

慢化分布下回旋动理学粒子模拟

第十届磁约束聚变理论与模拟研讨会 · 中国珠海

钟奇, 肖湧†
浙江大学·聚变理论与模拟中心

摘要

- 燃烧等离子体中的聚变产生的 α 粒子由于与电子碰撞通常被认为具有慢化分布，这与热离子的麦氏分布有很大不同。针对慢化分布下的回旋动理学粒子模拟，我们开发了一种通用的多点平均方法，求解具有慢化平衡分布的回旋动理学泊松方程，其准确性在长波和短波范围内都得到了验证。为了说明新方法的意义，我们分析了不同的平衡分布对回旋动理学泊松方程的影响，同时展示了慢化分布的临界速度对解的影响。
- 我们进一步开发了适合粒子慢化分布的 δf 算法,并针对慢化分布的 α 粒子激发环 Alfvén 本征模 (TAE) 进行了模拟。这些模拟算法的开发和验证为燃烧等离子体中低频漂移阿尔芬湍流的全域回旋动理学粒子模拟奠定了基础。

回旋动理学模型

- 回旋动理学方程（一阶微扰展开）[Frimann and Chen '82 PF][Brizard and Hahm '07 RMP]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla + v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}}\right) \delta f_s = -\mathbf{v}_E \cdot \nabla f_{0s} + \frac{q_s \mathbf{B}^*}{m_s B_0} \cdot \left(\nabla \bar{\phi} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_{\parallel}\right) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} f_{s,0}$$
$$\dot{\mathbf{X}} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_E$$
$$\dot{v}_{\parallel} = -\frac{\mathbf{B}^*}{m_s B_0} \cdot \left(\mu \nabla B_0 + q_s \nabla \bar{\phi} + q_s \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_{\parallel}\right)$$

- 麦氏方程（准中性条件和平行安培定理）

$$-\sum_{s=e,i,\alpha} q_s \delta n_{s,\text{pol}} = \sum_{s=e,i,\alpha} q_s \delta \bar{n}_s$$
$$\nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} = -\mu_0 \sum_{s=e,i,\alpha} q_s \delta u_{\parallel s}$$

- PIC 模拟中使用的 marker 权重 $w = \delta f / f$ ，它的演化方程为

$$\dot{w} = (1-w) \left(\left(-\left(v_{\parallel} \frac{\delta \mathbf{B}}{B_0} + \mathbf{v}_E \right) \cdot \nabla \ln f_0 \right) + \left(\mu \frac{\delta \mathbf{B}}{B_0} \cdot \nabla B_0 + q \frac{\mathbf{B}^*}{B_0} \cdot \nabla \bar{\phi} + q \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_{\parallel} \right) \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \ln f_0 \right)$$

其中 $\nabla \ln f_0$ 和 $\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \ln f_0$ 项与平衡分布函数有关。

- 准中性条件的极化密度 $\delta n_{s,\text{pol}} = -\frac{q_s n_{s,0}}{T_s} (\phi - \tilde{\phi})$ ，其中 $\tilde{\phi} = n_{s,0}^{-1} \int d\mathbf{v} \exp(-\rho \cdot \nabla) \bar{\phi} f_{s,0}$, $\bar{\phi} = (2\pi)^{-1} \int d\zeta \exp(-\rho \cdot \nabla) \phi$ 。所以 $\delta n_{s,\text{pol}}$ 和平衡分布函数相关。

慢化分布

- 各向同性的慢化分布满足

$$f_{\text{sld}}(\mathbf{v}) = \frac{n_0}{4\pi I_1} \frac{H(v_0 - v)}{v^3 + v_c^3}$$

- 对于慢化分布定义温度为

$$\frac{3}{2} n T = \int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m v^2 f_{\text{sld}}(\mathbf{v}) \equiv \frac{1}{2} n m v_c^2 \frac{I_2}{I_1}$$

其中 $I_1(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x^3)$,

$$I_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \arctan \frac{1-2x}{\sqrt{3}} - \ln \frac{(1+x)^3}{1-x^3} \right), \quad x = v_0/v_c.$$

- 不稳定性的梯度驱动为

$$\nabla \ln f_0 = \nabla \ln n + \left(\frac{1}{3I_1} \frac{v_0^3/v_c^3}{1 + v_0^3/v_c^3} - \frac{1}{1 + v^3/v_c^3} \right) \nabla \ln v_c^3$$
$$\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \ln f_0 = -\frac{3v v_{\parallel}}{v^3 + v_c^3}$$

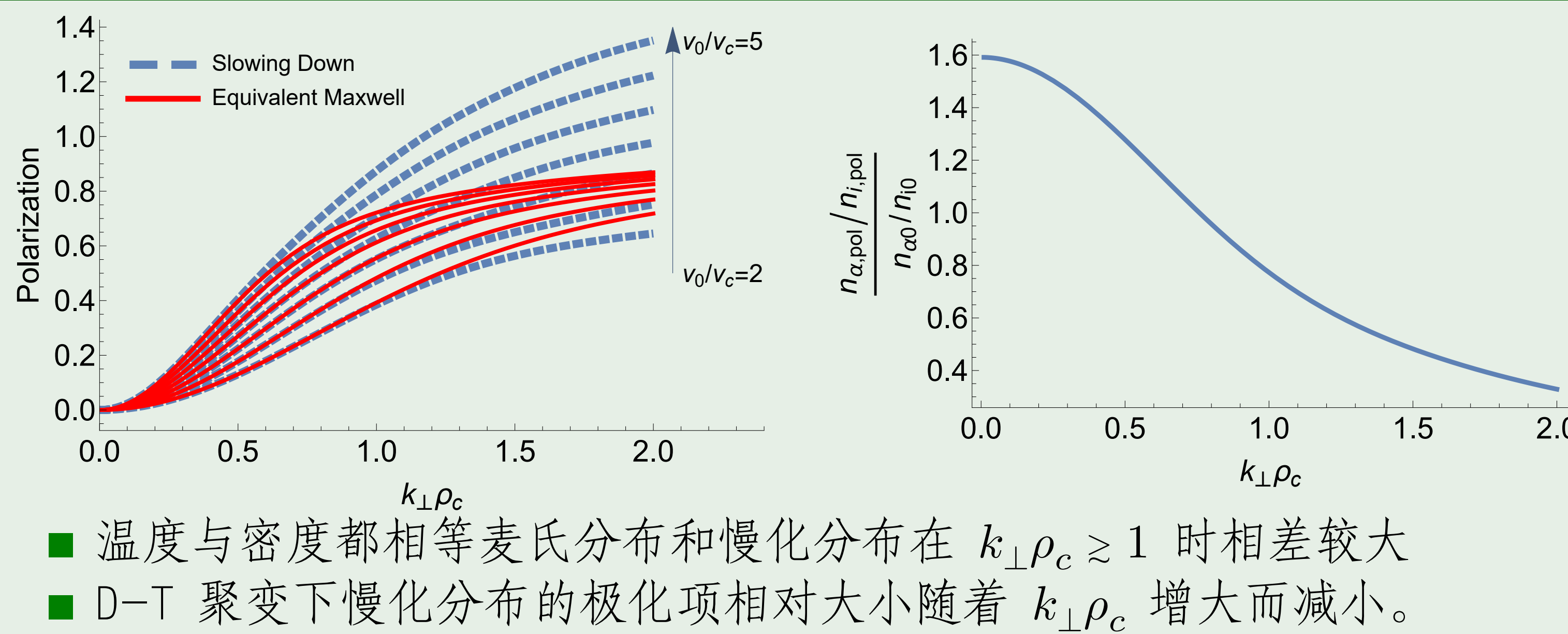
- 极化密度

$$n_{\text{pol}} = -\frac{q n_0}{T} (c_0 - \Gamma_{\text{sld}}(k_{\perp} \rho_c)) \delta \phi$$

Γ_{sld} 的定义类似于麦氏分布下的 $\Gamma_0 = \exp(-b) I(b)$,

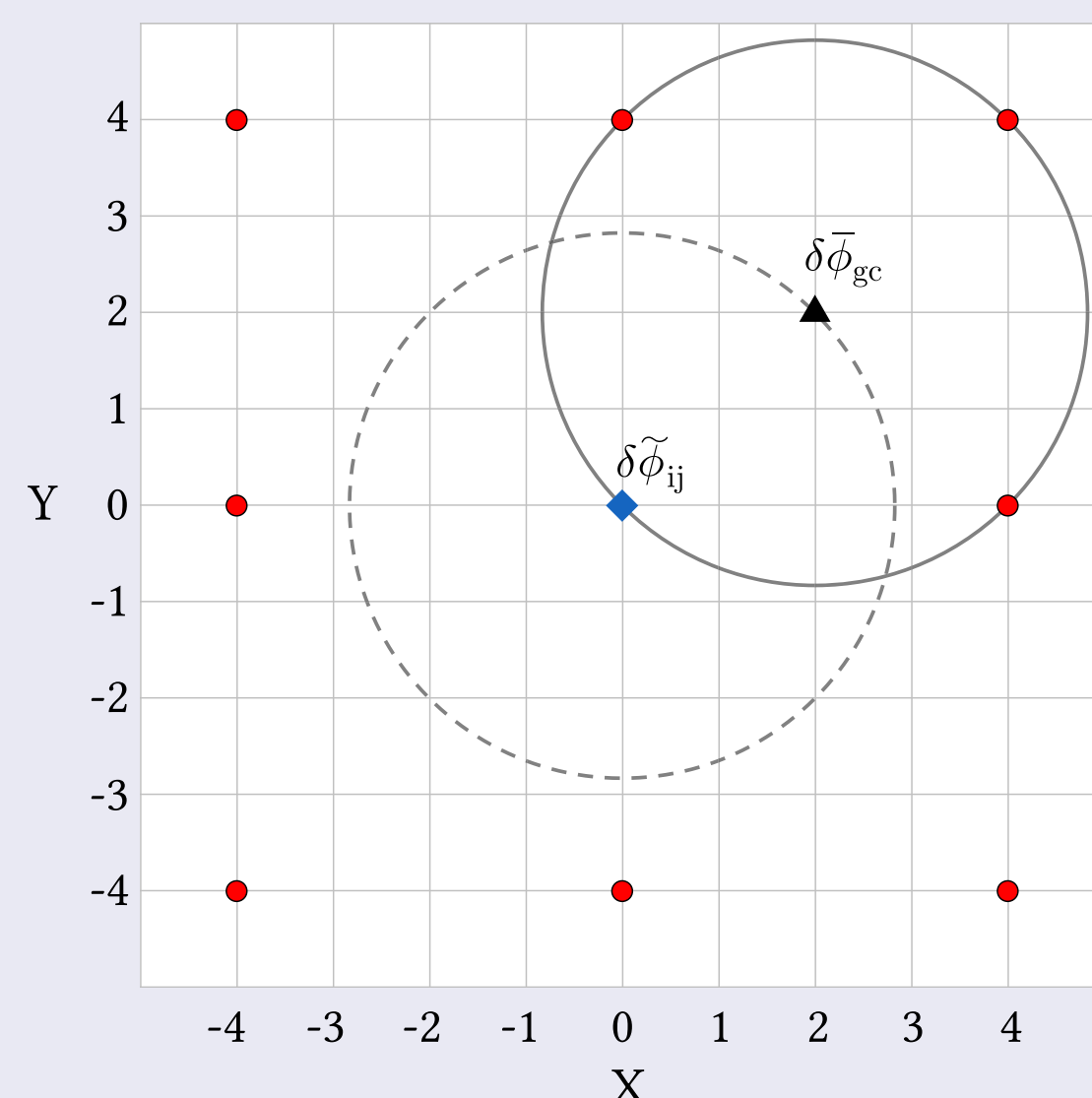
$b = k_{\perp}^2 \rho_i^2$, $c_0 = \frac{x^2}{2} + \ln(1+x) - I_1 - I_2$ 在麦氏分布下为 1。

麦氏分布与慢化分布的极化密度对比



- 温度与密度都相等麦氏分布和慢化分布在 $k_{\perp} \rho_c \geq 1$ 时相差较大
- D-T 聚变下慢化分布的极化项相对大小随着 $k_{\perp} \rho_c$ 增大而减小。

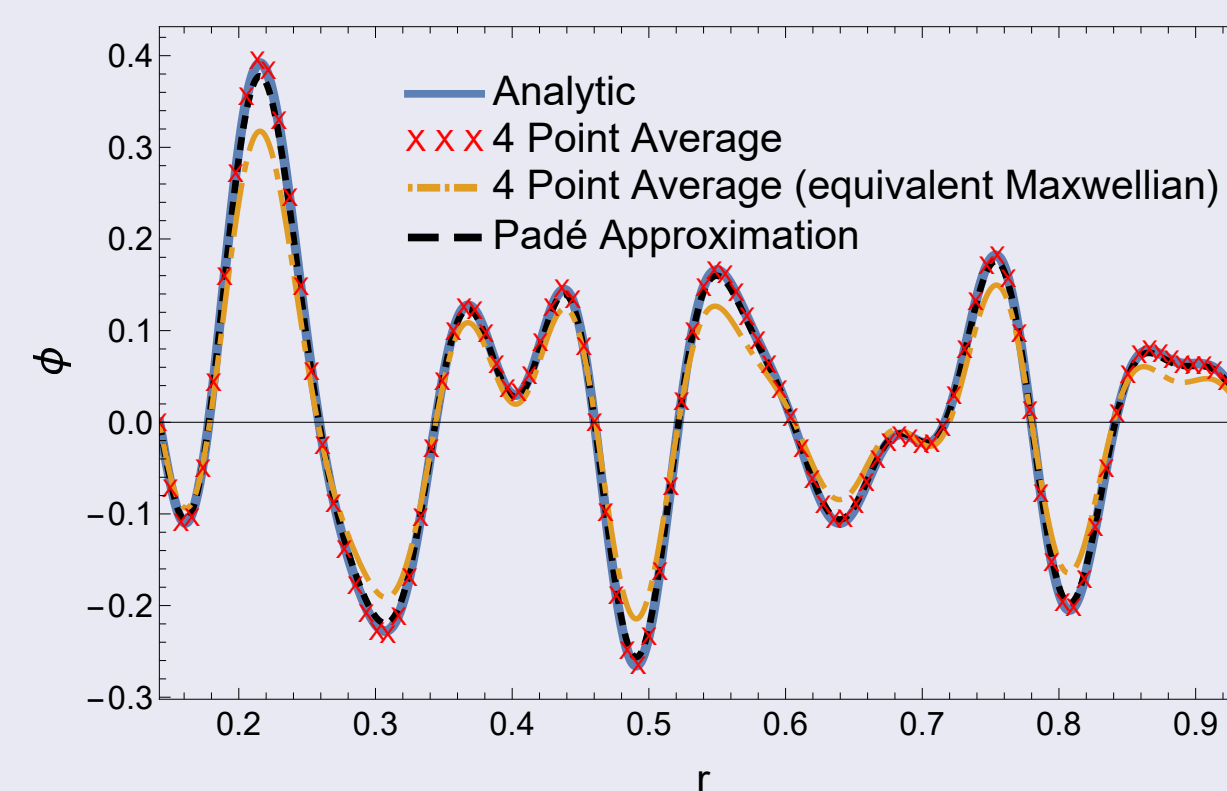
四点平均方法



- 新的解法器和使用等效麦氏分布的原求解方法相比准确性有显著提升，如右图所示。

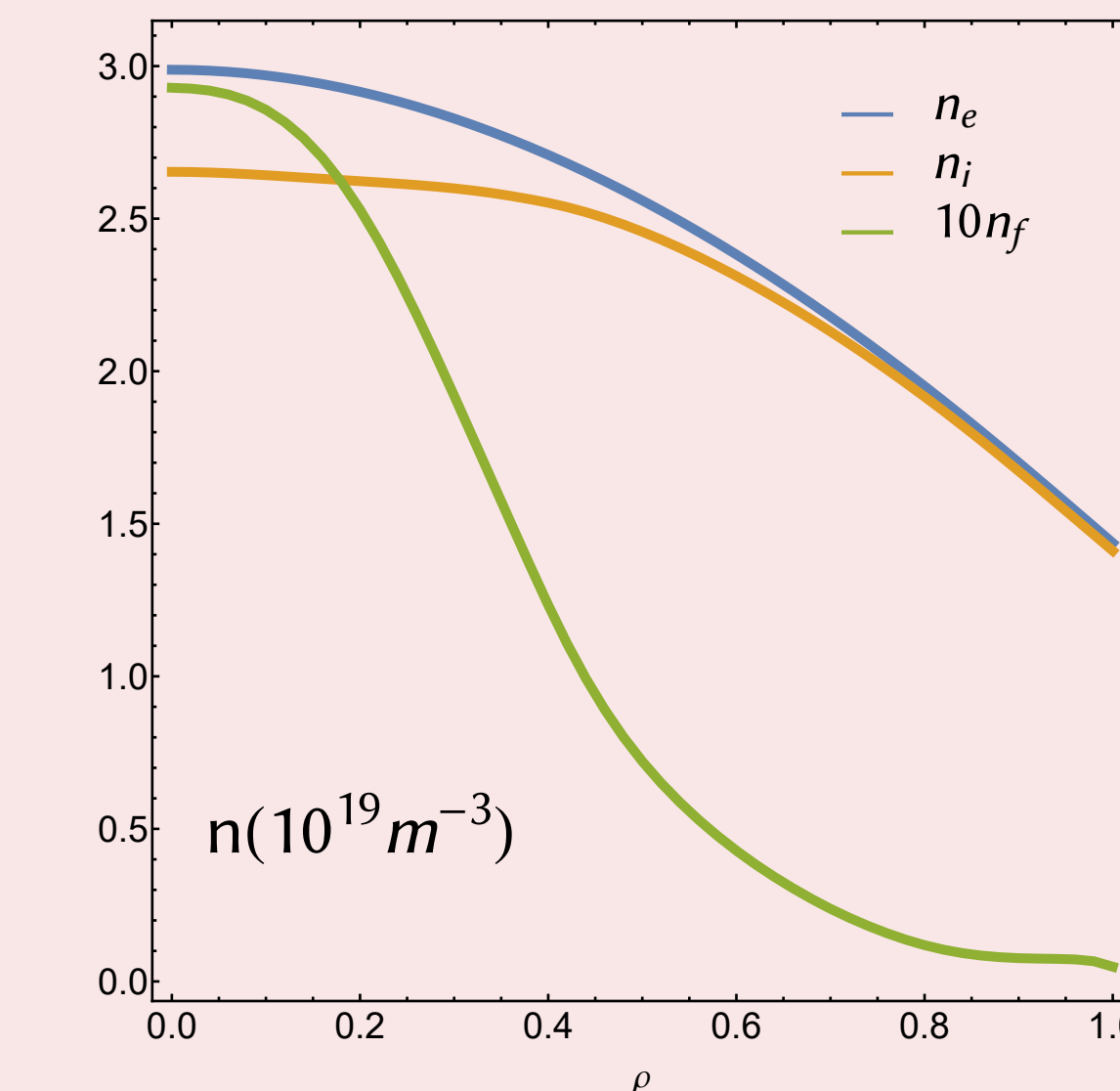
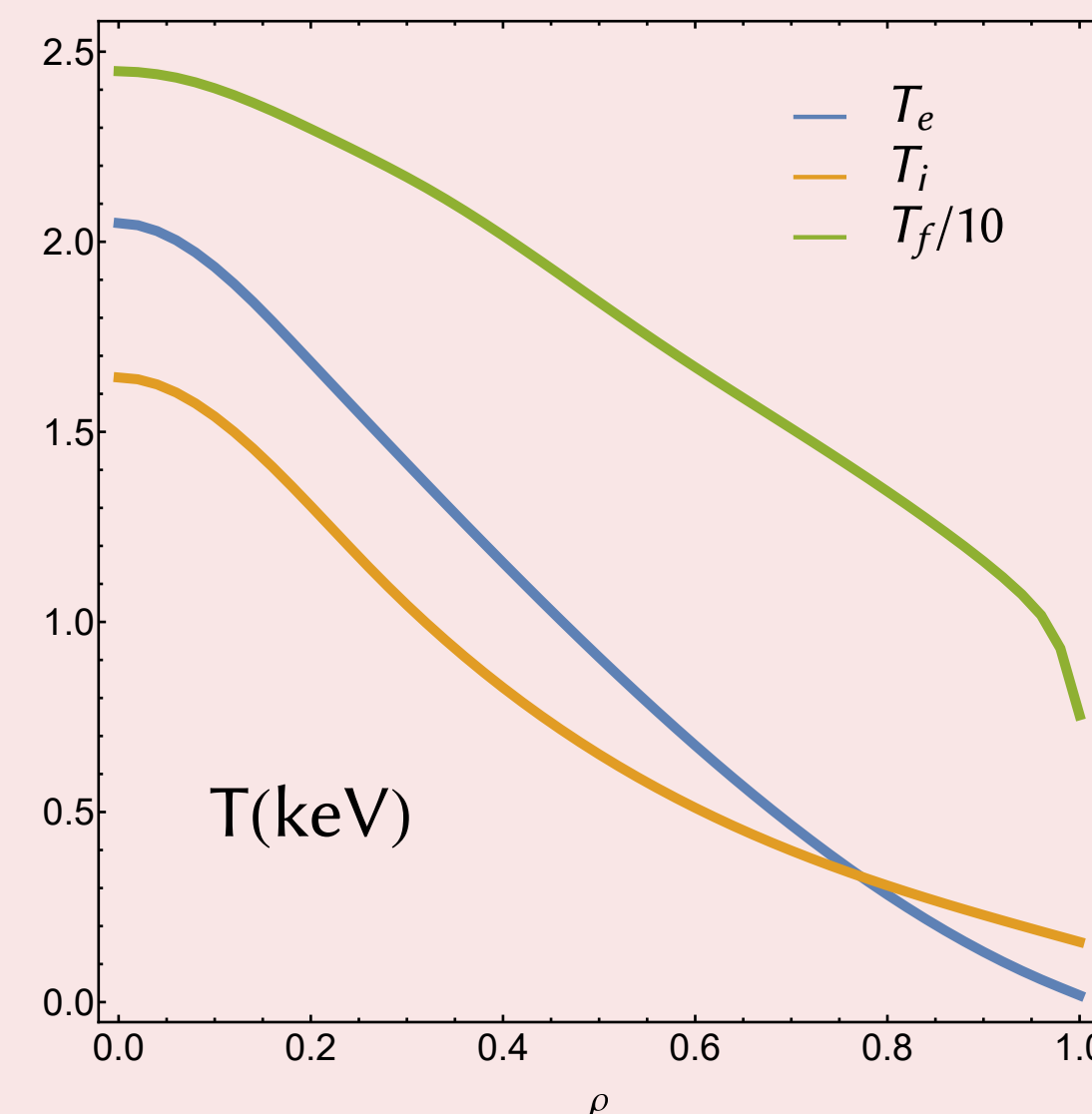
- 四点平均方法是 [Lin and Lee '95 PRE] 提出的在数值求解泊松方程时基于麦氏分布处理极化密度的方法。

- 本工作将其扩展到能适用于慢化分布。

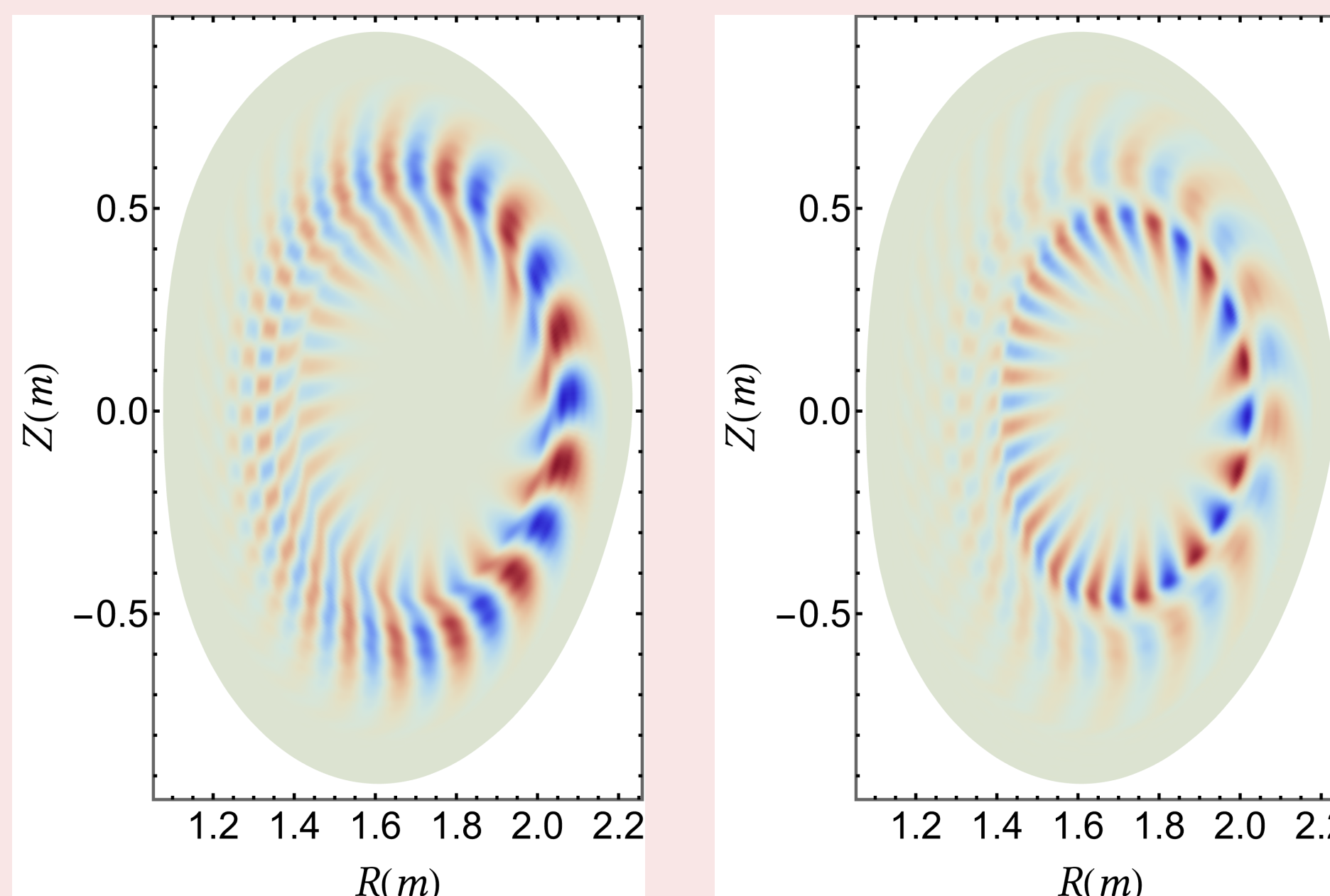
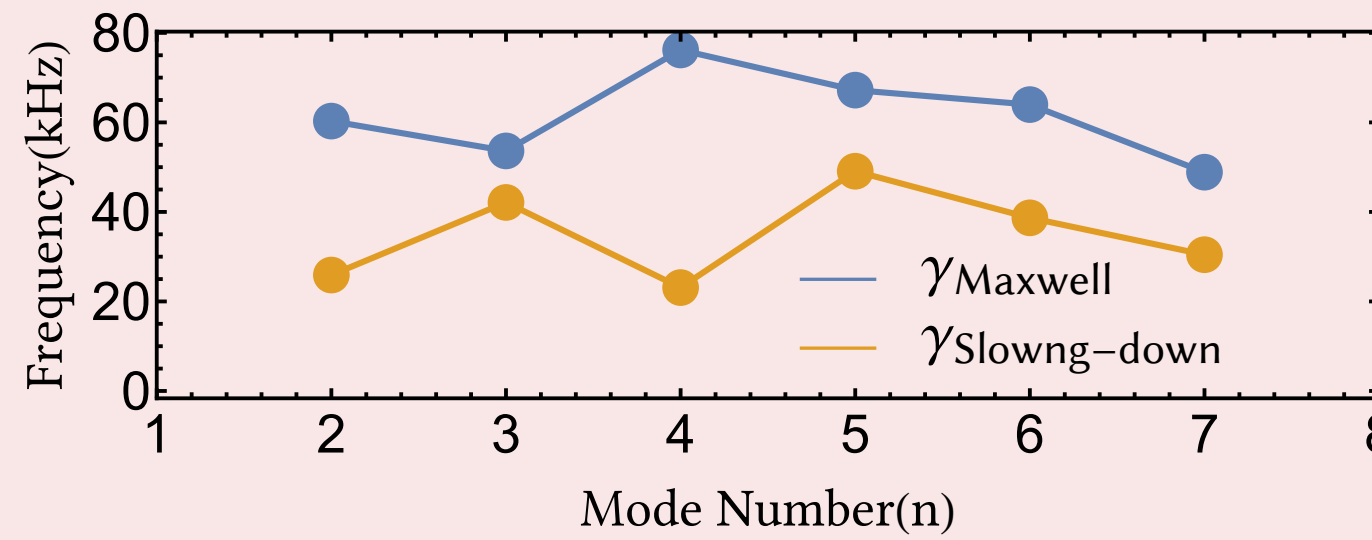
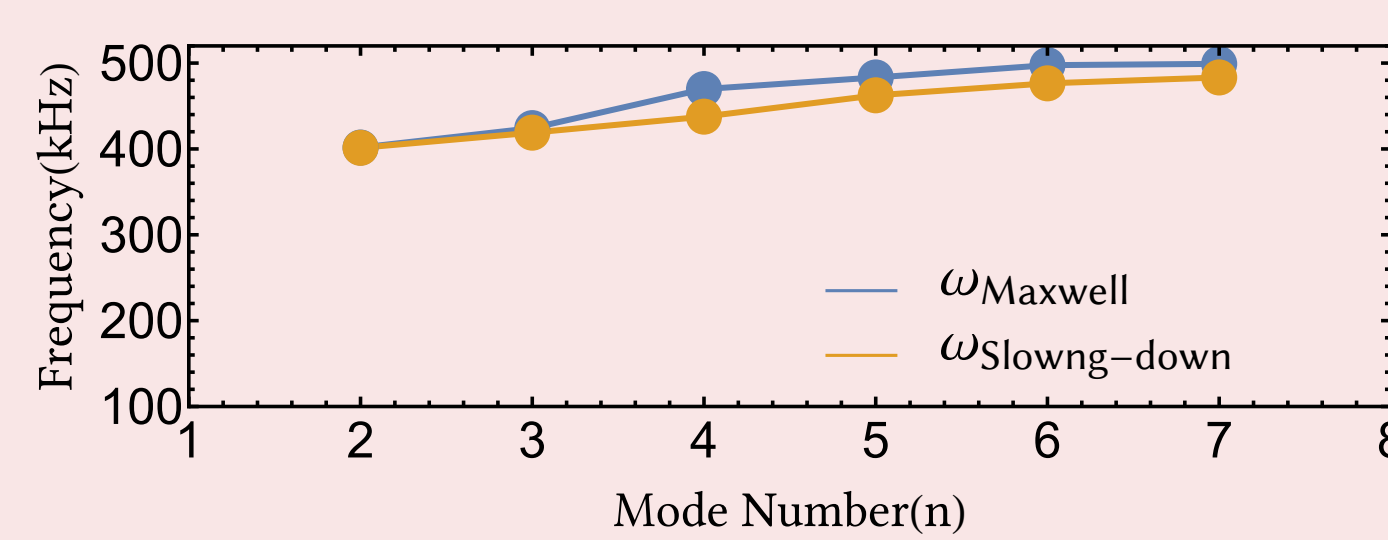


高能粒子激发 TAE 的模拟

- 使用3维回旋动理学模拟程序 GTC [Lin '98 Science][Holod '09 PoP] 模拟 DIII-D 中的 TAE。高能粒子部分采用慢化分布。
- 平衡数据来自 DIII-D 放电 no. 142111 的 525 ms。温度和密度剖面如下所示。



- 激发的 TAE 频率与增长率随环向模数变化如下图所示



- $n=4$ 的模结构 (ϕ) 如图所示，左图是麦氏分布，右图是慢化分布。

总结

- 用于慢化分布的四点平均法能更准确地模拟高能粒子的回旋极化响应。
- 相同温度下，相对于麦氏分布，慢化分布的高能粒子激发的 TAE 频率大致相同，增长率则较低。

钟奇 qzhong_ifts@zju.edu.cn
浙江大学·聚变理论与模拟中心
310030 浙江省杭州市



浙江大学聚变理论与模拟中心
Institute for Fusion Theory and Simulation, Zhejiang University