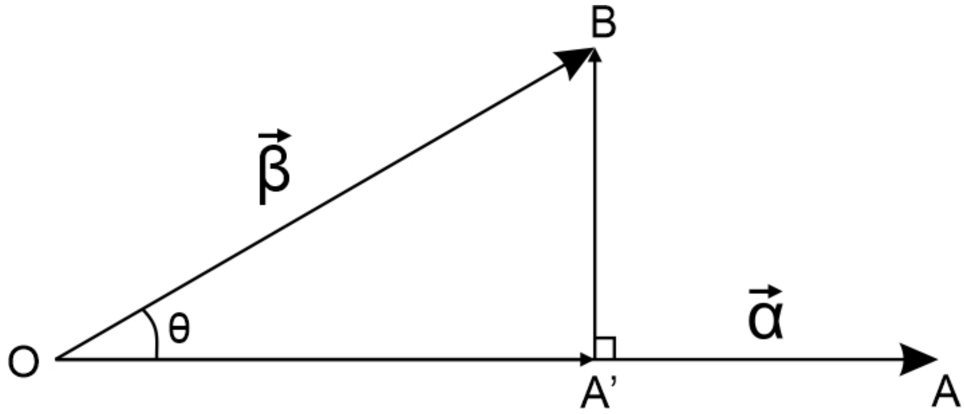
施密特正交化

基本原理

如图所示，其中 $\vec{\alpha}$ 为从点 O 到点 A 的向量， $\vec{\beta}$ 为从点 O 到点 B 的向量，它们的夹角为 θ



施密特正交化的原理就是提取向量 $\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha}$ 相**正交**的分量 $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$ ，而舍去**平行**分量 $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ ，从而简化向量组的构成。

$$\overrightarrow{\mathrm{A'B}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$$

其中向量 $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ 是向量 $\vec{\beta}$ 在向量 $\vec{\alpha}$ 方向上的**投影**， 因为我们知道

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cos\theta$$

因此向量 $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ 的**长度**可写作

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right| = |\vec{\beta}| \cos\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|}$$

然后再考虑向量 $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ 的**方向**，只需要乘上一个 $\vec{\alpha}$ 的单位向量 $\vec{e}$ 即可，即

$$\vec{e} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$$

所以向量 $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$ 可以由原来的两个向量 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 唯一确定：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right| \vec{e} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|}\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\times\vec{\alpha}$$

因此我们待求的向量 $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$，现在记作 $\overrightarrow{\beta_{\perp}}$，可以写作

$$\overrightarrow{\beta_{\perp}} = \vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\times\vec{\alpha}$$

可以验证 $\overrightarrow{\beta_{\perp}} \perp \vec{\alpha}$，此时已经完成了**正交化**，为了进一步简化向量组，需要将正交化后的向量组进行**单位化**，即使其**模**缩放为1

$$\overrightarrow{\beta'} = \frac{\overrightarrow{\beta_{\perp}}}{|\overrightarrow{\beta_{\perp}}|}$$

这里我只介绍了二维空间向量组的正交化，即将**两个**向量正交化，如果在三维空间，就有三个两两正交的向量作为**基向量**，最典型的就是我们高中数学空间解析几何中的 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 了。

$$\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

将它们构成一个3阶方阵，正好是一个单位矩阵，是一个最简单的正交矩阵。

总而言之，施密特正交化就是将一“线性无关的向量组”标准化为“其中向量两两正交的向量组”，从平面几何上理解，就是将一个平行四边形(扭曲的正方形)拉伸为一个边长为1的标准正方形。