מס׳ קורס : 83-340-01

סמסטר א׳ תשפ״ד

מועד הבחינה : א

חלק ב

<u>עבודת בית בקורס ״מבוא לאופטיקה מודרנית ואלקטרו-אופטיקה״</u>

מרצה : פרופ׳ זאב זלבסקי

מתרגלים : נדב שברו וסמי אפסל

<u>הערות :</u>

1. העבודה היא אישית, אין לעזר באף אחד, ניתן לשלוח שאלות למתרגלים.
2. הציונים ינורמלו לפי הממוצעים של שנים שעברו.
3. התשובות וקבצי הקוד יעברו בדיקה דרך מנוע חיפושי העתקות.
4. תהיה בדיקה מדגמית להגנה פרונטלית על עבודת הבית.

הוראות הגשה :

1. יש להקליד את התשובות לכל השאלות והסעיפים בקובץ וורד ולייצא ל-PDF. לא יתקבלו סריקות בכתב יד לרבות תשובות שנכתבו בטאבלט.
2. יש לשמור את קובץ הPDF עם שם קובץ [first name]_[last name]_[personal I.D.]
3. יש לכתוב את הקוד בMATLAB בלבד. יש לצרף את הקוד בתוך המסמך תחת הכותרת של נספחים. כמוכן יש לשמור את הקוד לכל שאלה בקובץ m. עם שם קובץ :
   [first name]_[last name]_ [personal I.D.]_Q3
4. יש לעלות את הקבצים בנפרד, סה"כ :
   a. קובץ הקוד לשאלה 3
   b. PDF עם התשובות לשאלה 3 + קוד בסוף
   c. קובץ קוד של פונקציית circ
   d. קובץ קוד של קידום פרנל

לדוגמא : לסטודנט יוסי כהן ,בעל ת.ז. 123456789 יעלה את הקבצים הבאים :

a. Yossi_Cohen_123456789_Q3.m
b. Yossi_Cohen_123456789.pdf
c. circ.m
d. propFresnel.m

אחריות ההגשה היא עליכם, לא ניתן לערוך את הקבצים לאחר סגירת התיבה

שאלה 3 (40 נק')

מבוא:

התמרת פורייה הדו-ממדית הרציפה של $g(x,y)$ מוגדרת כ:

$$G(f_x,f_y)=\mathbb{F}\{g(x,y,)\}(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\exp\left[-j2\pi(f_x x+f_y y\right]dxdy$$

בפועל, אנו נתעניין ב"גרסה דיסקרטית" של התמרת פורייה הידוע כ- **DFT=Discrete Fourier Transform** והיא פועלת על פונקציה דו-ממדית דיסקרטית, ומחזירה פונקציה דו ממדית דיסקרטית ומוגדרת כך:

$$G[u,v]=\boldsymbol{DFT}\{g[m,n]\}=\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left[-\frac{j2\pi lu}{M}\right]\exp\left[-\frac{j2\pi kv}{N}\right]g[m,n]$$

אלגוריתם ידוע שיודע לממש את ה-DFT באופן יעיל הינו **FFT=Fast Fourier Transform**, וזמין בספריית הפונקציות של מטלב. (אנו נשתמש בגרסאות הדו-ממדיות שלה והן fft2,ifft2)

טרייד-אוף בין רזולוציה מרחבית לבין רזולוציה תדירית:

נרצה להגדיר את מערכת הצירים בצורה נכונה עם יחידות מתאימות. לשם פשטות, נסתכל על הגרסה החד-ממדית של התמרת פורייה.(כמובן שאפשר להרחיב זאת לדו-ממד).

נסמן:

$U(x)$ - פונקציה התלויה במיקום x

$G(f_x)=\mathcal{F}\{U(x)\}(f_x)$ – התמרת פורייה של $U(x)$, שהיא פונקציה של התדר המרחבי f_x.

שימו לב כי "מרחב המקום" ו"מרחב התדר" (*space domain, frequency domain*) מתייחסים ל$U(x)$ ול-$G(f_x)$ בהתאמה.

כידוע, התמרת הפורייה הרציפה מוגדרת לפי:

$$\mathcal{F}\{U(x)\}(f_x)=\int_{-\infty}^{\infty}U(x)e^{-2\pi jxf_x}dx$$

כעת, נבצע דיסקרטיזציה למיקום x, ל N מיקומים:

$$n=0,1,\dots,N-1$$
$$x_n=n\cdot\Delta x$$

כאשר Δx הוא הרזולוציה המרחבית.

נסמן את האורך הכולל במרחב המקום ב:

$$L=N\cdot\Delta x$$

L נקרא גם ה: *"Field of view – FOV"* או טווח הראייה, והוא למעשה מבטא את התחום הנראה של מרחב המקום.

כעת, נקרב את האינטגרל ע"י הסכום:

$$\mathcal{F}\{U[x_n]\}(f_x)\cong\sum_{n=0}^{N-1}U(x_n)e^{-2\pi jx_nf_x}\cdot\Delta x$$

שימו לב כי זו עדיין פונקציה רציפה (כי המשתנה f_x הינו רציף), ולכן דרוש לעשות דיסקרטיזציה גם לתדר המרחבי f_x ובעצם כאן אנו מגיעים להתמרת ה DFT.

אנו נדגום את הפונקציה $U(x)$ כך שתתקבל: $U[n]=U[x_n]$.

כאמור, ה DFT ממומש ע"י פונקציית FFT ונסמנו כך.

$$DFT\{U[n]\}[k] = FFT\{U[n]\}[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} U(x_n) e^{-2\pi j \cdot \frac{nk}{N}}$$

כאשר:

$$n = 0,1, \dots, N-1$$
$$k = 0,1, \dots, N-1$$

נציב כעת את הקשר: $x_n = n \cdot \Delta x$

$$FFT\{U[n]\}[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} U(x_n) e^{-2\pi j x_n \cdot \frac{k}{\Delta x N}}$$
$$FFT\{U[n]\}[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} U(x_n) e^{-2\pi j x_n \cdot f_k}$$

כאשר:

$$f_k = \frac{k}{\Delta x N}$$
$$k = 0,1, \dots, N-1$$

נסמן:

$$\Delta f \triangleq \frac{1}{\Delta x N}$$

וקיבלנו דיסקרטיזציה של התדר המרחבי:

$$f_k = k \cdot \Delta f$$

כאשר Δf הינו הרזולוציה התדרית ומתקיים:

$$\Delta f = \frac{1}{L}$$

למעשה, צירי מיקום ותדר במטלב הם:

$$x = 0 : \Delta x : L - \Delta x$$
$$f_x = 0 : \frac{1}{L} : \frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{L}$$

רק שנרצה להציג אותם על פי מערכת צירים סימטרית סביב 0 כלומר:

$$x = -\frac{L}{2} : \Delta x : \frac{L}{2} - \Delta x$$
$$f_x = -\frac{1}{2\Delta x} : \frac{1}{L} : \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta L}$$

ועל פי *Nyquist*, עבור רזולוציה מרחבית Δx , התדר המרחבי הגדול ביותר שנוכל למדוד הוא:

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta x}$$

לסיכום:

- טווח הראייה L קובע את הרזולוציה במרחב התדר Δf (ושימו לב כי ניתן להגדיל את טווח הראייה ע"י ריפוד באפסים)
- הרזולוציה המרחבית Δx קובע את "טווח הראייה" במרחב התדר.
- שימו לב כי יחידות של x ו f_x הם $[m]$ ו $\left[\frac{cycles}{m}\right]$ בהתאמה

טיפים:

- עיינו בפונקציות: *meshgrid,fftshift,ifftshift,imagesc,surf,*
- התבוננו בפקודה: [X,Y]=meshgrid(x,x) (לאחר שהגדרתם את *x* כציר מיקום), היא תעזור לכם.
- כאשר אתם משתמשים בפונקציה *imagesc*, השתמשו ב *axis image;axis xy;* כדי לסדר את ההצגה של התמונה באופן נכון.
- יש לשים יחידות בצירים וכותרות ב*figures* שתייצרו

הערה: לכל השאלות המספר ### הינו 3 הספרות האחרונות של הת״ז.

1. שאלת חימום: מפתח מעגלי

א. הגדירו את פונקציית *circ* במטלב ושמרו אותה בקובץ *m.* נפרד, כלומר שמרו אותה כ *circ.m*. מהם הפרמטרים שהפונקציה מקבלת ומהם הפרמטרים שהפונקציה מחזירה?

ב. ייצרו דגימה של הפונקציה ושמרו אותה במטריצה דו-ממדית עם הפרמטרים הבאים:

i. רדיוס המעגל:

$$R = (mod(\#\#\#,5) + 1) \cdot 10^{-2}[m]$$

ii. טווח הראייה: $L = 0.2\ [m]$

iii. מספר דגימות בכל ממד: $N = 200$

ג. הציגו את התוצאה כתמונה (השתמשו ב *imagesc*)

ד. חשבו(במטלב) את ההתמרה של המטריצה והציגו את הערך מוחלט ב *imagesc* וב-*surf*. (שימו לב לצירים כפי שמוסבר במבוא).

הערה: ב*figure* עם תוצאת ה *surf* הוסיפו:

camlight left; lighting phong; shading interp

כפי שראינו בכיתה, ההתמרה של $circ$ הינו :

$$g(x,y) = circ\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w}\right)$$

$$G(f_x,f_y) = w\frac{J_1\left(2\pi w\sqrt{f_x^2+f_y^2}\right)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$$

כאשר $J_1(x)$ הינו פונקציית בסל מסדר 1 .
נגדיר כעת :

$$Jinc(x) \triangleq \frac{J_1(2\pi x)}{x}$$

ומתקיים :

$$\lim_{x\to 0} Jinc(x) = \pi$$

אפס ראשון מתקבל ב : $J_1(1.22\pi) = 0$
כלומר:

$$G(f_x,f_y) = w^2 \cdot Jinc\left(w\sqrt{f_x^2+f_y^2}\right)$$

2. בשאלה זו נחשב ונציג את פילוג העוצמה של תבנית פראונהופר (בהנחה שפוגע גל מישורי בעל אמפליטודת יחידה) של מפתח מעגלי משאלה 1 כאשר אורך הגל הינו :

$$\lambda = round\left(400 + \frac{\#\#\#}{999}\cdot 900\right)[nm]$$

א.) ציינו מהו התנאי למרחק התצפית(ע"י אי-שיוון) לקבלת תבנית פראונהופר ובחרו במרחק שהוא 5 פעמים יותר גדול. נסמן מרחק זה ב z_0 .
לדוגמא : אם מתקבל לכם $z \gg 10\ [m]$ בחרו ב $z_0 = 50\ [m]$.
ב.) רשמו את הביטוי האנליטי הסופי לפילוג העוצמה שאמורה להתקבל במרחקz_0. (אין צורך להציב מספרים, רשמו רק ביטוי פרמטרי). שימו כי בסוף אתם אמורים לקבל פונקציה התלויה ב x,y
(כלומר יש להציב $f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}$)
ג.) הציגו את הביטוי האנליטי שחישבתם בסעיף ב. לשם כך, עיינו והיעזרו בפונקציה $jinc$ המצורפת כדי לעשות זאת. כמובן, קחו בחשבון את שהצירים שלכם ,כלומר אם הגדרתם את f_x ואת f_y בסעיף ד.1 , אתם יכולים ליצור כעת את צירי המיקום לפי הקשר : $x = f_x \cdot \lambda z_0, y = f_y \cdot \lambda z_0$.
ד.) כעת ,הציגו חתך חד-ממדי של הפילוג וחשבו את ה $FWHM$. סמנו זאת על גבי הגרף באופן מתאים. מהם הפרמטרים המשפיעים על ה $FWHM$ לדעתכם? ציינו במפורש איך ה$FWHM$ מושפע ממרחק התצפית, גודל המפתח(הרדיוס) ואורך הגל. (כלומר לכל פרמטר האם הוא יגדיל או יקטין את ה $FWHM$?)

3. בשאלה זו, נכתוב פונקציה המחשבת את תבנית העקיפה לפי קירוב פרנל.
תזכורת לקירוב פרנל:

$$E(x,y,z) = \frac{e^{ikz}}{\lambda zi} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\left\{E(x',y',0)e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}\right\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

א.) לנוחות, הגדירו את 2 פונקציות הבאות ושמרו אותם(כל אחד לחוד) כקובץ נפרד:

```
function Fx=F(x)
    Fx=fftshift(fft2(ifftshift(x)));
end

function iFx=iF(x)
    iFx=fftshift(ifft2(ifftshift(x)));
end
```

הסבירו למה נועדו הפונקציות *ifftshift* ו *fftshift*.

ב.) כתבו כעת את פונקצייה הבאה והשתמשו בפונקציות של סעיף א:

```
function[u2,x_prop]=propFresnel(u1,L,lambda,z);
% propagation - according to Fresnel
% assumes same x and y side lengths and
% uniform sampling
% u1 - source plane field
% L - source plane side length (FOV)
% lambda - wavelength
% z - propagation distance
% u2 - observation plane field
% x_prop - axis in observation plane field
```

ג.) כעת, עבור המפתח שהגדרתם בסעיף א, חשבו והציגו את פילוג העוצמה(ערך מוחלט בריבוע) של תבנית פרנל המתקבל במרחק $z_1 = \frac{1}{50} z_0$. כמובן, חשבו את ה *FWHM*.

ד.) כעת, עבור המפתח שהגדרתם בסעיף א, חשבו והציגו את פילוג העוצמה(ערך מוחלט בריבוע) של תבנית פרנל המתקבל במרחק z_0 . כמובן, חשבו את ה *FWHM* של חתך והשוו עם שאלה 2 סעיף ד.

ה.) הציגו כעת את פילוג העוצמה עבור המרחקים הבאים: $0.01z_0, 0.1z_0, 0.5z_0, z_0, 2z_0, 10z_0$. שימו לב כי לכל מרחק שייך צירים אחרים!(לפי ה*scaling*). הציגו זאת ב*2x6 subplot* כך שמתחת כל פילוג עוצמה יופיע חתך חד ממדי. לאחר מכן, הציגו *plott* של ה *FWHM* כתלות במרחק. (ציר *x* יהיה מנורמל לפי z_0 , כך שעליכם לוודא שיהיה לכם 6 ערכים להציג).

בהצלחה!