

Progetto nr. 2

Alyssa Pezzutti, Nicole Santero

16 maggio, 2021

1 Esercizio 1

In questa prima parte ci occupiamo di risolvere numericamente e analiticamente il problema

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -k_r(\theta^4 - \theta_a^4), & t \in (0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (1)$$

rimandando al testo del progetto per i valori delle quantità presenti.

1.1

Innanzitutto calcoliamo la soluzione esatta del problema per separazione di variabili. Si tratta quindi di risolvere l'equazione:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dv}{v^4 - \theta_a^4} = \int_0^t -k_r dt \quad (2)$$

si può spezzare l'integranda a sinistra nella somma di funzioni razionali, ottenendo

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{u^4 - \theta_a^4} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A}{u + \theta_a} + \frac{B}{u - \theta_a} + \frac{Cu + D}{u^2 + \theta_a^2} du \quad (3)$$

dove i coefficienti A, B, C e D si possono determinare risolvendo il sistema associato. Sostituendo i valori trovati si ricava l'equazione seguente, equivalente a (2):

$$\int_{\theta_0}^{\theta} -\frac{1}{4\theta_a^3(u + \theta_a)} + \frac{1}{4\theta_a^3(u - \theta_a)} - \frac{1}{2\theta_a^2(u^2 + \theta_a^2)} du = \int_0^t -k_r dt \quad (4)$$

La cui soluzione è il luogo dei punti tali che $h(t, \theta(t)) = 0$, dove

$$h(t, \theta(t)) = -\frac{\ln\left(\frac{\theta + \theta_a}{\theta - \theta_a} \frac{\theta_0 + \theta_a}{\theta_0 - \theta_a}\right) + 2\left[\arctan\left(\frac{\theta}{\theta_a}\right) - \arctan\left(\frac{\theta_0}{\theta_a}\right)\right]}{4\theta_a^3} + k_r t \quad (5)$$

E' possibile disegnare la funzione implicita in matlab attraverso il comando `fimplicit`, ma per il calcolo dell'errore nel punto $t = T$ conviene scriverla come $t = t(\theta)$

$$t(\theta) = \frac{\ln\left(\frac{\theta+\theta_a}{\theta-\theta_a} \frac{\theta_0+\theta_a}{\theta_0-\theta_a}\right) + 2\left[\arctan\left(\frac{\theta}{\theta_a}\right) - \arctan\left(\frac{\theta_0}{\theta_a}\right)\right]}{4k_r\theta_a^3} \quad (6)$$

ed estrarre la coordinata θ del punto come zero della funzione $g(\theta) = t(\theta) - T$ con il comando `fzero`.

1.2

Studiamo ora il problema numerico in Matlab usando i metodi numerici RK4, Heun, RKF45 (con coefficienti \hat{b} e passo fisso per calcolare l'andamento dell'errore), discretizzando con un numero di passi dato dalle entrate del vettore

$$N = [20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320 \ 640 \ 1280]$$

Prendendo $N(i+1) = 2N(i)$ per $i = 1, \dots, \text{numel}(N)$ possiamo stimare l'ordine del metodo corrispondente al numero di passi scelto: Siano $N_1 = N(i), N_2 = N(i+1)$ per i fissato. Sia p l'ordine del metodo. Per definizione di p deve valere

$$E_j = \text{err}(N_j) \approx h_j^p, \text{ e } h_j = \frac{T}{N_j} \text{ per } j = 1, 2$$

Vale quindi la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \frac{Ch_1^p}{Ch_2^p} \approx \frac{\left(\frac{T}{N_1}\right)^p}{\left(\frac{T}{N_2}\right)^p} \approx \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^p \quad (7)$$

Dunque possiamo stimare l'ordine p a ciascun passo attraverso la formula:

$$p \approx \frac{\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} \approx \frac{\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\log(2)} \quad (8)$$

L'errore è stimato nel punto $t = T$ come $|\hat{\theta} - u(T)|$, dove $\hat{\theta}$ è il valore di θ tale che $t(\theta) = T$ (non avendo l'espressione di $\theta(t)$ il modo più semplice di ricavarlo è applicare `fzero` alla funzione $t(\theta) - T$); e u è la soluzione approssimata.

Inseriamo poi gli errori calcolati per ciascun metodo in un unico grafico dell'andamento dell'errore, ottenendo

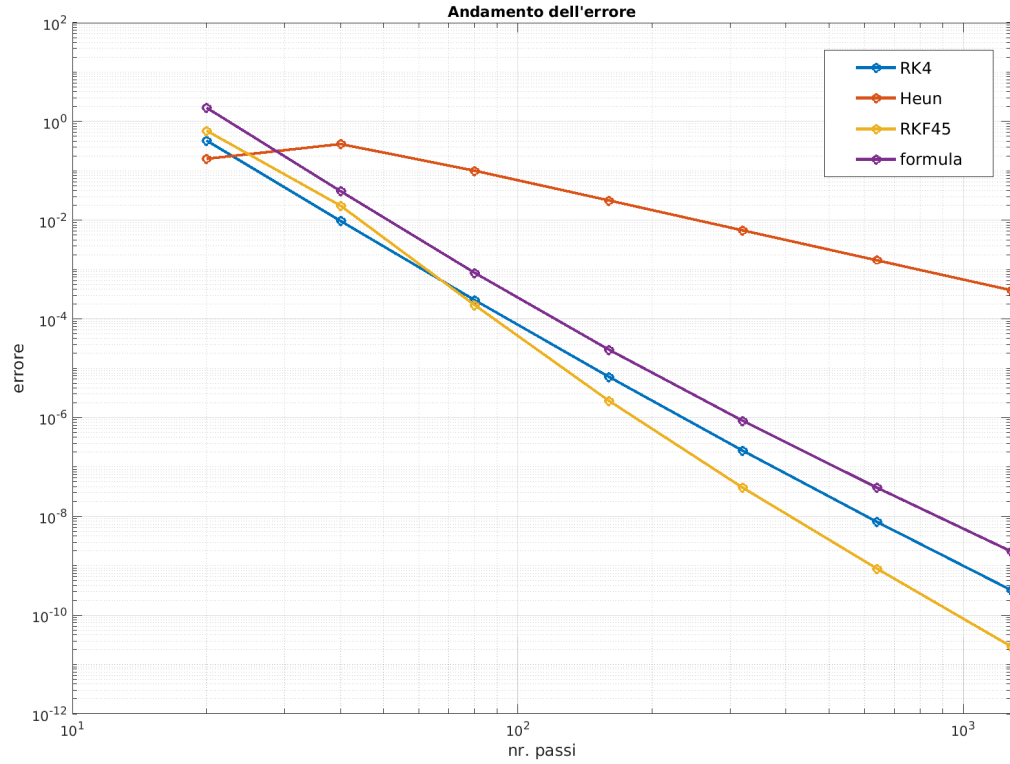


Figure 1: Andamento dell'errore

e gli ordini di convergenza stimati per ciascun metodo:

N	20	40	80	160	320	640
RK4	5.4152	5.3221	5.1593	4.9765	4.7876	4.5892
Heun	-0.9952	1.7924	1.9996	2.0187	2.0130	2.0073
RKF45	5.0509	6.6841	6.4315	5.8616	5.4396	5.2352
formula	5.6183	5.4936	5.1669	4.7942	4.4939	4.2853

In generale essi riflettono gli ordini teorici dei metodi.

Indaghiamo adesso l'assoluta stabilità. In generale, il numero di passi richiesti affinché un metodo sia stabile dipende da T , questo perché per i metodi espliciti si arriva sempre ad una condizione sull'ampiezza del passo, della forma $h < \frac{c}{|\lambda|}$. Poiché $h = \frac{T}{N}$, vale la condizione

$$N > T \frac{|\lambda|}{c} \quad (9)$$

Fissiamo $T = 3000$. Per $N > 20$, usati nel punto precedente, tutti i metodi sono assolutamente stabili.

Provando dei valori di N più piccoli, si osserva che il minimo numero di passi necessari affinché la soluzione sia limitata sono:

	N_{min}
RK4	6
Heun	7
RKF45	12
formula	12

Il risultato però è controintuitivo perché essendo RK4 e la formula del punto 3 entrambi metodi di ordine teorico 4, hanno la stessa regione di stabilità e quindi ci aspetteremmo anche il medesimo valore di N . Non siamo in grado di spiegare quanto ottenuto.

1.3

Consideriamo ora la formula proposta nel punto 3 del testo. Si tratta di un metodo di Runge-Kutta a 4 stadi, con *tableau* di Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Conoscendo la matrice A e il vettore \underline{b}^T possiamo determinarne la regione di stabilità, applicando la formula

$$R(z) = 1 + z\underline{b}^T(I - zA)^{-1}\underline{e} \quad (10)$$

dove il vettore colonna \underline{e} ha componenti $e_j = 1 \quad \forall j = 1, \dots, 4$. Sostituendo e facendo i conti si ottiene

$$R(z) = 1 + z\underline{b}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{z^2}{3} - \frac{z}{3} & z & 1 & 0 \\ \frac{z^3}{3} - \frac{2z^2}{3} + z & z^2 - z & z & 1 \end{bmatrix} \underline{e}$$

e infine

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \quad (11)$$

ovvero la funzione di stabilità di un metodo di Runge-Kutta di ordine 4. La regione di stabilità è dunque la stessa di RK4.

L'ordine di convergenza si può stimare utilizzando l'espressione (8), ottenendo i valori riportati nella tabella.

2 Esercizio 2

In questa seconda parte della relazione ci occupiamo del seguente modello epidemiologico, detto lockdown-SIR:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta_t SI \\ \frac{dI}{dt} = -\beta_t SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (12)$$

dove S, I, R sono valori normalizzati, cioè $S + I + R = 1 \quad \forall t \in [0, T]$ e rappresentano rispettivamente il compartimento dei suscettibili, quello degli infetti e quello dei guariti.

$\beta_t = (1 - l_t)\beta_0$, dove β_0 rappresenta il coefficiente di trasmissione senza restrizioni e $l_t \in [0, 1]$ misura la rigidità delle restrizioni del lockdown imposto alla popolazione. Infine, il parametro γ rappresenta il tasso di guarigione. Le condizioni iniziali del sistema lockdown-SIR sono

$$I_0 = 0.35 \times 10^{-4}, \quad S_0 = 1 - I_0, \quad R_0 = 0$$

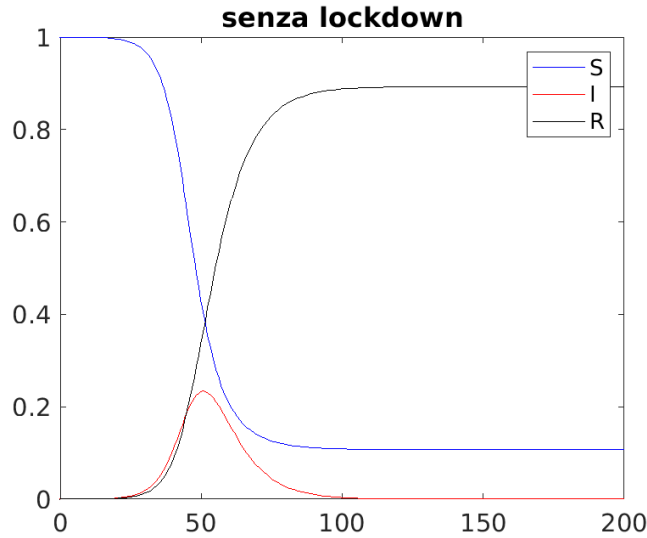
e i parametri valgono

$$T = 200[\text{giorni}], \quad \beta_0 = 0.35[\frac{1}{\text{giorno}}] \quad \gamma = 0.14[\frac{1}{\text{giorno}}].$$

Integriamo il sistema con il metodo di Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) nel quale abbiamo preso come guess iniziale $h = 0.5$ e come tolleranza 10^{-8} . Studiamo i diversi tipi di lockdown interpretandone i grafici:

2.1 Lockdown non imposto

$$l_t \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]$$



Nella prima politica, ossia assenza di lockdown, possiamo osservare un picco di infetti (oltre il 20% della popolazione), che si registra intorno al cinquantesimo giorno. Dopo il picco gli infetti decrescono fino a tendere a zero verso il novantesimo giorno. Osservando il grafico, la situazione sembra risolversi da sola abbastanza rapidamente. Dobbiamo però tenere conto del fatto che in questo modello non siamo in grado di distinguere il numero di decessi da quello dei guariti, in quanto la componente R rappresenta entrambi. Di conseguenza supponiamo che la rapidità con cui la situazione in esame si risolve sia da attribuirsi anche a un tasso significativo di decessi, dovuti in parte alla malattia e in parte al sovraffollamento delle terapie intensive a causa del rapido aumento dei contagi.

2.2 Lockdown breve e stretto

$$l_t = \begin{cases} 0.7 & 40 \leq t \leq 70 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



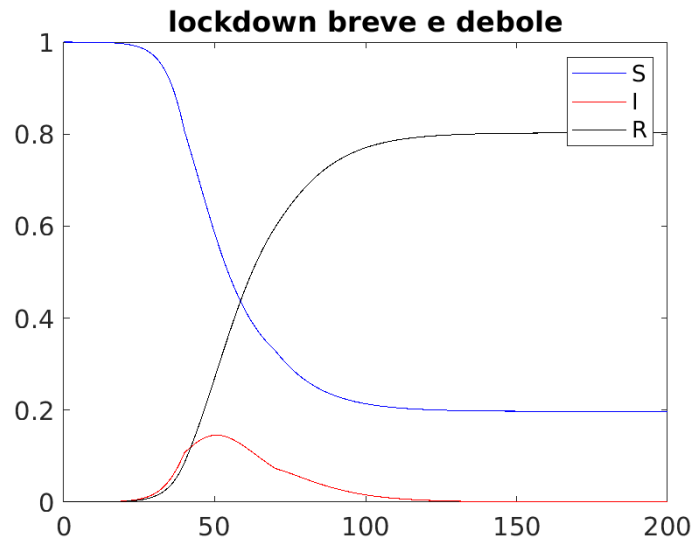
Diversamente, nel caso di un lockdown tra il quarantesimo e il settantesimo giorno con misure restrittive stringenti, la curva degli infetti avrebbe due picchi: Osserviamo un primo picco circa al quarantesimo giorno, ovvero il giorno di introduzione delle misure, con una percentuale di infetti pari a circa il 10% dell'intera popolazione. Questo numero diminuirebbe poi in modo significativo, con il contemporaneo aumento del numero dei guariti e/o dei morti. Rispetto alla situazione precedente, l'epidemia ha un decorso più lento, ma ciò potrebbe limitare il numero di decessi, e inoltre permettere l'attivazione di strutture ausiliari di supporto agli ospedali, come zone per la quarantena e ulteriori terapie intensive.

Allentate le misure restrittive, il numero dei contagi risale nuovamente, fino a raggiungere un secondo picco dopo un mese, intorno al centesimo giorno. Adesso però il numero di suscettibili è molto più basso rispetto all'inizio, dunque l'epidemia sembra risolversi da sola senza bisogno di un secondo lockdown. La curva rossa infatti tende a zero dopo il centocinquantesimo giorno, e si stabilizzano anche i valori dei suscettibili e dei guariti.

Nel confronto con la situazione precedente, bisogna tenere conto del fatto che la chiusura totale delle attività e dei settori secondario e terziario potrebbe portare il Paese ad una crisi economica, con conseguente chiusura permanente di alcune piccole/medie imprese e l'aumento delle disparità sociali.

2.3 Lockdown breve e debole

$$l_t = \begin{cases} 0.3 & 40 \leq t \leq 70 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Nell'ultima politica, ossia il lockdown tra il quarantesimo e settantesimo giorno con misure meno stringenti, si avrebbe un unico picco intorno al cinquantesimo giorno come nel primo caso, ma la percentuale di popolazione infetta è più bassa. In questo caso infatti il picco dei contagiati rappresenterebbe il 15% della popolazione. Rispetto al primo caso però, l'epidemia si protrae più a lungo, infatti si osserva che la curva tende zero solo dopo il centodecimo giorno.

Il sistema sanitario sarebbe comunque sottoposto ad uno sforzo notevole, ma essendoci un numero minore di infetti si può ipotizzare che, con una gestione adeguata, esso possa reggere la pressione. Di conseguenza, una stima del numero di decessi in questa situazione sarebbe sicuramente più bassa rispetto al caso senza lockdown, grazie al numero minore di infetti, ovvero di possibili

pazienti negli ospedali. Dal punto di vista economico inoltre, misure meno restrittive permetterebbero di tenere aperte anche molte attività non essenziali, salvaguardando un numero significativo di posti di lavoro, e permettendo una ripresa economica più rapida.

2.4 Conclusione

Basandoci sul modello qui presentato, in cui non conosciamo la pericolosità della malattia, la scelta di un lockdown breve e debole sembrerebbe la più indicata. Essa infatti richiederebbe uno sforzo limitato al sistema sanitario nazionale e contemporaneamente limiterebbe i danni di una crisi economica innescata dall'epidemia. In casi più estremi però, per esempio in presenza di un virus con alto tasso di mortalità, bisognerebbe sicuramente rivedere la durata e l'intensità del lockdown per proteggere il più possibile la popolazione.