极大线性无关组深度剖析

例题：

　　求向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)^T,\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T,\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T,\alpha_4=(1,1,-2,7)^T,\alpha_5=(2,4,4,9)^T$的一个最大无关组并将其余向量用其线性表出.

我们看到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 都是行向量，但在分析向量的线性相关性的时候，我们统一将其变换为列向量。

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix}\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}\quad \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\9\end{pmatrix}$$

将他们作为分块矩阵，拼合在一起

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

然后做初等行变换进行化简

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

到这里我相信大家会有很多疑问，接下来我会去解释这么做的意义。

解析

在前面解线性方程组的过程中，我们知道，**初等行变换不会改变原方程的解**，这就是最重要的性质，而我们正是利用了这一点，当我们把需要去分析的向量全都写成**列向量**开始，我们就是在运用解线性方程组的基本步骤。直观来讲，它实际上是这样做的：

$$k_1\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}+k_5\begin{pmatrix}2\\4\\4\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\\k_5\end{pmatrix}$$

题目要求该向量组的极大无关组，根据**线性相关**的定义

设$\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$是一个向量组. 若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$, 则称向量组$\Delta$**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

所以原问题就转换成了另一个问题，那就是找到一组不全为零的系数 k_i 使得下式成立

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\\ k_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

而我们刚刚得到，经过初等行变换之后，这个解和下式**同解**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\\ k_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

两者解出来的 k 是完全**等价**的，而后者是前者通过**初等行变换**化为了最简行矩阵，经过观察结果是显然的

在这里，只要保证 k 不全为零，k 有很多种取法能满足该方程：

$$k'=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad k''=\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\qquad k'''=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\qquad k''''=\cdots$$

上面只是举出个别例子，实际上取法有 **无数** 种，只要 k 满足以下通解，都能成立

$$k=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\qquad (c_1,c_2\text{为任意常数})$$

为了进一步理解 k 为何如此取值，我拿 k' 为例，它就是能证明原向量组**线性相关**的**充分条件**，它同时又说明了

$$\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'=\mathrm{O}$$

其中 α_i' 表示经过初等行变换后的系数矩阵的第 i 列。

我们最终的目标是求得**极大线性无关组**，而极大线性无关组，就是要保证原向量组**秩**不变的基础上，将任何其他**多余的向量**去掉后得到的向量组。

比如最简单的，我们一般会选择 {第一列，第二列，第四列} 的向量来作为**极大线性无关组**，因为它够简单：

$$(\,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_4'\,)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

在这里，α_3' 和 α_5'是多余的，为什么?

因为

$$\begin{cases}\alpha_3'=-\alpha_1'-\alpha_2'\\ \alpha_5'=4\alpha_1'+3\alpha_2'-3\alpha_4'\end{cases}$$

这个时候如果把 α_3' 和 α_5' 放进来，那向量组就不是**线性无关**了，也就不配叫作**极大线性无关组。**

然而现在还有一个问题尚未解释明白，就是变换前的 α 和变换后的 α' 之间到底是什么关系，前面说了，他们之间是经过**初等行变换**联系起来的，换句话说，α_i 的**线性组合**与 α_i' 是对应的。

比如对于上述分析中

$$\begin{cases} \alpha_3' = -\alpha_1' - \alpha_2' \\ \alpha_5' = 4\alpha_1' + 3\alpha_2' - 3\alpha_4' \end{cases}$$

下式一样成立

$$\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4 \end{cases}$$

带入验证可以发现

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

完全成立。

所以最后，该向量组的**极大线性无关组**，可以取

$$\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4\} \text{ 或 } \{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_5\} \text{ 或 } \{\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4\} \text{ 或 } \{\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5\}$$