概率论基础

讲师：Jeary

概率论基础

01 随机现象

02 随机试验

03 随机事件

04 等可能概型

05 条件概率

06 总结

目标

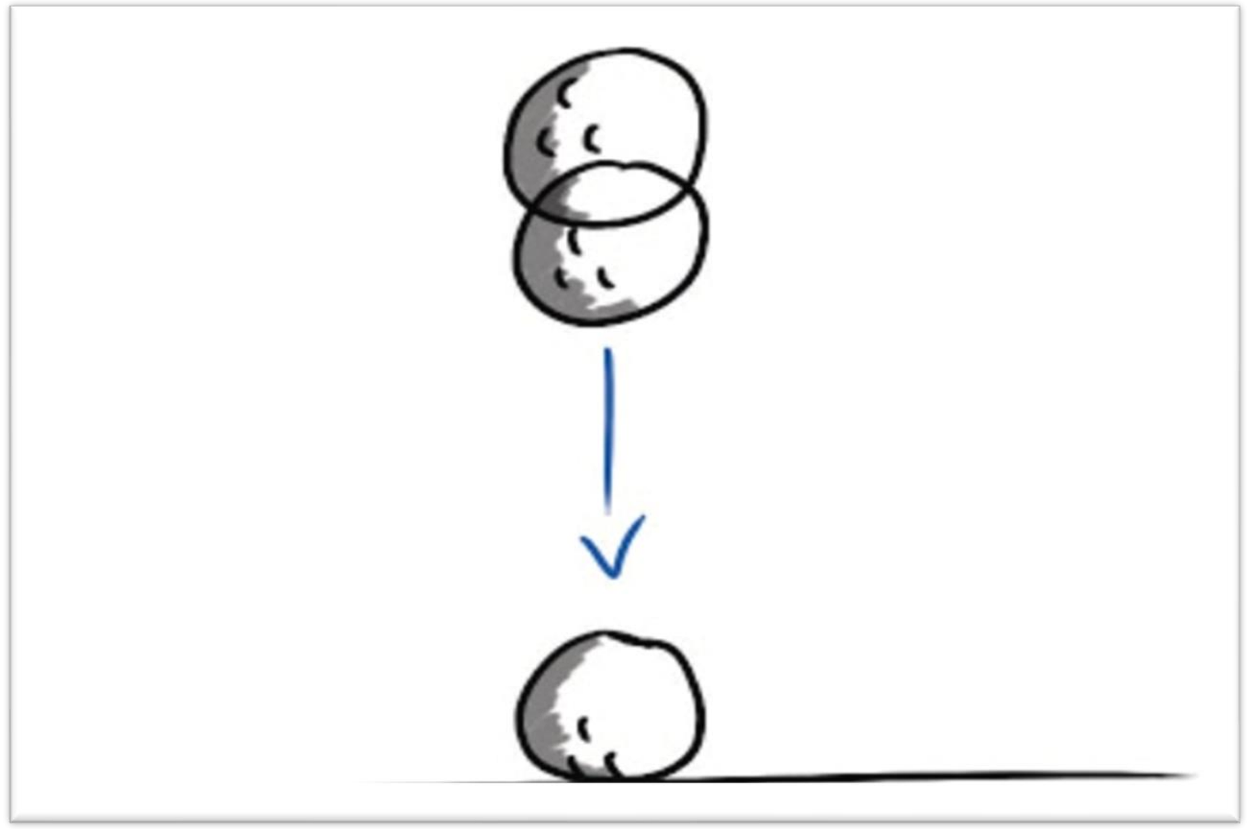
通过本章课程的学习，您将能够：

- 掌握概率论的基础知识（随机现象、试验、事件）
- 掌握等可能概型的计算
- 掌握条件概率的计算

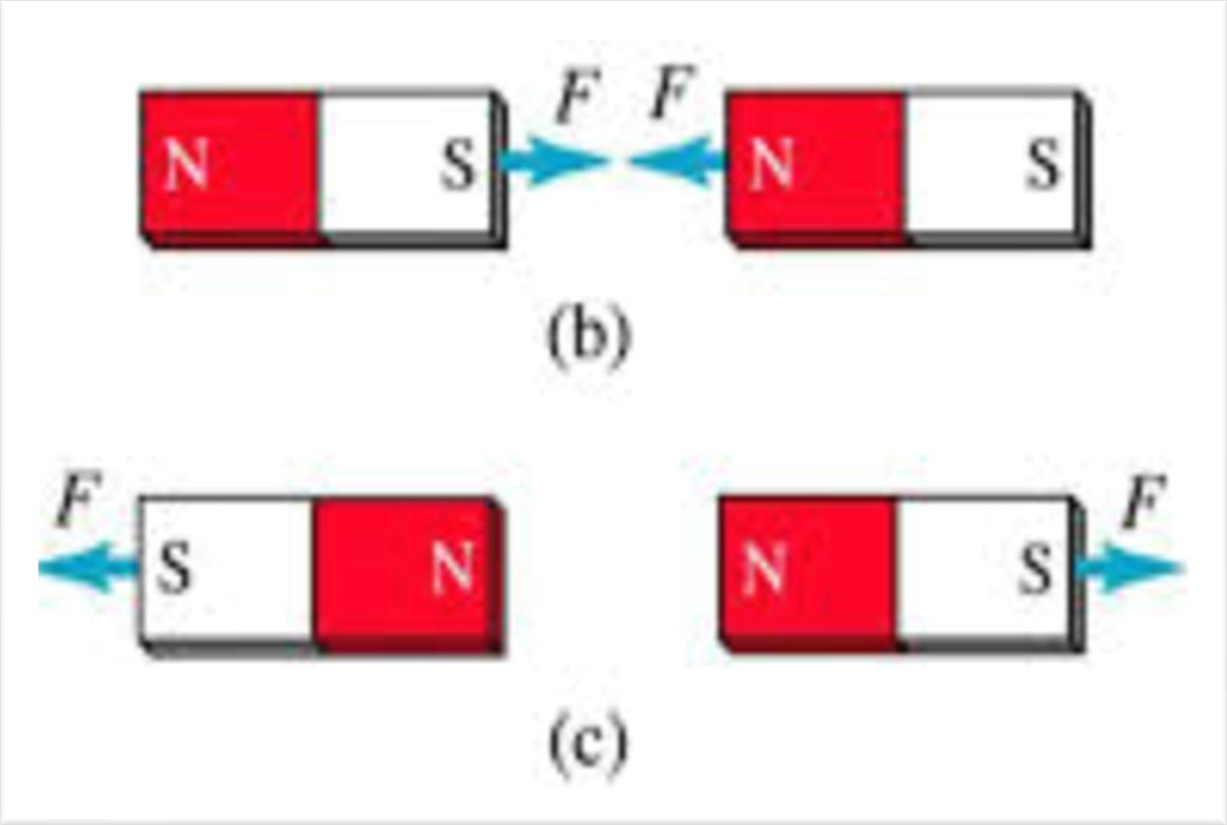
01

随机现象

确定性现象

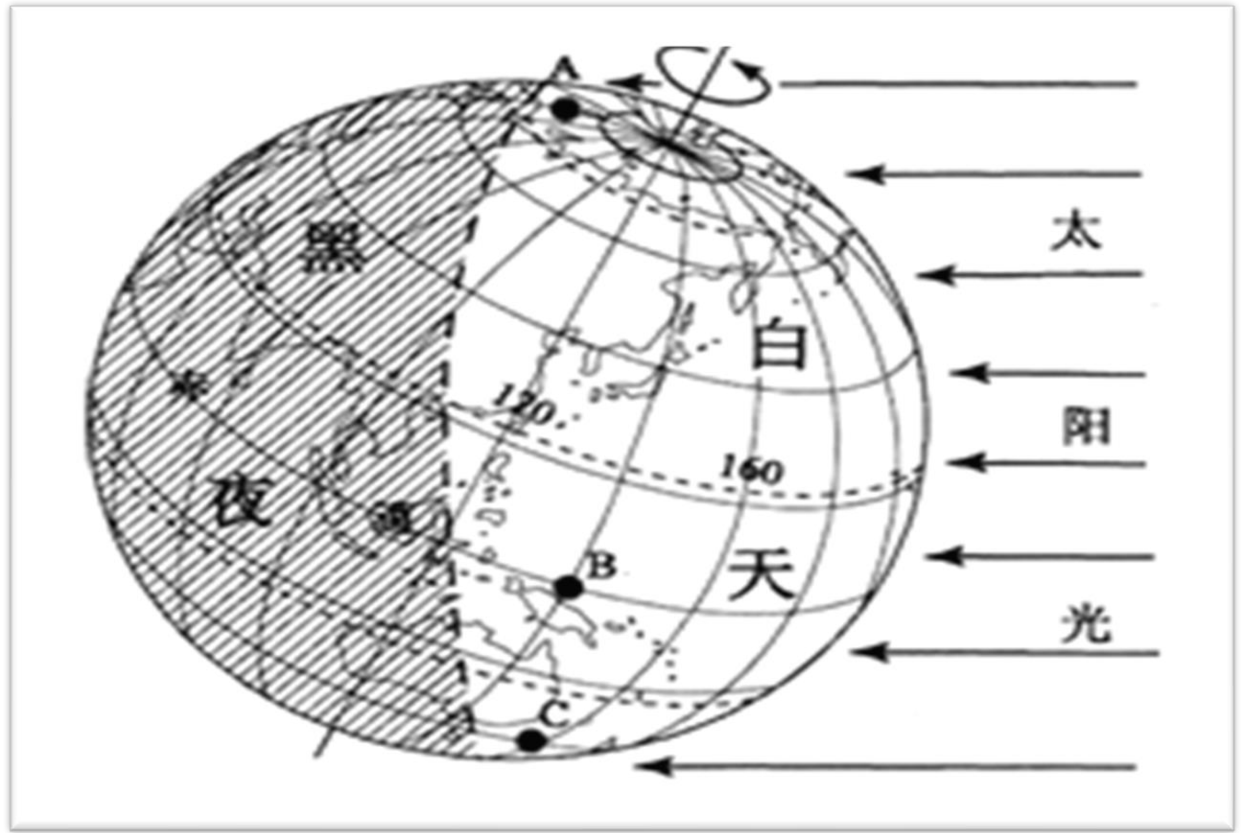


自由落体



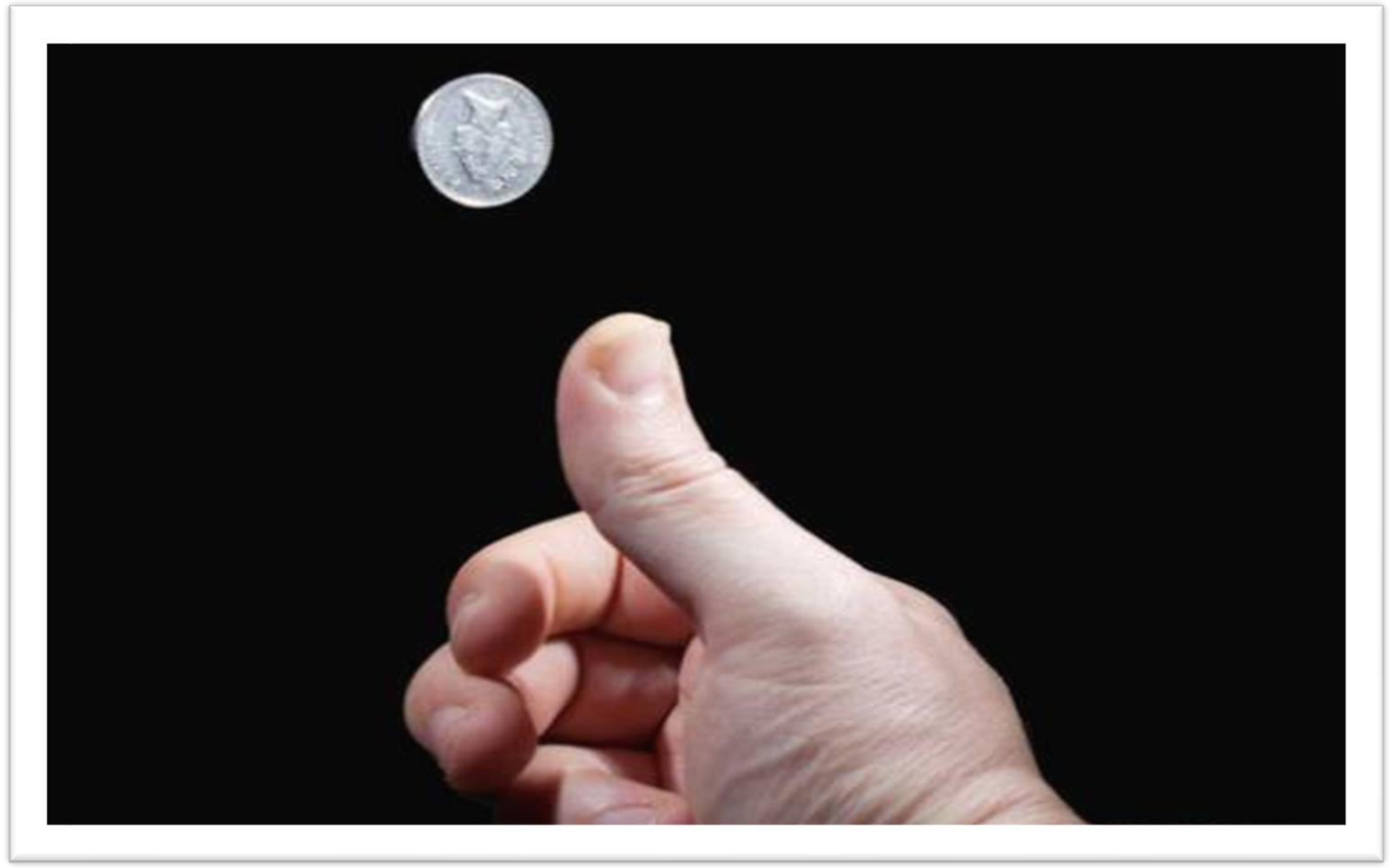
磁铁

沸腾

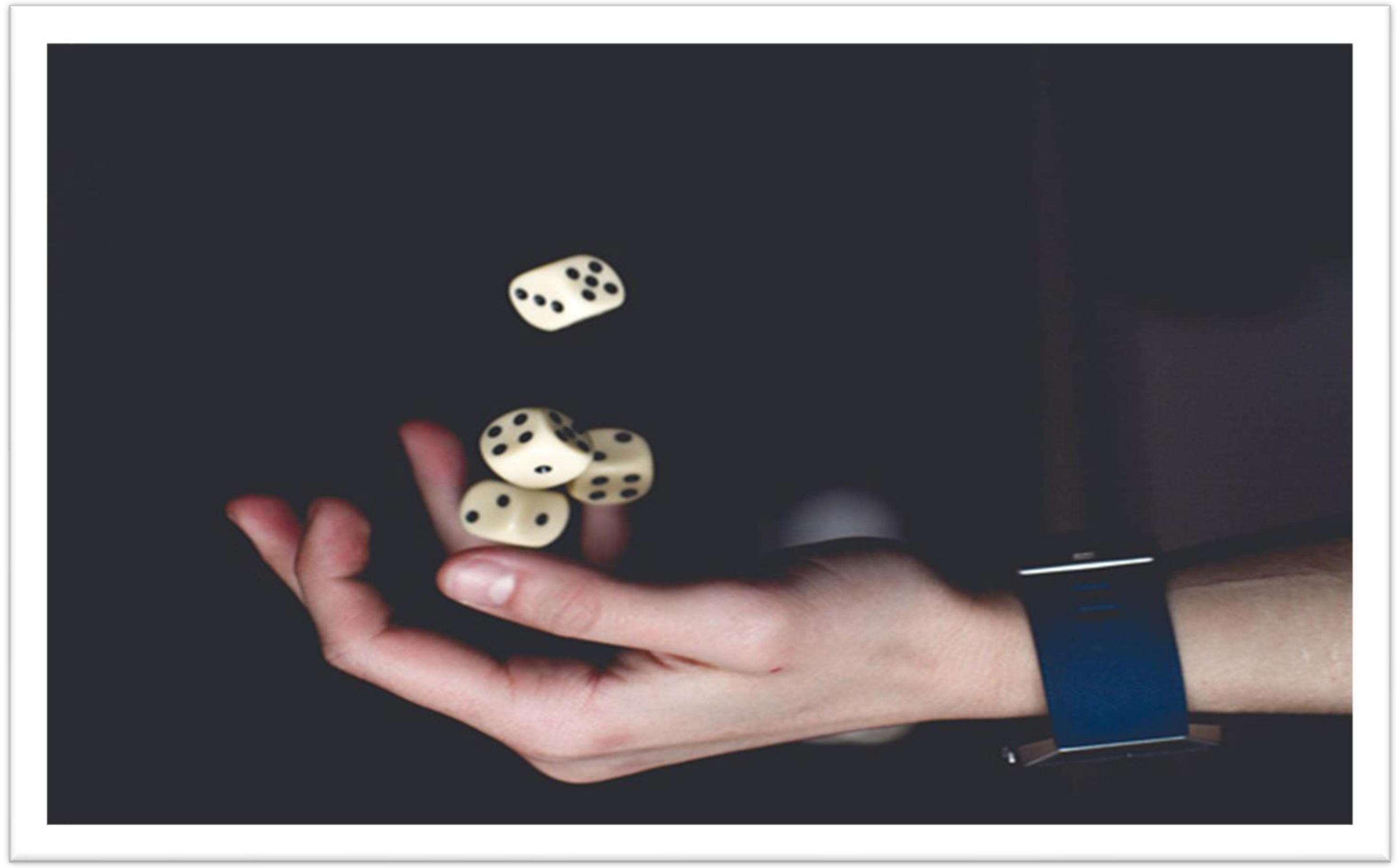


昼夜更替

随机现象

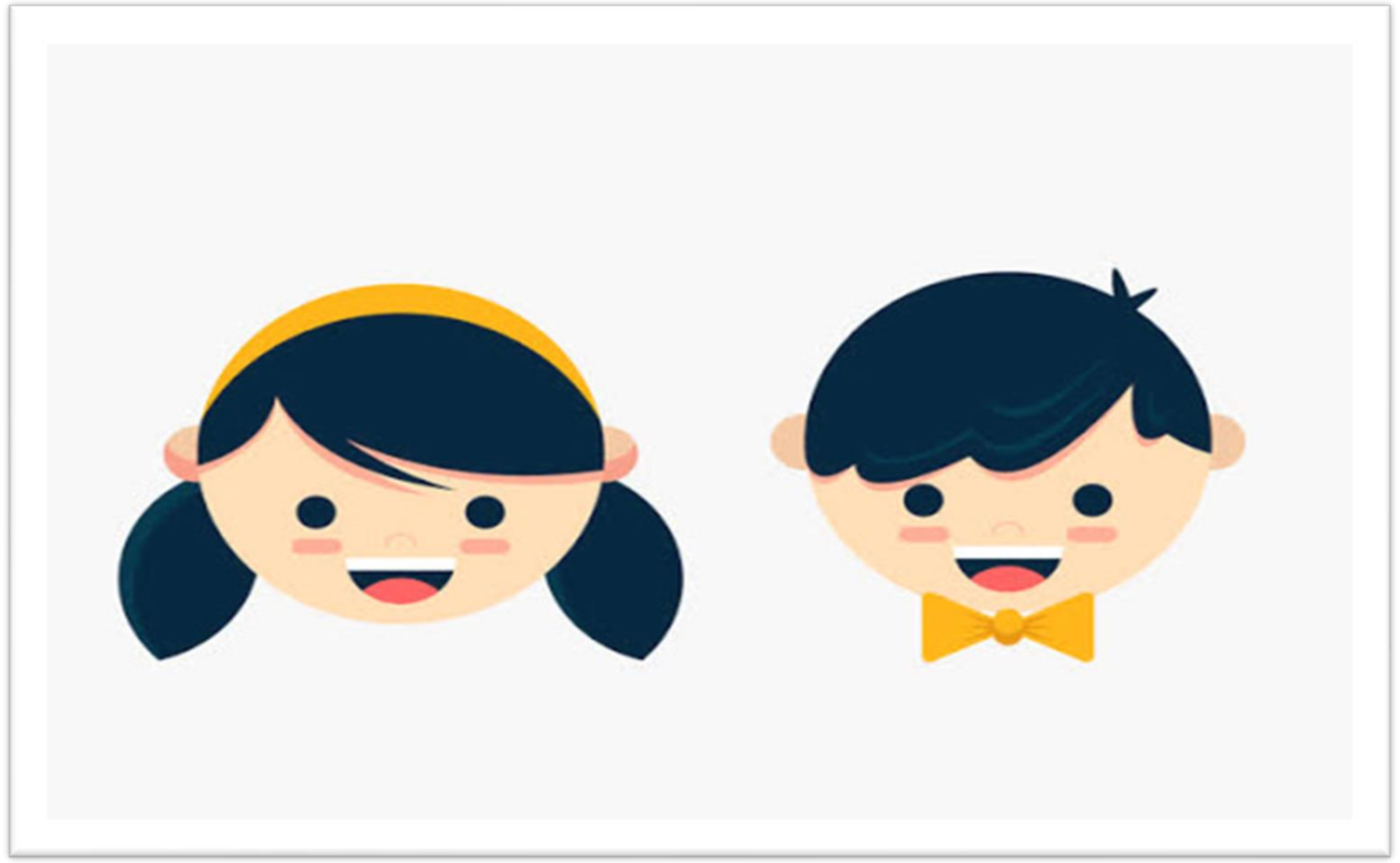


掷硬币



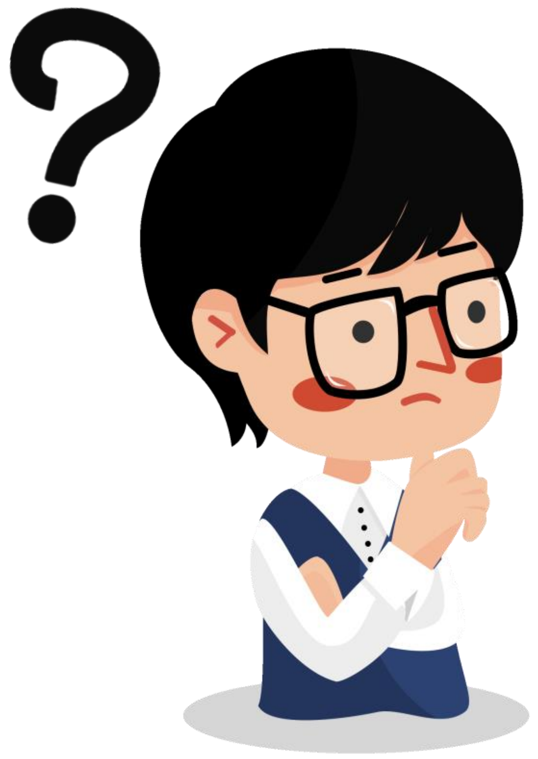
摇骰子

投飞镖



新生儿性别

思考题



01 明天的温度

02 太阳东升西落

03 生命终究有尽头

02

随机试验

定义

随机试验

对随机现象进行观察或试验称为随机试验，简称试验，记作$\boldsymbol{E}$，它具备以下特点：

1. 相同条件下进行；
2. 所得的可能结果不止一个，且所有的可能结果都能事先已知；
3. 每次具体的试验之前无法预知会出现哪个结果。

举例

- 抛一枚硬币，观察正面H，反面T出现的情况
- 将一枚硬币抛掷3次，观察出现正面的次数
- 抛掷一颗骰子，观察出现的点数

结果

样本空间

将随机试验E的所有可能结果组成的集合成为E的**样本空间**，记为$\boldsymbol{S}$

样本点

样本空间的元素，即E的每个可能结果，称为**样本点**

例如：

抛一枚硬币，观察正面H，反面T出现的情况 S = $\{H, T\}$

将一枚硬币抛掷3次，观察出现正面的次数 $S = \{0, 1, 2, 3\}$

抛掷一颗骰子，观察出现的点数 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

03

随机事件

引例

■ 随机试验E：

在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。若规定某种灯泡的寿命（小时）小于500为次品，在该随机试验中灯泡的寿命是否满足：

$$t \geq 500$$

满足该条件的样本点组成S的一个子集：

$$A = \{t | t \geq 500\}$$

则：

$\boldsymbol{A}$为试验E的一个**随机事件**。

定义

随机试验

一般，我们称试验 $\boldsymbol{E}$ 的样本空间 $\boldsymbol{S}$ 的子集 A 为 $\boldsymbol{E}$ 的随机事件，简称事件。

在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称该随机事件发生。

特别地，当只有一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

案例

有随机试验E：将一枚硬币抛三次，观察出现的点数

- 随机事件A_1

第一次出现的是H（正面），即：$A_1=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$

- 随机事件A_2

三次出现同一面，即：$A_2=\{HHH,TTT\}$

- 随机事件A_3

三次都是正面，即：$A_3=\{HHH\}$

关系

包含: A 事件发生必然导致B事件的发生，记为 $A \subset B$ 。

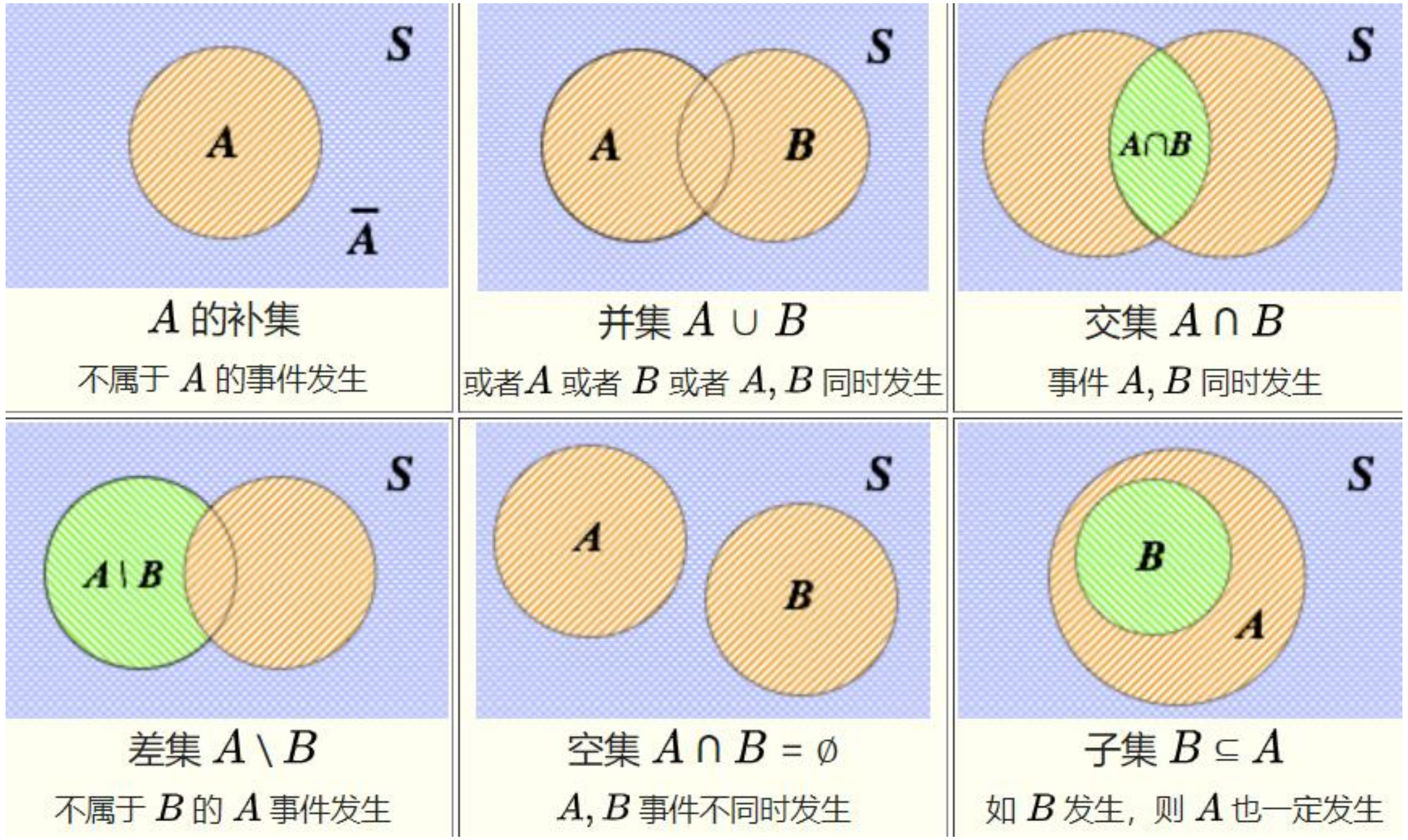
相等: A事件发生必然导致B事件的发生，同时也有， B事件发生必然导致A事件的发生，记为 $A \subset B$ 且 $B \subset A$

互斥(互不相容): A事件与B事件不能同时发生，记为$AB = \phi$。

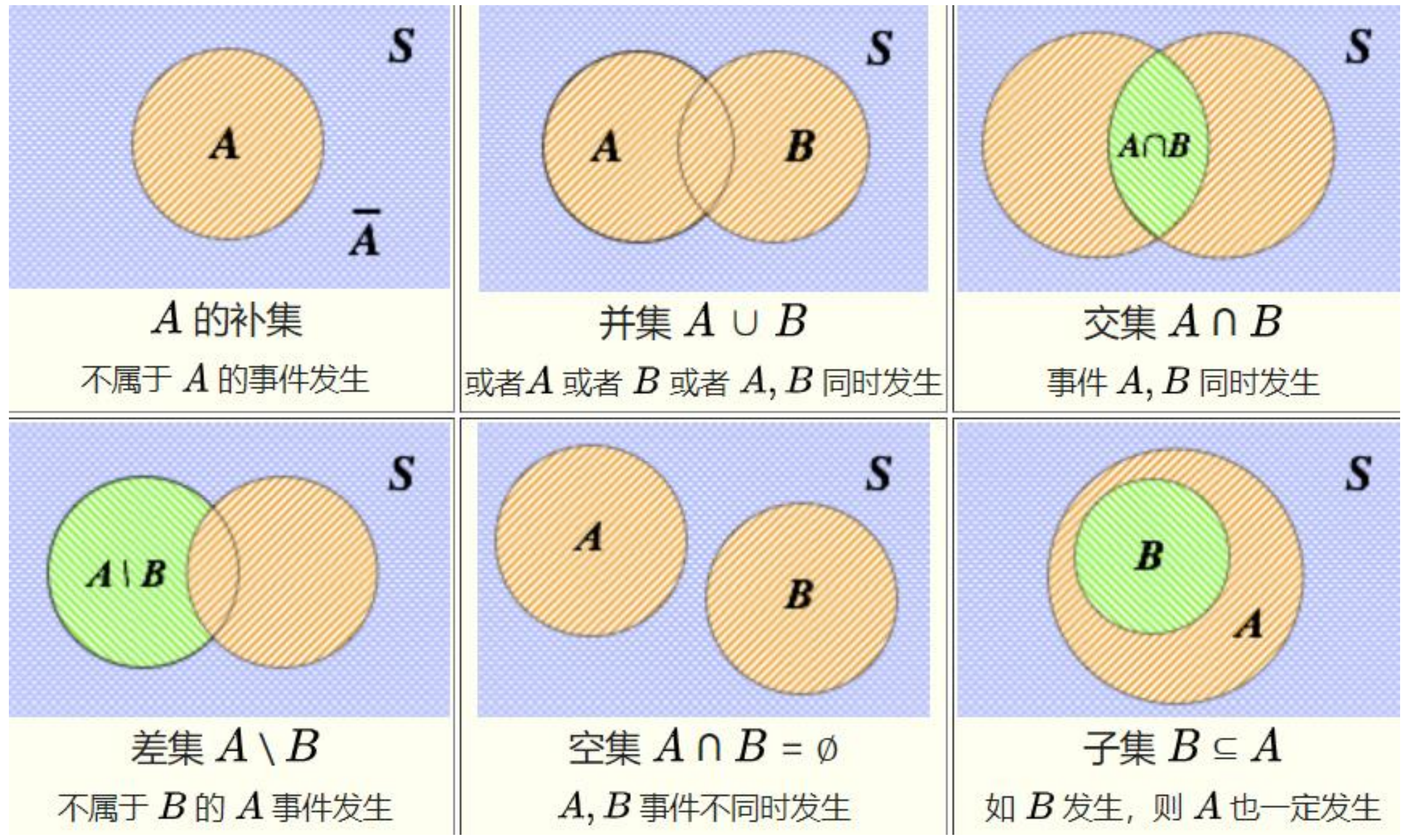
对立(互逆): A事件与B事件中有且仅有一个事件发生，记为 $AB = \phi$ 且$A + B = \Omega$，A事件的对立事件记为$\overline{A}$。

对立与互斥的关系: 对立$\Rightarrow$互斥，互斥 $\nRightarrow$对立，这两个关系都是属于‘事件’的关系

运算


S
A
Ā
A 的补集
不属于 A 的事件发生
S
A
B
并集 A ∪ B
或者A 或者 B 或者 A, B 同时发生
S
A∩B
交集 A ∩ B
事件 A, B 同时发生
S
A \ B
差集 A \ B
不属于 B 的 A 事件发生
S
A
B
空集 A ∩ B = ∅
A, B 事件不同时发生
S
B
A
子集 B ⊆ A
如 B 发生，则 A 也一定发生

运算律



交换律：$A \cup B = B \cup A$

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

德摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

04

等可能概型

定义

等可能概型 / 古典概型

条件：

- 随机试验的样本空间只包含有限个元素（所包含的单位事件是有限的）
- 试验中每个单位事件发生的可能性均相等

计算公式

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$，由于

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$$

$$\begin{aligned}1&=P(S)\\&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})\\&=nP(\{e_i\})\end{aligned}$$

其中$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,3\ \ldots n$

事件 A 在事件空间 S 中的概率：$P(A)=\dfrac{\text{构成事件}A\text{的元素数目}}{\text{构成事件空间}S\text{的所有元素数目}}$

案例

随机试验E：

随机试验E：将一枚硬币抛掷三次观察正面 H 反面 T 出现的情况

随机试验 E 的样本空间 S：

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

（1）设事件A_1为“恰有一次出现正面”，求$P(A_1)$

（2）设事件A_2为“至少有一次出现正面”，$P(A_2)$

05

条件概率

定义

■ **随机试验E：**

设A,B为两个事件，且$P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**

案例

一盒子装有4个产品，其中3只一等品，1只二等品，从中取出产品，每次任意取一只，不放回的取两次。设事件A为“第一次取到的是一等品”，事件B为“第二次取到的是一等品”。试求条件概率$P(B|A)$。

乘法定理

设P(A)>0，则有：

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

推广：

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

案例

设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为9/10，试求透镜落下三次而未打破的概率。

样本空间的划分

定义

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件，若满足：

$$B_iB_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \dots, n$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本的一个划分

案例

设试验E为：“掷一颗骰子观察其点数”

它的样本空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E的一组事件$B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{4, 5\}$, $B_3 = \{6\}$

全概率公式

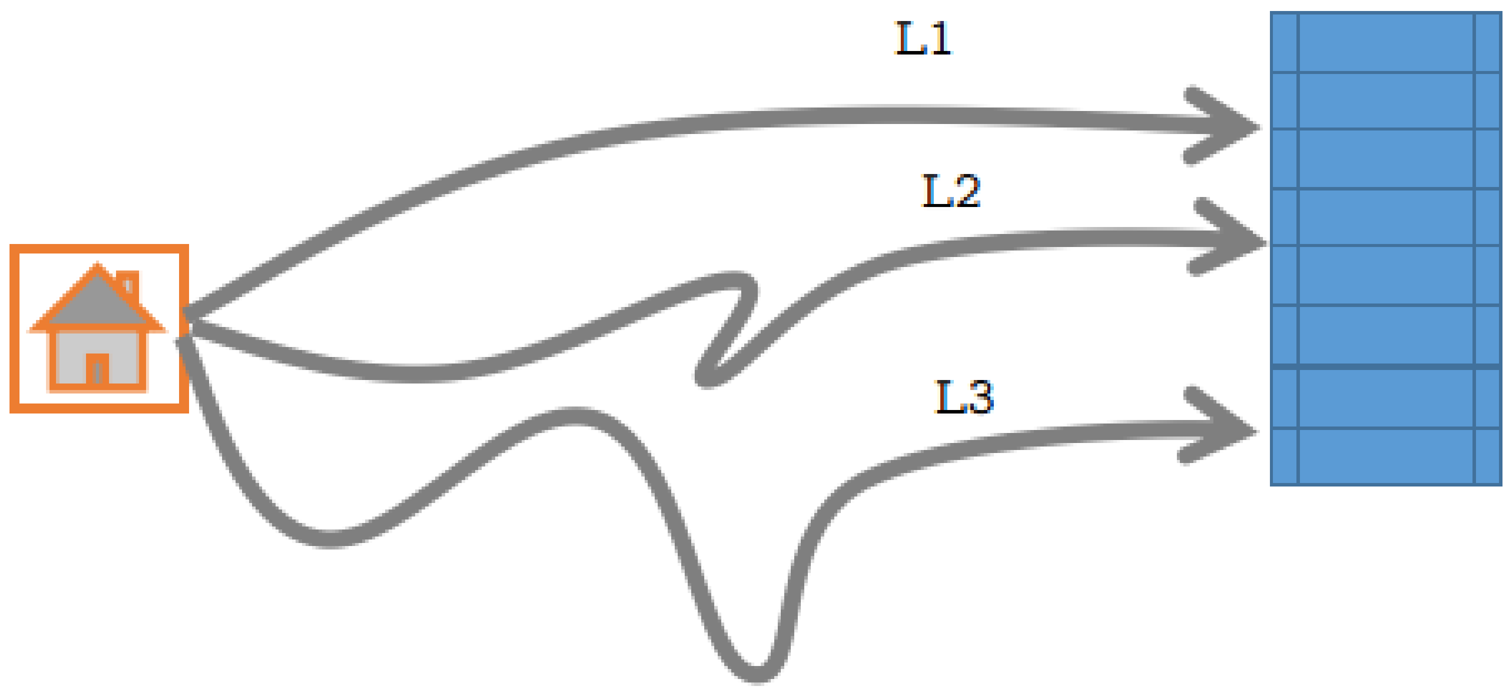
定理

设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，且$P\ (B_i) > 0$，$i = 1, 2, 3\ \ldots n$，则：

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_j)\, P(B_j)$$

称为全概率公式

案例



小张从家到公司上班总共有三条路可以到达，但是每条路每天拥堵的情况不太一样，由于路的远近不同，选择每天路的概率为：

$$P(L_1)=0.5, P(L_2)=0.3, P(L_3)=0.2$$

每天上述三条路不拥堵的概率为：

$$P(C_1)=0.2, P(C_2)=0.4, P(C_3)=0.7$$

假设遇到拥堵会迟到，那么请问小张从家到公司不迟到的概率是多少?

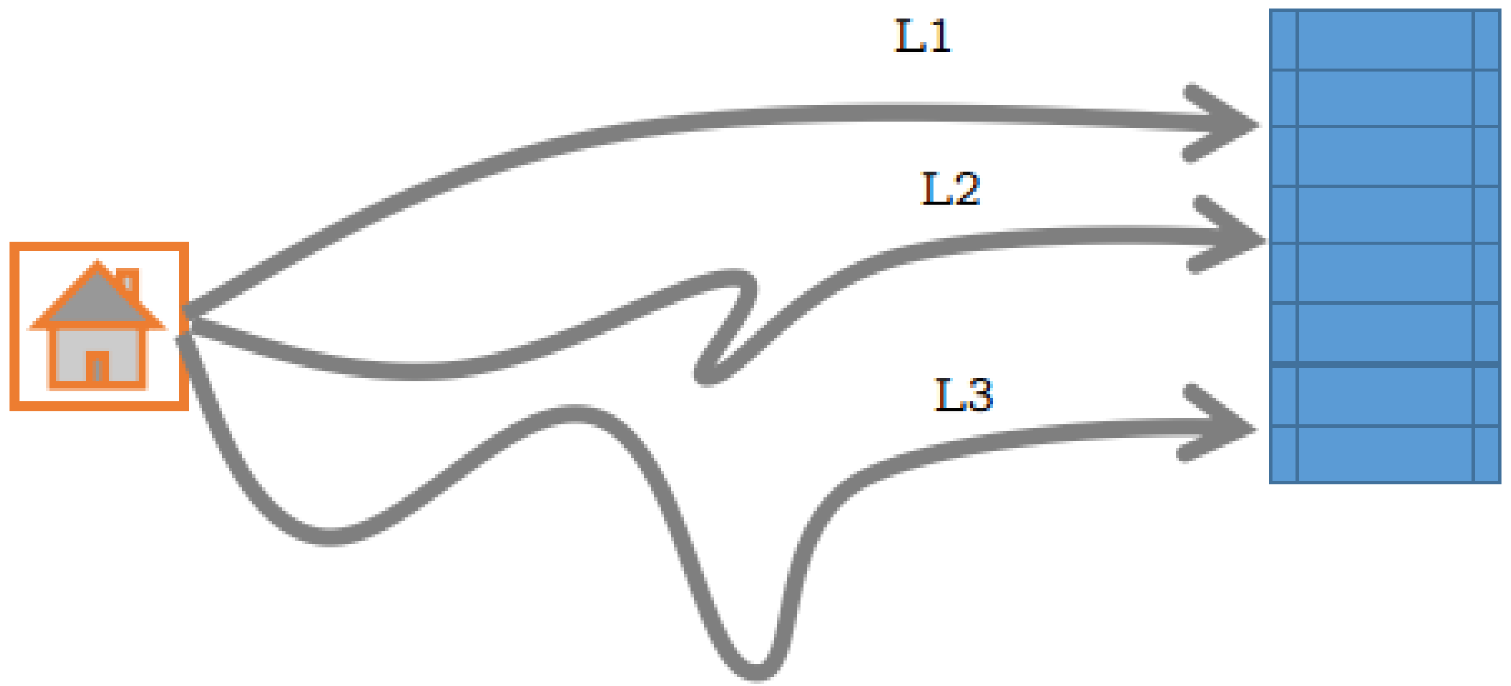
贝叶斯公式

- 定理：设试验E的样本空间为S， A为E的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，且$P\ (A) > 0, P\ (B_i) > 0, i = 1, 2, 3 \ldots n$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\, P(B_j)}$$

称为贝叶斯公式

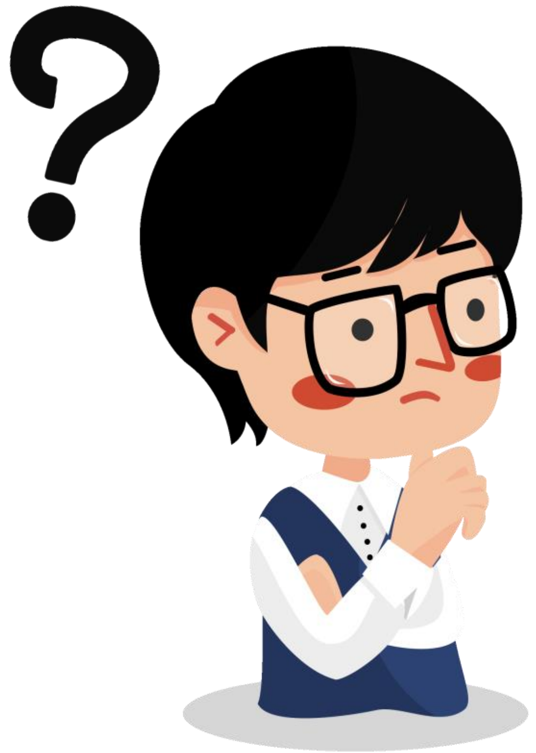
案例



仍然使用刚才的案例，但是问题发生了改变

请问：到达公司未迟到选择第一条路的概率是多少?

思考题



01

全概率公式和贝叶斯公式有什么区别，它们分别适用于什么样的问题

小结

本节小结

- 熟练掌握概率论的基础概念
- 掌握全概率公式和贝叶斯公式的使用场景

谢谢观看

参考书目：概率论与数理统计·第四版（浙江大学） 高等教育出版社

网易云课堂 × 微专业