已知系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=6e(t)$ ，其中 $r(0_-)=1,\ r'(0_-)=0,\ e(t)=2u(t)$ ，求 $t>0$ 时系统的全响应 $r(t)$ 、零输入响应 $r_{zi}(t)$ 、零状态响应 $r_{zs}(t)$ 。

零输入响应

零输入响应即令输入的激励信号 $e(t)=0$ 时候由系统内部初始状态产生的响应。

由于没有输入 (不存在输入的冲激信号使得初始值在 0_- 到 0_+ 发生跃变，故 $r(0_+)=r(0_-)=1,\ r'(0_+)=r'(0_-)=0$

即求解：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}r(t)+5\dfrac{d}{dt}r(t)+6r(t)=0\\ r(0_+)=1\\ r'(0_+)=0\end{cases}$$

解得 $z_{zi}=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}$

求解微分方程（一）

对于二阶齐次线性常系数微分方程，利用特征方程来确定通解 r_{zi} 。

$$s^2+5s+6=0$$

解为

$$\begin{aligned}s_1&=-2\\ s_2&=-3\end{aligned}$$

因此

$$r_{zi}(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}$$

带入初始条件

$$\begin{cases} r(0_+) = C_1 + C_2 = 1 \\ r'(0_+) = -2C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

因此最后可得

$$r_{zi}(t) = 3\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t}$$

零状态响应

零状态响应即令系统初始状态为零 ($r(0_-) = r'(0_-) = r''(0_-) = \cdots = 0$)，在这个情况下，由外部输入的激励信号使得系统产生的响应 r_{zs}。

在这个条件下，当 $t < 0$ 时， $r_{zs}(t) = 0$ (题目不要求 $t < 0$ 的部分，但为了写完整这一步)

当 $t = 0$ 时，由于方程右侧包含阶跃函数 $u(t)$ ，所以 $r(0_+) = r(0_-) = 0,\ r'(0_+) = r'(0_-) = 0$

当 $t > 0$ 时，方程变为求该方程的全解 (齐次通解+非齐次特解)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}r(t) + 5\dfrac{d}{dt}r(t) + 6r(t) = 12 \\ r(0_+) = 0 \\ r'(0_+) = 0 \end{cases}$$

解得 $z_{sz} =$

解微分方程（二）

该方程是二阶非齐次线性常系数微分方程，其对应齐次方程的通解的形式在上面已经求出

$$z_{zs1}(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t}$$

查表可知，该方程的特解形式为

$$z_{zs}^{*}(t) = A \qquad (A\text{为常数})$$

带入微分方程

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 5\frac{dA}{dt} + 6A = 12$$

解得 $A = \frac{1}{3}$ ，即

$$z_{zs}(t) = z_{zs1}(t) + z_{zs}^{*}(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t} + 2$$

带入初始条件

$$\begin{cases} r(0_+) = C_1 + C_2 + 2 = 0 \\ r'(0_+) = -2C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -6 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

最后可得

$$z_{zs}(t) = -6\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{-3t} + 2$$

全响应

全响应即为零输入响应和零状态响应的和

$$z(t) = z_{zi}(t) + z_{zs}(t) = -3\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} + 2 \qquad (t > 0)$$