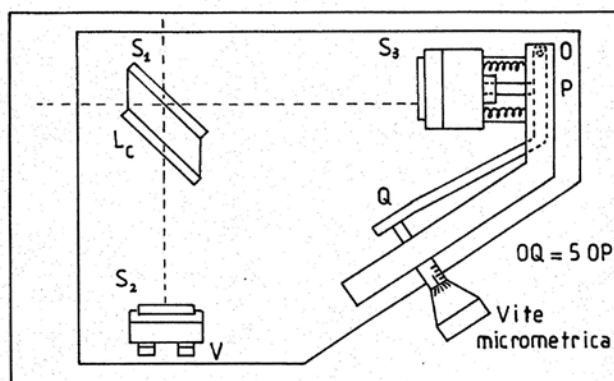
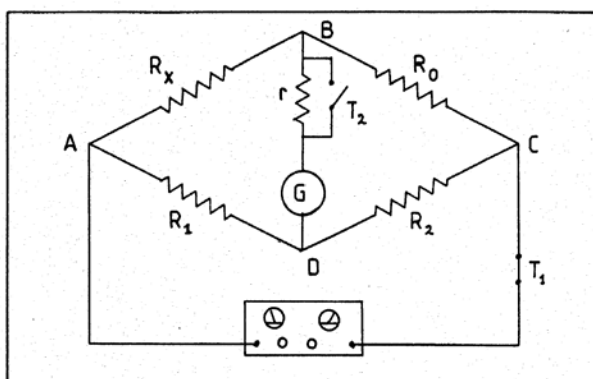
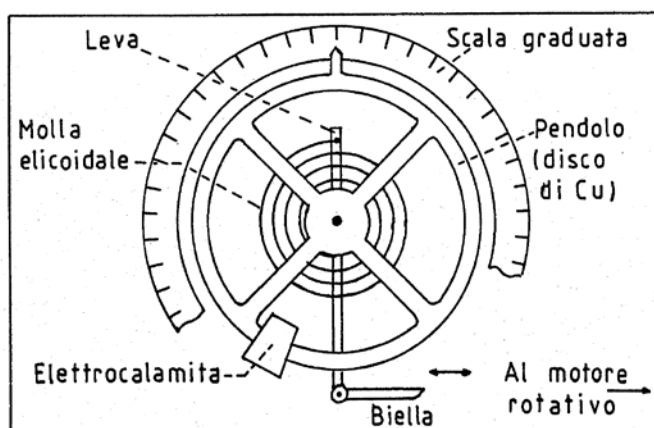


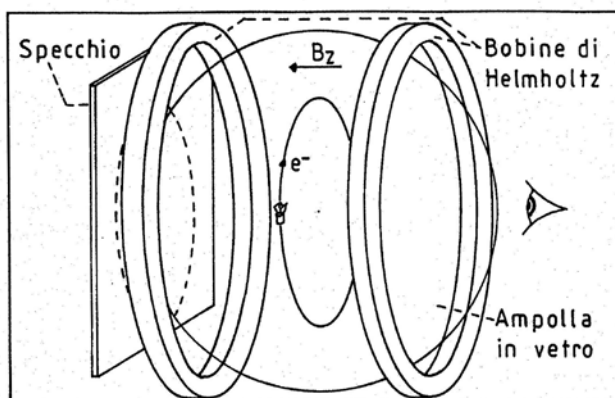
Corso di laurea in Fisica

LABORATORIO DI FISICA:

Ottica e Fisica Moderna



Emilio Acerbi
Massimo Sorbi



Edizione
rivista per l'a.a.
2020-21

PREFAZIONE

Edizione 2012-13

Queste dispense nascono da una lunga esperienza nella conduzione dei laboratori del secondo anno del corso di laurea in Fisica. Nel precedente ordinamento didattico le esperienze di laboratorio erano dedicate quasi esclusivamente alla Fisica Classica (Meccanica e Termodinamica al primo anno, Elettromagnetismo e Ottica al secondo anno); con l'introduzione della nuova laurea triennale è nata l'esigenza di inserire al secondo anno anche alcune fondamentali esperienze di Fisica Moderna per completare la preparazione sperimentale dello studente, prima di affrontare nel corso del terzo anno, i Laboratori dei vari indirizzi (Astrofisica, Struttura della Materia, Fisica Nucleare e Subnucleare, Fisica Generale, Fisica Ambientale, Archeometria, Acceleratori e Superconduttività Applicata). Con la nuova organizzazione dei corsi, basata sull'assegnazione di un certo numero di crediti, è stato deciso di ridurre il numero di lezioni introduttive in aula per consentire un numero maggiore di ore di laboratorio. Questo ha portato come conseguenza la necessità di esporre in queste dispense alcuni di quegli argomenti che non trovano più posto nelle "lezioni frontali".

Nella presente edizione, per ragioni di economicità della dispensa, si è deciso di raccogliere principalmente le esperienze proposte agli studenti nel corso dell'anno, togliendo quindi la totalità delle esperienze di Meccanica e Termodinamica (svolte dagli studenti al primo anno della laurea triennale), gran parte delle esperienze di Elettromagnetismo e alcune esperienze della sezione di Ottica e di Fisica Moderna, che invece erano presenti nelle precedenti edizioni. Lo studente troverà tuttavia esposti anche alcune esperimenti che non vengono svolti necessariamente nel corso: si è deciso di tenerli nella presente raccolta in vista di un possibile ripensamento del percorso delle esperienze da proporre nei prossimi anni.

Nel testo sono descritte la fenomenologia ed il metodo di misura impiegato nell'esecuzione delle varie esperienze, integrando la descrizione degli apparati e della procedura sperimentale con richiami alla descrizione della teoria fisica che sta dietro ai vari fenomeni osservabili. Ulteriori approfondimenti sono lasciati all'iniziativa e all'interesse dello studente, consultando per esempio il testo "Metodo e Strumenti di Misura"¹ dove è possibile trovare una descrizione più dettagliata degli strumenti e del loro principio di funzionamento. In alcuni casi, soprattutto nelle esperienze del secondo anno, la descrizione dell'esperienza è completata da una trattazione dei modelli interpretativi della fenomenologia in gioco [ad esempio è descritto il modello dell'oscillatore elettronico per l'interpretazione del fenomeno di dispersione normale ed anomala e dell'effetto Faraday]. Nel caso delle esperienze di Fisica Moderna, la loro descrizione è preceduta da un'introduzione storica delle ricerche (sia teoriche che sperimentali) e dei risultati ottenuti in quel particolare campo, in maniera che lo studente abbia una visione organica di come si sia pervenuti a quel particolare esperimento che viene riprodotto in laboratorio.

Nella descrizione delle varie esperienze si è evitato di proposito di portare degli esempi pratici di esecuzione delle misure che servano come traccia allo studente. Tale scelta ha lo scopo di obbligare lo studente a predisporre in maniera autonoma la procedura di esecuzione delle misure. In maniera analoga si è evitato di presentare per tutte le esperienze un esempio di elaborazione dei dati.

Resta ben inteso che non tutte le informazioni date durante le lezioni frontali possono essere raccolte in dispense di questo tipo, pertanto allo studente si raccomanda la frequenza dei corsi introduttivi in aula.

Settembre 2012

Massimo Sorbi

¹ E. Acerbi, "Metodi e Strumenti di Misura", Città Studi Editore, 1994

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

SPETTROMETRO A RETICOLO E SPETTROMETRO A PRISMA

1. Scopo dell'esperienza

L'esperienza completa consiste nella misura delle lunghezze d'onda di alcune righe dello spettro di una sorgente di mercurio mediante un reticolo precedentemente tarato con il doppietto del sodio e nella successiva determinazione, mediante il prisma, dell'indice di rifrazione (relativo all'aria) di un vetro in funzione delle lunghezze d'onda precedentemente misurate. Tale misura consente la verifica della legge di dispersione secondo la formula di Cauchy.

In genere l'esperienza viene effettuata in due turni successivi di laboratorio.

Entrambe le misure (con il reticolo e con il prisma) sono effettuate utilizzando uno spettrometro, la cui struttura e le cui modalità d'impiego sono descritte nell'Appendice A.

2. Misura delle lunghezze d'onda con lo spettrometro a reticolo

2.1 Richiami teorici sul reticolo piano a trasmissione

Un reticolo piano a trasmissione è costituito da una lamina su cui è ricavato un sistema di fenditure parallele ed equidistanti l'una dall'altra.

Sul reticolo la luce viene fatta incidere normalmente alla superficie e viene osservata la luce trasmessa mediante un cannocchiale con focale puntata all'infinito, in modo da raccogliere i raggi paralleli emergenti. Si osserverà pertanto uno spettro costituito di frange, determinato dal fenomeno di diffrazione (dipendente dalla larghezza delle singole fenditure) e dal fenomeno di interferenza (dipendente dalla distanza tra due fenditure successive).

E' possibile dimostrare che l'intensità luminosa delle frange, dovuta al fenomeno di interferenza, è data da:

$$I = CE_0^2 \frac{\sin^2(mz)}{\sin^2(z)} \quad (1)$$

Dove C è una costante di proporzionalità, E_0 è l'ampiezza del vettore campo elettrico dell'onda luminosa, m il numero di fenditure appartenenti al reticolo investite dalla luce e z è dato dalla seguente espressione:

$$z = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \phi \quad (2)$$

essendo d la distanza tra i centri di due fenditure successive (passo del reticolo), λ la lunghezza d'onda della radiazione monocromatica e ϕ l'angolo di osservazione (Fig. 1).

Uguagliando a zero la derivata prima rispetto a ϕ dell'espressione (1) è possibile determinare per quali valori dell'angolo di osservazione ϕ l'intensità luminosa è massima (frangia luminosa) o minima (frangia oscura). Di seguito vengono riassunti i risultati nei seguenti punti:

- i. Si hanno dei minimi di intensità quando è soddisfatta la seguente condizione:

$$\frac{d}{\lambda} \sin \phi = \frac{j}{m} \quad (3)$$

dove j è un intero qualunque diverso da zero e non divisibile per m .

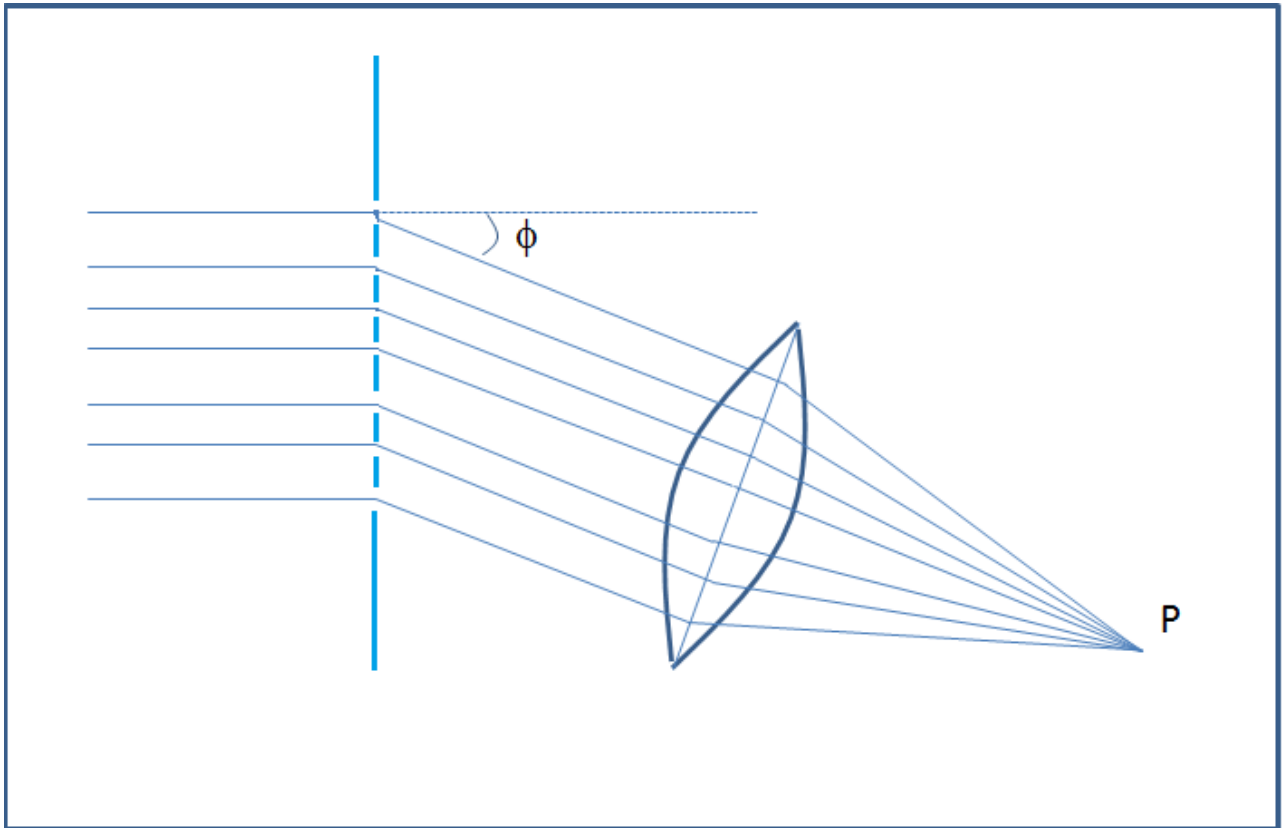


Figura 1: Reticolo a trasmissione

- ii. Si hanno dei massimi di intensità (indicati con il nome di massimi principali in quanto la loro intensità è nettamente più elevata degli altri massimi presenti nello spettro) quando è verificata la condizione:

$$\frac{d}{\lambda} \sin \phi = k \quad (4)$$

dove k è un intero ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

- iii. Si hanno dei massimi secondari quando:

$$m \tan\left(\frac{d}{\lambda} \sin \phi\right) = \tan\left(m \frac{d}{\lambda} \sin \phi\right) \quad (5)$$

La Fig. 2 mostra lo spettro ottenuto con un reticolo in cui sono praticate soltanto 10 fenditure: appare evidente come i massimi secondari siano assai meno intensi dei massimi principali. Poiché l'intensità dei massimi secondari decresce rapidamente con l'aumentare del numero di fenditure, si comprende come nei reticoli normalmente impiegati (il cui numero di fenditure è di alcune migliaia) tutta l'intensità luminosa sia concentrata nei massimi principali, cosicché questi ultimi appaiono separati da zone completamente oscure; pertanto i massimi secondari non risultano neanche osservabili.

Il reticolo è quindi un dispositivo che si presta (analogamente al prisma) per la misura delle lunghezze d'onda contenute nella luce su di esso incidente. Infatti dalla relazione (4) si vede che la posizione del massimo centrale (detto massimo di ordine zero in quanto $k = 0$) è la stessa per tutte le lunghezze d'onda mentre la posizione dei massimi successivi ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) dipende dal valore della lunghezza d'onda.

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

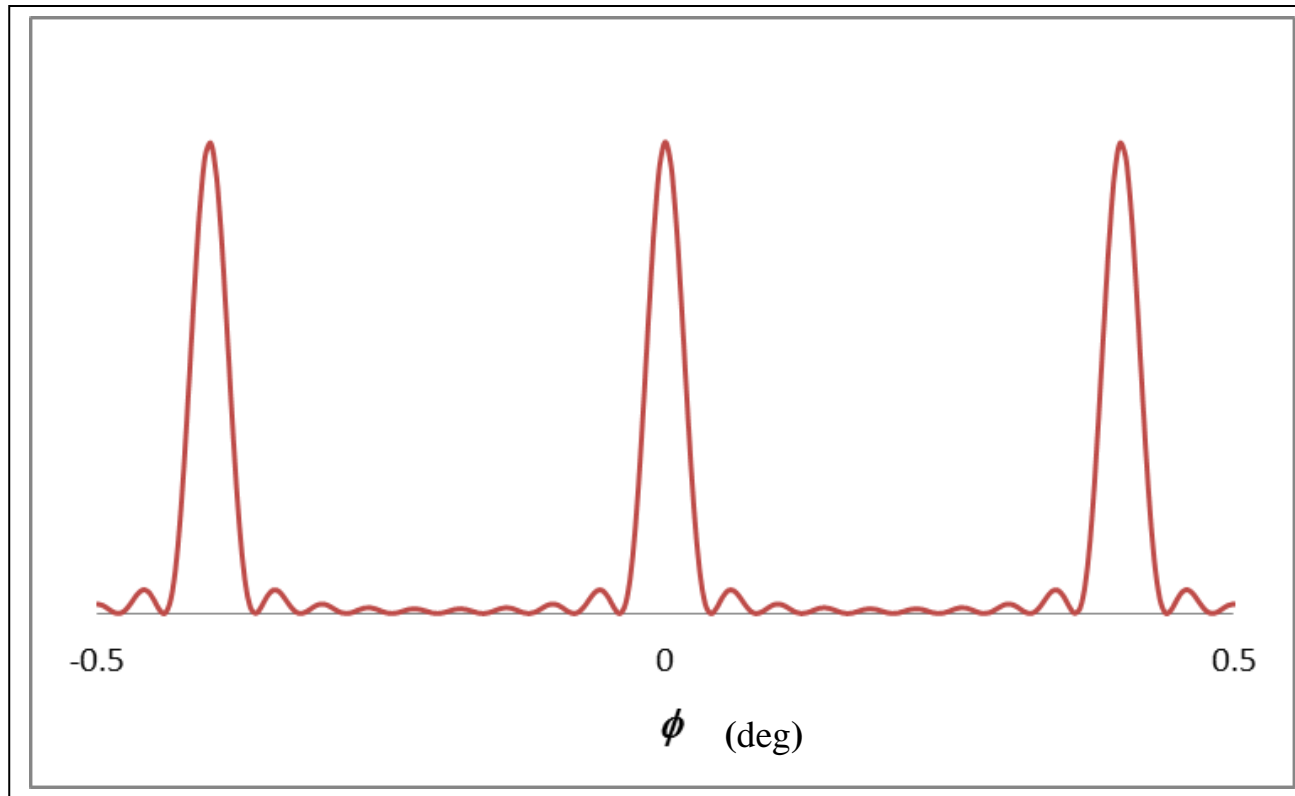


Figura 2: Spettro prodotto da un reticolo con 10 fenditure

Ponendo quindi il reticolo sulla piattaforma di uno spettrometro ed osservando la figura di interferenza fornita da una sorgente non monocromatica si osserverà un'immagine centrale che non è dispersa (ordine zero) e una successione di spettri di ordine superiore. Ciascuno spettro è costituito da righe colorate, corrispondenti alle varie lunghezze d'onda contenute nella luce in esame.

Come si può facilmente dedurre dalla relazione (4), a differenza del prisma, gli spettri del reticolo hanno il violetto rivolto verso l'immagine centrale ed il rosso dalla parte opposta. Inoltre gli spettri di un dato ordine possono parzialmente sovrapporsi con quelli di un ordine successivo: questo accade quando l'angolo corrispondente alla lunghezza d'onda maggiore presente nello spettro ad un dato ordine k risulta maggiore all'angolo corrispondente alla lunghezza d'onda minore di un ordine successivo a k . Dalla (4) si verifica che, chiamati λ_{\min} e λ_{\max} le lunghezze d'onda minore e maggiori presenti nella luce che si sta analizzando, la sovrapposizione degli spettri nei vari ordini si presenta se:

$$k \cdot \lambda_{\max} \geq (k + i) \lambda_{\min} \quad (6)$$

dove k (supposto maggiore di zero) è l'ordine preso in considerazione e $k+i$ è un ordine successivo ($i \geq 1$). Da questa relazione ne consegue immediatamente che la sovrapposizione degli spettri per ordini diversi avviene se:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} \geq \frac{k}{i} \quad (7)$$

Se si lavora nel visibile ($\lambda_{min} \approx 360 \text{ nm}$ e $\lambda_{max} \approx 700 \text{ nm}$) la condizione (7) può presentarsi già a partire dal secondo ordine ($k \geq 2, i = 1$).

Sempre dalla relazione fondamentale (4) è possibile ricavare il potere dispersivo D definito come:

$$D = \frac{\Delta\phi}{\Delta\lambda} \quad (8)$$

Tale grandezza è un parametro importante nel caratterizzare le prestazioni di strumenti per studi spettrali, poiché permette trovare facilmente di quale angolo $\Delta\phi$ appaiano separate due lunghezze d'onda che differiscano di $\Delta\lambda$. Uno strumento con basso potere dispersivo concentra tutto lo spettro in esame su un intervallo angolare molto ristretto e quindi non consente misure molto precise.

Il valore del potere dispersivo per il reticolo, ottenuto per differenziazione della relazione (4), è dato da:

$$D = \frac{\Delta\phi}{\Delta\lambda} = \frac{k}{d \cos\phi} = \frac{k\nu}{\cos\phi} \quad (9)$$

dove $\nu = 1/d$ rappresenta il numero di fenditure per unità di lunghezza del reticolo. Dalla relazione (9) si ricava immediatamente che il potere dispersivo è direttamente proporzionale alla frequenza ν del reticolo ed al numero d'ordine k dello spettro.

Aumentare il potere dispersivo di uno strumento consente di effettuare misure più precise, ma non necessariamente consente di vedere separate due righe spettrali che differiscano di poco nelle lunghezze d'onda. Infatti le righe di uno spettro non sono infinitamente sottili, cosicché se la loro distanza angolare scende al di sotto di un certo limite, esse appaiono all'osservatore come una sola riga. Per poterle vedere separate è necessario che la distanza angolare tra le due righe superi almeno la larghezza (angolare) di ciascuna di esse. Viene pertanto introdotto un secondo parametro importante nella caratterizzazione degli strumenti per analisi spettrali: il potere risolutivo R , dato dal rapporto:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (10)$$

dove $\Delta\lambda$ è la minima differenza di lunghezza d'onda possibile affinché due righe appaiano separate.

Nel caso del reticolo, le righe spettrali emergenti hanno di per sé una propria dimensione angolare finita per il fenomeno della diffrazione, dovuto alla dimensione delle fenditure del reticolo; quindi, come detto sopra, due righe spettrali vicine potrebbero non apparire distinguibili se le loro immagini appaiono sovrapposte. Si può però assumere che, al limite, due righe molto vicine possono essere risolte, cioè apparire separate, se il massimo di ciascuna di queste due righe va a cadere in corrispondenza del minimo più prossimo al massimo dell'altra riga. Supponendo di osservare lo spettro all'ordine k , il minimo più prossimo alla generica riga di lunghezza d'onda λ , il cui massimo principale si trova nella posizione ϕ data dalla (4), si troverà spostato della quantità $\Delta\phi$ ricavabile mediante la (3):

$$\frac{d}{\lambda} \sin(\phi + \Delta\phi) = \frac{km + 1}{m} \quad (11)$$

da cui:

$$\sin \phi \cos \Delta \phi + \cos \phi \sin \Delta \phi = \left(k + \frac{1}{m} \right) \frac{\lambda}{d} \quad (12)$$

Considerando che la quantità $\Delta \phi$ è molto piccola, l'espressione può essere sviluppata al primo ordine ($\sin \Delta \phi \approx \Delta \phi$ e $\cos \Delta \phi \approx 1$). Inoltre sostituendo la (4) nella (12) si trova:

$$\Delta \phi \cos \phi = \frac{\lambda}{md} \quad (13)$$

La minima differenza $\Delta \lambda$ che può essere risolta è allora quella corrispondente a tale apertura angolare, che può essere determinata a partire dal potere dispersivo D , espresso dalla (9):

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta \phi}{D} = \frac{\lambda}{D \cdot m \cdot d \cdot \cos \phi} = \frac{\lambda}{mk} \quad (14)$$

da cui si ricava l'espressione esplicita del potere risolutivo del reticolo:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = m \cdot k \quad (15)$$

Da questa espressione si ricava che il potere risolutivo di un reticolo risulta proporzionale al numero totale m di frange investite dal fascio di luce in esame ed al numero d'ordine k dello spettro. Per ottenere un elevato potere risolutivo si preferisce rendere assai grande il numero m di tratti piuttosto che esaminare spettri di ordine elevato (k elevato). Infatti, come si può ricavare dall'espressione (4), il reticolo non può fornire spettri di ordine superiore a $k_{\max} = d/\lambda$ ed inoltre gli spettri di ordine elevato sono sovrapposti e la loro luminosità decresce rapidamente al crescere del numero d'ordine. Per determinare il numero m di linee del reticolo investite dalla luce, è necessario misurare le dimensioni del fascio di luce parallela che investe il reticolo (dato dalla apertura del diaframma che delimita la lente del collimatore) e le dimensioni del reticolo: m sarà dunque dato dal prodotto tra il minimo di tali quantità e il numero di fenditure per unità di lunghezza ν .

Per avere un'idea degli ordini di grandezza del potere dispersivo e del potere risolutivo si consideri un reticolo con $\nu = 2000$ incisioni/cm, illuminato da luce delimitata dal diaframma di una lente con ampiezza 10 mm. Se si considera (con ottima approssimazione) $\cos \phi \approx 1$, si ottiene per lo spettro al primo ordine:

$$D = 2 \cdot 10^5 \text{ rad/m} = 1.15 \cdot 10^7 \text{ }^\circ/\text{m}$$

e quindi lo spettro della luce nel visibile (compreso tra 360 e 700 nm) risulterebbe “spalmato” su una apertura angolare pari a circa $\Delta \phi = 3.9^\circ$. Tale apertura angolare risulterebbe invece doppia al secondo ordine.

Il potere risolutivo al primo ordine risulta pari a $R = 2000$ poiché con un diaframma della lente di larghezza 10 mm verrebbero appunto investite dalla luce un numero $m = 2000$ fenditure; con tale reticolo si riuscirebbe quindi a risolvere il doppietto del sodio ($\lambda_1 = 5890 \text{ Å}$ e $\lambda_2 = 5896 \text{ Å}$) già a partire dal primo ordine.

2.2 Taratura dello spettrometro e del reticolo. Misura delle lunghezze d'onda della sorgente di Hg.

Dopo aver regolato la posizione della fenditura del collimatore per ottenere un fascio di luce parallela (operando secondo le indicazioni fornite nell'Appendice A) si illumina il reticolo con la sorgente al sodio e si verifica l'ortogonalità del reticolo rispetto al fascio su di esso incidente. Per questa verifica è sufficiente controllare che la posizione angolare di due massimi dello stesso ordine (possibilmente massimi di ordine k molto elevati) sia perfettamente simmetrica rispetto alla posizione del massimo centrale ($k = 0$). Qualora esista una differenza angolare $\Delta\alpha$ si procede ad una rotazione del reticolo (nel verso corretto) per effettuarne la correzione.

In genere è sufficiente ripetere questa operazione (misura e successiva correzione) un paio di volte per contenere l'asimmetria angolare entro qualche primo di grado. In Fig. 3 è mostrato lo schema che consente di determinare l'asimmetria angolare prodotta da un reticolo la cui normale forma un angolo β con la direzione del fascio di luce. Da questa figura si ricava che gli angoli θ_1 e θ_2 a cui si presentano i massimi di ordine k devono soddisfare alla seguenti relazioni (essendo d il passo del reticolo):

$$\begin{aligned} CB + BD &= k\lambda \quad \rightarrow \quad d \sin(\theta_1 - \beta) + d \sin \beta = k\lambda \\ C'A - BD &= k\lambda \quad \rightarrow \quad d \sin(\theta_2 + \beta) - d \sin \beta = k\lambda \end{aligned} \quad (16)$$

da cui si ricava:

$$\sin(\theta_2 + \beta) - \sin(\theta_1 - \beta) = 2 \sin \beta \quad (17)$$

Applicando la seconda formula di prostaferesi, con semplici conti si ottiene:

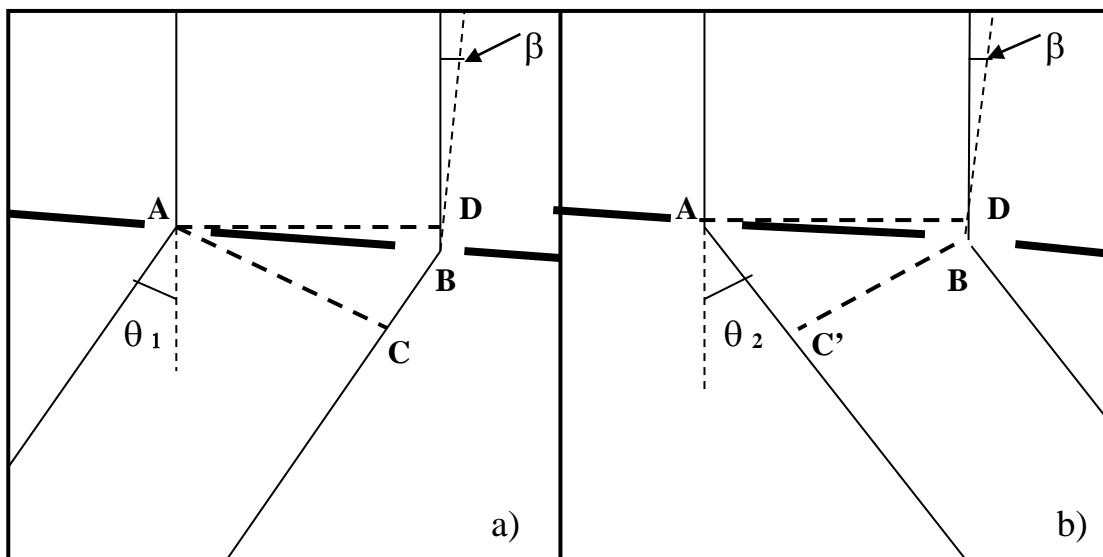


Figura 3: Schema per il calcolo della asimmetria angolare dei massimi

$$\tan(\beta) = \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)} \quad (18)$$

Considerando che $\beta \ll 1$ e $\theta_1 \approx \theta_2$ l'eq. (18) può essere sviluppata con buona approssimazione al primo ordine, permettendo di esprimere β in funzione della differenza angolare $\Delta\alpha = \theta_2 - \theta_1$ e di $\theta_{av} = (\theta_2 + \theta_1)/2$:

$$\beta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\theta_{av})}{1 - \cos(\theta_{av})} \right] \quad (19)$$

Si noti che il termine tra parentesi quadra nella (19) può assumere valori ben superiori all'unità, soprattutto a bassi valori di θ_{av} , quindi non può essere trascurato nel calcolo della correzione da effettuare. Ruotando pertanto il reticolo della quantità indicata dall'eq. (19) si corregge in modo efficace la non ortogonalità. L'eq. (19) dà anche indicazione del verso in cui deve essere ruotato il reticolo: il senso di rotazione della correzione deve andare nel verso che va dall'angolo risultato minore a quello risultato maggiore.

Una volta che il reticolo sia stato reso ortogonale (entro qualche primo di grado) al fascio di luce della sorgente di Na, si procede alla misura delle posizioni angolari dei massimi di ordine k ($k = 1 \div 5$), allo scopo di determinare il passo del reticolo mediante la relazione fondamentale:

$$d \sin \theta_k = k \lambda \quad (20)$$

sapendo che le lunghezze d'onda del doppietto del sodio sono rispettivamente:

$$\lambda_1 = 5890 \text{ \AA} \quad \lambda_2 = 5896 \text{ \AA} \quad (21)$$

Effettuata la taratura del reticolo si cambia la sorgente al Na con la sorgente al Hg e si misurano le posizioni angolari dei massimi del primo ordine (spettro di righe senza alcuna sovrapposizione da parte delle righe dello spettro del secondo ordine) e lo spettro del secondo ordine (spettro in cui si sovrappongono alcune righe dello spettro del terzo ordine).

Allo scopo di facilitare il compito dello studente in Tabella I sono riportate le lunghezze d'onda (nell'intervallo $4000 \text{ \AA} < \lambda < 7500 \text{ \AA}$) e le intensità relative delle principali righe del mercurio.

Tabella I
Lunghezze d'onda ed intensità relative delle righe del mercurio

λ (Å)	Intensità relativa	λ (Å)	Intensità relativa	λ (Å)	Intensità relativa
4046.6	1800	5354.1	60	5790.7	280
4077.8	150	5384.6	30	5803.8	140
4108.0	40	5460.7	1100	5859.3	60
4339.2	250	5549.6	30	6716.4	160
4347.5	400	5675.9	160	6907.5	250
4358.3	4000	5769.6	240	7081.9	250
4916.1	80	5789.7	100	7091.9	200

Nella analisi finale dei dati può essere determinato il potere dispersivo D e il potere risolutivo R del reticolo impiegato, utilizzando le relazioni (9) e (15). Si suggerisce poi allo studente di confrontare il valore misurato dell'intervallo di ampiezza angolare in cui appaiono le righe emesse dal mercurio, con il valore calcolato utilizzando il potere dispersivo D . Infine, valutando il diametro della lente del collimatore (o le dimensioni del reticolo, se queste sono minori), si può giustificare l'apparire separate o meno delle righe del doppietto del sodio ai vari ordini, verificando se quanto si è osservato sperimentalmente sia congruo al valore del potere risolutivo R del reticolo. Volendo lo studente potrà verificare di sua iniziativa che se vengono ridotte il numero di linee della fenditura

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

investite dalla luce proveniente dalla lente del collimatore (ad esempio oscurando con della carta opaca parte del reticolo, in maniera via via crescente), le righe del sodio non appariranno più separate agli ordini di spettro k bassi. Nel fare queste osservazioni si noterà ovviamente che l'intensità delle righe diminuirà in modo consistente a causa della parziale otturazione della luce proveniente dalla lente del collimatore.

2.3 Procedura sperimentale

Le uniche note di procedura sperimentale riguardano i seguenti punti:

- 1) Predisporre l'apertura della fenditura del collimatore in maniera che l'immagine fornita dal cannocchiale appaia con una larghezza di circa 0.5 – 0.6 mm. In questo modo non si riduce troppo l'intensità dei massimi di ordine elevato ed inoltre si commette un errore relativamente piccolo nel centrare l'immagine con il reticolo del cannocchiale. Dimensioni maggiori della fenditura produrrebbero, tra l'altro, immagine sfocate delle righe, poiché una parte consistente della fenditura non si troverebbe nel fuoco della lente del collimatore.
- 2) Mettere ben a fuoco la visione della fenditura del collimatore ed il reticolo-mirino del cannocchiale.
- 3) Effettuare diverse misure (almeno una decina) della posizione del massimo centrale ($k = 0$), leggendo la posizione angolare mediante i due nonii contrapposti.
- 4) Utilizzare il sistema di viti micrometriche per centrare i massimi, avendo cura di raggiungere la centratura ruotando il cannocchiale sempre nello stesso verso per evitare errori sistematici dovuti ai giochi meccanici.
- 5) Se l'asimmetria angolare finale causata da una non perfetta ortogonalità del reticolo rispetto alla direzione del fascio dovesse risultare superiore a 5' è consigliabile effettuare la misura della posizione angolare dei massimi da entrambi i lati rispetto al massimo centrale ($k = 0$).

2.4 Valutazione finali e calcoli degli errori

Nella determinazione del passo d del reticolo e delle lunghezze d'onda λ dello spettro delle luce a vapori di Hg, dovranno essere indicate anche le incertezze nelle valutazioni finali delle grandezze. Di seguito vengono esposte le tracce per una loro stima, lasciando all'iniziativa dello studente la semplice dimostrazione delle relazioni presentate. Poiché il numero delle misure effettuate per ciascuna grandezza incognita è assai limitato, non ha senso fare una valutazione statistica degli errori (considerando per esempio deviazione standard o deviazione standard della media), ma piuttosto le incertezze devono essere valutate considerando la propagazione degli errori sulle relazioni utilizzate.

L'errore σ_d sulla singola misura di passo del reticolo può essere calcolato a partire dalla (4), assumendo che le due lunghezze d'onda λ del doppietto del Na "tabulate" abbiano errore trascurabile (rispetto agli errori dovuti alle incertezze angolari ϕ) e che il numero intero k sia privo di incertezza. Si ricava così:

$$\sigma_d = \frac{d}{\tan \phi} \cdot \sigma_\phi \quad (22)$$

dove d è il passo del reticolo ricavato da ogni singola misura mediante la (4) e σ_ϕ l'incertezza sulla misura angolare ϕ . Si noti che l'incertezza σ_d non è costante (a parità di incertezza angolare σ_ϕ), ma diminuisce all'aumentare di ϕ . Per questo motivo è preferibile effettuare le misure all'ordine k più elevato tra quelli visibili. Qualora invece si abbiano fatto misure per più di un valore di k , nella valutazione finale di d sarà opportuno effettuare una media pesata delle singole misure relative agli

ordini diversi, dove i pesi di ciascuna misura sono dati dalla (22). In tal caso anche nel calcolo dell'incertezza finale σ_d' si dovrà ovviamente tener conto che gli errori σ_d non sono tutti uguali.

L'errore delle lunghezze d'onda incognite dello spettro del Hg lo si ottiene assumendo che siano soggetti ad errore sia il passo del reticolo d (calcolato precedentemente) che l'ampiezza angolare ϕ . Tuttavia una stessa lunghezza d'onda λ può essere misurata per diversi ordini k , quindi conviene prima valutare le incertezze causate dall'errore sull'angolo ϕ e solo alla fine sommare l'errore causato dall'incertezza su d , poiché quest'ultimo è lo stesso in tutte le misure.

L'errore σ_λ per ogni singola misura dovuto alla sola incertezza sull'angolo ϕ , calcolato dalla (4), è dato da:

$$\sigma_\lambda = \frac{\lambda}{\tan \phi} \sigma_\phi \quad (23)$$

Anche in questo caso si può osservare che l'incertezza σ_λ dipende fortemente dall'ampiezza angolare ϕ , e per questo motivo se si sono effettuate più misure di una stessa lunghezza incognita λ con ordini k diversi, la migliore stima $\bar{\lambda}$ sarà data dalla media pesata delle singole misure, i cui pesi sono rappresentati dalla (23); l'errore finale σ_λ associato alla migliore stima $\bar{\lambda}$ in relazione a tutte le misure effettuate dovrà essere calcolato pesando opportunamente gli errori di ciascuna singola misura mediante la (23).

L'errore sulla lunghezza d'onda λ a causa dell'incertezza σ_d' sul passo del reticolo (precedentemente calcolato) può essere quindi sommato in quadratura con l'errore σ_λ' dovuto all'incertezza sull'ampiezza angolare ϕ , poiché si assume che essi siano tra loro non correlati. L'incertezza finale σ_λ'' sulla lunghezza d'onda è quindi data da:

$$\sigma_\lambda'' = \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{d} \sigma_d'\right)^2 + (\sigma_\lambda')^2} \quad (24)$$

dove σ_d' rappresenta l'incertezza finale sul passo d del reticolo, $\bar{\lambda}$ la media pesata delle lunghezze d'onda calcolate per i diversi ordini k e σ_λ' l'incertezza dovuta alle misure angolari ϕ opportunamente pesate per i diversi valori di k .

Un'osservazione va fatta sulla valutazione dell'incertezza σ_ϕ delle singole misure ϕ , da utilizzare nelle (22) e (23); tale incertezza è causata da due termini: un primo termine è dovuto all'errore introdotto dallo strumento, legato per esempio alla risoluzione angolare con cui si riescono ad effettuare le misure. Poiché ogni singola misura ha una risoluzione angolare di circa 1' di arco, l'errore sulla misura angolare sarà data da circa il doppio di tale valore (poiché l'angolo ϕ risulta dato dalla differenza di due valori letti). L'altra fonte di errore può essere ritrovata a causa della non perfetta ortogonalità del reticolo rispetto alla direzione della luce, cioè per il piccolo angolo β residuo dato dalla (19). Assumendo che gli scostamenti angolari causati dal β residuo per misure effettuate a destra e a sinistra rispetto al massimo centrale ($k=0$) siano uguali in modulo ma opposti in segno (come è dimostrabile essere vero in uno sviluppo al primo ordine rispetto a β), invertendo la (19) si ottiene che l'errore angolare $\sigma_{ort.}$ causato dall'angolo β è dato da:

$$\sigma_{ort.} = \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right| = \left| \beta \cdot \frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi} \right| \quad (25)$$

Purtroppo anche tale valore dipende fortemente da ϕ , e non può essere assunto costante per tutte le misure angolari ϕ . L'incertezza angolare complessiva σ_ϕ di ogni singola misura è data quindi dalla

somma in quadratura della (25) e dell'errore causato dalla risoluzione dello strumento (tipicamente $2'$ d'arco). Qualora le misure angolari considerate per un dato ordine k vengano invece calcolate come media tra le due misure angolari a destra e a sinistra rispetto al massimo di ordine zero, l'errore introdotto dall'angolo β sarà molto minore, e quindi risulterà sovrastimato dalla (25): una sua valutazione più accurata richiederebbe uno sviluppo al secondo ordine rispetto a β .

3. Misura dell'indice di rifrazione di un vetro con lo spettrometro a prisma

Il metodo più comune per misurare l'indice di rifrazione di una sostanza solida consiste nel dare a questa la forma di prisma, nel misurare l'angolo α del diedro e l'angolo di deviazione del raggio luminoso. Tale metodo può essere esteso anche ai liquidi, utilizzando un prisma cavo le cui pareti siano costituite da facce piane parallele.

La misura dell'indice di rifrazione del vetro con il quale è stato realizzato il prisma si effettua con il metodo della deviazione minima. Prima di descrivere la procedura di misura, conviene richiamare le proprietà di rifrazione di un prisma.

3.1 Rifrazione del prisma in condizione di deviazione minima

In Fig. 4 è mostrata la sezione normale del prisma ed il cammino compiuto da un raggio di luce. Indicato con i l'angolo di incidenza, con i' l'angolo di emergenza e con δ l'angolo di deviazione del raggio, dalla figura si ricavano con semplici considerazioni di geometria le seguenti relazioni:

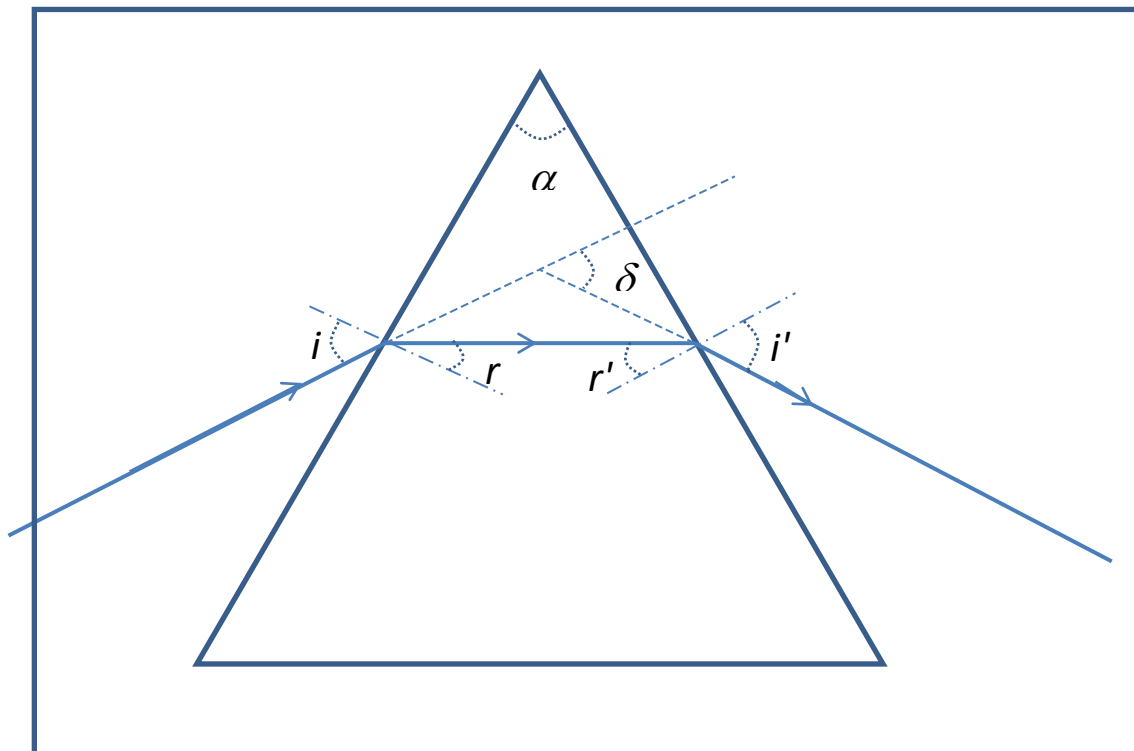


Figura 4: Sezione del prisma e percorso del raggio di luce

$$r + r' = \alpha \quad (22)$$

$$\delta = i + i' - \alpha \quad (23)$$

essendo α l'angolo del prisma, r ed r' rispettivamente l'angolo di rifrazione sulla faccia di entrata del prisma e l'angolo di incidenza sulla seconda faccia del prisma.

A queste relazioni si aggiungono quelle relative al processo di rifrazione (in entrata ed in uscita dal prisma):

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (24)$$

$$\frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{n} \quad (25)$$

Dalle relazioni (22-25) si può ricavare la dipendenza dell'angolo δ in funzione dell'angolo di incidenza i e mostrare che la funzione $\delta(i)$ presenta un minimo.

Questa procedura risulterebbe alquanto laboriosa nei conti, pertanto ci si limiterà a dimostrare che in condizione di deviazione minima (cioè quando l'angolo δ assume il minimo valore) deve essere $i = i'$ ed a ricavare per tale condizione i valori assunti da δ ($\delta = \delta_m$) e da i ($i = i_m$).

In condizione di minimo della funzione $\delta = \delta(i)$ deve essere nulla la derivata di δ rispetto a i , pertanto dalla relazione (23) si ottiene:

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \quad (26)$$

da cui si ricava:

$$\frac{di'}{di} = -1 \quad (27)$$

Per ottenere in forma esplicita l'espressione di di'/di si possono differenziare le altre tre relazioni del prisma (22, 24, 25). Si ottiene pertanto:

$$dr + dr' = 0 \quad (28)$$

$$\cos r \cdot dr = \frac{1}{n} \cos i \cdot di \quad (29)$$

$$\cos i' \cdot di' = n \cos r' \cdot dr' \quad (30)$$

Moltiplicando membro a membro le espressioni (29) e (30) e tenendo conto della relazione (28) si ricava:

$$\frac{di'}{di} = - \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos r \cdot \cos i'} \quad (31)$$

Dalle relazioni (31) e (27) si ricava che la deviazione minima ha luogo quando è soddisfatta la condizione:

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos r \cdot \cos i' \quad (32)$$

Esprimendo i termini che compaiono nella relazione (32) in funzione di $\sin i$ e di $\sin i'$ mediante le seguenti relazioni:

$$\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} \quad \cos i' = \sqrt{1 - \sin^2 i'} \quad (33)$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i} \quad \cos r' = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i'} \quad (34)$$

ed eseguendo le necessarie operazioni per eliminare i radicali, si ottiene il seguente risultato:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 i = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 i' \quad (35)$$

Essendo $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \neq 0$ ed i ed i' angoli acuti, risulta che la derivata $d\delta/di$ si annulla quando:

$$i = i' \quad (36)$$

e da tale condizione discende che deve essere:

$$r = r' \quad (37)$$

cioè il raggio di luce si muove parallelamente alla base del prisma (se la sezione del prisma è rappresentata da un triangolo isoscele)². Esaminando il segno della derivata seconda $d^2\delta/di^2$ si determina che si tratta effettivamente di un minimo; il conto è un po' laborioso anche se diretto, e viene riportato di seguito per completezza. Facendo uso della (26) e della (31) si trova:

$$\frac{d^2\delta}{di^2} = \frac{d^2i'}{di^2} = \frac{\left(\sin i \cos r' + \cos i \sin r' \frac{dr'}{di}\right) \cos r \cos i' - \left(\sin r \cos i' \frac{dr}{di} + \cos r \sin i' \frac{di'}{di}\right) \cos i \cos r'}{\cos^2 r \cos^2 i'} \quad (38)$$

Ricordando la (27), (29) e (30) si può scrivere:

$$\frac{dr'}{di} = \frac{dr'}{di'} \cdot \frac{di'}{di} = -\frac{1}{n} \frac{\cos i'}{\cos r'} \quad (39)$$

² Il fatto che la condizione di deviazione minima corrisponda alla situazione indicata dalle (36-37), può essere in parte dedotto anche utilizzando considerazioni geometriche più qualitative: infatti il cammino ottico percorso dalla luce rimane lo stesso anche se ne viene invertito il verso di percorrenza; pertanto, sfruttando anche la simmetria del prisma rispetto all'asse verticale come indicato in Fig. 4, la condizione di deviazione minima, se esiste, dovrà essere la stessa sia per il raggio di luce con verso di percorrenza da sinistra verso destra che da destra verso sinistra. Da cui appare evidente che $i_m = i'_m$ e $r_m = r'_m$. Non è però altrettanto immediato e semplice dimostrare per via geometrica che a tale situazione di simmetria corrisponda proprio il valore minimo dell'angolo δ .

$$\frac{dr}{di} = \frac{1 \cos i}{n \cos r} \quad (40)$$

Sostituendo quindi la (27), (39) e (40) nella (38), considerando che nella situazione di interesse risultano valide anche le (36) e (37) e utilizzando la legge di Snell espressa dalla (24), si trova:

$$\frac{d^2 \delta}{di^2} = \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{2 \sin r}{\cos^2 r \cdot \cos i} \quad (41)$$

che risulta maggiore di zero essendo $n > 1$ e gli angoli r e i appartenenti al primo quadrante cartesiano.

Dalle relazioni (22-24), tenuto conto della relazione (37), si ricavano le espressioni per r_m , δ_m ed i_m :

$$\delta_m = 2i_m - \alpha \quad (42)$$

$$r_m = \frac{\alpha}{2} \quad (43)$$

$$\sin i_m = n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (44)$$

L'indice di rifrazione risulta dato, nel caso di minima deviazione, dalla seguente espressione:

$$n(\lambda) = \frac{\sin i_m}{\sin r_m} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (45)$$

La misura dell'indice di rifrazione in condizioni di deviazione minima richiede quindi la misura degli angoli α del prisma e successivamente una serie di misure degli angoli di minima deviazione δ_m per le varie lunghezze d'onda della luce prodotta dalla lampada di Hg. Di norma si utilizza un tubo di Plucker con vapori di Hg in quanto questo elemento presenta righe intense, ben separate ed equamente distribuite su tutto lo spettro visibile. Anche nel caso dello spettroscopio a prisma conviene lavorare nella condizione di raggi paralleli, ponendo la fenditura-sorgente nel piano focale della lente collimatrice e utilizzando come oculare un cannocchiale con focale all'infinito (si veda prossimo paragrafo per la sequenza di preparazione).

3.2 Misura dell'angolo α del prisma

Per questa misura si può utilizzare una lampada qualsiasi (ad esempio una lampada ad incandescenza oppure la stessa lampada con i vapori di Hg) in quanto si sfrutta soltanto il processo di riflessione che non provoca alcuna dispersione delle componenti cromatiche del fascio.

Dopo aver regolato la posizione della fenditura del collimatore in maniera da avere un fascio di luce parallela (si veda Appendice A) si fissa il prisma sulla piattaforma e si ruota il cannocchiale sino a che esso formi con il collimatore un angolo acuto (Fig. 5a).

Fissato il cannocchiale in questa posizione si ruota la piattaforma che sostiene il prisma sino a vedere nel campo dell'oculare l'immagine della fenditura riflessa dalla faccia del prisma. Dopo aver

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

fissato la piattaforma con l'apposita vite di bloccaggio, si collima la fenditura con il reticolo, agendo sulla vite micrometrica per gli spostamenti fini della piattaforma stessa. Si esegue la lettura dell'angolo θ_1 sui due nonii contrapposti. Si ruota ora la piattaforma sino a sostituire la seconda faccia del prisma (ca in Fig. 5b) con la prima (ab in Fig. 5a), mantenendo fissi il collimatore ed il cannocchiale. L'angolo di tale rotazione è dato ovviamente da:

$$\Delta \theta = 180^\circ - \alpha \quad (46)$$

La misura della nuova posizione angolare θ_2 , ottenuta collimando con il cannocchiale il fascio riflesso dalla seconda faccia del prisma, permette di misurare l'angolo $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ e quindi di ricavare il valore di α .

La sequenza delle operazioni precedentemente descritte è illustrata nello schema di Fig. 5.

3.2 Misura dell'angolo di deviazione minima

Si pone davanti alla fenditura del collimatore la lampada di Hg, della quale è stato misurato lo spettro delle righe principali. Per misurare l'angolo di deviazione minima δ_m si cerca di far entrare nel campo dell'oculare l'immagine della fenditura (corrispondente ad una determinata riga dello spettro) rifratta dal prisma. In genere conviene ricercare dapprima ad occhio nudo (cioè senza l'ausilio del cannocchiale) la direzione del fascio rifratto emergente dal prisma. Qualora non si riesca a trovare il fascio rifratto è necessario ruotare il prisma sino a quando non appare lo spettro colorato della luce in esame. Individuata la direzione di emergenza si può posizionare il cannocchiale nella direzione del fascio rifratto osservata ad occhio nudo.

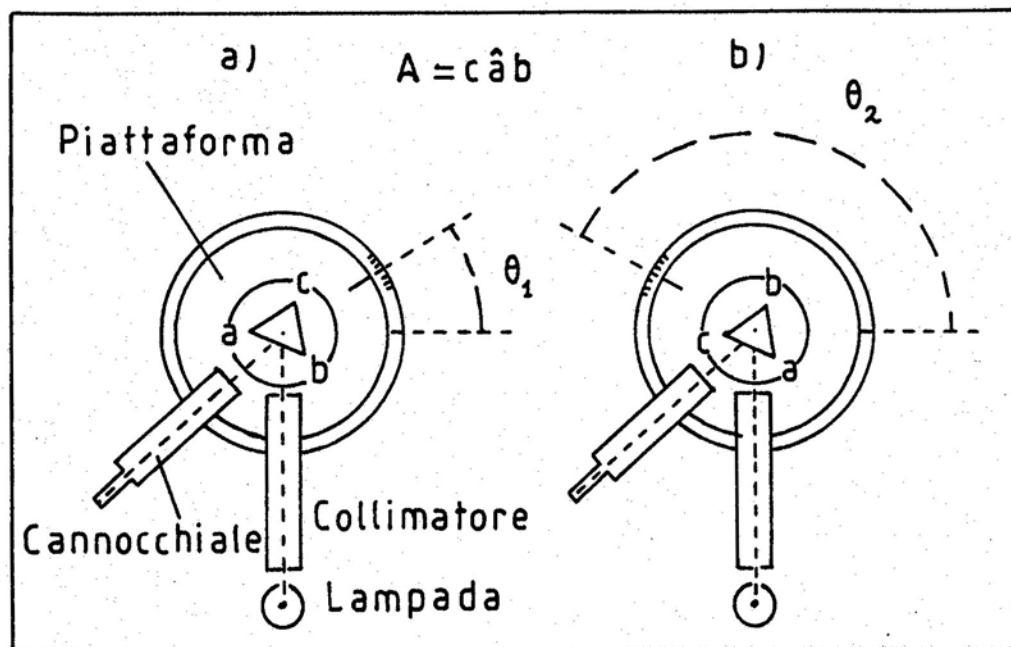


Figura 5: Schema illustrativo per la misura dell'angolo $\alpha = cab$ del prisma.

Ottenuto ciò si ruota la piattaforma con il prisma sempre nello stesso verso e si insegue con il cannocchiale l'immagine rifratta. Nella posizione in cui l'immagine inverte il senso del moto (corrispondente alla situazione di deviazione minima del prisma) si blocca la piattaforma e si fa una ricerca fine del punto di inversione del moto dell'immagine mediante l'apposita vite micrometrica.

Infine si blocca anche il cannocchiale e si collima l'immagine della fenditura agendo sulla vite di regolazione fine. Sul goniometro si legge la posizione angolare $\delta_1(\lambda)$ del cannocchiale corrispondente alla lunghezza d'onda in esame (come di consueto la lettura viene effettuata sui due nonii contrapposti ed il valore di $\delta_1(\lambda)$ è ottenuto come media delle due letture).

L'angolo di deviazione minima per ciascuna delle righe in esame è dato da:

$$\delta_m(\lambda) = \delta_1(\lambda) - \delta_0 \quad (47)$$

dove δ_0 rappresenta la posizione angolare del cannocchiale nella direzione da cui proviene l'immagine diretta della fenditura. Qualora lo spettrometro sia dotato di una scala graduata fissa e due coppie di noni separati rispettivamente per la piattaforma e per il cannocchiale, è sufficiente misurare una sola volta l'angolo δ_0 , ruotando il cannocchiale sino a collimare l'immagine diretta della fenditura. Qualora invece lo spettrometro abbia la scala graduata mobile e rigidamente collegata alla piattaforma, effettuata ogni singola misura di $\delta_1(\lambda)$, si deve bloccare la piattaforma e, estratto il prisma, si deve misurare la corrispondente posizione angolare δ_0 (poiché la posizione angolare della scala graduata varia per ogni lunghezza d'onda).

La misura dell'angolo di deviazione minima $\delta_m(\lambda)$ deve essere eseguita per tutte le righe prescelte nello spettro (almeno 5 o 6 righe distribuite nell'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra 7000 Å e 4000 Å).

Mediante la relazione (45) si ricavano i valori di $n(\lambda)$ e successivamente con il metodo dei minimi quadrati si determinano i valori di a e b della legge di dispersione fornita dalla formula di Cauchy. L'andamento dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda è descritto con buona approssimazione (secondo Cauchy) da una legge del tipo:

$$n^2(\lambda) = a + b/\lambda^2 \quad (48)$$

dove a e b sono due costanti caratteristiche della sostanza in esame. La validità della relazione (48) è limitata ad un intervallo di lunghezze d'onda specifico della sostanza in esame.

Una verifica dell'andamento espresso dalla relazione (48) e la determinazione delle costanti a e b possono essere effettuate, a partire dai dati misurati, riportando in grafico la quantità n^2 in funzione di $1/\lambda^2$. Con il metodo dei minimi quadrati si determina la retta (e quindi i valori di a e di b) che meglio approssima l'andamento dei valori sperimentali.

4. Interpretazione teorica della dispersione

Una spiegazione classica del fenomeno di dispersione si ottiene introducendo il modello dell'oscillatore elettronico. Secondo questo modello nelle sostanze sono presenti dei dipoli elettrici oscillanti di tipo microscopico soggetti a forze di attrito. Per semplicità di esposizione si supporrà che nella sostanza in esame sia presente un solo tipo di questi oscillatori (cioè con una unica pulsazione propria ω_0).

In assenza di un campo elettrico esterno questi oscillatori (che posseggono un momento dipolare nullo) possono essere posti in vibrazione a causa dell'energia fornita dall'agitazione termica degli atomi o molecole della sostanza e dissipano tale energia compiendo lavoro contro le forze d'attrito e mediante l'irraggiamento (una carica elettrica in moto accelerato irraggia energia elettromagnetica con legge proporzionale al quadrato dell'accelerazione).

In presenza di un campo elettrostatico esterno gli oscillatori elettronici acquistano un momento dipolare (tale momento risulta proporzionale all'intensità del campo elettrostatico) e si orientano nella direzione del campo elettrostatico \underline{E} (risultante dalla somma del campo elettrostatico esterno \underline{E}_0 e del campo prodotto dai dipoli \underline{E}_i). Se si indicano con p il momento di dipolo ed N la densità di

dipoli presente nella sostanza si potrà scrivere per l'intensità di polarizzazione \underline{P} della sostanza (supposta omogenea ed isotropa) la seguente relazione:

$$\underline{P} = N\underline{p} = N\alpha\underline{E} = \chi\varepsilon_0\underline{E} \quad (49)$$

essendo α la costante di proporzionalità tra \underline{p} e \underline{E} , χ la suscettibilità elettrica della sostanza ed ε_0 la costante dielettrica del vuoto. Poiché, come si può dimostrare, il campo elettrostatico prodotto dai dipoli è dato da $\underline{E}_i = -\underline{P}/\varepsilon_0$, ne consegue che si potrà scrivere per il campo elettrico risultante \underline{E} la seguente relazione:

$$\underline{E} = \underline{E}_o + \underline{E}_i = \underline{E}_o - \underline{P}/\varepsilon_0 = \underline{E}_o - \chi\underline{E} \quad (50)$$

dalla quale si ricava (nell'ipotesi che \underline{P} e di conseguenza \underline{E}_i siano diretti come \underline{E}_o) la costante dielettrica relativa ε_r della sostanza:

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = \underline{E}_o/\underline{E} = 1 + \chi \quad (51)$$

In presenza di un campo elettrico oscillante esterno (forzante) gli oscillatori elettronici entrano in vibrazione ed in tempi brevissimi pervengono alla stessa pulsazione (o frequenza) della forzante ed acquistano un momento dipolare che, come si dimostrerà, risulta funzione della pulsazione della forzante. Ricordando il comportamento di un oscillatore si potrà scrivere che l'ampiezza massima di oscillazione risulta espressa da:

$$x = (k_2/m) [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad (52)$$

dove m è la massa dell'oscillatore elettronico, k_2 l'ampiezza della forzante ($k_2 = qE_o$ essendo q la carica dell'oscillatore ed E_o l'ampiezza del campo elettromagnetico), ω_o la pulsazione propria dell'oscillatore ($\omega_o = 2\pi\nu_o = (k_1/m)^{1/2}$ essendo k_1 la costante elastica di richiamo) ω la pulsazione del campo elettrico, γ il coefficiente di smorzamento ($\gamma = k_3/2m$ essendo k_3 la costante della forza di attrito viscoso).

L'oscillatore acquista un momento dipolare la cui massima ampiezza è data da:

$$p = q x = q (qE_o/m) [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad (53)$$

e la sostanza presenta quindi una intensità di polarizzazione la cui ampiezza P è data da:

$$P = N(q^2E_o/m) [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad (54)$$

cui corrisponde, per le considerazioni fatte poco sopra, una costante dielettrica relativa data da:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + N(q^2/\varepsilon_0 m) [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad (55)$$

La sostanza presenta quindi un indice di rifrazione n che è dato da:

$$n^2 = (c/v)^2 = [\varepsilon\mu/(\varepsilon_o\mu_o)] = (\varepsilon_r\mu_r) = (\varepsilon_r) = 1 + N(q^2/\varepsilon_o m) [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \quad (56)$$

avendo posto $\mu_r = 1$ nell'ipotesi che la sostanza non sia ferromagnetica.

Prima di analizzare questo risultato conviene stabilire con maggiore dettaglio il modello dell'oscillatore elettronico per poter valutare le varie grandezze (q, m, k_1, γ, N) che concorrono a determinare i termini caratteristici di ogni sostanza, cioè $\omega_0 = (k_1/m)^{1/2}$ ed $S = Nq^2/\epsilon_0 m$.

Si assume, per semplicità di analisi, che la carica oscillante, quando essa è a riposo, si trovi al centro di una distribuzione sferica di cariche di segno opposto con densità di carica costante $\delta = 3q/(4\pi R^3)$. Quando la carica si sposta ad una distanza r dal centro (e supponendo che la distribuzione di carica sferica non si deformi) essa viene sottoposta ad una forza di richiamo $F = - (1/4\pi\epsilon_0) q^2 r/R^3$. Pertanto la costante elastica k_1 e la pulsazione propria dell'oscillatore sono date rispettivamente da:

$$k_1 = q^2/(4\pi\epsilon_0 R^3) \qquad \omega_0 = q/(4\pi\epsilon_0 m R^3)^{1/2} \qquad (57)$$

Se si assume che il sistema dell'oscillatore abbia le dimensioni di un atomo o di una molecola ($R \approx 0.5 \div 1.5 \text{ \AA}$) e che la carica sia costituita da un elettrone (con massa $m = m_e = 9.108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) oppure da una carica con massa molecolare (cioè con massa $m \geq m_p$, essendo $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ la massa del protone) la pulsazione propria dell'oscillatore assume rispettivamente i seguenti valori:

$$\omega_0 (\text{elett.}) = 1.591 \cdot 10^{16} / R^{3/2} \text{ (rad/s)} \quad \omega_0 (\text{molec.}) \leq 3.713 \cdot 10^{14} / R^{3/2} \text{ (rad/s)} \quad \text{con } R \text{ espresso in } \text{\AA}$$

Ne consegue che la frequenza propria dell'oscillatore elettronico cade nell'ultravioletto mentre la frequenza propria di un oscillatore di tipo molecolare cade nell'infrarosso, essendo la pulsazione della luce visibile compresa nell'intervallo $2.36 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} \approx \omega_{\min} < \omega < \omega_{\max} \approx 4.72 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$.

Il coefficiente γ può variare da valori prossimi a 0 (nei gas rarefatti) ad un valore massimo (nelle sostanze più dense). Il valore massimo di γ , affinché continuino ad esistere oscillazioni smorzate, è determinato dalla condizione di smorzamento critico:

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = 0 \qquad (58)$$

pertanto γ può essere espresso come:

$$\gamma = \alpha \omega_0 \qquad (59)$$

dove α è un fattore che varia nell'intervallo $0 < \alpha < 1$ in funzione della densità della sostanza attraversata dalla luce.

Dai valori sperimentali di n si può mediante l'espressione (56) ricavare una valutazione di N . Ad esempio assumendo per l'aria il valore sperimentale $n = 1.00027$, ponendo $\omega_0 = 1.3 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ e trascurando il termine dovuto alle forze di attrito si ottiene per N il valore $2.7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ che corrisponde grosso modo alla densità numerica delle particelle presenti nell'atmosfera. Analoghi risultati si ottengono con le sostanze liquide e solide. Pertanto si può ritenere che N assuma valori confrontabili con la densità numerica degli atomi o delle molecole costituenti la sostanza.

Una analisi della relazione (56) e le valutazioni sui possibili valori di ω_0 consentono di trarre immediatamente anche le seguenti conclusioni:

a) L'indice di rifrazione risulta una funzione di λ^2 (essendo $\omega = 2\pi c/\lambda$) e può essere espresso sotto forma di una legge del tipo $n^2 = a + b/\lambda^2$ (legge approssimata di Cauchy) nel campo del visibile.

b) L'indice di rifrazione presenta una curva di risonanza (più o meno pronunciata in dipendenza del coefficiente di smorzamento) quando $\omega \rightarrow \omega_0$. Questo significa che l'oscillatore compie oscillazioni di grande ampiezza sottraendo energia all'onda incidente in maniera proporzionale al quadrato di tale ampiezza ($\Delta T \propto A^2$). L'oscillatore in parte irraggia tale energia (che viene assorbita dagli oscillatori circostanti) ed in parte la dissipa sotto forma di energia termica, con la conseguenza che le componenti della radiazione con frequenza prossima a ω_0 sono fortemente assorbite dalla sostanza in esame.

c) Dall'analisi dell'espressione (56) si ricava che possono presentare 3 casi distinti per la radiazione visibile:

i) $\omega_0 > \omega_{\max} = 4.72 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ (luce violetta)

In questo caso l'indice di rifrazione cresce con la pulsazione ω della componente della radiazione incidente (diminuisce con la lunghezza d'onda λ) e pertanto la luce violetta viene maggiormente deviata dal prisma rispetto alla luce rossa (dispersione normale). Questa situazione si presenta nella maggior parte delle sostanze trasparenti (aria, acqua, vetro, quarzo, etc) ed in base a quanto sopra esposto gli oscillatori responsabili della dispersione devono essere di tipo elettronico. In Fig. 6 è riportato l'andamento di n in funzione di ω per l'acqua.

ii) $\omega_{\min} = 2.36 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} < \omega_0 < \omega_{\max} = 4.72 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$

In questo caso la porzione di spettro con $\omega < \omega_0$ subisce la dispersione normale mentre quella porzione di spettro con $\omega > \omega_0$ subisce la dispersione anomala (in quanto la luce violetta viene deviata meno dal prisma rispetto alla radiazione con pulsazione ω minore). Questo caso si presenta con alcune sostanze come la fucsina (colorante artificiale della serie del trifenilmetano noto anche con il nome di rosso magenta). La porzione di spettro centrata su ω_0 viene fortemente assorbita come esposto nel punto b) (Fig. 7)

iii) $\omega_0 < \omega_{\min} = 2.36 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ (luce rossa)

Per le sostanze note questa situazione non si presenta nel campo dei valori di pulsazione considerati (campo del visibile).

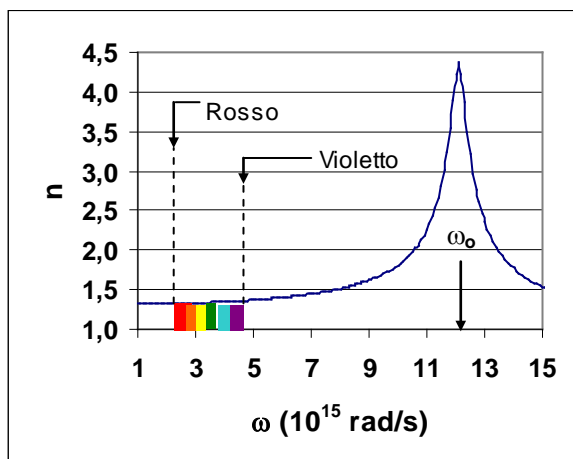


Figura 6: Andamento dell'indice di rifrazione dell'acqua (dispersione normale)

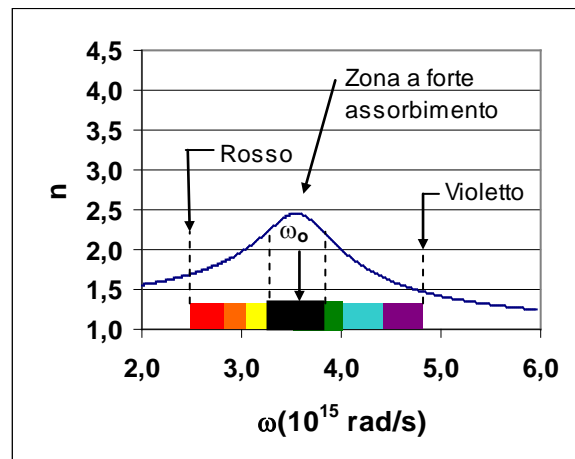


Figura 7: Andamento dell'indice di rifrazione della fucsina (dispersione anomala)

Il modello dell'oscillatore elettronico consente di interpretare anche altri fenomeni dell'Ottica Fisica (quali ad esempio l'assorbimento, la diffusione della luce, l'effetto Faraday e l'effetto Zeeman normale) tuttavia entra in crisi quando si tratta di interpretare lo spettro del corpo nero (si veda l'esperienza sui processi di irraggiamento) o l'effetto fotoelettrico.

INTERFEROMETRO DI MICHELSON

1. Scopo dell'esperienza

Con l'interferometro di Michelson si misurano le seguenti quantità:

- la lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica,
- l'indice di rifrazione dell'aria a pressione atmosferica.
- la lunghezza dei pacchetti d'onda di una luce non monocromatica,
- la separazione tra le due righe del doppietto della luce gialla del sodio,

2. Descrizione dell'apparato sperimentale

L'interferometro di Michelson, il cui schema dell'apparato è rappresentato in Fig. 1, è costituito da quattro lastre di vetro S_1 , S_2 , S_3 , e L_c . La lastra S_1 a facce piane e parallele, è semiriflettente (tale proprietà è in genere ottenuta con un sottile strato di argento depositato su una delle due facce) sulla faccia rivolta verso la lastra S_2 ; le lastre S_2 e S_3 sono completamente riflettenti sulla faccia anteriore (rivolta verso S_1), mentre L_c è perfettamente trasparente. Tutte le superfici delle lastre sono piane e lavorate otticamente mediante particolari paste abrasive in maniera che le asperità siano ridotte a poche centinaia di nm (cioè dimensioni comparabili con la lunghezza d'onda della luce visibile).

Gli specchi S_2 e S_3 devono essere tra loro perpendicolari e formare un angolo di 45° con la superficie riflettente della lastra S_1 . La messa a punto delle orientazioni reciproche degli specchi è ottenuta mediante viti di registrazione micrometrica.

Il raggio di luce (proveniente dall'alto rispetto alla Fig.1) va ad incidere sullo specchio semiriflettente S_1 , sdoppiandosi così in due raggi: il primo proseguirà il proprio percorso verso lo specchio S_2 (dopo avere attraversato la lastra L_c), verrà riflesso da S_2 e dalla faccia semi-argentata dello specchio S_1 , così da proseguire verso lo schermo (a sinistra nella figura); il secondo raggio, proveniente dalla riflessione su S_1 , proseguirà il proprio cammino verso la lastra S_3 , ne verrà riflesso ed anch'esso andrà ad incidere sullo schermo dopo aver attraversato la lastra S_1 . Sullo schermo si presenterà quindi una figura di interferenza dovuta al fatto che i due raggi sono tra loro coerenti, essendo stati ottenuti mediante scissione di uno stesso raggio luminoso.

Lo specchio S_3 è fissato ad un carrello che può essere spostato con movimenti micrometrici e senza giochi lungo la guida. Gli spostamenti del carrello sono amplificati mediante dispositivi a leva in maniera da poter essere letti con un micrometro con risoluzione del centesimo di millimetro. L'avanzamento Δx dello specchio S_3 è pari a $1/5$ dello spostamento misurato sul micrometro (come mostrato in Fig. 1 lo spostamento dello specchio S_3 è ottenuto con una leva imperniata in O e per la quale si ha $OQ = 5 OP$). Pertanto ad ogni centesimo di mm ($10 \mu\text{m}$) misurato sul micrometro corrisponde un avanzamento $\Delta x = 2 \mu\text{m}$ dello specchio S_3 . In questo modo si possono misurare gli spostamenti dello specchio con una sensibilità dell'ordine di 2000 nm (corrispondenti all'incirca a 3-5 volte la lunghezza d'onda della radiazione visibile).

La lastra L_c (detta lastra di compensazione) è costruita con lo stesso tipo di vetro della lastra S_1 e ne ha pure lo stesso spessore. Essa ha la funzione di rendere uguali i cammini ottici nel vetro compiuti dai raggi luminosi lungo i due bracci dello strumento. Infatti, in assenza della lastra di compensazione, il raggio sorgente- S_1 - S_2 - S_1 -schermo attraversa una sola volta lo spessore della lastra S_1 , mentre il raggio sorgente- S_1 - S_3 -schermo attraversa tre volte la lastra S_1 . Tuttavia, come si capirà nel prosieguo della descrizione, la presenza di tale lastra di compensazione non è essenziale alle misure (eccetto che per la misura della lunghezza dei pacchetti della luce bianca), per le quali vengono effettuate misure di tipo differenziale.

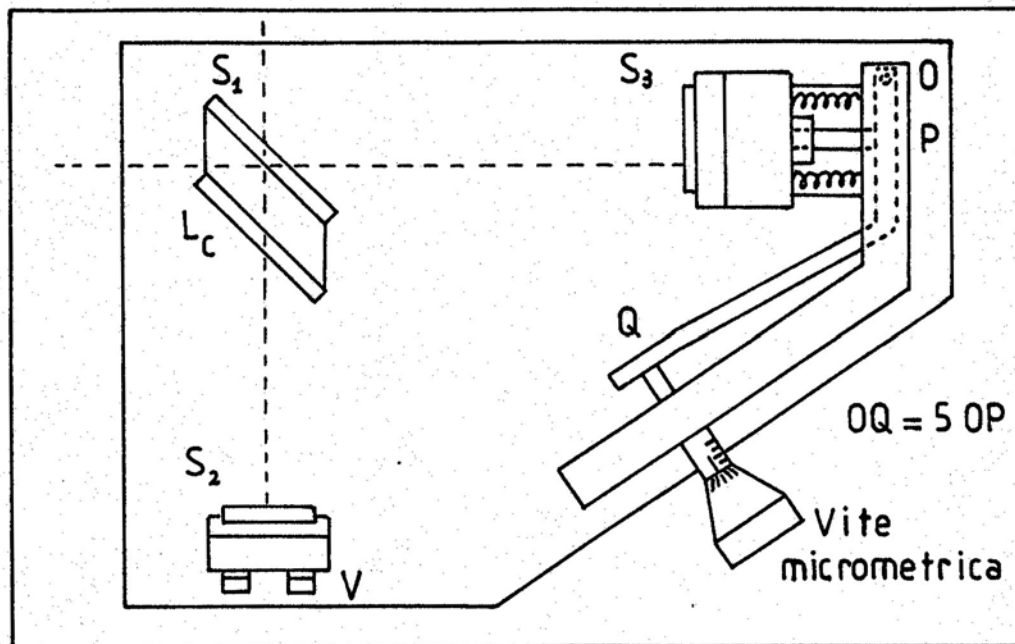


Figura 1: Schema dell'interferometro di Michelson impiegato in laboratorio.

La sorgente di luce (laser He-Ne oppure lampada ad incandescenza oppure lampada al sodio) è fissata su un banco ottico strutturalmente separato dall'interferometro di Michelson (Fig. 2) per cui è necessario aggiustarne l'orientamento allo scopo di ottenere la corretta incidenza (45°) sullo specchio semiriflettente S_1 .

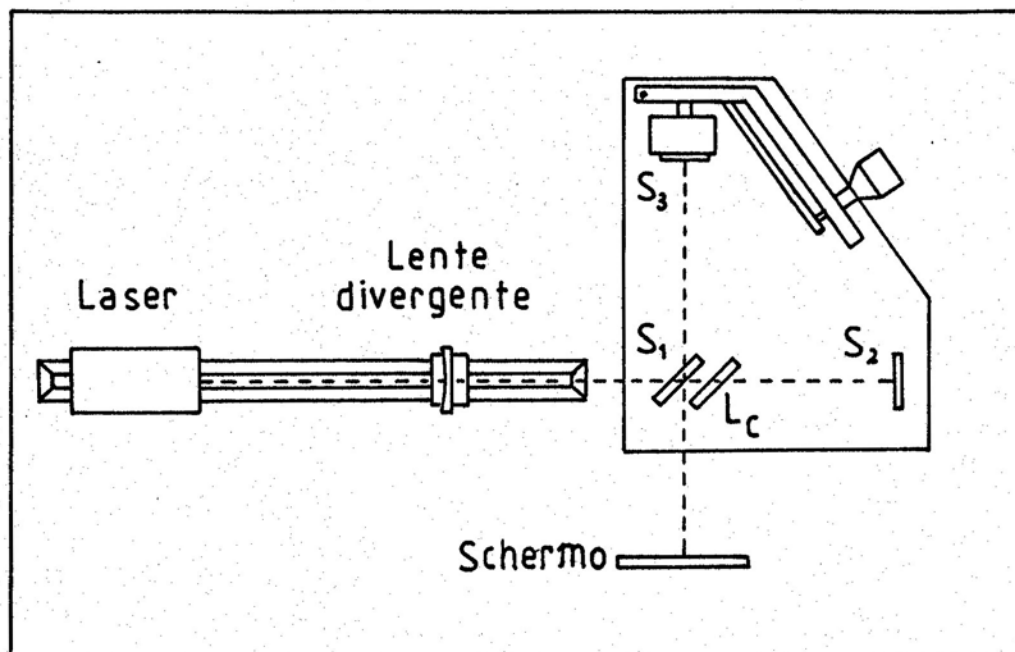


Figura 2: Schema dell'interferometro di Michelson accoppiato con la sorgente di luce disposta su un banco ottico separato.

L'apparato richiede una messa a punto preliminare consistente nella ricerca della condizione di ortogonalità tra lo specchio fisso S_2 (orientabile mediante viti micrometriche) e lo specchio mobile S_3 .

Si può adottare la seguente procedura:

* Si regolano le viti micrometriche dello specchio S_2 in maniera da sovrapporre sullo schermo l'immagine riflessa dallo specchio S_3 esattamente sull'immagine riflessa dallo specchio S_2 . Questa operazione risulta facilitata se la macchia luminosa proiettata sullo schermo ha un diametro ridotto (lo spot luminoso della sorgente monocromatica laser ha un'ampiezza di pochi millimetri). Nell'eseguire questa operazione bisogna porre attenzione ad individuare i fasci luminosi da prendere in considerazione: infatti sullo schermo possono apparire più di due macchie luminose, dovute a riflessioni "parassite" sulle altre facce delle lastre (faccia anteriore di S_1 e facce della lastra di compensazione). Per capire quali siano le macchie luminose da prendere in considerazione, ci si può aiutare individuando quelle più luminose e cercando di capirne la provenienza interponendo un ostacolo alternativamente nel tratto S_1 - S_3 e S_1 - S_2 . E' facile rendersi conto che con questo metodo si possono rendere ortogonali i due specchi entro qualche primo di grado.

* Una volta ultimata questa prima fase di ortogonalizzazione, guardando con attenzione gli spot luminosi, si riescono ad osservare le figure di interferenza, costituite da alternanze di righe chiare e scure. Per facilitarne però l'osservazione è necessario allargare il fascio proveniente dalla sorgente laser utilizzando una lente divergente (o convergente, con distanza focale corta) in modo che la macchia luminosa sullo schermo abbia un diametro di qualche centimetro. In questa fase le righe di interferenza appaiono più evidenti (essendo l'immagine più ampia), e regolando con attenzione le viti micrometriche poste sul retro dello specchio S_2 , è possibile rendere tali frange circolari, raggiungendo così la condizione di perfetta ortogonalità degli specchi S_2 e S_3 .

La circolarità di tale frange di interferenza è dovuta al fatto che le figure di ugual interferenza prodotte nello spazio dalle sorgenti virtuali F_3 e F_2' (dove F_3 rappresenta l'immagine prodotta da S_3 , mentre F_2' rappresenta l'immagine prodotta da S_2 mediante la riflessione in S_1) sono costituite da famiglie di iperboloidi di rotazione aventi i fuochi nelle sorgenti immagine F_3 e F_2' . Infatti in geometria l'iperbole (iperboloide nello spazio a tre dimensioni) è definito come il luogo geometrico dei punti la cui differenza delle distanze da due punti dati, detti fuochi, è costante; esattamente come la condizione di "ugual interferenza" richiede che la differenza dei cammini ottici generati dalle due sorgenti (in questo caso virtuali) rimanga costante.

L'intersezione di questi iperboloidi con lo schermo dà luogo a frange circolari (se l'asse degli iperboloidi è normale allo schermo, cioè se gli specchi S_2 e S_3 sono ortogonali e lo specchio S_1 è posto a 45°). Al diminuire della differenza di cammino ottico tra i due raggi luminosi nei due bracci, il numero delle frange presenti sullo schermo diminuisce e ne aumenta lo spessore, fino a che non si osserva alcuna frangia di interferenza, quando cioè si è raggiunta la condizione di ugual cammino ottico. In linea teorica può essere utilizzato questa proprietà per rendere equidistanti i due specchi S_2 e S_3 . In realtà è molto difficile osservare questa condizione, poiché a causa della limitata apertura del diaframma posto tra lo specchio S_1 e lo schermo, è difficile capire qual è la condizione di massima dimensione delle frange di interferenza.

Si può adesso capire cosa succede alla figura di interferenza quando i due specchi S_2 e S_3 non sono perfettamente ortogonali tra loro: la Fig. 3 ne illustra schematicamente la situazione. In questo caso l'asse degli iperboloidi delle famiglie di ugual interferenza risulta inclinato rispetto alla normale allo schermo, e quindi le figure di interferenza visibili sullo schermo risultanti sono di forma ellittica (o porzioni di ellissi, a causa della limitata apertura del diaframma), con raggi di curvatura più o meno pronunciati a secondo dell'inclinazione dell'asse degli iperboloide rispetto alla normale dello schermo e alla reciproca distanza dei due fuochi generatori (Fig. 3a). Nel caso in cui lo specchio S_3 venga traslato fino alla condizione di equidistanza degli specchi (S_2 e S_3 non ortogonali ed equidistanti rispetto allo specchio S_1), l'asse degli iperboloidi risulta essere parallelo allo schermo, e le frange saranno rettilinee, poiché generate dagli iperboloidi "degeneri" centrali tra

i fuochi generatori (Fig. 3b). Infine se lo specchio S_3 viene ulteriormente traslato, oltrepassando la condizione di equidistanza tra gli specchi, sullo schermo andrà ad incidere la famiglia di iperboloidi con concavità in senso opposto, per cui le porzioni di ellissi visibili sullo schermo presenteranno il verso della concavità opposto rispetto alla situazione iniziale (Fig. 3c). Questa proprietà può essere appunto sfruttata per determinare la zona di equidistanza degli specchi: si ricerca cioè l'intervallo di escursione della vite micrometrica in cui si osserva la variazione del verso della concavità delle figure di interferenza, con il limite di quanto si riesca ad apprezzare il passaggio da frange curve a frange rettilinee.

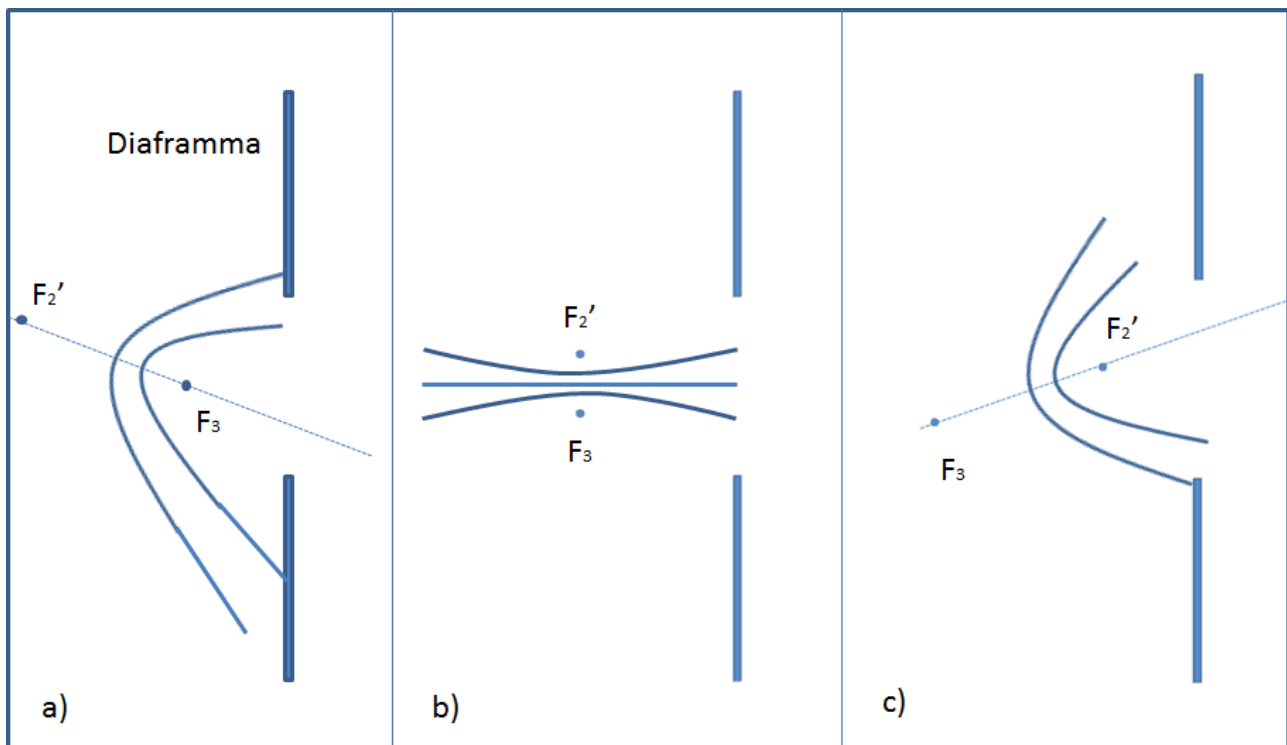


Figura 3: Evoluzione della famiglia di iperboloidi e della loro traccia sullo schermo al variare della distanza tra le due sorgenti virtuali (quando gli specchi S_2 e S_3 non sono perfettamente ortogonali).

3. Descrizione dell'esperienza e della procedura sperimentale

3.1 Misura della lunghezza d'onda della luce laser

Poiché la differenza di cammino ottico tra i due raggi luminosi sdoppiati da S_1 può essere variata agendo sullo specchio mobile S_3 , fissato un punto dello schermo si osserverà un alternarsi di massimi (frange luminose) e di minimi (frange oscure) spostando la vite micrometrica solidale con S_3 . Affinché una frangia oscura prenda il posto di una frangia luminosa occorre che lo specchio venga spostato della quantità:

$$\Delta x = \frac{1}{n_a} \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

essendo n_a l'indice di rifrazione dell'aria. A tale spostamento corrisponde una variazione del cammino ottico pari a $\lambda/2$ in quanto il raggio luminoso percorre due volte la distanza Δx .

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

Analogamente affinché ad una frangia luminosa si sostituisca un'altra frangia luminosa occorre che lo specchio mobile si sposti della quantità:

$$\Delta x = \frac{1}{n_a} \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

a cui corrisponde una variazione del cammino ottico pari a λ .

Pertanto la misura della lunghezza d'onda viene effettuata contando il numero N_1 di massimi (o minimi) che passano per un punto prefissato sullo schermo per uno spostamento Δx (misurato) dello specchio mobile, uguagliando la variazione di differenza di cammino ottico con la variazione di N_1 lunghezze d'onda, secondo la seguente espressione:

$$2 n_a \Delta x = N_1 \lambda \quad (3)$$

in cui il termine $2 n_a \Delta x$ rappresenta la variazione di cammino ottico del raggio luminoso nel tratto S_1 - S_3 (andata e ritorno) ed n_a rappresenta l'indice di rifrazione dell'aria per le condizioni di pressione e temperatura del laboratorio.

Dopo aver perciò prodotto sullo schermo la figura di interferenza con frange circolari o quasi circolari (in alcuni casi si osserva soltanto una porzione limitata delle frange a causa dei diaframmi interposti sul fascio di luce) si procede a variare la posizione dello specchio S_3 mediante la vite micrometrica in maniera graduale e continua, contando il numero di frange oscure (o luminose) che attraversano un punto prefissato dello schermo. La traslazione dello specchio deve avvenire sempre in uno stesso verso, allo scopo di eliminare gli eventuali giochi meccanici del sistema di movimento. Nel valutare lo spostamento Δx subito dallo specchio S_3 da utilizzare nella relazione (3), lo studente deve ricordarsi che esso è 1/5 dell'effettivo spostamento misurato con il micrometro.

La relazione (3) permette quindi di ricavare il valore di λ da una misura di Δx e di N_1 , qualora sia noto o misurato l'indice di rifrazione dell'aria. Nelle misure di laboratorio, che in genere hanno precisioni dell'ordine dell'1% si può assumere $n_a = 1$ in quanto l'indice di rifrazione dell'aria in condizioni normali si scosta dall'unità per meno di $3 \cdot 10^{-4}$. L'errore nella misura di λ è dovuto all'imprecisione di misura di Δx (si assume che l'errore nel conteggio delle frange sia nullo) e questo errore decresce quanto più elevato è lo spostamento Δx e quindi quanto più elevato è il numero N_1 di frange contate.

Dalla relazione (3) si ricava che l'errore ε_λ è dato da:

$$\varepsilon_\lambda = (2 n_a / N_1) \varepsilon_{\Delta x} \quad (4)$$

e poiché l'errore nella misura di Δx può essere stimato come $\varepsilon_{\Delta x} = \pm 1 \mu\text{m}$, si ottiene:

$$\varepsilon_\lambda = \pm (2 \cdot 10^{-6} / N_1) \text{ m} = \pm (2 \cdot 10^4 / N_1) \text{ \AA} \quad (5)$$

avendo posto $n_a = 1$. Occorre pertanto un numero di conteggi $N_1 = 200$ per avere un errore nella misura di λ di $\pm 100 \text{ \AA}$ (corrispondente ad un errore di circa $\pm 1.5 \%$ nel caso della radiazione laser impiegata in laboratorio).

3.2 Misura dell'indice di rifrazione dell'aria

Per la misura dell'indice di rifrazione dell'aria (nelle condizioni di temperatura e pressione del laboratorio) si inserisce sul ramo $S_1 - S_2$ una cameretta le cui basi sono realizzate con flange in vetro

e nella quale, mediante una pompa rotativa, può essere praticato il vuoto. Eseguendo con una valvola a spillo un rientro graduale dell'aria nella cameretta (dopo aver spento la pompa e chiusa la valvola di comunicazione tra la pompa e la cameretta), si osserva sullo schermo un susseguirsi di frange di interferenza della luce laser dovuto ad un aumento progressivo del cammino ottico compiuto dal fascio di luce laser all'interno della cameretta, in quanto l'indice di rifrazione cresce dal valore $n = 1$ (vuoto) al valore $n = n_a$ (pressione atmosferica).

Se d è la lunghezza interna della cameretta, il cammino ottico al termine del rientro d'aria sarà variato della quantità:

$$\Delta s = 2 (n_a - 1) d \quad (6)$$

Se lo sperimentatore ha contato il susseguirsi di N_2 frange (luminose od oscure) in un punto dello schermo, varrà la relazione:

$$2 (n_a - 1) d = N_2 \lambda \quad (7)$$

che permette in connessione con la relazione (3) di ricavare congiuntamente il valore di λ e di n_a .

3.3 Misura della lunghezza dei treni d'onda di una sorgente di luce non monocromatica

Se si utilizza una sorgente non monocromatica (quale, ad esempio, una lampada ad incandescenza) la luce emessa è costituita da treni di lunghezza alquanto limitata (dell'ordine di alcuni micron o decine di micron). Ne consegue che il fenomeno di interferenza tra i fasci riflessi dai due specchi S_2 ed S_3 cessa non appena la distanza tra le due sorgenti immagine diventa superiore alla lunghezza del treno d'onda, in quanto sullo schermo si vengono a sovrapporre onde elettromagnetiche non più coerenti (la fase dei diversi treni d'onda varia casualmente nel tempo). Pertanto se la distanza tra le due sorgenti immagine è nulla ($S_1S_2 = S_1S_3$) si osserva sullo schermo una figura di interferenza molto netta; man mano che ci si allontana da questa condizione (muovendo S_3 in un verso o nell'altro) la figura di interferenza va sbiadendo sino a raggiungere una condizione di illuminazione uniforme dello schermo.

Misurando lo spostamento dello specchio S_3 che porta da una condizione di luminosità uniforme (immediatamente precedente all'apparire di una figura di interferenza) ad una condizione di interferenza netta e quindi di nuovo ad una condizione di luminosità uniforme, si ottiene con buona approssimazione la lunghezza L_p del pacchetto d'onda:

$$L_p = \Delta x \quad (8)$$

Il fenomeno ora descritto, anziché in termini di pacchetti d'onda di lunghezza finita, può essere interpretato in termini di emissione di luce non rigorosamente monocromatica da parte della sorgente. Infatti il teorema di Fourier mostra che un pacchetto d'onda di lunghezza finita è esprimibile come sovrapposizione di infinite onde sinusoidali di frequenze contenute in un certo intervallo $\Delta\nu$ centrato sulla frequenza media ν_0 della radiazione. L'ampiezza dell'intervallo $\Delta\nu$ è tanto maggiore quanto più corto è il pacchetto d'onda. Con buona approssimazione si ha:

$$\Delta\nu L_p \sim c \quad (9)$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto.

Dalla relazione (9) si ricava che se una radiazione quasi monocromatica presenta dei pacchetti d'onda di lunghezza L_p la riga ha una larghezza spettrale $\Delta\lambda/\lambda_0$ data:

$$\Delta\lambda/\lambda_0 = \Delta v/v_0 \sim \lambda_0/L_p \quad (10)$$

A titolo d'esempio se $\lambda_0 = 6000 \text{ \AA}$ ed $L_p = 10 \text{ }\mu\text{m}$ la riga presenterà una larghezza $\Delta\lambda = 360 \text{ \AA}$.

Poiché, come si è detto, la lunghezza dei pacchetti di luce bianca è dell'ordine di poche decine di μm , il fenomeno dell'interferenza potrà avvenire in corrispondenza ad un'escursione dell'albero della vite micrometrica di 5-10 centesimi di millimetro. E' necessario perciò porre molta attenzione nella ricerca di tale condizione, ruotando la vite lentamente in modo da non oltrepassare la zona di interesse senza accorgersene. La ricerca risulta notevolmente velocizzata se, prima di inserire la luce bianca, si ricerca approssimativamente con la luce laser la zona di equidistanza tra i due specchi, raggiungendo la condizione di frange rettilinee secondo quanto descritto alla fine del paragrafo 2; successivamente a tale operazione, prima di passare alla luce bianca, è però opportuno agire sulle viti di regolazione angolare dello specchio S_2 per ristabilire la condizione di frange "quasi" circolari, in modo che le frange aumentino di spessore.

3.4 Misura della separazione tra le righe del doppietto del sodio

La sorgente al sodio emette due righe molto intense distanziate di circa 6 \AA ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ e $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$). Inviando la luce della lampada al sodio sull'interferometro di Michelson si osserva una figura di interferenza molto netta quando le frange luminose della prima riga si sovrappongono alle frange luminose della seconda riga (questa condizione è verificata per determinati valori della differenza di cammino ottico tra i raggi interferenti). Viceversa si osserva una illuminazione pressoché omogenea (o comunque una figura di interferenza molto poco pronunciata) quando le frange luminose della prima riga si sovrappongono alle frange oscure della seconda riga (e viceversa). In particolare, quando la differenza di cammino ottico dei raggi provenienti dai due specchi S_2 ed S_3 è nulla, si ha una figura di interferenza molto netta.

Supponendo di partire dalla situazione di ugual cammino ottico tra i due raggi luminosi provenienti dai due bracci, la condizione di luminosità diffusa si presenterà se viene introdotta la differenza di cammino Δ_l data da:

$$\Delta_l = 2N_1 \frac{\lambda_2}{2} = (2N_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} \quad (11)$$

dove N_1 è un numero intero che, affinché possa soddisfare l'uguaglianza espressa dalla (11), deve essere ben approssimato dalla condizione:

$$N_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (12)$$

In tale situazione, dalla (11) si verifica che la riga λ_2 genera una situazione di massimo di luminosità (frangia luminosa) perché la variazione di cammino corrisponde ad un numero intero di lunghezze d'onda λ_2 , mentre la riga λ_1 genera una situazione di minimo di luminosità (frangia scura) perché la variazione di cammino corrisponde ad un numero intero dispari di semi lunghezza d'onda λ_1 ; quindi l'effetto complessivo è costituito dall'assenza di una figura netta di interferenza.

Sostituendo la (12) nella (11) si ottiene il valore Δ_l :

$$\Delta_l = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (13)$$

La figura di interferenza ricompare e torna ad assumere la massima nitidezza quando la differenza di cammino ottico Δ_2 risulta:

$$\Delta_2 = 2N_2\lambda_2 = (2N_2 + 1)\lambda_1 \quad (14)$$

dove N_2 sarà quindi quel numero intero che ben approssima la condizione:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (15)$$

Per cui risulta:

$$\Delta_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 2\Delta_1 \quad (16)$$

In definitiva l'alternanza di figure di interferenza molto nette con situazioni di illuminazione pressoché omogenea e viceversa si ripete ogni qualvolta lo specchio S_3 viene spostato della quantità $\Delta_1/2$ (si ricordi che per via della riflessione la luce percorre due volte i tratti dei due bracci). Tuttavia poiché risulta più preciso osservare il passaggio di alternanze tra zone in cui si ha interferenza netta a zone in cui si ripresenta la condizione di interferenza netta, conviene considerare gli spostamenti dello specchio S_3 corrispondenti alla quantità $\Delta_2/2$ espressa dalla (16).

Pertanto, misurando lo spostamento Δx dello specchio S_3 che produce m alternanze (m alternanze da condizione di interferenza netta a nuova condizione di interferenza netta), si può ricavare la separazione tra le due righe del doppietto:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = m \lambda_1 \lambda_2 / (2 \Delta x) \sim m \lambda^2 / (2 \Delta x) \quad (17)$$

avendo posto uguale a uno l'indice di rifrazione dell'aria ed essendo λ la media delle due lunghezze d'onda del doppietto ($\lambda = 5893 \text{ \AA}$), che differisce molto poco dalla media geometrica ($\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \sim (\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}$).

Si può arrivare allo stesso risultato affrontando il problema in analogia al fenomeno dei battimenti, che risulterà sicuramente familiare a chi abbia pratica nell'operazione di accordatura di due strumenti o di due corde di uno stesso strumento. Le due righe del sodio infatti possono essere considerate come due onde monocromatiche, per esempio propaganti lungo la direzione x , le cui ampiezze dei campi elettrici sono espresse dalle relazioni:

$$E_1 = E_{01} \cos[2\pi(\nu_1 t - x/\lambda_1)] \quad (18)$$

$$E_2 = E_{02} \cos[2\pi(\nu_2 t - x/\lambda_2)] \quad (19)$$

dove ν_1 e ν_2 sono legate alle lunghezze d'onda mediante le velocità di propagazione:

$$\nu_1 \lambda_1 = c/n_a \quad \nu_2 \lambda_2 = c/n_a \quad (20)$$

con c la velocità della luce nel vuoto.

Poiché l'intensità luminosa delle due righe è circa la stessa, si può considerare $E_{01} \approx E_{02} \approx E_0$, per cui il campo elettrico E_t risultante sarà dato da:

$$E_t = E_1 + E_2 = E_0 \{ \cos[2\pi(\nu_1 t - x/\lambda_1)] + \cos[2\pi(\nu_2 t - x/\lambda_2)] \} \quad (21)$$

Applicando la terza formula di prostaferesi alla (21) si ottiene:

$$E_t = 2E_0 \cos[2\pi(\nu_{av} t - x/\lambda_{av})] \cos[2\pi(\nu_d t - x/\lambda_d)] \quad (22)$$

dove:

$$\lambda_{av} = 2 \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \lambda_d = 2 \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (23)$$

$$\nu_{av} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \frac{c}{n_a \lambda_{av}} \quad \nu_d = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = \frac{c}{n_a \lambda_d} \quad (24)$$

La (22) descrive un'onda propagante, costituita da un'onda "portante" di lunghezza d'onda pari a λ_{av} , modulata in ampiezza con un periodo molto maggiore, dove la lunghezza d'onda del termine modulante è pari a $\lambda_d/2$ (il fattore $1/2$ è dovuto al fatto che il termine modulante può essere considerato invariante rispetto al proprio segno). Pertanto quando la differenza di cammino ottico dei due bracci viene fatta variare della distanza $\Delta_1 = \lambda_d/4$, si passa dalla condizione di ampiezza massima dell'onda ad una in cui l'ampiezza è minima, per cui le figure di interferenza (prodotte dalla portante) smettono di essere visibili. Si ritrova così la relazione (13).

Per questo tipo di misura non è più necessario utilizzare la lente divergente (il fascio di luce della sorgente al sodio è sufficientemente divergente) ma bisogna schermare opportunamente il fascio di luce emergente dalla sorgente per non essere disturbati nell'osservazione dell'immagine sullo schermo. Come si può ricavare dalla relazione (17), lo spostamento che lo specchio deve subire per avere due alternanze di condizioni di interferenza netta ($m = 2$) è di circa 0.6 mm (corrispondente ad uno spostamento di circa 3 mm dell'albero del micrometro). Pertanto si può muovere lo specchio S_3 più celermente che nel caso precedentemente esaminato (misura della lunghezza del pacchetto d'onda di luce bianca).

DETERMINAZIONE DEL RAPPORTO E/M PER L'ELETTRONE

1. Scopo dell'esperienza

In questa esperienza si determina il rapporto e/m (carica/massa a riposo) di un elettrone non relativistico, misurando il diametro della circonferenza percorsa da un fascio di elettroni dotati di energia cinetica T (costante e nota) ed immersi in un campo di induzione magnetica B_z (diretto normalmente alla velocità degli elettroni e anch'esso costante e noto).

La traiettoria degli elettroni è resa visibile allo sperimentatore dal processo di fluorescenza nel gas (idrogeno) a bassa pressione contenuto nell'ampolla di vetro nella quale viene prodotto il fascio di elettroni.

La misura viene effettuata orientando il dispositivo in maniera che il campo B_z generato dalle bobine di Helmholtz sia dapprima ortogonale e successivamente parallelo alla componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Al termine viene effettuata una misura della componente orizzontale del campo magnetico terrestre.

2. Breve introduzione storica

E' istruttivo ed interessante seguire gli sviluppi che hanno portato allo scoperta dell'elettrone in quanto in essi si trovano molti elementi comuni a qualsiasi nuovo tipo di ricerca:

- a) Iniziale diffidenza e chiusura da parte della comunità scientifica nei confronti di un campo di ricerca considerato di scarso interesse scientifico;
- b) Difficoltà ad interpretare i fenomeni fisici osservati, il che comporta la necessità di ideare nuove esperienze che consentano di stabilire quale tra le varie ipotesi interpretative è confermata dalle osservazioni sperimentali e spesso la necessità di sviluppare o perfezionare alcune tecnologie sperimentali;
- c) L'esperimento conclusivo che chiude una lunga fase di ricerca ma nello stesso tempo apre nuovi interrogativi sulla natura.

La scoperta dell'elettrone (1897) assieme alla scoperta dei raggi X (1895), hanno avuto origine dallo studio delle scariche elettriche nei gas rarefatti. Tale ricerca era considerata dalla maggior parte dei fisici dell'epoca (circa a metà del XIX secolo) di secondaria importanza e pertanto in genere essa veniva sconsigliata ai giovani ricercatori più dotati. La ricerca, iniziata già alla fine del XVIII secolo, aveva fornito soltanto informazioni sporadiche e di tipo qualitativo (Morgan nel 1785 aveva constatato che il vuoto realizzato con il metodo di Torricelli non era un perfetto isolante elettrico ed aveva osservato la fluorescenza prodotta dalla scarica elettrica, Faraday nel 1838 descrive la scarica da lui osservata nel testo "Experimental Researches on Electricity") ma i primi risultati sperimentali giungono soltanto con il perfezionamento delle tecniche per la produzione di vuoti spinti³, perfezionamento iniziato verso la metà del XIX secolo. Infatti soltanto nel 1855 ci fu un notevole progresso quando H. Geissler, inventò un nuovo tipo di pompa da vuoto, che impiegò con efficacia nel tubo per la scarica nei gas (tubo di Geissler). Con tale pompa, illustrata schematicamente in Fig. 1, si poteva raggiungere e mantenere una pressione residua, a temperatura ambiente, dell'ordine di 10^{-3} mm di Hg (limite determinato dalla tensione di vapore del mercurio), cioè un livello di vuoto sufficiente per osservare una vasta gamma di fenomeni nel tubo di scarica.

³ La prima pompa meccanica da vuoto, inventata nel 1650 da von Guericke non subì modifiche significative per circa due secoli

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

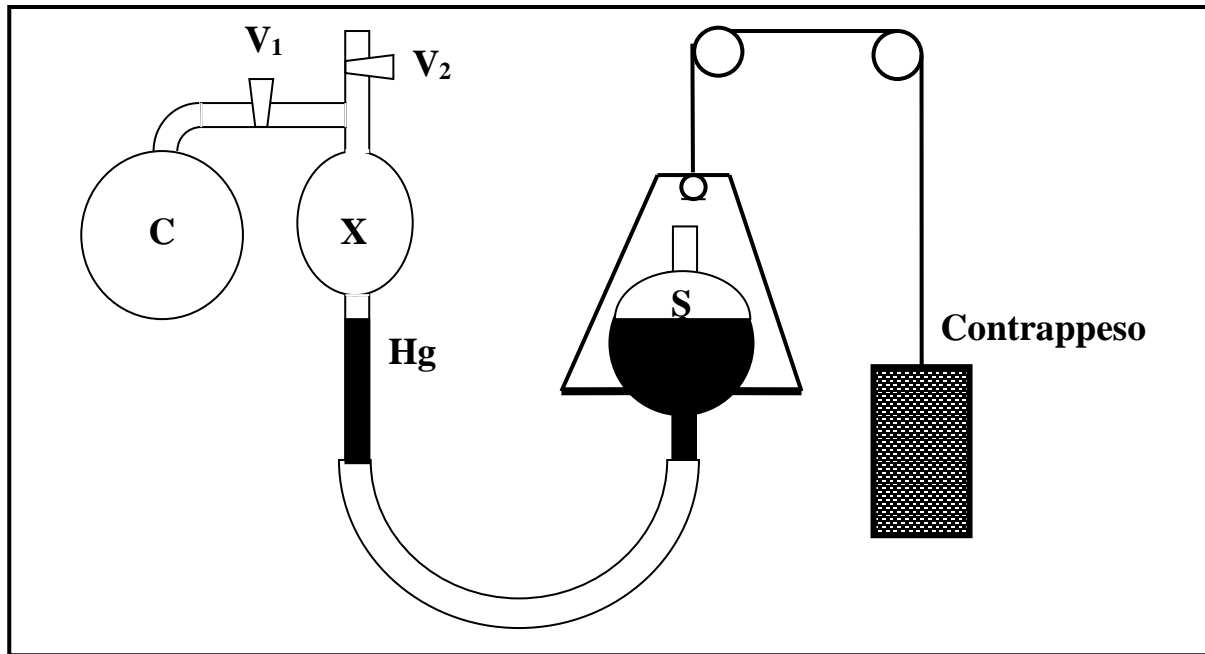


Figura 1: Schema della pompa a vuoto di Geissler. L'operazione di pompaggio è ciclica. Ad ogni ciclo il tubo C (da evacuare) è posto in comunicazione con la camera X attraverso la valvola aperta V_1 mentre V_2 è chiusa. Chiusa V_1 si comprime l'aria in X, innalzando il recipiente S. Si apre quindi la valvola V_2 e si lascia evacuare l'aria compressa. Chiusa V_2 ed aperta V_1 si riprende il ciclo. La situazione mostrata in figura è quella iniziale (quando la pressione nelle due camere C ed X e nel serbatoio S è pari alla pressione atmosferica esterna). Ovviamente al termine dei cicli di pompaggio il serbatoio S si trova ad una quota inferiore (rispetto a quella iniziale) di circa 760 mm.

I fenomeni che si osservano in un tubo sufficientemente lungo (70-100 cm) alle cui estremità sono applicati due elettrodi alimentati con una differenza di potenziale elevata (alcune migliaia di volt) variano in funzione della pressione residua presente nel tubo. A pressione atmosferica non si produce alcuna scarica elettrica. Quando la pressione si è ridotta di un fattore 10 (70 – 80 mm di Hg) una fascia luminosa di colore violetto si estende da un elettrodo all'altro. Diminuendo ulteriormente la pressione il bagliore riempie completamente il tubo e quando la pressione si è ridotta a 1-2 mm di Hg la scarica presenta zone alternativamente luminose ed oscure come mostrato in Fig. 2. Il catodo presenta un rivestimento vellutato luminoso A (strato catodico) ed è seguito da una regione oscura C (zona di Crookes), da una zona luminosa N (bagliore negativo) ed ancora da una zona oscura F (zona di Faraday). La restante parte del tubo è riempita da una banda luminosa P, nota come colonna positiva, suddivisa in strisce luminose di diversa intensità. La dimensione della zona oscura di Crookes è indipendente dalla distanza tra catodo ed anodo ma dipende dalla pressione. Al diminuire della pressione la zona di Crookes si estende e la colonna positiva si riduce in dimensioni ed in intensità. Alla pressione di 10^{-3} mm di Hg la colonna positiva scompare e la zona di Crookes sembra riempire tutto il tubo ma nello stesso tempo le pareti di vetro del tubo nella regione dell'anodo s'accendono di una brillante luce verde fluorescente.

L'attenzione dei ricercatori (Geissler, Pluecker, Hittorf all'Università di Bonn, Goldstein a Berlino e Crookes in Inghilterra) si concentrò sulla scarica a bassa pressione ($p \sim 10^{-3}$ mm di Hg) arrivando a stabilire mediante una serie di osservazioni condotte con diversi dispositivi, illustrati nella Fig. 3 e nella Fig. 4 le seguenti proprietà:

- a. Gli effetti prodotti dalla scarica sono causati da "entità" che viaggiano in linea retta e sono emessi dal catodo. Tale risultato è mostrato in maniera evidente dal tubo impiegato da Crookes a scopo dimostrativo e riportato in Fig. 3°.

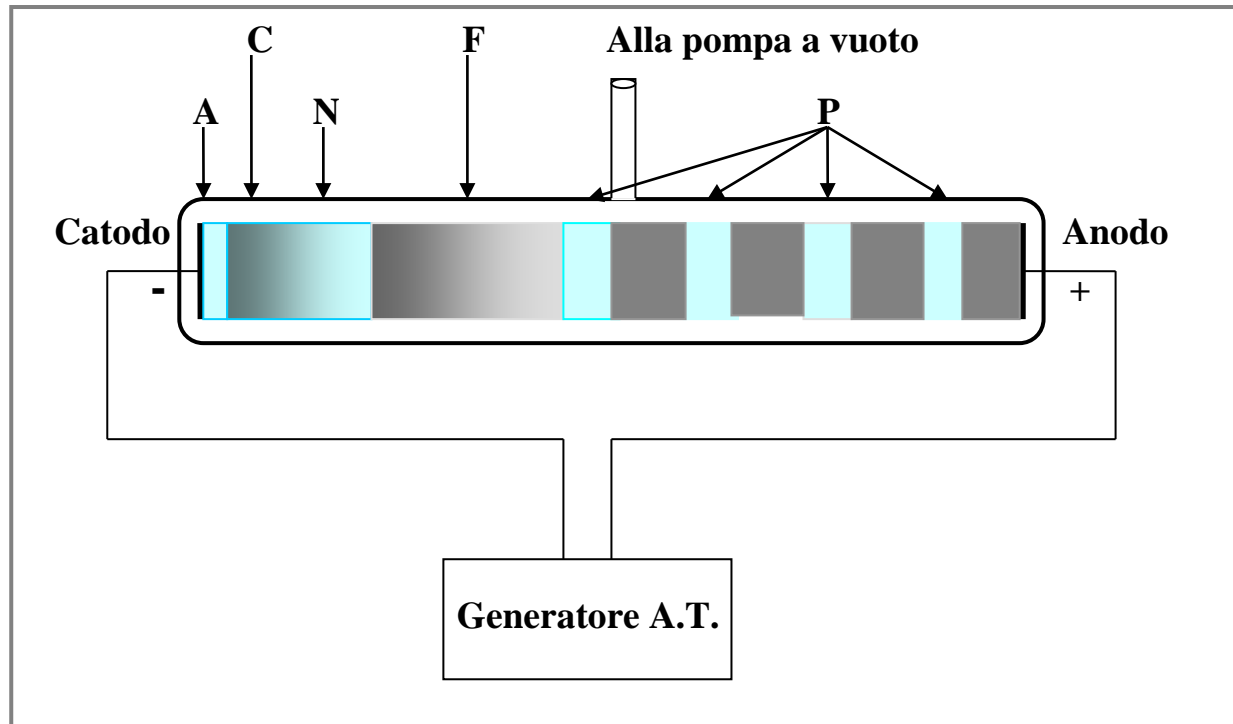


Figura 2: Caratteristica della scarica elettrica in un gas rarefatto ($p \approx 1-2$ mm di Hg)

- b. Tali “entità” sono emesse in direzione ortogonale alla superficie del catodo e posseggono quantità di moto (Fig.4a) ed energia cinetica (Fig. 4b).
- c. Tali “entità” sono deflesse dalla presenza di un campo magnetico.

Tutte queste proprietà (ed in particolare l’ultima) portavano a far propendere per la natura corpuscolare di queste “entità” denominate da Goldstein “raggi catodici”.

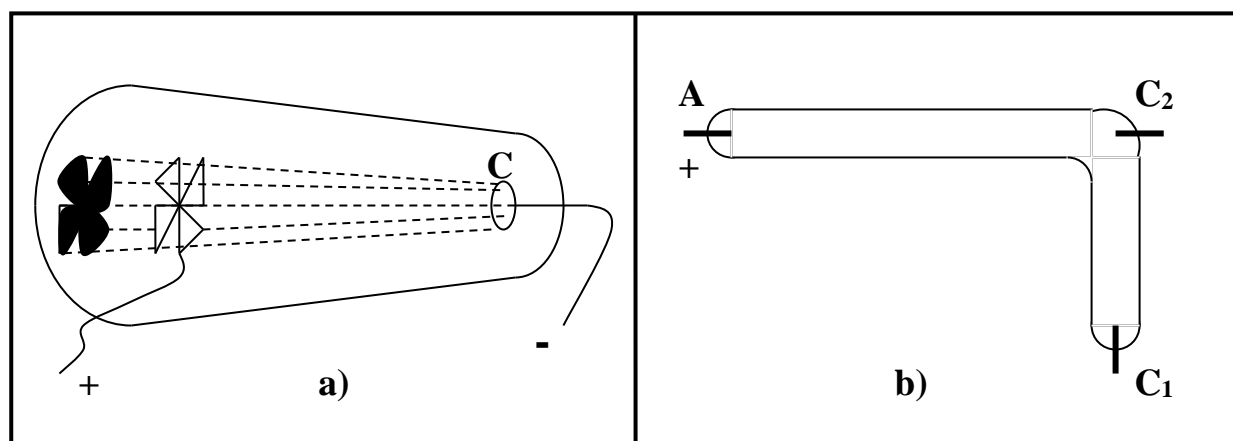


Figura 3: a) Nel tubo di Crookes sul vetro alle spalle dell’anodo (a forma di croce greca) si formava un’ombra di forma identica a quella di questo ultimo e risultante dalla proiezione dei raggi provenienti dal catodo C. b) Nel tubo di Pluecker il bagliore negativo riempiva il tratto AC₂ del tubo quando come catodo si utilizzava l’elettrodo C₂ mentre rimaneva confinato nel tratto C₁C₂ quando veniva utilizzato come catodo l’elettrodo C₁.

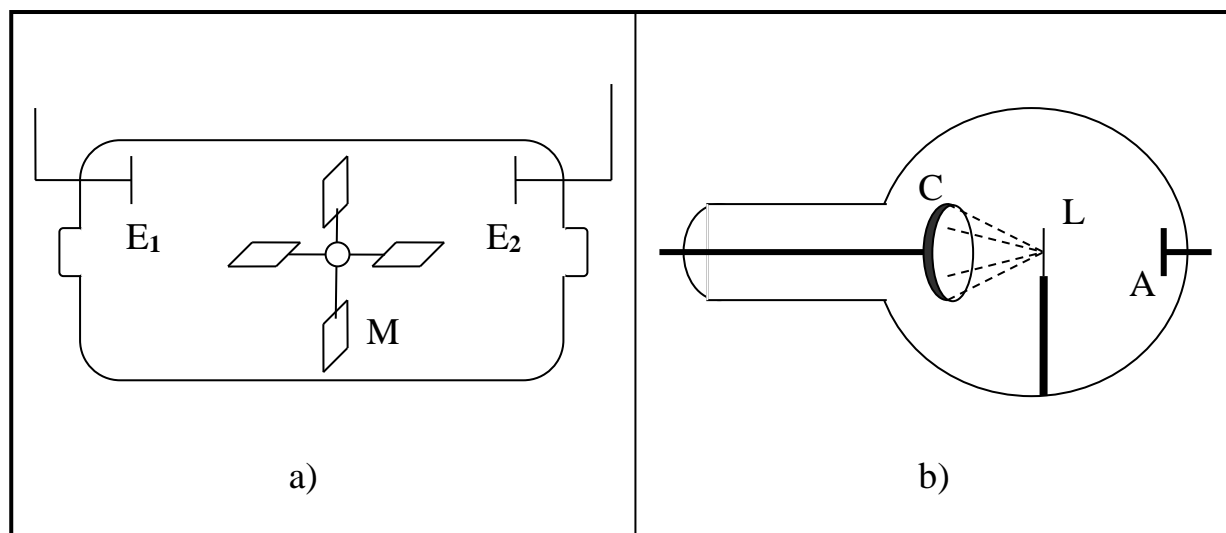


Figura 4: a) Nel tubo realizzato da Gimmingham il mulinello M colpito dai raggi catodici si poneva in rotazione in verso orario quando E1 era il catodo ed in verso antiorario quando E2 diventava il catodo. Questo risultato sembrava confermare che i raggi catodici possedevano una quantità di moto non trascurabile e quindi sembrava a favore della teoria corpuscolare⁴. b) In questo tubo il catodo era stato realizzato in forma sferica in maniera da concentrare i raggi catodici su una sottile lamina L di platino che diventava incandescente. Quando i raggi catodici venivano deviati da un magnete il riscaldamento della lamina cessava. Questo risultato confermava che i raggi catodici trasportavano energia.

Nonostante queste evidenze sperimentali la comunità scientifica era restia ad accettare che i raggi catodici fossero di natura corpuscolare in quanto alcuni esperimenti condotti da Hertz e Lenard sembravano mettere in crisi la teoria corpuscolare. Nell'ipotesi che i raggi catodici fossero corpuscoli elettricamente carichi Hertz cercò di misurare il campo magnetico generato da queste cariche in moto. Non riuscì mai a rivelare la presenza di questo campo magnetico. Alcuni anni dopo provò a deflettere i raggi catodici con un campo elettrico senza riuscirvi. Questo lo convinse che la teoria corpuscolare dei raggi catodici non era sostenibile⁵. Inoltre, dapprima Lenard e poi anche Hertz mostrarono che i raggi catodici erano in grado di emergere dal tubo di scarica attraverso una finestra realizzata con un sottilissimo foglio di alluminio. Tenuto conto che questo foglio risultava impermeabile all'aria si doveva escludere che le particelle ipotizzate da Crookes fossero atomi o molecole cariche.

Questa era la situazione quando dapprima J. Perrin e poi J.J. Thomson mostrarono che i raggi catodici venivano deflessi da un campo elettrico. In Fig. 5 è mostrato lo schema del dispositivo sperimentale impiegato da Thomson. Con tale dispositivo Thomson riuscì a misurare il rapporto e/m (carica /massa) dei corpuscoli che costituiscono il fascio di raggi catodici.

La procedura seguita da Thomson consiste nel misurare la deflessione angolare θ prodotta dal campo elettrico del condensatore sulle particelle cariche :

$$\operatorname{tg} \theta = eEl/mv^2 = (e/m) (\Delta V/d) (l/v^2) \quad (1)$$

dove E è il campo elettrostatico presente tra le armature del condensatore, l la lunghezza del condensatore, v la velocità dei corpuscoli, ΔV la differenza di potenziale tra le armature del

⁴ Alcuni anni dopo Thomson dimostrò che la rotazione del mulinello era prodotta dal riscaldamento della parete colpita dai raggi catodici e non dal trasferimento della quantità di moto attraverso l'impatto diretto dei raggi catodici.

⁵ La conclusione di Hertz era fondata da un punto di vista logico ma sfortunatamente era basata su risultati errati. Infatti misure successive con tecniche più perfezionate mostrarono che entrambi gli effetti esistono.

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

condensatore, d la distanza tra le armature (lo studente può ricavare il risultato espresso dalla relazione (1) oppure consultare il testo di Metodi e Strumenti di Misura a pag. 584 dove può trovare la trattazione dettagliata del problema).

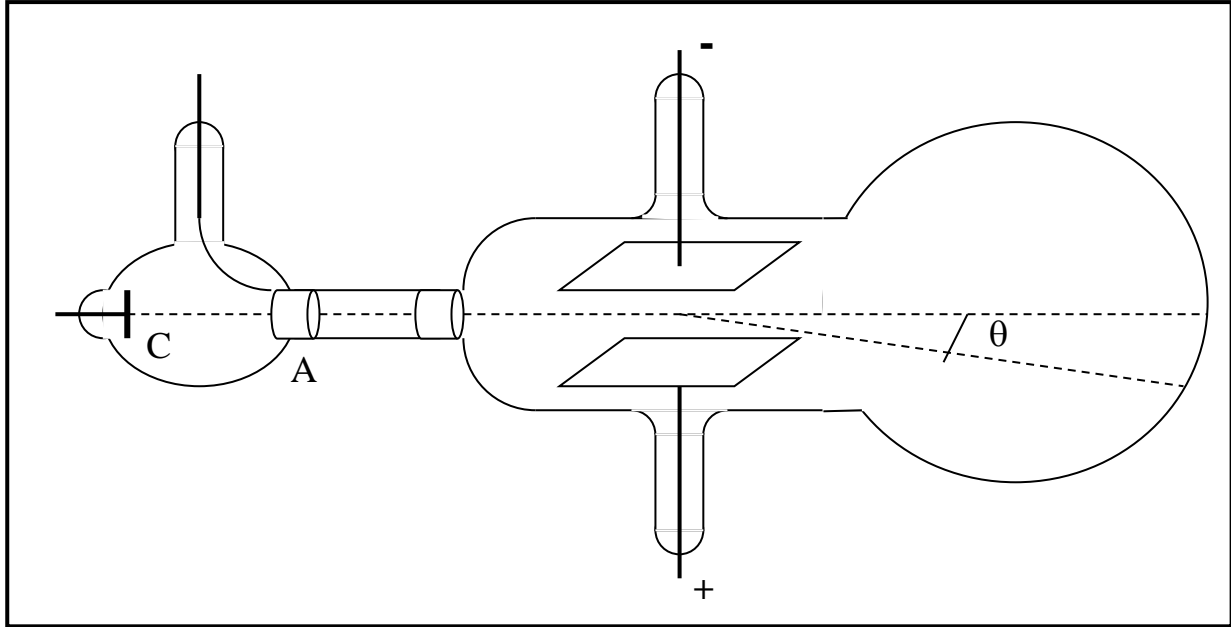


Figura 5: Tubo di Thomson per mostrare la deflessione elettrostatica dei raggi catodici.

Ovviamente la relazione (1) non è sufficiente per determinare il rapporto (e/m) in quanto è necessario misurare anche la velocità v delle particelle. Thomson a questo scopo impiegò un campo magnetico (diretto ortogonalmente al campo elettrico E) mediante il quale poté annullare la deflessione θ prodotta dal solo campo elettrostatico. In queste condizioni la forza elettrostatica $F_e = eE$ viene controbilanciata dalla forza di Lorentz $F_m = evB$ per cui si ottiene:

$$v = E/B \quad (2)$$

che sostituita nella (1) consente di ricavare il valore di (e/m) .

Il risultato ottenuto (approssimativamente 10^{11} C/kg) risultava circa mille volte più elevato del corrispondente rapporto relativo allo ione dell'idrogeno. Questo significava che i corpuscoli dei raggi catodici dovevano essere una nuova particella, molto più leggera dell'atomo di idrogeno, a quel tempo considerato come la particella materiale più leggera.

Nell'esperienza di laboratorio si adotta una procedura leggermente diversa da quella ora descritta: come verrà esposto dettagliatamente nel prossimo paragrafo gli elettroni vengono emessi da un filamento per effetto termoelettronico (e non ottenuti da una scarica in un gas rarefatto) ed accelerati in breve spazio da una differenza di potenziale nota. Inoltre anziché misurare la deflessione θ prodotta da un campo elettrico si misura il diametro dell'orbita circolare prodotta da un campo magnetico diretto ortogonalmente alla velocità degli elettroni.

3. Descrizione dell'esperienza

In un'ampolla di vetro di forma sferica (diametro $\sim 25 \div 30$ cm) e contenente gas idrogeno alla pressione di circa 10^{-2} torr sono posti in posizione eccentrica gli elettrodi per la produzione e l'accelerazione di un fascio filiforme di elettroni (Fig. 6).

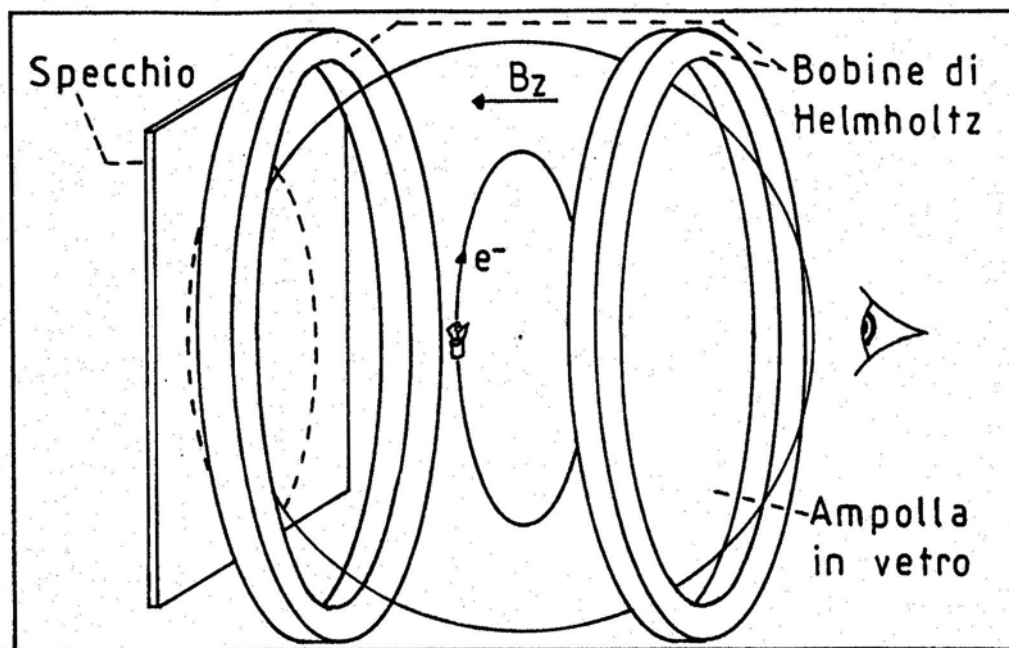


Figura 6: Schema del dispositivo per la misura del rapporto e/m .

Gli elettroni, emessi per effetto termoelettronico⁶ da un catodo riscaldato da un filamento percorso da corrente, sono accelerati dalla differenza di potenziale ΔV esistente tra catodo ed anodo. Questo ultimo, che si trova a pochi millimetri dal filamento, è forato per permettere il passaggio degli elettroni ed è opportunamente sagomato per formare un fascio di elettroni ben collimato (Fig. 7).

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica si può scrivere che l'energia cinetica, posseduta dagli elettroni all'uscita dagli elettrodi, è data da:

$$mv^2/2 = e \Delta V \quad (3)$$

avendo trascurato l'energia cinetica degli elettroni emessi dal filamento ($m v_0^2/2 \sim kT \sim 10^{-1}$ eV). L'energia acquistata dagli elettroni è sufficiente per produrre la transizione in uno stato eccitato degli atomi di idrogeno quando questi ultimi sono colpiti dagli elettroni. Gli atomi eccitati decadono poi molto rapidamente ($\Delta t \sim 10^{-8}$ s) sullo stato fondamentale (stato di energia minima) emettendo fotoni la cui lunghezza d'onda ($\lambda \sim 4500$ Å) corrisponde alla regione dell'azzurro-violetto.

L'ampolla è collocata al centro di una coppia di bobine di Helmholtz che, alimentate da una corrente di intensità I , producono al centro delle bobine stesse un campo d'induzione magnetica B_z di intensità:

⁶ L'effetto termoelettronico consiste nell'emissione di elettroni da parte di un metallo che viene portato ad alte temperature; infatti, a causa dell'agitazione termica, gli elettroni di valenza che hanno elevata mobilità all'interno del reticolo cristallino del metallo, acquistano una energia cinetica tale per cui un numero significativo di essi riesce a superare la barriera di potenziale che li tiene legati al reticolo cristallino stesso. Considerando che l'energia di legame degli elettroni di valenza è dell'ordine di 2-6 eV, si comprende come l'energia cinetica di agitazione termica debba essere appunto dell'ordine di qualche eV. Approssimando il valore dell'energia cinetica posseduta dagli elettroni secondo la teoria cinetica dei gas perfetti, ne risulta che deve essere $kT \sim 1$ eV, da cui $T \approx 10^4$ K. Di qui la necessità di impiegare per filamento un materiale alto fondente, cosicché si possa lavorare quanto più possibile a temperature elevate. Il Tungsteno ha una temperatura di fusione $T_f = 3680$ K, e quindi si presta a questo scopo: quando questo viene arroventato fino al raggiungimento di una colorazione rosso-arancione, raggiunge una temperatura di circa 1800 K. Per quanto sopra detto, a questa temperatura l'energia cinetica media di agitazione termica risulta essere solo una frazione della barriera di potenziale rappresentata dall'energia di legame. Tuttavia per effetto delle "code" delle curve Maxwelliane di distribuzione dell'energia, un numero significativo di elettroni possiede l'energia sufficiente per superare la barriera di potenziale ed essere emesso, dando così luogo all'effetto termoelettronico.

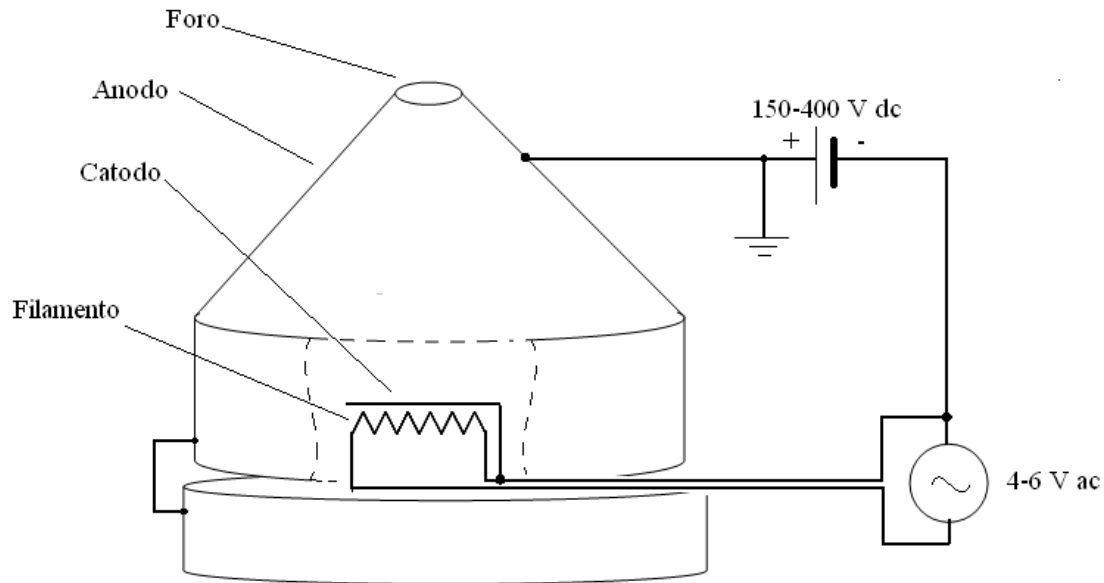


Figura 7: Schema di funzionamento del cannone elettronico per l'emissione ed accelerazione degli elettroni.

$$B_z(0) = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{NI}{R_b} \quad (4)$$

essendo N il numero di spire di una singola bobina ed R_b il suo raggio medio.

Poiché la configurazione delle bobine di Helmholtz (distanza tra la coppia di bobine = raggio medio delle bobine) è tale da produrre un campo altamente uniforme nella regione centrale (si veda l'Appendice D), si può assumere che il valore del campo magnetico sia dato dalla relazione (4) e che gli elettroni compiano sempre una traiettoria circolare qualunque sia il diametro dell'orbita.

Pertanto il raggio R della traiettoria circolare è determinato dall'equazione di moto:

$$m v^2/R = e v B_z \quad (5)$$

dove e ed m sono rispettivamente la carica e la massa a riposo dell'elettrone e B_z il campo d'induzione magnetica ortogonale alla velocità v dell'elettrone.

Dalle relazioni (3) e (5) si ricava l'espressione⁷.

$$e/m = 2 \Delta V / (B_z R)^2 \quad (6)$$

la quale mostra come il rapporto tra due grandezze microscopiche (e ed m) possa essere determinato mediante misure di grandezze macroscopiche (ΔV , B_z ed R).

Per una valutazione più precisa dell'intensità del campo d'induzione magnetica a cui sono soggetti gli elettroni si deve fare ricorso alla seguente relazione:

$$B_z(R) = \{(\mu_0 NI k) / [2\pi(R_b R)^{1/2}]\} [J_1 + \alpha J_2] \quad (7)$$

⁷ La velocità degli elettroni, pur essendo elevata ($v \sim 6 \div 8 \cdot 10^6$ m/s), è ancora piccola rispetto alla velocità della luce ($c \sim 3 \cdot 10^8$ m/s) e quindi la correzione relativistica è trascurabile.

dove le varie quantità presenti nella relazione (7) sono definite come segue:

$$k = \{(4R_b R)/[(R_b + R)^2 + z^2]\}^{1/2} \quad \alpha = (R_b^2 - R^2 - z^2)/[(R_b - R)^2 + z^2] \quad z = R_b/2$$

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} d\psi / (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi \quad (8)$$

dove J_1 e J_2 sono rispettivamente il I ed il II integrale ellittico di Legendre.

In Tabella I ed in Fig. 8 è riportato il fattore correttivo $\delta = B_z(R)/B_z(0)$ (relativo a bobine di Helmholtz con un raggio medio $R_b = 15.5$ cm) mediante il quale lo studente può correggere il valore fornito dalla relazione (2).

Tabella I
Fattore correttivo $\delta = B_z(R)/B_z(0)$

R(cm)	δ	R(cm)	δ	R(cm)	δ	R(cm)	δ
0.0	1						
0.2	0,99999	2.2	0,99982	4.2	0,99751	6.2	0,98727
0.4	0,99999	2.4	0,99974	4.4	0,99698	6.4	0,98542
0.6	0,99999	2.6	0,99964	4.6	0,99637	6.6	0,98337
0.8	0,99999	2.8	0,99952	4.8	0,99567	6.8	0,98109
1.0	0,99999	3.0	0,99937	5.0	0,99486	7.0	0,97857
1.2	0,99998	3.2	0,99918	5.2	0,99395	7.2	0,97578
1.4	0,99997	3.4	0,99895	5.4	0,99291	7.4	0,97272
1.6	0,99995	3.6	0,99868	5.6	0,99173	7.6	0,96936
1.8	0,99992	3.8	0,99835	5.8	0,99041	7.8	0,96567
2.0	0,99987	4.0	0,99796	6.0	0,98893	8.0	0,96164

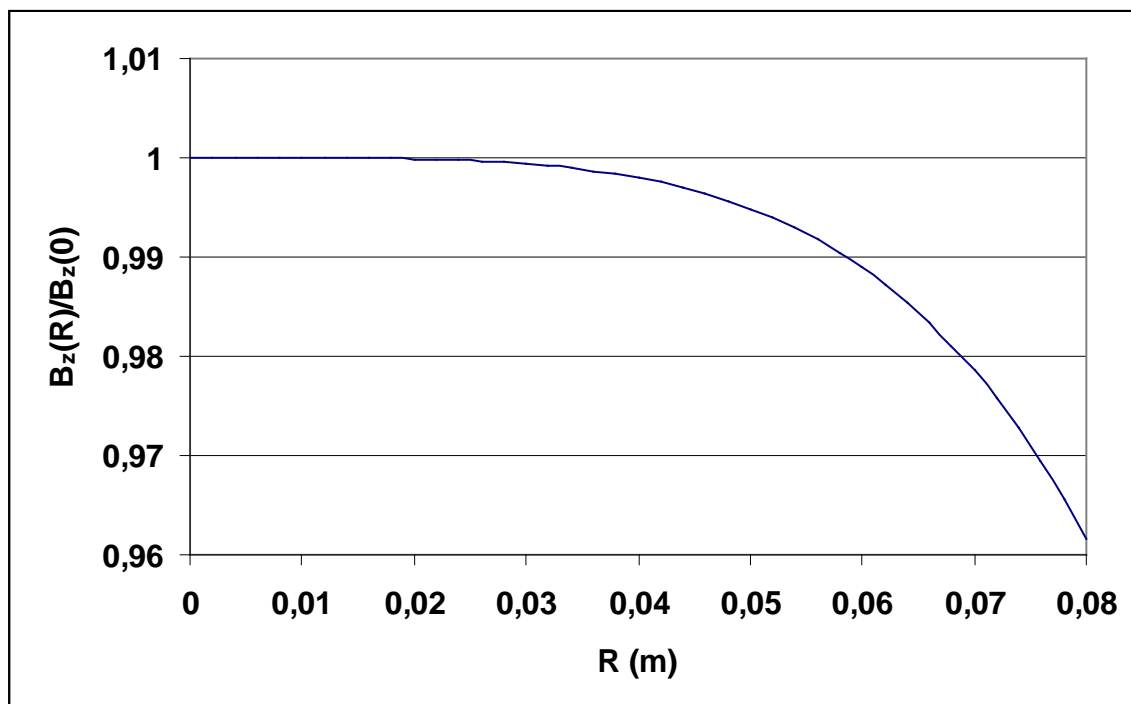


Figura 8: Andamento del fattore correttivo δ (vedere testo).

4. Procedura sperimentale

L'alimentazione del filamento in corrente alternata è ottenuta con un trasformatore ($V_f = 6.3 \text{ V}$) mentre l'alimentazione anodica ($\Delta V = 0 \div 300 \text{ V}$) è fornita da un generatore di tensione continua stabilizzata entro $\pm 0.1\%$. In alcuni casi sul circuito di alimentazione del filamento è inserito un timer in maniera che quest'ultima venga disattivata dopo un certo periodo di funzionamento allo scopo di salvaguardare la valvola (durata del filamento).

L'alimentazione delle bobine di Helmholtz è fornita da un generatore ($I = 0 \div 8 \text{ A}$) stabilizzato a $\pm 0.1 \%$. La lettura della tensione anodica e della corrente di alimentazione delle bobine è effettuata con due tester digitali a 3 cifre. Il raggio medio R_b ed il numero N di spire di ciascuna bobina sono parametri caratteristici del particolare dispositivo in dotazione e sono forniti dal costruttore.

Poiché la sorgente di elettroni si trova posizionata ad una distanza d (d è all'incirca uguale ad $R_b/3$) dal centro delle bobine, è opportuno variare i parametri di tensione (ΔV) e di campo magnetico (mediante l'intensità di corrente I) in maniera che il diametro della traiettoria sia approssimativamente sempre uguale a $2d$.

La misura del diametro della traiettoria circolare degli elettroni è in genere affetta dall'errore percentuale più elevato (tipicamente 1-2%). Per facilitare la misura l'apparato è dotato di uno specchio posto sulla parete posteriore. L'osservatore, allo scopo di evitare errori di parallasse, deve riguardare in corrispondenza di un diametro della circonferenza in maniera che si sovrappongano:

- il traguardo mobile che scorre lungo la guida posta alla quota della sorgente di elettroni
- la traccia luminosa degli elettroni,
- l'immagine riflessa dallo specchio.

Alcuni apparati sono dotati di un sistema di puntamento (mirino) che può essere traslato lungo un calibro in maniera da consentire una maggior precisione di misura del diametro della traiettoria degli elettroni.

Determinata, mediante un ago magnetico, la direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre si orienta l'asse delle bobine in direzione ortogonale a tale direzione e si procede alla misura di e/m . In tale condizione l'errore sistematico dovuto alla presenza della componente orizzontale del campo magnetico terrestre risulta essere minimo (dell'ordine di 0.1-0.2%).

Terminate le misure con questa disposizione si ruoti il dispositivo di 90° (in maniera che la componente orizzontale del campo magnetico terrestre sia orientata lungo l'asse delle bobine di Helmholtz). Si ripetano le misure nella nuova disposizione sperimentale. In questo caso l'errore sistematico (nel caso si trascuri l'effetto del campo magnetico terrestre) è dell'ordine di $\pm 8\%$ nelle condizioni sopra riportate ($\Delta V = 200 \text{ V}$ ed $R = 0.06 \text{ m}$). Sarà compito dello studente determinare se la componente del campo magnetico terrestre ha lo stesso verso o verso opposto rispetto alla componente assiale del campo magnetico generato dalle bobine.

Al termine di queste misure lo studente effettuerà una misura della componente orizzontale locale del campo magnetico terrestre (si veda paragrafo successivo) allo scopo di correggere i dati di misura.

Lo studente deve ripetere per diversi valori di ΔV e di I la misura del diametro della circonferenza e riportare in grafico i valori sperimentali ponendo in ascisse il termine $2 \Delta V_i$ ed in ordinate il termine $(B_i R_i)^2$. Il coefficiente angolare della retta, ricavato con il metodo dei minimi quadrati fornisce il rapporto m/e . Si noti che è stato riportato in ascisse il termine $2 \Delta V_i$ (anziché il termine $(B_i R_i)^2$) in quanto l'applicazione del metodo dei minimi quadrati richiede che in ascissa vengano riportate le quantità non affette da errore (o comunque affette dall'errore minimo).

Lo studente individui le possibili fonti di errori sistematici e ne fornisca una stima; faccia inoltre una valutazione dell'errore su (e/m) risultante dalla propagazione degli errori e lo confronti con lo scarto tra il valore desunto con il metodo dei minimi quadrati ed il valore di (e/m) internazionalmente accettato ($e/m = 1.7588 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$).

5. Misura della componente orizzontale del campo magnetico terrestre

La misura viene effettuata utilizzando un ago magnetico ed una coppia di bobine di geometria nota e misurando l'intensità di corrente con la quale si devono alimentare le bobine per ottenere una deflessione prefissata θ dell'ago magnetico. Nella Fig. 9 è mostrato uno schema del dispositivo di misura. Allo studente si consiglia la seguente procedura per la messa a punto del dispositivo e per la esecuzione della misura:

- Si realizza il circuito mostrato nel lato sinistro della Fig. 9. L'inserzione della resistenza R in serie alle bobine ($R = 50 - 150 \Omega$) è necessaria per poter regolare in maniera fine l'intensità di corrente da inviare nelle bobine.
- Si orientano le bobine (con corrente nulla) ed il goniometro ad esse solidale in maniera che l'ago magnetico risulti diretto nella direzione 0° - 180° del goniometro. La precisione con cui si ottiene questa configurazione può essere stimata entro $\pm 1^\circ$.
- Si misurano le intensità di corrente necessarie per deflettere l'ago magnetico di un angolo θ prefissato sia in senso orario che in senso antiorario. La media delle intensità di corrente

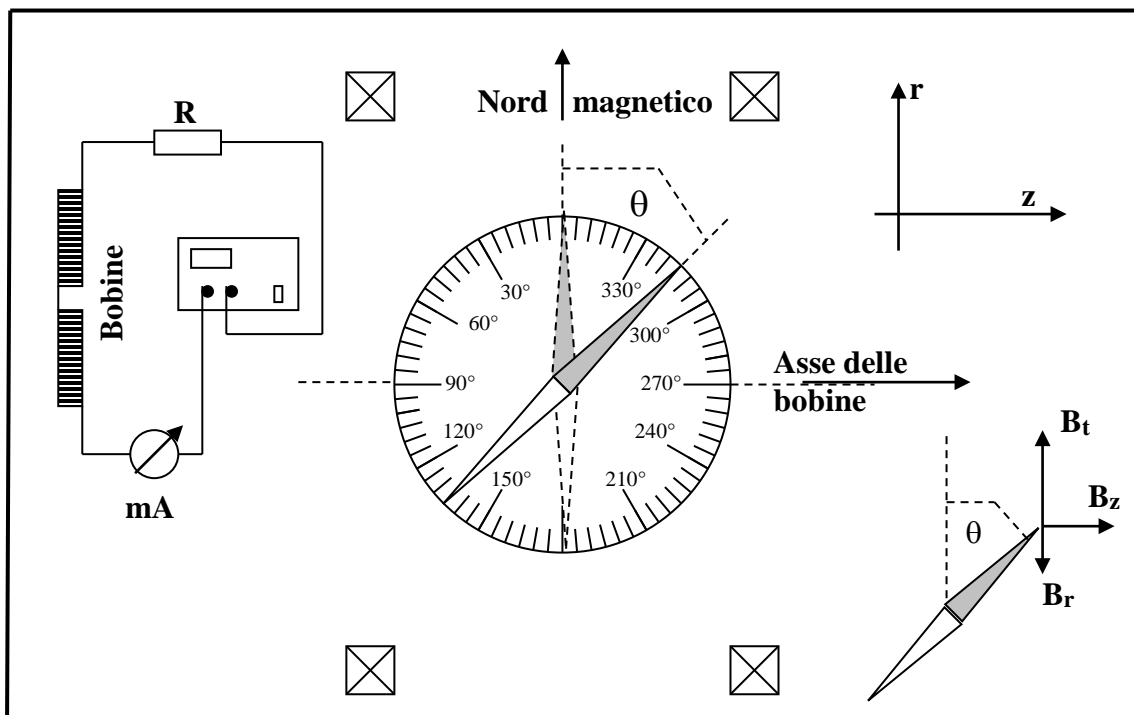


Figura 9: Schema del dispositivo per la misura della componente orizzontale del campo magnetico terrestre.

consente di eliminare l'errore di orientazione iniziale e l'eventuale errore di centraggio dell'ago magnetico rispetto alla scala goniometrica. Per evitare che l'ago si arresti in certe posizioni a causa degli attriti conviene far oscillare l'ago attorno alla posizione di equilibrio raggiunta (è sufficiente un piccolo soffio diretto sull'ago).

- d) Assumendo che le masse magnetiche siano concentrate alle due estremità dell'ago magnetico, la condizione di equilibrio raggiunta da questo ultimo, come si può ricavare dallo schema riportato in basso nella parte destra di Fig. 9, è data da:

$$B_z / (B_t - B_r) = \tan \theta \quad (9)$$

essendo B_t la componente orizzontale del campo magnetico terrestre e B_z , B_r le componenti del campo magnetico generato dalle bobine. Il segno negativo dinnanzi alla componente B_r tiene già conto del fatto che questa componente è di verso opposto alla componente orizzontale del campo magnetico terrestre.

- e) Per il calcolo delle componenti del campo generato dalle bobine lo studente utilizzi i dati riportati in Tabella II e calcoli per una intensità di corrente di alimentazione delle bobine $I_0 = 100$ mA, tenendo presente che l'ago magnetico ha una lunghezza $L = 2R = 10$ cm. Il valore della componente orizzontale del campo magnetico terrestre è quindi dato da:

$$B_t = (I/I_0) (B_z \cotg \theta + B_r) \quad (10)$$

essendo I l'intensità di corrente misurata per la deflessione θ ed $I_0 = 100$ mA

Tabella II

Componenti del campo di induzione magnetica generato dalle bobine (per $I_0 = 100$ mA)

	R = 1.0 cm		R = 2.0 cm		R = 3.0 cm		R = 4.0 cm		R = 5.0 cm	
θ (°)	B_z (G)	B_r (mG)	B_z (G)	B_r (mG)	B_z (G)	B_r (mG)	B_z (G)	B_r (mG)	B_z (G)	B_r (mG)
0	1.5119	0.0	1.5080	0.0	1.5005	0.0	1.4877	0.0	1.4671	0.0
5	1.5120	0.2	1.5082	1.0	1.5009	2.5	1.4886	5.6	1.4691	11.0
10	1.5121	0.4	1.5086	1.9	1.5020	4.9	1.4914	10.7	1.4750	20.9
15	1.5122	0.6	1.5092	2.7	1.5039	7.0	1.4957	15.0	1.4839	28.9
20	1.5124	0.8	1.5101	3.4	1.5063	8.7	1.5012	18.2	1.4951	34.2
25	1.5126	0.9	1.5111	3.9	1.5091	9.9	1.5073	20.1	1.5072	36.7
30	1.5129	1.0	1.5122	4.3	1.5121	10.6	1.5136	20.7	1.5190	36.2
35	1.5132	1.1	1.5135	4.6	1.5150	10.7	1.5196	20.1	1.5295	33.3
40	1.5135	1.2	1.5147	4.6	1.5179	10.5	1.5248	18.6	1.5379	28.6
45	1.5138	1.2	1.5159	4.5	1.5205	9.8	1.5291	16.3	1.5438	22.8
50	1.5141	1.1	1.5170	4.3	1.5228	8.9	1.5324	13.6	1.5471	16.7
55	1.5143	1.1	1.5181	4.0	1.5246	7.8	1.5345	10.9	1.5480	11.0
60	1.5146	1.0	1.5190	3.5	1.5261	6.6	1.5357	8.3	1.5472	6.2
65	1.5148	0.9	1.5198	3.0	1.5272	5.3	1.5362	5.9	1.5450	2.5
70	1.5150	0.7	1.5204	2.5	1.5280	4.2	1.5362	4.0	1.5423	0.1

MISURA DELLA CARICA DELL'ELETTRONE (ESPERIENZA DI MILLIKAN)

1. Scopo dell'esperienza

Misura della carica dell'elettrone impiegando il dispositivo ed il metodo messo a punto da Thomson e perfezionato da Millikan, consistente nel misurare la velocità di sedimentazione di goccioline elettricamente cariche in assenza ed in presenza di un campo elettrico diretto secondo la verticale.

2. Breve introduzione storica

Questo esperimento può considerarsi l'atto conclusivo di un ciclo di osservazioni sperimentali, iniziato con lo studio della scarica elettrica nei gas rarefatti, con la scoperta dei raggi catodici e proseguito con le misure su tali raggi per scoprirne la natura sino all'esperimento decisivo di J.J. Thomson mediante il quale si determinò il rapporto m/q di tali particelle.

Fu appunto l'osservazione che tale rapporto ($m/q \approx 10^{-11}$ kg/C) era circa tre ordini di grandezza più piccolo del corrispondente rapporto per l'idrogeno ($m_H/q_H \approx 10^{-8}$ kg/C, ricavato dalle misure elettrolitiche) a spingere J.J. Thomson ed i suoi collaboratori a provare che era la massa m dei raggi catodici e non la loro carica q responsabile del piccolo valore di tale rapporto. Poiché una determinazione diretta della massa di una particella atomica non era praticabile egli si ripromise di misurare la carica q , assumendo sulla base di tutta una serie di osservazioni sperimentali che essa dovesse essere uguale o almeno dello stesso ordine di grandezza della carica q_H dello ione idrogeno.

In quello stesso periodo il fisico scozzese Wilson stava studiando nel laboratorio di Thomson la formazione della nebbia ed aveva osservato che gli ioni agiscono come nuclei di condensazione, formando una gocciolina d'acqua quando il vapore viene raffreddato (a Wilson si deve l'invenzione della camera a nebbia che porta il suo nome e con la quale si possono vedere le tracce prodotte da particelle cariche, ad esempio i raggi cosmici).

Il gruppo di Thomson pensò di sfruttare questo processo per misurare la carica degli ioni gassosi che si producevano durante l'elettrolisi. In primo luogo, facendo condensare le goccioline d'acqua che si formano attorno agli ioni, riuscirono a misurare sia la massa totale M_t , sia, mediante un elettrometro molto sensibile, la loro carica totale Q_t . Una misura della massa media m_o delle goccioline consente di ricavare il valore medio della carica q_o trasportata da ogni gocciolina:

$$q_o = (m_o/M_t) Q_t \quad (1)$$

La misura di m_o fu ottenuta in maniera indiretta osservando con un microscopio il loro moto di sedimentazione nell'aria e misurando la loro velocità limite v_∞ che consentiva di risalire al raggio della gocciolina $[r \div (v_\infty)^{1/2}]$ e quindi alla sua massa. Infatti il moto delle goccioline sferiche in aria (trascurando la spinta archimedeica) è descritto dall'equazione:

$$m_o a = m_o g - 6 \pi \eta r v \quad (2)$$

essendo m_o la massa della gocciolina, r il suo raggio ed η la viscosità dell'aria. Quando si verificano le condizioni stazionarie ($a = 0$ e $v = v_\infty$) si ottiene:

$$(4\pi/3) r^3 \delta g = 6 \pi \eta r v_\infty \quad (3)$$

dove δ è la densità della gocciolina. Da una misura della velocità limite (conoscendo il coefficiente di viscosità dell'aria, l'accelerazione di gravità locale e la densità dell'acqua) si ricava il raggio della gocciolina e quindi la sua massa:

$$r = (9 \eta v_{\infty} / 2 g \delta)^{1/2} \quad m_o = (4 \pi / 3) \delta (9 \eta v_{\infty} / 2 g \delta)^{3/2} \quad (4)$$

Con questo metodo Twonsend nel 1897, dopo una ripetuta serie di misure, trovò che la carica media q_o dello ione era approssimativamente:

$$q_o = 1.0 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (5)$$

Un perfezionamento della tecnica fu apportato da Wilson nel 1903 con l'introduzione di un campo elettrico, diretto come la forza peso. Dalle misure condotte con il nuovo dispositivo Wilson trovò per la carica q_o il seguente intervallo di valori:

$$q_o = 0.7 \div 1.4 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (6)$$

Lo schema logico del metodo impiegato da Thomson e dai suoi collaboratori è illustrato in Fig. 1.

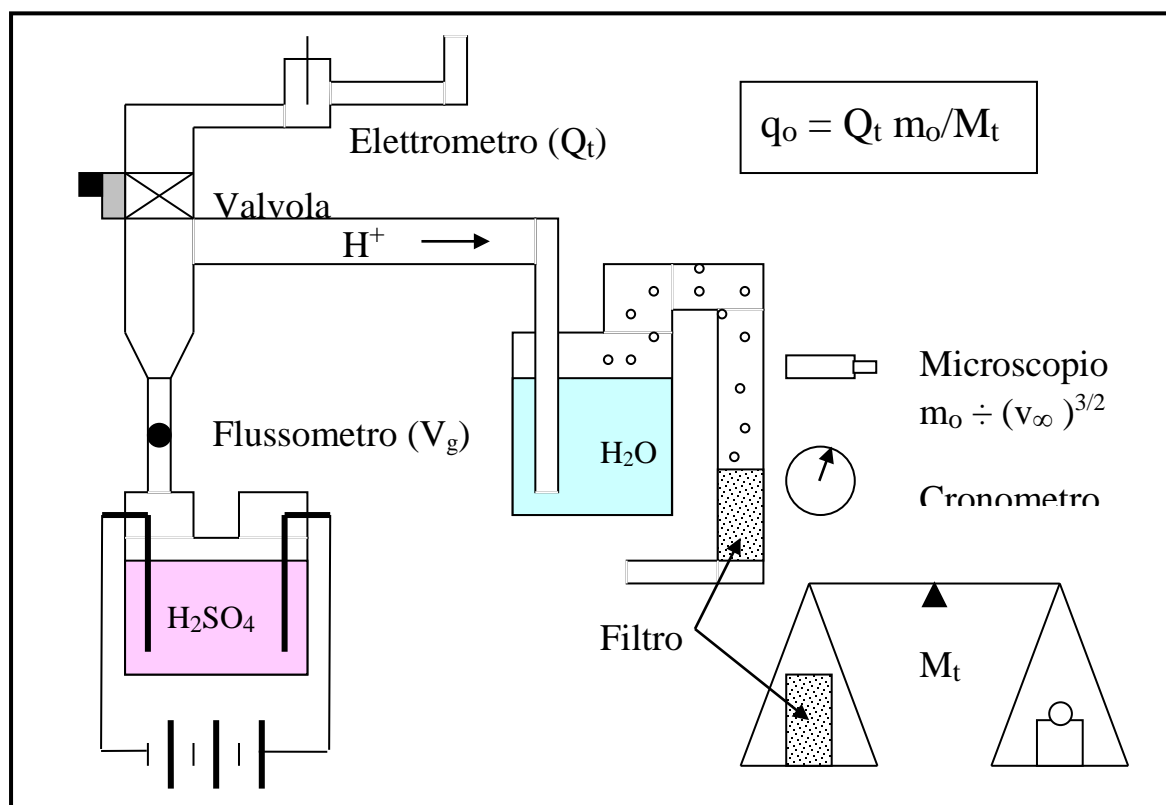


Figura 1: Schema logico dell'apparato di Twonsend.

Sono state brevemente illustrate le motivazioni che hanno portato alla misura della carica dei raggi catodici e le procedure per arrivare a tale misura allo scopo di far comprendere che i risultati conseguiti da Millikan con le sue misure (1909 – 1915) poggiavano su metodologie già collaudate. Il merito di Millikan è stato senza dubbio quello di perfezionare la tecnologia di misura che gli ha consentito di misurare con buona precisione la carica presente su una singola gocciolina anziché ottenerne il valore come media da un elevato numero di goccioline.

3. Descrizione del metodo di misura di Millikan

Anziché usare goccioline d'acqua che vengono condensate dagli ioni gassosi che si producono durante il processo di elettrolisi, Millikan produsse con un normale spruzzatore goccioline microscopiche d'olio, alcune delle quali risultavano elettrizzate (per strofinio all'uscita dello spruzzatore). Per aumentare il numero di goccioline elettrizzate si possono utilizzare sia una sorgente di raggi X sia una sorgente radioattiva che caricano elettricamente le goccioline d'olio (mediante ionizzazione diretta delle goccioline oppure mediante ionizzazione del gas e successiva cattura degli elettroni da parte delle goccioline d'olio). In Fig. 2 è riportato uno schema dell'apparato originale impiegato da Millikan.

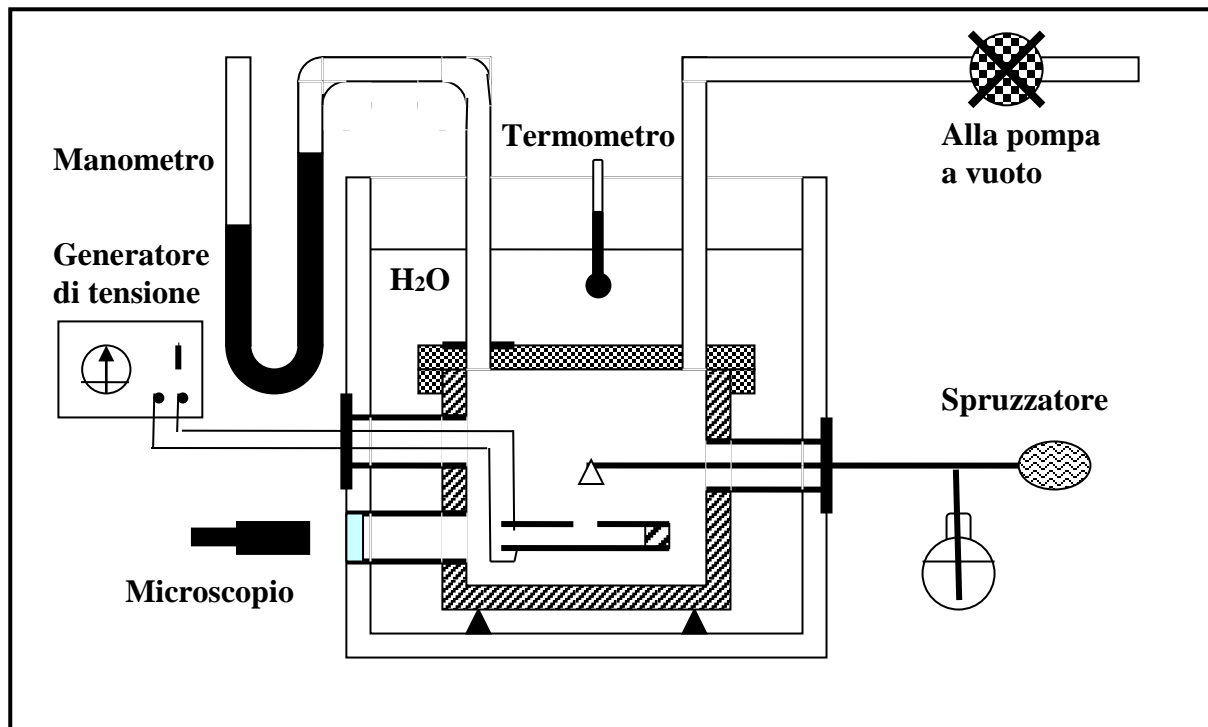


Figura 2: Schema dell'apparato originale di Millikan

La misura della carica elettrica presente sulla gocciolina d'olio richiede di effettuare la misura della velocità di sedimentazione della gocciolina stessa in assenza di campo elettrico ($\underline{E} = 0$) ed in presenza di un campo elettrico ($\underline{E} = \pm E_0 \underline{k}$, cioè diretto come la forza peso oppure diretto in verso opposto). Assumendo che l'asse z sia diretto verso il basso (nello stesso verso della forza peso) si potranno scrivere in condizioni di moto stazionario (cioè quando a causa dell'attrito viscoso la gocciolina ha raggiunto la velocità limite) le seguenti equazioni:

- a) In assenza di campo elettrico:

$$(4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) g - 6 \pi \eta r v_o = 0 \quad (7)$$

dove r è il raggio della gocciolina, ρ_o e ρ_a rispettivamente la densità della gocciolina d'olio e dell'aria, g l'accelerazione di gravità locale, η la viscosità dell'aria e v_o la velocità limite in assenza di campo elettrico.

- b) In presenza di un campo elettrico E :

$$(4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) g - 6 \pi \eta r v + q E = 0 \quad (8)$$

essendo v la nuova velocità limite.

Il segno meno presente nel secondo termine delle equazioni (7) e (8) rende conto del fatto che l'attrito viscoso si oppone sempre alla direzione del moto e quindi deve essere di segno opposto rispetto alla velocità.

Combinando la relazione (7) con la (8) per eliminare il termine η , si ottiene:

$$q = - (4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) (g/E) (1 - v/v_o) \quad (9)$$

Allo scopo di rendere più chiara la relazione (9), conviene considerare separatamente il caso in cui $v > 0$ (v diretta verso il basso, in seguito indicato simbolicamente con $v \downarrow$) e quello in cui $v < 0$ ($v \uparrow$). Ovviamente la prima situazione si verificherà quando sulla gocciolina prevarranno forze dirette verso il basso [quindi $qE > 0$ oppure $qE < 0$ e $|qE| < (4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) g$] mentre il secondo caso quando prevarranno forze dirette verso l'alto [quindi $qE < 0$ e $|qE| > (4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) g$]. Esplicitando pertanto il segno di v , la relazione (9) diventa:

$$q = - (4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) (g/E) (1 - v/v_o) \quad \text{per } v > 0 (v \downarrow) \quad (10)$$

$$q = - (4\pi/3) r^3 (\rho_o - \rho_a) (g/E) (1 + |v|/v_o) \quad \text{per } v < 0 (v \uparrow) \quad (11)$$

Ovviamente le relazioni (8) e (9) sono del tutto generali, valide qualunque sia il segno di E . Ciò che contraddistingue un caso dall'altro è unicamente il verso del moto della gocciolina: quando il verso del moto è verso il basso ($v \downarrow$), vale la relazione (10), mentre se il moto è verso l'alto ($v \uparrow$), vale la relazione (11). Inoltre appare evidente che il segno della carica q , nel caso di moto verso l'alto ($v \uparrow$), è determinato unicamente dal verso del campo elettrico (E è positivo se punta verso il basso e negativo se punta verso l'alto), mentre nel caso di moto verso il basso ($v \downarrow$) il segno di q dipende anche dal rapporto v/v_o .

Le quantità ρ_o , ρ_a , g , E , contenute nelle espressioni (10) e (11) sono note o facilmente misurabili, pertanto in linea di principio la determinazione della carica q presente sulla gocciolina richiederebbe la misura delle velocità limite v_o in assenza del campo elettrico ($E = 0$) ed in presenza di un solo campo elettrico (che produca una nuova velocità limite v positiva o negativa) e del raggio r della gocciolina. In realtà conviene effettuare le misure della velocità limite per ognuna delle tre situazioni ($E = 0$, $v > 0$, $v < 0$) in quanto esse consentono di minimizzare gli errori dovuti agli eventuali effetti dei moti convettivi dell'aria, prodotti, ad esempio, da gradienti termici. Alla determinazione del raggio r della gocciolina si risale mediante la relazione (7), essendo noto il coefficiente di viscosità η dell'aria. Accurate misure effettuate dal gruppo di ricerca di Millikan ha mostrato che la viscosità effettiva dell'aria, oltre a dipendere dalle condizioni di temperatura e pressione, dipende anche dal raggio della gocciolina (in quanto le dimensioni della gocciolina sono dello stesso ordine di grandezza del libero cammino medio delle molecole del gas) secondo le seguenti relazioni:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta / [1 + b/(pr)] \quad (12)$$

$$\eta \text{ (N s m}^{-2}\text{)} = [1.800 + (t - 15) 4.765 \cdot 10^{-3}] \cdot 10^{-5} \quad (13)$$

dove t è la temperatura (in gradi centigradi) e p la pressione (in pascal) dell'aria presente nella cameretta di misura e b una costante che per l'aria vale $b = 8.2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}$.

Dalle relazioni (7) e (12) si ricava il raggio della gocciolina d'olio:

$$r = [(b/2p)^2 + 9 \eta v_o / (2 g (\rho_o - \rho_a))]^{1/2} - b/2p \quad (14)$$

4. Descrizione del dispositivo di misura e delle procedure

In Fig. 3 è mostrata una vista dall'alto della piattaforma sulla quale sono installati i vari componenti del dispositivo, mentre in Fig. 4 è mostrata una vista esplosa della camera di Millikan.

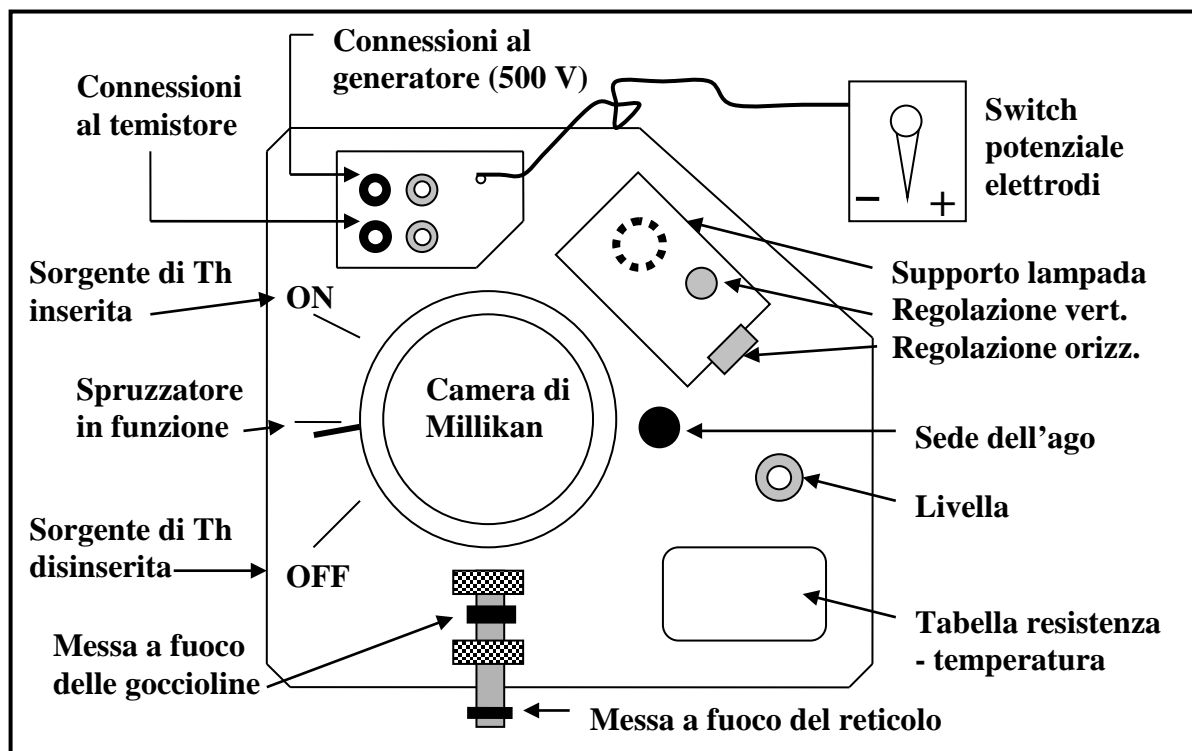


Figura 3: Vista dall'alto della piattaforma con i vari componenti del dispositivo

L'esecuzione delle misure richiede dapprima una messa a punto dell'apparato. Nel seguito sono riportate in maniera sintetica la sequenza delle operazioni e le procedure consigliate:

- Verificare che lo strumento sia in bolla. Eventualmente procedere alla correzione mediante le viti calanti della piattaforma.
- Aprire la camera di Millikan ed estrarre i vari componenti (ad esclusione dell'elettrodo inferiore).
- Misurare lo spessore d del distanziale isolante con un micrometro (almeno in 5 o 6 punti). Questa misura serve per determinare l'intensità del campo elettrico $E = \Delta V/d$.
- Rimettere in posizione il distanziale, l'elettrodo superiore e la parete laterale. E' essenziale inserire anche la parete laterale, prima di passare al punto successivo, in quanto essa è dotata della lente che serve per focalizzare la luce al centro della camera stessa.
- Estrarre con cura l'ago dalla sua sede ed inserirlo con cura nel foro praticato nell'elettrodo superiore.

f) Alimentare la lampada alogena.

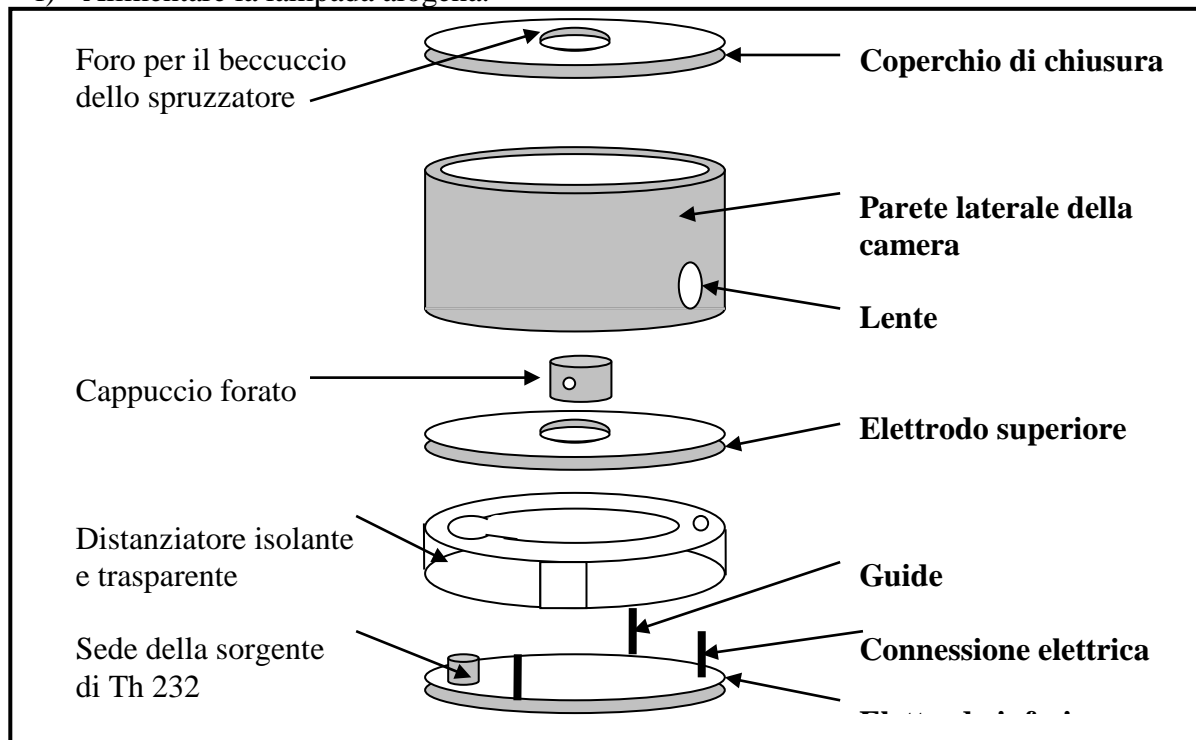


Figura 4: Vista esplosa della camera di Millikan

- g) Mettere a fuoco il reticolo del microscopio. La distanza tra due righe del reticolo corrisponde a 0.5 mm (quadrettatura “grossa” del reticolo).
- h) Mettere a fuoco l’ago. Regolare la posizione orizzontale ed eventualmente anche la posizione verticale della lampada in maniera che il lato destro dell’ago presenti la massima brillantezza. Occorre fare attenzione di non esagerare negli spostamenti orizzontali della lampada perché si corre il rischio che la molla di spinta esca dalla sede e quindi non consenta più di regolare gli spostamenti. Qualora capitasse questo inconveniente chiamare gli assistenti di laboratorio.
- i) Estrarre con cura l’ago riponendolo nella sua sede e rimettere il cappuccio forato (verificando che il foro verticale sia in comunicazione con la cameretta sottostante e non sia otturato). Chiudere la camera con il coperchio.
- j) Connettere il generatore di tensione ed impostare la tensione di lavoro prescelta ($\Delta V = 400 - 450$ V).
- k) Connettere il tester ai terminali del termistore e misurare la sua resistenza elettrica. I dati di Tabella I consentono di convertire i valori misurati della resistenza nei valori della temperatura d’esercizio. Verificare e registrare periodicamente la temperatura (tipicamente ogni 15-20 minuti).

Tabella I
Resistenza elettrica del termistore in funzione della temperatura

t (C)	R (M Ω)	t (C)	R (M Ω)	t (C)	R (M Ω)	t (C)	R (M Ω)	t (C)	R (M Ω)	t (C)	R (M Ω)
10	3.239	15	2.700	20	2.300	25	2.000	30	1,774	35	1.603
11	3.118	16	2.610	21	2.233	26	1.950	31	1.736	36	1.574
12	3.004	17	2.526	22	2.169	27	1.902	32	1.700	37	1.574
13	2.897	18	2.446	23	2.110	28	1.857	33	1.666	38	1.521

14	2.795	19	2.371	24	2.053	29	1.815	34	1.634	39	1.496
----	-------	----	-------	----	-------	----	-------	----	-------	----	-------

- l) Prima di spruzzare l'olio attraverso il foro superiore del coperchio, verificare il funzionamento dello spruzzatore su un foglio di carta. Portare la leva che si trova a sinistra della camera nella posizione "Spruzzatore in funzione" (con questa operazione si pone in comunicazione la cameretta con l'ambiente esterno e si evitano sovrapressioni e turbolenze nella cameretta).
- m) Entro pochi secondi si vedranno molte goccioline nel campo del reticolo. Inserire per una decina di secondi la sorgente di Th. Mediante il commutatore, che consente di escludere (posizione centrale del commutatore) o di cambiare la polarità degli elettrodi, si potrà aumentare la velocità di sedimentazione o invertire la velocità e mantenere nel campo del reticolo un numero limitato di goccioline elettricamente cariche. Su una stessa gocciolina si possono ripetere più misure della velocità di sedimentazione, in assenza ed in presenza del campo elettrico E. Conviene registrare periodicamente il tempo di volo, ad esempio per ogni tratto di 0.5 mm (distanza tra due tacche principali del reticolo), in quanto questo consente di verificare se durante la sedimentazione la gocciolina ha conservato la carica iniziale oppure se ha mutato stato di carica. Con questa procedura vengono rigettati soltanto quei dati di misura relativi all'intervallo di tempo in cui si è prodotta la variazione dello stato di carica della gocciolina e si hanno a disposizione dei dati relativi a due stati di carica.
- n) Disponendo di un computer da tavolo conviene predisporre mediante Excel una tabella in cui inserire i vari dati di misura ed eventualmente una prima elaborazione dei dati stessi. In Tabella II sono riportati i valori dei dati noti

Tabella II

Accelerazione di gravità a Milano	$g = 9.806 \text{ m/s}^2$
Densità dell'olio	$\rho_o = 860 \text{ kg/m}^3$
Densità dell'aria ($p = 1 \text{ atm}$)	$\rho_a = 1.293 \text{ kg/m}^3$
Pressione atmosferica	$1 \text{ Atm} = 101325 \text{ Pa}$
Costante per la correzione della viscosità	$b = 8.2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}$

5. Analisi dei dati

Una prima analisi dei dati, da cui ricavare i valori delle cariche q per ciascuna delle goccioline d'olio osservate, può essere effettuata al termine delle misure. A titolo d'esempio in Tabella III sono riportati i dati bruti e quelli di prima elaborazione, ottenuti mediante misure effettuate su due goccioline d'olio, registrando progressivamente i tempi di volo su basi di lunghezza $\Delta z = 0.5 \text{ mm}$. Si noti come nel caso della seconda gocciolina lo stato di carica si è certamente modificato nel corso della misura (misura con il campo elettrico diretto verso l'alto: $\Delta V = -200 \text{ V}$) passando da un valore $Q_1 \approx 6e$ ad un valore $Q_2 \approx 5e$. In questo caso la scelta di registrare i tempi di volo ad ogni stadio della base (cioè con passo $\Delta z = 0.5 \text{ mm}$) anziché soltanto alla fine della base totale (corrispondente ad un percorso complessivo di 2.5 mm) consente di utilizzare i dati di misura immediatamente precedenti ed immediatamente successivi alla variazione dello stato di carica. In Tabella IV sono riportati i dati relativi agli stati di carica misurati su parecchie goccioline d'olio, valori ricavati dai tempi di volo (con e senza campo elettrico) su basi $\Delta z = 0.5 \text{ mm}$ ed ordinati per cariche crescenti.

Per una analisi più approfondita e per estrarre dai dati di misura il valore più probabile da assegnare alla carica dell'elettrone conviene adottare la seguente procedura:

- a) Dalla analisi degli stati di carica si può desumere che l'incremento minimo degli stati di carica assume valori compresi tra circa $1.5 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e circa $1.7 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Pertanto la ricerca del

valore più probabile da attribuire alla carica elementare sarà limitata a questo intervallo di valori.

Tabella III

Dati di misura bruti e di prima elaborazione relativi a due goccioline d'olio

d (elettrodi) = 7.6 10 ⁻³ m			R (termistore) = 2.17 MΩ			T = 22 °C		
η = 1.83 10 ⁻⁵ N s m ⁻²			Pressione = 1.1 10 ⁵ Pa			ρ _o -ρ _a = 858.7 kg/m ³		
Δz = 0.5 10 ⁻³ m								
ΔV = 0			ΔV = 300 V			ΔV = - 300 V		
t (s)	v _o (μm/s)	r (μm)	t (s)	v ₁ (μm/s)	Q (C)	t (s)	v ₂ (μm/s)	Q (C)
15.2	32.9	0,529	4.3	116.3	3.34E-19	10.3	48.5	3.25E-19
30.8	32.1	0.521	8.7	113.6	3.23E-19	20.7	48.1	3.23E-19
45.7	33.6	0.534	13.2	111.1	3.13E-19	31.1	48.1	3.23E-19
60.6	33.6	0.534	17,4	119.0	3.45E-19	41.6	47.6	3.21E-19
76.5	31.4	0.516	21,7	116.3	3.34E-19	52.0	48.1	3.23E-19
ΔV = 0			ΔV = 200 V			ΔV = - 200 V		
t (s)	v _o (μm/s)	r (μm)	t (s)	v ₁ (μm/s)	Q (C)	t (s)	v ₂ (μm/s)	Q (C)
11.5	43.5	0.613	2.7	185.2	1.01E-18	5.4	92.6	9.74E-19
22.8	44.2	0.619	5.3	192.3	1.06E-18	10.7	94.3	9.87E-19
34.0	44.6	0.622	8.1	178.6	9.63E-19	17.1	78.1	8.71E-19
45.4	43.9	0.616	10.8	185.2	1.01E-18	24.2	70.4	8.16E-19
57.1	42.7	0.608	13.7	172.4	9.19E-19	31.4	69.4	8.09E-19

Tabella IV

Stati di carica misurati su una base dei tempi di volo $\Delta z = 0.5 \text{ mm}$

3.13E-19	4.71E-19	4.84E-19	6.41E-19	6.55E-19	7.84E-19	9.33E-19	1.25E-18
3.21E-19	4.71E-19	4.84E-19	6.43E-19	6.55E-19	7.88E-19	9.38E-19	1.26E-18
3.23E-19	4.72E-19	4.85E-19	6.45E-19	6.56E-19	7.94E-19	9.44E-19	1.26E-18
3.23E-19	4.73E-19	4.86E-19	6.46E-19	6.57E-19	7.95E-19	9.52E-19	1.27E-18
3.23E-19	4.73E-19	4.88E-19	6.48E-19	6.58E-19	7.96E-19	9.60E-19	1.28E-18
3.23E-19	4.75E-19	6.31E-19	6.49E-19	7.76E-19	8.01E-19	9.65E-19	1.29E-18
3.25E-19	4.76E-19	6.31E-19	6.51E-19	7.76E-19	8.04E-19	9.72E-19	1.29E-18
3.34E-19	4.79E-19	6.33E-19	6.52E-19	7.77E-19	8.09E-19	9.80E-19	1.29E-18
3.34E-19	4.81E-19	6.35E-19	6.53E-19	7.79E-19	8.11E-19	9.82E-19	1.30E-18
3.45E-19	4.83E-19	6.37E-19	6.54E-19	7.81E-19	8.13E-19	9.82E-19	1.30E-18

- b) Indicati con Q_i i valori assoluti delle cariche misurate e con $q > 0$ la variabile “libera” da attribuire alla carica elementare, si determina la seguente quantità:

$$S(q) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{Q_i}{k_i(q)} - q \right]^2 \quad (15)$$

dove $k_i(q)$ è l'intero (maggiore di zero) più vicino al rapporto Q_i/q [questo valore si ottiene come parte intera della quantità $(Q_i/q + 0.5)$] ed N rappresenta il numero dei dati di carica elettrica misurata. Tale funzione rappresenta lo scarto quadratico tra i valori misurati Q_i / k_i

ed il valore atteso q . La funzione $S(q)$, nell'intervallo di valori indicato nel punto a), presenta un minimo. Il valore di q_e corrispondente al minimo della funzione $S(q)$ rappresenta il valore più probabile da attribuire alla carica elementare in base alla serie di dati di misura raccolti. La derivata di $S(q)$ rispetto a q presenta delle discontinuità nei punti q in cui almeno un intero $k_i(q)$ subisce una variazione. Tuttavia, nella zona del minimo da determinare, esiste sicuramente un intorno di q in cui tutti gli interi $k_i(q)$ siano costanti, e quindi $S(q)$ in tale intorno è derivabile. Quindi una volta determinato graficamente l'intorno in cui è localizzato il minimo assoluto (e quindi in cui tutti gli interi k_i siano costanti), questo può essere determinato imponendo che si annulli la derivata della (15), ottenendo così:

$$q_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{k_i} \quad (16)$$

Nel grafico di Fig. 5 è mostrato l'andamento della funzione $S(q)$ desunta dai dati riportati in Tabella IV. Il valore più probabile, corrispondente al minimo della funzione $S(q)$ calcolato con la (16), è pari a:

$$q_e = 1.604 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

in eccellente accordo con il valore universalmente accettato ($q = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

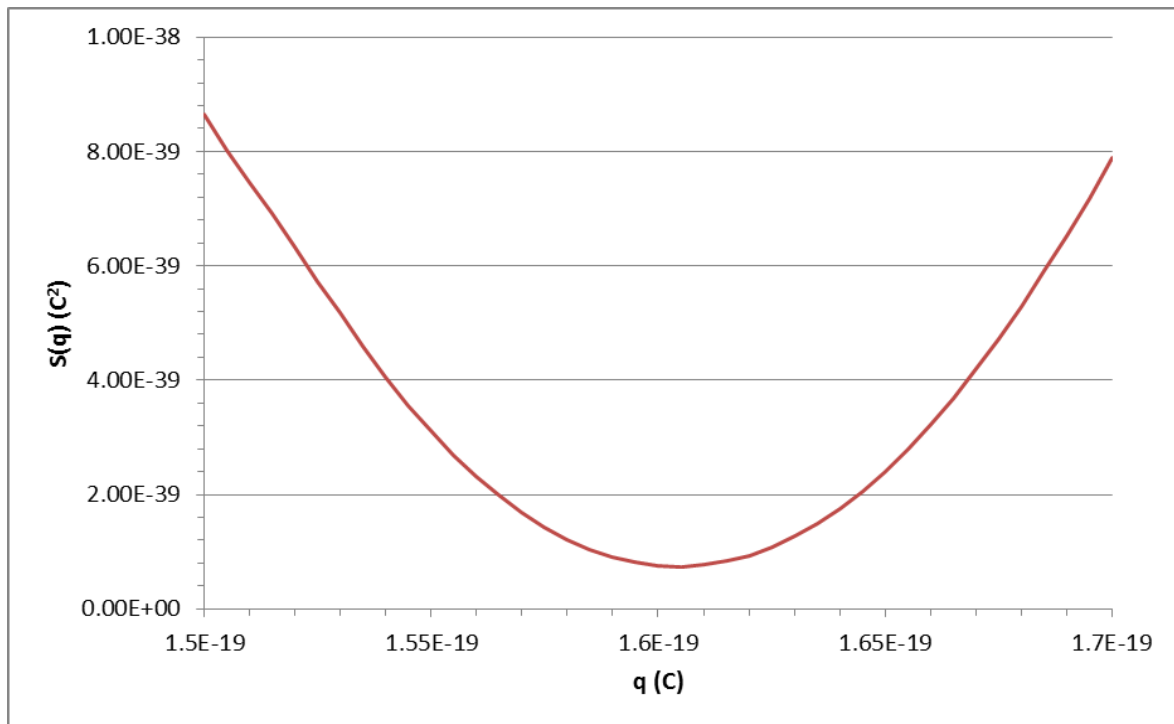


Figura 5: Andamento della funzione $S(q)$ ricavato dai dati di Tabella IV.

Poiché la durata dell'esperienza di laboratorio (in genere 4-5 ore) non consente allo studente di eseguire un numero elevato di misure (in genere i dati utili sono dell'ordine di $20 \div 30$ unità) il valore di q fornito da questo tipo di analisi può scostarsi anche del 2-3% dal valore universalmente accettato. La (16) mette in evidenza che il valore più probabile della carica elettronica q_e è determinabile come media delle quantità Q_i/k_i : questo permette di concludere che l'incertezza statistica σ_{q_e} da assumere per il valore di carica q_e sarà pari alla deviazione standard della media di tali quantità, cioè:

$$\sigma_{q_e} = \sqrt{\frac{S(q_e)}{N(N-1)}} \quad (17)$$

Sarà compito dello studente individuare le eventuali fonti di errore sistematico e valutarne l'entità.

Dispensa distribuita esclusivamente per uso personale. Vietata la distribuzione e diffusione a qualunque mezzo.

MISURA DELLA VELOCITA' DELLA LUCE

1. Scopo dell'esperienza

Misura della velocità della luce mediante il metodo di Foucault .

2. Breve introduzione storica

La prima misura della velocità della luce è stata opera dell'astronomo danese Olaus Roemer sulla base di osservazioni astronomiche sul moto di rivoluzione della luna più interna del pianeta Giove. Come più volte si è verificato nella ricerca lo scopo iniziale di tali osservazioni non era affatto quello di ricavare una misura della velocità della luce ma quello di verificare le leggi di Keplero nel caso dei satelliti. Dopo una lunga serie di osservazioni Roemer si decise a presentare nel 1676 una comunicazione veramente importante all'Accademia di Francia: le sue osservazioni ed i suoi calcoli sul passaggio dei satelliti di Giove nel cono d'ombra del pianeta l'avevano condotto alla convinzione che certe irregolarità sulla periodicità con cui i satelliti si eclissavano non erano certamente dovute ad errori di osservazione. Egli riteneva di non poter interpretare tali risultati in maniera diversa dal supporre che la luce non si propaga istantaneamente ma possiede una velocità finita. Nella comunicazione Roemer forniva una stima approssimata di tale velocità (pari a circa $2/3$ del valore oggi universalmente adottato).

Si possono ripetere le considerazioni svolte da Roemer per giungere a queste conclusioni. Egli aveva osservato che gli intervalli di tempo tra due successive eclissi della luna Io (luna più interna del pianeta Giove con un periodo di rivoluzione di circa 1.789 giorni) andavano aumentando quando la Terra si allontanava da Giove e diminuivano poi progressivamente quando la Terra nel suo moto si avvicinava a Giove.

Con riferimento allo schema di Fig. 1 nel quale si è assunto un sistema di riferimento che, con

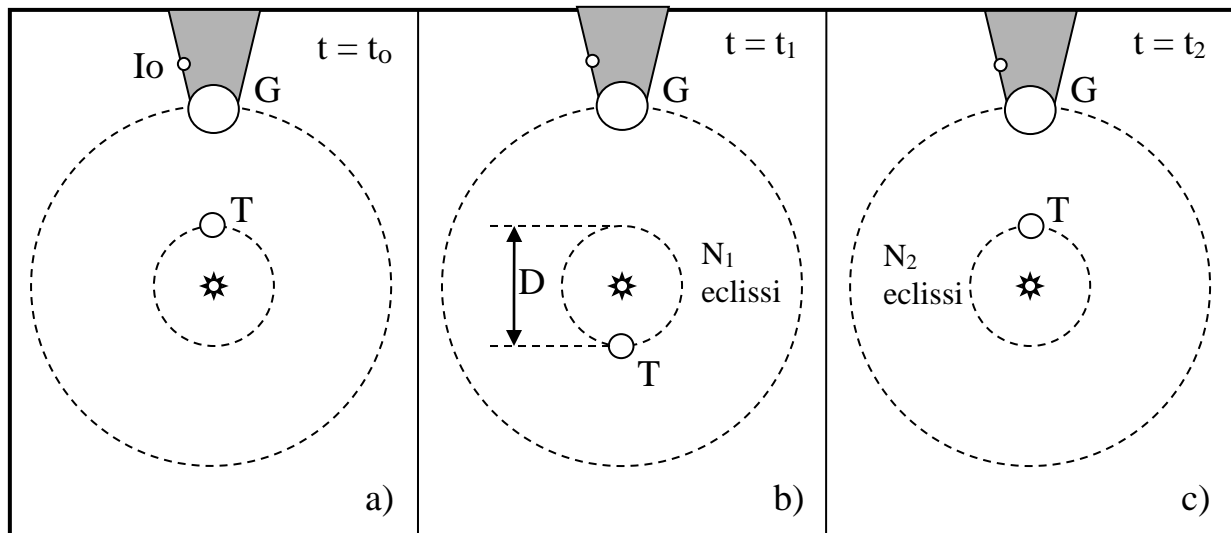


Figura 1: Schema del sistema Sole – Terra – Giove – Io in un sistema di riferimento che ruota con la stessa velocità angolare ω_g di Giove.

origine nel Sole, ruota con la velocità angolare ω_g di Giove ed avendo indicato con τ (supposto costante) il periodo di rivoluzione di Io attorno a Giove si potrà scrivere:

$$N_1 \tau + D/c = t_1 - t_0$$

$$N_2 \tau = t_2 - t_0$$

dove $t = t_0$ è l'istante iniziale in cui si osserva il primo passaggio nel cono d'ombra di Giove quando la Terra si trova alla minima distanza da Giove (Fig. 1a), D è il diametro dell'orbita terrestre, N_1 è il numero di passaggi nel cono d'ombra nell'intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$ in cui la Terra raggiunge il punto più lontano da Giove ed N_2 è il numero complessivo di passaggi di Io nel cono d'ombra di Giove, quando la Terra ha compiuto una rivoluzione relativa completa nell'intervallo di tempo $(t_2 - t_0)$ (cioè si ritrova di nuovo alla minima distanza da Giove).

Dalla misura di N_1 , N_2 , $(t_1 - t_0)$ e $(t_2 - t_0)$ si ricavano dalle precedenti relazioni le due quantità incognite:

$$\tau = (t_2 - t_0) / N_2$$

$$c = D / [(t_1 - t_0) - (N_1/N_2)(t_2 - t_0)]$$

Roemer ricavò dalle osservazioni effettuate che l'intervallo Δt di tempo impiegato dalla luce per compiere la distanza D era di circa 1320 s. Una serie di misure più estese compiute da Delambre portò al risultato $\Delta t = 986.4$ s. Assumendo per D il valore $2.974 \cdot 10^{10}$ m si ottiene:

$$c = 3.015 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Oltre al metodo di Roemer esiste un altro metodo astronomico basato sulla aberrazione della luce: fenomeno scoperto nel 1772 dall'astronomo inglese Bradley e consistente nella variazione della posizione apparente delle stelle per effetto della velocità con cui si sposta l'osservatore trascinato dal moto di rotazione e di rivoluzione della Terra.

La prima misura della velocità della luce eseguita su base terrestre (su una distanza dell'ordine di una decina di km) è dovuta a Fizeau (1849). Il vantaggio di impiegare un dispositivo terrestre (anziché osservazioni astronomiche) consiste nella possibilità di perfezionare la tecnica di misura per ottenere risultati via via più precisi ed inoltre nella possibilità di misurare la velocità della luce in un mezzo.

Il metodo di Fizeau è schematicamente illustrato in Fig. 2: una sorgente S di luce puntiforme e molto intensa viene focalizzata sulla periferia di una ruota dentata R dopo essere stata parzialmente riflessa da uno specchio semiargentato S' . Il fascio di luce che attraversa lo spazio vuoto tra due denti successivi della ruota viene inviato su uno specchio posto a grande distanza. Quando la ruota viene posta in rotazione si osserva che l'intensità del fascio di luce che ritorna sullo specchio semiriflettente decresce progressivamente man mano che la velocità angolare ω della ruota viene aumentata. Si osserva quindi un minimo di intensità quando il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza $2D$ risulta uguale al tempo richiesto affinché un dente della ruota abbia sostituito lo spazio inizialmente libero compreso tra due denti. Se la ruota possiede N denti e la velocità angolare, quando si osserva il minimo di intensità luminosa, è $\omega = \omega_0$ si potrà scrivere la seguente relazione:

$$2D/c = \pi/(\omega_0 N)$$

Aumentando la velocità angolare si osservano massimi e minimi di intensità luminosa, in corrispondenza di velocità angolari multiple di ω_0 . In generale si potrà scrivere:

$$2D/c = \pi n/(\omega_n N)$$

dove $\omega_n = n \omega_0$. La determinazione di ω_n per diversi minimi e massimi di intensità consente di ridurre l'errore di misura.

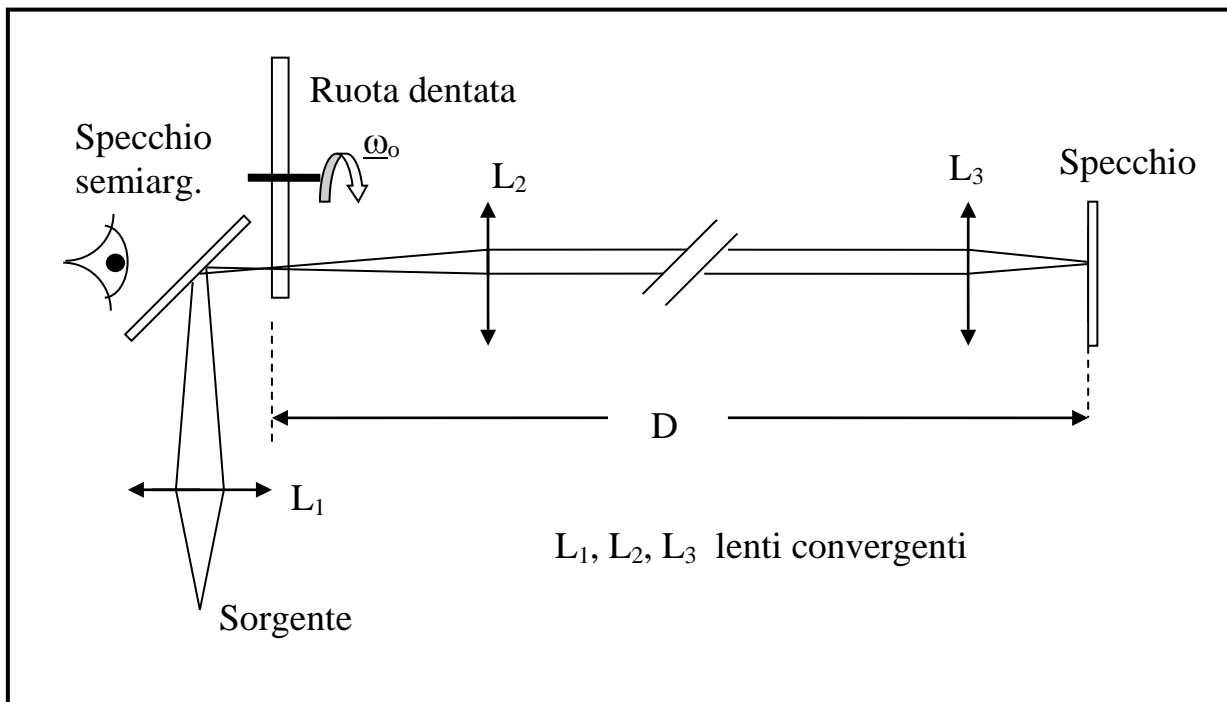


Figura 2: Schema del dispositivo di Fizeau

Il valore della velocità della luce nel vuoto si ottiene moltiplicando il valore misurato per l'indice di rifrazione dell'aria che è dato da:

$$n = 1 + (n_0 - 1) (p/p_0)(T_0/T)$$

dove $n_0 = 1,000294$, $p_0 = 760$ mmHg, $T_0 = 273.2$ K e p , T sono rispettivamente la pressione e la temperatura assoluta dell'aria registrate durante la misura.

Le misure della velocità della luce eseguite con sorgenti luminose terrestri ed impiegando basi per la misura del tempo di volo di alcune decine di chilometri sono proseguite con altri metodi [metodo di Foucault (1849-1867) – metodo di Foucault-Michelson (1879-1882), etc] che saranno descritti con maggiori dettagli nel prossimo paragrafo.

3. Descrizione dell'esperienza

Il dispositivo sperimentale originariamente utilizzato da Foucault è rappresentato schematicamente in Fig. 3.

La luce emessa dalla sorgente luminosa S , opportunamente diaframmata, attraversa una lastra semitrasparente PP disposta a 45° rispetto alla direzione di propagazione del fascio luminoso e viene focalizzata in S' sullo specchio concavo RR da una lente L dopo essere stata deflessa dallo specchio QQ rotante attorno ad un asse passante per N e normale al piano di incidenza del fascio.

La luce riflessa dallo specchio concavo e successivamente dallo specchio rotante dà luogo ad una immagine che si discosta tanto più dalla sorgente S quanto più elevata è la velocità angolare ω dello specchio QQ . Infatti nell'intervallo di tempo in cui la luce percorre per due volte la distanza $NS' = D$ lo specchio sarà ruotato di un angolo α e di conseguenza la lente L fornirà una immagine spostata rispetto alla sorgente S .

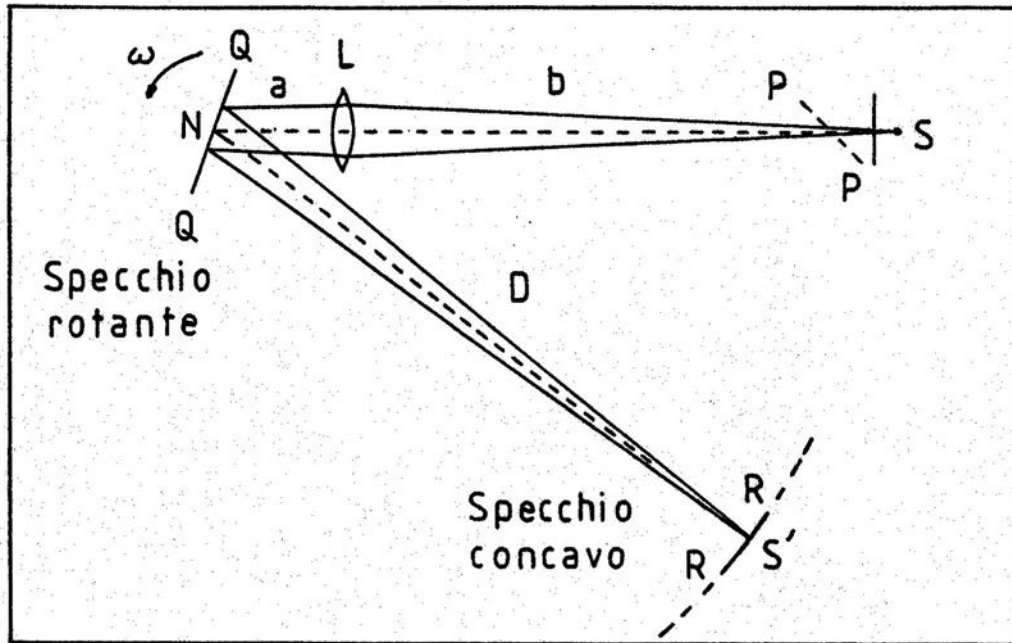


Figura 3: Dispositivo di Foucault per la misura della velocità della luce.

L'immagine che si forma sarà intermittente perché si produce soltanto mentre S' scorre sullo specchio concavo, tuttavia l'occhio umano percepirà una illuminazione costante (a causa della persistenza dell'immagine sulla retina dell'occhio) non appena la frequenza diventa superiore a qualche decina di Hz. L'angolo α di cui ruota lo specchio QQ nell'intervallo di tempo in cui la luce percorre il cammino $NS'N$ è dato da:

$$\alpha = 2 (D/c) \omega \quad (1)$$

essendo c la velocità della luce.

Il fascio luminoso di ritorno sulla lente L viene focalizzato come se provenisse da una sorgente S'' spostata rispetto ad S' della quantità:

$$\Delta = 2 \alpha D \quad (2)$$

Tenendo presente che il fattore di amplificazione G della lente L è esprimibile mediante la seguente relazione:

$$G = b / (D + a) \quad (3)$$

in cui b rappresenta la distanza SL ed a la distanza LN , lo spostamento laterale δ dell'immagine è dato da:

$$\delta = G \Delta = 2 \alpha b D / (D + a) = 4 D^2 b \omega / [c (D + a)] \quad (4)$$

Dalla misura sulla piastra semitrasparente dello spostamento $d' = d\sqrt{2}$ tra l'immagine diretta della sorgente S e l'immagine riflessa dallo specchio concavo si può risalire al valore della velocità c [essendo note o misurate le altre quantità a, b, D, ω che compaiono nell'espressione (4)]. Si noti che tra le quantità a, b e D e la distanza focale f della lente deve intercorrere la nota relazione dei punti coniugati:

$$1/(D + a) + 1/b = 1/f \quad (5)$$

Per ottenere spostamenti dell'ordine di 1 mm, utilizzando gli spazi a disposizione in un laboratorio (dell'ordine di 10 m) è necessario che la velocità angolare sia dell'ordine di 1000 rad/s (circa 10000 giri al minuto). Assumendo $\omega = 1000$ rad/s, $D = 10$ m, $a = 1$ m, $b = 9$ m si ottiene:

$$\delta = 1.092 \text{ mm} \quad f = 4.95 \text{ m} \quad (6)$$

Il problema maggiore in cui ci si imbatte con questa disposizione sperimentale è rappresentato dalla scarsa luminosità dell'immagine. Infatti il rapporto tra la luminosità dell'immagine e quella della sorgente sulla lastra semitrasparente è dato da:

$$R = \beta/(2\pi) = s/(2\pi D) \quad (7)$$

essendo β l'angolo di accettazione dello specchio concavo (l'angolo sotto il quale il diametro dello specchio è visto dalla distanza D) ed s la sua apertura. Per $s = 0.1$ m e $D = 10$ m si ha $R \sim 0.15\%$.

Un modo per aumentare la luminosità dell'immagine consiste nel realizzare lo specchio rotante in forma prismatica in maniera che il rapporto R venga aumentato di un fattore pari al numero di facce del prisma.

L'apparato sperimentale ora descritto è stato modificato da Michelson. La modifica consiste nel disporre la lente L (convergente e di grande apertura) nel tratto compreso tra lo specchio rotante e lo specchio fisso (Fig. 4).

In questo caso si può utilizzare uno specchio piano anziché concavo ed una disposizione in cui:

$$SN = 2f - a \quad NL = a \quad LS' = 2f \quad (8)$$

essendo f la distanza focale della lente L .

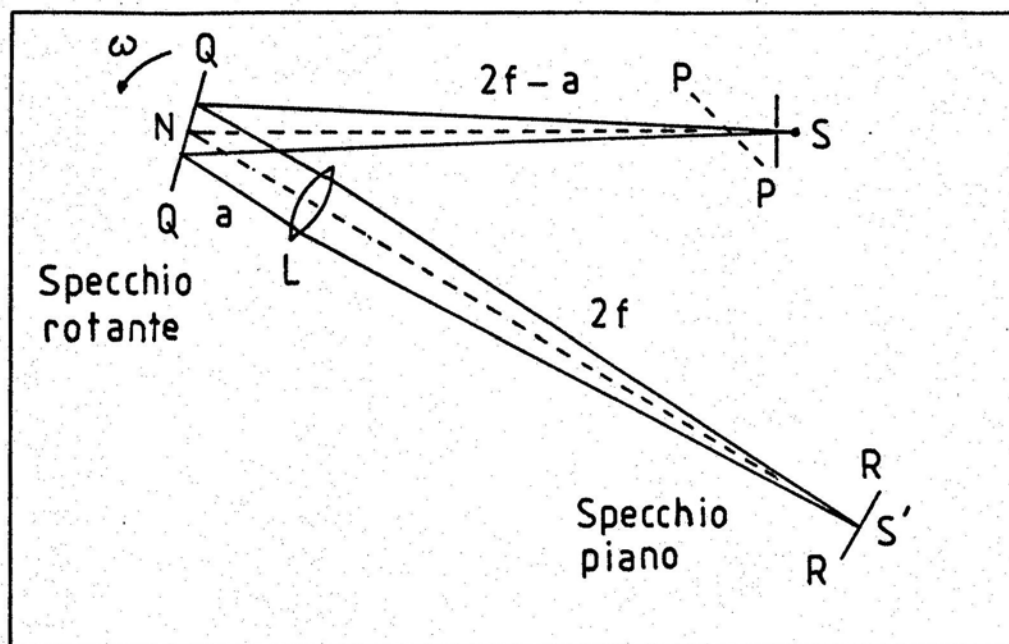


Figura 4: Apparato di Foucault modificato da Michelson.

Lo spostamento δ in questo caso è dato da:

$$\delta = 4(4f^2 - a^2) \omega/c \quad (9)$$

essendo:

$$\alpha = 2 NS' \omega/c = 2 (2f + a) \omega/c \quad \delta = 2 \alpha SN = 2 \alpha (2f - a) \quad (10)$$

Assumendo per f , ω ed a gli stessi valori presi in esame nel dispositivo di Foucault ($f = 4.95$ m, $\omega = 1000$ rad/s, $a = 1$ m) si ottiene:

$$\delta = 1.294 \text{ mm} \quad (11)$$

Con la modifica apportata si ha a parità di ingombro un incremento della separazione tra l'immagine e la sorgente ed un incremento di luminosità. Tale incremento è dovuto al fatto che con la lente L si può ottenere un angolo di accettazione β' ($\beta' = r/a$ essendo r l'apertura della lente) notevolmente maggiore dell'angolo di accettazione dello specchio concavo.

Nell'esperienza di laboratorio viene realizzato l'originale dispositivo di Foucault (opportunamente adattato) e non quello modificato da Michelson in quanto si impiega, come sorgente di luce, un laser che, possedendo una brillantezza molto più elevata delle sorgenti di luce normali, consente di ovviare al problema della riduzione della intensità luminosa nell'immagine.

4. Descrizione dell'apparato e della procedura sperimentale

4.1 Principali componenti dell'apparato di misura

I principali componenti dell'apparato di misura e la loro disposizione sono schematicamente rappresentati in Fig. 5. Per motivi di semplicità nella rappresentazione alcuni componenti (ad esempio il microscopio, lo splitter e gli specchi piani) sono stati disegnati nel piano del foglio mentre in realtà giacciono in piani ortogonali al foglio

Come sorgente di luce viene utilizzata una sorgente laser di piccola potenza ($\lambda = 632.8$ nm $W = 0.5$ mW) anziché una lampada ad incandescenza corredata di lente e fenditura di collimazione. Nonostante il laser possieda una potenza relativamente piccola, la sua luminosità (brillantezza) è molto elevata e può risultare dannosa per l'occhio umano durante le osservazioni dirette. Per questa ragione durante la messa a punto dell'apparato sperimentale gli studenti hanno a disposizione una coppia di lamine polaroid da inserire sul banco ottico tra il laser e la prima lente L_1 allo scopo di ridurre l'intensità del fascio di luce.

Lo specchio rotante (velocità angolare massima $\omega_{\max} = 9400$ rad/s) si trova all'interno di una camera protettiva con flangia in vetro e la sua superficie è lavorata otticamente (asperità inferiori a $\lambda/4$). Gli specchi fissi (sia quelli piani che quello concavo che ha un raggio di curvatura ≈ 13.5 m) sono orientabili rispetto alla direzione del fascio di luce incidente mediante viti micrometriche. Le loro superficie riflettenti si trovano sulla faccia anteriore che non deve essere quindi toccata durante le varie operazioni di messa a punto dell'apparato.

La lastra di vetro semiargentata (splitter) è inserita nello stesso supporto del microscopio ed è orientabile rispetto alla direzione del fascio laser, in maniera da inviare il fascio di ritorno al centro dell'oculare del microscopio. La superficie semiriflettente dello splitter deve trovarsi sulla seconda superficie rispetto al fascio proveniente dal laser.

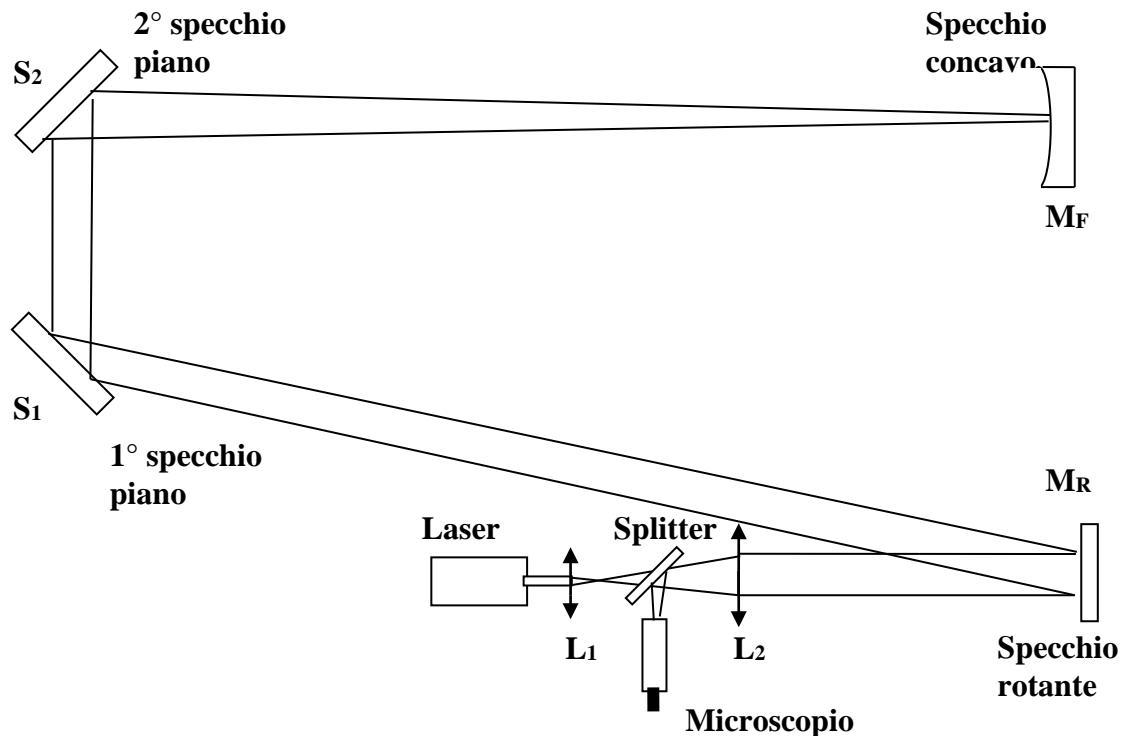


Figura 5: Dispositivo di Foucault impiegato nell'esperienza di laboratorio.

Una coppia di lenti convergenti L_1 (distanza focale $f_1 = 48$ mm) ed L_2 (distanza focale $f_2 = 252$ mm) consente di ottenere la minima sezione del fascio ("waist") a circa 50 mm dalla lente L_1 e sulla superficie dello specchio concavo M_F . Le lenti con il loro supporto possono essere spostate lungo il banco ottico e sono vincolate magneticamente ad esso. L'asse ottico delle due lenti può essere spostato entro alcuni mm in quanto queste ultime sono fissate magneticamente alle squadrette di supporto.

Nella Fig. 6 sono riportate due viste (vista laterale e vista dall'alto) del banco ottico e dei principali componenti che servono agli studenti per le operazioni di preparazione dell'apparato di misura.

Il dispositivo di misura è completato da un alimentatore del motore dello specchio rotante (non rappresentato nelle Figure 5 e 6) sul cui frontale si trovano;

- un interruttore di accensione ed un interruttore a tre posizioni: rotazione in senso orario (CW), rotazione in senso antiorario (CCW), stop (posizione centrale);
- una manopola per la variazione continua della velocità angolare sino a 1000 giri/s;
- un pulsante per il raggiungimento della velocità massima (circa 1500 giri/s) da non tenere premuto per più di 60 secondi consecutivi;
- un display digitale di lettura della velocità di rotazione con precisione ± 1 giro/s.

4.2 Procedura di messa a punto dell'apparato

La messa a punto dell'apparato richiede di allineare ed orientare i vari componenti ottici (lenti, splitter, specchi piani e specchio concavo) con buona precisione. Si consiglia di seguire la seguente procedura:

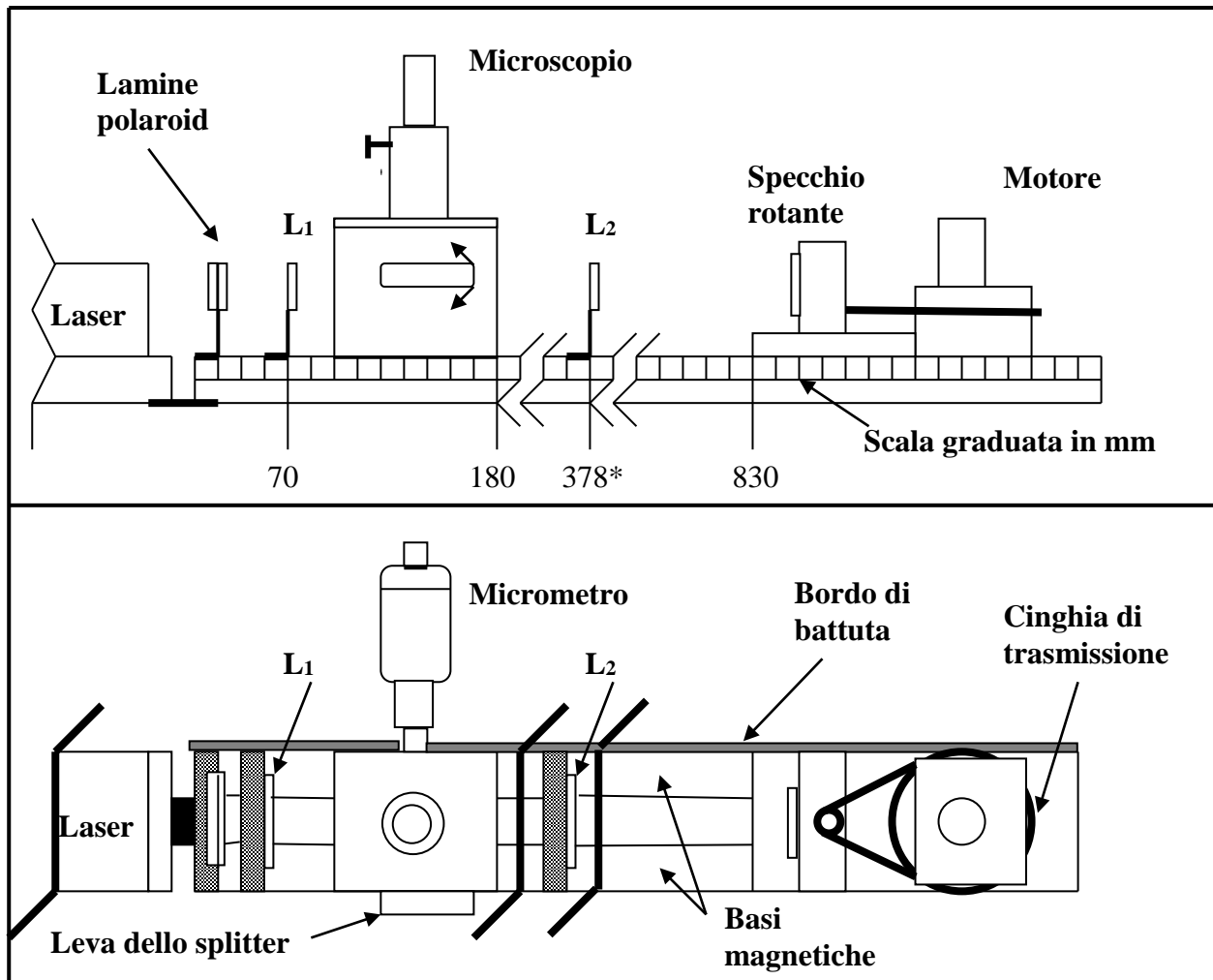


Figura 6: Vista laterale e vista dall'alto del banco ottico con i vari componenti.

- 1) Verificare che il fascio laser giunga al centro dello specchio rotante ponendo di fronte a questo ultimo una squadretta bianca (in dotazione al banco ottico) nella quale è praticato un foro che individua la posizione del centro dello specchio. Questa operazione di verifica viene effettuata in assenza delle lenti e dello splitter e con l'inserzione delle lamine polaroid. Si possono accettare scostamenti del fascio rispetto al foro dell'ordine di 1-2 millimetri. Per scostamenti maggiori conviene avvertire i responsabili del laboratorio che eventualmente provvederanno a correggere l'orientazione del laser.
- 2) Tolta (provvisoriamente) la squadretta bianca, orientare lo specchio rotante, agendo manualmente sulla cinghia di trasmissione del motore, sino a centrare il fascio riflesso sul foro d'uscita del laser (operazione di auto-collimazione). Questa operazione servirà in una fase successiva per centrare il fascio riflesso dallo specchio rotante e dallo splitter nel canotto del porta-microscopio [punto 6)]
- 3) Disporre la prima lente L_1 (distanza focale $f_1 = 48$ mm) a 70 mm (una tacca sul supporto della lente facilita il suo posizionamento rispetto alla scala graduata) e regolarne la posizione (destra-sinistra, alto-basso) rispetto al supporto in maniera che il fascio di luce risulti sempre centrato sul foro della squadretta bianca. Si noti che la macchia luminosa avrà un diametro di 25-30 mm e quindi il centraggio del fascio potrà essere effettuato con una precisione di alcuni mm (una precisione sufficiente per passare alle operazioni successive).

- 4) Inserire la seconda lente L_2 (distanza focale $f_2 = 252$ mm) a circa 378 mm della scala graduata. Questa lente ha lo scopo di produrre un “waist” sullo specchio concavo che si trova ad una distanza $D+a$ dalla lente stessa di circa 12-13 m; pertanto, come illustrato nella Fig. 7, la distanza tra la prima e la seconda lente deve essere maggiore della somma delle loro distanze focali ($f_1+f_2 = 300$ mm) di una quantità $d \geq b - f_2$ essendo b e $D+a$ legati dalla equazione delle lenti sottili ($1/b + 1/(D+a) = 1/f_2$). Poiché dai valori di $D+a \approx 13$ m ed $f_2 \approx 252$ mm si ricava che deve essere $d > 5.4-5.6$ mm la seconda lente è stata posta ad una distanza $s = 308$ mm dalla prima.

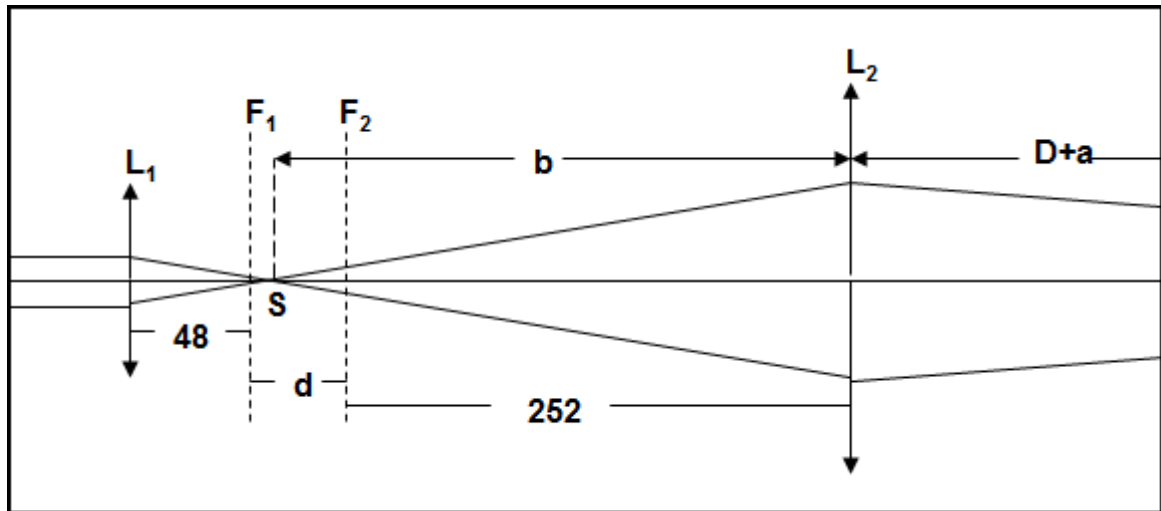


Fig. 7: Schema per valutare la distanza che deve intercorrere tra le due lenti. Il “waist” S prodotto dalla lente L_1 può non coincidere esattamente con il fuoco F_1 a causa della minima divergenza del raggio laser.

Anche in questo caso si deve verificare che il fascio sia sempre centrato sul foro della squadretta bianca. In caso contrario spostare l’asse ottico della lente sino a centrare il foro. In questo caso la macchia luminosa sulla squadretta avrà un diametro di circa 10 mm.

- 5) Tolta la squadretta bianca, inserire il porta-microscopio (senza il microscopio) in maniera che il bordo più distante si trovi a 180 mm sulla scala graduata. Inclinare lo splitter a 135° (avendo assunto come asse orientato la direzione ed il verso della luce emergente dal laser). Si può osservare il fascio riflesso dallo splitter su un foglietto di carta traslucida posto sul cannotto del porta-microscopio. La macchia luminosa deve risultare centrata, in caso contrario agire sulla leva dello splitter (per gli spostamenti lungo la direzione del banco ottico) e sul micrometro (per gli spostamenti in direzione trasversale). Assieme alla macchia più luminosa riflessa dallo specchio rotante e dallo splitter appaiono macchie meno intense dovute alla riflessione sulla seconda superficie dello splitter ed alla riflessione sulla seconda lente e sulla lastra di protezione dello specchio rotante.
- 6) Orientando lo specchio rotante (sempre agendo manualmente sulla cinghia di trasmissione) si invia il fascio sul primo specchio piano. Per seguire gli spostamenti della macchia luminosa si può intercettare il fascio laser con un foglio di carta bianca. In genere si osserverà che il fascio laser giunge sulla parte inferiore dello specchio piano. Questo spostamento verso il basso del fascio è causato dalla deviazione prodotta sul fascio dalla lastra dello splitter ed all’azione della seconda lente. Infatti nell’attraversare la lastra dello splitter il fascio, che in assenza dello splitter si trovava sull’asse ottico della seconda lente, viene spostato verso l’alto della quantità:

$$d = s \sin(i-r)/\cos r \quad (12)$$

dove s è lo spessore della lastra dello splitter ed i , r sono rispettivamente l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione. Questo spostamento verso l'alto si trasforma in una deviazione angolare del fascio in emergenza dalla seconda lente. Per correggere questo difetto è sufficiente spostare l'asse ottico della seconda lente di pochi decimi di mm verso l'alto, controllando direttamente gli effetti di tale spostamento sul centraggio della macchia luminosa sul primo specchio piano.

- 7) Agendo sulle viti micrometriche del primo specchio piano si invia il fascio al centro del secondo specchio piano. Si ripetono le stesse operazioni per inviare il fascio laser al centro dello specchio concavo.
- 8) Si deve verificare che l'immagine sullo specchio concavo rappresenti un "waist", eseguendo piccoli spostamenti della seconda lente lungo la direzione del banco ottico.
- 9) Agendo sulle viti micrometriche dello specchio concavo si rinvia il fascio laser verso lo specchio rotante in maniera che ripercorra in senso inverso lo stesso cammino dell'andata. In questa operazione ci si può aiutare con un foglio di carta con il quale si intercetta soltanto metà del fascio proveniente dal secondo specchio, in maniera da vedere sul bordo del foglio sia il fascio proveniente dallo specchio piano sia il fascio riflesso dallo specchio concavo. Si deve agire sulle viti micrometriche dello specchio concavo in maniera da far coincidere le due macchie luminose.
- 10) Inserire il microscopio nel cannotto e verificare che sia inserita la coppia di lamine polaroid prima di osservare al microscopio l'immagine della sorgente riflessa dai vari specchi. Si dovrà vedere una macchia luminosa su un fondo (meno luminoso) costituito da frange di interferenza. Facendo scorrere il microscopio all'interno del cannotto si deve ottenere una macchia luminosa ben focalizzata. Il centramento della macchia nell'oculare del microscopio si ottiene, come in precedenza, agendo sulla leva dello splitter e sul micrometro. Qualora nel campo visivo del microscopio non comparisse la macchia luminosa si controlli (togliendo il microscopio) con la carta traslucida che la macchia cada sull'asse del cannotto.
- 11) Per ridurre l'intensità del fondo che può disturbare l'osservazione della macchia luminosa quando viene posto in rotazione lo specchio si può inclinare la seconda lente di un piccolo angolo in maniera che la luce da essa riflessa e che giunge nel campo visivo del microscopio sia meno intensa.

Effettuate queste operazioni l'apparato è predisposto per consentire la misura della velocità della luce.

4.3 Esecuzione delle misure

Avendo inserito il microscopio [punto 10) del precedente paragrafo] si mette a fuoco il reticolo dell'oculare (agendo su questo ultimo) si mette a fuoco l'immagine della macchia luminosa spostando verticalmente il microscopio e la si porta al centro del reticolo. Per evitare di mettere a fuoco macchie luminose dovute a riflessioni secondarie è sufficiente intercettare il fascio luminoso tra lo specchio rotante e lo specchio concavo per vedere sparire la macchia luminosa alla quale si è interessati.

Avendo eseguito queste operazioni si può porre in rotazione lo specchio (ad una frequenza di rotazione ν_0 molto bassa, tipicamente 10-20 Hz). A questo punto si può togliere la coppia di lamine polaroid ed osservare nel microscopio la macchia luminosa che apparirà di intensità molto ridotta e pulsante. Qualora la macchia luminosa riflessa dallo specchio concavo dovesse essere sovrapposta alla striscia luminosa riflessa direttamente dallo specchio rotante, è sufficiente ruotare di un piccolissimo angolo lo specchio concavo in maniera da separare le due immagini.

Si misura quindi lo spostamento subito dalla macchia luminosa quando la velocità angolare dello specchio rotante passa da $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ alla velocità angolare massima ω_m (corrispondente a 1000 o 1500 giri/s). Conviene partire sempre da una pulsazione ω_0 diversa da zero in quanto consente di non perdere mai di vista la macchia luminosa tra una misura e l'altra.

Nella misura dello spostamento che occorre impartire alla base del microscopio mediante il micrometro per riportare la macchia luminosa al centro del reticolo quando la pulsazione passa da ω_0 ad ω_m lo studente deve avere l'avvertenza di ruotare sempre l'albero del micrometro nello stesso verso per evitare l'errore dovuto ad eventuali giochi meccanici dello strumento.

Si devono eseguire 25-30 misure dello spostamento della macchia luminosa per ogni senso di rotazione del motore (CW e CCW) per valori di ω sempre prossimi ad ω_m . Eseguire inoltre 25-30 misure passando da $\omega_0 = -\omega_m$ ad $\omega = +\omega_m$; in questo caso lo spostamento misurato con il micrometro risulta circa doppio di quello misurato nei due casi precedenti (non è possibile passare direttamente dalla modalità CW alla modalità CCW ma bisogna prima arrestare il motore).

La relazione che consente di risalire al valore della velocità della luce è ottenibile esplicitando la (4) in funzione di c . Tuttavia la distanza b tra la lente L_2 e il "waist" S non è misurabile direttamente (si veda Fig. 3 e Fig. 7). Per questo motivo conviene esprimere la grandezza b a partire dalla relazione dei punti coniugati, sapendo che nella regolazione della posizione della lente L_2 si è realizzata la condizione:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{D+a} = \frac{1}{f_2} \quad (13)$$

da cui:

$$b = \frac{f_2(D+a)}{D+a-f_2} \quad (14)$$

Sostituendo la (14) nella (4), considerando che alla velocità angolare ω_0 corrisponde uno spostamento δ_0 e alla velocità angolare ω corrisponde uno spostamento δ , sottraendo membro a membro i valori degli spostamenti, si può esplicitare il valore di c :

$$c = 4 f_2 D^2 (\omega - \omega_0) / [(D+a-f_2) \Delta\delta] \quad (15)$$

dove:

- ω velocità angolare finale dello specchio rotante
- ω_0 velocità angolare iniziale dello specchio rotante
- f_2 lunghezza focale della lente L_2
- D distanza tra lo specchio rotante M_R e lo specchio concavo M_F misurata lungo il cammino compiuto dal fascio di luce
- a distanza tra la lente L_2 e lo specchio rotante M_R

$\Delta\delta = \delta - \delta_0$ spostamento dell'immagine nel microscopio (misurato mediante il micrometro) quando

la velocità angolare passa da ω_0 ad ω .

Poiché $D \gg a$ ed inoltre $D \gg f_2$, dalla (15) appare evidente che un errore percentuale in D e f_2 si ripercuoterà in un altrettanto errore percentuale nel valore di c . Per questo motivo oltre a misurare D , sarebbe opportuno misurare in separata sede anche l'effettiva lunghezza focale della lente L_2 .

L'errore predominante di una singola misura è senz'altro rappresentato dalla misura di $\Delta\delta$: infatti gli spostamenti misurabili sono dell'ordine di qualche decimo di millimetro, a fronte di un errore di posizionamento col microscopio valutabile in qualche centesimo di millimetro (la risoluzione del micrometro è di per sé 0.01 mm). Nella trattazione dei dati sperimentali e dei risultati finali di c , converrà pertanto esprimere la velocità della luce come la media di tutte le misurazioni effettuate, in cui una parte di errore può essere assunta *casuale* (errore nella valutazione di $\Delta\delta$ e delle velocità angolari ω), valutabile perciò con l'ausilio della statistica, ad esempio considerando la deviazione standard della media; a tale errore va però aggiunto un errore che invece è da considerare *sistematico*, perché presente in tutte le misure e non diminuibile dalla statistica di tutte le misurazioni effettuate: esso è costituito dalla propagazione degli errori relativi alle quantità D , f_2 ed a .

APPENDICE A

1. Spettrometro

Per la misura dell'indice di rifrazione (misura dell'angolo diedro di un prisma e misura dell'angolo di minima deviazione) e per la misura della lunghezza d'onda di una radiazione (mediante un prisma o un reticolo) si utilizza uno speciale goniometro, indicato normalmente con il nome di spettrometro.

Esso è costituito (Fig. 1) da una base fissa B sulla quale, nella parte superiore, è incisa una scala goniometrica G, in genere con una graduazione di 0.5 gradi. Un collimatore F è solidale con la base mentre il cannocchiale C è solidale con la piattaforma girevole P₁. Una seconda piattaforma P₂, anch'essa girevole, costituisce il supporto del prisma o del reticolo. Entrambe le piattaforme sono coassiali alla base. Un piattello M, regolabile in altezza, può essere messo in bolla mediante tre viti di regolazione in maniera che il fascio di luce riflesso o rifratto dal prisma (oppure diffratto dal reticolo) risulti centrato, in verticale, rispetto all'asse ottico del cannocchiale.

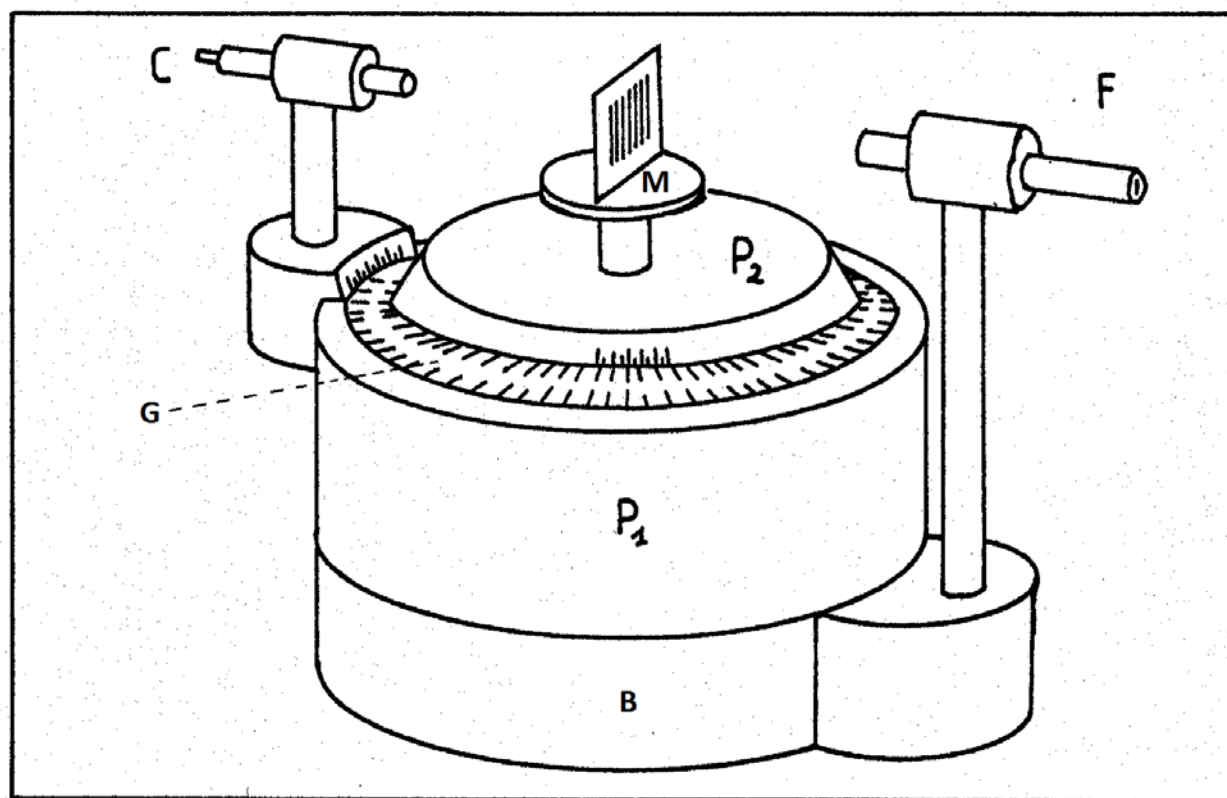


Figura 1: Schema del goniometro.

Due coppie di nonii (diametralmente opposti) sono incisi sulle due piattaforme girevoli e la loro lettura viene effettuata mediante un oculare.

Per una regolazione fine del posizionamento angolare del cannocchiale si agisce sulla piattaforma P₁ mediante la vite micrometrica V_{1m}, dopo aver bloccato la piattaforma stessa alla base B mediante la vite di serraggio V₁ (Fig. 2). Lo stesso tipo di operazione può essere effettuata per la regolazione fine della piattaforma P₂.

Il collimatore è costituito da un tubo che porta ad una estremità una fenditura verticale regolabile in ampiezza e posizionabile lungo l'asse del collimatore (entro 1 ÷ 2 cm) ed all'altra

estremità una lente convergente acromatica con una distanza focale all'incirca uguale alla lunghezza del tubo.

Il cannocchiale, dotato di un obbiettivo con distanza focale di $200 \div 250$ mm e di un oculare con reticolo fornisce una immagine della fenditura del collimatore con ingrandimento poco discosto dall'unità.

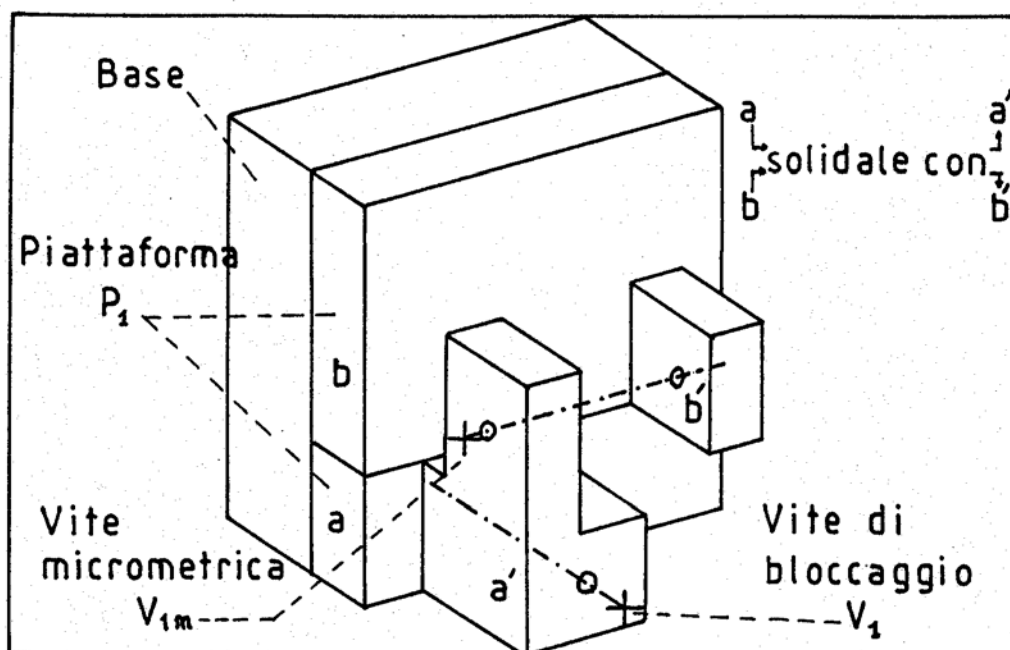


Figura 2: Schema del sistema di regolazione fine della piattaforma P_1 (e del cannocchiale).

Prima di effettuare qualsiasi misura con lo spettrometro è necessario procedere ad una regolazione sia del collimatore che del cannocchiale. Poiché di norma si deve operare in luce parallela si procede nel seguente modo. Si regola l'oculare sino a vedere in maniera nitida il reticolo, quindi spostando il sistema oculare-reticolo si accomoda il cannocchiale per la visione di oggetti posti all'infinito (è sufficiente mettere a fuoco nel piano del reticolo un oggetto posto alla distanza di una quindicina di metri). Regolato in questo modo il cannocchiale lo si orienta nella direzione del collimatore portando l'immagine della fenditura (illuminata con una sorgente di luce) al centro dell'oculare. Si regola quindi la distanza tra la fenditura del collimatore e la lente convergente sino ad ottenere una immagine nitida nel campo dell'oculare.

Per la misura della direzione angolare dei raggi, provenienti direttamente dal collimatore oppure riflessi o rifratti da un prisma oppure diffratti da un reticolo, si fa coincidere il reticolo dell'oculare con la mediana dell'immagine della fenditura. La posizione angolare viene determinata mediante i due nonii contrapposti facendo la media delle due letture: tale procedura elimina gli eventuali errori di eccentricità dell'asse di rotazione della piattaforma P_1 rispetto all'asse della scala goniometrica.

Di norma la graduazione della scala goniometrica è in gradi (e mezzi gradi) ed i nonii sono trentesimali (coprono cioè una apertura angolare di 14.5 gradi corrispondenti a 29 tacche sulla scala) per cui consentono la misura degli angoli con una sensibilità del primo di grado.

APPENDICE D

1. Bobine di Helmholtz

Una configurazione di bobine circolari particolarmente utile è quella in cui due bobine coassiali e di uguali dimensioni e caratteristiche sono poste ad una distanza pari al raggio medio delle bobine stesse. Ciascuna bobina ha spessore radiale e assiale piccolo rispetto al raggio medio delle spire, e quindi nella trattazione può essere applicata l'approssimazione di spira unica di spessore trascurabile. Tale sistema, noto come bobine di Helmholtz, è molto utilizzato negli esperimenti di fisica, perché ha il vantaggio di permettere un ampio e facile accesso nella zona di interesse posta tra le due bobine e consente nel contempo di ottenere la massima omogeneità della componente assiale B_z lungo l'asse del sistema ed in prossimità del suo centro.

Per dimostrare questa proprietà delle bobine di Helmholtz, si considererà una coppia di spire con asse diretto lungo z , di raggio R , separate da una generica distanza h e percorse dalla intensità di corrente I . La componente assiale del campo magnetico al centro di tale coppia si ricava in modo semplice conoscendo la relazione che dà il campo magnetico generato da una spira sul proprio asse, calcolabile mediante la prima legge di Biot-Savart di cui viene ricordato il risultato:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1)$$

dove l'asse della spira coincide con l'asse z e il piano della spira è posto in $z = 0$.

Se ora si considera una coppia di spire coassiali di raggio R , poste ad una distanza h e percorse dalla stessa intensità di corrente I , il campo magnetico al centro del sistema (posto in $z = 0$) sarà ottenibile utilizzando la (1) per ciascuna delle due spire e applicando il principio di sovrapposizione:

$$B_z(0) = \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + h^2/4)^{3/2}} \quad (2)$$

Il campo magnetico B_z in un punto qualsiasi dell'asse z può essere espresso mediante uno sviluppo in serie di Taylor:

$$B_z(z) = B_z(0) + \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3} \right|_{z=0} z^3 + \dots \quad (3)$$

Se si richiede la massima uniformità di campo nell'intorno di $z = 0$ sarà quindi necessario rendere uguale a zero i termini di ordine basso presenti nella (3).

Per ovvie ragioni di simmetria, il campo magnetico $B_z(z)$ risulta essere una funzione pari rispetto a z [$B_z(z) = B_z(-z)$], pertanto le derivate di ordine dispari che compaiono nella (3) sono di per sé già nulle. Il termine di ordine più basso che quindi compare nella (3) è quello del secondo ordine. Se si impone la condizione $h = R$ (condizione di Helmholtz), si riesce a mandare a zero proprio questo termine.

Per dimostrare ciò occorre esprimere in maniera esplicita il valore di $B_z(z)$ in $z \neq 0$, allo scopo di calcolarne le sue derivate; utilizzando opportunamente la (1) per ciascuna delle due spire, si ottiene:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + (z + h/2)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (z - h/2)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_z(z)}{\partial z} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{(z + h/2)}{\left[R^2 + (z + h/2)^2 \right]^{5/2}} + \frac{(z - h/2)}{\left[R^2 + (z - h/2)^2 \right]^{5/2}} \right\} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{R^2 - 4(z + h/2)^2}{\left[R^2 + (z + h/2)^2 \right]^{7/2}} + \frac{R^2 - 4(z - h/2)^2}{\left[R^2 + (z - h/2)^2 \right]^{7/2}} \right\} \quad (6)$$

da cui si vede facilmente che se è soddisfatta la condizione $h = R$, allora $\left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0$.

Si noti tra l'altro che, come già dedotto prima dalle considerazioni sulla simmetria del campo, si ritrova che $\left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ per ogni valore di h .

A questo punto dalla (2) è possibile ricavare il valore del campo magnetico al centro del sistema di bobine, imponendo $h = R$:

$$B_z(0) = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{I}{R} \quad (7)$$

il cui valore può essere assunto costante con buona approssimazione lungo una zona abbastanza ampia centrata in $z = 0$.

Per valutare l'errore di questa approssimazione, si dovrà calcolare il primo termine che compare nello sviluppo di Taylor indicato nella (3), cioè il valore della derivata quarta di B_z valutata in $z = 0$, nella condizione di Helmholtz. Il calcolo è un po' laborioso ma comunque diretto, ottenibile derivando due volte la (6) e imponendo $h = R$. Di seguito si riporta il risultato finale:

$$B_z(z) = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{I}{R} \left(1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} + \dots \right) \quad (8)$$

Da questa relazione si ricava per esempio che il campo magnetico B_z varia di poco più di una parte su diecimila se ci si trova sull'asse delle bobine ad una distanza pari a $z = R/10$ dal centro del sistema.