrightarrow \qquad \delta = min\left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$$

Ahora probamos nuestra afirmación: sea δ >0 tal que $0 < |x-2| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2| < |x-2|\,5 < \delta\,5 \le 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Observemos que si $\varepsilon = 0.10$ entonces $\delta = min\{1, 0.2\} = 0.2$

Prácticas vinculadas al tema:

Les sugerimos resolver el problema 4 de la guía de trabajos prácticos.

Límites Laterales

Límites Laterales

Definición 1

Sea *f* una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (x_0, a). Decimos que *f* tiene ***límite*** L^+ cuando *x* se acerca a x_0 ***por derecha*** (notándolo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\, (\delta = \delta(\varepsilon)) \quad / \quad 0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - L^+ \right| < \varepsilon.$$

Definición 2

Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, x_0). Decimos que *f* tiene ***límite*** L^- cuando *x* se acerca a x_0 ***por izquierda*** (notándolo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\, (\delta = \delta(\varepsilon)) \quad / \quad 0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - L^- \right| < \varepsilon.$$

Teorema 1

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

b) $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Nota: la importancia del teorema anterior radica en que, si los límites laterales son distintos, entonces ***no existe*** el límite de la función.

Veamos algunos ejemplos:

5. $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

6. Hallemos el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

Como $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, para poder calcular este límite necesariamente tenemos que utilizar límites laterales, ya que la función módulo está definida por expresiones diferentes según nos acerquemos a 0 por derecha o por izquierda.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$$

7. Calculemos el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & x \leq 2 \\ e^{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

Como f está definida por tramos, debemos utilizar límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-8=-4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} e^{x-2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Prácticas vinculadas al tema:

Les sugerimos resolver los problemas 5 y 6 de la guía de trabajos prácticos.

Cociente de Infinitésimos

Definición

f es un ***infinitésimo*** para $x = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

Nota: a veces, en la resolución de ciertos límites, no podemos hacer el reemplazo directo pues llegamos a una expresión donde numerador y denominador tienden a cero (***cociente de infinitésimos***).
En este caso, se dice que el límite presenta una ***indeterminación del tipo*** $\frac{0}{0}$

Recuerda:
En caso de que se presente una indeterminación, esto no quiere decir que el límite no exista, sino que ésta se debe "salvar".

Presentamos, a continuación, formas algebraicas para salvar indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y poder, así, calcular esos límites.

1) **Cociente de polinomios**: para salvar la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ factorizamos, en este caso, ambos polinomios y simplificamos, calculando el límite del cociente de los polinomios que se obtienen de la división de $P(x)$ y $Q(x)$ por $(x-x_0)$.

Es decir:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=\lim_{x\to x_0} Q(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\,M(x)}{(x-x_0)\,N(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{M(x)}{N(x)}$$

Veamos algunos ejemplos:

8. Calculemos el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-8}{x^2+x-6}$

Como encontramos una indeterminación del tipo , factorizamos ambos polinomios utilizando Ruffini.

	1	-1	0	0	- 8
2		2	2	4	8
	1	1	2	4	0

Recuerda:
Debemos trabajar con un polinomio completo y ordenado.

Entonces, $x^4-x^3-8=(x-2)\,(x^3+x^2+2x+4)$

	1	1	- 6
2		2	6
	1	3	0

Recuerda:
Por ser una función cuadrática podríamos factorizarla de la siguiente forma $f(x)=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$, siendo x_1 y x_2 sus raíces, las cuales se obtenían a través de la expresión:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Entonces, $x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x+3)$

Concluimos que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\,(x^3 + x^2 + 2x + 4)}{(x-2)\,(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 + 2x + 4}{x+3} = 4$$

Nota: en el ejemplo anterior, es lícito simplificar $(x-2)$ ya que x tiende a 2 pero $x \neq 2$. La simplificación no altera el valor del límite a pesar de cambiar la función, ya que es válida la propiedad 4) del límite enunciada en la página **XXX.**

9. Calculemos el siguiente límite: $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6}$

Como queda una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, factorizamos ambos polinomios utilizando Ruffini.

	1	4	5	2			2	-2	-10	-6
-1		-1	-3	-2		-1		-2	4	6
	1	3	2	0			2	-4	-6	0

Luego,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\,(x^2 + 3x + 2)}{(x+1)\,(2x^2 - 4x - 6)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 4x - 6}$$

Al llegar a este punto observamos que, nuevamente, obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Volvemos a factorizar:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 4x - 6} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{2(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{x+2}{2x-6} = -\frac{1}{8}$$

10. Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x^2 + 5x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,(x^3 - 3x + 5)}{x\,(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x + 5}{x - 2} = -\frac{5}{2}$$

Teorema 2:

El límite del cociente entre el seno de un argumento y su argumento, cuando éste tiende a cero, vale cero.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1}$$

La generalización de este resultado es: "Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)}=1$" y resulta muy útil para resolver límites con esa estructura.

Veamos algunos ejemplos:

11. Encontremos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen7x}{3x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\,\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

12. Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\,2x}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\,3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

Esto se debe a que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}=1$

13. Encontremos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

14. Calculemos $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}$

Estamos ante una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Realizamos un cambio de variable: $t = x - 2$.

Observemos que, cuando x tiende a 2, t tiende a cero, luego:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

3) **Cociente con expresiones irracionales**: Para salvar la indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, en este caso se multiplica y se divide por el conjugado de las expresiones irracionales.

Veamos algunos ejemplos:

15. Encontremos $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{(x-3)} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x-3)\,(\sqrt{x} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)\,(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

16. Calculemos $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}} \; \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{2x-1})^2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1-(2x-1)}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+1-2x+1}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1})} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x+2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-x+2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}\;\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-x+2)\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})^2\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)\,\sqrt{x-2}}{(x-2)\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

Prácticas vinculadas al tema:

En este momento, sería conveniente que resuelvan el problema 7 de la guía de trabajos prácticos.

Aplicación

Aplicación Informática

Análisis de Límites

Nombre del Archivo: **Análisis de Límites.xls**

Antes de utilizar la aplicación informática

Para acceder a los archivos, es importante volver a leer las recomendaciones detalladas en los siguientes apartados:

Página "x": "Ingreso de Archivos".
Página "x": "Nivel de Seguridad".

Objetivo: el presente archivo tiene, como finalidad, el brindar una simple aplicación práctica de los contenidos teóricos desarrollados en el libro a través de algunas de las herramientas que pone a nuestra disposición Microsoft Excel. En esta oportunidad, se desarrollan algunos ejemplos acerca de cómo calcular y graficar el límite de una determinada función.

¡Importante! : Se recomienda leer la teoría relativa al tema antes de comenzar a utilizar este aplicativo.

Inicio de la aplicación informática

La primera hoja de esta aplicación es un panel de movimiento que contará con vínculos a las hojas del libro y al sitio web de Omicron System S.A.

Este panel se muestra en la Figura 1:

Figura 1

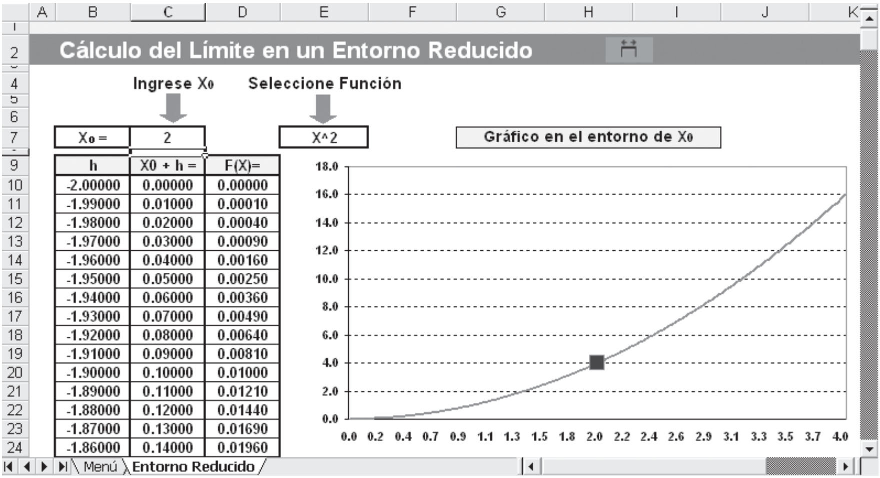
Para comenzar, debemos dirigirnos a la hoja "Entorno Reducido" haciendo un clic con el Mouse sobre el botón "Ingresar" de la hoja "Menú" o presionando la etiqueta ubicada en la parte inferior del archivo.

Hoja Entorno Reducido

En esta hoja se calculará el límite de una determinada función, precisamente, en un entorno reducido. Es decir, podremos visualizar a qué valor se acerca la función F(X) a medida que nos acercamos al valor X=X0. Simbolizado matemáticamente, esto es:

$$\lim_{x \to x0} f(x) =$$

Como primera medida veamos qué significa la tabla grande que se encuentra en la parte izquierda de esta hoja. Como se muestra en la Figura 2, dicha tabla está compuesta por tres columnas que se encuentran cargadas con una serie de valores que hemos introducido a modo de ejemplo.



h	X0 + h =	F(X)=
-2.00000	0.00000	0.00000
-1.99000	0.01000	0.00010
-1.98000	0.02000	0.00040
-1.97000	0.03000	0.00090
-1.96000	0.04000	0.00160
-1.95000	0.05000	0.00250
-1.94000	0.06000	0.00360
-1.93000	0.07000	0.00490
-1.92000	0.08000	0.00640
-1.91000	0.09000	0.00810
-1.90000	0.10000	0.01000
-1.89000	0.11000	0.01210
-1.88000	0.12000	0.01440
-1.87000	0.13000	0.01690
-1.86000	0.14000	0.01960

Figura 2

En la primera columna (**h**) hemos colocado una serie de valores que van desde el valor –2.0000 hasta el +2.0000 y que representan las pequeñas variaciones que restaremos o sumaremos al valor X0 para obtener el entorno sobre el cual se calculará la función F(X). Este entorno se muestra, por intermedio de una fórmula, en la segunda columna (**X0 + h=**). En tanto, la tercera columna (**F(X)=**) nos permite observar el resultado obtenido al evaluar la función F en cada valor de X = X0 + h.

En el ejemplo que se muestra en la Figura 4 hemos trabajado con la función $F(x) = x^2$ cuando X tiende al valor X0= 2.

De esta manera, el límite de la función en cuestión, si es que existe en dicho punto (X0), quedará indicado siempre en el centro de la tabla, cuando h alcance el valor cero (ver Figura 3).

En este caso, el límite viene dado por:

$$\underset{x \to 2}{Lím}\ f(x) = x^2 = 4$$

205	-0.05000	1.95000	3.80250
206	-0.04000	1.96000	3.84160
207	-0.03000	1.97000	3.88090
208	-0.02000	1.98000	3.92040
209	-0.01000	1.99000	3.96010
210	0.00000	2.00000	4.00000
211	0.01000	2.01000	4.04010
212	0.02000	2.02000	4.08040
213	0.03000	2.03000	4.12090
214	0.04000	2.04000	4.16160
215	0.05000	2.05000	4.20250

Figura 3

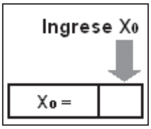


Figura 4

Ahora bien, podremos modificar el valor de X0 ingresándolo directamente en la celda indicada con un flecha, como se muestra en la Figura 4.

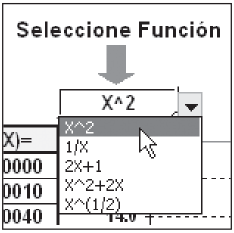


Figura 5

En tanto, también podremos modificar la función a evaluar, seleccionándola de la lista desplegable que se indica en la Figura 5.

Como se observará, las funciones que están disponibles en la lista desplegable se encuentran acotadas a las siguientes:

$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = 2x + 1$$

$$F(x) = x^2 + 2x$$

$$F(x) = \sqrt{x}$$

Ello no implica que no podamos modificar las fórmulas preestablecidas introduciendo otras.

De querer modificarlas recomendamos, primero, escribir la nueva fórmula en la celda E10. Este procedimiento se ve en la Figura 6.

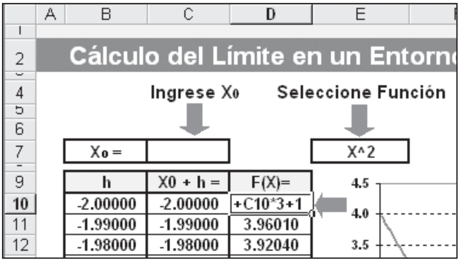


Figura 6

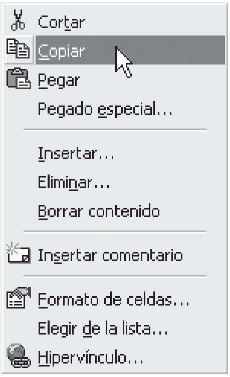


Figura 7

A continuación, deberemos posicionarnos sobre dicha celda y, con el botón derecho del Mouse, seleccionar **Copiar.**

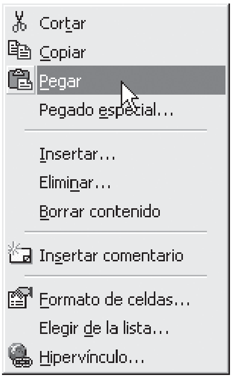


Figura 8

Por último, seleccionaremos toda la columna, desde la celda E10 hasta la E410 y, presionando nuevamente el botón derecho, elegiremos la opción **Pegar**.

De esta manera, se introducirá la nueva fórmula para todos los valores del entorno.

Por otra parte, a la derecha de la tabla podremos observar la gráfica de la función seleccionada de acuerdo al valor que tome X0. El límite de la función corresponderá a la imagen que tome el valor que se encuentra resaltado con un cuadrado de color azul. Siguiendo el caso que venimos desarrollando, en la Figura 9 se observa que el límite de la función tiende al valor 4.

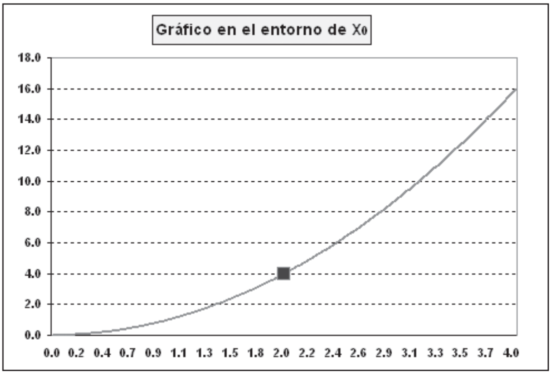
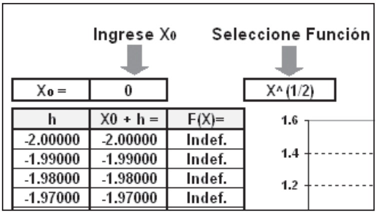


Figura 9

Es necesario hacer una aclaración importante sobre la representación gráfica de la función. Dependiendo de la función que hayamos elegido y del punto en que evaluamos el límite, puede ocurrir que no haya imagen para dicha función en algunos puntos del entorno. Por ejemplo, no existe la imagen de la función $F(x) = \sqrt{x}$ para aquellos valores de X menores a cero. De manera que, cuando la imagen no esté definida, en las celdas de la columna **F(X)**= aparecerá la leyenda "**Indef.**", como se muestra en la Figura 10.



h	X0 + h =	F(X)=
-2.00000	-2.00000	Indef.
-1.99000	-1.99000	Indef.
-1.98000	-1.98000	Indef.
-1.97000	-1.97000	Indef.

Figura 10

Cuando no exista imagen para ciertos valores del dominio se verá afectada, también, la representación gráfica de la función. Veamos, en la Figura 11 y a modo de ejemplo, el gráfico de la función: $F(x) = \dfrac{1}{x}$

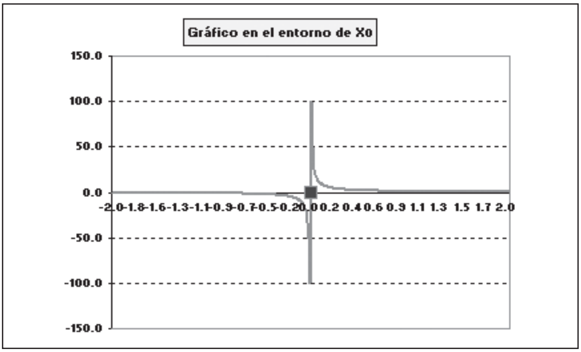


Figura 11

Cuando X toma el valor 0 la función no está definida. Sin embargo, vemos una recta que atraviesa el valor cero y que une los valores negativos de la función con los valores positivos.

Para solucionar este problema borraremos, directamente, cada uno de los valores de la tabla que muestran la leyenda "Indef." Ahora, la gráfica quedará de la siguiente manera:

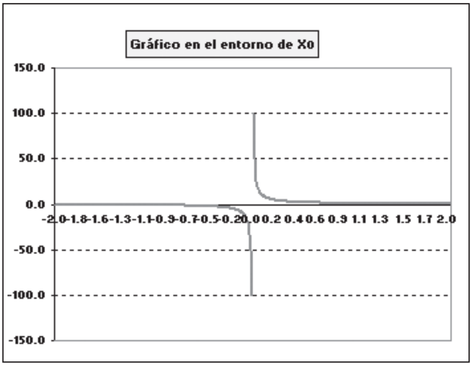
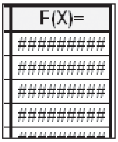


Figura 12

¡Importante!: Es de suma relevancia recordar que los valores de la columna **F(X)=** son generados por fórmulas, por lo cual, si se borra el contenido de las celdas, dejará de funcionar la lista desplegable que selecciona los diferentes tipos de funciones. Si ello sucede y no podemos solucionarlo, deberemos abrir, nuevamente, el archivo que se encuentra en el CD adjunto al libro.



Por último, si los datos ingresados fueran muy extensos, es posible que se muestren cortados o con los símbolos ####, como puede observarse en la Figura 13.

Figura 13

Para corregir y ajustar el ancho de las columnas, debemos presionar el botón de la Figura 14.

Figura 14

2. Generalización del Concepto de Límite

2. Generalización del Concepto de Límite

Límite Infinito

Límite Infinito

A continuación, les presentamos las definiciones de algunos casos especiales de límites.

Definición 1

Sea *f* definida en (a,b), salvo quizá en $x_0 \in (a,b)$. Decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

Definición 2

Sea *f* definida en (a,b), salvo quizá en $x_0 \in (a,b)$. Decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M$$

Definición 3

Sea *f* definida en (a,b), salvo quizá en $x_0 \in (a,b)$. Decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > M$$

Veamos un ejemplo:

17. Demostremos, usando la definición, que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Sea *M* arbitrario, queremos probar que $\left|\frac{1}{x}\right| > M$, o sea, $|x| < \frac{1}{M}$.

Por lo tanto, tomando $\delta \leq \frac{1}{M}$ resulta que:

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} \geq \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$$

como queríamos demostrar.

Recuerda:

1) Es importante señalar que la división por cero ***no está definida*** pero que, si en un cociente el denominador tiende a cero y el numerador a un número distinto de cero, entonces el cociente tiende a infinito.

2) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$$

Límite en el Infinito

Límite en el Infinito

Definición 1

Sea *f* definida en todos los puntos de un intervalo $(a,+\infty)$. Decimos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K > 0 \quad / \quad |x| > K \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Veamos un ejemplo:

18. Demostremos, utilizando la definición, que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, queremos probar que: $\left|\dfrac{1}{x^2}\right| = \dfrac{1}{|x|^2} < \varepsilon$, es decir, $|x|^2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$; entonces, $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Por lo tanto, tomando $K \geq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, resulta que:

$$|x| > K \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{|x|^2} < \frac{1}{K^2} \le \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Definición 2

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, K > 0 \quad / \quad |x| > K \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > M.$$

Veamos un ejemplo:

19. Demostremos, utilizando la definición, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Sea $M > 0$ arbitrario, queremos ver que $\ln x > M$, o sea, $x > e^M$ (todo sin módulo pues $\boldsymbol{x}$ tiende a **+** ∞).

Por lo tanto, tomando $K = e^M$ resulta que: $x > K$ Þ $f(x) = \ln x > \ln K = \ln e^M = M \ln e = M$ como queríamos demostrar.

Recuerda:

1) Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$

2) Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Por lo tanto:

Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = 0$

Prácticas vinculadas al tema:

Les proponemos resolver los problemas 8 al 13 de la guía de trabajos prácticos.

Cociente de Infinitos

Cociente de Infinitos

Nota: el ***cociente de infinitos*** es otra de las indeterminaciones que estudiaremos. Como en el caso de cociente de infinitésimos, la idea es tratar de salvar la indeterminación (a través de operaciones algebraicas que no modifiquen el valor de la expresión) y llegar a un resultado.

1) **Cociente de polinomios**: para salvar la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, en este caso se divide numerador y denominador por ***x*** elevado al mayor exponente de la expresión dada.

Veamos algunos ejemplos:

20. Calculemos los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x^4+2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^4}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3-x+2}{3x^3+x^2+2x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty}$

Regla práctica:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ y

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$.

Entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = L$ donde $\begin{cases} L=\infty & si \quad grP > grQ \\ L=0 & si \quad grP < grQ \\ L=\dfrac{a_n}{b_m} & si \quad grP = grQ \end{cases}$

2) **Cociente con expresiones irracionales**: también se divide numerador y denominador por *x* elevado al mayor exponente de la expresión dada, recordando que: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{x^m} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{x^{m.n}}}$

Veamos algunos ejemplos:

21. Encontremos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-\sqrt{x^4+5x}}{x^2-3x+\sqrt[3]{x+4}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-\sqrt{x^4+5x}}{x^2-3x+\sqrt[3]{x+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{\dfrac{x^4+5x}{x^4}}}{1-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{x^6}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{1+\dfrac{5}{x^3}}}{1-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{4}{x^6}}} = 1$$

22. Calculemos el siguiente límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\sqrt{x^2+1}}{2-x}$

Como x tiende a ∞, entonces dividimos numerador y denominador por $|x| = \sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{|x|}-\dfrac{x}{|x|}} = L$$

Si $x \to +\infty$, ***entonces*** $|x| = x$. ***Luego***, $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-1} = -4$

Si $x \to -\infty$, *entonces* $|x| = -x$.

Luego,

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{-x}-\dfrac{x}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{-\dfrac{2}{x}+1} = -2$$

Prácticas vinculadas al tema:

En este momento, les recomendamos resolver el problema 14 de la guía de trabajos prácticos.

Nota: $\boxed{\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x \quad \wedge \quad \nexists \lim\limits_{x\to\infty} \cos x}$

Por lo tanto, un teorema interesante es el siguiente:

Teorema 3

Sean f y g dos funciones tales que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (es decir, f es un infinitésimo para $x = x_0$) y $|g(x)| \leq k$ con $k \in IR$ (g es una función acotada).

Entonces, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$.

Este teorema (que comúnmente se conoce como "cero por acotada") da un método de resolución de ciertos límites.

Veamos algunos ejemplos:

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0$, pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ y $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

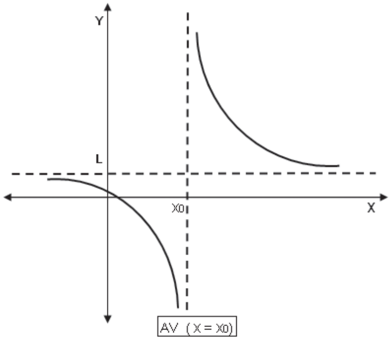
24. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ y la función coseno es una función acotada.

Prácticas vinculadas al tema:

Es el momento de resolver el problema 15 de la guía de trabajos prácticos.

3. Asíntotas

1) Asíntota vertical: la recta de ecuación $x = x_0$ es una ***asíntota vertical*** al gráfico de $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ y/o $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$



Asíntota vertical

Veamos algunos ejemplos:

25. Estudiemos la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

Hallamos, primero, el dominio de la función: $Df = IR - \{-3\}$.

Luego, analizamos la existencia de asíntota en $x_0 = -3$.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -3$ es asíntota vertical.

b) $f(x) = e^x$

Como $Df = IR$, entonces la función no tiene asíntotas verticales.

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

Como el dominio de la función es $Df = IR - \{-2,2\}$, analizaremos la existencia de asíntota vertical en los dos valores que excluimos del dominio.

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 2$ es asíntota vertical.

ii) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto, no hay asíntota vertical en $x = -2$.

26. Analicemos la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$

Observemos que el $Df = IR$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} x = 2$.

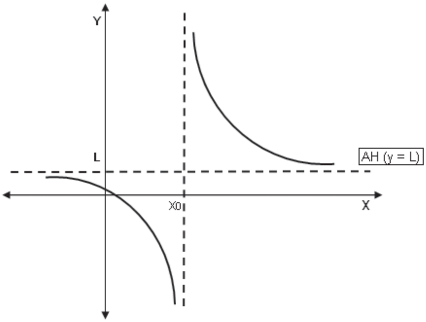
Como $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, concluimos que $x = 2$ es una asíntota vertical.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

El dominio de la función es $Df = IR - \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ es una asíntota vertical.

2) Asíntota horizontal: la recta de ecuación $y = L$ es ***asíntota horizontal*** al gráfico de $f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L \quad$ o $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$.



Asíntota horizontal

Veamos algunos ejemplos:

27. Estudiemos la existencia de asíntotas horizontales en las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, entonces $y=0$ es asíntota horizontal.

b) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{5x^2-x+2}$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{5x^2-x+2}=\dfrac{3}{5}$, entonces $y=\dfrac{3}{5}$ es asíntota horizontal.

c) $f(x)=x^3$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$, entonces esta función no presenta asíntotas horizontales.

28. Analicemos la existencia de asíntotas horizontales en las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x$

En este ejemplo vamos a discriminar los límites para el cálculo de asíntota horizontal.

Observemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ pero $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Por lo tanto, concluimos que $y = 0$ es una asíntota horizontal a izquierda.

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - 3 & x < -1 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & x \geq -1 \end{cases}$

Observemos que:

$$\longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - 3 = -3$$

Concluimos que tenemos dos asíntotas horizontales: $y = 0$ a derecha e $y = -3$ a izquierda.

Prácticas vinculadas al tema:

Por último, les sugerimos resolver los problemas 16 y 17 de la guía de trabajos prácticos.

Aplicación

Aplicaciones Biológicas

La función $C(t) = k\,(e^{-at} - e^{-bt})$ donde *a*, *b* y *k* son constantes positivas y $b > a$, sirve para modelar la concentración, en el momento *t*, de un fármaco inyectado en el torrente sanguíneo.

a) Calculemos la concentración para $t = 0$.

b) Calculemos $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$.

Solución:

a) $C(t) = k\,(e^{-at} - e^{-bt}) \quad \Rightarrow \quad C(0) = k\,(e^{0} - e^{0}) = 0$

b) Para calcular este límite debemos tener presente la gráfica de la función exponencial cuando el exponente es negativo. En efecto, a medida que *t* tiende a infinito, dicha exponencial tiende a cero.

Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$

[Práctica 1]

Práctica 1

Límite

1) Aplicando la definición, probar los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 1 = 7$

b) $\lim\limits_{x \to -1} x + 1 = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} 6x^2 - 3x = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2x + 9 = 8$

2) Examinar el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Graficar. ¿Existe límite en $x_0 = 1$? Justificar la respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3) Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, hallar

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) - g(x) \right)^2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2f(x) + 3g(x)}{[g(x)]^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$

4) Calcular los siguientes límites utilizando álgebra de límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1)^3$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \operatorname{sen}^2 x\right) \cdot \left(3 - 2\cos x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to a} 2^{\frac{x-2}{2-x}}$ (siendo $a \neq 1$)

c) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{3x^2+x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}\right) : \dfrac{2x}{x^2-1}$

siendo $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \log_{\frac{1}{2}} (x^2+7)$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}\right)^{x-4}$

5) Límites laterales.

Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2^-} |5x+10|$

e) $\lim\limits_{x\to -2^+} |5x+10|$

f) $\lim\limits_{x\to -2} |5x+10|$

g) $\lim\limits_{x\to -4^-} |5x+10|$

h) $\lim\limits_{x\to -4^+} |5x+10|$

i) $\lim\limits_{x\to -4} |5x+10|$

j) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ *siendo*

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & x \leq -1 \\ -x^2+3 & x > -1 \end{cases}$$

6) Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x < 3 \\ -2x+5 & x > 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 7 & x < 1 \\ -x+8 & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

7) Indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-2x^2-x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x}{x^3+4x}$

e) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{8x^3+27}{2x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^4-3x^2+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\cos^2 x+2\cos x-3}{6\cos x-6}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25\cos x-25}{5-5\cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{7-\sqrt{2x+43}}$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3x-1}}$

n) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3\sqrt{2x+1}-9}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{7x}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\operatorname{sen} 2x}{2x+3\operatorname{sen} 4x}$

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

j) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

s) $\lim_{x \to 0} \frac{arc\,\mathrm{sen}\, x}{x}$

(Se sugiera sustituir $y = arc\,\mathrm{sen}\, x$)

8) Límite infinito.

Aplicando la definición probar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

9) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{(x+2)^4}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^5}{(x+2)^3}$

d) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

e) $\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

f) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{(x-3)^4}}$

10) Límite en el infinito.

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

f) $\lim_{x \to +\infty} e^x$

g) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}$

k) $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

l) $\lim_{x \to +\infty} \ln(2 + x)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2+\operatorname{sen} x)$

11) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} -e^{\frac{1}{x^3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x^3}}$

12) Completar el resultado de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

b) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} =$

c) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} [f(x)+g(x)] =$

d) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} [f(x)-g(x)] =$

e) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k > 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] =$

f) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k < 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] =$

g) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k > 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} g(x)^{f(x)} =$

h) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k < 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} g(x)^{f(x)} =$

i) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\left[f(x) + g(x)\right] =$

j) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\left[f(x) + g(x)\right] =$

k) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\left[f(x) \cdot g(x)\right] =$

l) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\left[f(x) \cdot g(x)\right] =$

m) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c}\left[f(x) \cdot g(x)\right] =$

n) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} =$

o) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} =$

p) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

q) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \neq 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} =$

r) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

s) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} =$

t) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} =$

13) Indicar si existe el límite de las siguientes funciones en los puntos indicados, utilizando límites laterales. Justificar.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[2 + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{(x-1)^5}} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[2 + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{(x-1)^4}} \right]$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 0 \\ \dfrac{|3x|}{x} + 3^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} \right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \left[\dfrac{x+3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} + \left(\dfrac{2}{5} \right)^{\frac{1}{-x^2-6x-9}} \right]$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x| - 2}{x + 2}$

14) Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{4x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 2}{x^2 + x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

*(Sugerencia: dividi*r numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^3}{x^2+x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

15) Límite del producto de una función acotada por un infinitésimo. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{x^2}$

16) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de las curvas correspondientes a las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^3+2x-1}{x}$

b) $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

d) $y = \dfrac{x^2+1}{1+x}$

e) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

g) $y = 2x + e^{-x}$

h) $y = 1 + e^{\frac{1}{x}}$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x < 2 \\ 3 + \dfrac{x}{x^2+1} & x \geq 2 \end{cases}$

j) $y = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$

k) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right) \end{cases}$

f) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 5x}$

17) Determinar el valor de $a \in IR$ tal que:

i) $x = 2$ sea asíntota vertical de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{ax + 6}$

ii) $y = -1$ sea asíntota horizontal de la función: $g(x) = \dfrac{2x^3 + 2}{ax^3 + x}$