振动与波动例题解析

选择题

例题1

一物体做简谐振动，运动方程为 $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$，在 $t = \frac{T}{4}$ 时刻 (T 为周期)，物体的速度和加速度为?

解:

已知运动方程，速度和加速度表达式如下

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

角频率与周期的关系 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，带入可得

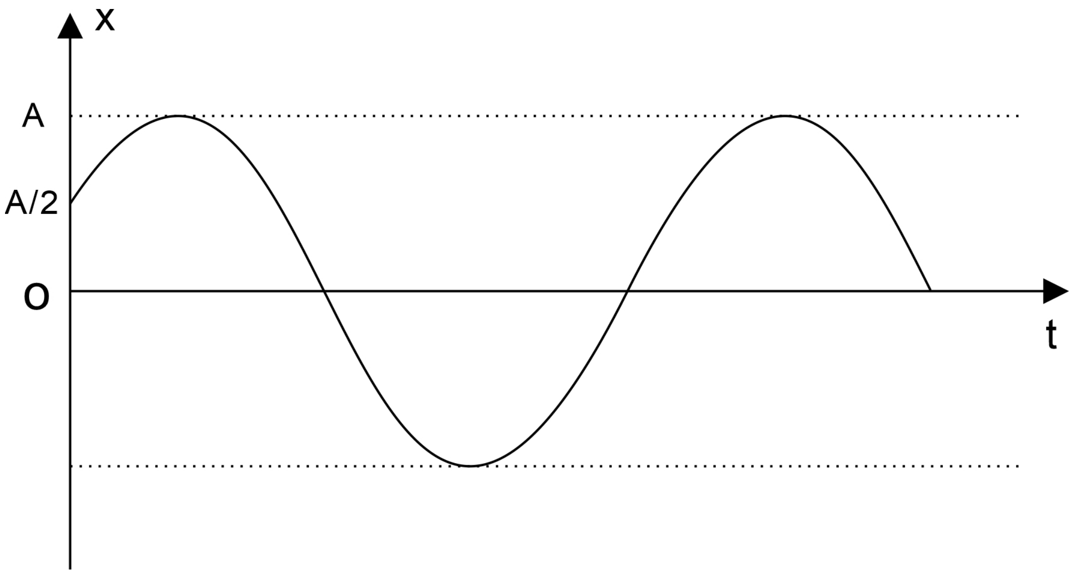
$$x(\frac{T}{4}) = A\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$v(\frac{T}{4}) = -\omega A\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega$$

$$a(\frac{T}{4}) = -\omega^2 A\cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$$

例题2

质点做简谐振动，若其位移（实为位移在x轴上投影）与时间的曲线如图所示，则该质点做简谐振动的初相位为?



解:

设该简谐振动的方程为 $x = A\cos(\omega t + \phi)$

当 $t = 0$ 时，令

$$A\cos(\phi) = \frac{A}{2}$$

得到

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}$$
$$\phi = \pm\frac{\pi}{3}$$

观察图像，当 $t = 0$ 时，有

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\phi) > 0$$
$$\sin(\phi) < 0$$

因此

$$\phi = -\frac{\pi}{3}$$

例题3

若一机械波的表达式为 $y = 0.03\cos[6\pi(t + 0.01x) + \frac{\pi}{3}](\mathrm{m})$ 则下面叙述正确的是?

A. 其振幅为 $3\mathrm{m}$

B. 其周期为 $\frac{1}{3}\mathrm{s}$

C. 其波速大小为 $10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

D. 此波沿x轴正方向传播

解:

对照机械波的标准表达式

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\phi]$$

可得 $A=0.03\,\mathrm{m}$ 、$\omega=6\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ，$u=100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ，$\phi=\frac{\pi}{3}$ ，因此

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{3}\,\mathrm{s}$$

因此选项A、C、D错误，只有B是对的

例题4

两列波是相干波的条件?

答:

```
1. 频率相同
```

2. 传播方向相同
3. 相位差为零或相位差固定

例题5

波由一种介质进入另一种介质时，其传播速度、频率和波长的变化情况?

答:

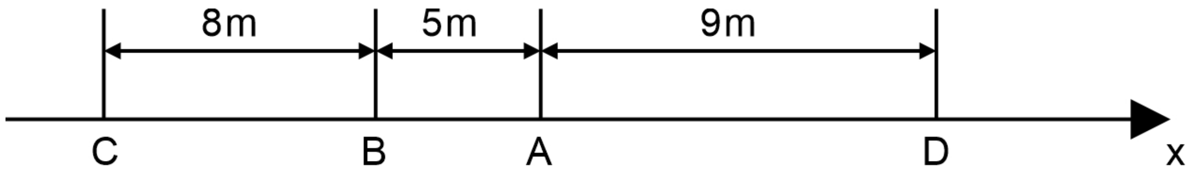
波的频率只和波源的频率有关，和通过的介质无关，而波速与波长与介质有关。

当一个波由一种介质进入另一种介质时，频率不变，而传播速度与波长改变。

计算题

例题T1

如图所示，一平面简谐波以速率 $u=20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 沿x轴正方向传播。已知在传播路径上某点 A 的简谐振动方程为 $y=3\times10^{-2}\ \cos(4\pi t)$ ，式中 y 的单位为 m ， t 的单位为 s 。



(1). 以点 A 为坐标原点，写出简谐波振动方程

(2). 以距离 A 点 $5\,\mathrm{m}$ 处的 B 点为dd坐标原点，写出简谐波运动方程

(3). 写出传播方向上点 C 和点 D 的简谐振动方程

(4). 分别求出 B 、 C 两点和 C 、 D 两点间的相位差

解:

1、根据题目条件，已知

$$u=20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega=4\pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{2}\,\mathrm{s}$$

$$\lambda=Tu=10\,\mathrm{m}$$

故在 A 点处的波动方程为

$$y(x,t) = 0.03\cos(4\pi(t - \frac{x}{20}))(\mathrm{m})$$

2、距离 A 点相距 $5\,\mathrm{m}$ 的 B 点，可求得 A 与 B 间得相位差 ϕ_{AB} 为

$$\phi_{AB} = -\frac{2\pi}{\lambda} \times (x_A - x_B) = -\pi$$

可知 A 点相位比 B 点相位要滞后 π，因此以 B 点为原点的波动方程为:

$$y_B(x,t) = 0.03\cos(4\pi(t - \frac{x}{20}) + \pi)(\mathrm{m})$$

3、继续以 B 点为参考点，C 点的简谐振动方程为当 $x = -8\,\mathrm{m}$ 的时候，此时

$$y_c(t) = y_B(-8,t) = 0.03\cos(4\pi t + \frac{13\pi}{5})(\mathrm{m})$$

D 点的简谐振动方程为当 $x = 14\,\mathrm{m}$ 的时候，此时

$$y_d(t) = y_B(14,t) = 0.03\cos(4\pi t - \frac{9\pi}{5})(\mathrm{m})$$

4、相位差如下

$$\phi_{BC} = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_C) = -\frac{8\pi}{5}$$

$$\phi_{CD} = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_C - x_D) = \frac{22\pi}{5}$$

例题T2

一质点做简谐运动，其运动方程为 $x = 0.1\cos(3\pi t + \frac{2\pi}{3})(\mathrm{m})$，求

(1). 此振动的周期 T、振幅 A、初相位 ϕ

(2). 速度的最大值 v_{max} 和加速度的最大值 a_{max}

解：

1、对比简谐振动的标准方程

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)(\mathrm{m})$$

可知

$$\begin{aligned} &A = 0.1\,\mathrm{m} \\ &\omega = 3\pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ &T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\mathrm{s} \\ &\phi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

2、对运动方程关于时间求导，可得速度与加速度

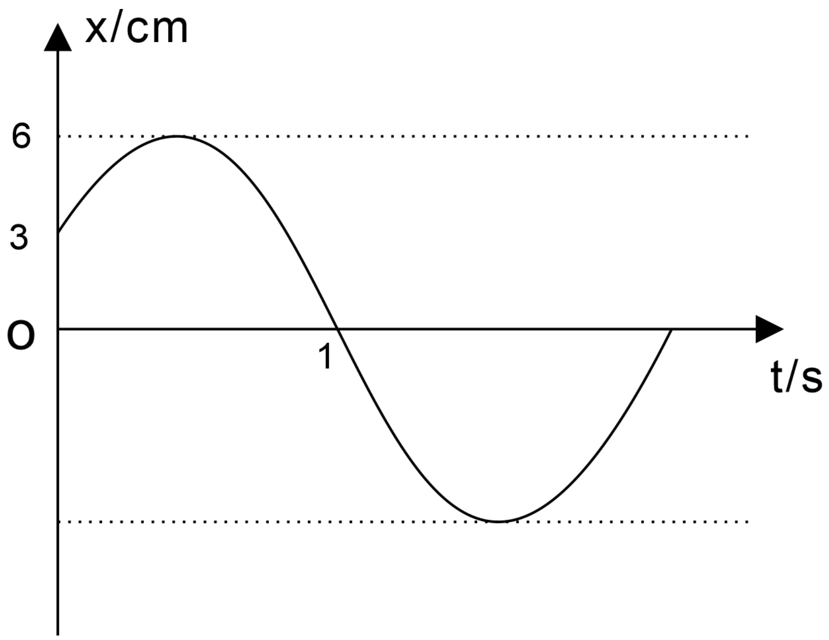
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = -0.3\pi\sin(3\pi t + \frac{2\pi}{3})(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}) \\ a(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = -0.9\pi^2\cos(3\pi t + \frac{2\pi}{3})(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}) \end{aligned}$$

可得速度最大值 $v_{max} = 0.3\pi\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

最大加速度 $a_{max} = 0.3\pi^2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

例题T3

某谐振子的位移（实为位移在x轴上的投影）时间曲线如下图所示，求其振动方程。



解:

设振动方程为

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

由图可知

$$A = 6\,\mathrm{m}$$

由于求初相的时候，我们通常会得到两个角度，这时候需要结合该点的运动方向来判断哪一个符合条件

当 $t = 0$ 的时候

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{1}{2} \\ v_x > 0 \end{cases}$$

因此 $\phi = -\frac{\pi}{3}$ ，重写方程

$$x(t) = 6\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})(\mathrm{m})$$

又当 $t = 1$ 的时候

$$\begin{cases} \cos(\omega - \dfrac{\pi}{3}) = 0 \\ v_x < 0 \end{cases}$$

该方程组等价于

$$\begin{cases} \omega - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{2} \\ \sin(\omega - \frac{\pi}{3}) > 0 \end{cases}$$

因此只有 $\omega = \frac{5\pi}{6}$ ，最终得到振动方程为

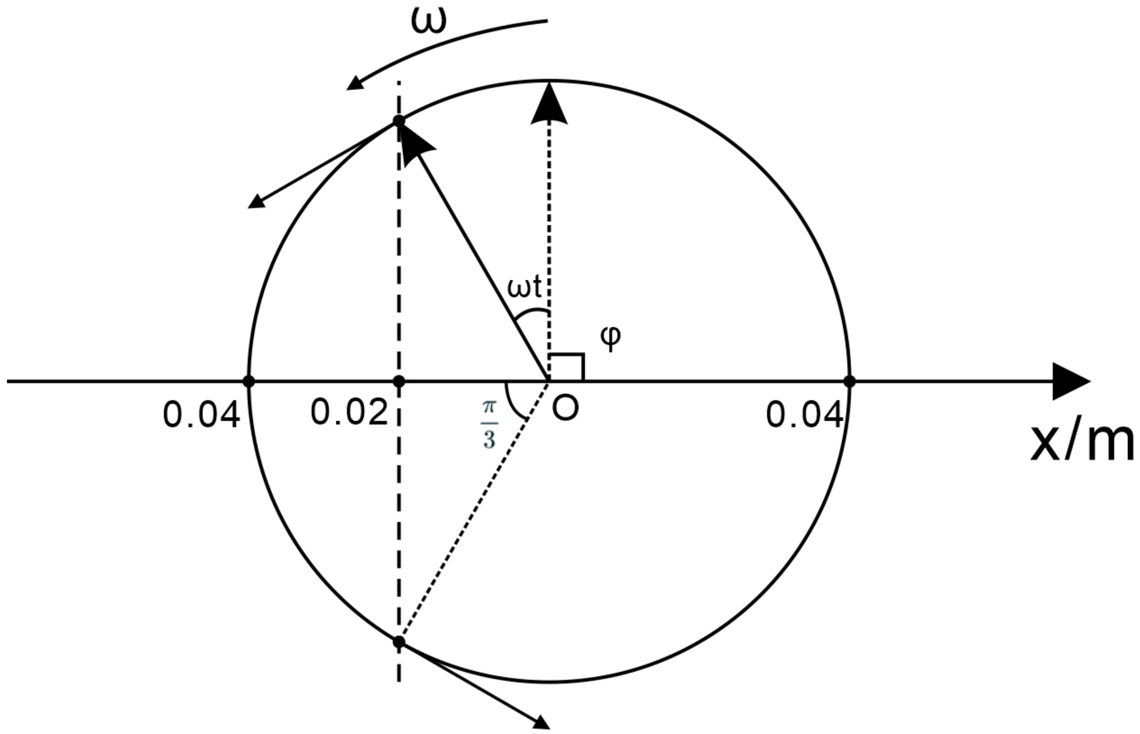
$$x(t) = 6\cos(\frac{5\pi}{6}t - \frac{\pi}{3})(\mathrm{m})$$

例题T4

已知质点的振动方程为 $x = 0.04\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ （SI制），求质点从 $t = 0$ 开始到 $x = -2\,\mathrm{cm}$ 且沿x轴正方向运动所需要的最短时间（用旋转矢量法做）。

解：

旋转矢量法作图如下



观察图像，对应于 $x = -2\,\mathrm{cm}$ 的有两个点，一个点在x轴上方，另一个在x轴下方，由于题目中要求是沿x轴正方向运动的，所以只有下方的那个点满足题意，由此可知矢量转过的角度为 $\frac{5\pi}{6}$

$$\omega t = \frac{5\pi}{6}$$

由于 $\omega = 2\pi$ ，所以可以得到

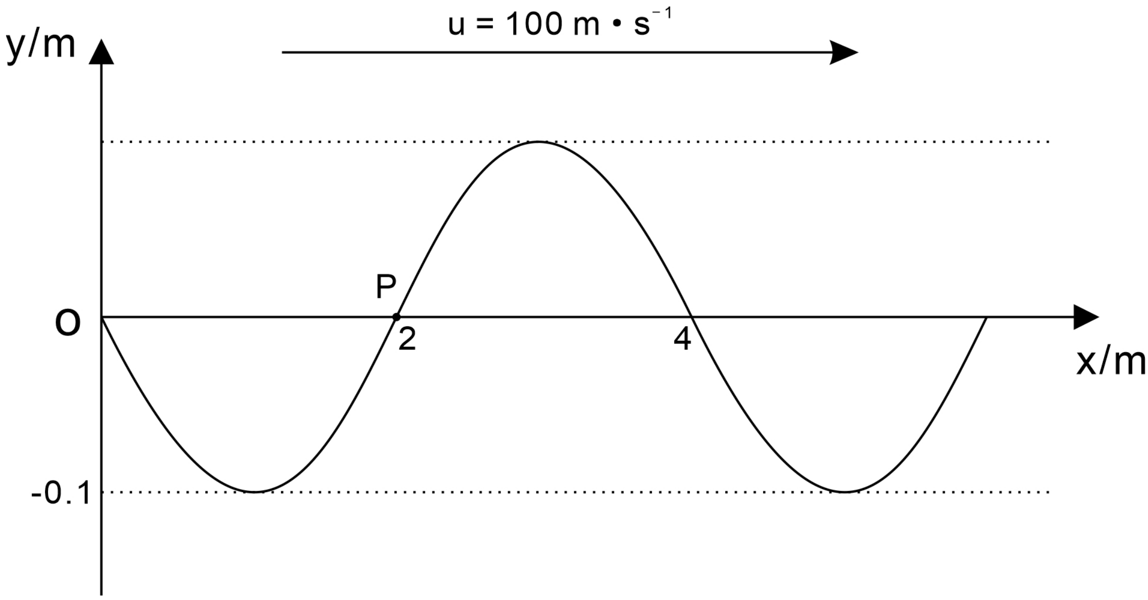
$$t = \frac{5}{12}\,\mathrm{s}$$

例题T5

如图所示为一平面简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图。求:

(1). 该波的波动方程

(2). P 处质点的振动方程



解:

由图像可得已知条件

$$\begin{aligned}
&u = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \\
&\lambda = 4\,\mathrm{m} \\
&T = \frac{\lambda}{u} = \frac{1}{25}\,\mathrm{s} \\
&\omega = \frac{2\pi}{T} = 50\pi\,\mathrm{rad/s} \\
&A = 0.1\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

1、设该波动方程为

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi]$$

带入已知条件

$$y(x,t) = 0.1\cos[50\pi(t - \frac{x}{100}) + \phi](\mathrm{m})$$

我们知道该波形是平面简谐波在 $t=0$ 时的波形，同时我们考虑 $x=0$ 时的情况，这个时候

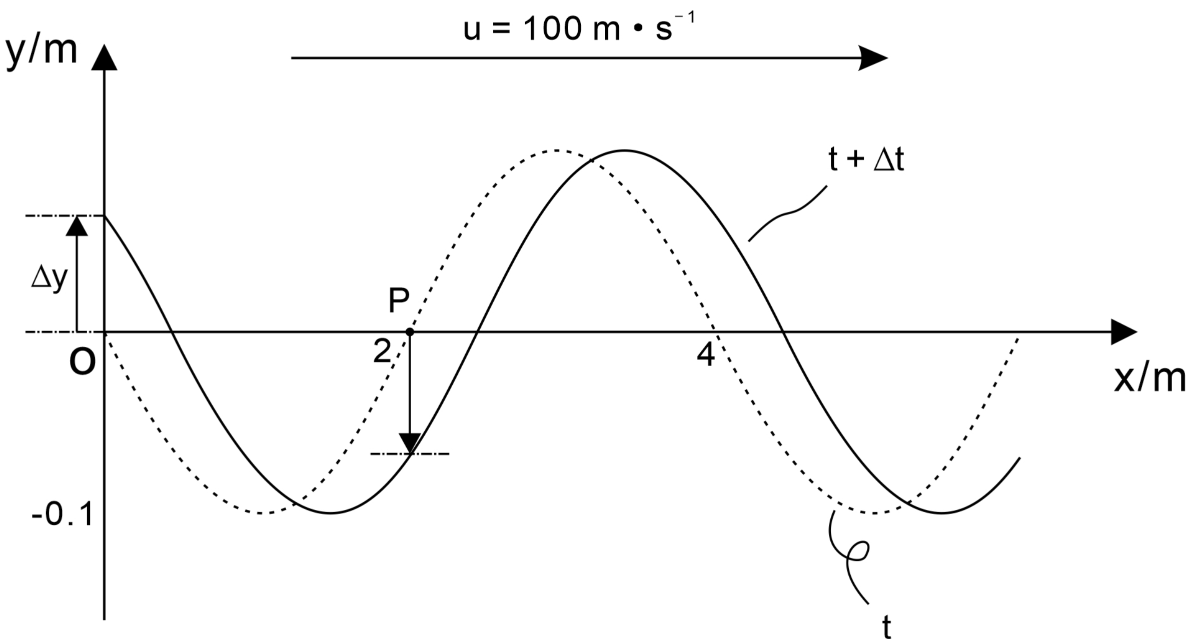
$$y(0,0) = 0.1\cos(\phi) = 0$$

即

$$\phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

本题的关键在于对**初相**的把握，判断瞬时速度的正负，以及对 x-y 图像的理解。

在简谐振动的 x-t 图像中我们是通过判断**切线斜率**的正负来把握瞬时速度方向的，而在这里是 x-y 图像，这是要特别注意的地方。在这种情况下判断瞬时速度的方向采用另一种巧妙的办法。



我们假设时间向后推移一个很小的量 Δt 然后便得到了空间上各个质点的变化趋势，如上图所示

在 $x=0$ 的位置的简谐振荡方程为

$$y(0,t) = 0.1\cos(50\pi t + \phi)(\mathrm{m})$$

由图可知，在 $t=0$, $x=0$ 处的质点沿y轴正方向，即 $v_y > 0$ ，因此

$$v_y(t) = \frac{dy(0,t)}{dt} = -5\pi\sin(50\pi t + \phi)(\mathrm{m})$$

在 $t = 0$ 时

$$v_y(0) = -5\pi\sin(\phi) > 0$$

因此

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

波动方程为

$$y(x,t) = 0.1\cos[50\pi(t - \frac{x}{100}) - \frac{\pi}{2}](\mathrm{m})$$

2、P 点的简谐振动方程，即在波动方程 $x = 2\,\mathrm{m}$ 的时候

$$y_p(t) = y(2,t) = 0.1\cos(50\pi t - \frac{3\pi}{2})(\mathrm{m})$$

例题T6

弹簧振子做简谐振动，振幅 $A = 0.2\,\mathrm{m}$ ，求

(1). 弹簧振子动能和势能相等时的位置

(2). 与弹簧相连物体 m 的位移为振幅的一半时，动能为总能量的多少?

解:

1、如题所示，弹簧振子动能 $E_k = E_p$

振动过程机械能守恒

$$E = E_k + E_p = 2E_p$$

因此

$$\frac{1}{2}kA^2 = 2 \times \frac{1}{2}kx^2$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A \approx \pm 0.141\,\mathrm{m}$$

2、如题所示，$x = \frac{1}{2}A$ ，此时势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{8}kA^2 = \frac{1}{4}E$$

因此这个时候动能为

$$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

即动能为总能量的 $\frac{3}{4}$

例题T7

如图所示，一平面简谐波在介质中以波速 $u = 30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 沿x轴正方向传播，已知 A 点的振动方程为 $y = 3\times10^{-2}\cos(3\pi t)(\mathrm{m})$ ，求:

(1). 以 A 点为坐标原点写出波的表达式。

(2). 以距离 A 点为 5m 处的 B 点为坐标原点写出波的表达式。

解:

1、设该平面简谐波的波动方程为

$$y(x,t) = A\cos(\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi)$$

若以 A 点为坐标原点，此时 $x = 0$ 得到 A 点处的简谐振动方程

$$y(0,t) = 3\times10^{-2}\cos(3\pi t)(\mathrm{m})$$

对照上下两式可得到波函数为

$$y(x,t) = 3\times10^{-2}\cos(3\pi(t + \frac{x}{u}))(\mathrm{m})$$

带入条件 $u = 30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ，得到完整的波函数表达式 （注意正向传播时x前符号是负的）

$$y(x,t) = 3\times 10^{-2}\cos(3\pi(t-\frac{x}{30}))(\mathrm{m})$$

2、先求出 A 与 B之间的相位差，这里需要用到 $\lambda = Tu = 20\,\mathrm{m}$

$$\phi_{AB} = \phi_A - \phi_B = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_A - x_B)$$

分为两种情况，假如 A 更靠近波源，则 $x_A - x_B < 0$

$$\phi_{AB} = \frac{\pi}{2}$$

即 A 处的相位比 B 处的相位超前 $\frac{\pi}{2}$ ，因此以 B 点为坐标原点，波的表达式为

$$y_B(x,t) = 3\times 10^{-2}\cos(3\pi(t-\frac{x}{30})-\frac{\pi}{2})(\mathrm{m})$$

假如 B 更靠近波源，则 $x_A - x_B > 0$ ，以 B 点为坐标原点，波的表达式为

$$y_B(x,t) = 3\times 10^{-2}\cos(3\pi(t-\frac{x}{30})+\frac{\pi}{2})(\mathrm{m})$$

例题T8

一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，其表达式为

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\cos(2t+\frac{\pi}{6})(\mathrm{m}) \\ x_2 &= 3\cos(2t-\frac{5\pi}{6})(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

试求其合振动的振幅和初相位

解：

对于一般情况的两个同频率的任意正弦型函数

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{aligned}$$

其和为

$$x_1 + x_2 = A' \cos(\omega + \phi')$$

其中

$$\begin{cases} A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \\ \phi' = \arctan\left(\dfrac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}\right) \end{cases}$$

本题比较特殊，由诱导公式可得

$$x_2 = -3\cos(2t + \frac{\pi}{6})(\mathrm{m})$$

因此

$$x_1 + x_2 = 4\cos(2t + \frac{\pi}{2}) - 3\cos(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2t + \frac{\pi}{6})(\mathrm{m})$$