大数定律和中心极限定理

讲师：Jeary

目录

目标

通过本章课程的学习，您将能够：

- 掌握大数定律的概念
- 掌握中心极限定理的概念
- 了解大数定律和中心极限定理的区别

01

大数定律

引例

苏联科学家弗谢沃洛德·叶瓦诺维奇·罗曼诺夫斯基曾经抛硬币80640次，正面的结果是39699 次，出现正面的概率为0.492

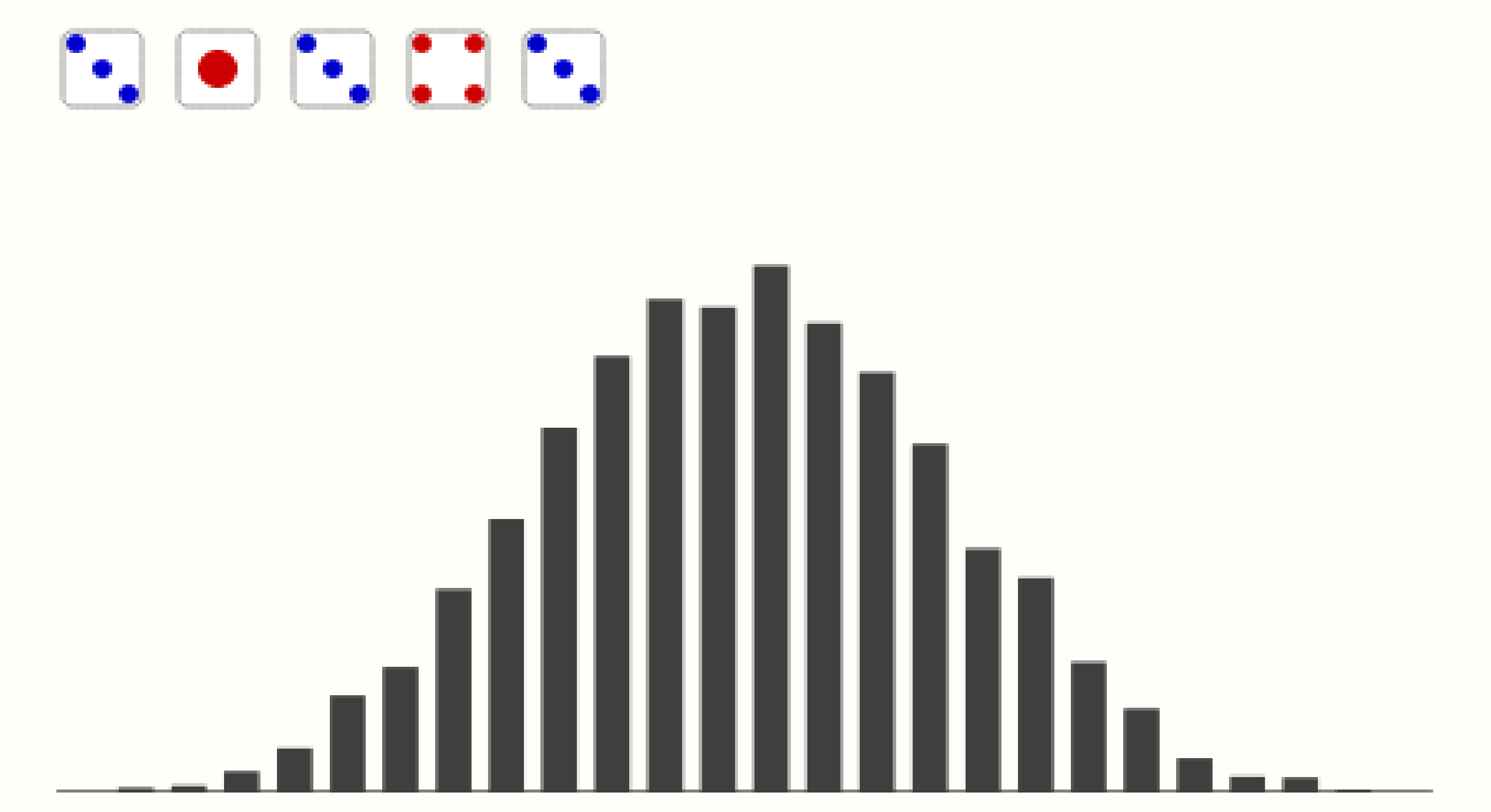
弱大数定律

设随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$相互独立，服从同一分布且具有数学期望

$E(X_k) = \mu\ (k = 1,2, \dots)$，则序列 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$依概率收敛于$\mu$

弱大数定律也称为**辛钦大数定律**。

赌场的输赢概率



伯努利大数定律

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意正数$\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

比较

大数定理	分布	期望	方差	用途
伯努利	二项分布	相同	相同	估算概率
辛钦	独立同分布	相同	相同	估算期望

思考题

01 大数定律的**作用**是什么？

02 伯努利与弱大数定理的区别都有哪些？

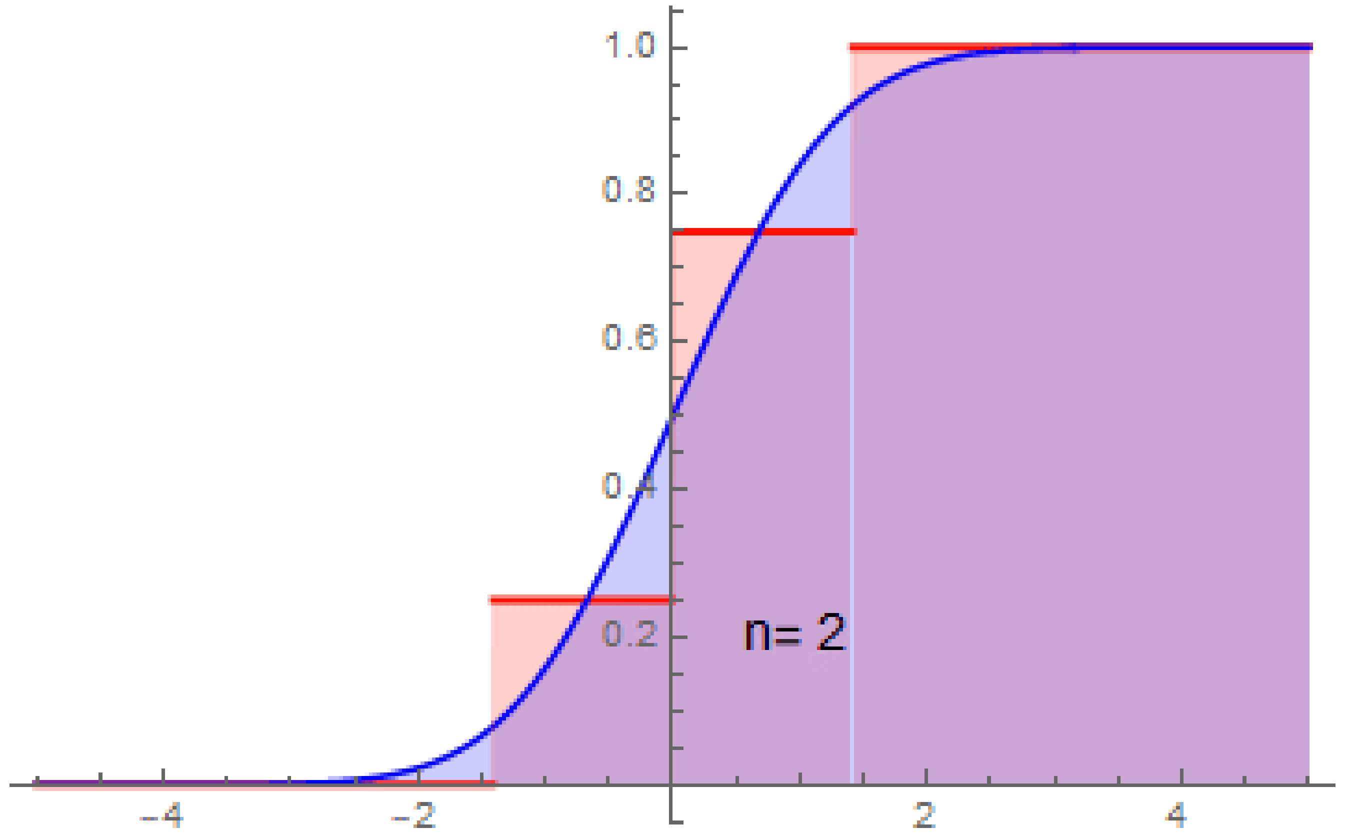
02

中心极限定理

拉普拉斯定理

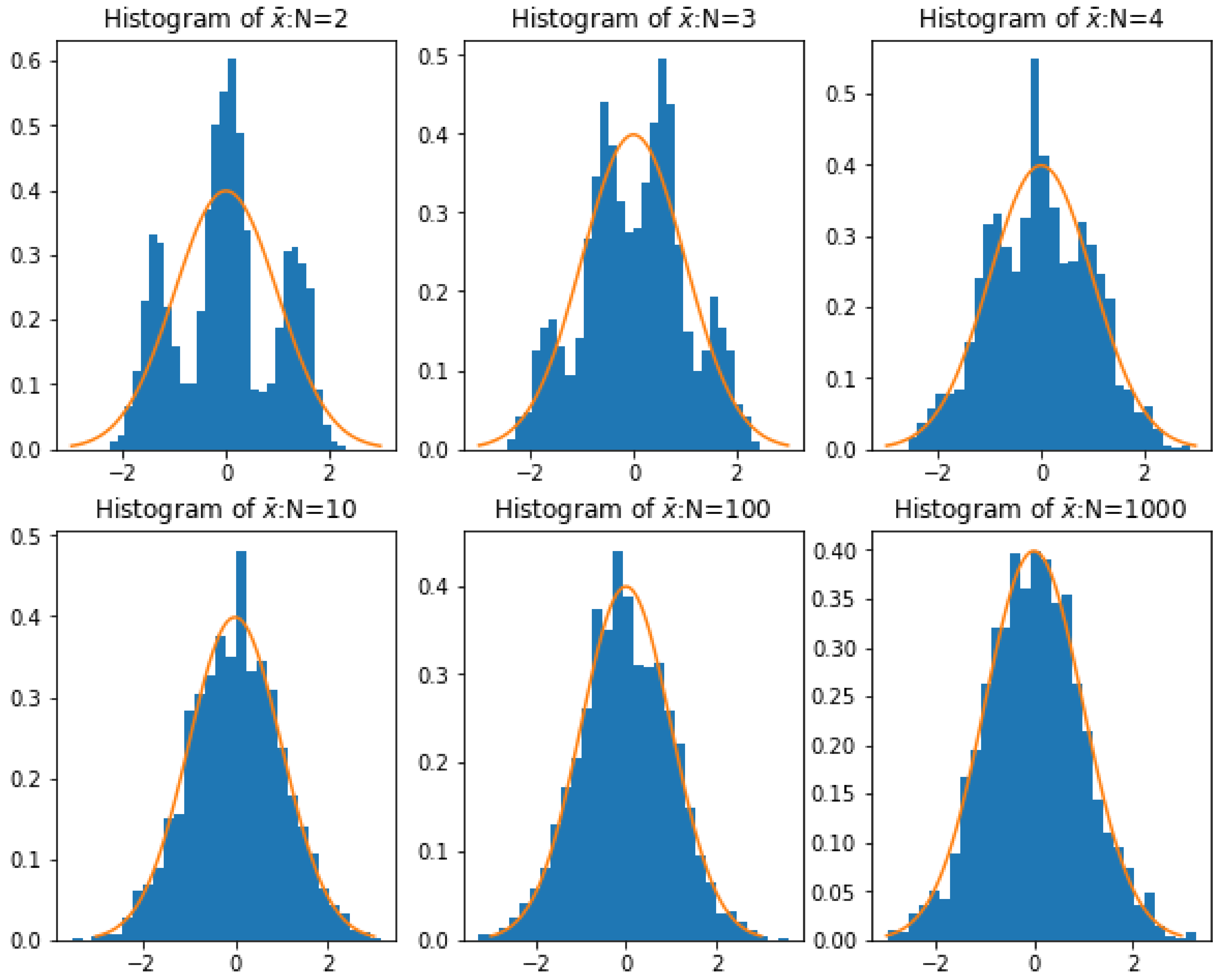
- 设随机变量$\eta_n(n=1,2,\dots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布，则对于任意x，有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$



高尔顿钉板实验

高尔顿钉板实验数据分布



定义

- 设随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$相互独立，服从同一分布且具有数学期望和方差：$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2 \quad (k=1,2,\dots)$，即随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量：

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

Y_n的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足：

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x)$$

案例

- 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05、0.8、0.15.若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立，且服从同一分布。

X	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

（1）求参加会议的家长人数X超过340的概率。

（2）求有1名家长来参加会议的学生人数不多余340的概率。

03

总结

思考题

01 现实生活中有还有哪些场景，使用到**中心极限定理**的例子？

02 中心极限定理与大数定律的区别与联系？

总结

本章包含两小节内容：

第一节

- 大数定律的基本概念

第二节

- 中心极限定理的概念

谢谢观看

参考书目：概率论与数理统计•第四版（浙江大学） 高等教育出版社