试证明 $\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)=k^2\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$ 。式中 k 为常数

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)}{\partial r}&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^2}\\ \frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\end{aligned}\right.$$

$$F_x=\frac{\partial\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{\partial r}\right)}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}x$$

$$\begin{aligned}F_{xx}=\frac{\partial F_x}{\partial x}&=\frac{\partial\left(\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}x\right)}{\partial x}\\
&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}+x\frac{\partial\left(\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\\
&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}+\left(\frac{r^3\left(-\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)\right)'-3r^2\left(-\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)\right)}{r^6}\right)\frac{x^2}{r}\\
&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}+\left(\frac{r^3\left(k\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)-k\mathrm{e}^{-kr}\right)-3r^2\left(-\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)\right)}{r^6}\right)\frac{x^2}{r}\\
&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}+\left(\frac{k^2r^2\mathrm{e}^{-kr}+3\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)}{r^4}\right)\frac{x^2}{r}\\
&=\frac{-e^{-kr}(1+kr)}{r^3}+\frac{k^2r^2\mathrm{e}^{-kr}+3\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)}{r^5}x^2\end{aligned}$$

对 x y z 求偏导得结果类似 (只要将上式的 x 换成 y z 即可)，最后相加得到

$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}$$

$$= \frac{-3e^{-kr}(1+kr)}{r^3} + \frac{k^2 r^2 \mathrm{e}^{-kr} + 3\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{-3e^{-kr}(1+kr)}{r^3} + \frac{k^2 r^2 \mathrm{e}^{-kr} + 3\mathrm{e}^{-kr}(1+kr)}{r^3}$$

$$= k^2 \frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$$