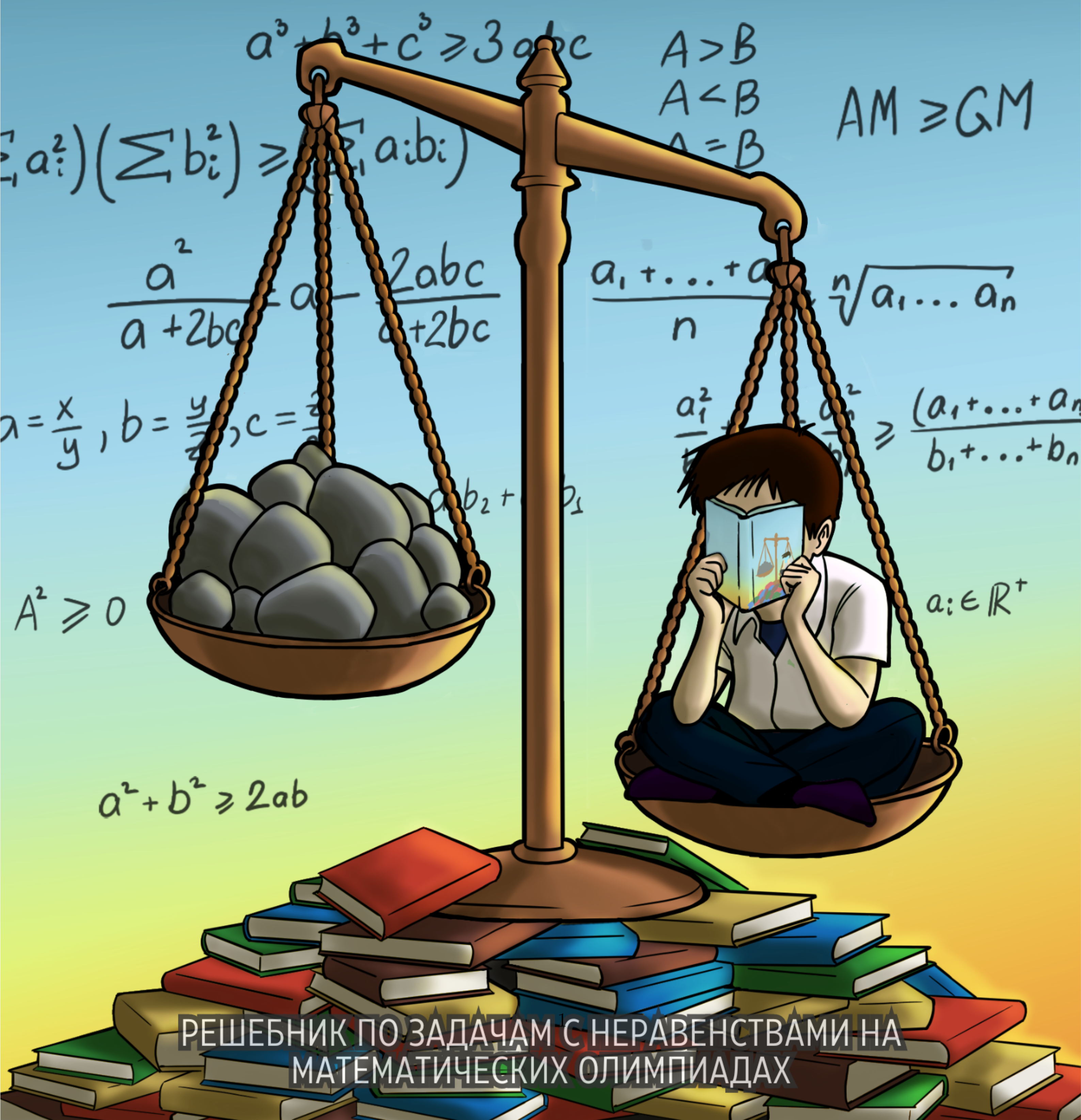
ПОЧТИ РАВЕНСТВА

Сәрсенғали Даниал



РЕШЕБНИК ПО ЗАДАЧАМ С НЕРАВЕНСТВАМИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Последняя версия книги

Сканируйте QR-код для доступа к последней версии книги:

Мои контакты:

Нажмите на любой QR-код для перехода.

Предисловие читателю

Сперва хочу выразить вам благодарность за смелость выбрать книгу "Почти равенства". Прежде чем приступить к чтению, спросите себя, действительно ли вы готовы идти дальше? Как говорил Фридрих Ницше, человек должен быть готов отдавать 16 часов в сутках на своё ремесло, а в нашем случае — на математику. Действительно ли математика — это то, что вам нужно? Такие вопросы могут вызвать разные эмоции, но учтите, что от этого зависит ваше будущее.

Этот вопрос может помочь вам определиться с деятельностью. Аристотель, великий философ, сказал, что если цель не связана с деятельностью, либо же цель деятельности не ведёт к другой деятельности, то вы совершаете критическую ошибку. Можно понять этот отрывок по-разному, приведу пару примеров:

i) Если ваша цель в математике — понять её лучше, то просто просмотр роликов в TikTok или на YouTube вам не поможет. Математику можно понять только занимаясь ею.

ii) Если вы поставили перед собой амбициозную цель, то нужно настроить свою деятельность так, чтобы она способствовала её достижению. Ваши интересы и занятия должны быть направлены на это, а не на что-то другое. Я не имею в виду крайности, как 16 часов математики в день, вы не должны быть рабом своей деятельности, а делать всё ради себя. Пора приступить к контенту.

Книга предназначена для учеников 7-9 классов, которые впервые знакомятся с этим разделом математики. Она поделена на разделы, основываясь на тематику задач и необходимый материал для их решения. Например, в задачах по min/max вы будете искать критические значения различных выражений.

Каждый раздел состоит из 4 частей. Первая часть содержит показательные задачи с хорошими идеями (не всегда лёгкие). Остальные части включают задачи с прогрессирующей сложностью (разделённые на уровни).

Задачи можно решать по-разному, поэтому не бойтесь записывать и тренировать идеи, которые появятся у вас при решении. И помните, главная цель этой книги не только научить вас чему-то новому в этом разделе математики, но и помочь вам насладиться процессом. Вся книга написана в лёгком стиле, все решения и идеи изложены на понятном языке. Наслаждайтесь!

Список благодарностей

Заканчивался 11-й класс для меня не самым успешным образом: я не поступил в университеты, провалился на республиканских олимпиадах и не добился особых достижений. Мне срочно нужно было найти занятие, где я мог бы применить свои знания, пусть и не в олимпиадах, а каким-то другим образом. Так зародилась идея преподавать тогдашним семиклассникам. Эта деятельность меня так увлекла, что я начал писать PDF-файлы с объяснениями, и так постепенно накопились первые 40 страниц этой книги. Затем пришла идея развить это дело во что-то большее, и рывками, раз в несколько месяцев, передо мной оказывалась работа, которая в итоге выросла до 160 страниц, созданных с участием нескольких человек.

Базарбай Мирас и Асанкадыров Айдин, без вас этой книги, а уж тем более её значительной части, просто бы не существовало. Мне было невероятно приятно работать с вами, и я даже не знаю, как вас отблагодарить. Дүзелбай Ернар и Есберген Аманжол стали первыми, кто решил помочь мне с этим проектом. Они лично написали две главы, а Ернар даже создал эту прекрасную обложку! Огромное спасибо моей маме за постоянную поддержку.

Бета-тестеры: Ортай Бексұлтан, Ерасыл Алтынбек, Бахытбек Ахмедияр, Әбілмансұр Базарбек, Берлов Артур

Спасибо Роговскому Владимиру и Юркевичу Мирону за то, что отвечали на мои назойливые вопросы :)

На самом деле, этот список благодарностей должен был быть гораздо длиннее, но я, к сожалению, потерял записи о тех, кому хотел выразить признательность. Если вы помогали мне и не были упомянуты, пожалуйста, напишите мне, и я добавлю вас.

Контакты соавторов:

Базарбай Мирас: miras@stemolympiads.kz , telegram: @mirasinus
Асанкадыров Айдин: 61.a.asankadyrov@gmail.com

Посвящаю моим первым ученикам: *Асылбеку, Бекарыстану, Нұртаю, Хасану, Исламбеку, Дінисламу, Тамиру и Алмазу.*

Часть I

Вступление в неравенства

Глава 1

Примитивные неравенства

В олимпиадных задачах по неравенствам, вы должны знать много различных неравенств и уметь применять их в самых различных случаях. Но, перед изучением различных методов, было бы неплохо научиться некоторым основам, которые всегда будут встречаться в будущих решениях. Поэтому, в этом разделе мы пройдёмся по простым задачам, которые не требуют никаких особых усилий или знаний других неравенств.

Основные идеи:

$$(!)\ A \geqslant B.$$

i)

$$A \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n \geqslant B.$$

То есть, если нам нужно доказать, что первое выражение больше или равно второму, попробуем уменьшать первое значение пока оно не станет очевидно больше или равно второму выражению.

ii)

$$\begin{cases} A_1 \geqslant B_1, \\ A_2 \geqslant B_2, \\ \dots \\ A_n \geqslant B_n. \end{cases}$$

Можно суммировать все эти неравенства, чтобы получить одно большое или взять их произведение если каждый $A_i, B_i \in R^+$.

iii) Если есть числа a и b, то либо $a > b$, либо $a < b$, либо $a = b$.

iv) Если уменьшить положительный знаменатель до другого положительного знаменателя в дроби, дробь увеличится, и наоборот, если увеличить, дробь уменьшится; допустим, у вас есть дробь $\frac{A}{B}$, уменьшим знаменатель B до C, тогда $\frac{A}{B} < \frac{A}{C}$.

Возможные ошибки.

i) Если $A > B$ и $C > B$, это не гарантирует то, что $A > C$ либо $C > A$, эти факты никак не связаны.

ii) Аналогично, если $A > B > C$, то это не гарантирует то, что $AC > B^2$ либо $B^2 > AC$.

iii) Если $A > B$ то будет неправильно сказать что $-A > -B$, как раз таки наоборот, $-B > -A$.

Термин RHS и LHS.

В задачах по неравенствам вам всегда придется доказывать, что одна сторона превышает другую. И как раз-таки и от слова сторона и исходит смысл RHS и LHS термина (англ. Right Hand Side (RHS), Left Hand Side (LHS)), сравнение правой и левой стороны.

Допустим, вам предстоит задача доказать, что $A \geqslant B$ $(A, B \in \mathbb{R}^+)$, то вы можете "уменьшать" левую сторону до тех пор, пока не появится значение, которое будет больше правого, и наоборот, так же вы можете увеличивать и правую сторону до тех пор, пока вам будет не очевидно заявить что слева будет все равно больше.

Например, (!) $5^8 \geqslant 8^4$, можно уменьшить левую сторону и превратить ее в 3^8 и получить (!) $9^4 \geqslant 8^4$, что тривиально. Обе стороны можно умножать на положительные числа и к обеим сторонам можно прибавлять равные значения. Если умножить обе стороны на отрицательное значение, значения в RHS и LHS поменяются местами. Так же, не ограничивайте себя в возведении обеих сторон в любые положительные степени, то есть и брать под корень различных степеней, однако, как и у произведения, при отрицательных значениях стороны поменяются местами. Главное, в этом методе не допустить момента, когда, уменьшая левую сторону вы можете получить значение меньшее чем значение в правой стороне, или наоборот, увеличивая правую, достичь значения, которое будет больше чем значение в левой стороне.

Для удобства при расписке задач, попробуйте сразу обозначить что вам нужно доказать, что $LHS \geqslant RHS$. Лично я, делаю так: Вставляю $A \ \vee \ B$ и сразу предупреждаю что я должен доказать, что слева должно быть больше и, например, могу это сравнение превратить в $(A - C) \ \vee \ B$, где C положительное число, то есть я уменьшил левую часть и возможно мне так будет легче доказать неравенство.

А теперь, приступим к вступительным задачам. Вот несколько базовых и очевидных фактов, можете попробовать доказать некоторые из них:

$$i)\ a < 0,\ b < 0 \Rightarrow ab > 0.$$

$$ii)\ a < 0,\ b > 0 \Rightarrow ab < 0.$$

$$iii)\ a < b,\ b < c \Rightarrow a < c.$$

$$iv)\ a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

$$v)\ a < b \ \Rightarrow -b < -a.$$

$$vi)\ a > 0 \ \Rightarrow \frac{1}{a} > 0.$$

$$vii)\ a < 0 \ \Rightarrow \frac{1}{a} < 0.$$

$$viii)\ a > 0,\ b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0.$$

$$ix)\ 0 < a < b,\ 0 < c < d \Rightarrow ac < bd.$$

$$x)\ a > 1 \Rightarrow a^2 > a.$$

$$xi)\ 0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a.$$

$$xii)\ |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

$$xiii)\ |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

$$xiv)\ c > 0,\ a > b > 0 \ \Rightarrow \ \frac{c}{b} > \frac{c}{a}.$$

1.1 Числовые Неравенства

В данном разделе будут рассмотрены задачи на работу с числами. Главным советом при их решении является не бояться пробовать любые идеи, которые приходят в голову. Если вы только начинаете решать задачи на цифры или неравенства, то у вас может не быть достаточно интуиции, чтобы решать их быстро. Однако, с опытом и практикой вы станете более уверенными в решении таких задач.

Пример 1. Что больше, 31^{11} или 17^{14}?

Решение: Заметим, что

$$17^{14} = 17^{11} \cdot 17^3 > 17^{11} \cdot 16^3 = 17^{11} \cdot 2^{12} = 34^{11} \cdot 2 > 31^{11}.$$

Вы наверняка знаете, что в комбинаторике почти каждая задача имеет свою уникальную идею. На самом деле и в неравенствах всё почти так же! В большинстве случаев не существует «королевского» способа решения таких задач. Например, мотивацией поступать так в этой задаче оказалось то, что $17 \cdot 2 > 31$, как бы тривиально это ни казалось.

Совет.

Перед тем, как решать задачи, в которых неизвестно, что больше, стоит предположить и попытаться доказать, что это значение больше. Обычно в таких задачах следует обращать внимание на экспоненциальное значение. Если оно больше, то вероятность того, что и значение превышает, также высока.

Пример 2. Что больше, 5^{300} или 3^{500}?

Решение: Возьмем выражение в RHS/LHS. Сравнение: $5^{300} \ \vee\ 3^{500}$, давайте возьмём обе стороны под корень сотой степени. Мы получим сравнение $5^3 \ \vee\ 3^5$, а тут уже не составляет труда удостовериться, что правая сторона больше.

Пример 3. Что больше, 2^{40} или 3^{28}?

Решение 1: Сделаем то же самое действие, как и в предыдущем примере: возьмём обе стороны под корень четвёртой степени. Получится $2^{10} \ \vee\ 3^7$, что равно $1024 \ \vee\ 2187$, понятно, что справа больше.

Решение 2: Заметим, что $2^{40} = 8^{13} \cdot 2$, а $3^{28} = 9^{14} > 8^{13} \cdot 2$.

Пример 4. Что больше, 5^{44} или 3^{53}?

Решение: Левая часть больше. Давайте докажем это: увеличим правую часть до 3^{55}. Теперь у нас есть сравнение $5^{44} \ \vee\ 3^{55}$, возьмём обе стороны под корень одиннадцатой степени и получим: $5^4 \ \vee\ 3^5$ или $625 \ \vee\ 243$, доказано.

Задачи:

№1. (!) $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Решение: Правая часть больше. Можно понять, что $2^{100} + 3^{100} < 3^{100} \cdot 2$. Получим сравнение: $\left(3^{100} \cdot 2\right) \ \vee\ 4^{100}$. Сократим слева на 3^{97}, а справа на 4^{97} (так можно делать, ибо сокращая на четверку, вы получите число меньшее, чем если бы сокращали на тройку). Получим $\left(3^3 \cdot 2\right) \ \vee\ 4^3$, или $54 \ \vee\ 64$, доказано.

№2. (!) $3^{100} + 4^{100} < 5^{100}$.

Решение: Заметим, что эти три замечательных числа образуют пифагорову тройку, то есть $3^2 + 4^2 = 5^2$, или $(3^2 + 4^2)^{50} = 5^{100}$, видно, что 5^{100} больше.

Неравенство Бернулли.

Пусть $x \geqslant -1$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда справедливо неравенство:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Попробуйте доказать данное неравенство с помощью метода математической индукции.

Задачи для самостоятельного решения:

№1. Что больше, 1000 или 1.01^{1000}?

№2. Что больше, $2500123 \cdot 2500125$ или 2500124^2?

№3. Что больше, $\frac{9385}{9389}$ или $\frac{12543}{12547}$?

№4. Что больше, $\sqrt{2020} + \sqrt{2022}$ или $2\sqrt{2021}$?

1.2 Неравенства с переменными

В 95 процентах случаев на олимпиадах встречаются задачи, для решения которых используются от тривиальных до более сложных методов, с участием переменных (неизвестных). Для начала, в следующих задачах будут обычные факты по типу: "положительное число всегда больше нуля" и т.д.

Пример 1. Для любого натурального n докажите:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Решение: Заметим, что каждая дробь больше или равна $\frac{1}{2n}$, а таких дробей n. Значит сумма больше (кроме последней дроби, она равна) $n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Для положительных чисел x, y, z докажите, что

$$\frac{y}{x+y+z+x^2} + \frac{z}{x+y+z+y^2} + \frac{x}{x+y+z+z^2} < 1.$$

Решение: Заметим, что $x+y+z+x^2 > x+y+z$, значит $\frac{y}{x+y+z+x^2} < \frac{y}{x+y+z}$. Делаем аналогичное действие и получаем:

$$\frac{y}{x+y+z+x^2} + \frac{z}{x+y+z+y^2} + \frac{x}{x+y+z+z^2} < \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} + \frac{x}{x+y+z} = 1.$$

Вводные задачи.

№1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, докажите:

$$(!)\ \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} > \sqrt{a+b+c}.$$

№2. Докажите:

$$(!)\ a^{12} - a^9 + a^4 - a + 1 > 0.$$

№3. Про положительные числа a, b известно, что $a - b = \frac{a}{b}$. Что больше: ab или $a + b$?

№4. Пусть a, b, c — неотрицательные числа, докажите:

$$(!)\ \frac{a+1}{ab+a+1} + \frac{b+1}{bc+b+1} + \frac{c+1}{ac+c+1} \geqslant \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

№5. Существуют ли 2013 различных натуральных чисел, таких что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

№6. Докажите, что уравнение $a^a = b^b + c^c$ не имеет решений в натуральных числах.

№7. Пусть x и y — положительные числа такие, что

$$(x^2 + 2y + 1)(y^2 + 2x + 1) = (x + 1)^4.$$

Докажите, что $x = y$.

№8. Докажите, что бесконечная сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ не ограничена.

№9.

$$(!)\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

№10. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, тогда

$$(!)\ \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

№11. Даны числа x и y, тогда

$$(!)\ x^{2n} + x^{2n-1} \cdot y + x^{2n-2} \cdot y^2 + \dots + y^{2n} \geqslant 0.$$

№12. Пусть $a \geqslant b > 0$, тогда

$$(!)\ a^a b^b \geqslant a^b b^a.$$

№13. Пусть $|x| < 1$ и $|y| < 1$, тогда

$$(!)\ \left| \frac{x-y}{1-xy} \right| < 1.$$

№14. Докажите, что для любого x справедливо следующее неравенство:

$$(!)\ \frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

Глава 2

Немного о квадратах

Следующие темы будут тесно связаны с идеей о квадратах. Этот раздел послужит вступлением к следующим неравенствам.

Основная идея заключается в том, что квадрат всегда больше или равен нулю:

$$A^2 \geqslant 0.$$

Пример 1. Докажите, что $a^2 - 2a + 1$ всегда неотрицательно.

Решение: Заметим, что выражение является квадратом: $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$, значит оно всегда неотрицательно.

Обычно в задачах используется чуть более сложное утверждение. Давайте из предыдущего факта выведем, что $a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$, или же $a^2 + 1 \geqslant 2a$.

Совет.

Попробуйте найти равенство в таких задачах. Например, если нам говорят, что значение должно быть всегда $\geqslant 0$, исследуйте, когда оно равно 0, и попробуйте создать квадрат (при сложных задачах это может помочь).

Кроме того, выражение не всегда будет полным квадратом, иногда это может быть сумма квадратов. Если сумма квадратов равна 0, значит каждый из них равен 0.

Пример 2.

Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Решение: Давайте оставим в правой части 0. Как и в прошлой задаче, это выражение является квадратом: $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$, доказано.

Можно усилить утверждение: $a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$, поскольку если $2|ab| = -2ab$, то можно доказать это, используя тот факт, что $(a+b)^2 \geqslant 0$.

Пример 3. Саят как-то поспорил с Нурланбеком: "Спорим, что если я подберу любые два числа, возьму их квадраты, суммирую их, отниму их произведение и эти два числа, я всегда получу неотрицательное число!". Но Нурланбек думает иначе. Кто прав?

Решение: Давайте распишем утверждение Саята: $a^2+b^2-ab-a-b \geqslant 0$. Но оказывается, что это неверно для всех случаев. Например, при $a=b=1$ данное выражение нарушает неравенство.

Пример 3.1. Теперь Саят прибавил единицу к выражению. Прав ли он теперь?

Решение: Как можно заметить, при $a = b = 1$, добавление единицы исправило ситуацию. Мы также нашли момент равенства. Попробуем создать квадрат, который равен 0 при таких значениях:

$$(!)\ a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geqslant 0.$$

Можно попробовать (!) $(a-1)^2+(b-1)^2+a+b-ab-1 \geqslant 0$, но, как мы видим, у нас остаются $a+b-ab-1$ ...Давайте попробуем изначальное неравенство умножить на 2.

$$(!)\ 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 \geqslant 0.$$

Теперь попробуем еще раз: $(a-1)^2+(b-1)^2+a^2+b^2-2ab$. Отлично! Это ведь $(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2$, что является суммой квадратов, то есть больше или равно нулю, доказано.

Пример 4. Найдите все пары чисел (a, b), что $a^2 + 4b^2 = 2a - 1$.

Решение: Казалось бы, этих данных недостаточно, чтобы решить задачу, но тут в помощь приходят квадраты. Давайте изменим данное условие на $a^2 - 2a + 1 + 4b^2 = 0$, знакомая картина? Это ведь $(a-1)^2 + 4b^2 = 0$, как мы видим, оба члена являются квадратами, значит, каждый из них должен быть равен нулю, откуда ответ $\boxed{a = 1,\ b = 0}$.

Задачи:

№1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 9 - 5y, \\ y^2 + 2x = 9y - 22. \end{cases}$$

Решение: Суммируем и сделаем так, чтобы выражение было равно нулю, то есть

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

И ответы $\boxed{x = -3,\ y = 2}$, но, подставив их под изначальное условие, получаем противоречие. Ответов нет.

№2. Для неотрицательных a, b докажите, что $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Решение: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

№3. Неравенство обратных величин. $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$(!)\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Решение: Суммируем дроби и умножим с обеих сторон на $2ab$, так как оно положительное. $(a - b)^2 \geqslant 0$.

№4. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$(!)\ \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geqslant 6.$$

Решение: Чуть-чуть изменим условие и из $\frac{a+b}{c}$ сделаем $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Повторим аналогичное действие с двумя другими дробями, и в итоге получим 3 пары обратных величин, которые больше или равны двум: $2 \cdot 3 = 6$, доказано.

№5. Неравенство Несбитта. $(a, b, c \in \mathbb{R}^+)$

$$(!)\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение: Возможно, вам не удалось решить эту задачу, так как без знаний КБШ (для примера) до её решения трудно додуматься. Подсказка: сделайте замену: $a + b = x$, $b + c = y$, $a + c = z$.

Давайте выразим a: это $\frac{x+z-y}{2}$. Так же поступим и с двумя другими переменными и вообще видоизменим условие задачи. Теперь это

$$(!)\ \frac{x+y-z}{z} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{y+z-x}{x} \geqslant 3.$$

Затем сделаем так:

$$\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} \geqslant 6.$$

Вау! Мы получили предыдущую задачу, доказано.

Совет.

Как вы видите, в предыдущей задаче мы использовали замену, которая сильно облегчила путь решения. Пока вы только начинаете, пробуйте делать всевозможные замены с суммами или произведениями, в будущем вы набьёте руку.

№6.

$$(!)\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \geqslant 2ac + 2bc.$$

Решение 1: Приведём правую сторону к 0 и поймём, что это квадрат: $(a + b - c)^2 \geqslant 0$.

Решение 2: На самом деле это решение почти то же самое, что и квадрат. Нам остаётся доказать, что $c^2+(a+b)^2 \geqslant 2c(a+b)$, что следует из второго примера. Причина, по которой было написано это решение, заключается в том, что при набивке руки вы почти забываете о свойстве квадратов, а больше запоминаете всё как во втором примере.

№7. $a, b \in \mathbb{R}$

$$(!)\ \frac{1}{2} \geqslant \frac{a^2}{3a^2+b^2} + \frac{b^2}{3b^2+a^2}.$$

Решение: Перед началом можно удостовериться, что равенство происходит тогда, когда $a = b$. Значит, например, когда мы будем использовать второй пример, нам нужно подобрать равные переменные (ибо равенство происходит тогда, когда $a = b = 0$).

Давайте введём LHS/RHS и докажем, что $LHS \geqslant RHS$. Увеличим правую часть, уменьшая знаменатель в дробях. Как мы помним, надо взять равные значения, так что давайте сделаем $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, то есть теперь у нас сравнение

$$\frac{1}{2} \ \vee \ \left(\frac{a^2}{2a^2+2ab} + \frac{b^2}{2b^2+2ab}\right)$$

или же,

$$\frac{1}{2} \ \vee \ \left(\frac{a}{2a+2b} + \frac{b}{2b+2a}\right)$$

— а они равны. Доказано.

№8. Для любых действительных чисел a, b докажите следующее неравенство:

$$a^2+b^2+ab \geqslant 3(a+b-1).$$

Решение: Возможно, у вас в голове появился довольно логичный вопрос: как использовать ab? Ибо, для примера, используя второй пример, мы склеиваем значения, а ab уже склеен, и используя его где-то, мы получим что-то в подарок, умноженное на него. Но можно поступить следующим образом.

Для эстетических целей давайте умножим с обеих сторон на 2.

$$(!)\ 2a^2+2b^2+2ab+6 \geqslant 6a+6b.$$

Если пристально посмотреть на выражение слева, можно заметить, что это

$$((a+b)^2+2^2)+(a^2+1)+(b^2+1).$$

Наверное, вы заметили, что тут можно 3 раза использовать второй пример (не просто так ведь взял под скобки) и доказать неравенство.

На самом деле это всё является суммой трёх квадратов, потому что из второго примера следует, что это свойство квадрата. Но доказывать по квадрату здесь было бы очень уродливым увлечением, поэтому привыкайте абьюзить второй пример.

№9. Решите в целых числах

$$\frac{b^2+c^2-bc}{a} = \frac{2b+2c-a}{4}.$$

Решение: Сделаем пропорцию и получим, что $2(b-c)^2 + \left(2b^2 + \frac{a^2}{2} - 2ab\right) + \left(2c^2 + \frac{a^2}{2} - 2ac\right) = 0$, что можно превратить в $2(b-c)^2 + \left(b \cdot \sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(c \cdot \sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. Откуда ответ $(2n, n, n)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$.

№10. Докажите, что для любых действительных a, b справедливо неравенство:

$$a^2 + 141ab + 5476b^2 \geqslant 5a + 1364b - 512.$$

(РО. Район. 2023, Р11.3)

Решение: Жестокая задача. Действительно, как при таких коэффициентах нам собрать квадраты? Может, есть какой-то другой способ?

Дискриминант.

Допустим, у нас есть квадратичный многочлен $ax^2 + bx + c$. Если его $D \leqslant 0$, это значит, что у него лишь один корень, либо их вообще нет, значит парабола касается оси x лишь однажды, либо вообще не пересекает. А это значит, что парабола всегда внизу, либо всегда сверху. Отсюда, если $a > 0$ и $D \leqslant 0$, то парабола коснётся x-оси максимум 1 раз, значит всё остальное время будет сверху:

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0.$$

А если $a < 0$ и $D \leqslant 0$, то парабола коснётся x-оси максимум 1 раз, значит всё остальное время будет снизу:

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Рассмотрим такой квадратичный многочлен от a :

$$a^2 + (141ab - 5a) + \left(5476b^2 - 1364b + 512\right).$$

Если докажем, что он всегда неотрицателен, то задача решится. Заметим, что у этого квадратного многочлена D равен

$$(141b-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(5476b^2 - 1364b + 512\right) = -2023b^2 + 4046b - 2023 = -2023(b-1)^2.$$

Заметим, что $D \leqslant 0$, а это значит, что парабола всегда на неотрицательных значениях. Доказано.

№11. Пусть x, y, z — числа, такие, что $xy + yz + zx = -1$. Докажите, что $x^2 + 5y^2 + 8z^2 \geqslant 4$.

Решение: Докажем, что $x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 4xy + 4yz + 4xz \geqslant 0$. Рассмотрим квадратичный многочлен от x :

$$P(x) = 1 \cdot x^2 + (4y + 4z) \cdot x + \left(5y^2 + 8z^2 + 4yz\right).$$

Его дискриминант равен

$$(4y+4z)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(5y^2 + 8z^2 + 4xz\right) = 16y^2 + 16z^2 + 32yz - 20y^2 - 32z^2 - 16yz = 16yz - 4y^2 - 16z^2 = -(2y-4z)^2.$$

Отсюда дискриминант всегда меньше или равен 0, и так как старший коэффициент положительный, многочлен всегда больше или равен 0. Доказано.

Задачи для самостоятельного решения:

№12. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $a+b=cd,\ c+d=ab$. Докажите следующее неравенство:

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geqslant 0.$$

№13.

$$(!)\ x^4+6x^2y^2+y^4 \geqslant 4xy(x^2+y^2).$$

№14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2y-2=0, \\ y^2+4z+7=0, \\ z^2+4x+4=0. \end{cases}$$

№15. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $abc=1$. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

№16. Пусть x_1 и x_2 — два различных действительных корня многочлена ax^3+bx^2+cx+d. Докажите, что

$$x_1x_2 \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Глава 3

Неравенства о средних

В этом разделе мы научимся использовать один из самых мощных инструментов, который, если не поможет решить задачу, то точно поспособствует развитию решения.

Вы наверняка знакомы с арифметическим средним — суммой n членов, поделённой на n. Однако в математике существует множество других средних величин, таких как квадратичное, геометрическое и гармоническое средние. Для них существует важное неравенство, которое поможет углубиться в эту тему.

Неравенство QM $\geqslant$ AM $\geqslant$ GM $\geqslant$ HM.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, тогда справедливо неравенство:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Эти средние величины — QM (Quadratic Mean), AM (Arithmetic Mean), GM (Geometric Mean) и HM (Harmonic Mean). Давайте рассмотрим примеры!

Пример 1. Докажите неравенство для $n = 2$.

Решение: Сначала докажем, что QM $\geqslant$ AM, то есть нам нужно показать неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2}.$$

Возведём обе стороны в квадрат:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4},$$

сократим и получим:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

что является верным по свойству квадратов.

Остальные неравенства можно доказать аналогичным образом. В конце всегда остаётся одно и то же доказательство через свойства квадратов. Заметим, что AM $\geqslant$ GM для $n = 2$ — это тот же второй пример, который мы многократно использовали в предыдущем разделе.

Пример 2. Докажите неравенство для любых чисел:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Решение: Используем неравенство AM $\geqslant$ GM:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geqslant 2|ab| \geqslant 2ab, \\ b^2 + c^2 \geqslant 2|bc| \geqslant 2bc, \\ a^2 + c^2 \geqslant 2|ac| \geqslant 2ac. \end{cases}$$

Суммируем три неравенства и делим на два с обеих сторон.

Возможная ошибка.

Вы могли начать с применения AM $\geqslant$ GM для a^2, b^2, c^2 и получить, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

что не является полезным фактом. Помните, что AM $\geqslant$ GM — это как клей, который склеивает переменные под корнем, и «расклеить» их потом почти невозможно, что может привести к ненужным дополнительным членам. Перед применением этого неравенства внимательно посмотрите на то, что нужно доказать в конце.

Пример 3: Докажите для положительных чисел:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a.$$

Решение: С самого начала можно обратить внимание на тот факт, что тут слоги справа не сильно симметричны, как в задачах ранее, значит, скорее всего, придется использовать что-то несколько раз. Давайте попробуем.

Для начала, заметим, что, когда условно мы засунем a^3 в AM $\geqslant$ GM, мы бы хотели, чтобы вышло число с целой степенью, значит, скорее всего, его нужно засовывать в AM $\geqslant$ GM, где $n = 3$. Но, если мы впихнем его один раз, этого не будет достаточно, ибо в результате мы получим просто a^1, умноженное на что-то еще, значит, нужно засунуть его несколько раз.

Обратим внимание на a^2b. Чтобы его получить в AM $\geqslant$ GM, мы должны также иметь и b. Тогда давайте попробуем $a^3 + a^3 + b^3$, и успех! Наша сумма получилась больше или равна $3a^2b$. Сделаем аналогичные действия и докажем задачу.

Пример 4. Для положительных чисел докажите неравенство:

$$(a+b+c)^3 \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Решение: Справа мы имеем кубические степени. Кроме того, как раскрыть выражение слева, никаких вариантов тут нет. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$, осталось доказать, что

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc.$$

Сделаем AM $\geqslant$ GM для каждого члена, то есть $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и так далее ...

Пример 5. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, тогда найдите максимальное возможное значение выражения

$$(1-a)(1-b)(1-c),$$

если известно, что $a+b+c=1$.

Рассуждение про min/max.

Возможно, вы уже видели задачи на тему нахождения min/max значения выражения. Если что, в этих задачах вы должны ограничить выражение константой, ниже или выше которой, соответственно, оно не сможет достичь. И обязательно не забудьте найти пример.

Возможная ошибка.

Нахождение примера в таких задачах является обязанностью. Давайте разберем почему.

Пусть мы имеем условие, что $a \geqslant 2$ и нашей задачей является нахождение минимума выражения $a+\frac{1}{a}$. Частой возможной ошибкой является доказательство того, что выражение больше или равно 2 по AM $\geqslant$ GM, но в этом случае найти пример будет невозможно, ибо пример бы подошел только в случае, если $a=1$.

Решение: Заметим, что нашу единицу можно заменить на $a+b+c$. Задача преобразовалась в нахождение максимума

$$(a+b)(b+c)(a+c).$$

Не сразу можно заметить, что по AM $\geqslant$ GM,

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

То есть,

$$\frac{2}{3} \geqslant \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

Или же,

$$\frac{8}{27} \geqslant (a+b)(b+c)(a+c).$$

Значит, максимумом выражения является $\frac{8}{27}$. Пример: $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Пример 6. Докажите AM $\geqslant$ GM для $n = 4$.

Решение: Заметим, что

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b}{4} + \frac{c+d}{4} \underset{(\text{AM}\geqslant\text{GM})}{\geqslant} \frac{\sqrt{ab}}{2} + \frac{\sqrt{cd}}{2} \underset{(\text{AM}\geqslant\text{GM})}{\geqslant} \sqrt[4]{abcd}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 6.1. Докажите AM $\geqslant$ GM для 2^n чисел.

Решение: Попробуем доказать через индукцию, докажем для 2^n членов. Можем заметить, что $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ стоило бы разбить по парам, применим AM $\geqslant$ GM для каждой такой пары:

$$\sum_{\text{cyc}} a_{2^n} \geqslant 2\sqrt{a_1a_2} + 2\sqrt{a_3a_4} + \cdots + 2\sqrt{a_{2^n-1} \cdot a_{2^n}}.$$

Теперь вспомним, что мы знаем AM $\geqslant$ GM для 2^{n-1} чисел по предположению индукции, и используем его для этих 2^{n-1} парных произведений:

$$2\sqrt{a_1a_2} + 2\sqrt{a_3a_4} + \cdots + 2\sqrt{a_{2^n-1} \cdot a_{2^n}} \geqslant 2^n \cdot \sqrt[2^n]{a_1a_2 \ldots a_{2^n}}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 6.2. Если известно, что AM $\geqslant$ GM работает для n членов, то докажите, что сработает и для $n-1$ членов.

Решение: Давайте сперва попробуем доказать для 3 членов. Интуитивно ясно, что члены должны быть a_1, a_2, a_3. Нам нужно использовать четвертый член, и в то же время он должен быть равен всем другим членам, чтобы знак был больше или равен. Поэтому логично было бы взять его как $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$. Посмотрим, что получилось. Для удобства пусть $a_1 + a_2 + a_3 = s$.

$$\frac{4s}{12} \geqslant \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \frac{s}{3}} \Rightarrow \frac{s^4}{3^4} \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \frac{s}{3} \Rightarrow \frac{s^3}{3} \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \Rightarrow \frac{s}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}.$$

Что и требовалось доказать.

В доказательстве перехода с n для $n-1$ используется тот же прием, где последний член берут как сумму $n-1$ членов, поделенных на $n-1$. Значит, так как мы знаем, что для степеней двоек это неравенство верно, то и для всех чисел оно верно, ибо мы бы могли спускаться и подниматься каждый раз.

Неравенство о средних степенных.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, и $P_m = \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n}}$. Тогда следует факт, что если $a > b$, то $P_a \geqslant P_b$, то есть:

$$P_a \geqslant P_{a-1} \geqslant \cdots \geqslant P_2 = \mathrm{QM} \geqslant P_1 = \mathrm{AM}.$$

1st Level:

№1. $a \geqslant 3$. Найдите минимум выражения

$$S = a + \frac{1}{a}.$$

Решение: Возможно, вашей первой попыткой было просто применить AM $\geqslant$ GM для этих чисел, что было бы ошибкой, ибо вы бы получили, что выражение больше или равно 2, но только под условием $a \geqslant 3$ вы не найдёте примера. Лучше давайте сделаем AM $\geqslant$ GM для $\frac{1}{a}$ и $\frac{a}{9}$:

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{9} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Осталось найти минимум выражения $\frac{8a}{9} + \frac{2}{3}$, что очевидно достигается, когда $a = 3$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Супер совет.

Допустим, вы хотите использовать какое-нибудь неравенство, чтобы доказать задачу. Перед доказательством попробуйте найти случай равенства, то есть при каких значениях равенство достигается (например, $a = b = c = 1$), и лишь только потом начните применять неравенства. При этом, если вы хотите условно использовать AM $\geqslant$ GM, убедитесь, что при $a = b = c = 1$, например, все члены в неравенстве будут равны.

Пример: Вы убедились, что при $a = b = c = 2$ выполняется равенство. Тогда вы не можете использовать AM $\geqslant$ GM для $(a,\ b+2)$, ибо $a \neq b+2$.

Причиной этого является то, что если вы используете неравенства, где члены не равны, неравенство по сути будет строгим, то есть, найденные значения, при которых выполняется равенство, на самом деле будут иметь строгое неравенство.

№2. Если $x \in \mathbb{R}^+$, найдите минимум выражения $\frac{1}{x} + x^2$.

Решение: Заметим, что у нас есть x^2, для которого нужно будет иметь $\frac{1}{x^2}$, чтобы при AM $\geqslant$ GM получить константу. Так что давайте применим

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

То есть, максимумом является $\boxed{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$. Пример находим с тем фактом, что члены должны быть равны, то есть $\frac{1}{2x} = x^2$, соответственно $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

№3. Если $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, докажите, что

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

Решение: Заметим, что $\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{n!}$ (неравенство строгое, ибо $a_i \neq a_j$), а слева это по сути формула:

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}.$$

Совет.

Также, при применении AM $\geqslant$ GM, я бы советовал обратить внимание на степени с обеих сторон требуемого доказательства неравенства. В целом, когда мы имеем неравенство, которое решается через AM $\geqslant$ GM, наша задача — правильно сгруппировать переменные. В этом деле помогут степени переменных с обеих сторон.

Допустим, слева вы видите кубы, а справа — переменные первой степени. Значит, нужен AM $\geqslant$ GM с тремя членами. По сути, AM $\geqslant$ GM — это спуск степеней, просто сделайте это с умом.

№4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant a + b + c.$$

Решение: Прибавим с обеих сторон $2(a+b+c)$ и используем AM $\geqslant$ GM:

$$\frac{\frac{a^3}{b^2} + b + b}{3} \geqslant a.$$

Повторим аналогичные действия с двумя другими дробями и решим задачу.

№4.1. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Решение: Давайте умножим на два с обеих сторон и вспомним, что мы имеем с предыдущей задачи. Сделаем RHS/LHS:

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + a + b + c\right) \ \vee \ 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right).$$

Теперь применим AM $\geqslant$ GM:

$$\frac{a^3}{b^2} + a \geqslant \frac{2a^2}{b}.$$

Повторив аналогичные действия, докажем задачу.

№5. Решите уравнение:

$$a^4 + b^4 + 2 = 4ab.$$

Решение: Можно увидеть, что по AM $\geqslant$ GM: $a^4 + b^4 + 1 + 1 \geqslant 4|ab|$. Значит, если нет равенства среди $a^4, b^4, 1$, то будет строгое неравенство в условии. Следовательно, в AM $\geqslant$ GM происходит равенство, а это возможно тогда и только тогда, когда $a^4 = b^4 = 1$, откуда следует, что $a = b = 1$ и $a = b = -1$.

№6. Для положительных $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

Решение: Просто применим AM $\geqslant$ GM для n чисел и получим требуемое.

№7. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Решение: Примените AM $\geqslant$ HM.

№8. Неравенство Несбитта. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Подсказка: Умножьте предыдущее неравенство на $a + b + c$.

№9. Докажите, что

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

Подсказка: Используйте $P_3 \geqslant P_1 = AM$.

№10. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

№11. Докажите неравенство для положительных x и y:

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

№12. Для положительных чисел a, b и c выполняется условие $a^2+b^2+c^2 \leqslant 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

№13. Известно, что $x, y \in \mathbb{R}$ и $z > 0$, докажите, что

$$\frac{x^2+y^2+12z^2+1}{4z} \geqslant x+y+1.$$

№14. Докажите неравенство для положительных x и y:

$$\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y} \geqslant \frac{1}{x+y}.$$

№15. Докажите, что

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2.$$

№16. Для положительных чисел a, b и c выполняется условие $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1} \geqslant 1.$$

№17. Докажите, что если $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $a+b+c = 3$, то

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3 \geqslant ab+bc+ac.$$

№18. Дано, что $x^3+y^3 = 2$, где $x, y \in \mathbb{R}^+$. Докажите, что

$$x+y \leqslant 2.$$

№19. Известно, что $a+b+c+d = 8$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Докажите, что

$$4\sqrt{2} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}.$$

№20. Докажите, что если $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $3a + 2b + c \geqslant 14$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14.$$

№21. Дано, что $a + b + c = 1$ при $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant 1.$$

№22. Для положительных чисел a, b, c и d докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d \geqslant 6\sqrt{\frac{abcd}{3}}.$$

2nd Level:

№1. Решите уравнение $a^3 + b^3 = 9(ab - 3)$ в положительных числах.

Решение: Давайте передвинем и получим $a^3 + b^3 + 3^3 = 9ab$. Заметим, что левая сторона по AM $\geqslant$ GM больше или равна $9ab$, значит, члены в AM $\geqslant$ GM должны быть равны, ибо происходит равенство. Так что, $a = b = 3$.

№2. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$5(a^4 + b^4 + c^4) + 9 \geqslant 8(a^3 + b^3 + c^3).$$

Решение: $9 = 2(a^2+b^2+c^2)+3$. Заметим, что $a^4+a^4+a^4+a^4+a^4+a^2+a^2+1 \geqslant 8a^3$. Сделаем аналогичные действия и докажем задачу.

№3. Докажите, что для любых чисел выполняется

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant (a + b + c + d)^2.$$

Решение: Используя QM $\geqslant$ AM, можно заметить, что

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \frac{a + b + c + d}{4}.$$

Возведём обе стороны в квадрат и перенесём четвёрку, доказано.

№4. О положительных числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ известно, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Решение: По AM $\geqslant$ GM, $1+a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1}$. Используем для каждой скобки и получим

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n \cdot \sqrt{a_1a_2\dots a_n} = 2^n.$$

№5. О положительных числах x, y, z известно, что $xyz = 1$. Докажите, что

$$(x+2)(y+2)(z+2) \geqslant 27.$$

№6. Для натурального n и положительных a, b докажите неравенство

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

№7. Про положительные числа p, q известно, что $p+q=1$. Докажите, что

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

№8. Если для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполняется, что $a_1 + a_2 + .,.. + a_{2023} = 1$, найдите минимальное значение

$$\frac{a_1}{1+a_2+\dots+a_{2023}} + \frac{a_2}{a_1+1+a_3+\dots+a_{2023}} + \dots + \frac{a_{2023}}{a_1+a_2+\dots+a_{2022}+1}.$$

№9. Для положительных a, b, c, известно, что $a+b+c \leqslant 3$. Докажите, что

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1+a}.$$

№10. Для положительных чисел $x, y \leqslant 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

№11. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что

$$(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \leqslant xyz.$$

Подсказка: Используйте замену.

№12. Если $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, докажите, что

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{abcd}.$$

№13. О положительных числах x, y, z известно, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что

$$(!) 10x^2 + 10y^2 + z^2 \geqslant 4.$$

№14. Если $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то докажите, что

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1 + ab} \geqslant \frac{3}{2}.$$

№15. $x, y \geqslant 1$,

$$(!)\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leqslant xy.$$

№16. Известно, что $x > y \geqslant 0$. Докажите, что

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geqslant 3.$$

№17. Дано, что $abc = 1$ при положительных a, b, c. Покажите, почему

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

№18. Для положительных чисел x, y, докажите, что

$$x + y \geqslant \sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{x y^2}.$$

№19. Найдите минимум выражения

$$\frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

№20. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{a^3 + c^3 + abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

№21. Докажите неравенство для положительных a, b, c:

$$\frac{a^2}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b^2}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c^2}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leqslant \frac{1}{2}.$$

3rd Level:

№1. Для положительных a, b, c, d, докажите, что

$$\frac{1}{a + 2b + 3c + 4d} + \frac{1}{b + 2c + 3d + 4a} + \frac{1}{c + 2d + 3a + 4b} + \frac{1}{d + 2a + 3b + 4c} \leqslant \frac{1}{10a} + \frac{1}{10b} + \frac{1}{10c} + \frac{1}{10d}.$$

(РО. Обл. 2023, Р9.3)

Решение: Попробуем поиграться с первой дробью слева. Можно дойти до того, что по AM $\geqslant$ HM :

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots+\frac{1}{d}}{10} \geqslant \frac{10}{a+2b+3c+4d}.$$

Вполне логичный вопрос может прийти вам в голову, почему бы я просто не сделал так:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}}{4} \geqslant \frac{4}{a+2b+3c+4d}.$$

Но дело в том, что при этом случае равенства между членами не будет, то есть очевидно, что равенство слева и справа будет тогда, когда $a=b=c=d$, но если мы используем неравенство сверху, оно при случае равенства будет давать строгое неравенство, то есть обещанного равенства не видать. Поэтому я уравнял их, то есть использовал так, чтобы все члены были равны между друг-другом. Повторив такое же действие ещё с тремя другими дробями слева, можно доказать неравенство.

№2. Докажите для любых x, y, z то, что

$$\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2z^2}+\sqrt{z^2+2x^2} \geqslant \sqrt{3}\,(x+y+z)\,.$$

(РО. Обл. 2022, Р9.1)

Решение: Сделаем QM $\geqslant$ AM,

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+y^2}{3}} \geqslant \frac{x+2y}{3},$$

перекинем $\sqrt{3}$ на правую сторону, повторим с двумя другими корнями слева, и задача решена.

№3. Про положительные a, b, c известно, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{ac+bc}.$$

(РО. Респ. 2009, Р9.4)

Решение: Умножим правую часть на 1, то есть на abc, получим, что:

$$(!)\ \frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}+\frac{ab}{a+b},$$

обратим внимание на то, что $\frac{a+b}{4} \geqslant \frac{ab}{a+b}$, продублируем этот факт трижды, и задача решена.

№4. Докажите для неотрицательных чисел x, y, z, что

$$\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}+\sqrt{2y^2+3z^2+4x^2}+\sqrt{2z^2+3x^2+4y^2} \geqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

(РО. Обл. 2016, Р9.6)

Решение: По причине равенства членов по QM $\geqslant$ AM, мы будем использовать это неравенство для $(x, x, y, y, y, z, z, z, z)$. Так повторим и с двумя другими корнями слева. В итоге мы получим

$$3(x+y+z) \ \vee \ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

(то есть я ввел RHS/LHS, левую часть я уменьшаю и доказываю, что она все равно больше правой). Теперь применим QM $\geqslant$ AM для (x, y, z), и задача решена.

№5. Если мы знаем, что для положительных a, b, c выполняется $a+b+c=3$, докажите, что

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ac.$$

(Всерос. олимпиада, 2004)

Решение: Эта задача очень красивая и уникальная. Умножим с обеих сторон на два и прибавим по $a^2+b^2+c^2$. Мы получим:

$$(!)\ a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2 = 9.$$

Заметим, что $x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x} \geqslant 3x$ по AM $\geqslant$ GM. Сделаем это для (a, b, c), и задача доказана!

№6. Решите систему уравнений в положительных числах:

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{x_2}=4, \\ x_2+\frac{1}{x_3}=1, \\ \dots \\ x_{100}+\frac{1}{x_1}=1. \end{cases}$$

№7. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{a^2+5}{2a+4}+\frac{b^2+5}{2b+4}+\frac{c^2+5}{2c+4} \geqslant 3.$$

№8. Даны положительные числа a, b, c. Известно, что $a+b+c=6$. Тогда докажите, что

$$\frac{a^3}{a^4+1}+\frac{6b^2}{b^3+16}+\frac{54c^2}{c^4+243} \leqslant 3.$$

№9. Докажите неравенство:

$$a^{12}+(ab)^6+(abc)^4+(abcd)^3 \leqslant 1.43\left(a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}\right).$$

Для неотрицательных чисел a, b, c, d.

(РО. Респ. 2008, Р10.3)

№10. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

№11. Докажите неравенство для положительных x, y:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geqslant \frac{2}{x+y+2}.$$

№12. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$\frac{a^3+2}{3b+3c} + \frac{b^3+2}{3a+3c} + \frac{c^3+2}{3a+3b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

№13. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$1 + \frac{3}{ab+bc+ac} \geqslant \frac{6}{a+b+c}.$$

№14. Даны положительные числа a, b. Если известно, что $ab \geqslant 1$, докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

(JBMO 2008 P3)

№15. Даны положительные числа a, b, c. Известно, что $abc = 1$, докажите, что

$$\prod_{\text{cyc}} \left(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right) \geqslant 8\left(a^2 + a + 1\right)\left(b^2 + b + 1\right)\left(c^2 + c + 1\right).$$

(JBMO 2011 P1)

№16. Решите в действительных числах:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 20, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150. \end{cases}$$

(JBMO 2008 P1)

№17. Даны положительные числа a, b, c. Известно, что $abc = 8$, докажите следующее неравенство:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+c^3)}} \geqslant \frac{4}{3}.$$

(ATMO 2005, P2)

№18. Даны положительные числа a, b, c. Если $ab + bc + ac = 1$, докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

(IMO SL 2004, A5)

Глава 4

КБШ и КБШ Дробный

(Сәрсенғали Даниал, Дүзелбай Ернар)

В следующем разделе мы рассмотрим новое неравенство — неравенство Коши-Буняковского (также известное как неравенство Коши-Буняковского-Шварца или просто неравенство КБШ) и его дробный вид.

Возможно, вы будете использовать это неравенство реже, чем неравенство AM $\geqslant$ GM, но это не умаляет его полезности, особенно при наличии подходящих условий и умелых рук.

Неравенство Коши-Буняковского (КБШ).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — это действительные числа. Тогда справедливо неравенство:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ или когда один из наборов состоит только из нулей (нулевой набор).

Пример 1. Вашим первым заданием будет доказать данное неравенство.

(Подсказка: Попробуйте индукцию.)

Решение: Давайте попробуем доказать данное неравенство с использованием индукции по n.

Начнём с базы индукции. Пусть $n = 1$. Тогда остаётся доказать, что $(a_1 b_1)^2 \geqslant (a_1 b_1)^2$, что является очевидным утверждением.

Предположим теперь, что неравенство выполняется для n и покажем, что оно также выполняется для $n+1$. Нам необходимо доказать следующее неравенство:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2.$$

Из предположения, что неравенство верно для n членов, следует что:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Идея состоит в том, чтобы изменить условие и привести его к удобному виду для доказательства для $n+1$. Для удобства обозначим $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $B = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$ и $C = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Тогда имеем: $AB \geqslant C^2$. После замены условия нашей задачи остаётся доказать следующее:

$$(!)\ \left(A + a_{n+1}^2\right)\left(B + b_{n+1}^2\right) \geqslant \left(C + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2.$$

Теперь это выглядит не так устрашающе, раскроем скобки:

$$(!)\ AB + (a_{n+1}b_{n+1})^2 + A \cdot b_{n+1}^2 + B \cdot a_{n+1}^2 \geqslant C^2 + (a_{n+1}b_{n+1})^2 + 2C \cdot a_{n+1}b_{n+1},$$

$$\Rightarrow (!)\ AB + A \cdot b_{n+1}^2 + B \cdot a_{n+1}^2 \geqslant C^2 + 2C \cdot a_{n+1}b_{n+1}.$$

Сразу бросаются в глаза AB и C^2, ибо по предположению индукции для n членов мы знаем, что $AB \geqslant C^2$, осталось доказать, что:

$$A \cdot b_{n+1}^2 + B \cdot a_{n+1}^2 \geqslant 2C \cdot a_{n+1}b_{n+1}.$$

Сделаем AM $\geqslant$ GM для левой части, будет:

$$A \cdot b_{n+1}^2 + B \cdot a_{n+1}^2 \geqslant 2\sqrt{AB} \cdot a_{n+1}b_{n+1} \geqslant 2C \cdot a_{n+1}b_{n+1}\ \left(\sqrt{AB} \geqslant C\right),$$

решено.

По индукции можно доказать, что случай равенства приходится тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ или когда один из наборов состоит только из нулей (нулевой набор).

Неравенство КБШ дробного вида.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — это действительные положительные числа, тогда справедливо неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Равенство приходится тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Вообще, у этого неравенства есть и другие названия — Лемма Титу (сокращённо Лемма T2 (Ti Two)), Лемма Седракяна и т.д. Данное неравенство вы можете использовать без всякого доказательства на олимпиадах, как и просто КБШ.

Пример 2. Теперь попробуйте доказать КБШ дробного вида.

(Подсказка: Попробуйте использовать КБШ.)

Решение: Тут на самом деле тоже можно использовать индукцию через n, но это скучно и долго, так что докажем неравенство через КБШ (не зря ведь оно называется дробным КБШ).

Давайте пока возьмём набор чисел $\{b_i\}$ и придумаем второй набор вместо $\{a_i\}$. Попробуем перекинуть $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, которое мы имеем справа снизу в условии неравенства, налево. Останется доказать, что:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

По-моему, и самому невнимательному будет видно, что это выполняется по КБШ, достаточно набор $\{a_i\}$ взять как набор $\left\{\frac{a_i^2}{b_i}\right\}$, то есть:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \geqslant \left(\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1}}\cdot b_1+\sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}}\cdot b_2+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{b_n}}\cdot b_n\right)^2 =$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 .$$

Пример 3. Докажите QM $\geqslant$ AM, используя КБШ.

Решение: Давайте посмотрим, что нам вообще требуется доказать, чтобы прийти к QM $\geqslant$ AM:

$$(!)\ \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n^2},$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\cdot n \geqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 .$$

Осталось доказать это неравенство с помощью КБШ.

Совет.

Часто в задачах, связанных с неравенством КБШ, можно столкнуться с ситуацией, когда остаётся доказать неравенство вида $A\cdot n \geqslant B$, где n — некоторое число, а A и B — переменные или что-то другое. В таких случаях можно разделить n на равные (не всегда) части, что часто помогает в решении.

Например, если надо доказать, что

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a+b+c)^2 .$$

Попробуйте взять $3 = 1+1+1$, и получите:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right) \geqslant (a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1)^2 .$$

Что верно по КБШ.

Воспользуемся советом сверху! Разобьём n на $1+1+\cdots+1 = n$, останется доказать, что

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(1^2+1^2+\cdots+1^2\right) \geqslant (a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+\cdots+a_n\cdot 1)^2 .$$

Это очевидно по КБШ.

Пример 4. Пусть P — это многочлен с положительными коэффициентами. Докажите, что для положительных чисел x, y выполняется

$$P\left(x^2\right) \cdot P\left(y^2\right) \geqslant (P\,(xy))^2\,.$$

(Всерос. олимпиада)

Решение: Пусть $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$. Тогда по условию задачи нам нужно доказать, что:

$$\left(a_n \cdot x^{2n} + a_{n-1} \cdot x^{2n-2} + \dots + a_1 \cdot x^2 + a_0\right)\left(a_n \cdot y^{2n} + a_{n-1} \cdot y^{2n-2} + \dots + a_1 \cdot y^2 + a_0\right)$$

$$\geqslant \left(a_n \cdot (xy)^n + a_{n-1} \cdot (xy)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot xy + a_0\right)^2.$$

Заметим, что если применить просто напрямую применить КБШ, то данное условие выполняется.

Пример 5. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — это действительные числа и $A, B > 0$, такие, что

$$A^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \text{ или } B^2 \geqslant b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2.$$

Тогда докажите, что

$$\left(A^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\right)\left(B^2 - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2\right) \leqslant (AB - a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2\,.$$

(Aczel)

Решение: Давайте упростим условие, взяв его под корень:

$$(!)\ \sqrt{\left(A^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\right)\left(B^2 - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2\right)} \leqslant (AB - a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)\,,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \sqrt{\left(A^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\right)\left(B^2 - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2\right)} + (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leqslant AB.$$

Теперь было бы славно упростить выражения. Хорошей идеей будет сделать замену $a = \sum\limits_{\text{cyc}} a_n^2$ и $b = \sum\limits_{\text{cyc}} b_n^2$. И так как $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ заменить таким образом не получится, давайте скажем, что оно меньше или равно $\sqrt{a \cdot b}$ по КБШ ($\left(\sum\limits_{\text{cyc}} a_n^2\right)\left(\sum\limits_{\text{cyc}} b_n^2\right) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$). Получается, что

$$\sqrt{\left(A^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\right)\left(B^2 - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2\right)} + (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leqslant$$

$$\sqrt{\left(A^2 - a\right)\left(B^2 - b\right)} + \sqrt{ab},$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \sqrt{\left(A^2 - a\right)\left(B^2 - b\right)} + \sqrt{ab} \leqslant AB.$$

Далее можно применить следующую технику по КБШ:

$$\left(\sqrt{\left(A^2 - a\right)\left(B^2 - b\right)} + \sqrt{ab}\right)^2 \leqslant \left(\left(A^2 - a\right) + a\right) \cdot \left(\left(B^2 - b\right) + b\right),$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(A^2-a)(B^2-b)}+\sqrt{ab}\right)^2 \leqslant (AB)^2,$$
$$\Rightarrow \sqrt{(A^2-a)(B^2-b)}+\sqrt{ab} \leqslant AB.$$

Совет.

Если вы видите в задачах выражения с минусом внутри, попробуйте использовать ту же технику, как и в прошлой задаче:

$$\left(\sqrt{(A^2-a)(B^2-b)}+\sqrt{ab}\right)^2 \leqslant \left((A^2-a)+a\right)\cdot\left((B^2-b)+b\right).$$

То есть вы можете прибавить обратно то же выражение и в то же время получить компактную версию справа.

Пример 6 (неравенство Несбитта). Дано, что $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Возможная ошибка.

В будущем велика вероятность того, что каждый раз, когда вы будете видеть дробные выражения в неравенствах, вы будете пытаться сразу использовать КБШ дробного вида. Да, безусловно, в большинстве случаев это бывает очень под руку, но, например, в этом примере не хотелось бы работать с $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$.

Вместо этого почему бы из $\frac{a}{b+c}$ не сделать $\frac{a^2}{ab+ac}$, ведь это одно и то же. Теперь, проделав так с каждой дробью, у вас больше шансов решить данную задачу, используя дробный вид КБШ.

Решение: Давайте воспользуемся советом сверху! Останется доказать, что

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Теперь можно попробовать дробный вид КБШ:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{ab+ac} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)},$$

$$\Rightarrow (!)\ \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)} \geqslant \frac{3}{2},$$

$$\Rightarrow (!)\ (a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac).$$

Думаю, доказать последнее вы сможете без особого труда, но вот вам занимательное доказательство через КБШ (сперва раскройте скобки и сократите):

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+a^2\right) \geqslant (a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)^2 .$$

Пример 7. Докажите, что если $x, y, z > 1$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$, то тогда

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leqslant \sqrt{x+y+z}.$$

(Предложено Мироном Юркевичем, Иран 1998.)

Решение: Скорее всего, вы попытались сразу использовать КБШ по типу:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leqslant \sqrt{3(x+y+z-3)}.$$

И затем попытались доказать, что $\sqrt{3(x+y+z-3)} \leqslant \sqrt{x+y+z}$, то есть то, что $x+y+z \leqslant \frac{9}{2}$. Но, к сожалению, это неправда, на самом деле наоборот, $x+y+z \geqslant \frac{9}{2}$. Так что давайте пока сделаем эскиз решения:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} = \sqrt{a}\ \cdot\ \sqrt{\frac{x-1}{a}}+\sqrt{b}\ \cdot\ \sqrt{\frac{y-1}{b}}+\sqrt{c}\ \cdot\ \sqrt{\frac{z-1}{c}}$$

$$\leqslant \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}\right)}.$$

Нам бы хотелось, чтобы последнее выражение равнялось $\sqrt{x+y+z}$, так что будет логично взять $a = x,\ b = y,\ c = z$, ибо получается, что $\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}=1$ и $a+b+c=x+y+z$.

Главной идеей в этой задаче является то, что не всегда нужно сразу пробовать делать КБШ напрямую. Попробуйте сделать эскиз того, как вы будете его делать, используя другие переменные, которые позже вы сможете выразить переменными в задаче для наибольшего удобства.

1st Level:

№1. Для действительных a, b, c, d докажите, что

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geqslant (ac+bd)^2.$$

Решение: По КБШ следует что $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geqslant (a \cdot c+b \cdot d)^2$.

№2. Для действительных a, b, c докажите, что

$$\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Решение: Давайте перекинем троечку справа налево: (!) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a+b+c)^2$. Это доказывалось в пятом примере.

№2.1. Известно, что $a+b+c=1$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Решение: Для начала нам требуется доказать, что:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 1.$$

Единица справа сама по себе почти не связана с тем, что мы имеем слева, так что мы должны заменить её чем-то. В голову, конечно, приходит сразу заменить её на $a+b+c$, попробуем:

$$(!)\ \ 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a+b+c).$$

Думаю, самое время использовать КБШ и вспомнить первый совет, то есть сгруппировать тройку — число, на которое умножено $\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Выражение симметрично, так что пусть будет $3=1+1+1$:

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a \cdot 1+b \cdot 1+c \cdot 1)^2=1.$$

Действительно, получилось.

№3. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

Решение: Думаю, вы должны вспомнить, что тут лучше из a сделать a^2, давайте так и сделаем:

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{ab+ac} \geqslant 2.$$

Давайте применим КБШ дробного вида:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{ab+ac} \geqslant \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd} \geqslant 2.$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (a+b+c+d)^2 \geqslant 2\,(ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd)\,,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geqslant 2\,(ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd)\,,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2ac+2bd.$$

Последним шагом будет просто использовать AM $\geqslant$ GM для $\left(a^2, c^2\right)$ и $\left(b^2, d^2\right)$.

№4. Для положительных чисел докажите, что

$$(a_4b_4+a_2b_2+a_3b_3+a_1b_1)\left(\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_4}{b_4}+\frac{a_3}{b_3}\right) \geqslant (a_1+a_2+a_3+a_4)^2\,.$$

Решение: Достаточно заметить, что по КБШ:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\frac{a_4}{b_4}\right) \geqslant$$

$$\left(\sqrt{a_1b_1\cdot\frac{a_1}{b_1}}+\sqrt{a_2b_2\cdot\frac{a_2}{b_2}}+\sqrt{a_3b_3\cdot\frac{a_3}{b_3}}+\sqrt{a_4b_4\cdot\frac{a_4}{b_4}}\right)^2 = (a_1+a_2+a_3+a_4)^2\,.$$

Да, задача решается очень просто. Достаточно правильно расставить члены.

№5. Пусть x, y, z — это положительные числа, тогда докажите, что

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y} \geqslant 1.$$

№6. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

№7. Для действительных чисел x, y, z докажите, что

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{(3x+4y+5z)^2}{50}.$$

№8. Дано, что $10x+y=1$. Найдите минимальное значение выражения x^2+y^2.

№9. Для положительных a, b докажите, что

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

№10. Решите систему уравнений в положительных числах, если известно, что $n \geqslant 4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 16, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1. \end{cases}$$

2nd Level:

№1. Для положительных чисел, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}.$$

(ATMO 1991, P3)

Решение: Применим дробный вид КБШ:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{2\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}.$$

№2. Даны положительные числа a, b, c и известно, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение: Возможно, вы попробовали сразу использовать дробный вид КБШ, и это привело вас к

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}.$$

То есть, достаточно показать, что $a + b + c \geqslant 3$, это легко сделать, применив AM $\geqslant$ GM для (a, b, c).

№3. Дано, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 16, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ ax + by + cz = 20. \end{cases}$$

Найдите значение выражения

$$A = \frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

Решение: Казалось бы, тема неравенств, как же могут быть связаны равенства?
На самом деле связь есть, и она достаточно большая. Абсолютно нормально временами использовать неравенства в задачах, чтобы найти равенство, для этого достаточно дойти до:

$$A \geqslant B \geqslant A.$$

Из этого напрямую последует, что $A = B$, ибо в ином случае мы бы получили, что $A > A$.

Сразу заметим, что $ax+by+cz$ — это как умножить a^2 и x^2, b^2 и y^2, и c^2 и z^2 и взять каждое умножение под корнем. Думаю, довольно очевидно, что тут имеет место быть КБШ, так что ради интереса посмотрим, что будет, если вставить данные значения:

$$400 = 16 \cdot 25 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geqslant (ax+by+cz)^2 = 20^2 = 400.$$

Круг сомкнулся, мы видим, что $400 \geqslant A \geqslant B \geqslant 400$, соответственно $400 = A = B$. То есть, у нас происходит равенство в КБШ, а такое возможно только тогда, когда:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k.$$

Соответственно, вставляем и находим, что $k = \frac{4}{5}$. Теперь $a+b+c = \frac{4}{5} \cdot (x+y+z)$, ответ — $\boxed{\frac{4}{5}}$.

№4. Для положительных чисел a, b, c, для которых выполняется $a+b+c=1$, найдите максимум выражения

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}.$$

Решение: Перед решением такого рода задач стоит "предугадать" ответ. Скорее всего, максимумом выражения будет при равенстве членов, то есть когда $a=b=c=\frac{1}{3}$. Попробуем тогда доказать, что максимумом выражения является $\sqrt{21}$ (вставьте в выражение данное равенство), то есть останется доказать, что:

$$\sqrt{21} \geqslant \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}.$$

Мы планируем использовать КБШ, так что наше выражение должно быть справа при использовании данного неравенства, то есть мы должны примерно сделать неравенство вида:

$$\sqrt{21} \geqslant X \cdot Y \geqslant \sqrt{4a+1}+\ldots$$

Хотелось бы, чтобы мы как-то заменили $a+b+c$ на 1, так что давайте вместо X возьмём $(4a+1)+(4b+1)+(4c+1)$ и пусть Y соответственно будет $\left(1^2+1^2+1^2\right)$:

$$21 = 7 \cdot 3 = ((4a+1)+(4b+1)+(4c+1))\left(1^2+1^2+1^2\right) \geqslant \left(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\right)^2.$$

Мы нашли максимум выражения. Так как мы предполагали от равенства, то примером будет $a = b = c = \frac{1}{3}$.

№5. Пусть $abc = 1$ и $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a+b+1} + \frac{b^2}{b+c+1} + \frac{c^2}{c+a+1} \geqslant 1.$$

№6. Решите уравнение

$$2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}.$$

№7. Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geqslant 1.$$

№8. Пусть a, b, c и x, y, z — это положительные числа такие, что выполняется $x + y + z = 1$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + yz + xz)(ab + bc + ac)}.$$

№9. Известно, что a, b, c — это положительные числа, докажите, что

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

№10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — такие действительные числа, что

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 1\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 - 1\right) > \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n - 1\right)^2.$$

Докажите, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 1 \text{ и } b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 1.$$

№11. Пусть p — это многочлен с положительными коэффициентами. Докажите, что если $p\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{p(x)}$ выполняется для $x = 1$, то оно также выполняется и для любых $x > 0$.

3rd Level:

№1. Известно, что $3x - 4y + 5z = 5$. Найдите наименьшее значение выражения:
а) $x^2 + y^2 + z^2$;
б) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2$.

Решение: а) Чтобы в итоге прийти к тому, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant C$, в КБШ наше выражение должно быть слева, то есть нам нужно умножить его на кое-что, чтобы справа вышло число. Очевидно, что просто так справа число выйти не сможет, так что мы должны получить выражение и заменить его числом, то есть воспользоваться тем, что $3x - 4y + 5z = 5$:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot M \geqslant (3x - 4y + 5z)^2 = 25.$$

Попробуем подобрать M. Вместе с x^2 должен быть 9, 16 должно быть с y^2, и 25 с z^2 (чтобы под корнем получить $3x,\ 4y$, и $5z$) :

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(3^2 + 4^2 + 5^2\right) \geqslant (3x + 4y + 5z)^2 .$$

Но стоп, разве у нас не должно быть $3x - 4y + 5z$? Этот вопрос решается очень просто: пусть y^2 будет $(-y)^2$ (числа ведь могут быть любыми, главное чтобы в КБШ были квадраты). Теперь получилось, что:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(3^2 + 4^2 + 5^2\right) \geqslant (3x - 4y + 5z)^2 = 25,$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geqslant \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

Осталось найти пример, то есть случай равенства. А равенство приходится тогда, когда $\boxed{\dfrac{x}{3} = \dfrac{(-y)}{4} = \dfrac{z}{5}}$.

Вставив это в изначальное равенство, получим случай равенства при $\boxed{x = \dfrac{3}{10},\ y = \dfrac{-4}{10},\ z = \dfrac{5}{10}}$.

Кстати, на олимпиадах вам необязательно доказывать, что это единственный пример, при котором достигается минимум (если этого не просят), как и необязательно показывать то, как вы нашли пример.

б) Воспользуемся той же логикой:

$$\left(3x^2 + (-4y)^2 + 5z^2\right)(3 + 4 + 5) \geqslant (3x - 4y + 5z)^2 ,$$

$$\Rightarrow\ \left(3x^2 + 4y^2 + 5z^2\right) \geqslant \frac{25}{12}.$$

Равенство приходится тогда когда $\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2y}{2} = \frac{z\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, то есть, когда $\boxed{x = (-y) = z}$.

Пример: $\boxed{x = (-y) = z = \dfrac{5}{12}}$.

№2. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

Решение: Давайте возьмём один слог слева: $\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)$. От $(1+a_1)$ справа его отличает лишь то, что мы имеем вторую степень у a_1 и a_2 под ним, почему бы не попытаться избавиться от них? Можно додуматься, что можно придумать КБШ, то есть умножить что-то на данный слог:

$$A \cdot \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right) \geqslant B.$$

Сперва ясно, что у "A" будет a_2, чтобы избавиться от этого знаменателя, а вместе с ним можно и поставить 1, чтобы не возникало каких-то проблем:

$$(1+a_2)\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right) \geqslant (1+a_1)^2.$$

Проделав так с каждым слогом, вы сможете решить задачу:

$$\left((1+a_2)\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\right)\cdot\left((1+a_3)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left((1+a_1)\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\right) \geqslant (1+a_1)^2(1+a_2)^2\ldots(1+a_n)^2,$$

$$\Rightarrow\ ((1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n))\cdot\left(\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\right) \geqslant ((1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n))^2,$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

№3. О положительных числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ известно, что $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Докажите, что

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}.$$

Решение: Давайте избавимся от квадратов:

$$\left(\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2\right)(1+1+\cdots+1) \geqslant$$

$$\left(\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\right)^2,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \frac{\left(\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\right)^2}{n} \geqslant \left(n^2+1\right)^2,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (a_1+a_2+\cdots+a_n)+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2+1,$$

$$\Rightarrow \; (!) \; 1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geqslant n^2 + 1.$$

Значит, осталось лишь показать, почему сумма обратных чисел будет больше или равна n^2, попробуем теперь сделать дробный вид КБШ:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{n^2}{1} = n^2.$$

№4. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $20a^2+21b^2 = 20a+21b$. Найдите наименьшее значение выражения

$$A = \sqrt{\frac{a}{b\,(20a+21)}} + \sqrt{\frac{b}{a\,(20+21b)}}.$$

(РО. Обл. 2021, Р9.4)

Решение: Эта задача является хорошим примером того, что КБШ не всегда решает всю задачу.

Сперва из условия вычтем очень интересный факт:

$$\left(20a^2 + 21b^2\right)(20+21) \geqslant (20a+21b)^2,$$

$$\Rightarrow \; 41 \geqslant 20a + 21b.$$

Теперь давайте используем AM $\geqslant$ GM для A, ибо было бы славно сократить a, b сверху и снизу:

$$A \geqslant \sqrt[4]{\frac{1}{(20a+21)\,(20+21b)}}.$$

Осталось найти максимум выражения $(20a+21)(20+21b)$ (так как оно является знаменателем, достаточно найти его максимум чтобы найти минимум выражения). Обратимся опять к AM $\geqslant$ GM, очевидно что надо взять данное выражение за GM, получается следующее:

$$\frac{20a+21b+41}{2} \geqslant \sqrt{(20a+21)(20+21b)}.$$

Осталось найти максимум $20a+21b+41$, это 82 ($41 \geqslant 20a+21b$). Соответственно, минимумом выражения является $\boxed{2\sqrt{\frac{1}{41}}}$.

Пример: $\boxed{a = 1,\ b = 1.}$

№5. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, x, y, z работает следующее неравенство:

$$ax + by + cz + \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

№6. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, докажите, что

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geqslant 3.$$

№7. Дано, что $a, b, c \geqslant 1$. Докажите следующее неравенство:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{a(bc+1)}.$$

Глава 5

Условия и замены

5.1 abc=1

Наверняка вы сталкивались с задачами по неравенствам при условии $abc = 1$. Очевидно, что в процессе решения задачи необходимо будет использовать этот факт — умножать, делить или иным образом его учитывать. Однако не каждый сразу догадается о том, как именно это можно сделать в самый подходящий момент. Как бы хотелось просто избавиться от этого условия и решать неравенства, не обращая на него внимания.

К счастью, для многих задач это возможно. В этой части книги мы рассмотрим задачи с данным условием и прекрасные замены, которые могут существенно упростить процесс их решения.

Замена abc=1.

Если даны действительные числа a, b, c, для которых выполняется равенство $abc = 1$, в силу можно заменить переменные следующим образом:

$$a = \frac{x}{y},\ b = \frac{y}{z},\ c = \frac{z}{x}.$$

Доказательство: Рассмотрим дробь $\frac{x}{y}$ для какого-то x. Через регулировку y можно добиться того, что дробь будет равна a. Теперь рассмотрим дробь $\frac{y}{z}$, также регулируем z, чтобы эта дробь была равна b. Отсюда $abc = \frac{x}{z} \cdot c = 1$, и, соответственно, $c = \frac{z}{x}$.

Факт.

Даны положительные числа a, b, c и натуральное число n, для которых выполняется $abc = 1$. Докажите, что

$$a^n + b^n + c^n \geqslant a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c \geqslant 3.$$

Доказательство: Давайте попробуем доказать последнее неравенство:

$$(!)\ a + b + c \geqslant 3.$$

Нам нужно применить факт, что $abc = 1$, поэтому применим AM $\geqslant$ GM, чтобы склеить a, b, c и получить abc:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} = 1.$$

Теперь попробуем доказать для $n = 2$.

$$(!)\ a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

В первую очередь нам нужно снизить степень с 2 до 1, а для этого мы опять можем прибегнуть к нашему любимому неравенству, но для этого нам нужны единицы, давайте тогда их прибавим в обе стороны:

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 \geqslant 2a + 2b + 2c \geqslant a + b + c + 3,$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

Значит, применим индукцию для n. Базу мы уже доказали, возьмём, что это работает для n, докажем для $n + 1$.

$$(!)\ a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} \geqslant a^n + b^n + c^n.$$

Доказывая неравенство для $n = 3, 4, \ldots$, мы понимаем, что нам нужно использовать неравенство для $n - 1$ при доказательстве для n, так и сделаем здесь. Мы знаем, что

$$a^n + b^n + c^n \geqslant a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$

Давайте прибавим по $a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$ в обе стороны:

$$(!)\ \left(a^{n+1} + a^{n-1}\right) + \left(b^{n+1} + b^{n-1}\right) + \left(c^{n+1} + c^{n-1}\right) \geqslant a^n + b^n + c^n + a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$

Применим лучшее неравенство в мире для скобок:

$$\left(a^{n+1} + a^{n-1}\right) + \left(b^{n+1} + b^{n-1}\right) + \left(c^{n+1} + c^{n-1}\right) \geqslant 2 \cdot a^n + 2 \cdot b^n + 2 \cdot c^n \geqslant a^n + b^n + c^n + a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1},$$

$$\Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} \geqslant a^n + b^n + c^n. \blacksquare$$

Пример 1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение: При виде дробей приходит в голову, конечно, прибегнуть к дробному КБШ, тогда увеличим степень сверху до квадрата:

$$(!)\ \frac{a^2}{a+ab} + \frac{b^2}{b+bc} + \frac{c^2}{c+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Не только меня напрягает то, что снизу стоит сумма выражений с разными степенями, но я могу сказать, что при $abc = 1$ об этом не стоит сильно париться, просто продолжим экспериментировать. По дробному КБШ:

$$\frac{a^2}{a+ab} + \frac{b^2}{b+bc} + \frac{c^2}{c+ac} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+(ab+bc+ac)},$$

$$\Rightarrow (!)\ 2(a+b+c)^2 \geqslant 3(a+b+c)+3(ab+bc+ac),$$

$$\Rightarrow (!)\ 2a^2+2b^2+2c^2+ab+bc+ac \geqslant 3(a+b+c).$$

Как спустить степень у квадрата? Может, попробуем спустить степень у $ab+bc+ac$, чтобы при использовании AM $\geqslant$ GM с квадратами у нас получилось получить единичную степень?

$$ab+bc+ac=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Отлично, теперь применим неравенство:

$$\frac{a^2+a^2+\frac{1}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^3},$$

$$\Rightarrow 2a^2+\frac{1}{a} \geqslant 3a.$$

Аналогично поступаем с b и c, и задача решена.

Пример 2. Пусть a, b, c — такие положительные числа, что удовлетворяется $abc = 8$. Докажите, что

$$\frac{ab+4}{a+2}+\frac{bc+4}{b+2}+\frac{ca+4}{c+2} \geqslant 6.$$

(JBMO 2016 SL, A1)

Возможно, вы скажете: "Стойте! Там ведь $abc = 8$, а не $abc = 1$", и вы будете абсолютно правы. Казалось бы, как бы мы могли использовать замену при таком условии?

Следствие 1.

Если $abc = t^3$, где $a, b, c, t \in \mathbb{R}$, тогда можно заменить a, b, c следующим образом:

$$a=\frac{xt}{y},\ b=\frac{yt}{z},\ c=\frac{zt}{x}.$$

Решение: Отлично! Значит, так и попробуем заменить a, b, c как $\frac{2x}{y}, \frac{2y}{z}, \frac{2z}{x}$ соответственно.

$$(!)\ \frac{4xy+4yz}{2xz+2yz}+\frac{4yz+4xz}{2xy+2xz}+\frac{4xz+4xy}{2yz+2xy} \geqslant 6.$$

Заметили, как если мы сделаем смачный AM $\geqslant$ GM, все вещи сверху и снизу сократятся?

$$\frac{4xy+4yz}{2xz+2yz}+\frac{4yz+4xz}{2xy+2xz}+\frac{4xz+4xy}{2yz+2xy} \geqslant 3\sqrt[3]{8\frac{(2xz+2yz)(2xy+2xz)(2yz+2xy)}{(2xz+2yz)(2xy+2xz)(2yz+2xy)}}=6. \blacksquare$$

Пример 3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Докажите, что

$$(a+b+c)(ab+bc+ac)+3 \geqslant 4(a+b+c).$$

Решение: Сделаем замену!

$$(!)\ \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+3\geqslant 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

И что получилось? По сути, ничего и не сократилось и упростилось...

Возможная ошибка.

Если вы решили сделать замену и заметили, что ничего не сократилось или упростилось, попробуйте порешать задачу без неё. Замена не всегда обещает моментальное решение или упрощение, возможно, вам нужно сократить или умножить некоторые вещи на abc, и только потом прибегнуть к замене, или вообще этого не делать.

Обычно равенство в симметричных задачах с таким условием приходит, когда $a=b=c=1$, так что и AM $\geqslant$ GM мы будем строить под это равенство. Заметим, что $(a+b+c)(ab+bc+ac)$ при этом станет 9, а если мы хотим его использовать с 3, нам нужно разделить его трижды.

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{3}+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{3}+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{3}+3$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{((a+b+c)(ab+bc+ac))^3}{3^2}},$$
$$\Rightarrow (!)\ (ab+bc+ac)^3\geqslant 9(a+b+c).$$

Всем ведь известно, что $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+xz)$, по аналогичной логике,

$$(ab+bc+ac)^2\geqslant 3(ab^2c+abc^2+a^2bc)=3abc(a+b+c)=3(a+b+c).$$

Достаточно показать, что $ab+bc+ac\geqslant 3$, это легко достигается, если использовать AM $\geqslant$ GM.

Пример 4. Пусть $a,b,c,d>0$, $abcd=1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c}+\frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d}+\frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a}+\frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b}\geqslant 0.$$

(IZHO 2013, P3)

Опять я играюсь с вами и даю задачи вам с другими условиями, тут ведь 4 переменных...

Следствие 2.

Если $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, где $a_i\in\mathbb{R}$, для $i=1,2,\ldots,n$, тогда можно заменить a_1, a_2, ..., a_n следующим образом:

$$a_1=\frac{x_1}{x_2},\ a_2=\frac{x_2}{x_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{x_n}{x_1}.$$

Решение: Если раскрыть скобки сверху дробей, у нас выйдет

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ac+a-c-1}{bc+c+1}.$$

Отвратительно работать с отрицательными числами, поэтому можно заметить, что если прибавить по единице к каждой дроби, их числители станут полностью положительными:

$$\frac{ac+a-c-1}{bc+c+1}+1=\frac{ac+bc+a}{bc+c+1},$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{ac+a-c-1}{bc+c+1}+4=\sum_{\text{cyc}} \frac{ac+bc+a}{bc+c+1}.$$

Время использовать нашу шедевральную замену по этому принципу:

$$a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{t},\ d=\frac{t}{x}.$$

Отсюда задача превратится в

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{x\left(\frac{y^2}{x}+z+t\right)}{y(y+z+t)} \geqslant 4.$$

Используем AM $\geqslant$ GM и остаётся доказать, что

$$\frac{\prod\limits_{\text{cyc}}\left(\frac{y^2}{x}+z+t\right)}{\prod\limits_{\text{cyc}}(x+y+z)} \geqslant 1$$

Конец задачи добивается через КБШ. Для каждого сверху используем по КБШ:

$$\left(\frac{x^2}{t}+y+z\right) \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(t+y+z)}.$$

В итоге получим то, что и надо было доказать.

После этой задачи логично будет вывести финальное следствие. Вряд ли вы сможете найти применение этой вещи, но, возможно, оно будет полезным.

Финальное следствие.

Если $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = t^n$, где $a_i, t \in \mathbb{R}$ для $i=1,2,\ldots,n$, тогда можно заменить $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ следующим образом:

$$a_1=\frac{x_1 t}{x_2},\ a_2=\frac{x_2 t}{x_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{x_n t}{x_1}.$$

Доказательство данного факта тривиально. Используйте ту же логику, что и в самом первом факте.

Пример 5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$.

$$(!)\ \frac{a^3}{b(c+1)} + \frac{b^3}{c(a+1)} + \frac{c^3}{a(b+1)} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

(Zuyong, aops.com)

Решение: Через дробный КБШ и AM $\geqslant$ GM:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b(c+1)} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{1+\frac{1}{c}} \geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum_{\text{cyc}}(1+ab)} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Осталось лишь доказать, что

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 2\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}.$$

Давайте увеличим правую часть, для этого применим AM $\geqslant$ GM для знаменателей в дробях.

$$2\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \leqslant \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{bc}} = \sum_{\text{cyc}} a \cdot \sqrt{a}.$$

Осталось доказать, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant a^{1.5}+b^{1.5}+c^{1.5}$. Что довольно просто показать, ибо $a^2+a^2+a^2+1 \geqslant 4a^{1.5}$, но откуда достать 1? Просто! $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt{(abc)^2} = 3$. Давайте все покажем красиво:

$$4(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^2+b^2+c^2)+3 \geqslant 4a^{1.5}+4b^{1.5}+4c^{1.5}$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2 \geqslant a^{1.5}+b^{1.5}+c^{1.5}.\blacksquare$$

Остальные задачи:

№1. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

(IMO 2000, P2)

№2. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995, P2)

№3. Для положительных вещественных чисел a, b, c при $abc = 1$ докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 3(a+b+c+1).$$

(JBMO 2014, P3)

№4. Пусть a, b, c, d — положительные вещественные числа, такие, что $abcd = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geqslant 4.$$

(Туймаада 2002, Старшая Лига, P2)

№5. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d, e, для которых выполняется $abcde = 1$, верно, что

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} + \frac{b+bcd}{1+bc+bcde} + \frac{c+cde}{1+cd+cdea}$$
$$+\frac{d+dea}{1+de+deab} + \frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geqslant \frac{10}{3}.$$

(Waldemar Pompe, Crux Mathematicorum)

№6. Докажите, что для всех положительных a, b, c, таких, что $abc = 1$, справедливо следующее:

$$\frac{1}{abc+a^5+b^5} + \frac{1}{abc+b^5+c^5} + \frac{1}{abc+c^5+a^5} \leqslant 1.$$

(rafaello, aops.com)

№7. Для положительных a, b, c, таких, что $abc = 1$, докажите неравенство:

$$4\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right) \leqslant 3\left(2+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

(МОШП 2006, P2)

№8. Пусть a, b, c — целые положительные числа, для которых $abc = 1$. Докажите, что

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IZHO 2008, P6)

№9. Если a, b, c — положительные вещественные числа, причем $abc = 1$, докажите, что

a)
$$2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \frac{9}{ab+bc+ca},$$

b)
$$2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \frac{9}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

(Cyprus 2022 Junior TST-3, P3)

5.2 Техника Cauchy Reverse

Давайте рассмотрим на первый взгляд очевидную и простую задачу, мы уже встречали схожие примеры.

Пример 1. Даны положительные числа a, b, c, удовлетворяющие условию $a+b+c = 3$. Доказать, что

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(Bulgaria TST 2003)

Мысли: Обычно, видя такие задачи, мы сразу бросаемся использовать КБШ дробного вида либо пробовать делать какие-то манёвры через AM $\geqslant$ GM. Давайте попробуем обычный метод через КБШ дробного вида:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} = \frac{a^2}{a+ab^2} + \frac{b^2}{b+bc^2} + \frac{c^2}{c+ca^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab^2+bc^2+ca^2}$$

$$\Rightarrow \ (!)\ 2(a+b+c)^2 \geqslant 3(a+b+c) + 3(ab^2+bc^2+ca^2)$$

$$\Rightarrow \ (!)\ 3 \geqslant ab^2+bc^2+ca^2.$$

Упс, уже появилась проблема: при $a = 0.99,\ b = 2,\ c = 0.01$ неравенство работает в обратную сторону.

Может, тогда попробуем использовать AM $\geqslant$ GM для знаменателей? А нет, идея отстой, так мы только увеличим дробь, хотя нам нужно доказывать обратное.

Проблема тупо в том, что мы привыкли в задачах использовать, что чем выше степень, тем обычно больше и значение. Тут тупо невыгодно использовать КБШ дробного вида, ибо в дробях в числителях стоит первая, а в знаменателях вторая степень, а степень снизу спустить мы тупо не в силах. Был бы какой-то метод, чтобы исправить эту проблему?...

Техника Cauchy Reverse.

В этой задаче дробь $\frac{a}{1+b^2}$ можно записать также, как $a - \frac{ab^2}{1+b^2}$. Попробуем сделать аналогичные действия с другими дробями:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} = \left(a - \frac{ab^2}{1+b^2}\right) + \left(b - \frac{bc^2}{1+c^2}\right) + \left(c - \frac{ca^2}{1+a^2}\right).$$

Применение техники: Задача преобразуется в следующее:

$$(!)\ a+b+c \geqslant \frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \ (!)\ a+b+c \geqslant \frac{2ab^2}{1+b^2} + \frac{2bc^2}{1+c^2} + \frac{2ca^2}{1+a^2}.$$

Можем заметить, что теперь мы можем использовать заветный AM $\geqslant$ GM для знаменателей дробей справа.

$$\frac{2ab^2}{1+b^2}+\frac{2bc^2}{1+c^2}+\frac{2ca^2}{1+a^2}\leqslant\frac{2ab^2}{2b}+\frac{2bc^2}{2c}+\frac{2ca^2}{2a}=ab+bc+ca.$$

Всего осталось показать, почему $a+b+c\geqslant ab+bc+ac$, это легко: просто умножьте левую часть на $(a+b+c)$, а правую на 3 дальше известное неравенство встретит нас.

Выводы: Данная техника удивительна и очень проста. Иногда она не просто упрощает задачу, а делает её решаемой. Прекрасен тот факт, что до применения техники мы не могли использовать AM $\geqslant$ GM, однако сразу после этого он был очень кстати для отрицательной части в замене. Одно и то же неравенство оказалось полезным лишь в нужный момент. Значит, решения задач с такой техникой обычно заключаются в грамотной замене и использовании AM $\geqslant$ GM для знаменателей. Продолжим разбирать похожие задачи.

Пример 2. Положительные числа a,b,c таковы, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(РО. Респ. 2022, Р9.5)

Решение: Применим нашу технику:

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a}=\left(a-\frac{ab}{a^2+b}\right)+\left(b-\frac{bc}{b^2+c}\right)+\left(c-\frac{ca}{c^2+a}\right)$$

$$\Rightarrow\ (!)\ a+b+c\geqslant\frac{ab}{a^2+b}+\frac{bc}{b^2+c}+\frac{ca}{c^2+a}+\frac{3}{2}.$$

Всё почти идентично предыдущей задаче, используем AM $\geqslant$ GM для знаменателей дробей справа.

$$\frac{ab}{a^2+b}+\frac{bc}{b^2+c}+\frac{ca}{c^2+a}=\frac{ab}{2a\sqrt{b}}+\frac{bc}{2b\sqrt{c}}+\frac{ca}{2c\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}.$$

Осталось показать, почему $\sum\limits_{\text{cyc}}a\geqslant\frac{\sum\limits_{\text{cyc}}(\sqrt{a})+3}{2}$. Для этого надо продемонстрировать, почему $a+b+c\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, и этого будет достаточно.

$$(a+b+c)(1+1+1)\geqslant\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\geqslant 3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\Rightarrow a+b+c\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Пример 3. Положительные числа a,b,c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geqslant 1.$$

Решение: Используем нашу технику и соответствующее неравенство по AM $\geqslant$ GM

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geqslant a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2(ab)^{\frac{2}{3}}}{3}.$$

Это приводит задачу к

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+2b^2} \geqslant \sum_{\text{cyc}} a - \frac{2}{3}\sum_{\text{cyc}} (ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Достаточно показать, что

$$(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \leqslant 3.$$

Через AM $\geqslant$ GM можно добиться желаемого результата таким образом:

$$3\sum_{\text{cyc}} a \geqslant 2\sum_{\text{cyc}} a + \sum_{\text{cyc}} ab = \sum_{\text{cyc}} (a+b+ab) \geqslant 3\sum_{\text{cyc}} (ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Пример 4. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа с суммой 3. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2b^2c} + \frac{1}{1+2c^2a} + \frac{1}{1+2a^2b} \geqslant 1.$$

Решение: Заменим дроби следующим образом и применим AM $\geqslant$ GM:

$$\frac{1}{1+2b^2c} = 1 - \frac{2b^2c}{1+2b^2c} \geqslant 1 - \frac{2\sqrt[3]{b^2c}}{3} \geqslant 1 - \frac{2(b+c)}{9}.$$

Далее рассуждения довольно очевидны.

Пример 5. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа, сумма которых равна 3. Докажите, что

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geqslant 3.$$

Решение: Используем следующее:

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geqslant a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{ab+b}{2}.$$

Суммируя идентичные выражения для a, b, c, можем вывести следующее:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{b^2+1} \geqslant 3 + \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} a - \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} ab \geqslant 3.$$

Остальные задачи:

№1. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+3ab}{a+b} + \frac{b^2+3bc}{b+c} + \frac{c^2+3ca}{c+a} \leqslant 2.$$

(Алматы 2014, P4)

№2. Докажите, что если a, b, c — положительные вещественные числа и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geqslant 1.$$

(Pham Kim Hung)

№3. Для положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + bc} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + ca} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + ab} \leqslant 0.$$

(РО. Респ. 2008, P9.1)

№4. Для положительных вещественных значений $x_1, ..., x_n$ докажите неравенство:

$$\frac{1}{x_1+1} + ... + \frac{1}{x_n+1} \leq \frac{n}{1 + \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}}.$$

(РО. Респ. 2012, P10.1)

№5. Пусть x, y, z — три положительных числа, таких, что $xyz \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geqslant 0.$$

(IMO 2005, P3)

5.3 Неравенства в треугольнике

(Сэрсенғали Даниал, Айдин Асанкадыров, Болат Еркебұлан)

5.3.1 Просто стороны

Возможно, вы удивитесь, какое отношение геометрия имеет к неравенствам, то есть к алгебре. На самом деле, довольно тесное. В геометрии полно задач, где приходится использовать неравенства, чтобы доказать определенные факты или удовлетворить условия задачи. В основном, они связаны с треугольниками. В этой части книги мы рассмотрим замены и трюки, которые помогут вам научиться решать такие задачи.

Давайте рассмотрим интересную задачу с геометрическим условием.

Пример 1. Пусть a, b, c это длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Странно. Вы могли заметить, что задача – это просто неравенство Несбитта, но знак неравенства не только в другую сторону, так ещё и строгий. Также, кажется, задача не решается, если не учесть, что a, b, c — это стороны треугольника. Как тогда мы бы могли использовать это условие?

Замена Рави.

В треугольнике с длинами сторон a, b, c можно заменить эти длины на $x+y$, $y+z$, $z+x$ соответственно.

Решение: Давайте используем данную замену. Задача превратится в

$$(!)\ \frac{x+y}{x+y+2z}+\frac{y+z}{y+z+2x}+\frac{z+x}{z+x+2y}<2.$$

И так как неравенство строгое, мы можем делать довольно грубые переходы. Заметим, что лишняя переменная в каждом знаменателе дробей нам мешает соединить эти дроби, и от них мы можем избавиться:

$$x+y+2z>x+y+z,$$

$$y+z+2x>y+z+x,$$

$$z+x+2y>z+x+y.$$

$$\Rightarrow\ \frac{x+y}{x+y+2z}+\frac{y+z}{y+z+2x}+\frac{z+x}{z+x+2y}<\frac{x+y}{x+y+z}+\frac{y+z}{y+z+x}+\frac{z+x}{z+x+y}=2.$$

Пример 2. Пусть a, b и c - длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Определите, когда происходит равенство.

(IMO 1983, P6)

Решение: Выглядит не совсем приятно, но давайте применим наше неравенство (чувствуется, будто станет ещё хуже).

$$(!)\ x^3z+xy^3+yz^3\geqslant xyz(x+y+z).$$

Отлично, неравенство даже упростилось в несколько раз, и вы увидели довольно знакомую картину, которую доказывали уже не раз (AM $\geqslant$ GM для пар). Равенство происходит для равностороннего треугольника.

Пример 3. Пусть a, b, c - длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

(ATMO 1996, P5)

Решение: Сделаем замену:

$$(!)\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\leqslant\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{x+z}.$$

Далее, достаточно рассмотреть неравенство QM $\geqslant$ AM для $n=2$, то есть, $\sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

Остальные задачи:

№1. Пусть a,b,c - длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{3a+b-c}+\frac{b}{3b+c-a}+\frac{c}{3c+a-b}\geq 1.$$

(nayel, aops.com)

№2. Докажите, что в треугольнике с длинами сторон a,b,c:

$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right)\geqslant 0.$$

№3. Известно, что a,b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)}\geqslant\frac{9(3a-5b+3c)}{3a+5b-3c}.$$

(РО. Респ. 2018, Р9.2)

И это всё?

К счастью, это не всё, на чём заканчивается эта тема. Если отойти от чистой алгебры, с которой связан основной контент книги, есть и настоящие геометрические неравенства, которые относятся именно к этой части математики. Сейчас мы разберём множество таких задач, которые можно решить, используя знания, приобретённые ранее в этой книге.

Какие геометрические неравенства вы знаете? Даже если вы не так близки к этой теме, вы наверняка встречали одно из самых известных неравенств, а именно — неравенство ломаной.

Неравенство ломаной.

Ломаная $AA_1A_2...A_NB$ будет не короче, чем прямая AB, случай равенства приходится только на момент совпадения всех точек вида A_i для $i = 1, 2, \ldots, n$ с B.

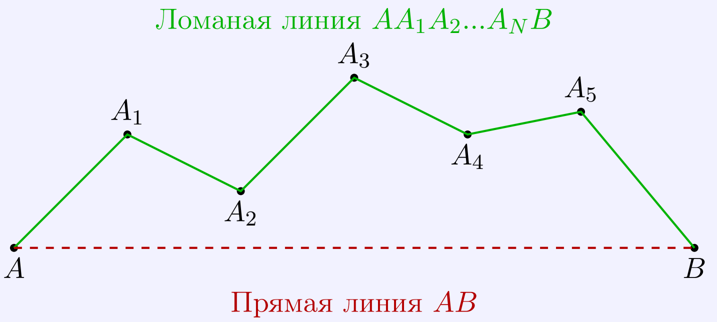


Рис. 5.1: Иллюстрация неравенства ломаной линии при $n = 5$, соответственно здесь $AA_1A_2A_3A_4A_5B > AB$.

Как раз это чудесное и одновременно простое свойство выводится из неравенства треугольника (докажите это неравенство через индукцию). То есть, сумма любых двух сторон в треугольнике всегда больше, чем третья.

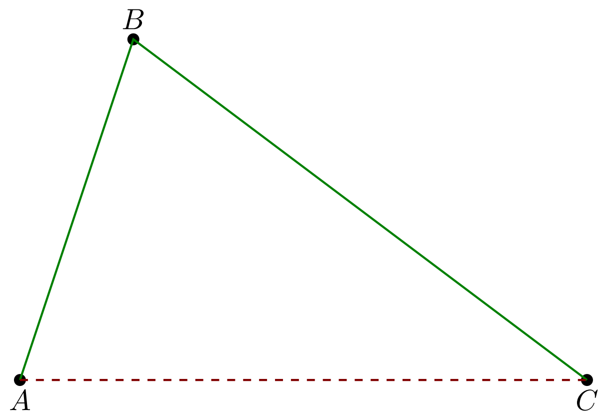


Рис. 5.2: Иллюстрация ломаной и прямой линии

На данном рисунке можно считать ABC ломаной, длина которой больше, чем AC (прямая). Отсюда следует, что $ABC = AB + BC > AC$. И, кстати, это неравенство можно доказать через теорему косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B.$$

$$\Rightarrow AC^2 \leqslant AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC,$$
$$AC^2 \leqslant (AB + BC)^2.$$

Отсюда и равенство приходится тогда, и только тогда, когда $\cos \angle B = -1$, то есть, когда $\angle B = 180°$, а это значит, что ABC это прямая, а не треугольник.

Однако это неравенство можно считать довольно "невыгодным", поскольку в нём присутствуют только строгие знаки неравенства. Используя только это неравенство, нам часто не удастся доказать требуемое в задачах, особенно в тех, где знак неравенства нестрогий.

Нужно это исправлять. Поэтому придумаем, как ещё можно выразить стороны треугольника, чтобы понять, как их длины связаны с другими величинами в треугольнике.

Поэтому давайте впишем окружность в треугольник.

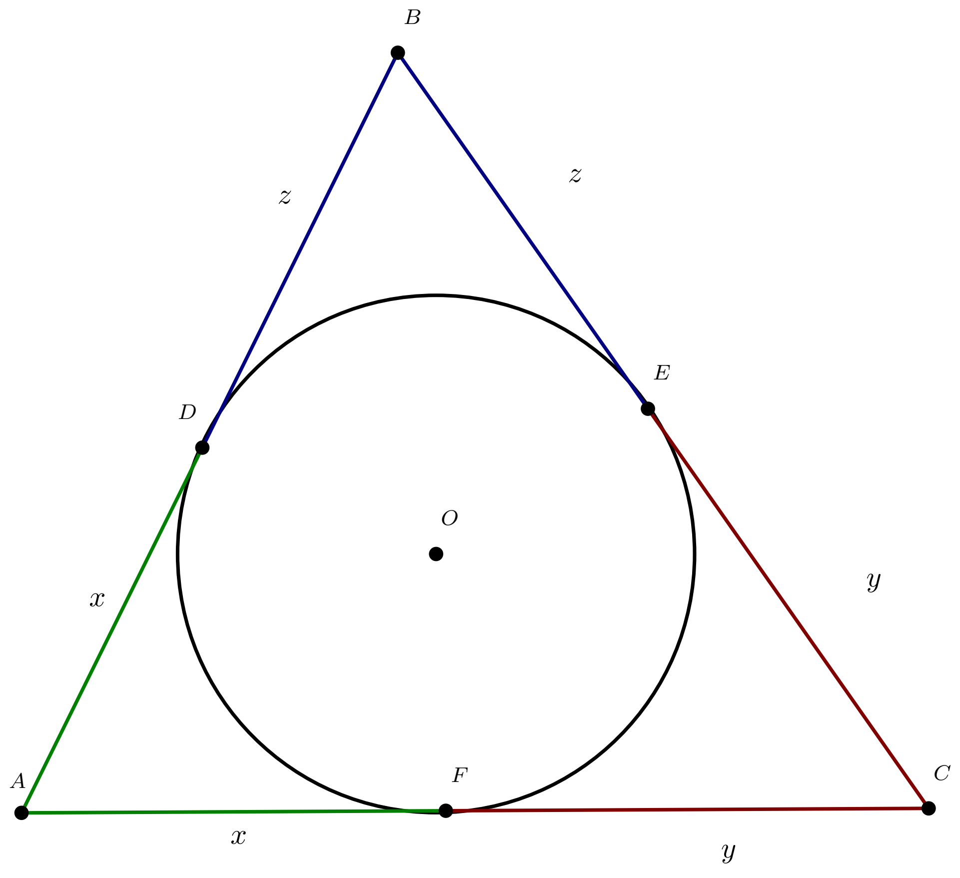


Рис. 5.3: Треугольник с вписанной окружностью и окрашенными сторонами

Как мы можем видеть, по свойству касательной стороны треугольника разделяются на одинаковые по величине отрезки. Отсюда мы можем заменить стороны a, b, c на соответствующие $z + y$, $x + y$ и $x + z$. Кстати, имея случайные положительные переменные $x + y$, $y + z$, $z + x$, всегда можно сказать, что они являются сторонами треугольника (попробуйте доказать это!). Таким образом, мы и доказали замену Рави. Пойдём глубже, показав, что другие величины в треугольнике могут аналогично выражаться через эти переменные.

5.3.2 Не просто стороны

Эта замена также превосходна, поскольку через неё мы сможем легче выразить площадь треугольника, радиус вписанной и описанной окружностей, полупериметр и, возможно, другие величины в треугольнике. Давайте приведём несколько примеров, начнём с полупериметра:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{2} = x+y+z.$$

Прекрасно, значит, можно сказать, что $a = p - z$, $b = p - x$, $c = p - y$. Это показывает, как гораздо легче выразить площадь треугольника (напомню, это можно сделать по формуле Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Имея эти два значения под рукой, можно выразить и радиус вписанной окружности ($r = \frac{S}{p}$), то есть

$$r = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y+z} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Ещё и радиус описанной окружности, который выражается через данную, не особо красивую формулу, которая выводится из теоремы синусов:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.$$

Вот несколько фундаментальных формул для углов:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}},$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(x+z)(y+z)}},$$
$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}}.$$

Чтобы доказать формулу со синусом, достаточно на Рис. 3 провести высоту OE и получить, что как раз $BE = p - b$ и $EC = p - c$. Дальше попробуйте использовать тригонометрические замены.

Длины биссектрис и высот могут выражаться данным образом:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{x+y+2z}\sqrt{z(x+z)(y+z)(x+y+z)},$$
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}.$$

А теперь, давайте потренируемся!

Пример 1. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь. Докажите:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

В каком случае выполняется равенство?

(IMO 1961, P2)

Решение: Не будем терять время зря, используем наши замечательные замены:

$$(!)\ (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \geqslant 4\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)}\cdot\sqrt{3}.$$

Попробуем аккуратно избавиться от квадратов. Для этого можем применить КБШ дробного вида, просто представив, что под каждым квадратом стоит единица в виде знаменателя:

$$\frac{(x+y)^2}{1}+\frac{(y+z)^2}{1}+\frac{(z+x)^2}{1} \geqslant \frac{(2x+2y+2z)^2}{3},$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (x+y+z)^{\frac{3}{2}} \geqslant 3\sqrt{3xyz}.$$

Это довольно очевидно: AM $\geqslant$ GM для $x+y+z$. Равенство достигается при равностороннем треугольнике.

Пример 2. Пусть a, b, c — стороны треугольника с периметром 1, S — площадь этого треугольника. Докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{3a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{3b}{a+c-b}}+\sqrt{\frac{3c}{a+b-c}} \leqslant \frac{1}{4S}.$$

(Алматы 2021, P2)

Решение: Заменим величины в задаче. Например:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{xyz},$$

поскольку $x+y+z=\frac{1}{2}$ (периметр равен 1).
Давайте теперь посмотрим, во что преобразилась наша задача:

$$(!)\ \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}xyz}} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{3(x+y)}{2z}} \Rightarrow\ (!)\ \frac{1}{\sqrt{8xyz}} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{3(x+y)}{2z}} \Rightarrow\ (!)\ 1 \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{12(x+y)xy}.$$

Используем неравенство AM $\geqslant$ GM:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{(x+y)+12xy}{2} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{12xy(x+y)},$$

что приводит к:

$$(!)\ 1 \geqslant \sum_{\text{cyc}}\frac{(x+y)+12xy}{2}.$$

Учитывая, что $1=x+y+z+\frac{1}{2}$, имеем:

$$(!)\ \frac{1}{2} \geqslant 6(xy+yz+zx).$$

Однако, так как $1=(2x+2y+2z)^2$, нам остается лишь доказать, что:

$$(!)\ 4x^2+4y^2+4z^2+8xy+8yz+8zx \geqslant 12(xy+yz+zx) \Rightarrow\ (!)\ 4x^2+4y^2+4z^2 \geqslant 4xy+4yz+4zx,$$

что приводит нас к известному неравенству! Равенство достигается при $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Пример 3. Пусть меры углов противолежат сторонам треугольника с мерами соответственно. Докажите, что

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) \geqslant \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

(IZHO 2018, P1)

Решение: Достаточно использовать теорему косинусов (а как бы по-другому мы бы смогли работать со сторонами?) и КБШ дробного вида:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}+\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}\geqslant\frac{(2c^2)^2}{4c^2(a^2+b^2)}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Повторив суммирование, задача доказывается.

Возможная ошибка

Довольно очевидный совет, который бы, опять же, был полезен для всего раздела: полная замена не всегда даёт успех, а иногда даже усложняет текущие вещи. Например, здесь, вместо того чтобы использовать изначальную замену косинусов, которая была в начале раздела, мы пошли иным путём, используя теорему косинусов, ибо тот путь был бы гораздо сложнее.

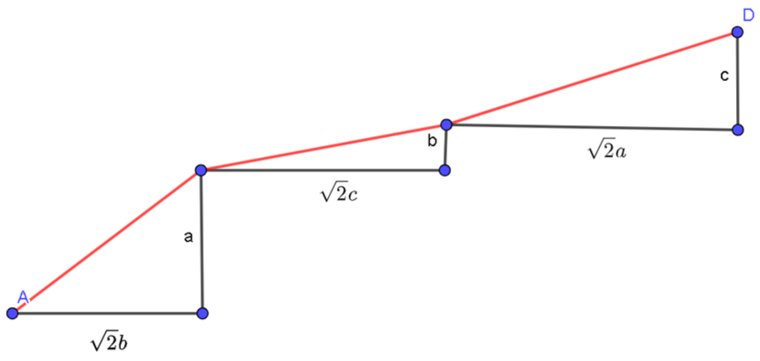
Пример 4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2}\geqslant\sqrt{3}(a+b+c).$$

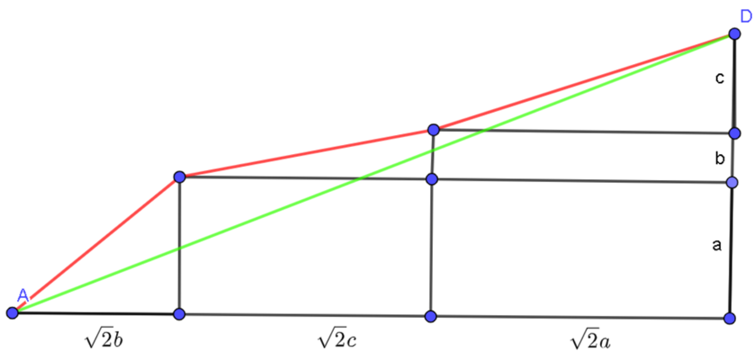
(РО. Обл. 2022, P9.1)

Решение: Возможно, вашим первым вопросом будет, как же эта задача связана с темой, если ничего геометрического в ней нет? Но на самом деле, мы учились переводить геометрию в алгебру, почему бы нам не попробовать сделать обратное?

Мы можем видеть корни, а внутри них как бы сумма квадратов двух чисел, чем-то напоминает теорему Пифагора... Давайте попробуем нарисовать рисунок прямоугольного треугольника со сторонами a и $b\sqrt{2}$, его гипотенуза как раз будет $\sqrt{a^2+2b^2}$.



Теперь сделаем аналогичные построения и соединим треугольники вместе.



По рисунку мы получаем LHS как ломаную (красный цвет), и прямую (зелёный цвет) как RHS, и, так как ломаная всегда длиннее или равна прямой, неравенство доказано. Попробуйте сами проверить это по теореме Пифагора.

Вот таким образом мы превратили алгебру в геометрию и использовали неравенство, которое используется именно в геометрии, а точнее, неравенство ломаной.

(aigabek, matol.kz)

Пример 5. Длины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ удовлетворяют условиям $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(IMO SL 1997, A7)

Решение: В четырёхугольнике $ABCE$ по неравенству Птолемея имеем:

$$CE \cdot AB + AE \cdot BC \geq AC \cdot BE,$$

$$\Longrightarrow BC\cdot(CE+AE)\geq AC\cdot BE,$$
$$\Longrightarrow \frac{BC}{BE}\geq\frac{AC}{CE+AE}.$$

Применяем аналогичные неравенства:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{AC}{CE+AE}+\frac{CE}{EA+CA}+\frac{EA}{AC+EC}\geq\frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство верно, ибо это неравенство Несбитта!

Остальные задачи:

№1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник площадью S и $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Докажите, что для любой перестановки x_1,x_2,x_3,x_4 набора a,b,c,d выполняется неравенство

$$S\leqslant\frac{x_1x_2+x_3x_4}{2}.$$

(Зап. Кит. 2015, P5)

№2. Неравенство Эйлера. Доказать, что радиус описанной окружности треугольника всегда будет не меньше, чем удвоенный радиус вписанной окружности.

№3. Пусть $n\geqslant 3$ — целое число. Пусть t_1, t_2, ..., t_n — положительные действительные числа, такие что

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Покажите, что t_i, t_j, t_k — длины сторон треугольника для всех i, j, k при $1\leqslant i<j<k\leqslant n$.

(IMO 2004, P4)

№4. В треугольнике ABC пусть I — центр вписанной окружности. Внутренние биссектрисы углов A, B, C пересекаются с противоположными сторонами в A',B',C' соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}.$$

(IMO SL 1991)

№5. Рассмотрим переменную точку P внутри заданного треугольника ABC. Пусть PD, PE, PF — это перпендикуляры из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Найдите все точки P, для которых данная сумма минимальна:

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}.$$

(IMO 1981, P1)

№6. Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность, и пусть

$$l_a = \frac{m_a}{M_a}, \quad l_b = \frac{m_b}{M_b}, \quad l_c = \frac{m_c}{M_c},$$

где m_a, m_b, m_c — длины биссектрис углов (внутренних к треугольнику), а M_a, M_b, M_c — длины биссектрис углов, продолженных до пересечения с окружностью. Докажите, что

$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \geqslant 3,$$

и это равенство выполняется, если ABC — равносторонний треугольник.

(АТМО 1997, Р3)

№7. Для неотрицательных чисел x, y докажите неравенство

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{y^2 + y + 1} \geqslant 2(x + y).$$

(РО. Респ. 2010, Р11.4)

Глава 6

Min и max

(Сэрсенгали Даниал, Есберген Аманжол)

Вы, вероятно, уже сталкивались здесь с задачами, в которых нужно было находить экстремальные значения выражений. Однако данная тема является значительно более глубокой и сложной, чем может показаться на первый взгляд. Для того чтобы уверенно решать задачи на эту тему, необходимо понять ряд специальных приёмов и развить определённый тип мышления.

В предыдущих задачах мы часто видели симметрию, где если поменять местами переменные, это не влияло на основной смысл задачи. Такая симметрия существенно упрощала процесс решения, позволяя применять стандартные методы. Однако в этой главе мы столкнёмся с задачами, где симметрия уже не будет играть ключевой роли. Это означает, что подход к решению таких задач должен быть более гибким и разнообразным.

Давайте разберём задачу школьного уровня. Если вы уже закончили 8 класс, вы точно сталкивались с этим утверждением.

Пример 1. Квадратичный многочлен $ax^2 + bx + c$ принимает экстремальное значение, когда $x = -\frac{b}{2a}$.

Стоп, стоп, стоп! Слишком много вопросов: «Что такое экстремальное значение?», «Почему оно принимается при таком значении x, и только при нём?», «Что такое квадратичный многочлен?» (ладно, надеюсь, последний вопрос у вас в голове не возникал). Успеем во всём разобраться, давайте пока по порядку.

Умеете ли вы решать квадратные уравнения?

— «Конечно, это же легко:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.»$$

Нет, умеете ли вы **действительно** решать квадратные уравнения? Вы ведь, скорее всего, запомнили эту формулу, так как ваш учитель по алгебре дал её как прекрасный ключ к нахождению корней, и такие задачи можно было решать на раз-два. Но может быть и так, что вы не совсем знаете, как самостоятельно прийти к этой сложной формуле. Давайте попробуем это сделать вручную.

$$x^2 = 1.$$

Решить это простейшее уравнение не составляет труда. Очевидно, $x = \pm 1$.

$$x^2 + 2x + 3 = 3.$$

Интересно, можем увидеть начало как у квадрата $(x+1)^2$, значит, можем и вычесть двойку с обеих сторон, и вот уже известная картина $(x+1)^2 = 1$, отсюда $x = 0, -2$.

$$5x^2 - 30x + 55 = 15.$$

Пока можно увидеть, что сократив обе части на 5, мы сделаем задачу более приятной, так как решать квадратные уравнения с единичным коэффициентом старшего члена гораздо легче.

$$x^2 - 6x + 11 = 3.$$

Опять же, пришли к началу квадрата, просто его будто несколько испортили. $x^2 - 6x$ подсказывает, что нужно использовать $(x-3)^2$, значит, уравнение можно переписать:

$$(x-3)^2 + 2 = 3,$$

$$(x-3)^2 = 1,$$

дальше найти x просто.

Надеюсь, вы уже поняли примерный механизм и сценарий решения таких уравнений. Давайте теперь попробуем потренироваться на общем виде:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Сначала давайте сократим на a (он должен быть не равен 0, иначе это уже не было бы квадратным уравнением).

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Далее, мы обычно находили начало квадрата, представим, что мы его уже нашли, пусть это будет какой-то $(x+t)^2$, то есть, $x^2 + 2tx + t^2$, тогда пусть $x^2 + 2tx = x^2 + \frac{b}{a}$. Отсюда мы понимаем, что $t = \frac{b}{2a}$, значит нужно подстраивать под квадрат $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, у которого, к сожалению, есть лишний член в виде $\frac{b^2}{4a^2}$. От него мы избавимся так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Теперь мы обычно перемещали лишний член направо, оставляя сам квадрат слева:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Несколько знакомая картина, верно? Давайте теперь уберём этот квадрат, взяв обе стороны под корень (слева будет знак $\pm$, так как любое число A^2 — это либо A^2, либо $(-A)^2$).

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вот и всё. Однако, какое значение это имеет для нашей задачи? Давайте восстановим эту строчку:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - c.$$

По сути, если взять $x + \frac{b}{2a} = X$ и $\frac{b^2}{4a} - c = Y$, мы придём к $aX^2 + Y$, чьи минимум и максимум (экстремальные значения) довольно просто найти. Меняется здесь только X, так как переменная лишь в нём, значит и экстремальные значения зависят от него.

$$\boxed{f(x) = aX^2 + Y}.$$

Если $a > 0$, у этой функции нет потолка, я могу сделать большое x, отсюда вырастет и X, и функция будет стремиться к бесконечности. Но минимум у неё есть, и он достигается, когда квадрат равен 0, иначе функция была бы больше.

$$X = 0,\ a \cdot 0^2 + Y = Y.$$

Следовательно, чтобы это выполнялось, $x = -\frac{b}{2a}$, и тогда минимум будет $\frac{b^2}{4a} - c$. Других минимумов быть не может.

Случай с $a < 0$ почти идентичен. В этом случае у моей функции нет нижней границы, я могу ставить большие значения для X, чтобы в итоге aX^2 было очень маленьким. Но у моей функции есть максимум, он достигается тогда, когда $X = 0$, так как какое иное значение бы не ставить, выйдет квадрат, который в совокупности с a даст отрицательное число. Выходит то же самое: у функции максимальное значение достигается в случае $x = -\frac{b}{2a}$, и оно равно $\frac{b^2}{4a} - c$.

Следовательно, можно сформулировать этот факт в следующем виде:

Факт.

У квадратного многочлена $ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ существует только минимум, а при $a < 0$ есть только максимум, и эти экстремальные значения достигаются при $x = -\frac{b}{2a}$ и равны $\frac{b^2}{4a} - c$.

Пример 2. x и y — такие положительные числа, что $x + y = 2024$. Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2024x}{y} + \frac{y}{2024x}.$$

Сразу побежали использовать AM $\geqslant$ GM? Отлично, нашли, что минимум равен 2. Остаётся лишь найти пример, как раз-таки AM $\geqslant$ GM подскажет, как это сделать.

$$\frac{2024x}{y} + \frac{y}{2024x} \geqslant 2\sqrt{\frac{2024xy}{2024xy}} = 2.$$

Из этого неравенства мы бы хотели, чтобы равенство достигалось при наших значениях x и y, тогда должно быть, что $\frac{2024x}{y} = \frac{y}{2024x}$, ибо равенство в AM $\geqslant$ GM достигается тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Пример ошибочного решения:

Допустим, дано, что $x + y = 10$. Надо найти минимальное значение выражения $x^2 + y^2 + 2$.

– "О, вижу квадраты, а они ведь больше или равны нулю, значит

$$x^2 + y^2 + 2 \geqslant 0^2 + 0^2 + 2 = 2.''$$

Ошибка! Даже если ученик нашёл доказательство того, что, по сути, значение больше или равно 2, он не предоставил пример, при котором равенство достигается, ибо его невозможно найти. Отсюда, нельзя утверждать, что минимумом является 2.

Правильным решением в этом случае было бы понять, что x и y довольно симметричны, отсюда, скорее всего, экстремальное значение достигается при их равенстве:

$$x^2 + 25 \geqslant 10x,$$

$$y^2 + 25 \geqslant 10y,$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geqslant 10x + 10y - 48 = 52.$$

Пример: $x = y = 5$.

Пример 3. Пусть $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение

$$S = \frac{1}{a^2 + 3ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + 3bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + 3ca + a^2}.$$

Решение: Сделаем дробный КБШ:

$$\frac{1}{a^2 + 3ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + 3bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + 3ca + a^2} \geqslant \frac{9}{(a+b+c)^2 + ab + bc + ac} = \frac{9}{9 + ab + bc + ac}.$$

Чтобы найти минимальное значение данного выражения, найдём максимальное значение $ab + bc + ac$. Заметим, что $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ac)$, отсюда $3 \geqslant ab + bc + ac$.
Максимальное значение выражения будет равно 3, причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

Пример 4. Если $x, y, z > 0$ и $xyz = 32$, какое минимальное значение у

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2?$$

Решение: Единственное, что нам дано, это $xyz = 32$, и с этим условием нужно работать, чтобы привести выражение к числам. Сначала можно попробовать применить неравенство AM $\geqslant$ GM напрямую:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 \geqslant 5\sqrt[5]{16x^4y^4z^4} = 5\sqrt[5]{(2xyz)^4} = 5\sqrt[5]{2^{24}} = 5 \cdot 16 = 80.$$

Пример показывает, что равенство достигается при $x = 4$, $y = 2$, $z = 4$.

Пример 5. Найдите минимум $x + \frac{1}{x}$, для $x \geqslant 5$.

Решение: Сразу побежали использовать AM $\geqslant$ GM, и ответ вышел 2, вот и предательство откуда не ждали, пример невозможен. Это происходит потому, что само неравенство превращается в равенство лишь при $x = \frac{1}{x}$, то есть $x = \pm 1$, а наш $x \geqslant 5$.

Методом тыка понимаем, что функция растёт. Значит, скорее всего, при $x = 5$ мы и получаем минимум. Если хотим использовать AM $\geqslant$ GM, нужно сохранить x, ибо $\frac{1}{x}$ не имеет минимума, а имеет только максимум: $\frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{x}$ — неудобно. Пусть тогда он уйдёт с какой-то частичкой x, и чтобы построить неравенство, нам понадобится посмотреть на значения при $x = 5$.

$$x = 5,\ \frac{1}{x} = \frac{1}{5}.$$

Тогда пусть $\frac{x}{25} + \frac{1}{x} \geqslant \frac{2}{5}$ (я так делаю, по совету из главы о неравенствах). Осталось найти минимум:

$$\frac{24x}{25} + \frac{2}{5},$$

это очевидно

$$\frac{24}{5} + \frac{2}{5} = \frac{26}{5}.$$

Можно решить и по-другому: $x + \frac{1}{x} = \frac{x}{25} + \ldots + \frac{x}{25} + \frac{1}{x} \geqslant 26\sqrt[26]{\left(\frac{x}{25}\right)^{25} \times \frac{1}{x}} = 26\sqrt[26]{\frac{x^{24}}{25^{25}x}} = 26\sqrt[26]{\frac{5^{24}}{25^{25}}} = \frac{26}{5}$. Я решил сделать именно такое неравенство, ибо при $x = 5$ я вижу, что $x = 5$, и $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$.

1st Level:

№1. Даны неотрицательные x, y, z, такие, что $x+y+z=3$. Найдите минимум и максимум $x^2+y^2+z^2$.

Решение: Минимум очевиден. Видно, что $x^2+y^2+z^2 \geqslant x+y+z$, и есть множество способов это доказать, если $x+y+z=3$. Самым быстрым, наверное, будет использование факта: $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$.

Однако нахождение максимума для нас — это что-то новое. Так как тут всё симметрично, пусть Б.О.О. $x \geqslant y \geqslant z$, тогда

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 3x^2 \leqslant 3 \cdot 3^2 = 27.$$

Примеры: $(1,1,1)$ и $(3,0,0)$.

№2. Для $x, y, z > 0$ найдите минимум

a)
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}.$$

b)
$$\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz}.$$

Решение: 1. Мы должны как-то поделить y^2, чтобы оно досталось одновременно и для x^2, и для z^2, пусть будет поровну.

$$x^2+\frac{y^2}{2} \geqslant \sqrt{2}xy,$$

$$z^2+\frac{y^2}{2} \geqslant \sqrt{2}zy,$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2 \geqslant \sqrt{2}(xy+zy).$$

Соответственно, ответ — $\sqrt{2}$, пример: $x = \frac{\sqrt{2}y}{2} = z$.

2. Почти то же самое, только теперь z^2 стало в два раза больше, тогда распределим y^2 как $\frac{2y^2}{3}+\frac{y^2}{3}$.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} = \frac{x^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{3}y^2+z^2}{xy+yz} \geqslant \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot(xy+yz)}{xy+yz} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Пример: $x=1, y=\sqrt{\frac{3}{2}}, z=\frac{1}{2}$ (подобный пример, как в прошлой задаче).

№3. Найдите максимум x^4y^3z для $x, y, z > 0$, таких, что $x+y+z=1$.

Решение: Можем показать, что $x + y + z \geqslant C \cdot \sqrt[n]{x^4y^3z}$, значит, надо использовать x 4 раза, y 3 раза и z лишь один раз.

$$1 = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + z \geqslant 8\sqrt[8]{\frac{x^4y^3z}{4^4 \times 3^3}}.$$

Отсюда можно найти и пример, который выявляется из $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = z$, да и само значение, хотя это не столь важно.

№4. Сумма неотрицательных вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_8$ равна 8. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_7x_8$.

(Capryon, aops.com)

Решение: Можно долго пытаться решить данную задачу. Обычно приходит идея использовать $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2$ и так далее продолжать, но это, к сожалению, не результативно. Как вообще можно по-другому получить $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_7x_8$?

Заметим, что $(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_7x_8 +$ мусор. И как раз $(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)(x_2 + x_4 + x_6 + x_8)$ легко ограничить сверху через AM $\geqslant$ GM:

$$4^2 = \left(\frac{(x_1 + x_3 + x_5 + x_7) + (x_2 + x_4 + x_6 + x_8)}{2}\right)^2 \geqslant (x_1 + x_3 + x_5 + x_7)(x_2 + x_4 + x_6 + x_8).$$

И самое крутое, что мусор можно убрать, просто использовать, что мусор $\geqslant 0$. Тогда ведь просто останется показать пример? Это тоже довольно просто: $x_7 = x_8 = 4$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 0$. Я сделал так, потому что $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = x_2 + x_4 + x_6 + x_8$, и равенство будет достигнуто в том неравенстве.

№5. Найдите минимум значения

$$\frac{6x^2 + 6y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$$

для положительных x, y, z.

№6. Для положительных действительных чисел x, y, z выполнено равенство

$$2x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 12(x + y + z) = 108.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения x^3y^2z.

(РО. Обл. 2020, Р9.3)

№7. $a, b, c > 0$, $a + b + c \leqslant \frac{3}{2}$. Найдите минимум

$$abc + \frac{1}{abc}.$$

№8. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите максимальное возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

№9. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a + b + c = 3.$$

Найдите минимальное и максимальное значение выражения $a^3 + b^2 + c$.

№10. Даны $a, b, c > 0$ такие, что

$$a + b + c + \frac{1}{abc} = \frac{19}{2}.$$

Какое максимальное возможное значение a?

(РО. Респ. 2021, Р9.1)

2nd Level:

№1. Даны $a, b, c > 0$, что $a + b + c = 3$. Найдите минимум

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2}$$

.

Решение: Опять симметричная картинка. Подставив $a = b = c = 1$, убедимся, что, скорее всего, ответом будет 1. Попробуем это доказать. Умножим на a, b, c сверху и снизу в дробях соответственно и применим КБШ дробный.

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} = \frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^4}{c^3 + c^2a + ca^2}$$

$$\geqslant \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + bc^2 + b^2c + c^2a + ca^2},$$

$$(!)\ \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geqslant a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + bc^2 + b^2c + c^2a + ca^2.$$

Неужели мне придётся действительно доказывать данный факт? Он довольно очевиден, и можно добивать его всякими фактами, например, умножить правую сторону на $a + b + c$, а левую на 3. А, нет,

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + bc^2 + b^2c + c^2a + ca^2 = (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)(a + b + c),$$

$$\Rightarrow\ (!)\ a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

Последнее неравенство докажем, прибавив 3 к левой стороне, и $a + b + c$ к правой. Пример: $a = b = c = 1$.

№2. $x, y \in (0, 1)$. Найдите максимум

$$\frac{xy(1 - x - y)}{(x + y)(1 - x)(1 - y)}.$$

(Зап. Кит. 2011, Р1)

Решение: Может прийти идея, что максимум наступит при $x = y = \frac{1}{2}$, но оказывается, что ответ вообще выходит 0, хотя там точно есть значения побольше. Может, пример и решение не симметричны? Не-а, вполне симметричны. Давайте для удобства сделаем замену $z = 1 - x - y$, тогда и вся дробь довольно красиво упростится:

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}.$$

Применим AM $\geqslant$ GM трижды снизу, и ответом будет $\frac{1}{8}$. Пример: $x = y = \frac{1}{3}$.

№3. Даны $x, y > 0$ такие, что $x^2y^2 + 2x^3y = 1$. Найдите минимальное значение $x + y$.

(РО. Респ. 2023, Р9.4)

Решение: Заметим, что $x^2y^2 + 2x^3y = x^2\left(y^2 + 2xy\right)$. Убрав скобку, мы бы получили $(x+y)^2$. Давайте так и сделаем через AM $\geqslant$ GM:

$$1 = x^2\left(y^2 + 2xy\right) \leqslant \left(\frac{x^2 + \left(y^2 + 2xy\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)^2.$$

Отсюда $x + y \geqslant \sqrt{2}$. Пример найдём по $x^2 = y^2 + 2xy$, значит $x^2 = y^2 + 2xy = 1$ и $x = 1, y = \sqrt{2} - 1$.

№4. $x, y > 0$ и $x + y = 1$. Найдите максимум $(x^3 + 1)(y^3 + 1)$.

Решение: Выглядит довольно просто. Давайте изначально попробуем подставлять разные значения x, y и смотреть на результат:

$$(0.5, 0.5) \to 1.26563,$$

$$(0.75, 0.5) \to 1.44409,$$

$$(0.9, 0.1) \to 1.73073,$$

$$(1, 0) \to 2.$$

Соответственно, кажется, максимумом будет момент, когда x, y отличаются максимально, то есть на 1. Отсюда попробуем доказать, что выражение не может превышать 2. Давайте сделаем замену $y = 1 - x$.

$$(!)\ (x^3 + 1)((1-x)^3 + 1) \leqslant 2,$$

$$\Rightarrow (!)\ 2 - 3x + 3x^2 + x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 \leqslant 2,$$

$$(!)\ x^6 + 3x^4 + 3x \geqslant 3x^2 + x^3 + 3x^5.$$

Очень даже доказуемо, это можно сделать кучей способов, продемонстрирую вам один:
x^6, в свою очередь, может в паре с кем-то поменьше нейтрализовать $3x^5$. Попробуем сделать AM $\geqslant$ GM для $n = 3$, тогда нам еще нужно 9 х-ов, их можно получить у $2x^4$, ибо $2x^4 \geqslant x^5 + x^4$, который нам даст 9.

$$x^6 + 2x^4 \geqslant x^6 + x^5 + x^4 \geqslant 3x^5.$$

$$(!)\ x^4 + 3x \geqslant x^3 + 3x^2.$$

$$x^4 + 3x = (x^4 + x + x) + x \geqslant 3x^2 + x^3.$$

№5. Пусть $x \geqslant 5, y \geqslant 6, z \geqslant 7$ такие, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 125$. Найдите минимальное значение $x + y + z$.

№6. Найдите минимальное значение $x^2 + y^2$, если $xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$ и $x \neq 0$.

№7. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$. Найдите максимальное значение $x^2 + y^2 + z^2$.

№8. Пусть a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнениям $a + b + c + d + e = 19$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 99$. Найдите максимальное значение e.

№9. Найдите минимально возможное значение

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4}$$

при условии, что a, b, c, d - неотрицательные действительные числа, такие, что $a + b + c + d = 4$.

(2017 USAMO, P6)

3rd Level:

№1. Пусть $x_1, \ldots, x_{100}$ - неотрицательные вещественные числа, такие, что $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, 100$ (положим $x_{101} = x_1, x_{102} = x_2$). Найдите максимально возможное значение суммы $S = x_1x_3 + x_2x_4 + ... + x_{99}x_1 + x_{100}x_2$.

(IMO SL 2010, A3)

Решение: Можно сказать, что $x_i \leqslant 1 - x_{i+1} - x_{i+2}$ и $x_{i+3} \leqslant 1 - x_{i+1} - x_{i+2}$. Поэтому если мы их применим, сможем ограничить следующее:

$$x_i x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} \leq (1 - x_{i+1} - x_{i+2})x_{i+2} + (1 - x_{i+1} - x_{i+2})x_{i+1} = (x_{i+1} + x_{i+2})(1 - x_{i+1} - x_{i+2}).$$

Исходя из AM $\geqslant$ GM,

$$x_i x_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} \leq (x_{i+1} + x_{i+2})(1 - x_{i+1} - x_{i+2}) \leqslant \left(\frac{(x_{i+1} + x_{i+2}) + (1 - x_{i+1} - x_{i+2})}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы можем получить только максимум $50 \cdot \frac{1}{4} = 12.5$. Пример: все x_i, с чётным i, равны 0.5, а все остальные x_i равны 0.

№2. Пусть a, b, $c \geqslant 0$ такие, что $a + b + c = 2$ и $ab + bc + ca > 0$. Найдите минимальное значение:

$$P = \frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2}.$$

Подставим самые очевидные примеры:

$$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \to \frac{27}{4},$$

$$(1, 1, 0) \to 3,$$

$$(1, 0, 0) \to \text{Невозможно по условию.}$$

Скорее всего, минимум принимается при $(1,1,0)$, тогда попробуем это доказать. Так как $c=0$ при этом примере, попробуем избавиться от c в этом выражении. Для этого сперва возьмём Б.О.О. $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда можно заявить, что $bc \geqslant c^2$ и $ac \geqslant c^2$, отсюда

$$P \geqslant \frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Рассмотрим $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$. Было бы славно, если бы сверху появился $-ab$, и мы могли бы применить AM $\geqslant$ GM, чтобы избавиться от a^2-ab+b^2 снизу в первой дроби. Давайте так и сделаем:

$$P-\frac{1}{ab} \geqslant \frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2} \geqslant \frac{2}{ab},$$

$$\Rightarrow\ P \geqslant \frac{3}{ab}.$$

Если найдём максимальное значение ab, задача решена, а это вполне возможно, ибо $a+b+c=2$ и $a+b \leqslant 2$, а это значит, что $2 \geqslant a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $1 \geqslant ab$. Отсюда ответ 3. Пример: $(1,1,0)$.

(aops.com, Mudok)

№3. Если $ab+bc+ca=27$, найдите минимальное значение из:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

(aops.com, MixerV)

Решение:

$$S=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(abc)^2+(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)+(a+b+c)^2+1-2(ab+bc+ac)=$$

$$(abc-(a+b+c))^2+(ab+bc+ca-1)^2.$$

И так как по условию нам дали, что $ab+bc+ac=27$:

$$S=(abc-(a+b+c))^2+(27-1)^2 \geqslant 26^2.$$

И самое сложное здесь это найти пример. То есть, нас интересует, когда $ab+bc+ac=27$ и $abc=a+b+c$. Пусть $b=c$, тогда $2ab+b^2=27$ и $ab^2=a+2b$, отсюда $a\left(b^2-1\right)=2b$ и $a=\frac{2b}{b^2-1}$. Вставим это в первое уравнение:

$$\frac{4b}{b^2-1}+b^2=27,$$

то есть $b^4-24b^2+27=0$. А это обычное квадратичное уравнение, достаточно взять $b^2=x$, отсюда $b=\sqrt{12-3\sqrt{13}}$. Пример: $a=\frac{2\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{11-3\sqrt{13}}, b=c=\sqrt{12-3\sqrt{13}}$.

№4. Если $x^2+y^2+z^2=1$, найдите максимально возможное значение:

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

(aops.com, rkm0959)

№5. Найдите максимальное значение вещественного числа M, такого, что для всех a, b, $c \geqslant 0$,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant M(|a-b|^3 + |b-c|^3 + |c-a|^3).$$

(МОШП 2007, P3)

№6. Для $a, b, c > 0$ выполняется, что $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 4$. Найдите максимальное значение выражения $a^3b + b^3c + c^3a$.

(МОШП 2014, P3)

№7. Пусть a, b и c — вещественные числа, такие, что $|(a-b)(b-c)(c-a)| = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $|a| + |b| + |c|$.

(МОШП 2016, P1)

№8. Если $57a + 88b + 125c \geqslant 1148$, где $a, b, c > 0$, то каково минимальное значение функции

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2?$$

(Honk Kong TST 2019, P6)

№9. Пусть a, b, c, d — вещественные числа, такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Определите минимальное значение $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ и определите все значения (a, b, c, d), при которых достигается минимальное значение.

(АТМО 2022, P5)

Часть II

Копнём глубже

Глава 7

Неравенство Шура

(Сэрсенгали Даниал, Базарбай Мирас)

В новом чаптере вас встретят новые неравенства, более углублённые и гораздо круче. В этой главе мы познакомимся с уникальным и одновременно очень простым на первый взгляд неравенством.

Помните, как в главе про AM $\geqslant$ GM было сказано, что данное неравенство — это клей, мы всегда получаем справа склеенную вещь? От такого мышления, скорее всего, у вас сложилось впечатление, что abc, например, почти бесполезен, нежели $a^3+b^3+c^3$ или хотя бы $ab^2+bc^2+a^2c$, ибо abc уже склеен. Есть ли какой-то путь его отклеить? Есть, и в этой главе ваше мышление поменяется.

Исай Шур — выдающийся математик, который работал в Германии большую часть своей жизни, здесь он получил свою докторскую степень и впоследствии стал лектором и остался профессором в Бонне.

Исай Шур.

Неравенство Шура.

Пусть a, b, c — неотрицательные числа, и $n \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо неравенство

$$a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-c)(b-a)+c^n(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

И где обещанный abc? Попробуем подставить $n = 1$ (а ведь n даже необязательно натуральное).

$$n = 1 \Rightarrow\ a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b.$$

Поразительно! abc, который обычно меньше всех, вдруг помог нейтрализовать $\sum\limits_{\text{cyc}} a^2b$.

> **Пример 1.** Вашим первым заданием будет доказать данное неравенство.
>
> (Подсказка: попробуйте использовать Б.О.О.)

Решение: Картина симметрична, от смены переменных смысл не меняется. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$, так ещё и для простоты, пусть $c = c, b = c + i, a = c + i + j$, где $i, j \geqslant 0$.

$$(!)\ (c + i + j)^n \cdot j \cdot (i + j) + c^n \cdot i \cdot (i + j) \geqslant (c + i)^n \cdot i \cdot j,$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (i + j) \cdot ((c + i + j)^n \cdot j + c^n \cdot i) \geqslant (c + i)^n \cdot i \cdot j.$$

Заметим, что если $i = 0$ или $j = 0$, равенство всё равно выполняется. Пусть тогда $i, j \neq 0$, сократим на ij.

$$(!)\ (i + j) \cdot \left(\frac{(c + i + j)^n}{i} + \frac{c^n}{j} \right) \geqslant (c + i)^n.$$

Сюда красиво может вписаться КБШ:

$$(!)\ (c + i + j)^{\frac{n}{2}} + c^{\frac{n}{2}} \geqslant (c + i)^{\frac{n}{2}}.$$

Если бы $n > 0$, просто можно было бы сказать $c + i + j > c + i \Rightarrow\ (c + i + j)^{\frac{n}{2}} > (c + i)^{\frac{n}{2}}$. Но если $n < 0$, то $c < c + i \Rightarrow\ c^{\frac{n}{2}} > (c + i)^{\frac{n}{2}}$, а случай с $n = 0$ очевиден. Отсюда можно заключить, что равенство будет тогда, когда $a = b = c$, либо когда две переменные равны, а третья равна 0.

> **Пример 2.** Если a, b и c — положительные действительные числа, докажите, что
>
> $$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geqslant abc\left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right) + a^2b^2c^2\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$
>
> (BMO 2015, P1)

Решение: Заметим, что если взять $ab^2 = x, bc^2 = y, ca^2 = z$, это очень красиво превратится в знакомый вид, а именно в неравенство Шура для $n = 1$.

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geqslant a^2b^5c^2 + ab^4c^4 + b^2c^5a^2 + bc^4a^4 + c^2a^5b^2 + ca^4b^4$$

$$= \left(a^2b^5c^2 + b^2c^5a^2 + c^2a^5b^2\right) + \left(ab^4c^4 + bc^4a^4 + ca^4b^4\right) = a^2b^2c^2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + abc\left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right).$$

Пример 3. Докажите, что неравенство

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geqslant 9\,(ab+bc+ca)$$

выполняется для всех положительных чисел a, b, c.

(АТМО 2004, P5)

Решение: Давайте раскроем, не так уж и страшно это выглядит:

$$(!)\ a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8 \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

Можем сразу принести кое-что в жертву: $2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)+6 \geqslant 4(ab+bc+ca)$ и $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 3(ab+bc+ca)$ (AM $\geqslant$ GM).

$$(!)\ a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+1+1 \geqslant 2(ab+bc+ca).$$

Это выглядит как неравенство Шура, но будто степень спустили, давайте тогда применим замену:

$$a^2=x^3, b^2=y^3, c^2=z^3.$$

$$(!)\ x^3+y^3+z^3+(xyz)^3+1+1 \geqslant 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right).$$

Для достижения $3xyz$, можем применить $(xyz)^3+1+1 \geqslant 3xyz$ с помощью AM $\geqslant$ GM, и тут же используем неравенство Шура.

$$(!)\ x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 \geqslant 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right).$$

Для каждой пары по типу x^2y+xy^2 применим AM $\geqslant$ GM и задача решена.

Пример 4. Неравенство Шура для $n=1,2$ соответственно можно записать в таком виде:

$$n=1,\ \left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)+9abc \geqslant 2(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

$$n=2,\ a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqslant a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b,$$

или

$$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right) \geqslant 2\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c).$$

(Попробуйте раскрыть и доказать.)

Остальные задачи:

№1. Для $a,b,c>0$ докажите, что:

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

№2. Пусть $a, b, c \geq 0$. Докажите, что:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

№3. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

(IMO 2000, P2)

№4. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа, причем $abc = 1$. Докажите, что

$$\sum_{\text{cyc}}(a + bc) \leqslant 3 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}.$$

№5. Даны $a, b, c \geqslant 0$, такие, что $(a + b)(b + c)(c + a) = 8$. Докажите, что:

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc + \frac{108}{(a + b + c)^3} \geqslant 8.$$

№6. Пусть a, b и c — вещественные числа, такие, что $|(a - b)(b - c)(c - a)| = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $|a| + |b| + |c|$.

(МОШП 2016, P1)

№7. Докажите неравенство $ab + bc + ac \geqslant 2(a + b + c)$ для положительных действительных чисел a, b, c, если известно, что $a + b + c + 2 = abc$.

(РО. Респ. 2005, P11.2)

№8. Для положительных вещественных чисел x, y, z с $xy + yz + zx = 1$ докажите, что

$$\frac{2}{xyz} + 9xyz \geqslant 7(x + y + z).$$

(JBMO 2023 SL, A2)

Глава 8

Неравенство Гёльдера

(Асанкадыров Айдин, г. Бишкек)

Неравенство Гёльдера является обобщением неравенства Коши-Буняковского-Шварца. Если КБШ выполняется для двух сумм в квадрате, то неравенство Гёльдера работает для n сумм в произвольных степенях.

Неравенство Гёльдера.

Пусть дано натуральное число $n \geqslant 2$.

Действительные числа $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ldots, (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и положительные числа $\lambda_a + \lambda_b + \cdots + \lambda_z = 1$, тогда:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^{\lambda_b} \ldots (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^{\lambda_z} \geqslant$$

$$\geqslant a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \ldots z_1^{\lambda_z} + a_2^{\lambda_a} b_2^{\lambda_b} \ldots z_2^{\lambda_z} + \cdots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \ldots z_n^{\lambda_z}.$$

Причём равенство выполняется, когда последовательности

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ldots, (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

пропорциональны.

Совет.

Чаще всего это неравенство используется при $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \frac{1}{3}$:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \geqslant$$

$$\left(\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \cdots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n}\right)^3.$$

Также распространено использование неравенства Гёльдера следующим образом:

$$(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Пример 1. Для положительных a, b докажите, что:

$$4\left(a^3+b^3\right) \geqslant (a+b)^3.$$

Решение: Заметим, что следующее неравенство верно по неравенству Гёльдера:

$$\left(a^3+b^3\right)(1+1)(1+1) \geqslant \left(\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1}+\sqrt[3]{b^3 \cdot 1 \cdot 1}\right)^3.$$

Из этого неравенства следует исходное неравенство.

Пример 2. Для положительных a, b найдите максимум выражения $a+b$, если известно, что $a^{2024}+b^{2024}=2$.

Решение: По неравенству Гёльдера верно:

$$\left(a^{2024}+b^{2024}\right)^{\frac{1}{2024}}(1+1)^{\frac{1}{2024}}(1+1)^{\frac{1}{2024}} \ldots (1+1)^{\frac{1}{2024}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(a^{2024}\right)^{\frac{1}{2024}} \cdot 1^{\frac{1}{2024}} \cdot 1^{\frac{1}{2024}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{1}{2024}}+\left(b^{2024}\right)^{\frac{1}{2024}} \cdot 1^{\frac{1}{2024}} \cdot 1^{\frac{1}{2024}} \cdot \ldots \cdot 1^{\frac{1}{2024}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(a^{2024}+b^{2024}\right)^{\frac{1}{2024}} \cdot 2^{\frac{2023}{2024}} \geqslant (a+b) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2 \geqslant a+b.$$

Равенство выполняется при $a=b=1$.

Пример 3. Для положительных чисел a, b, c, x, y, z докажите, что:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Решение: По Гёльдеру верно следующее:

$$\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)(x+y+z)(1+1+1) \geqslant \left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{x} \cdot x \cdot 1}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{y} \cdot y \cdot 1}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{z} \cdot z \cdot 1}\right)^3=$$

$$=(a+b+c)^3.$$

Откуда следует исходное неравенство.

Пример 4. Пусть даны положительные числа a, b, c, для которых верно $a+b+c=3$. Найдите минимум суммы:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Решение: По неравенству Гёльдера верно:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}\right)^3=27\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\geqslant 9\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geqslant 3.$$

Равенство выполняется при $a=b=c=1$.

Пример 5. Для положительных чисел a, b, c докажите, что:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8}}\geqslant\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{a^2b}}{3}.$$

Решение: По Гёльдеру:

$$3(ab+bc+ac)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{a^2c}\right)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ac)(a+b+c)}{9}}\geqslant\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{a^2c}}{3}.$$

Достаточно доказать, что:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ac)(a+b+c)}{9}}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 9(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant 8(ab+bc+ac)(a+b+c)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\geqslant 6abc,$$

используя AM $\geqslant$ GM для 6 переменных, получим, что неравенство выше выполняется.

С помощью неравенства Гёльдера доказывается неравенство Минковского.

Неравенство Минковского.

Пусть даны неотрицательные числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и $p>1$. Тогда:

$$(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}+(y_1^p+y_2^p+\cdots+y_n^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant((x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Пример 6. Докажите неравенство Минковского.

Решение: Используем неравенство Гёльдера:

$$\left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\geqslant x_1 (x_1+y_1)^{p-1} + x_2 (x_2+y_2)^{p-1} + \cdots + x_n (x_n+y_n)^{p-1}.$$

А также,

$$\left(y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \geqslant$$
$$y_1 (x_1+y_1)^{p-1} + y_2 (x_2+y_2)^{p-1} + \cdots + y_n (x_n+y_n)^{p-1}.$$

Заметим, что верно следующее:

$$(x_1+y_1)^p = x_1 (x_1+y_1)^{p-1} + y_1 (x_1+y_1)^{p-1}$$

Аналогично для всех $(x_i+y_i)^p$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Сложив соответственно левые и правые части двух неравенств, получим:

$$\left((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \geqslant$$
$$\left(x_1 (x_1+y_1)^{p-1} + y_1 (x_1+y_1)^{p-1}\right) + \cdots + \left(x_n (x_n+y_n)^{p-1} + y_n (x_n+y_n)^{p-1}\right) =$$
$$= (x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p.$$

Разделив обе части неравенства на $\left((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$, получим:

$$\left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}}.$$

Откуда следует исходное неравенство.

Задачи:

№1. Даны положительные числа a, b, c, d, для которых выполняется равенство

$$a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} + d^{2024} = 4.$$

Найдите наибольшее значение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

№2. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

№3. Для положительных a, b, c докажите

$$\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}} + \frac{ca}{\sqrt{2b^2+ca}} + \frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}} \geqslant \sqrt{ab+ca+bc}.$$

№4. Пусть a, b, c — положительные числа, докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

(IMO 2001, P2)

№5. Даны положительные числа a, b, c, докажите

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2}\geqslant\frac{abc\,(a+b+c)}{2}.$$

№6. Если a, b, c — такие положительные числа, что $ab+bc+ac=1$, то докажите:

$$\frac{a^3}{1+9ab^2c}+\frac{b^3}{1+9abc^2}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{18}.$$

(Всеукраинская олимпиада, 2006)

№7. Даны такие положительные a, b, c, что $abc=1$. Докажите:

$$\frac{1}{a^5\,(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5\,(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5\,(a+2b)^2}\geqslant\frac{1}{3}.$$

(USA TST 2010, P2)

№8. Если a, b, c, d — такие положительные числа, что $a+b+c+d=1$, то докажите, что:

$$\frac{a^3}{(1+b)\,(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)\,(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)\,(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)\,(1-b)}\geqslant\frac{1}{15}.$$

№9. Пусть a, b, c — такие положительные числа, что $ab+ca+bc=1$. Докажите:

$$\frac{1}{abc}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}.$$

(IMO SL 2004, A5)

№10. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $min\,(a+b, c+a, b+c) > \sqrt{2}$ и $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что:

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geqslant\frac{3}{(abc)^2}.$$

Глава 9

Транснеравенства

(Асанкадыров Айдин, г. Бишкек)

Одномонотонные и разномонотонные последовательности

Пусть дано натуральное число n. Конечные последовательности действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называются одномонотонными, если для любых двух натуральных чисел $i, j \leqslant n$ из условия $x_i < x_j$ следует, что $y_i < y_j$, и разномонотонными, если из условия $x_i < x_j$ следует, что $y_i \geqslant y_j$.

Другими словами, последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ одномонотонны, если можно переставить номера и получить, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$, разномонотонны, если можно так переставить номера, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$.

Например, последовательности $(1, 2, 3, 4)$ и $(10, 40, 50, 100)$ являются одномонотонными. Последовательности $(4, 1, 3, 2)$ и $(100, 10, 50, 40)$ также являются одномонотонными. Аналогично, последовательности $(4, 1, 3, 2)$ и $(10, 100, 40, 50)$ являются разномонотонными.

Транснеравенства

Даны конечные последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$.

1. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ одномонотонны, то
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ny_{i_n}.$$
2. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ разномонотонны, то
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ny_{i_n}.$$

То есть, если последовательности одномонотонны, то сумма $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ наибольшая из возможных, а если разномонотонны — то наименьшая из возможных.

Пример 1. Докажите транснеравенства.

Решение: Докажем неравенство 1 с помощью индукции по n.

База: $n = 2$, тогда имеем неравенство $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1 \leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0$, что верно, так как из одномонотонности следует, что $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ имеют одинаковый знак.

Шаг: Пусть неравенство верно для $n = k - 1$, докажем, что оно верно для $n = k$, то есть: $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ky_{i_k}$. Рассмотрим два случая:

1. $i_k = k$, тогда $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$ — перестановка чисел от 1 до $k - 1$. По предположению индукции $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{k-1}y_{k-1} \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_{k-1}y_{i_{k-1}}$, откуда следует, что $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ky_{i_k}$.
2. $i_k \neq k$. Пусть $i_k = m$ и $i_t = k$. Тогда, так как $m \leqslant k$ и $t \leqslant k$, то $x_ty_k + x_ky_m \leqslant x_ty_m + x_ky_k$. Имеем:

$$\begin{gathered} x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ky_{i_k} = \\ = \left(x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_{t-1}y_{i_{t-1}}\right) + x_ty_k + \left(x_{t+1}y_{i_{t+1}} + \cdots + x_{k-1}y_{i_{k-1}}\right) + x_ky_m \leqslant \\ \leqslant \left(x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_{t-1}y_{i_{t-1}}\right) + x_ty_m + \left(x_{t+1}y_{i_{t+1}} + \cdots + x_{k-1}y_{i_{k-1}}\right) + x_ky_k \leqslant \\ \leqslant \left(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{k-1}y_{k-1}\right) + x_ky_k. \end{gathered}$$

В обоих случаях утверждение верно.

Таким образом, индукционный переход осуществлён, следовательно, транснеравенство для одномонотонных последовательностей доказано.

Аналогично доказывается транснеравенство для разномонотонных последовательностей.

Простыми словами, представим, что есть n мешков разной вместимости $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и купюры разных номиналов $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ (скажем, их количество бесконечно). Заметим, что наибольшую сумму денег получим, если больший мешок наполнить наибольшими купюрами, второй по размеру мешок наполнить вторыми по номиналу купюрами и так далее. Эта сумма будет равна $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Наименьшую сумму денег получим, если больший мешок наполнить наименьшими купюрами, второй по размеру мешок наполнить вторыми по меньшему номиналу купюрами и так далее. Эта сумма будет равна $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1$.

Пример 2. Даны $a, b, c \geqslant 0$, докажите:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Решение: Рассмотрим последовательности (a, b, c) и (a, b, c), так как они являются одномонотонными, из транснеравенства следует:

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c \geqslant a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 3. Даны $a, b, c \geqslant 0$, докажите:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Решение: Рассмотрим последовательности $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ и (a, b, c), так как они являются одномонотонными, из транснеравенства следует:

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geqslant a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 4. Даны $a, b, c \geqslant 0$, докажите:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Решение: Рассмотрим сначала последовательности $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ и $\left(a^2, b^2, c^2\right)$, так как они являются одномонотонными. Из транснеравенства следует:

$$a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 + c^2 \cdot c^2 \geqslant a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot a^2 \leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2.$$

Рассмотрим теперь последовательности (ab, bc, ca) и (ab, bc, ca). Эти последовательности также являются одномонотонными, поэтому из транснеравенства следует:

$$ab \cdot ab + bc \cdot bc + ca \cdot ca \geqslant ab \cdot ac + bc \cdot ab + ca \cdot bc \leftrightarrow a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geqslant a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Таким образом, получили:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geqslant a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Из транснеравенств следует неравенство Чебышева:

Неравенство Чебышева

Даны конечные последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

1. Если последовательности одномонотонны, то

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{n}.$$

2. Если последовательности разномонотонны, то

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leqslant \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{n}.$$

Пример 5. Докажите неравенство Чебышева.

Решение: Докажем неравенство 1. Имеем:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_3 + x_2y_4 + \cdots + x_ny_2,$$

$$\ldots$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_n + x_2y_1 + \cdots + x_ny_{n-1},$$

по транснеравенству для одномонотонных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Сложив левые и правые части и сгруппировав слагаемые в правой части, получим:

$$n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\right) \geqslant \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right).$$

Неравенство 1 доказано. Неравенство 2 доказывается аналогично.

Заметим, что в транснеравенствах и в неравенстве Чебышева не требуется неотрицательность чисел в последовательностях $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Пример 6. Даны $a, b, c \geqslant 0$. Докажите, что

$$3\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geqslant (a + b + c)\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$

Решение: Рассмотрим одномонотонные последовательности (a, b, c) и $\left(a^3, b^3, c^3\right)$ и используем для них неравенство Чебышева:

$$\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geqslant \frac{(a + b + c)\left(a^3 + b^3 + c^3\right)}{3},$$

что и требовалось доказать.

Пример 7. Докажите, что для $\forall x_i \geqslant 0$, $n\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right) \geqslant \left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2$.

Решение: Используя неравенство Чебышева для одномонотонных последовательностей $\left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n}\right)$ и $\left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n}\right)$, получим исходное неравенство:

$$(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\cdot\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{x_n}) \geqslant \frac{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)}{n}.$$

Пример 8. Даны $a, b \geqslant 0$. Докажите, что

$$4\left(a^8+b^8\right) \geqslant \left(a^4+b^4\right)\left(a^3+b^3\right)(a+b).$$

Решение: Рассмотрим одномонотонные последовательности $\left(a^4, b^4\right)$ и $\left(a^4, b^4\right)$ и используем для них неравенство Чебышева:

$$2\left(a^8+b^8\right) \geqslant \left(a^4+b^4\right)\left(a^4+b^4\right) \leftrightarrow 4\left(a^8+b^8\right) \geqslant 2\left(a^4+b^4\right)\left(a^4+b^4\right).$$

Используем неравенство Чебышева для одномонотонных последовательностей $\left(a^3, b^3\right)$ и (a, b):

$$2\left(a^4+b^4\right) \geqslant \left(a^3+b^3\right)(a+b).$$

Имеем:

$$4\left(a^8+b^8\right) \geqslant 2\left(a^4+b^4\right)\left(a^4+b^4\right) \geqslant \left(a^4+b^4\right)\left(a^3+b^3\right)(a+b).$$

Что и требовалось доказать.

Также неравенство Чебышева имеет обобщенную форму.

Обобщённое неравенство Чебышева

Даны конечные последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и последовательность неотрицательных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1. Если последовательности одномонотонны, то

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_nx_ny_n) \geqslant$$
$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n).$$

2. Если последовательности разномонотонны, то

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_nx_ny_n) \leqslant$$
$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n).$$

Пример 9. Докажите обобщённое неравенство Чебышева.

Решение: Докажем неравенство 1 с помощью индукции по n.

База: $n = 2$. Тогда имеем $(a_1 + a_2)(a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2) \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2)(a_1y_1 + a_2y_2) \leftrightarrow a_1a_2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0$, что верно, так как a_1, a_2 неотрицательны, и $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ имеют одинаковый знак благодаря одномонотонности.

Шаг: Пусть неравенство верно для $n = k - 1$. Докажем, что оно верно для $n = k$. Пусть

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1},$$
$$S = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_{k-1}x_{k-1}y_{k-1},$$
$$X = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k-1}x_{k-1},$$
$$Y = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_{k-1}y_{k-1}.$$

Имеем $AS \geqslant XY$, нужно доказать, что верно неравенство:

$$(A + a_k)(S + a_kx_ky_k) \geqslant (X + a_kx_k)(Y + a_ky_k) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow AS + Aa_kx_ky_k + Sa_k + a_k^2x_ky_k \geqslant XY + Xa_ky_k + Ya_kx_k + a_k^2x_ky_k \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow AS - XY + a_k(Ax_ky_k + S - Xy_k - Yx_k) \geqslant 0.$$

Из предположения индукции следует, что достаточно доказать:

$$Ax_ky_k + S - Xy_k - Yx_k \geqslant 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow a_1(x_ky_k + x_1y_1 - x_1y_k - x_ky_1) + a_2(x_ky_k + x_2y_2 - x_2y_k - x_ky_2) + \ldots$$
$$\cdots + a_{k-1}(x_ky_k + x_{k-1}y_{k-1} - x_{k-1}y_k - x_ky_{k-1}) \geqslant 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow a_1(x_1 - x_k)(y_1 - y_k) + a_2(x_2 - x_k)(y_2 - y_k) + \cdots + a_{k-1}(x_{k-1} - x_k)(y_{k-1} - y_k) \geqslant 0,$$

что верно из одномонотонности последовательностей.

Неравенство 2 доказывается аналогично.

Совет.

Иногда полезно использовать обобщённое неравенство Чебышева, взяв такую последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. В этом случае получим неравенство:

1. Если последовательности одномонотонны, то

$$(a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_nx_ny_n) \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n).$$

2. Если последовательности разномонотонны, то

$$(a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_nx_ny_n) \leqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n).$$

Такое неравенство называется весовым неравенством Чебышева.

Пример 10. Для неотрицательных x, y, z докажите:

$$\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2} + \sqrt{3x^2+4y^2+2z^2} + \sqrt{4x^2+2y^2+3z^2} \geqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

(РО. Обл. 2016, Р9.6)

Решение: Для одномонотонных последовательностей (x, y, z) и (x, y, z) и последовательности чисел $(2, 3, 4)$ используем обобщённое неравенство Чебышева:

$$(2+3+4)\left(2x^2+3y^2+4z^2\right) \geqslant (2x+3y+4z)(2x+3y+4z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2x^2+3y^2+4z^2 \geqslant \frac{(2x+3y+4z)^2}{9} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{2x^2+3y^2+4z^2} \geqslant \frac{2x+3y+4z}{3}.$$

Аналогично для остальных слагаемых:

$$\sqrt{3x^2+4y^2+2z^2} \geqslant \frac{3x+4y+2z}{3},$$

$$\sqrt{4x^2+2y^2+3z^2} \geqslant \frac{4x+2y+3z}{3}.$$

Сложив правые и левые части, получим:

$$\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2} + \sqrt{3x^2+4y^2+2z^2} + \sqrt{4x^2+2y^2+3z^2} \geqslant 3(x+y+z).$$

Рассмотрим теперь одномонотонные последовательности $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ и $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$, по неравенству Чебышева:

$$x+y+z \geqslant \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{3}.$$

Имеем:

$$\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}+\sqrt{3x^2+4y^2+2z^2}+\sqrt{4x^2+2y^2+3z^2} \geqslant 3\left(x+y+z\right) \geqslant \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

Что и требовалось доказать.

Возможные ошибки.

Для нетривиальных случаев обязательно нужно проверять и доказывать, что данные последовательности одномонотонны либо разномонотонны. Эта ошибка часто приводит к попытке доказать неверное неравенство.

Задачи:

№1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — попарно различные натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

(IMO 1978, P2)

№2. Пусть даны положительные $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n \geqslant 2$, а также $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

№3. Пусть a, b, c — положительные числа, докажите, что:

$$3abc \geqslant a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(a+c-b\right)+c^2\left(a+b-c\right).$$

(IMO 1964, P2)

№4. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите, что:

$$\frac{4a+b+c}{a+4b+4c}+\frac{a+4b+c}{4a+b+4c}+\frac{a+b+4c}{4a+4b+c} \geqslant 2.$$

№5. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите, что:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ac}{a+c}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c.$$

№6. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите, что:

$$\frac{3\left(ab+bc+ac\right)}{2\left(a+b+c\right)} \geqslant \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}.$$

(IMO SL 2006, A4)

№7. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите, что:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}.$$

№8. Пусть a, b, c — положительные числа, тогда докажите, что:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{ab+bc+ac}{a^3+b^3+c^3}.$$

№9. Пусть a, b, c, d — положительные числа, докажите, что:

$$(a+b+c)\left(a^5+b^5+c^5\right) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

№10. (Обобщение предыдущей задачи). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, а положительные числа $a < b \geqslant c < d$ такие, что $a+d=b+c$. Докажите, что:

$$\left(x_1^a+x_2^a+\cdots+x_n^a\right)\left(x_1^d+x_2^d+\cdots+x_n^d\right) \geqslant \left(x_1^b+x_2^b+\cdots+x_n^b\right)\left(x_1^c+x_2^c+\cdots+x_n^c\right).$$

Глава 10

Метод Штурма

(Базарбай Мирас, г. Алматы)

10.1 База

Р. Штурм, математик, предложил новый подход к доказательству неравенств в условиях, когда даются дополнительные условия, такие как постоянная сумма или произведение. В центре его метода лежит идея одновременного изменения двух переменных таким образом, чтобы изначально заданное условие оставалось неизменным. При этом одна из частей неравенства должна изменяться в определённом направлении.

Обычно в подобных задачах переменные стремятся либо сделать равными, либо, наоборот, отдалить друг от друга как можно больше. Если можно доказать, что при сближении двух переменных значение неравенства увеличивается, то это означает, что максимальное значение достигается, когда все переменные равны. В то же время, если при сближении переменных значение уменьшается, то это свидетельствует о том, что минимальное значение достигается также в случае равенства всех переменных.

Пример 1.1. У Мираса было два положительных числа x и y, сумма которых равна 1. Поймите, как изменяются:

1) xy

2) $x^2 + y^2$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Решение: 1) Б.О.О., пусть $x \leqslant y$. Проведём замену $x = \frac{1}{2} - t$ и $y = \frac{1}{2} + t$. Тогда у нас:

$$xy = \left(\frac{1}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} + t\right) = \frac{1}{4} - t^2.$$

Минимум достигается, когда $t = \frac{1}{2}$, а максимум — когда $t = 0$. То есть, чем x и y ближе друг к другу по значению, тем больше их произведение.

2) Проведём ту же замену, тогда у нас получится:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 = 2t^2 + \frac{1}{2}.$$

Чем ближе x и y, тем меньше становится данное значение.

3) Неудивительно, но та же замена приведёт нас к:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{1}{2} - t} + \frac{1}{\frac{1}{2} + t} = \frac{\frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} + t}{\left(\frac{1}{2} - t\right)\left(\frac{1}{2} + t\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} - t^2} = \frac{4}{1 - 4t^2}.$$

Пример 1.2. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что $n \leqslant x_1 + \ldots + x_n$.

Решение:

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Допустим, равенство где-то не выполняется, значит, существуют такие x_i и x_j, что $x_i > 1$ и $x_j < 1$. Для максимального удобства пусть это x_1 и x_2. Заметим, что $x_1 + x_2 > x_1x_2 + 1$ (перенесём правую часть налево). Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 1 + x_1x_2 + \ldots + x_n$. Теперь возьмём числа $(1, x_1x_2, \ldots, x_n)$. Если они не равны друг другу, и в итоге не получится, что их сумма равна n, тогда какой-то $x_i > 1$ и $x_j < 1$. Можно догадаться, что эта цепочка продолжится, и в конце:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 1 + x_1x_2 + \ldots + x_n > \ldots = n.$$

Отсюда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n$, если не $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Можно сказать, что мы также доказали, что это единственная точка равенства.

Что такое метод Штурма?

Из приведённых примеров вы, скорее всего, ещё не составили представление в голове о том, в чём заключается данный метод. На самом деле он прост, но имеет довольно креативную идею.

Если в задаче нам предстоит доказать, что $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geqslant C$, где C — число, а $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ — это какое-то выражение из данных переменных, и эти переменные имеют какое-то условие, тогда можно заменить данные переменные на $b_1, b_2, ..., b_n$, чтобы условия сохранились, но $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geqslant f(b_1, b_2, ..., b_n)$. Таким образом, если мы докажем, что $f(b_1, b_2, ..., b_n) \geqslant C$, задача будет решена. Так можно и делать в обратную сторону.

Свяжем это с предыдущей задачей. Нас попросили доказать, что $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n$, где x_i — это положительные числа, и $x_1 ... x_n = 1$. Было предположено, что не все числа равны, значит, какие-то $x_1 > 1$ и $x_2 < 1$. Мы взяли новый набор $1, x_1x_2, ..., x_n$ и поняли, что условия не нарушаются. Более того, $f(1, x_1x_2, ... x_n) = 1 + x_1x_2 + ... + x_n < x_1 + x_2 + ... + x_n = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ибо $x_1 + x_2 > x_1x_2 + 1$. Повторяя данный цикл, мы пришли к тому, что

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) > f(1, x_1x_2, ..., x_n) > ... > f(1, 1, ..., x_n) = f(1, 1, ..., 1) = n.$$

Значит, если не все $x_i = 1$, выражение всегда будет больше n.

Пример 1.3. Доказать, что если сумма чисел $x_1, \ldots, x_n$ равна 1, то $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

Решение:

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, то

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{1}{n}.$$

Пусть среди рассматриваемых чисел есть хотя бы два, не равных друг другу. Среди этих чисел найдутся два таких числа, одно из которых будет больше $\frac{1}{n}$, а другое — меньше $\frac{1}{n}$. Пусть это числа x_1 и x_2, причём $x_1 < \frac{1}{n}$ и $x_2 > \frac{1}{n}$. Таким образом, заменим x_1 на $\frac{1}{n}$, а x_2 на $x_1 + x_2 - \frac{1}{n}$.
Поскольку $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, получаем новую последовательность чисел

$$\frac{1}{n}, x_1 + x_2 - \frac{1}{n}, x_3, \ldots, x_n,$$

сумма которых снова равна 1. А так как

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{n} + (x_1 + x_2 - \frac{1}{n})\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n}\right)^2,$$

то

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + (x_1 + x_2 - \frac{1}{n})\right)^2 + \ldots + x_n^2.$$

Повторяя эти действия конечное число раз, получим последовательность, все члены которой будут равны $\frac{1}{n}$, а сумма их квадратов будет меньше суммы квадратов исходных чисел $x_1, \ldots, x_n$, т.е.

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

Из приведённого доказательства видно, что рассматриваемое неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$.

Примеры 1.4-5. Докажите QM $\geqslant$ AM $\geqslant$ GM, используя Метод Штурма.

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Решение:

1) **QM $\geqslant$ AM**.

Просто используем пример 1.3, вставив в него числа:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, \frac{a_2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, ..., \frac{a_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n},$$

и так как условие вполне сохраняется, неравенство справедливо.

$$\left(\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^2+...+\left(\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^2 \geqslant \frac{1}{n},$$

или

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2,$$

откуда и получается заданное неравенство.

2) **AM** $\geqslant$ **GM**.

Просто используем пример 1.2, вставив в него числа:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}.$$

Условия не нарушаются, отсюда выходит следующее:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}} \geqslant n,$$

или

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}.$$

10.2 Не База

В этой части представлены сложные задачи и новые знания, которые помогут вам научиться применять метод Штурма (даже с несимметричной точкой равенства). Надеюсь, вы ещё не сдались :)

Пример 2.1. Пусть сумма положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

.

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Решение:

Так как $x_1+\ldots+x_n=1$, то найдутся два числа, одно из которых не больше $\frac{1}{n}$, а другое не меньше $\frac{1}{n}$. Для определённости примем, что $x_1 \leqslant \frac{1}{n},\ x_2 \geqslant \frac{1}{n}$.

Заменив x_1 на $\frac{1}{n}$, а x_2 на $x_1+x_2-\frac{1}{n}$, получим числа $\frac{1}{n}, (x_1+x_2-\frac{1}{n}), x_3, \ldots, x_n$, для которых получим

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1x_2\dots x_n} \geqslant \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-x_1-x_2+\frac{1}{n}\right)\dots(1-x_n)}{\frac{1}{n}(x_1+x_2-\frac{1}{n})\dots x_n},$$

так как

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1x_2} \geqslant \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-x_1-x_2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left(x_1+x_2-\frac{1}{n}\right)}.$$

Это правда, ибо

$$1+\frac{1-(x_1+x_2)}{x_1x_2} \geqslant 1+\frac{1-\left(\frac{1}{n}+x_1+x_2-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left(x_1+x_2-\frac{1}{n}\right)}.$$

А данный факт вытекает из того, что $\left(x_1-\frac{1}{n}\right)\left(x_2-\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$.

Повторяя это действие конечное число раз, получим n чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{n}$, и для этих чисел левая часть неравенства, которая равна $(n-1)^n$, не больше

$$\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1\dots x_n}.$$

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Пример 2.2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 1$. Доказать, что: $\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$, где $n \geqslant 2$.

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Решение:

Обозначим $\sqrt[n]{x_1\dots x_n}=m$. Можем принять, что $x_1 \leqslant m$, $x_2 \geqslant m$, следовательно, для чисел $m, \frac{x_1x_2}{m}, x_3, \dots, x_n$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+\frac{x_1x_2}{m}}+\dots+\frac{1}{1+x_n},$$

так как

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2} \geqslant \frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+\frac{x_1x_2}{m}} \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}=1+\frac{1-x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}.$$

Через конечное число шагов получим

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{1+m}+\dots+\frac{1}{1+m}}_{n}=\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}.$$

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Пример 2.3. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=1$. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$abc+bcd+cda+dab \leqslant \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Решение:

Если $a=b=c=d=\frac{1}{4}$, то имеет место равенство. Пусть $a<\frac{1}{4}, b>\frac{1}{4}$. Тогда:

a) $c+d-\frac{176}{27}cd<0$; заметим, что

$$A=ab(c+d-\frac{27}{176}cd)+cd(a+b) \leqslant cd(a+b) \leqslant \left(\frac{(a+b)+c+d}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

(последнее неравенство по AM $\geqslant$ GM)

b) $c+d-\frac{27}{176}cd \geqslant 0$; заметим, что

$$A \leqslant \frac{1}{4}\left(a+b-\frac{1}{4}\right)\left(c+d-\frac{176}{27}cd\right)+cd\left(\frac{1}{4}+(a+b-\frac{1}{4})\right).$$

(так как $ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b-\frac{1}{4})$)

Таким образом, неравенство необходимо доказать для чисел $a_1=\frac{1}{4}, b_1=a+b-\frac{1}{4}, c_1=c, d_1=d$. Действуя аналогичным образом, мы или докажем неравенство для чисел a_1, b_1, c_1, d_1, или останется доказать неравенство для случая, когда два числа из a_1, b_1, c_1, d_1 равны $\frac{1}{4}$. В конце концов, мы придём к необходимости доказать неравенство для случая, когда все числа равны $\frac{1}{4}$, но в этом случае неравенство, очевидно, выполняется.

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Пример 2.4. Докажите, что если $x+y+z=1$ и $x, y, z \geqslant 0$, то $0 \leqslant xy+yz+xz-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$.

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

Решение:

Пусть $x \geqslant y \geqslant z$; тогда понятно, что $y \leqslant \frac{1}{2}$, $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z$, следовательно,

$$0 \leqslant y(x+z)+xz(1-2y) \leqslant y\left(\frac{1}{3}+(x+z-\frac{1}{3})\right)+\frac{1}{3}(x+z-\frac{1}{3})(1-2y).$$

Таким образом, если в выражении $xy+yz+xz-2xyz$ заменить числа x, y, z на числа $\frac{1}{3}, x+z-\frac{1}{3}$, то его значение увеличится.

Повторив эту операцию, заменим числа $y, x+z-\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$xy+yz+xz-2xyz \leqslant \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{7}{27}.$$

(Седракян Н.М., Авоян А.М.)

В следующих примерах главной мотивацией будет являться подогнать под точку равенства.

Пример 2.5. Пусть a, b, c — неотрицательные вещественные числа с суммой 3. Докажите, что:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} \geqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{36}.$$

(Pham Kim Hung)

Решение: Без ограничения общности можно предположить, что $a \geqslant b \geqslant c$. Обозначим:

$$f(a,b,c) = 36(ab+bc+ca) - (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3).$$

Мы докажем, что $f(a,b,c) \geqslant f(a, b+c, 0)$. Действительно:

$$a^3+b^3+c^3 \leqslant a^3+(b+c)^3;$$

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \leqslant a^3(b+c)^3;$$

$$\Rightarrow (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \leqslant (a^3+(b+c)^3)a^3(b+c)^3.$$

Также $ab+bc+ca \geqslant a(b+c)$. Получаем, что $f(a,b,c) \geqslant f(a,b+c,0)$. Остаётся доказать первое неравенство в случае $c = 0$, а именно:

$$36ab \geqslant a^3b^3(a^3+b^3) \Rightarrow 36 \geqslant a^2b^2(a^3+b^3).$$

Пусть $x = ab$. Неравенство можно переписать в виде:

$$t^2(27-9t) \leqslant 36 \Rightarrow \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot (3-t) \leqslant 1,$$

что является точным неравенством между средним арифметическим и геометрическим. Равенство выполняется, когда $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ (и их перестановки, конечно).

Пример 2.6. Докажите, что для всех $x, y, z \geqslant 0$, неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{xyz}{16}}$$

выполняется. Определите, может ли достигаться равенство, и если да, то в каких случаях это происходит.

(Germany 2017/6)

Решение:

Задачи:

№1. Докажите, что если a, b и c — положительные действительные числа, тогда

$$a^b b^c c^a \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

(USAMO 1974/2)

№2. Докажите, что для чисел a, b, c, находящихся в интервале $[0, 1]$,

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

(USAMO 1980/5)

№3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 3)$ — действительные числа, такие что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2.$$

Докажите, что $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant 2$.

(USAMO 1999/4)

№4. В конкурсе участвуют m кандидатов и n судей, где $n \geqslant 3$ — нечётное целое число. Каждого кандидата каждый судья оценивает как 'проходит' или 'не проходит'. Предположим, что каждая пара судей согласна максимум по k кандидатам. Докажите, что

$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{n-1}{2n}.$$

(IMO SL 1998 C5)

№5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{300}$ — неотрицательные действительные числа, сумма которых равна 1, то есть

$$\sum_{\text{cyc}} {}_{i=1}^{300} a_i = 1.$$

Найдите максимально возможное значение суммы

$$\sum_{\text{cyc}} {}_{\substack{i \neq j \\ i,j}} a_i a_j.$$

(Argentina TST 2009 Day 1/2)

№6. Определите все возможные значения

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

где a, b, c, d являются произвольными положительными числами.

(IMO 1974/5)

№7. Найдите наибольшее положительное действительное число k, такое, что для любых положительных действительных чисел a, b, c, d всегда выполняется:

$$(a+b+c)^3 (a+b+c+d)^5 + 2^4(a+b+c+2d)^5 \geqslant kabcd^3.$$

(China TST Day 4/2)

Часть III

Решения и Подсказки

1 Примитивные Неравенства

№1. Подсказка: Попробуйте использовать неравенство Бернулли для 1.01^{100}.

Решение: Используем неравенство Бернулли для 1.01^{100}, значит $1.01^{1000} > 2^{10} = 1024$. Задача решена.

Мотивация: Как можно заметить, использование неравенства для тысячной степени нам бы ничего не дало, поэтому пришла идея её уменьшить так, чтобы вышло целое число, с которым было бы удобно работать. Обычно неравенство Бернулли является сильным огрублением, используйте его на маленьких степенях.

№2. Подсказка: Исследуйте $(n-1)(n+1)$ и n^2 для натуральных чисел.

Решение: Пусть число слева — это n^2, тогда число справа будет $n^2 - 1$, что меньше.

Мотивация: В таких задачах не стоит считать, просто попробуйте понять, что такая закономерность работает для всех чисел. Для этого возьмите переменную вместо числа.

№3. Подсказка: Используйте мотивацию предыдущей задачи.

Решение: Исследуем $\frac{n-4}{n}$, он строго растёт.

№4. Подсказка: Возведите в LHS/RHS и затем возьмите квадрат обеих сторон.

Решение: Мы получим сравнение $4042 + 2 \cdot \sqrt{2020 \cdot 2022}$ с $4 \cdot 2021$, или же $2 \cdot \sqrt{2020 \cdot 2022} \ \vee \ 2 \cdot 2021$. Мы уже обсуждали $(n-1)(n+1) \ \vee \ n^2$.

Остальные задачи:

№1. Подсказка: Увеличьте знаменатель, чтобы получить дробь поменьше.

Решение: Заметим, что $\sqrt{b+c} < \sqrt{a+b+c}$, аналогично и с другими. Из этого следует, что

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{b+c}} > \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} = \sqrt{a+b+c}.$$

Мотивация: Можно заметить, что почти ни с чем мы тут не могли бы работать, кроме знаменателя, и его можно либо уменьшить, либо увеличить. Но если уменьшить, мы получим дробь больше нашей, а это нам не пригодилось бы.

№2. Подсказка: Разберите на несколько промежутков возможные значения a.

Решение: Пусть $|a| > 1$, тогда $a^{12} - a^9$ и $a^4 - a$ положительны (ибо $a^{12},\ a^4$ неотрицательны). Теперь пусть $|a| < 1$, тогда $a^4 - a^9$ и $1 - a$ положительны.

№3. Подсказка: $ab = a + b^2$.

Решение: Из того, что $ab = a + b^2$, следует, что $a(b-1) = b^2$, то есть a и $b-1$ положительны. Перейдём к вопросу: по сути, он сравнивает $a + b$ с $a + b^2$. Сократим a, и теперь вопрос состоит в том, что нужно сравнить $b\ \vee\ b^2$. Мы поняли, что $b > 1$, значит, b^2 больше.

№4. Подсказка: $ab + a + 1 \leqslant ab + a + b + 1$.

Решение:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{ab+a+1} \geqslant \sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{ab+a+b+1} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{(a+1)(b+1)} = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+1)}.$$

№5. Подсказка: Возьмите самый большой квадрат.

Решение: Возьмём самое большое число x, оно будет как минимум 2013, а сумма всех остальных чисел будет строго меньше, чем $2013x$. Сравним $2012x$ и x^2. Так как $x \geqslant 2013$, то $x^2 > 2012x$, значит, квадрат больше суммы.

Мотивация: Мотивом является то, что самый большой квадрат даст самое большое число из ряда, так что с ним будет удобнее работать.

№6. Подсказка: Давайте докажем, что слева окажется больше.

Решение: Очевидно, что $a > b,\ c$, то есть $a \geqslant (b+1),\ (c+1)$.

Б.О.О. пусть $b \geqslant c$, то есть $2 \cdot b^b \geqslant b^b + c^c$. Попробуем доказать, что $a^a \geqslant (b+1)^{(b+1)} > 2 \cdot b^b \geqslant b^b + c^c$. Для этого потребуется доказать, что $(b+1)^{(b+1)} > 2 \cdot b^b$. Можно разобрать случай $b = 1$, для которого это неравенство работает, и потом рассмотреть $b \geqslant 2$. Раскрыв слева, мы получим $(b^{b+1} + \dots)$, которое больше, чем b^{b+1}, а это больше, чем $2 \cdot b^b$ для $b \geqslant 2$.

Мотивация: Можно заметить, что слева выражение растёт гораздо быстрее, чем справа, благодаря степени.

№7. Подсказка: Если числа не равны, то происходит неравенство.

Решение: Допустим, $x > y$, тогда правая часть больше. Допустим обратное, и получим, что левая часть больше — противоречие.

№8. Подсказка: В этой сумме можно разделить на группы, каждая из которых будет больше определённой константы.

Решение: Заметим, что $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$, ибо содержит 2^n дробей, каждая из которых больше или равна $\frac{1}{2^{n+1}}$. И так можно делать бесконечно, значит, наша сумма увеличивается каждый раз на $\frac{1}{2}$.

Мотивация: Скорее всего, вы пробовали смотреть на малых значениях, и там можно было найти эту закономерность.

№9. Подсказка: Индукция.

Решение: Докажите через индукцию, взяв под сравнение, и в конце дойдёте до (!) $(2n+2)^2 > (2n+1)(2n+3)$, что можно доказать, взяв $2n+2 = a$ и получив, что $a^2 > a^2 - 1$.

Мотивация: Задачи такого вида обычно решаются через индукцию.

№10. Подсказка: Докажите два неравенства.

Решение: Возьмите под сравнение (RHS/LHS) и легко докажите неравенство, используя факт, что $ad < bc$.

№11. Решение: Допустим, это неправда, и неравенство работает в обратную сторону.

Если числа равны, то мы получим сумму квадратов, которая будет больше или равна нулю. Допустим теперь, что $x > y$, тогда умножим выражение на $x - y$ и получим, что $x^{2n+1} < y^{2n+1}$, что неправда. Если $x < y$, умножим на $y - x$.

Мотивация: Здесь наглядно показан слог из $x^{2n} - y^{2n}$.

№12. Подсказка: Б.О.О. Пусть $a \geqslant b$ и $a = b + x$.

Решение: Неравенство преобразуется в (!) $(b+x)^x > b^x$, что очевидно.

Мотивация: Для максимального удобства в таких маленьких задачах нужно делать Б.О.О. и замену.

№13. Решение: Сперва заметим, что если $x = y$, то всё работает. Теперь пусть $x > y$, тогда модуль можно убрать, ибо выражение уже положительное. Осталось сравнение $(x-y) \vee (1-xy) \Rightarrow x(1+y) \vee (1+y)$. Можем сократить $(1+y)$, ибо оно положительное. Получилось $x \vee 1$, правая часть больше, значит $(1-xy) > (x-y)$. В случае $y > x$ модуль умножит выражение на -1, и неравенство можно доказать таким же способом.

№14. Подсказка: Возьмите RHS/LHS и преобразуйте задачу.

Решение: У вас должно получиться, что (!) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow (\sin x - 4)(\sin x - 1) \geqslant 0$, что очевидно, ибо график функции положителен при $\sin x \geqslant 1$.

2 Немного о квадратах

№12. Подсказка: Попробуйте раскрыть $(a+1)(b+1)$ и посмотреть, что с ним происходит (и $(c+1)(d+1)$ тоже).

Решение: Воспользовавшись подсказкой, получим

$$(!)\ (ab+cd+1)^2 \geqslant 0,$$

что очевидно.

№13. Подсказка: $x^4+y^4+2x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2$.

Решение:

$$(!)\ \left(x^2+y^2\right)^2+(2xy)^2 \geqslant 4xy\left(x^2+y^2\right),$$

верно по второму примеру.

№14. Подсказка: Рассмотрите сумму выражений.

Решение: Возьмём в сумму и получим выражение $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$, откуда $\boxed{x=-2,\ y=1,\ z=-2}$. Подставив под условие, удостоверимся, что ответы верны.

Мотивация: Было предельно ясно, что, соединив, мы сможем получить квадраты.

№15. Подсказка: Умножьте правую часть на $1=\sqrt{abc}$.

Решение:

$$(!)\ a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac},$$

используем второй пример трижды для пар (a,b), (b,c), (a,c).

Мотивация: Нужно было точно умножить правую часть на 1, но умножив на abc, мы бы получили бред, вот и пришла идея вместо него умножить на $\sqrt{abc}$.

№16. Решение: Стоит заметить, что если у кубического многочлена есть 2 действительных корня, то третий тоже будет действительным. По теореме Виета:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a},$$

а также

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}.$$

Тогда возведём второе условие в квадрат:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) = \frac{b^2}{a^2}.$$

Теперь сделаем сравнение:

$$x_1x_2 \ \vee \ \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Справа отнимем $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, а слева $\frac{c}{a}$ (это одно и то же), и получим:

$$-\left(x_1x_3 + x_2x_3\right) \ \vee \ \left(\frac{-b^2}{4a^2}\right).$$

Заменим справа значение на

$$\frac{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right)\right)}{4}.$$

Умножим слева и справа на 4, перекинем некоторые элементы, и получим: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \ \vee \ 0$, или же:

$$\left(x_1 + x_2 - x_3\right)^2 \ \vee \ 0,$$

что очевидно.

3 Неравенства о средних

1st Level:

№9. Решение: Пусть $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$. Тогда неравенство $P_3 \geqslant AM$ убивает задачу.

№10. Решение: Сделайте AM $\geqslant$ GM для 3 чисел в обеих скобках.

№11. Решение:

$$x^4+y^2 \geqslant 2x^2y \Rightarrow \frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}.$$

Повторите то же действие и со второй дробью.

№12. Решение: Давайте сделаем AM $\geqslant$ HM. Получится, что:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1+ab} \geqslant \frac{9}{3+ab+bc+ac}.$$

Было бы отлично, если бы мы просто доказали, что $3 \geqslant ab+bc+ac$, и тогда эта дробь стала бы больше $\frac{9}{6}$. Так давайте докажем это:

$$6 \geqslant \left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(a^2+c^2\right) \geqslant 2\left(ab+bc+ac\right) \Rightarrow 3 \geqslant ab+bc+ac.$$

№13. Решение: Перекинем z направо:

$$(!)\ \ x^2+y^2+12z^2+1 \geqslant 4xz+4yz+4z.$$

Далее достаточно заметить, что:

$$\left(x^2+4z^2\right)+\left(y^2+4z^2\right)+\left(4z^2+1\right) \geqslant 4xz+4yz+4z.$$

№14. Решение: Просто примените AM $\geqslant$ HM.

№15. Решение: Можно либо раскрыть и доказать, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, либо использовать AM $\leqslant$ QM.

№16. Решение: Сделаем AM $\geqslant$ HM:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b+1} \geqslant \frac{9}{3+2\left(a+b+c\right)}.$$

Опять же, как и в задаче №12, было бы славно доказать, что $a+b+c \leqslant 3$, что можно сделать по QM $\geqslant$ AM для (a, b, c).

№17. Решение: Доказательство первого неравенства осуществляется с помощью QM $\geqslant$ AM для (a, b, c). Докажем вторую скобку, введём RHS/LHS:

$$3 \ \vee \ (ab+bc+ac) \Rightarrow (a+b+c) \ \vee \ (ab+bc+ac).$$

На этой точке давайте умножим левую сторону на $a+b+c$, а правую — на 3, ибо они равны. Такая идея приходит в голову, ибо нам нужно уравнять степени: слева мы имеем первую, а справа — вторую степень, так что было бы славно слева превратить в квадрат:

$$(a+b+c)^2 \ \vee \ 3\left(a+b+c\right),$$

а доказательство данного факта разбиралось ранее.

№18. Решение: Используйте $P_3 \geqslant$ AM для $(x, y, 1)$.

Мотивация: Данная идея приходит тогда, когда вы поймёте, что вам нужно кубическую степень превратить в единичную, а это можно сделать с помощью данного неравенства. Однако, если в сухую влепить его для (x, y), у нас ничего не получится, ибо если бы это работало, то это было бы для любых положительных x, y. Но у нас же имеется то, что $x^3+y^3=2$, и ведь это дано не просто так, так что давайте сперва найдём равенство. Оно достигается при $x=y=1$, так что теперь создадим новое неравенство с $(x, y, 1)$, и задача доказана.

№19. Решение: Сделайте QM $\geqslant$ AM для $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}\right)$.

№20. Решение:

$$\begin{cases} a^2+9 \geqslant 6a, \\ b^2+4 \geqslant 4b, \\ c^2+1 \geqslant 2c, \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+14 \geqslant 2\left(3a+2b+c\right) \geqslant 2 \cdot 14 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant 14.$$

№21. Решение: Умножим слева и справа на 2 и применим AM $\geqslant$ GM для каждой пары. Выйдет, что слева выражение больше или равно $2(a+b+c)=2$.

№22. Решение: Примените AM $\geqslant$ GM для (a,b,c,d,d,d).

2nd Level:

№5. Решение: Сделаем AM $\geqslant$ GM для $(x,1,1)$ и аналогично получим, что выражение слева больше или равно $27\sqrt[3]{xyz}=27$.

№6. Решение:

$$1+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow A\geqslant 2^n\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+2^n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\geqslant 2^{n+1}.$$

№7. Решение: Сделаем QM $\geqslant$ AM для этих двух скобок и теперь попробуем доказать, что

$$p+q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 5\Rightarrow (!)\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 4,$$

что следует по AM $\geqslant$ HM для (p,q).

№8. Решение: Сперва превратим наше выражение (пусть это будет A) в

$$A=\sum_{cyc}\frac{a_1}{2-a_1}=\sum_{cyc}\left(\frac{2}{2-a_1}-1\right)=\sum_{cyc}\frac{2}{2-a_1}-2023=2\left(\sum_{cyc}\frac{1}{2-a_1}\right)-2023,$$

и для выражения слева применим AM $\geqslant$ HM,

$$\sum_{cyc}\frac{1}{2-a_1}\geqslant\frac{2023^2}{2023\cdot 2-1}.$$

Получается, что

$$A\geqslant 2\cdot\frac{2023^2}{2023\cdot 2-1}-2023=\frac{2023}{4045}.$$

Пример выполняется при $a_1=a_2=\cdots=a_{2023}=\frac{1}{2023}$.

№9. Решение: Решим первое неравенство:

$$a^2+1\geqslant 2a\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+1}\leqslant\sum_{cyc}\frac{a}{2a}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Решим второе неравенство: По AM $\geqslant$ HM

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+a}\geqslant\frac{9}{a+b+c+3}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство следует из $a+b+c \leqslant 3$.

№10. Решение: Заметим, что $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) \geqslant (1+xy)^2$. Давайте возведём условие в квадрат:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}\right) \ \vee \ \left(\frac{4}{1+xy}\right).$$

Из первого факта выходит, что:

$$\frac{2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}} \leqslant \frac{2}{1+xy}.$$

Теперь у нас сравнение:

$$\left(\frac{2+x^2+y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}\right) \ \vee \ \left(\frac{2}{1+xy}\right),$$

или же

$$\left(2+x^2+y^2+2xy+xy\left(x^2+y^2\right)\right) \ \vee \ \left(2x^2y^2+2x^2+2y^2+2\right) \Rightarrow 0 \ \vee \ (x-y)^2\left(1-xy\right),$$

что очевидно.

№11. Решение: Б.О.О. $x \geqslant y \geqslant z$, тогда очевидно левая часть будет либо отрицательной из-за того, что только одна часть произведения $(y+z-x)$ может быть отрицательной, либо она будет положительной, ибо все части будут положительными. Можем не разбирать случай, когда слева будет отрицательное значение. Пусть $A=x+y-z,\ B=x+z-y,\ C=y+z-x$, то есть

$$(!)\ \ ABC \leqslant \frac{(A+B)\left(B+C\right)\left(A+C\right)}{8} \Rightarrow (!)\ \ 8ABC \leqslant (A+B)\left(B+C\right)\left(A+C\right),$$

что разбиралось ранее.

№12. Решение: Давайте перекинем выражения и получим:

$$(!)\ \ (ab+cd)(ad+bc) \geqslant \sqrt{abcd}(ab+cd+ad+bc).$$

Невооружённым глазом можно заметить, что слева и справа повторяются одни и те же члены, давайте сделаем следующие действия. Известно, что по AM $\geqslant$ GM:

$$(ab+cd)(ad+bc) \geqslant 2\sqrt{abcd}(ab+cd),$$

а также:

$$(ab+cd)(ad+bc) \geqslant 2\sqrt{abcd}(ad+bc).$$

Суммируем выражения и сократим двойку, доказано.

№13. Решение: Довольно очевидно, что нужно попытаться доказать, что выражение больше или равно $4xy+4yz+4xz$. Сделаем это следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{z^2}{2}+8x^2 \geqslant 4xz, \\ \frac{z^2}{2}+8y^2 \geqslant 4yz, \\ 2x^2+2y^2 \geqslant 4xy. \end{cases}$$

№14. Решение: Сразу же применим AM $\geqslant$ HM:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1+ab} \geqslant \frac{9}{3+ab+bc+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство является верным, ибо $3 = a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

№15. Решение: Для удобства сделаем замену $A = x-1,\ B = y-1$. Задача преобразуется в:

$$(!)\ (A+1)(B+1) \geqslant (A+1)\sqrt{B} + (B+1)\sqrt{A}.$$

То, что мы имеем слева, разделим пополам и используем AM $\geqslant$ GM для каждого члена:

$$(A+1)\frac{(B+1)}{2} + (B+1)\frac{(A+1)}{2} \geqslant (A+1)\sqrt{B} + (B+1)\sqrt{A}.$$

№16. Решение: Сделаем магию:

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} = (x-y) + \frac{(y+1)}{2} + \frac{(y+1)}{2} + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} - 1 \geqslant 4 - 1 = 3.$$

То есть, как мы видим, мы как бы сделали $-y$, но потом вернули y. Одолжили мы лишь -1, который тоже вернули, ибо AM $\geqslant$ GM, который мы применили для первых четырёх членов, тут будет $\geqslant 4$.

№17. Решение: Было бы прекрасно спустить степень $\sum\limits_{\text{cyc}} a^2$ с двух до одного $\left(\sum\limits_{\text{cyc}} a\right)$. То есть, примерно прикидываем, что нужно прийти в конце к неравенству:

$$a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2a+2b+2c\ \left(a^2+1 \geqslant 2a,\ b^2+1 \geqslant 2b,\ \ldots\right).$$

Попробуем доказать, что:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2\left(a+b+c\right).$$

Значит, осталось лишь показать, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$, что является правдой. Попробуйте AM $\geqslant$ GM для $\left(a^2, b^2, c^2\right)$.

№18. Решение: Для удобства $a^3 = x,\ b^3 = y$, значит, надо доказать, что:

$$a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2.$$

Сделаем это следующим образом:

$$\begin{cases} a^3+b^3+b^3 \geqslant 3ab^2, \\ b^3+a^3+a^3 \geqslant 3a^2b, \\ \Rightarrow 3\left(a^3+b^3\right) \geqslant 3\left(ab^2+a^2b\right) \Rightarrow a^3+b^3 \geqslant ab^2+a^2b. \end{cases}$$

№19. Решение: Вообще, наше выражение можно видоизменить как:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{9}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{9}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Как же было бы удобно применить AM $\geqslant$ GM и избавиться от знаменателя, сделаем это:

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{9}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2\sqrt{9}=6.$$

Осталось найти пример. Его мы ищем по AM $\geqslant$ GM, который мы применили, то есть, применяя последний AM $\geqslant$ GM, мы автоматически предположили, что:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{9}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ибо каждый член в AM $\geqslant$ GM должен быть равен, чтобы выполнялось равенство и минимум вообще существовал. Так, то есть $x^2+1=9$, значит $x=2\sqrt{2}$.

№20. Решение: Вспомним неравенство, которое мы применили в задаче №18, применим его здесь:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2b+ab^2+abc}.$$

Попробуем доказать, что:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2b+ab^2+abc}\leqslant\frac{1}{abc}\Rightarrow\sum_{\text{cyc}}\frac{c}{a+b+c}\leqslant 1.$$

Последнее неравенство на самом деле является равенством, ибо:

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1.$$

Доказано.

№21. Решение: Почти та же идея, что и в предыдущей задаче:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{3a^2+b^2+2ac}\leqslant\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{2a^2+2ab+2ac}=\sum_{\text{cyc}}\frac{a}{2a+2b+2c}=\frac{1}{2}.$$

То есть, мы использовали, что $a^2+b^2\geqslant 2ab$, уменьшили знаменатель, и дробь увеличилась.

3rd Level:

№6. Решение: Хитрость в этой задаче заключается в том, что нужно угадать ответ и попробовать его доказать. Для этого необходимо взять члены, равные по какой-то закономерности. Лично я попробовал взять равными члены с чётными и нечётными индексами и наткнулся на ответ: $a_1 = a_3 = \dots = a_{99} = 2,\ a_2 = a_4 = \dots = a_{100} = \frac{1}{2}$. Попробуем его доказать.

Давайте возьмём произведение всех уравнений:

$$4^{50} = 2^{100} = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_{100} + \frac{1}{x_1}\right).$$

Теперь применим AM $\geqslant$ GM для каждой скобки:

$$2^{100} = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_{100} + \frac{1}{x_1}\right) \geqslant 2^{100}\sqrt{\frac{a_1a_2\dots a_{100}}{a_1a_2\dots a_{100}}} = 2^{100}.$$

И что же мы видим? Мы видим, что равенство происходит слева и справа, значит, неравенство, которое мы имеем посередине, должно быть равенством. А это выполняется только при условии, что все члены, использованные при AM $\geqslant$ GM, были равны между собой, то есть $x_1 = \frac{1}{x_2},\ x_2 = \frac{1}{x_3} \dots$. Ибо, если бы было хотя бы одно строгое неравенство, получилось бы, что $2^{100} = A > 2^{100}$, что является противоречием. Соответственно, теперь известно, что какие-то члены между собой равны. Используя эти факты, можно решить задачу, завершив квадратным уравнением.

№7. Решение: Каждый член стоит отдельно, нет дробей, в которых больше одного члена, значит, соединять и творить что-то с помощью AM $\geqslant$ GM для этих дробей не имеет смысла — мы лишь усложним себе жизнь. Вместо этого давайте попробуем доказать, что каждая дробь больше или равна 1:

$$\frac{a^2+5}{2a+4} \geqslant \frac{2a+4}{2a+4} = 1.$$

Последнее неравенство выполняется, потому что $a^2 + 1 \geqslant 2a$ и $a^2 + 5 \geqslant 2a + 4$.

№8. Решение: Опять же, как и в прошлой задаче, будем работать с каждой дробью отдельно. Пришла идея доказать, что каждая дробь меньше или равна $\frac{x}{2}$. Сделаем это:

$$\begin{cases} a^4 + 1 \geqslant 2a^2, \\ b^3 + 2^3 + 2^3 \geqslant 12b, \\ c^4 + 3^4 + 3^4 + 3^4 \geqslant 108c. \end{cases}$$

Соответственно:

$$\frac{a^3}{a^4+1} + \frac{6b^2}{b^3+16} + \frac{54c^2}{c^4+243} \leqslant \frac{a+b+c}{2} = 3.$$

№9. Решение: Очень неприятная для глаз задача.

$$0{,}25a^{12} + b^{12} \geqslant (ab)^6,$$

$$(!)\ 0{,}18a^{12} + 0{,}43b^{12} + 1{,}43c^{12} + 1{,}43d^{12} \geqslant (abc)^4 + (abcd)^3,$$

$$c^{12} + \frac{1}{3}b^{12} + \frac{1}{9}a^{12} \geqslant (abc)^4,$$

$$(!)\ \frac{62}{900}a^{12}+\frac{29}{300}b^{12}+\frac{43}{100}c^{12}+1{,}43d^{12}\geqslant (abcd)^3.$$

Применим AM $\geqslant$ GM, получится, что:

$$\frac{62}{900}a^{12}+\frac{29}{300}b^{12}+\frac{43}{100}c^{12}+1{,}43d^{12}\geqslant \sqrt[4]{\frac{62\cdot 29\cdot 43\cdot 143}{27\cdot 10^8}}(abc)^3.$$

Достаточно доказать, что последний коэффициент больше или равен $\frac{1}{4}$, то есть нужно доказать, что:

$$\sqrt[4]{\frac{62\cdot 29\cdot 43\cdot 143}{27\cdot 10^8}}\geqslant \frac{1}{4}\Rightarrow (!)\ 62\cdot 29\cdot 43\cdot 143\cdot 256\geqslant 10^8\cdot 27.$$

А это является правдой (можете подсчитать).

На самом деле там выходит строгое неравенство, а пример равенства можно найти, если сделать $a=b=c=d=0$.

№10. Решение: Для начала было бы удобно применить просто AM $\geqslant$ HM, но в итоге мы приходим к противоречию. Попробуем чуть улучшить то, что имеем:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{b(a+b)}\geqslant \sum_{\text{cyc}}\frac{1}{b(a+c)}.$$

Можете доказать этот факт, суммировав и сравнив оба выражения. В итоге останется доказать, что $\sum\limits_{\text{cyc}}\frac{a^2}{b}\geqslant a+b+c$, что мы разбирали ранее.
Сделаем RHS/LHS и затем AM $\geqslant$ HM для $\sum\limits_{\text{cyc}}\frac{1}{b(a+c)}$:

$$\left(\frac{9}{2(ab+bc+ac)}\right)\ \vee\ \left(\frac{27}{2(a+b+c)^2}\right)\Rightarrow 18(a+b+c)^2\ \vee\ 54(ab+bc+ac)\Rightarrow (a+b+c)^2\ \vee\ 3(ab+bc+ac).$$

А то, что слева больше, чем справа, — это уже факт, который мы доказывали ранее.

№11. Решение: Сделаем RHS/LHS и затем AM $\geqslant$ HM:

$$\left(\frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2+\left(\sqrt{y}+1\right)^2}\right)\ \vee\ \left(\frac{2}{x+y+2}\right)\Rightarrow (2x+2y+4)\ \vee\ \left(x+y+2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)$$

$$\Rightarrow (x+1)+(y+1)\ \vee\ \left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right).$$

Последнее неравенство верно, следовательно, задача доказана.

№12. Решение: Заметим, что $a^3+1+1\geqslant 3a$, значит:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3+2}{3b+3c}\geqslant \sum_{\text{cyc}}\frac{3a}{3b+3c}=(!)\ \sum_{\text{cyc}}\frac{a}{b+c}\geqslant \frac{3}{2}.$$

А это ведь Неравенство Несбитта!

№13. Решение: Сделаем AM $\geqslant$ GM для выражения слева:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ac}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{ab+bc+ac}}.$$

Попробуем доказать, что:

$$2\sqrt{\frac{3}{ab+bc+ac}}\geqslant \frac{6}{a+b+c},$$

или:

$$(!)\ \frac{3}{ab+bc+ac}\geqslant \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

Это равносильно доказательству факта:

$$(!)\ (a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ac).$$

А это мы доказывали ранее. Решено.

№14. Решение: Заметим, что

$$\frac{2}{a+1}+\frac{a+1}{2}\geqslant 2.$$

То есть:

$$a+2b+\frac{2}{a+1}\geqslant 0{,}5a+2b+\frac{3}{2}.$$

Значит:

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant\left(0{,}5a+2b+\frac{3}{2}\right)\left(0{,}5b+2a+\frac{3}{2}\right).$$

Попробуем доказать, что последнее выражение больше или равно 16. А вообще, давайте умножим с обеих сторон на 4 для удобства:

$$(!)\ \ (a+b+b+b+b+1+1+1)\,(b+a+a+a+a+1+1+1)\geqslant 64.$$

Если в обеих скобках применить AM $\geqslant$ GM для 8 чисел и в конце использовать, что $ab\geqslant 1$, задача решится.

№15. Решение: Давайте лучше проанализируем $\left(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\right)$, ибо оно выглядит слишком уродливым, чтобы работать с ним. Увидим, что оно равно:

$$a^3\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+a+1\right)=\left(a^3+1\right)\left(a^2+a+1\right).$$

То есть нам всего лишь осталось доказать, что:

$$\prod_{\text{cyc}}\left(a^3+1\right)\geqslant 8.$$

А это верно, ибо:

$$a^3+1 \geqslant 2\sqrt{a^3} \Rightarrow \prod_{\text{cyc}} \left(a^3+1\right) \geqslant 8\sqrt{(abc)^3} = 8.$$

№16. Первое решение:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 100 = s,$$

$$ab+ac+\cdots+cd = 150 = l,$$

$$3s-2l = 0 \Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2\cdots+(c-d)^2 = 0.$$

Значит $a=b=c=d=\pm 5$, ибо каждый квадрат, если не равен нулю, то больше его.

Второе решение: Понятно, что $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Давайте сделаем QM $\geqslant$ AM для (a,b,c,d):

$$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{4} = 5.$$

Произошло равенство, значит QM=AM и каждый член равен другому, то есть $a=b=c=d=\pm 5$.

№17. Решение:

$$\frac{a^2+2}{2} \geqslant \sqrt{a^3+1}.$$

Доказательство:

$$X^3+1 = (X+1)\left(X^2-X+1\right) \Rightarrow \text{AM} \geqslant \text{GM} \Rightarrow \frac{(X+1)+\left(X^2-X+1\right)}{2} = \frac{X^2+2}{2} \geqslant \sqrt{X^3+1}.$$

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} \geqslant \frac{4}{3} \Rightarrow (!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Сделаем сумму:

$$(!)\ \ 2a^2+2b^2+2c^2+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geqslant a^2b^2c^2+abc = 72,$$

$$\text{AM} \geqslant \text{GM} \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} 2a^2 \geqslant 24,\ \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \geqslant 48.$$

Равенство выполняется при:

$$a=b=c=2 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} = \frac{4}{3}.$$

№18. Решение: Сперва стоит увидеть, что по AM $\geqslant$ GM:

$$\frac{\sqrt{6ab+1}+\sqrt{6ab+1}+\frac{1}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b} = \sqrt[3]{\frac{6ab+1}{a}}.$$

Проделаем это с каждым и попробуем доказать, что:

$$\frac{1}{abc} \geqslant \frac{2\sum_{\text{cyc}}\left(\sqrt{6ab+1}\right)+\sum\limits_{\text{cyc}}\frac{1}{a}}{3}.$$

Умножим с обеих сторон на 3:

$$(!)\ \ \frac{3}{abc} \geqslant 2\sum_{\text{cyc}}\left(\sqrt{6ab+1}\right)+\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}.$$

А вообще, понятно, что:

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{1}{abc}.$$

Теперь осталось доказать, что:

$$\frac{1}{abc} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{6ab+1}.$$

Справа мы имеем неприятные корни, избавиться от них поможет QM $\geqslant$ AM. Возьмём правую часть как AM, то есть:

$$3\sqrt{\frac{6\left(ab+bc+ac\right)+3}{3}} \geqslant \sqrt{6ab+1}+\sqrt{6bc+1}+\sqrt{6ac+1} \Rightarrow 3\sqrt{3} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{6ab+1}.$$

Попробуем доказать, что:

$$\frac{1}{abc} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Из начального условия следует, что:

$$1=ab+bc+ac \geqslant 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant abc \Rightarrow \frac{1}{abc} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Без сомнений, задача очень долгая. Но никаких сложных манёвров не было использовано, просто изначально хотелось бы чуть улучшить вид слева, это мы сделали с помощью AM $\geqslant$ GM. Лично я искал разные вариации так, чтобы члены при использовании AM $\geqslant$ GM были равны при $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ибо при таком равенстве следует, что $ab+bc+ac=1$.

4 КБШ и КБШ Дробный

1st Level:

№5. Решение: Воспользуемся базовой идеей:

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}=\frac{x^2}{x(y+2z)}+\frac{y^2}{y(z+2x)}+\frac{z^2}{z(x+2y)}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+xz)}.$$

$$(!)\ \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+xz)}\geqslant 1\ \Rightarrow (!)\ (x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+xz).$$

Последний шаг вы уже решали довольно часто.

№6. Решение: Ещё раз воспользуемся этой идеей:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{a^4}{a(b+c)}+\frac{b^4}{b(a+c)}+\frac{c^4}{c(a+b)}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ac)},$$

$$(!)\ \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ac)}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}\ \Rightarrow (!)\ (a^2+b^2+c^2)\geqslant(ab+bc+ac).$$

Доказать конечное утверждение не составляет труда.

№7. Решение: Давайте перекинем 50 и немного поразмышляем:

$$(!)\ 50(x^2+y^2+z^2)\geqslant(3x+4y+5z)^2.$$

Довольно очевидно, что тут нельзя использовать КБШ дробного вида, тогда давайте найдём применение для обычного КБШ. Надо как-то разделить 50 как сумму каких-то чисел, чтобы выполнялось следующее:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(3x+4y+5z)^2,\ a^2+b^2+c^2=50.$$

Само по себе $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2$, значит, $a=3, b=4, c=5$, и ведь действительно $3^2+4^2+5^2=50$. Мы подобрали коэффициенты и можем заключить, что:

$$50(x^2+y^2+z^2)=(3^2+4^2+5^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(3x+4y+5z)^2.$$

№8. Решение: Попробуем КБШ:

$$T\cdot(x^2+y^2)\geqslant(10x+y)^2=1.$$

Понятно, что $T=10^2+1^2$, то есть

$$(10^2+1^2)(x^2+y^2)\geqslant(10x+y)^2=1.$$

И минимум выражения будет $\frac{1}{101}$. Теперь найдём пример с помощью случая равенства. Оно выполняется тогда, когда $\frac{x}{10} = \frac{y}{1}$. Соответственно, $x = \frac{10}{101}$ и $y = \frac{1}{101}$.

№9. Решение: Ясно, что тут используется КБШ. Нужно умножить что-то на левой стороне и придумать неравенство:

$$(x^2 + y^2)\left(\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}\right) \geqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2.$$

Иными словами, $\left(x \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{b}}\right) = \sqrt{a} \;\Rightarrow\; x^2 = \sqrt{b}$, так же получим, что $y^2 = \sqrt{a}$. Соответственно:

$$\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}\right) \geqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}\right) \geqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right).$$

№10. Решение: Было бы славно умножить данные выражения и использовать КБШ:

$$16 \cdot 1 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant (1 + 1 + \cdots + 1)^2 = n^2.$$

Получается, что $4 \geqslant n \geqslant 4$, то есть $n = 4$. Тогда в то же время неравенство превратится в следующее:

$$16 \cdot 1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \geqslant (1 + 1 + 1 + 1)^2 = 4^2.$$

Круг замкнулся, значит, происходит равенство, откуда $\sqrt{\frac{x_1}{\frac{1}{x_1}}} = \sqrt{\frac{x_2}{\frac{1}{x_2}}} = \sqrt{\frac{x_3}{\frac{1}{x_3}}} = \sqrt{\frac{x_4}{\frac{1}{x_4}}}$. То есть, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4$.

2nd Level:

№5. Решение: Известно, что $a + b + c \geqslant 3$. Делаем сразу дробный КБШ:

$$\frac{a^2}{a+b+1} + \frac{b^2}{b+c+1} + \frac{c^2}{c+a+1} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} \geqslant 1.$$

№6. Решение: Заметим интересный факт: все выражения под корнем слева в сумме дадут выражение под корнем справа. Это значит, что мы можем как-то вытащить его через КБШ:

$$((x+7) + (37-2x) + (3x+93))(2^2 + 3^2 + 6^2) \geqslant (2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93})^2,$$

$$\Rightarrow\; 2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} \leqslant 7\sqrt{2x+137}.$$

То есть, сами по себе наши выражения по КБШ могут быть равны только в том случае, когда:

$$\frac{\sqrt{x+7}}{2}=\frac{\sqrt{37-2x}}{3}=\frac{\sqrt{3x+93}}{6}.$$

Откуда следует ответ: $\boxed{x=5}$.

№7. Решение: Применим базовый приём с превращением числителя в квадрат (но тут в четвёртую степень):

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4}{c(c+2a)}\geqslant\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)^2},$$

$$\Rightarrow (!)\ (a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c).$$

Доказать данный факт не составит труда, умножим обе стороны на 2, останется доказать, что

$$(!)\ (a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(a+b+c)\Rightarrow (!)\ (a^2+b^2+c^2)+3\geqslant 2(a+b+c).$$

Это работает, ибо $a^2+1\geqslant 2a$, и так же для b, c.

№8. Решение: Построим неравенство от конца:

$$\left(ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)}\right)^2\leqslant\left(A+2(ab+bc+ac)\right)\left(B+2(xy+yz+xz)\right).$$

Мы придумали какие-то A и B, теперь подумаем, чем на самом деле они могли бы быть. Лично я вижу, что $(A+2(ab+bc+ac))$ могло бы идеально дополниться и стать чем-то проще, если бы $A=a^2+b^2+c^2$, в результате чего выражение станет компактным квадратом — $(a+b+c)^2$. Попробуем внедрить это и попробуем то же самое с $B=x^2+y^2+z^2$:

$$\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ac\right)\right)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+xz\right)\right)\geqslant$$

$$\left(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,(x^2+y^2+z^2)}+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)}\right)^2.$$

Теперь давайте попробуем показать, что $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,(x^2+y^2+z^2)}\geqslant(ax+by+cz)$, используя КБШ:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,(x^2+y^2+z^2)}\geqslant\left(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\right).$$

Получается, мы имеем, что:

$$\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ac\right)\right)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+xz\right)\right)\geqslant$$

$$\left(ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)}\right)^2.$$

Наконец, вернём квадраты на место:

$$(a+b+c)^2\cdot(x+y+z)^2\geqslant\left(ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)}\right)^2,$$

$$\Rightarrow\ (a+b+c)(x+y+z)\geqslant ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)},$$

$$\Rightarrow\ a+b+c\geqslant ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+xz)\,(ab+bc+ac)}.$$

Идеально.

№9. Решение: Подстроим под КБШ:

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)(x+y+z) \geqslant \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2.$$

Очевидно, что $x+y+z=a+b+c$, то есть верно следующее:

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)(a+b+c) \geqslant \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \geqslant \frac{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2}{(a+b+c)},$$

$$\Rightarrow \ (!)\ \frac{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2}{(a+b+c)} \geqslant \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right),$$

$$\Rightarrow \ (!)\ \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \geqslant a+b+c.$$

Теперь подстроим и данное утверждение под КБШ:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(x+y+z) \geqslant (a+b+c)^2.$$

Понятно, что $x+y+z=a+b+c$, тогда работает следующее:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(a+b+c) \geqslant (a+b+c)^2,$$

$$\Rightarrow \ \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

Что и требовалось доказать.

№10. Решение: Решаем от противного. Пусть две суммы будут меньше 1 одновременно, в ином случае данное неравенство будет не выполняться. Теперь докажем, что изначальное неравенство в этом случае выполняться не будет. Сделаем замену, пусть $a=\sum\limits_{\text{cyc}} a_n^2$ и $b=\sum\limits_{\text{cyc}} b_n^2$, тогда выполняется, что:

$$1=((1-a)+a)((1-b)+b) \geqslant \left(\sqrt{(1-a)(1-b)}+\sqrt{ab}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \ 1 \geqslant \sqrt{(1-a)(1-b)}+\sqrt{ab} \geqslant \sqrt{(1-a)(1-b)}+\sum_{\text{cyc}} a_n b_n \ \left(\text{По КБШ, } \sqrt{ab} \geqslant \sum_{\text{cyc}} a_n b_n\right),$$

$$1-\sum_{\text{cyc}} a_n b_n \geqslant \sqrt{(1-a)(1-b)},$$

$$\Rightarrow \left(1-\sum_{\text{cyc}} a_n b_n\right)^2 \geqslant (1-a)(1-b),$$

$$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1)^2 \geqslant \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-1\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2-1\right).$$

А это противоречит изначальному условию.

№11. Решение: Пусть $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Подставим под неравенство $x=1$, получим, что $p(1)^2 \geqslant 1$, то есть:

$$(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)^2 \geqslant 1.$$

Теперь посмотрим, что из себя представляет неравенство в общем случае:

$$(!)\ p\left(\frac{1}{x}\right)\cdot p(x) \geqslant 1,$$

$$\Rightarrow (!)\ A=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)\left(a_n\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^n+a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+a_0\right) \geqslant 1.$$

Прямой намёк на КБШ, давайте его применим:

$$A \geqslant (a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)^2 \geqslant 1.$$

Решено.

3rd Level:

№5. Решение: Выражение под корнем так и кричит, чтобы его использовали с КБШ, но для начала давайте поймём, каким образом, ибо выражение справа выглядит довольно уродливо.

Первым делом перекинем $ax+by+cz$ на правую сторону и раскроем выражение (это делается, чтобы сохранить красивый корень):

$$\frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)=a\cdot\frac{2y+2z-x}{3}+b\cdot\frac{2z+2x-y}{3}+c\cdot\frac{2x+2y-z}{3}.$$

Теперь заметим, что для этого можно использовать КБШ следующим образом:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{2x+2y-z}{3}\right)^2} \geqslant a\cdot\frac{2y+2z-x}{3}+b\cdot\frac{2z+2x-y}{3}+c\cdot\frac{2x+2y-z}{3}.$$

Давайте тогда попробуем доказать, что первоначальный корень будет больше или равен данному выражению:

$$(!)\ \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)} \geqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{2x+2y-z}{3}\right)^2},$$

$$\Rightarrow \ (!) \ \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \sqrt{\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{2x+2y-z}{3}\right)^2}.$$

Извлечём корни и раскроем выражение справа. На удивление, выражения равны.

Комментарий: Идеей в этой задаче является то, что мы не используем КБШ, как только видим красивый корень. Вместо этого нам нужно немного "приготовить" правую часть неравенства так, чтобы в будущем было выгодно применить неравенство.

№6. Решение: Попробуем преобразовать выражение, чтобы в числителе стояла переменная. Для этого обратим внимание на одну дробь:

$$\frac{1}{2-a}.$$

Можно увидеть, что можно отнять $\frac{1}{2}$ и получить:

$$\frac{\frac{a}{2}}{2-a} = \frac{a}{2(2-a)}.$$

Давайте проделаем так с каждой дробью:

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} = \left(\frac{a}{2(2-a)}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{2(2-b)}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{2(2-c)}+\frac{1}{2}\right),$$

$$\Rightarrow \ (!) \ \frac{a}{2(2-a)}+\frac{b}{2(2-b)}+\frac{c}{2(2-c)} \geqslant 3-\frac{1}{2}\cdot 3,$$

$$\Rightarrow (!) \ \frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \geqslant 3.$$

Теперь можно попробовать использовать КБШ, умножим числитель до квадрата:

$$\frac{a^2}{2a-a^2}+\frac{b^2}{2b-b^2}+\frac{c^2}{2c-c^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\Rightarrow \ (!) \ \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)} \geqslant 3,$$

$$\Rightarrow \ (!) \ (a+b+c)^2 \geqslant 6(a+b+c)-3\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

$$\Rightarrow \ (!) \ (a+b+c)^2+9 \geqslant 6(a+b+c).$$

Последнее неравенство легко доказать, используя AM $\geqslant$ GM.

№7. Решение: Жуткая асимметрия, сделаем симметрию. Заметим, что слева стоит $a-1$, а справа лишь a, тогда почему бы не взять $a = a-1+1$?

$$\sqrt{((a-1)+1)(1+bc)} \geqslant \sqrt{a-1}+\sqrt{bc}.$$

Давайте тогда попробуем доказать, что $\sqrt{bc} \geqslant \sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$.

По сути, $b \cdot c = ((b-1)+1)(1+(c-1))$, давайте воспользуемся этим ещё раз:

$$b \cdot c = ((b-1)+1)(1+(c-1)) \geqslant \left(\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \sqrt{bc} \geqslant \sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}.$$

Доказано.

5 Условия и замены

5.1 abc=1

№1. Решение: Воспользуемся заменой, задача превратится в

$$(!)\ (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant xyz.$$

Эта задача уже была — неравенства о средних, 2 level, 11-я задача.

№2. Решение: Обойдёмся без замены. Умножим каждую дробь на $(abc)^2$ с целью избавиться от кубов в знаменателях.

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Используем КБШ дробного вида, останется показать, что

$$\frac{(bc+ac+ab)^2}{6(bc+ac+ab)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Этот факт очевиден, по причине того, что $bc+ac+ab \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3$.

№3. Решение: Замену делать не станем, а давайте лучше применим сразу КБШ, чтобы избавиться от отдельных квадратов.

$$\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^2}{1} + \frac{\left(b+\frac{1}{c}\right)^2}{1} + \frac{\left(c+\frac{1}{a}\right)^2}{1} \geqslant \frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}.$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant 9\left(a+b+c+1\right).$$

Понятно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3$, достаточно применить AM $\geqslant$ GM. Пусть $p = a+b+c$,

$$(!)\ (p+3)^2 \geqslant 9(p+1),$$

$$(!)\ p^2 \geqslant 3p,$$

$$(!)\ p \geqslant 3.$$

Обратно применим AM $\geqslant$ GM, и задача решена.

(Ardak Mirzakhmedov)

№4. Решение: Применим данную замену $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{t}{z}, d = \frac{x}{t}$.

$$(!)\ \frac{x+z}{x+y} + \frac{y+t}{y+z} + \frac{z+x}{z+t} + \frac{t+y}{t+x} \geqslant 4.$$

Заметим, что мы имеем две пары дробей с одинаковыми числителями.

$$\frac{x+z}{x+y} + \frac{z+x}{z+t} = (z+x)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t}\right),$$

$$\frac{y+t}{y+z} + \frac{t+y}{t+x} = (t+y)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x}\right).$$

Как раз-таки, можно тут увидеть, что $(x+y)+(z+t)=(y+z)+(t+x)$, очень желательно получить общий знаменатель. Прибегнём к использованию дробного КБШ.

$$(z+x)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t}\right) \geqslant \frac{4(z+x)}{x+y+z+t}.$$

Аналогично,

$$(t+y)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x}\right) \geqslant \frac{4(t+y)}{x+y+z+t}.$$

Суммируя неравенства, мы получаем желаемое.

№5. Решение: Сделаем следующую замену:

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{t}, d = \frac{t}{m}, e = \frac{m}{x}.$$

Задача преобразуется в такое месиво:

$$(!)\ \sum_{\text{cyc}} \frac{\frac{x}{y} + \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{z} + \frac{x}{m}} \geqslant \frac{10}{3}.$$

Заметим, что поделив на x сверху и снизу в первой дроби, мы добьёмся интересной картины:

$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m}}.$$

Как можно видеть, мы видим абсолютно разные переменные снизу и сверху, а в итоге сумма их всех будет равна $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}$, и это верно для каждой дроби в предыдущей сумме. Давайте полностью запишем нашу сумму:

$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m}} + \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{t} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{z} + \frac{1}{m} + \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t}}.$$

Прибавив по единице для каждой дроби, мы заметим, что все они будут иметь одинаковый числитель. Давайте так и сделаем, и получим новое неравенство:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{z} + \frac{1}{m} + \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t}} \geqslant \frac{25}{3}.$$

Можем вывести общий числитель за скобку и применить КБШ дробного вида.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m}} + \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{1}{m} + \frac{1}{y}} + \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t}}\right) \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{25}{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{m}\right)}\right)=\frac{25}{3}.$$

№6. Решение: На удивление, нам не придётся делать классическую замену, а прибегнуть к таким махинациям:

$$a^5=x^3, b=y^3, c=z^3.$$

Есть две причины, почему я решил так сделать. Во-первых, так мы можем уравнять степени в знаменателях, там мы видим a^5, b^5, c^5 и неожиданно abc. Если мы сделаем такую замену, это получится. Во-вторых, после такой замены условие $abc=1$ никак не изменится. По-прежнему $xyz=1$.

$$(!)\ \frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{x^3+z^3+xyz}\leqslant 1.$$

Знакомая картина? Эта задача уже была — неравенства о средних, 2 level, 20-я задача.

№7. Решение: Выглядит страшно, эти кубические корни, непонятные степени. Но применив обычную замену и AM $\geqslant$ GM, будут происходить красивые вещи ;)

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}=\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}},$$

$$2+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{(x+y+z)(xy+yz+xz)}{xyz}-1.$$

Однако, $(x+y+z)(xy+yz+xz)\geqslant 9xyz$, соответственно

$$\frac{(x+y+z)(xy+yz+xz)}{xyz}-1=\frac{(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz}{xyz}\geqslant\frac{8(x+y+z)(xy+yz+xz)}{9xyz}.$$

То есть, осталось доказать что

$$3\left(\frac{8(x+y+z)(xy+yz+xz)}{9xyz}\right)^{\frac{2}{3}}\geqslant 4\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

$$\Rightarrow\ (!)\ 3\left((x+y+z)(xy+yz+xz)\right)^{\frac{2}{3}}\geqslant 9^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{xyz}\,(x+y+z)\,.$$

$$\Rightarrow\ (!)\ 27(x+y+z)^2(xy+yz+xz)^2\geqslant 81xyz\,(x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (x+y+z)^2(xy+yz+xz)^2\geqslant 3xyz\,(x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow\ (!)\ (xy+yz+xz)^2\geqslant 3xyz(x+y+z).$$

Последнее неравенство можно доказать кучей разных способов.

$$(!)\ (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2+2xyz(x+y+z)\geqslant 3xyz(x+y+z),$$

$$(!)\ (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2\geqslant xyz(x+y+z).$$

Завершаем доказательство этими неравенствами:

$$\frac{(xy)^2+(yz)^2}{2}\geqslant xyz\cdot y,$$

$$\frac{(yz)^2+(x)^2}{2} \geqslant xyz\cdot,$$
$$\frac{(x)^2+(xy)^2}{2} \geqslant xyz\cdot x.$$

(Ardak Mirzakhmedov)

№8. Решение:

$$a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$$

Заметим, что просто применив КБШ, нам не получится доказать неравенство. Тогда почему бы не попробовать взять не вторую, а четвёртую степень у числителя?

$$\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{z^2}{xz+y^2} = \sum_{\text{cyc}} \frac{z^4}{xz^3+y^2z^2}.$$

Через дробный КБШ:

$$\Rightarrow\ (!)\ \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sum\limits_{\text{cyc}}\left(x^3y+x^2y^2\right)} \geqslant \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\ (!)\ 2x^4+2y^4+2z^4+4x^2y^2+4y^2z^2+4x^2z^2 \geqslant 3x^3y+3y^3z+3z^3x+3x^2y^2+3y^2z^2+3x^2z^2$$
$$\Rightarrow\ (!)\ 2x^4+2y^4+2z^4+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \geqslant 3x^3y+3y^3z+3z^3x.$$

Можно увидеть, что $x^4+x^2y^2 \geqslant 2x^3y$, можем применить с остальными, и останется доказать, что

$$x^4+y^4+z^4 \geqslant x^3y+y^3z+z^3x.$$

Можно использовать следующие неравенства по типу $x^4+x^4+x^4+y^4 \geqslant 4x^3y$, и неравенство будет доказано.

№9. Решение: a) Используя $abc=1$ и неравенство AM $\geqslant$ HM,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a+b} = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

b) Достаточно показать, что $a^2b+b^2c+c^2a \geqslant ab+bc+ca$. Для этого пусть $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$ и $c=\frac{z}{x}$ для некоторых $x,y,z>0$. После некоторой алгебры всё сводится к доказательству $x^3+y^3+z^3 \geq x^2y+y^2z+z^2x$. Но это сразу следует из AM $\geqslant$ GM, если заметить, что $x^3+x^3+y^3 \geqslant 3x^2y$ и применить аналогичные неравенства.

5.2 Техника Cauchy Reverse

№1. Решение: Применим технику следующим образом:

$$\frac{a^2+3ab}{a+b} = a+\frac{2ab}{a+b}.$$

Таким образом, применив это для каждой дроби, мы получим:

$$(!)\ \frac{2ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\leqslant 1.$$

Увеличим дроби, применив AM $\geqslant$ GM для знаменателей:

$$\Rightarrow\ (!)\ \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant 1.$$

Что очевидно: достаточно заменить единицу суммой a, b, c.

№2. Решение: Преображение следующего порядка было бы полезным:

$$\frac{1}{a^3+2}=\frac{1}{2}-\frac{a^3}{2a^3+4}.$$

Применив это для всех дробей, получим, что придётся доказать следующее:

$$\frac{1}{2}\geqslant\frac{a^3}{2a^3+4}+\frac{a^3}{2a^3+4}+\frac{a^3}{2a^3+4}.$$

Давайте сделаем такое неравенство:

$$a^3+a^3+1+1+1+1\geqslant 6a.$$

(Равенство достигается при $a=b=c=1$, отсюда догадка придумать неравенство, которое будет равенством при этих значениях).

Уменьшив таким образом знаменатели, можно убедиться, что с помощью условия $a^2+b^2+c^2=3$ задача решается.

№3. Решение: Ну и уродство. Избавимся от отрицательных элементов, прибавив единицу к каждой дроби на левой стороне:

$$(!)\ \frac{3a^2}{2a^2+bc}+\frac{3a^2}{2b^2+ca}+\frac{3c^2}{2c^2+ab}\leqslant 1+1+1=3.$$

Теперь можно применить нашу шедевральную замену:

$$\frac{3a^2}{2a^2+bc}+\frac{3a^2}{2b^2+ca}+\frac{3c^2}{2c^2+ab}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}bc}{2a^2+bc}+\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}ca}{2b^2+ca}+\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}ab}{2c^2+ab}$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \frac{\frac{3}{2}bc}{2a^2+bc}+\frac{\frac{3}{2}ca}{2b^2+ca}+\frac{\frac{3}{2}ab}{2c^2+ab}\geqslant\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\geqslant 1.$$

Будем делать дробный КБШ:

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{(bc)^2}{2a^2bc+(bc)^2}+\frac{(ca)^2}{2b^2ca+(ca)^2}+\frac{(ab)^2}{2c^2ab+(ab)^2}\geqslant\frac{(ab+bc+ac)^2}{(ab+bc+ac)^2}=1.$$

№4. Решение: Каждую дробь слева можно записать вот так:

$$\frac{1}{x_i+1}=1-\frac{x_i}{x_i+1}.$$

Отсюда:

$$(!)\ n\leqslant\frac{n}{1+\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}}+\frac{x_1}{x_1+1}+...+\frac{x_n}{x_n+1}.$$

Пока не будем трогать наших новых чудиков справа, посмотрим, как можно по-другому записать изначальную дробь на этой стороне:

$$\frac{n}{1+\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}}=\frac{n\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right)}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}.$$

Казалось бы, мы только усложнили дробь, которая и так была не самой красивой, но это поможет для общего понимания.

Дело в том, что $\sum\limits_{\text{сус}}\frac{x_i}{x_i+1}$ можно запихнуть в AM $\geqslant$ HM:

$$\frac{x_1}{x_1+1}+...+\frac{x_n}{x_n+1}\geqslant\frac{n^2}{\frac{x_1+1}{x_1}+...+\frac{x_n+1}{x_n}}=\frac{n^2}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}.$$

Небо стало ясным: получили мы общие знаменатели. Посмотрим, к чему это нас привело:

$$\frac{n}{1+\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}}+\frac{x_1}{x_1+1}+...+\frac{x_n}{x_n+1}\geqslant\frac{n\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right)}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}+\frac{n^2}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}=$$

$$\frac{n^2+n\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right)}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}=$$

$$\frac{n\left(n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}\right)}{n+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}=n.$$

№5. Решение: Перепишем каждую дробь:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}=\left(1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\right)+\left(1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}\right)+\left(1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}\right)=$$

$$3-\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}\right).$$

Из этого следует, что

$$(!)\ 3\geqslant\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}.$$

Очень красиво, ибо мы имеем одинаковое выражение в числителях каждой дроби, а значит можно сделать какой-то трюк с КБШ, который будет работать одновременно для каждой дроби. Попробуем придумать такой КБШ, чтобы $x^2+y^2+z^2$ стало знаменателем, нежели числителем, чтобы мы могли просто суммировать дроби. Для этого можно сделать следующие неравенства через КБШ:

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\geqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

$$\left(x^2+y^5+z^2\right)\left(x^2+\frac{1}{y}+z^2\right)\geqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

$$\left(x^2+y^2+z^5\right)\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)\geqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

Останется лишь доказать, что

$$3\geqslant\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\Rightarrow\ (!)\ 1\geqslant\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x+y+z}{xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)}.$$

Заканчиваем доказательство фактом, что $x^2+y^2+z^2\geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant 3$. Отсюда $x^2+y^2+z^2\geqslant x+y+z$ и $xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)\geqslant x+y+z$.

5.3 Неравенства в треугольнике

5.3.1 Просто стороны

№1. Решение: Пусть $a=x+y, b=x+z, c=y+z$, неравенство эквивалентно

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{x+y}{4x+2y}.$$

Умножая на 4 с обеих сторон и упрощая, неравенство становится

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{y}{2x+y}\geq 1,$$

что эквивалентно

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{y^2}{2xy+y^2}\geq 1,$$

то есть неравенству Титу.

№2. Решение: После упрощения мы получим

$$(!)\ a^3b^2-a^3bc+c^3a^2-b^3ca-c^3ab+b^3c^2\geqslant 0.$$

Используя, что

$$a=y+z,\quad b=x+z,\quad c=x+y,$$

мы получаем

$$(!)\ x^5+x^4z-2x^3y^2-2x^2z^3+xy^4+y^5-2y^3z^2+yz^4+z^5\geqslant 0.$$

Далее можно делать следующие неравенства:

$$x^5 + xy^4 \geqslant 2\sqrt{x^6y^4} = 2x^3y^2.$$

И так далее...

№3. Решение: Заменив a, b, c в неравенстве, получим эквивалентное ему неравенство:

$$\frac{x(x+y+z)}{yz} \geqslant \frac{9(3x-y-z)}{4y+z}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)(4y+z)}{yz} \geqslant 9(3x-y-z)$$

$$\Leftrightarrow x(x+y+z)(4y+z) \geqslant 9yz(3x-y-z)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y + x^2z + 4xy^2 + xyz \geqslant 9y^2x + 9yz^2 + 9y^2z + 5xyz \geqslant 27xyz.$$

Последнее неравенство можно получить, сложив три неравенства Коши:

$$4x^2y + 9z^2y \geqslant 12xyz, \quad x^2 + 9y^2 \geqslant 6xyz, \quad 4y^2x + z^2x \geqslant 4xyz.$$

Равенство достигается, когда $x : y : z = 3 : 1 : 2$ или $a : b : c = 4 : 3 : 5$.

5.3.2 Не просто стороны

№1. Решение: Пусть e, f — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника. Разделим задачу на два случая:

Случай 1: x_1 и x_2 — противоположные стороны. Тогда x_3 и x_4 — тоже противоположные стороны. Из неравенства Птолемея следует, что

$$\frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4) \geqslant \frac{1}{2}ef \geqslant \frac{1}{2}ef \cdot \sin(e, f) = S.$$

Пусть (e, f) означает угол, образованный между диагоналями e, f. В этом случае мы имеем неравенство тогда и только тогда, когда выпуклый четырёхугольник описанный и ортодиагональный, ибо только в этом случае будет равенство по Птолемею и синус угла будет иметь наибольшее значение.

Случай 2: x_1 и x_2 не являются противоположными сторонами. Тогда x_3 и x_4 также не являются противоположными. Значит,

$$\frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4) \geqslant \frac{1}{2}[x_1x_2\sin(x_1, x_2) + x_3x_4\sin(x_3, x_4)] = S.$$

В этом случае равенство имеет место тогда и только тогда, когда углы между x_1, x_2 и x_3, x_4 являются прямыми углами.

(huricane, aops.com)

№2. Решение: То есть надо показать, что $R \geqslant 2r$. Сделаем это через замену!

$$R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} \geqslant 2\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} = 2r.$$

Несколько трансформаций, и останется показать, почему

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

Это довольно очевидное неравенство, которое доказывается путём использования AM $\geqslant$ GM для каждой суммы в скобках.

№3. Решение: Будем отталкиваться от того, что треугольник построить не получится только тогда, когда $t_i \geqslant t_j + t_k$. Допустим, какие-то t_1, t_2, t_3 не оказались такой тройкой, и пусть, скажем, $t_3 \geqslant t_1 + t_2$. Для удобства сделаем замену: $A = t_4 + t_5 + \ldots + t_n$ и $B = \frac{1}{t_4} + \frac{1}{t_5} + \ldots + \frac{1}{t_n}$. Тогда нужно будет доказать следующее:

$$(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right) + A\cdot\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right) + B\cdot(t_1+t_2+t_3) + AB \geqslant n^2+1.$$

Обратим внимание на то, что при $n = 3$ нам бы пришлось доказать, что:

$$(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right) \geqslant 10,$$

так что докажем это и используем здесь.

Доказательство факта:

$$(!)\ 3 + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1} + \frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2} \geqslant 10.$$

Можно заметить, что это очень симметрично, и неравенство $t_3 \geqslant t_1 + t_2$ будет полезно. Рассмотрим случай, когда $t_3 = 2x$ и $t_1 = t_2 = x$. Тогда избавимся от $\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}$, используя AM $\geqslant$ GM:

$$\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} \geqslant 2.$$

$$(!)\ \frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1} + \frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2} \geqslant 5.$$

Хочется использовать $\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1}$ и $\frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2}$ в этом неравенстве, но мы получим, что они будут больше или равны $2+2 = 4$, что не является 5. Придётся применить хитрость. Заметим, что это неравенство помогает нам использовать AM $\geqslant$ GM. Для этих дробей получаем числа $0.5, 2, 0.5, 2$. Значит, дроби $\frac{t_3}{t_1}$ и $\frac{t_3}{t_2}$ придётся разделить на 4, чтобы использовать неравенство:

$$\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{4t_1} \geqslant 1, \quad \frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{4t_2} \geqslant 1.$$

$$(!)\ \frac{3}{4}\left(\frac{t_3}{t_1} + \frac{t_3}{t_1}\right) \geqslant 3, \quad \Rightarrow (!)\ \frac{t_3}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} \geqslant 4, \quad \Rightarrow (!)\ t_3\cdot(t_1+t_2) \geqslant 4t_1t_2.$$

Используем $t_3 \geqslant t_1 + t_2$:

$$t_3\cdot(t_1+t_2) \geqslant (t_1+t_2)^2 \geqslant 4t_1t_2 \text{ (AM} \geqslant \text{GM).}$$

Можно понять, что $AB \geqslant (n-3)^2$ по неравенству КБШ. Таким образом, это всё, что мы имеем про A и B. Хотелось бы иметь их произведение. В случае с $A \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + B \cdot (t_1 + t_2 + t_3)$ это можно достигнуть с помощью неравенства о средних:

$$A \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + B \cdot (t_1 + t_2 + t_3) \geqslant 2\sqrt{AB} \cdot \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)} \geqslant 2\sqrt{10} \cdot (n-3).$$

Применим всё, что мы нашли ранее:

$$(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + A \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + B \cdot (t_1+t_2+t_3) + AB \geqslant 10 + 2\sqrt{10} \cdot (n-3) + (n-3)^2,$$

$$\Rightarrow (!)\ 10 + 2\sqrt{10} \cdot (n-3) + (n-3)^2 \geqslant n^2 + 1,$$
$$\Rightarrow (!)\ (2\sqrt{10} - 6)(n-3) \geqslant 0.$$

Это верно при $n \geqslant 4$.

№4. Решение: То, что мы имеем:

$$AI^2 = (p-a)^2 + r^2 = (p-a)^2 + \frac{S^2}{p^2} = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{bc(p-a)}{p},$$

$$AD^2 = \frac{4bc \cdot p(p-a)}{(b+c)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{AI}{AD} = \sqrt{\frac{\frac{bc(p-a)}{p}}{\frac{4bc \cdot p(p-a)}{(b+c)^2}}} = \frac{b+c}{2p} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Поэтому нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}.$$

Правая часть неравенства доказывается очень просто, достаточно взять $a + b + c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2}$ и применить AM $\geqslant$ GM. Для левой части заметим, что

$$(a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) = a^3 + b^3 + c^3.$$

Поэтому нам нужно доказать, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) > a^3 + b^3 + c^3.$$

Однако,

$$(a+b)(b+c)(c+a) > a(a+b)(c+a) = a(a^2 + bc + a(b+c)) > a^2(a+b+c) > 3a^3.$$

Суммируя аналогично, получаем результат.

(Ahiles, aops.com)

№5. Решение: Используя неравенство Коши, имеем:

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)\geq(AB+BC+CA)^2=4s^2,$$

Поэтому

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geq\frac{2s^2}{[ABC]}.$$

Теперь равенство имеет место, если

$$\frac{1}{PD^2}=\frac{1}{PE^2}=\frac{1}{PF^2}\Leftrightarrow PD=PE=PF.$$

Значит, это имеет место только в том случае, если точка P является инцентром. Поскольку существует только одна такая точка, она уникальна. ■

(Karth, aops.com)

№6. Решение:

$$\frac{l_a}{\sin^2 A}=\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2(c+a-b)(a+b-c)}.$$

По КБШ:

$$2(\sum_{cyc}ab)^2\geqslant 3(2\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^2bc-\sum_{cyc}a^4)\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2bc+3\sum_{cyc}a^4\geqslant 4\sum_{cyc}a^2b^2.$$

Докажем последнее неравенство:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

$$\Rightarrow\ (!)\ \sum_{cyc}a^2bc+\sum_{cyc}a^4\geqslant 2\sum_{cyc}a^2b^2.$$

Идея: Если раскрыть неравенство $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$, выйдет, что $a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant a^2b+a^2c+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a$. Попробуем сделать из нашей задачи эту, пусть $a^4=x^3, b^4=y^3, c^4=z^3$, и используем неравенство о среднем для суммы a^2bc.

$$(!)\ x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant 2\sum_{cyc}\sqrt{x^3y^3}.$$

Это правда, ибо $x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2y+xy^2+xz^2+x^2z+yz^2+y^2z\geqslant 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{x^3z^3}+2\sqrt{z^3y^3}$.

№7. Решение: Дадим данному неравенству геометрическую интерпретацию.

Пусть на плоскости имеется отрезок $BD=2$, точка A — середина BD, пусть на этой же плоскости точка C такая, что $\angle BAC=60^\circ$ и $AC=x$, также пусть E лежит на прямой AC и такая, что $AE=y$, тогда по теореме косинусов получаем $CB=\sqrt{x^2-x+1}, CD=\sqrt{x^2+x+1}, BE=\sqrt{y^2-y+1}, DE=\sqrt{y^2+y+1}$.

Отразим симметрично точку C относительно A до параллелограмма $BDCC'$, тогда

$$C'D=CB, CD=C'B,$$

применяя неравенство Птолемея для четырёхугольника $C'DBE$ получаем

$$C'D \cdot BE + C'B \cdot DE \geqslant CE \cdot BD,$$

или

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{y^2 + y + 1} \geqslant 2(x + y).$$

(Matov, matol.kz)

1.6 Min и max

1st Level:

№5. Решение: Заметим, что можно грамотно разделить переменные и применить AM $\geqslant$ GM:

$$2x^2 + 2y^2 \geqslant 4xy,$$
$$4x^2 + z^2 \geqslant 4xz,$$
$$4y^2 + z^2 \geqslant 4yz.$$

Отсюда ответ — 4. Пример можно составить, исходя из наших неравенств, то есть $x = y = \frac{z}{2}$.

№6. Решение: Сперва можно догадаться, что $x = 3, y = 2, z = 1$ подходят под первое условие, а это значит, что мы можем доказать, что $x^3y^2z \leqslant 108$.

Давайте попробуем доказать, что $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 12x + 12y + 12z \geqslant x^3y^2z$.

Можем примерно сделать общее AM $\geqslant$ GM из всех чисел слева, но сразу его делать, конечно же, не стоит (там члены будут разными при случае равенства). Сперва посмотрим на эти члены при $x = 3, y = 2, z = 1$:

$$18 + 12 + 6 + 36 + 24 + 12,$$

можем увидеть, что они все делятся на 6, значит, можем распределить их, то есть

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^2}{3}+\frac{3y^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+6z^2+\frac{12x}{6}+\frac{12x}{6}+\frac{12x}{6}+\frac{12x}{6}+\frac{12x}{6}+\frac{12x}{6}+\frac{12y}{4}+\frac{12y}{4}+\frac{12y}{4}+\frac{12y}{4}+\frac{12z}{2}+\frac{12z}{2},$$

$$108 = \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} + \frac{3y^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + 6z^2 + 2x + 2x + 2x + 2x + 2x + 2x + 3y + 3y + 3y + 3y + 6z + 6z$$
$$\geqslant 18\sqrt[18]{2^{10} \cdot 3^6 \cdot (x^3y^2z)^4}.$$
$$\Rightarrow\ 6 \geqslant \sqrt[18]{2^{10} \cdot 3^6 \cdot (x^3y^2z)^4},$$
$$\Rightarrow\ 2^{18} \cdot 3^{18} \geqslant 2^{10} \cdot 3^6 \cdot \left(x^3y^2z\right)^4,$$
$$\Rightarrow\ 2^8 \cdot 3^{12} \geqslant \left(x^3y^2z\right)^4,$$
$$\Rightarrow\ 108 \geqslant x^3y^2z.$$

Пример: Так как в AM $\geqslant$ GM равенство достигается только тогда, когда все члены равны, отсюда $2x = 3y = 6z$, то есть $x = 3, y = 2, z = 1$.

№7. Решение: Попробуем поработать с $a = b = c = \frac{1}{2}$ и предположим, что минимум достигается при этих значениях. С самого начала понятно, что $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, и отсюда $abc \leqslant \frac{1}{8}$. Это невыгодное неравенство, а вот $\frac{1}{abc} \geqslant 8$ довольно выгодное, ибо от нас просят минимум. Избавимся от abc:

$$abc + \frac{1}{64abc} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Причина того, почему я сделал такой странный AM $\geqslant$ GM, кроется в том, что при нашем равенстве $abc = \frac{1}{8}$, а $\frac{1}{abc} = 64$, и чтобы применить AM $\geqslant$ GM, нам нужно поделить второе на 64. Осталось найти минимум $\frac{63abc}{64} + \frac{1}{4}$, а это $\frac{63}{64} \cdot 8 + \frac{1}{4} = \frac{65}{8}$. Пример: $a = b = c = \frac{1}{2}$.

№8. Решение: Без комментариев.

$$a^2 + \frac{b^2}{4} \geqslant ab,$$

$$\frac{3b^2}{4} + c^2 \geqslant bc\sqrt{3}.$$

Ответ: 1. Пример: $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

№9. Решение: Найдём максимум. Тут быстрее всего растёт a^3, тогда можно положить всё на него в надежде на огромный результат. Попробуем доказать, что $3^3 = 27 \geqslant a^3 + b^2 + c$. Дать $a \geqslant b \geqslant c$ мы не в праве, задача не симметрична, тогда поступим хитро. Пусть $x = \max(a, b, c)$. Тогда $x \geqslant 1$, в ином случае $3 > a + b + c$.

$$(!)\ 27 = (a + b + c)^3 \geqslant a^3 + b^2 + c,$$

$$(!)\ b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc \geqslant b^2 + c.$$

Если $a = \max(a, b, c)$, тогда $a^2b \geqslant b^2$ и $a^2c \geqslant c$. Если $b = \max(a, b, c)$, тогда $b^3 \geqslant b^2$ и $b^2c \geqslant c$. Если $c = \max(a, b, c)$, тогда $c^3 \geqslant c$ и $c^2b \geqslant b^2$. Пример: $(3, 0, 0)$.

Найдём минимум. Вы думали, это будет 3? Не-а, в этот раз $(1, 1, 1)$ нас не спасёт, как и $(0, 0, 3)$.

$$a^3 + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} \geqslant a,$$

$$b^2 + \frac{1}{4} \geqslant b,$$

$$\Rightarrow a^3 + b^2 + c + \frac{2}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{4} \geqslant 3.$$

Отсюда ответ: $\frac{11}{4} - \frac{2}{\sqrt{3^3}}$. Пример: $a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{10}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

№10. Решение: $(8, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ подходит. Тогда покажем, что $8 \geqslant a$.

$$\frac{15a}{16} + \left(\frac{a}{16} + b + c + \frac{1}{abc}\right) \geqslant \frac{15a}{16} + 2.$$

Отсюда $8 \geqslant a$.

2nd Level:

№5. Решение: Если уж говорят, что x хотя бы 5, давайте $x = x_1 + 5$, как и $y = y_1 + 6$, и $z = z_1 + 7$.

Соответственно, нам всё ещё приходится находить минимальное значение $x_1 + y_1 + z_1$ при $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 10x_1 + 12y_1 + 14z_1 \geqslant 15$. Я примерно думаю, что при $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$ будет минимум, ибо в том условии будет равенство. Тогда попробую доказать, что $x_1 + y_1 + z_1 \geqslant 1$.

Пусть это не так, тогда $x_1 + y_1 + z_1 < 1$, отсюда тогда

$$15 \leqslant x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 10x_1 + 12y_1 + 14z_1 < x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 14 < (x_1 + y_1 + z_1)^2 + 14 < 15.$$

Противоречие. Ответ — это 19, и пример $(5, 6, 8)$.

№6. Решение: Для удобства обозначим $x^2 = a$ и $y^2 = b$.

$$(a+b)^2 = ab(a-b)^2 = \frac{1}{4}(4ab)(a-b)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4ab + (a-b)^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(a+b)^4.$$

Отсюда ответ $\frac{1}{16}$, пример: $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}$.

№7. Решение: Пусть $u = x + y + z$ и $v = x^2 + y^2 + z^2$. Так как $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1$ и $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geqslant 0$, то имеем, что $x + y + z = u \geqslant 0$. Теперь мы можем записать $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ через u и v как $u(3v - u^2) = 2$, или $3v = \frac{2}{u} + u^2$. Теперь, применяя неравенство AM $\geqslant$ GM, получаем $3v = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + u^2 \geqslant 3$, следовательно, $v \geqslant 1$. Таким образом, минимальное значение $x^2 + y^2 + z^2$ равно 1. Пример: $(1, 0, 0)$.

№8. Решение: Перепишем уравнение:

$$a + b + c + d + e = 19 \Rightarrow a + b + c + d = 19 - e,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 99 - e^2.$$

Применим QM $\geqslant$ AM :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \geqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$
$$\Rightarrow \frac{99 - e^2}{4} \geqslant \left(\frac{19 - e}{4}\right)^2,$$
$$\Rightarrow 4(99 - e^2) \geqslant (19 - e)^2.$$

Просто решим уравнение с квадратным многочленом и найдём, что максимумом e будет $\frac{19+2\sqrt{134}}{5}$, оттуда же значения $a = b = c = d$ можно подогнать.

№9. Решение: Можем сделать несколько подборов и убедиться, что ответ, скорее всего, $\frac{2}{3}$, и пример — $(2, 2, 0, 0)$.

$$(!)\ \frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Вполне красивая картина, чтобы применить Reverse Cauchy, но для начала умножим на 4.

$$(!)\ \frac{4a}{b^3+4}+\frac{4b}{c^3+4}+\frac{4c}{d^3+4}+\frac{4d}{a^3+4}\geqslant\frac{8}{3},$$

$$(!)\ \left(a-\frac{ab^3}{b^3+4}\right)+\left(b-\frac{bc^3}{c^3+4}\right)+\left(c-\frac{cd^3}{d^3+4}\right)+\left(d-\frac{da^3}{a^3+4}\right)\geqslant\frac{8}{3},$$

$$(!)\ \frac{4}{3}\geqslant\frac{ab^3}{b^3+4}+\frac{bc^3}{c^3+4}+\frac{cd^3}{d^3+4}+\frac{da^3}{a^3+4}.$$

Будет вполне уродливо делать $b^3+1+1+1+1\geqslant 5\sqrt[5]{b^3}$, но вполне красиво сделать $\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+4\geqslant 3b^2$. Вы, возможно, заметите, что если такое провернуть с c,d, равенства же ведь не будет? Правда, но смотрите: при $c,d=0$, даже если знак снизу будет строгий, сверху будет стоять 0 в дробях, то есть мы просто покажем, что $0\leqslant 0$, это вполне легальное движение.

$$\frac{ab^3}{b^3+4}+\frac{bc^3}{c^3+4}+\frac{cd^3}{d^3+4}+\frac{da^3}{a^3+4}\leqslant\frac{ab^3}{3b^2}+\frac{bc^3}{3c^2}+\frac{cd^3}{3d^2}+\frac{da^3}{3a^2}=\frac{ab+bc+cd+da}{3}.$$

Осталось доказать, что $ab+bc+cd+da\leqslant 4$, что равно $(a+b)(c+d)$. Отлично, это прекрасный момент использовать данное:

$$(a+b)(c+d)\leqslant\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2=4.$$

Доказано!

3rd Level:

№4. Решение: Достаточно просто. Если x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy все положительны, то по $\text{AM}\geqslant\text{GM}:$ имеем:

$$\big((x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)\big)^{\frac{1}{3}}\leqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

где $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\leqslant\frac{3}{2}$, так как

$$(x+y+z)^2=1+2(xy+yz+zx)\geqslant 0\implies xy+yz+zx\geqslant-\frac{1}{2}$$

Если $x^2-yz>0$ и $y^2-zx<0$, $z^2-xy<0$, то по $\text{AM}\geqslant\text{GM}$ снова,

$$\big((x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)\big)=\big((x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)\big)\leqslant\left(\frac{x^2+xy+zx-yz-y^2-z^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2},$$

так как

$$x^2+xy+zx-yz-y^2-z^2=x^2+xy+zx+yz-(y+z)^2\leqslant x^2+xy+zx+yz\leqslant\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство просто

$$\frac{1}{2}(y-z)^2 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (x-2y)^2+(x-2z)^2 \geqslant 0$$

Таким образом, мы имеем

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy) \leqslant \frac{1}{8}$$

Равенство выполняется при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, z=0$.

№5. Решение: Это довольно очевидное неравенство, если понимать, что

$$2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)=(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right).$$

Ибо $\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$.

Понятно, что максимальное значение явно не в $(1,1,1)$. Скорее всего это $(2,0,0)$, раз уж нам дали неотрицательные числа, тогда $M=\frac{1}{2}$. Б.О.О. $a \geqslant b \geqslant c$ (от смены переменных смысл не меняется).

$$(!)\ 2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right) \geqslant (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3,$$
$$(!)\ (a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geqslant (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$

Это легко показать. Понятно, что $a \geqslant (a-b),(b-c),(a-c)$.

$$(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geqslant a\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geqslant (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$

№6. Решение: Ответ: 3. Если $a \geqslant b \geqslant c$ или $c \geqslant b \geqslant a$, то $c(b^2-c^2)(b-a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a \leqslant b(a^3+c^3+abc)$.

По AM $\geqslant$ GM имеем:

$$\sqrt[4]{b^3\left(\frac{a^3+c^3+abc}{3}\right)\left(\frac{a^3+c^3+abc}{3}\right)\left(\frac{a^3+c^3+abc}{3}\right)} \leqslant \frac{1}{4}(b^3+a^3+c^3+abc)=1 \Rightarrow a^3b+b^3c+c^3a \leqslant 3.$$

Если $a \geqslant c \geqslant b$ или $b \geqslant c \geqslant a$, то $a^3b+b^3c+c^3a \leqslant c(a^3+b^3+abc)$. Если $b \geqslant a \geqslant c$ или $c \geqslant a \geqslant b$, то $a^3b+b^3c+c^3a \leqslant a(c^3+b^3+abc)$.

№7. Решение:

$$(a-b)(b-c) \leqslant \frac{(a-b+b-c)^2}{4}=\frac{(a-c)^2}{4} \implies \left|(a-c)^3\right| \geqslant 4.$$

Б.О.О.: $a \geqslant c$

$$(a-c) \geqslant \sqrt[3]{4} \implies |a|+|b|+|c| \geqslant |a|+|c| \geqslant |(a-c)| \geqslant \sqrt[3]{4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{4}$. Пример: $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, b=0, c=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

№8. Решение: Вполне можно догадаться, что $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ — это решение. Теперь обратим внимание на следующее:

$$(a-3)^2(a+11) = a^3 + 5a^2 - 57a + 99,$$
$$(b-4)^2(b+13) = b^3 + 5b^2 - 88b + 208,$$
$$(c-5)^2(c+15) = c^3 + 5c^2 - 125c + 375.$$

Очевидно, что сумма уравнений минимизируется при $(a, b, c) = (3, 4, 5)$, поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geqslant 57a + 88b + 125c - 99 - 208 - 375 \geqslant 466.$$

№9. Решение: Очень просто. Используем, что квадраты больше или равны нулю.

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = \frac{\big((ab+bc+ad+dc)^2 + (ad-bc)^2\big)}{2} +$$
$$\frac{\big((a^2+c^2-b^2-d^2)^2 - (a^2+c^2+b^2+d^2)^2\big)}{8} \geqslant -\frac{1}{8}(a^2+c^2+b^2+d^2)^2 = \frac{1}{8}.$$

Пример: $\boxed{(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{-\sqrt{3}-1}{4}, \frac{-\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4})}$.

7 Неравенство Шура

№1. Решение: Сделаем замену $a+b=x^2$, $b+c=y^2$, $c+a=z^2$, и задача удивительным образом становится неравенством Шура.

№2. Решение: Сделаем замену $a^2=x^3$, $b^2=y^3$, $c^2=z^3$ и подставим в условие:

$$x^3+y^3+z^3+2\sqrt{x^3y^3z^3}+1 \geqslant 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{x^3z^3}+\sqrt{y^3z^3}\right)$$

Заметим, что по AM $\geqslant$ GM выполняется $\sqrt{x^3y^3z^3}+\sqrt{x^3y^3z^3}+1 \geqslant 3xyz$. Далее, подставив в изначальное неравенство и применив неравенство Шура и AM $\geqslant$ GM, получим:

$$x^3+y^3+z^3+2\sqrt{x^3y^3z^3}+1 \geqslant x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z) \geqslant 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{x^3z^3}+\sqrt{y^3z^3}\right)$$

Что и требовалось доказать.

№3. Решение: Сделаем замену $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ и домножим на xyz. Тогда неравенство, которое надо доказать, эквивалентно данному:

$$(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \leqslant xyz$$

Раскрыв скобки, получим:

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)-x^3-y^3-z^3-2xyz \leqslant xyz$$

Что верно по неравенству Шура.

№4. Решение: Положим

$$a=\frac{x}{y}, \quad b=\frac{y}{z}, \quad c=\frac{z}{x},$$

и неравенство становится:

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \leqslant 3+\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2}{yz},$$

$$\iff \sum_{\text{cyc}}(x^2y+xy^2) \leqslant 3xyz+\sum_{\text{cyc}}x^3,$$

что в точности является неравенством Шура.

№5. Решение: Заметим, что $4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \geqslant (a+b+c)^3$ по неравенству Шура. Это самый классный факт, который убивает эту задачу. Так как $(a+b)(b+c)(a+c)=8$, то

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)} \leqslant \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3}.$$

Отсюда $a+b+c \geqslant 3$. Умножим требуемое в доказательстве неравенство на 4 с обеих сторон. Прибавим направо 11, а налево $11abc$ (просто потому, что $abc \leqslant 1$ по AM $\geqslant$ GM).

$$(!)\ 4(a^3+b^3+c^3)+15abc+\frac{432}{(a+b+c)^3} \geqslant 43,$$

$$(!)\ (a+b+c)^3\frac{432}{(a+b+c)^3} \geqslant 43.$$

При $a=b=c=1$ очевидно происходит равенство, и здесь $(a+b+c)^3=27$ и $\frac{432}{(a+b+c)^3}=16$. В таком случае можем применить такое неравенство:

$$\frac{16(a+b+c)^3}{27}+\frac{432}{(a+b+c)^3} \geqslant 32.$$

Осталось доказать, что $\frac{11(a+b+c)^3}{27} \geqslant 11$. Это очевидно, ибо $a+b+c \geqslant 3$.

№6. Решение: Пусть $x, y, z = |a|, |b|, |c|$ соответственно. Тогда по неравенству Шура:

$$x^3+y^3+z^3+6xyz \geqslant x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

Прибавив к обеим сторонам $3(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))$, получим:

$$(x+y+z)^3 \geqslant 4(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)) \geqslant 4|a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2| = 4|(a-b)(b-c)(c-a)| = 4.$$

Откуда

$$(|a|+|b|+|c|)^3 \geqslant 4 \implies |a|+|b|+|c| \geqslant \sqrt[3]{4}$$

Ответ: $\sqrt[3]{4}$. Пример: $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, b=0, c=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

(rightways, matol.kz)

№7. Решение: Равенство, заданное в условии, эквивалентно равенству:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$$

Пусть $\frac{1}{a+1}=x$, $\frac{1}{b+1}=y$, $\frac{1}{c+1}=z$. Тогда

$$a=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x}, \quad b=\frac{1-y}{y}=\frac{x+z}{y}, \quad c=\frac{1-z}{z}=\frac{x+y}{z}.$$

Таким образом, числа a, b, c заменяются на числа $\frac{x+y}{z}$, $\frac{y+z}{x}$, $\frac{z+x}{y}$. Заменяя этими числами в неравенстве

$$ab+bc+ca \geqslant 2(a+b+c),$$

сокращая, получаем неравенство Шура:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

Что и требовалось доказать.

(rightways, matol.kz)

№8. Решение: Необходимо доказать неравенство:

$$2 + 9(xyz)^2 \geqslant 7(xyz)(x + y + z).$$

Пусть

$$xy = a, \quad yz = b, \quad zx = c,$$

$$a + b + c = p = 1, ab + bc + ca = q, abc = r.$$

Теперь нужно доказать, что

$$2 + 9r \geqslant 7q.$$

По неравенству Шура известно, что

$$1 + 9r = p^3 + 9r \geqslant 4q.$$

Таким образом, нужно доказать, что

$$p^2 = 1 \geqslant 3q,$$

что также верно. Доказано.

(Zehra19, aops.com)

8 Неравенство Гёльдера

№1. Решение: По Гёльдеру верно неравенство

$$\left(a^{2024}+b^{2024}+c^{2024}+d^{2024}\right)\underbrace{(1+1+1+1)(1+1+1+1)\ldots(1+1+1+1)}_{1011}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\sqrt[1012]{a^{2024}}+\sqrt[1012]{b^{2024}}+\sqrt[1012]{c^{2024}}+\sqrt[1012]{d^{2024}}\right)^{1012}=$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{1012}.$$

Подставим значение $a^{2024}+b^{2024}+c^{2024}+d^{2024}=4$:

$$4^{1012}\geqslant\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{1012}\leftrightarrow 4\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Причём равенство выполняется при $a=b=c=d=1$.

№2. Решение: По неравенству Гёльдера имеем:

$$\left(\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\right)(a+b+c)\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\geqslant(1+1+1)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\right)\cdot 2(a+b+c)^2\geqslant 27.$$

Откуда следует исходное неравенство.

№3. Решение: По Гёльдеру верно:

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}}+\frac{ca}{\sqrt{2b^2+ca}}+\frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}}\right)\left(\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}}+\frac{ca}{\sqrt{2b^2+ca}}+\frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}}\right)$$

$$\left(ab\left(2c^2+ab\right)+ca\left(2b^2+ca\right)+bc\left(2a^2+bc\right)\right)\geqslant(ab+ca+bc)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}}+\frac{ca}{\sqrt{2b^2+ca}}+\frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}}\right)^2(ab+ca+bc)^2\geqslant(ab+ca+bc)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}}+\frac{ca}{\sqrt{2b^2+ca}}+\frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}}\right)^2\geqslant ab+ca+bc.$$

Откуда следует исходное неравенство.

№4. Решение: По Гёльдеру верно неравенство:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)$$

$$\left(a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)\right)\geqslant(a+b+c)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)}}.$$

Достаточно доказать, что

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)}}\geqslant 1\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(a+b+c)^3\geqslant a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+c^2a+ca^2+b^2c+bc^2\right)+6abc\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^2b+ab^2+c^2a+ca^2+b^2c+bc^2\geqslant 8abc\leftrightarrow$$

$$(a+b)(c+a)(b+c)\geqslant 8abc.$$

Что верно по Гёльдеру:

$$(a+b)(c+a)(b+c)\geqslant\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

№5. Решение: Используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left(\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2}\right)\left(\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right)(1+1+1)\geqslant\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\leftrightarrow$$

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2}\geqslant\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6}\geqslant\frac{abc\,(a+b+c)}{2}.$$

Имеем:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geqslant(ab+ca+bc)^2,$$

поэтому достаточно доказать, что

$$(ab+ca+bc)^2\geqslant 3abc\,(a+b+c)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2+2\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)\geqslant 3\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2\geqslant\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right),$$

что верно, если сделать замену $x=bc, y=ca, z=ab$.

№6. Решение: По Гёльдеру имеем:

$$\left(\frac{a^3}{1+9ab^2c}+\frac{b^3}{1+9abc^2}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\right)\left(\left(1+9abc^2\right)+\left(1+9ab^2c\right)+\left(1+9a^2bc\right)\right)(1+1+1)$$

$$\geqslant(a+b+c)^3\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{a^3}{1+9ab^2c}+\frac{b^3}{1+9abc^2}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{3\left(\left(1+9abc^2\right)+\left(1+9ab^2c\right)+\left(1+9a^2bc\right)\right)}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{(a+b+c)^3}{3\left((1+9abc^2)+(1+9ab^2c)+(1+9a^2bc)\right)} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{18} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 6 \geqslant \left(1+9abc^2\right)+\left(1+9ab^2c\right)+\left(1+9a^2bc\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 1 \geqslant 3abc\,(a+b+c)\,.$$

Подставим $1=(ab+ca+bc)^2$:

$$(ab+ca+bc)^2 \geqslant 3abc\,(a+b+c)\,.$$

Что верно, если использовать замену $x=bc, y=ca, z=ab$.

№7 Используем замену $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, $xyz=1$ и получим:

$$\frac{1}{a^5\,(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5\,(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5\,(a+2b)^2}=\frac{x^5y^2z^2}{(2y+z)^2}+\frac{x^2y^5z^2}{(2z+x)^2}+\frac{x^2y^2z^5}{(2x+y)^2}=$$

$$\frac{x^3}{(2y+z)^2}+\frac{y^3}{(2z+x)^2}+\frac{z^3}{(2x+y)^2}.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left(\frac{x^3}{(2y+z)^2}+\frac{y^3}{(2z+x)^2}+\frac{z^3}{(2x+y)^2}\right)\left((2y+z)+(2z+x)+(2x+y)\right)\left((2y+z)+(2z+x)+(2x+y)\right)$$

$$\geqslant (x+y+z)^3 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{x^3}{(2y+z)^2}+\frac{y^3}{(2z+x)^2}+\frac{z^3}{(2x+y)^2} \geqslant \frac{(x+y+z)^3}{9\,(x+y+z)^2}=\frac{x+y+z}{9}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{x+y+z}{9} \geqslant \frac{1}{3} \leftrightarrow x+y+z \geqslant 3,$$

что верно по AM $\geqslant$ GM.

№8. Решение: Используем неравенство Гёльдера и получим:

$$\left(\frac{a^3}{(1+b)\,(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)\,(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)\,(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)\,(1-b)}\right)\left((1+b)+(1+c)+(1+d)+(1+a)\right)$$

$$\left((1-c)+(1-d)+(1-a)+(1+b)\right) \geqslant (a+b+c+d)^3 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{a^3}{(1+b)\,(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)\,(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)\,(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)\,(1-b)} \geqslant \frac{(a+b+c+d)^3}{(4+a+b+c+d)\,(4-a-b-c-d)}.$$

Подставим значение $a+b+c+d=1$ и получим:

$$\frac{a^3}{(1+b)\,(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)\,(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)\,(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)\,(1-b)} \geqslant \frac{1}{5\cdot 3}.$$

№9. Решение: Используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)((1+6ab)+(1+6bc)+(1+6ca))(1+1+1) \geqslant \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)^3 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{ab+ca+bc}{abc}\cdot 3\left(3+6\left(ab+ca+bc\right)\right)} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}.$$

Подставим значение $ab+ca+bc=1$ и получим:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{abc}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{1}{abc} \geqslant \sqrt[3]{\frac{27}{abc}} \leftrightarrow \frac{1}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{ab+ca+bc}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

что верно по AM $\geqslant$ GM.

№10. Решение: Докажем сначала, что все три числа $a+b-c$, $c+a-b$, $b+c-a$ положительны. Предположим, без потери общности, что $a+b-c \leqslant 0 \leftrightarrow a+b \leqslant c$. Тогда $c^2 \geqslant (a+b)^2 > 2$, и $a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2} > 1$, и $c^2+a^2+b^2 > 3$, что противоречит условию. Применим теперь неравенство Гёльдера:

$$\left(\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\right)\left(a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\right)$$

$$\left(a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right)\right) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)^3=27 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{27}{\left(a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\right)\left(a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right)\right)}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{27}{\left(a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\right)\left(a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right)\right)} \geqslant \frac{3}{(abc)^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 9\left(abc\right)^2 \geqslant \left(a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\right)\left(a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right)\right).$$

Имеем:

$$a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right) \leqslant 3abc,$$

а также

$$a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right) \leqslant abc\left(a+b+c\right)$$

по неравенству Шура третьей и четвертой степеней.
Подставим в основное неравенство и получим:

$$3\left(abc\right)^2\left(a+b+c\right) \geqslant$$

$$\left(a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\right)\left(a^3\left(b+c-a\right)+b^3\left(c+a-b\right)+c^3\left(a+b-c\right)\right).$$

Достаточно доказать, что

$$9\left(abc\right)^2 \geqslant 3\left(abc\right)^2\left(a+b+c\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 3 \geqslant a+b+c,$$

что верно по QM $\geqslant$ AM:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 1 \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Подставим в основное неравенство и получим:

$$9(abc)^2 \geqslant \left(a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right)\left(a^3(b+c-a)+b^3(c+a-b)+c^3(a+b-c)\right).$$

Теперь достаточно доказать, что

$$9(abc)^2 \geqslant 3(abc)^2(a+b+c) \leftrightarrow 3 \geqslant a+b+c,$$

что верно по неравенству Коши-Буняковского:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \leftrightarrow 1 \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

9 Транснеравенства

№1. Решение: Пусть $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — упорядоченная последовательность $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то есть B — перестановка последовательности A такая, что $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. Рассмотрим разномонотонные последовательности $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и $\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right)$. По транснеравенству

$$\frac{b_1}{1^2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \leqslant \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}.$$

Также $b_1 \geqslant 1$, значит $b_2 \geqslant 2$, откуда $b_3 \geqslant 3$, ..., $b_n \geqslant n$. Следовательно,

$$\frac{b_1}{1^2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Откуда выполняется исходное неравенство.

№2. Решение: Рассмотрим последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\left(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right)$. Они являются одномонотонными, следовательно, из транснеравенства следует:

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geqslant \frac{a_1}{s-a_k} + \frac{a_2}{s-a_{k+1}} + \cdots + \frac{a_{n-k+1}}{s-a_n} + \frac{a_{n-k+2}}{s-a_1} + \frac{a_n}{s-a_{k-1}},$$

где $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Записав все $n-1$ неравенств для каждого значения k, сложим левые и правые части и получим:

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2}{s-a_1} + \frac{a_1 + a_n + \cdots + a_3}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1}{s-a_n} =$$

$$= 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Отсюда следует исходное неравенство.

№3. Решение: Предположим, без потери общности, что $a \geqslant b \geqslant c$; докажем теперь, что $c\,(a+b-c) \geqslant b\,(c+a-b) \geqslant a\,(b+c-a)$. Заметим, что $c\,(a+b-c) - b\,(c+a-b) = (b-c)\,(b+c-a) \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что $b\,(c+a-b) \geqslant a\,(b+c-a)$. Рассмотрим разномонотонные последовательности (a, b, c) и $(a\,(b+c-a)\,, b\,(c+a-b)\,, c\,(a+b-c))$, по транснеравенству:

$$a^2\,(b+c-a) + b^2\,(a+c-b) + c^2\,(a+b-c) \leqslant ab\,(b+c-a) + bc\,(c+a-b) + ac\,(a+b-c)\,,$$

$$a^2\,(b+c-a) + b^2\,(a+c-b) + c^2\,(a+b-c) \leqslant ca\,(b+c-a) + ab\,(c+a-b) + bc\,(a+b-c)\,.$$

Сложив эти два неравенства и раскрыв скобки в левой части, получим:

$$2\left(a^2\,(b+c-a) + b^2\,(a+c-b) + c^2\,(a+b-c)\right) \leqslant 6abc.$$

Отсюда следует исходное неравенство.

№4. Решение: Без потери общности предположим, что $a \geqslant b \geqslant c$. Заметим, что тогда $\frac{1}{a+4b+4c} \geqslant \frac{1}{4a+b+4c} \geqslant \frac{1}{4a+4b+c}$. Рассмотрим одномонотонные последовательности (a, b, c) и $\left(\frac{1}{a+4b+4c}, \frac{1}{4a+b+4c}, \frac{1}{4a+4b+c}\right)$ и применим для них транснеравенство:

$$\frac{a}{a+4b+4c} + \frac{b}{4a+b+4c} + \frac{c}{4a+4b+c} \geqslant \frac{b}{a+4b+4c} + \frac{c}{4a+b+4c} + \frac{a}{4a+4b+c},$$

$$\frac{a}{a+4b+4c} + \frac{b}{4a+b+4c} + \frac{c}{4a+4b+c} \geqslant \frac{c}{a+4b+4c} + \frac{a}{4a+b+4c} + \frac{b}{4a+4b+c}.$$

Имеем:

$$\frac{4a+b+c}{a+4b+4c} + \frac{a+4b+c}{4a+b+4c} + \frac{a+b+4c}{4a+4b+c} - 2 =$$

$$\left(\frac{4a+b+c}{a+4b+4c} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{a+4b+c}{4a+b+4c} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{a+b+4c}{4a+4b+c} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{2a-b-c}{a+4b+4c} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2b-a-c}{4a+b+4c} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2c-a-b}{4a+4b+c} =$$

$$\frac{5}{3}\left(\frac{a-b}{a+4b+4c} + \frac{a-c}{a+4b+4c} + \frac{b-a}{4a+b+4c} + \frac{b-c}{4a+b+4c} + \frac{c-a}{4a+4b+c} + \frac{c-b}{4a+4b+c}\right) =$$

$$= \frac{5}{3}(a-b)\left(\frac{1}{a+4b+4c} - \frac{1}{4a+b+4c}\right) + \frac{5}{3}(a-c)\left(\frac{1}{a+4b+4c} - \frac{1}{4a+4b+c}\right)$$

$$+\frac{5}{3}(b-c)\left(\frac{1}{4a+b+4c} - \frac{1}{4a+4b+c}\right) \geqslant 0.$$

Откуда следует исходное неравенство.

№5. Решение: Пусть, без потери общности, $a \leqslant b \leqslant c$. Используя транснеравенство для одномонотонных последовательностей $\left(a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2\right)$ и $\left(\frac{1}{b+c} \leqslant \frac{1}{a+c} \leqslant \frac{1}{a+b}\right)$, получим:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} + \frac{a^2}{a+b}.$$

Прибавим $\frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} + \frac{ab}{a+b}$ к обеим частям неравенства и получим:

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{a+c} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant \frac{b^2+bc}{b+c} + \frac{c^2+ac}{a+c} + \frac{a^2+ab}{a+b} =$$

$$\frac{b(b+c)}{b+c} + \frac{c(a+c)}{a+c} + \frac{a(a+b)}{a+b} = a+b+c.$$

№6. Решение: Пусть, без потери общности, $a \geqslant b \geqslant c$, тогда $a+b \geqslant a+c \geqslant b+c$. Докажем, что $\frac{ab}{a+b} \geqslant \frac{ac}{a+c} \geqslant \frac{bc}{b+c}$:

$$\frac{ab}{a+b} \geqslant \frac{ac}{a+c} \leftrightarrow b(a+c) \geqslant c(a+b) \leftrightarrow ab \geqslant ac.$$

Аналогично доказывается, что $\frac{ac}{a+c} \geqslant \frac{bc}{b+c}$. Рассмотрим одномонотонные последовательности $(a+b, a+c, b+c)$ и $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ac}{a+c}, \frac{bc}{b+c}\right)$ и применим для них неравенство Чебышева:

$$3\left(ab+ac+bc\right) \geqslant \left(a+b+a+c+b+c\right)\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}\right).$$

Отсюда следует исходное неравенство.

№7. Решение: Без потери общности предположим, что $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда $\frac{ab}{c} \geqslant \frac{ca}{b} \geqslant \frac{bc}{a}$ и $\frac{a+b}{ab} \leqslant \frac{c+a}{ca} \leqslant \frac{b+c}{bc}$, так как

$$\frac{a+b}{ab} \leqslant \frac{c+a}{ca} \leftrightarrow c\left(a+b\right) \leqslant b\left(a+c\right) \leftrightarrow ac \leqslant ab.$$

Аналогично доказывается, что $\frac{ac}{a+c} \geqslant \frac{bc}{b+c}$. Рассмотрим разномонотонные последовательности $\left(\frac{ab}{c}, \frac{ca}{b}, \frac{bc}{a}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{ab}, \frac{c+a}{ca}, \frac{b+c}{bc}\right)$ и применим для них неравенство Чебышева:

$$\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{c+a}{ca}+\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}\right) \geqslant 3\left(\frac{a+b}{c}+\frac{c+a}{b}+\frac{b+c}{a}\right) =$$

$$\frac{3a^2\left(b+c\right)+3b^2\left(c+a\right)+3c^2\left(a+b\right)}{abc}.$$

Также имеем:

$$\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{c+a}{ca}+\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}\right) = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}\right).$$

Подставив данное значение в неравенство выше, получим:

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}\right) \geqslant \frac{3a^2\left(b+c\right)+3b^2\left(c+a\right)+3c^2\left(a+b\right)}{abc}.$$

Откуда следует исходное неравенство.

№8. Решение: Докажем сначала первое неравенство. Рассмотрим равносильное ему неравенство:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant \left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)\left(a+b+c\right).$$

Пусть без потери общности $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда рассмотрим одномонотонные последовательности $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ и $\left(\frac{a}{b^2+c^2}, \frac{b}{a^2+c^2}, \frac{c}{a^2+b^2}\right)$, а также последовательность $\left(b^2+c^2, a^2+c^2, a^2+b^2\right)$ и применим для них обобщённое неравенство Чебышева:

$$\left(b^2+c^2+a^2+c^2+a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant \left(a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(a^2+c^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right)\left(a+b+c\right),$$

откуда следует неравенство, равносильное исходному. Докажем теперь второе неравенство. Рассмотрим равносильное ему неравенство:

$$\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant \left(ab+bc+ac\right)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Заметим, что последовательности (a, b, c) и $\left(\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{a+c}, \frac{c^2}{a+b}\right)$ одномонотонны. Применим для них и для последовательности $(b+c, a+c, a+b)$ обобщённое неравенство Чебышева:

$$\left(b+c+a+c+a+b\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant \left(a\left(b+c\right)+b\left(a+c\right)+c\left(a+b\right)\right)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Отсюда следует неравенство, равносильное исходному.

№9. Решение: Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ без потери общности. Рассмотрим разномонотонные последовательности $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ и $\left(a^3, b^3, c^3\right)$, а также последовательность $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ и применим для них обобщённое неравенство Чебышева:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot a^3+b^2 \cdot \frac{1}{b} \cdot b^3+c^2 \cdot \frac{1}{c} \cdot c^3\right) \leqslant (a+b+c)\left(a^5+b^5+c^5\right).$$

Отсюда следует исходное неравенство.

№10. Решение: Рассмотрим последовательности $\left(x_1^{a-b}, x_2^{a-b}, \ldots, x_n^{a-b}\right)$ и $\left(x_1^{d-b}, x_2^{d-b}, \ldots, x_n^{d-b}\right)$. Они разномонотонны, так как $a-b<0$ и $d-b>0$. Применим для этих двух последовательностей и для последовательности $\left(x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b\right)$ обобщённое неравенство Чебышева:

$$\left(x_1^b+x_2^b+\cdots+x_n^b\right)\left(x_1^{b+(a-b)+(d-b)}+x_2^{b+(a-b)+(d-b)}+\cdots+x_n^{b+(a-b)+(d-b)}\right) \leqslant$$

$$\left(x_1^a+x_2^a+\cdots+x_n^a\right)\left(x_1^d+x_2^d+\cdots+x_n^d\right).$$

Отсюда следует исходное неравенство, так как $b+(a-b)+(d-b)=a+d-b=c$.

10 Метод Штурма

№1. Решение: Нажмите сюда

№2. Решение: Нажмите сюда

№3. Решение: Нажмите сюда

№4. Решение: Нажмите сюда

№5. Решение: Нажмите сюда

№6. Решение: Нажмите сюда

№7. Решение: Нажмите сюда