光的干涉

例题1

波长为 λ 的单色光在折射率为 n 的媒质中由 a 点传到 b 点，相位改变了 π ，则光从 a 点到 b 点的几何距离为?

该单色光在折射率为 n 的媒质中的波长 λ' 满足

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

设 a 点到 b 点的几何距离为 x ，则有

$$\phi_{ab} = x\,\frac{2\pi}{\lambda'} = \pi$$

则

$$x = \frac{\lambda'}{2} = \frac{\lambda}{2n}$$

这里需要牢记波的**相位** ϕ 和**距离** x 之间的比例关系：

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{x}{\lambda}$$

例题2

下列说法中正确的是?

1. 相等光程的几何距离必然相等
2. 光行进相同的光程，经历的时间必然相等
3. 几何距离越大的，其光程必然较大
4. 相同的光程必然有相同的对应的真空距离

辨析1

光程除了与**几何距离**相关，还和介质的**折射率**相关，若光程为 r ，通过折射率分别为 n_1 和 n_2 的介质，其几何距离 x_1 和 x_2 有如下关系：

$$r = n_1 x_1 = n_2 x_2$$

换句话说，光程差一定，介质折射率越大，几何距离越短；介质折射率越小，几何距离越长。

这个原理同时也可以解释波从一个介质进入另一个介质的时候，**频率**、**波长**、**波速**的变化情况：

当波从**光疏媒质**进入**光密媒质**中时，频率不变，波长变小，导致波速变小

当波从**光密媒质**进入**光疏媒质**中时，频率不变，波长变大，导致波速变大

辨析2

由辨析1已经解释，相同的光程，其几何距离不一定相同。

但是，不同介质中波的传播速度也不同，请看如下推导

若有一在真空中波长为 λ 的单色光，以光速 c 进入折射率为 n 的介质中，假设光进入介质后波长变为 λ' ，其速度为 v

对于光的传播，有如下表达式成立

$$c = f\lambda$$

进入介质之后，频率不变，而波长改变

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

因此

$$v = f\lambda' = \frac{f\lambda}{n} = \frac{c}{n}$$

假设在真空中，光走过光程为 l 其对应的几何距离 l 所需要时间为 t

$$t = \frac{l}{c}$$

则在介质中，光走过光程为 l 其对应的几何距离 $l' = \frac{l}{n}$ 所需要的时间为 t'

$$t' = \frac{l'}{v} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{c}{n}} = \frac{l}{c} = t$$

辨析3

几何距离由**光程**和介质**折射率**共同确定，这三个量由一个关系式约束，知二求一。

设几何距离为 x ，光程为 r ，介质折射率为 n ，则

$$r = nx$$

所以几何距离越大，除非折射率一定，否则光程不一定越大。

辨析4

光程一定，意味着波在各种介质中传播的几何距离，折算到真空中传播的几何距离相同。

综上

选项1和3是错的，2和4是对的，但为了尊重参考答案，选4

例题3

　　在杨氏双缝实验中，为使屏上干涉条纹间距变大，可采用的办法是?

设屏与缝之间的距离为 D ，两缝之间相距为 d ，则 k 级明纹与零级明纹之间的距离为 x_k ，则杨氏双缝实验的亮纹分布为

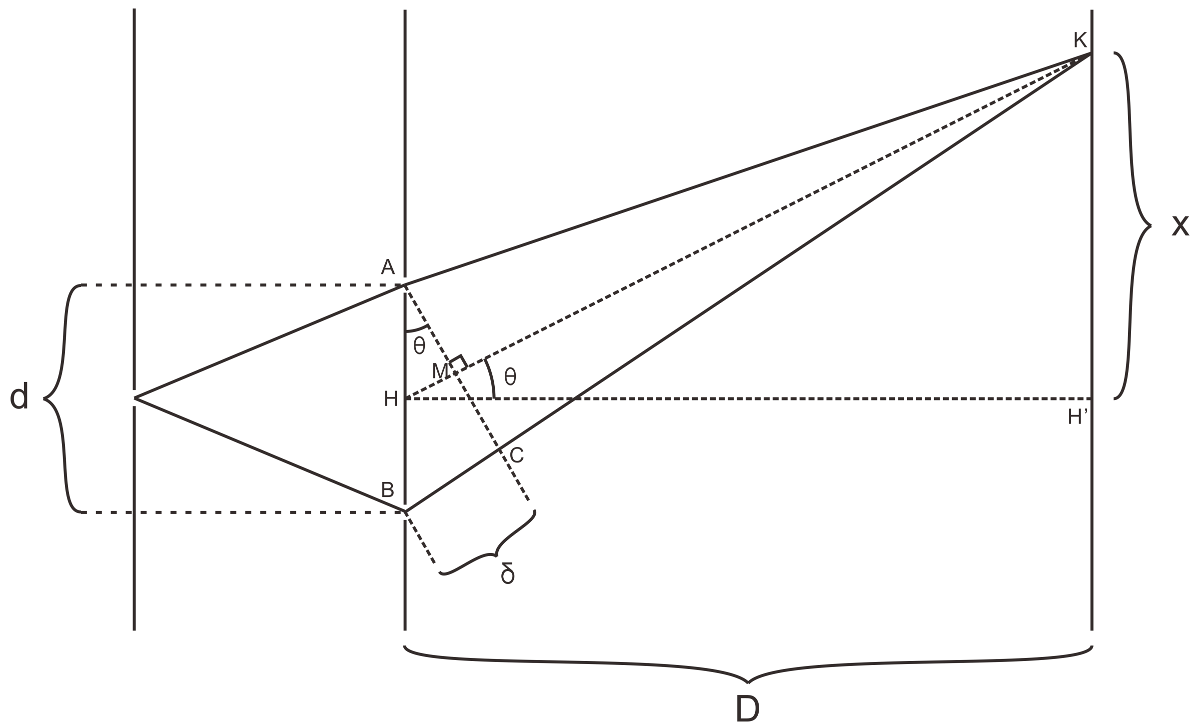
$$x_k = \frac{D}{d} k\lambda \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$$

相邻两条亮纹之间的距离为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{d}\lambda$$

要使得条纹间距变大，可以减小 d 或者增大 D 或 λ

这里我将完整地理一下杨氏双缝实验公式推导：



如上图所示，过两缝A与B的中点H做一条与水平线HH'夹角 θ 的直线，与屏幕交于一点K ，过A点做HK的垂线AM与BK交于点C

要明确的是，上图只画出了对于一个特定的 θ 时的情况，实际上，对于 θ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 中任意的取值，都能找到一个唯一确定的K点与之对应，我们就是借此分析右方的屏上呈现的所有情况。

在刚刚所做的辅助线中，存在一对相似三角形

$$\Delta\mathrm{AMH}\sim\Delta\mathrm{HH'K}$$

这时

$$\angle\mathrm{HAM}=\angle\mathrm{H'HK}=\theta$$

将边长和角度关联起来，有

$$\begin{gathered}\delta=d\sin\theta\\ x=D\tan\theta\end{gathered}$$

由于实际情况 $\theta\ll 1$ ，这个时候，使用**等价无穷小**简化表达式，最终得到

$$\begin{gathered}\delta\approx d\theta\\ x\approx D\theta\end{gathered}$$

这个时候有

$$x=\frac{D}{d}\delta$$

其中 δ 为从点A与点B射出的相干光的光程差，其大小决定了条纹分布：

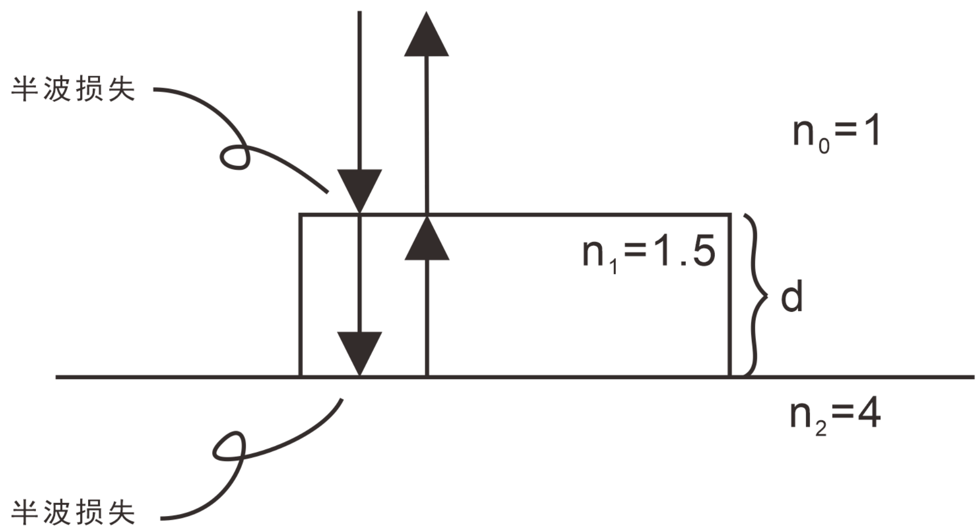
$$\delta=\begin{cases}\pm k\lambda,\text{明纹}\\ \pm(k+\dfrac{1}{2})\lambda,\text{暗纹}\end{cases}$$

带入上式就有

$$\delta=\begin{cases}\pm\dfrac{D}{d}k\lambda, \text{明纹}\\ \pm\dfrac{D}{d}(k+\dfrac{1}{2})\lambda, \text{暗纹}\end{cases}$$

例题4

硅 ($n=4$) 片上的二氧化硅 ($n=1.5$) 薄膜，对由空气垂直入射的波长为 $570\,\mathrm{nm}$ 的黄光反射加强，则薄膜的厚度至少为?



设该薄膜厚度为 d ，已知该黄光的波长为 λ ，光从空气中射入薄膜到垂直反射回空气中，经历了两个半波损失，设光程差为 r ，其**干涉加强**的条件满足

$$r=2n_1d+\lambda=k\lambda \qquad (2,3,4,\cdots)$$

可以解得

$$d=\frac{(k-1)\lambda}{2n_1} \qquad (2,3,4,\cdots)$$

当 $k=2$ 的时候，$d=190\,\mathrm{nm}$ 最小

例题5

杨氏双缝的间距为 $0.2\,\mathrm{mm}$ 距离屏幕为 $1\,\mathrm{m}$ 求：

(1). 若第一到第四明纹的距离为 $7.5\,\mathrm{mm}$ ，求入射光波长

(2). 若入射光的波长为 $600\,\mathrm{nm}$ ，求相邻两明纹的间距

解析1

已知 $D=1\,\mathrm{m}$, $d=0.2\,\mathrm{mm}$

第一明纹位置 x_1 和第四明纹位置 x_2 为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1\cdot\frac{D}{d}\lambda \\
x_4 &= 4\cdot\frac{D}{d}\lambda
\end{aligned}
$$

距离差为

$$\Delta x = x_4 - x_1 = 7.5\,\mathrm{mm}$$

由此可得

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{d}{D}\Delta x \approx 500\,\mathrm{nm}$$

解析2

设第 k 级明纹的位置为 x_k ，有

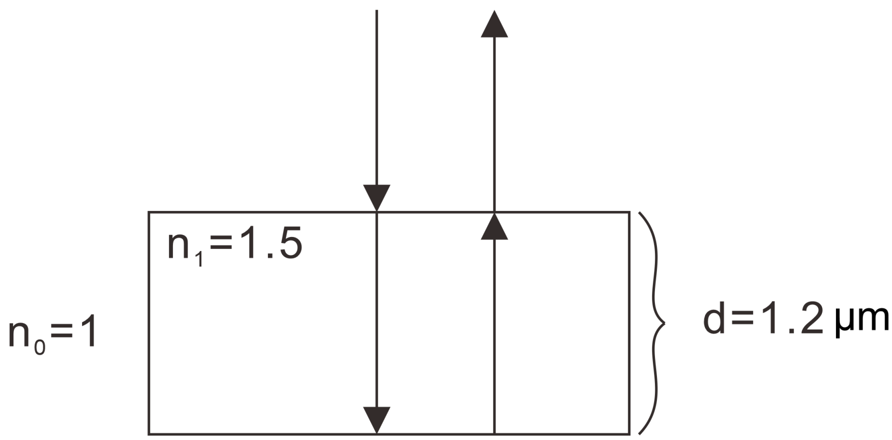
$$x_k = \frac{D}{d}k\lambda$$

相邻两个明纹间距为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{d}\lambda \approx 3\,\mathrm{mm}$$

例题6

一块厚 $1.20\,\mu\mathrm{m}$ 的折射率为 1.50 的透明膜片，设以波长介于 $400 \sim 760\,\mathrm{nm}$ 的可见光垂直入射，求反射光中哪些波长的光最强?



如图所示，设射入光线与射出光线的光程差为 δ ，则出现亮纹的区域满足

$$\delta = 2n_1 d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

故有

$$\lambda = \frac{2n_1 d}{k - \frac{1}{2}} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

可以列出来

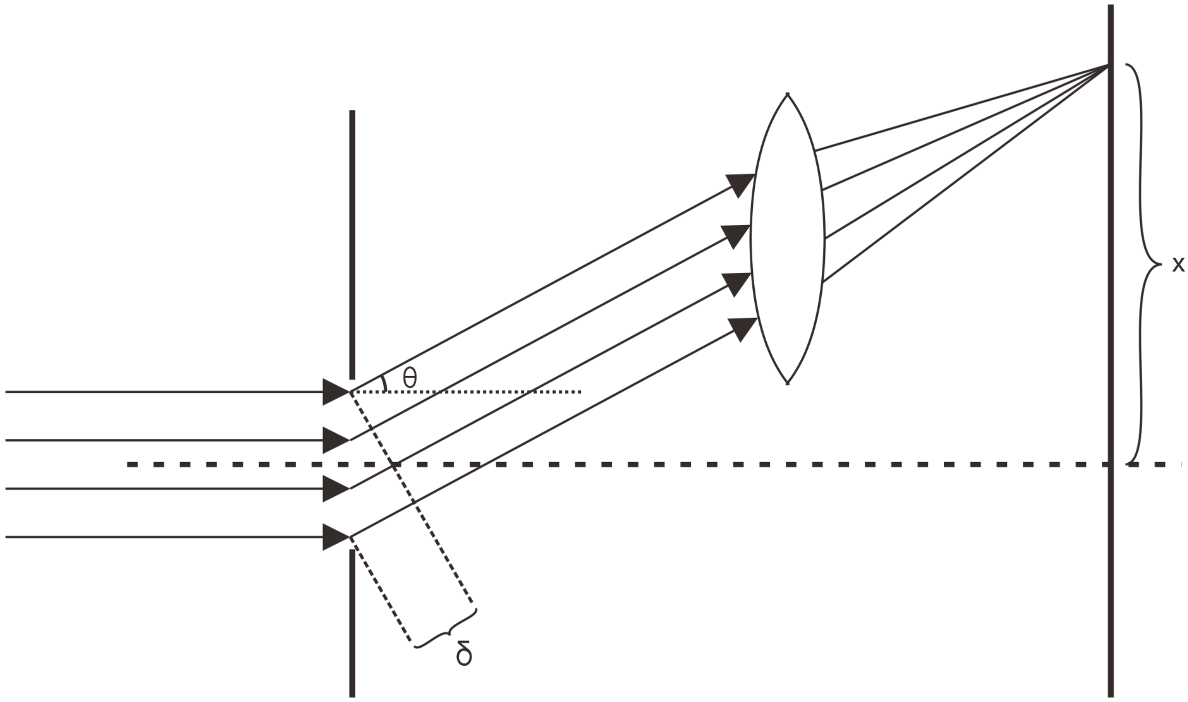
$$\begin{aligned} k &= 5 \qquad & \lambda &= 800\,\mathrm{nm} \\ k &= 6 \qquad & \lambda &\approx 655\,\mathrm{nm} \\ k &= 7 \qquad & \lambda &\approx 554\,\mathrm{nm} \\ k &= 8 \qquad & \lambda &= 480\,\mathrm{nm} \\ k &= 9 \qquad & \lambda &\approx 424\,\mathrm{nm} \\ k &= 10 \qquad & \lambda &= 379\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

在这之中可取 $6 \le k \le 9$ ，即满足条件的波的波长为 $655\,\mathrm{nm}$、$554\,\mathrm{nm}$、$480\,\mathrm{nm}$、$424\,\mathrm{nm}$ 。

光的衍射

例题1

　　以波长为 $660\,\mathrm{nm}$ 的单色平行光垂直照射到宽度 $a = 0.20\,\mathrm{mm}$ 的单缝上，设某级衍射暗纹出现在 $\theta = \arcsin(0.0165)$ 的方向上，则单缝处的波阵面对该方向而言可分成______个半波带，该暗纹的级次为______ 。



光线通过该狭缝发生衍射，表现出波动性，向前方各个方向发散开来，考虑其中一个方向 θ 的情况，在 x 位置出现暗条纹的条件必须满足

$$\delta = a\sin\theta = \pm 2k\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

在这里注意 k 的取值是从 1 开始，不包括 $k=0$ 的情况，因为中央明纹比较特殊，中央明纹的宽度为其他相邻明纹宽度的**两倍**！

由题目给出的数据可以求得光程差 δ 为

$$\delta = a\sin\theta = 0.2\,\mathrm{mm}\ \times 0.0165 = 3.3\,\mu\mathrm{m}$$

很显然

$$3.3\,\mu\mathrm{m} = 10\times\frac{\lambda}{2}$$

即光程差 δ 中含有 10 个半波带，即 $2k=10$ ，因此是第 5 级暗纹。

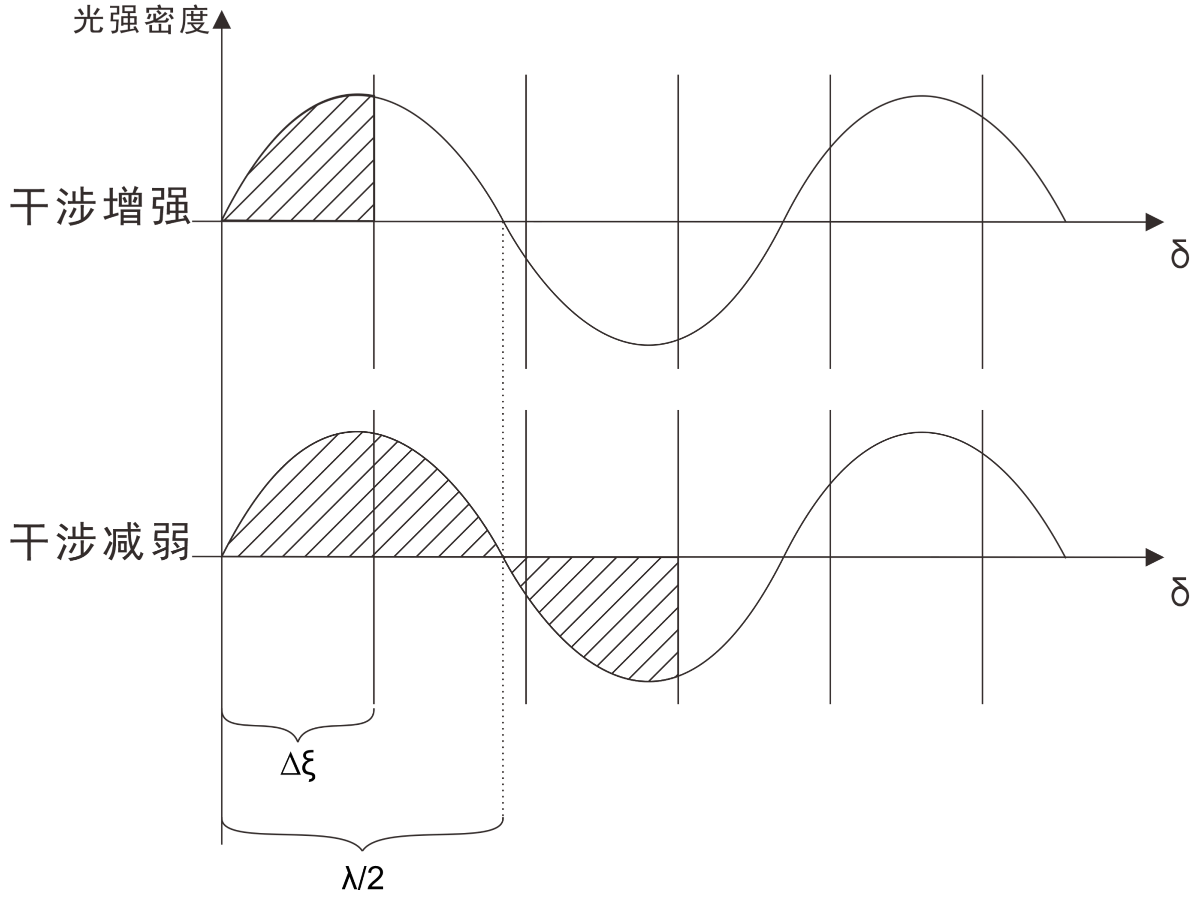
在此处补充一些对于单缝衍射**半波带法**的理解

衍射的本质也是干涉，干涉一般意义上理解为两列或者两列以上的波在空间中发生叠加，导致新生成波的某一部分始终**相长**，另一部分始终**相消**的现象。

教科书上的 “干涉” 一般是指两个波源之间的干涉，而衍射是指无穷个连续波源共同作用的干涉。

半波带法是一种分析单缝衍射的近似方法，它仅仅考虑相邻两个半波带之间的干涉，而实际情况则是任意波带间都会发生干涉。

如上图所示，狭缝的上边沿到下边沿之间通过的光线有无数条，根据惠更斯原理的阐述，每一条光线都可以看作是一个单独的波源，屏上每一个点处的光照强度都是所有波源叠加的结果。



观察上图，光强即为阴影部分面积，可以看见，偶数倍的半波带会两两相消，奇数个半波带就不会。

在此补充，上图是不准确的，实际图像并非每个波带相等，半波带法本身是为方便计算而得到的近似方法。

例题2

在单缝夫琅禾费衍射实验中，波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度 $a=5\lambda$ 的单缝上，对应于衍射角 θ 的方向上，若单缝处的波面恰好可以分成 5 个半波带，则衍射角 θ = ______ 。

$$a\sin\theta=\pm5\cdot\frac{\lambda}{2}$$
$$5\lambda\sin\theta=\pm5\cdot\frac{\lambda}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$$
$$\theta=\pm30^\circ$$

例题3

用波长为 550 nm 的单色平行光垂直照射在没厘米刻有 5000 条刻痕的平面光栅上，则此光栅的光栅常数为 ______ nm，能观察到的完整谱线的最大级次为 ______ 级。

光栅常数为

$$d=\frac{1\,\mathrm{cm}}{5000}=2\,\mu\mathrm{m}=2000\,\mathrm{nm}$$

还要记住光栅衍射中，干涉主极大值的分布

$$d\sin\theta=\pm k\lambda\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

最大级次的明纹出现在 $\sin\theta=1$ 的时候

$$d=k\lambda$$
$$k=\frac{d}{\lambda}\approx3.64$$

因此 k 最大可取 3

例题4

一束波长为 λ 的单色平行光垂直照射到宽为 a 的单缝上，若屏上的某点为第三级明纹中心，则单缝两边缘处光线之间的光程差为?

第 k 级明纹中心满足

$$\delta = a\sin\theta = \pm(2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

第三级明纹则取 $k=3$

$$\delta = \pm\frac{7\lambda}{2}$$

例题5

波长为 λ 的单色平行光垂直照射到单缝上，若对应于某一衍射角 θ ，最大光程差 $\delta = \frac{\lambda}{2}$ ，则屏上对应的 P 点是?

由半波带法得到的光强分布表达式

$$\delta = a\sin\theta = \begin{cases} 0, & \text{中央明纹} \\ \pm k\lambda, & \text{暗纹中心} \\ \pm(k+\frac{1}{2})\lambda, & \text{明纹中心} \end{cases} \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

其中最小级次的暗纹中心在 $-\lambda$ 和 λ 上，也就是说 $\frac{\lambda}{2}$ 在中央明纹中，因此 P 点在中央明纹内。

例题6

一束单色平面电磁波垂直照射在每厘米刻有 4000 条刻痕的衍射光栅上，若第二级主最大出现在与法线成 30° 夹角处，则电磁波波长为?

光栅常数为

$$d = \frac{1\,\mathrm{cm}}{4000} = 2.5\,\mu\mathrm{m}$$

由题意得干涉主极大值分布

$$d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

第二级著最大取 $k=2$ ，有

$$\lambda = \frac{d\sin\theta}{2} = 625\,\mathrm{nm}$$