第一章作业

1、构造数值算法有哪些原则？

答：① 稳定性 ④效率 ⑦数值稳定性

② 准确性 ⑤可扩展性

③ 收敛性 ⑥可实现性

2、误差通常来源哪几个方面？

答：① 模型误差 ② 观测误差 ③ 方法误差.

④ 舍入误差、

3、数值算法的稳定性指什么？

答：指算法在计算过程中对输入误差和舍入误差的敏感程度，也就是算法在面对这些误差时是否能够提供接近真实值的结果

4、计算复杂性包括哪些方面？

答：① 时间复杂度 ② 空间复杂度

8、已知三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin c$，其中c为弧度，$0<c<\frac{\pi}{2}$，且测量a,b,c的误差分别为 Δa，Δb，Δc。证明面积的误差 ΔS 满足：

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|.$$

西安电子科技大学

中国 西安 710118

XIDIAN UNIVERSITY
XI`AN,710018 P.R.CHINA

8、答：由误差的定义：

$\Delta S \le \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a| + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b| + \left|\frac{\partial S}{\partial c}\right||\Delta c|$. 又因为：$\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{1}{2}b\sin c$，$\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}a\sin c$

$\frac{\partial S}{\partial c}=\frac{1}{2}ab\cos c$. 代入上式得：

$\Delta S \le \left|\frac{1}{2}b\sin c\right||\Delta a| + \left|\frac{1}{2}a\sin c\right||\Delta b| + \left|\frac{1}{2}ab\cos c\right||\Delta c|$.

两边同除以S可得：$\frac{\Delta S}{S} \le \frac{\left|\frac{1}{2}b\sin c\right|}{\left|\frac{1}{2}ab\sin c\right|}|\Delta a| + \frac{\left|\frac{1}{2}a\sin c\right|}{\left|\frac{1}{2}ab\sin c\right|}|\Delta b| + \frac{\left|\frac{1}{2}ab\cos c\right|}{\left|\frac{1}{2}ab\sin c\right|}|\Delta c|$.

约分得：$\frac{\Delta S}{S} \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{\tan c}\right|$

因为 $0<c<\frac{\pi}{2}$. 则 $\tan c > c > 0$

所以 $\frac{\Delta S}{S} \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|$ 命题成立。

10、设序列$\{y_n\}$满足关系式$y_n=10y_{n-1}-1$，$n=1,2,\cdots$。若$y_0=\sqrt{2}\approx1.4142$，则计算$y_{10}$会有多大的误差？

答：由递推关系式：$y_n=10y_{n-1}-1=10(10y_{n-2}-1)-1$

$$=10^2y_{n-2}-[1+10^1]$$

$$=10^2(10y_{n-2}-1)-[1+10^1]$$

$$=10^3y_{n-3}-[1+10^1+10^2]$$

$$=\cdots\quad=10^ny_0-\sum_{i=0}^{n-1}10^i$$

$$=10^ny_0-\frac{1}{9}(10^n-1)\quad=10^n(\sqrt{2}-\frac{1}{9})+\frac{1}{9}$$

于是 $y_{10}=10^{10}(\sqrt{2}-\frac{1}{9})+\frac{1}{9}$，$y_{10}^*=10^{10}(1.41-\frac{1}{9})+\frac{1}{9}$

$\varepsilon(y_{10}^*)=10^{10}\varepsilon(y_0^*)=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^{8}$.

② 共轭对称性：

$$(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx+f(a)g(a)\text{. 则 }(g,f)=\int_a^b g'(x)f'(x)\,dx+g(a)f(a)$$

满足 $(f,g)=(g,f)$.

③ 第一变元的线性性质：

$$(\alpha f,g)=\int_a^b [\alpha f(x)]'g'(x)\,dx+\alpha f(a)g(a)=\alpha\left[\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx+f(a)g(a)\right]=\alpha(f,g)$$

满足 $(\alpha f,g)=\alpha(f,g)$.

综上：可以构成 $C'[a,b]$ 上的内积。

11、求证：

(1). $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$;

(2)、$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$.

证明：(1) ∵ $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

∴ $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1 \le n\max_{1\le i\le n}|x_i| = n\|x\|_\infty$

证得：

(2). $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$.

$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

且 $\lambda_1^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\cdots+\lambda_n^2 \le n\lambda_1^2$ (λ为特征值)

即 $\|A\|_2^2 \le \|A\|_F^2 \le n\|A\|_2^2$

故 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$.

16. 设 $A\in R^{n\times n}$，证明 $\|A\|_1 = \max_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

证明：对于任意的向量 $x\in R^n$：

$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$

∴ $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$

根据三角不等式：$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|$

交换次序：$\|Ax\|_1 \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)|x_j|$ 即 $\|Ax\|_1 \le \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\cdot\|x\|_1$

由于 $\|x\|_1=1$ 故 $\|A\|_1 \le \max\limits_{1\le j\le n} |a_{ij}|$

17. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_F$.

答：$\|A\|_1 = \max\{3+3+2, 2+6+2, 2+1+1\} = 10$

$\|A\|_\infty = \max\{3+2+1, 2+2+2, 3+6+1\} = 10$

$\|A\|_F = \sqrt{9+4+1+4+4+4+9+36+1} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

18. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\|A\|_2$ 和 $\|A\|_F$

答：$\|A\|_F = \sqrt{4+0+1+1} = \sqrt{6}$

$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$|A^TA-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-6\lambda+4=0$

故 $\lambda_1=3+\sqrt{5}$，$\lambda_2=3-\sqrt{5}$，$\|A\|_2=\sqrt{\max\{3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

20. $f(x), g(x)\in C^1[a,b]$，定义：(1) $(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx$；

(2) $(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$。

问它们是否构成内积？

(1) 当 $f(x)\equiv C$，则 $f'(x)=0$，而 $(f,f)=\int_a^b f'^2(x)dx=0$.

但 $f(x)$ 不一定为0，即不满足正定性，无法构成内积。

(2) ① 正定性：$(f,f)=\int_a^b f'^2(x)dx+f^2(a)\geq 0$

且当 $(f,f)=0$ 时，有 $f'(x)=0$，$f(a)=0 \Rightarrow f(x)=0$.

满足正定性。