例题1

已知矩阵 A 的行列式为

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&4\\2&3&4&-1\\-2&1&3&0\end{vmatrix}$$

求 $\mathrm{A}_{31}+\mathrm{A}_{32}+\mathrm{A}_{33}+\mathrm{A}_{34}$

解析：

某元素位置的代数余子式与所在行所在列元素无关。

换句话说，第三行各元素的代数余子式与第三行元素大小无关

因此将第三行的 $2,3,4,-1$ 换成任何数字，都不会改变 $\mathrm{A}_{31},\mathrm{A}_{32},\mathrm{A}_{33},\mathrm{A}_{34}$ 的大小

这时可以用到的一个技巧就是将行列式的第三行换成 $\mathrm{A}_{31}+\mathrm{A}_{32}+\mathrm{A}_{33}+\mathrm{A}_{34}$ 的系数 $1,1,1,1$

这时候 “求第三行代数余子式和” 的问题就转换成了 “求新行列式的值” 的问题

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&4\\1&1&1&1\\-2&1&3&0\end{vmatrix}=-14$$

例题2

求行列式

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1+x&1&1&\cdots&1\\1&1+x&1&\cdots&1\\1&1&1+x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+x\end{vmatrix}_{n\times n}$$

解法一（升阶法）

当 $x=0$ 的时候，行列式必为 0

当 $x\neq 0$ 的时候

将原行列式恒等扩充为 $n+1$ 阶

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

将第一行的-1倍加到其他所有行，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

将除了第一列的所有列的 $\frac{1}{x}$ 倍加到第一列

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{n}{x} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

此时为一个上三角矩阵，其行列式为主元素的连乘

$$|A| = (1+\frac{n}{x})\, x^n$$

综上所述

$$|\mathrm{A}| = x^n + nx^{n-1}$$

解法二（递推法）

将 n 阶的行列式 $|\mathrm{A}|$ 记作 I_n

从第二行开始将本行的-1倍加到上一行，得到

$$
\mathrm{I}_n = \begin{vmatrix} x & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{n\times n}
$$

对其进行列展开，即

$$
\mathrm{I}_n = x\begin{vmatrix} x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^n \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}
$$

比较第一项的行列式和原行列式，发现它们形式一致，只是降了一阶

再看第二项的行列式，是个下三角矩阵的行列式，其值为主对角线元素的乘积，因此可以得到

$$
\mathrm{I}_n = x\mathrm{I}_{n-1} + x^{n-1}
$$

随着 I_n 阶数的降低，不难得到

$$
\mathrm{I}_1 = 1 + x
$$

我们将行列式问题转换为了一个求递推数列通项公式的问题，要求解这个递推数列通项，我们构造新的数列

$$
T_n = \frac{\mathrm{I}_n}{x^n} = \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{1}{x}
$$

此时数列 $\{T_n\}$ 是一个公差为 $\frac{1}{x}$ ，首项为 $T_1 = \frac{1+x}{x}$ 的等差数列

$$
T_n = (n-1)\frac{1}{x} + T_1
$$

因此

$$
T_n = \frac{x+n}{x} = \frac{\mathrm{I}_n}{x^n}
$$

可得

$$
\mathrm{I}_n = x^n + nx^{n-1}
$$