线性代数初步

[线性代数笔记PDF文档版]

一、矩阵

矩阵概述

- 矩阵是一个**二维数表**，由若干数字构成，外边用一对圆括号括起来。
- 在线性代数中，矩阵是基本的运算对象，和普通代数学中的数字没有本质区别。

  作为一门代数，矩阵也包含：

  零元——零矩阵

  单位元——单位矩阵

  加法逆元——负矩阵

  乘法逆元——逆矩阵
- 矩阵既可以表示一组变量，也可以描述变换本身，例如：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

便是旋转坐标变换的矩阵表达式，在这里，相乘的两个矩阵就分别对应着**变换**和**坐标**两个意义。

矩阵的定义

由$m \times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$排成的m行n列的数表

$$\mathbf{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$**矩阵**。

其中a_{ij}表示矩阵$\mathbf{A}$第i行第j列的元素。

特殊的矩阵

- 零矩阵
- 方阵
- 行向量、列向量

- 单位矩阵
- 数量矩阵
- 对角矩阵
- 对称矩阵
- 上三角与下三角矩阵
- 有理矩阵、实矩阵、复矩阵
- 增广矩阵
- 奇异矩阵(不可逆方阵)

矩阵的线性运算

加法定义

$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{B}=(a_{ij})_{m\times n}$，是两个**同型矩阵**，定义矩阵$\mathbf{C}_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$的各元素满足$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，称矩阵$\mathbf{C}$为矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的和。

加法性质

设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{O}$为**同型矩阵**，则:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (交换律)
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (结合律)
3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$
5. 若$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{C}$，则$\mathbf{B}=\mathbf{C}$

数乘定义

设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$是一个数，定义矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$\mathbf{A}$的**数量乘积**，简称**数乘**，记作$k\mathbf{A}$。

数乘性质

设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{O}$为**同型矩阵**，k，s是任意数，则:

1. $(k+s)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+s\mathbf{A}$
2. $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$
3. $k(s\mathbf{A})=(ks)\mathbf{A}$
4. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$
5. $0\mathbf{A}=\mathbf{O}$，这里前一个0是数字零，后一个是矩阵$\mathbf{O}$

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的**线性运算**，其性质与数的加法、乘法类似。

矩阵乘法★★★

乘法定义

设矩阵$A_{m\times s}=(a_{ij})_{m\times s}$，矩阵$B_{s\times n}=(b_{ij})_{s\times n}$，定义$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的乘积为$\mathbf{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$

即c_{ij}为矩阵$\mathbf{A}$的第i行向量与矩阵$\mathbf{B}$的第j列向量的数量积

乘法性质

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (结合律)
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (分配律)
3. $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$，k是数
4. $(k\mathbf{E}_m)\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}(k\mathbf{E}_n)=k\mathbf{A}_{m\times n}$ ($k\mathbf{E}$即数量矩阵)

乘法注意事项

矩阵乘法不符合**交换律**，这是与普通代数最大的区别

对于一般的矩阵，以下两个说法不一定成立（除非$\mathbf{A}$是**可逆矩阵**）

1. 由$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 得到 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$
2. 由$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 得到 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

矩阵的转置

转置的定义

将矩阵$A_{m\times n}$的第1行，第2行，......，第m行依次改成第1列，第2列，......，第m列后得到的$n\times m$矩阵称为$\mathbf{A}$的**转置矩阵**，记作$\mathbf{A}^T$。

转置的性质

1. $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T=k\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{AC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T$

分块矩阵

（待补充。。。）

矩阵的初等变换★★★

初等变换基本分成三类情况：

1. 互换矩阵的第i行(列)和第j行(列)，记作$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$
2. 用一个非零数k去乘矩阵的第i行(列)，记作$kr_i(kc_i)$
3. 将矩阵的第j行(列)的k倍加到第i行(列)上，记作$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$

重要性质：**可逆性**

等价矩阵

1. 矩阵$\mathbf{A}$经过一系列初等行(列)变换得到矩阵$\mathbf{B}$，称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$为**行(列)等价矩阵。**
2. 矩阵$\mathbf{A}$经过一系列初等变换得到矩阵$\mathbf{B}$，称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$为**等价矩阵。**

等价矩阵的性质

1. $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$ (反身性)
2. 若$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$ (对称性)
3. 若$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \cong \mathbf{C}$ (传递性)

初等矩阵的定义

由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵，叫作**初等矩阵。**

重要性质：**可逆性**

可逆矩阵★★★

逆矩阵的定义

若对于矩阵$\mathbf{A}$，存在矩阵$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$成立，则称矩阵$\mathbf{B}$为矩阵$\mathbf{A}$的**逆矩阵**，记作$\mathbf{A}^{-1}$。

逆矩阵的性质

设$\mathbf{A}$是一个可逆矩阵

1. $\mathbf{A}$的逆矩阵唯一，记作$\mathbf{A}^{-1}$
2. 若$\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$，则$\mathbf{B} = \mathbf{C}$。特别的，若$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$，则$\mathbf{B} = \mathbf{O}$
3. $\mathbf{A}^{-1}$可逆，且$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$
4. $\mathbf{A}^T$可逆，且$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
5. 若k是非零数，则$k\mathbf{A}$可逆，且$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$
6. 若$\mathbf{B}$是和$\mathbf{A}$同阶的可逆矩阵，则$\mathbf{AB}$也可逆，且$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

二、行列式

行列式概述

行列式是由矩阵内所有元素经过某种运算而得到的一个数。

行列式的定义（不建议深究）

行列式的定义有很多，我们书上是通过**代数余子式**来定义的，在同济教材中的行列式是通过**逆序数**来定义的，在这里主要介绍三种定义。

> 四阶及四阶以上行列式不建议使用定义计算。
>
> ————尼斯湖水怪

定义1 （代数余子式定义）

设A是一个n阶行列式，A的**行列式**是由A(或由构成A的n个数)决定的**一个数**，记为$|\mathrm{A}|$或$\det(\mathrm{A})$。

1. 将n阶行列式$|\mathrm{A}|$中元素a_{ij}所在的第i行与第j列删去，剩下的元素按照原来相对位置构成的n-1阶行列式称为A的(i,j)-元(a_{ij})的**余子式**，记作M_{ij}，称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的**代数余子式**，记作A_{ij}。
2. 当$n=1$时，定义1阶行列式 $|\mathrm{A}|=|a_{11}|=a_{11}$，

   当$n>1$时，定义n阶行列式：

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\mathrm{A}_{11}+a_{21}\mathrm{A}_{21}+\cdots+a_{n1}\mathrm{A}_{n1}$$

定义2 （逆序数定义）

1. 对于n个不同的元素，先规定各元素之间有一个**标准次序**（一般选数字从小到大排列为标准次序），于是在这n个元素的任一排列中，当某一对元素的先后次序不同时，就说它构成1个**逆序。**一个排列中所有逆序的总和叫做这个**排列的逆序数。**

> 例如以12345为一个标准次序，32514中
>
> 对于"3"是排头，前面没有数，记为0个逆序
>
> 对于"2"的前面，有比它大的数"3"，记为1个逆序
>
> 对于"5"的前面，没有比它大的数，记为0个逆序
>
> 对于"1"的前面，有比它大的数"3,2,5"，记为3个逆序
>
> 对于"4"的前面，有比它大的数"5"，记为1个逆序
>
> 加起来一共5个逆序

2. 一个n阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

其中$\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$为$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的一种排列，$t$为该排列对于**标准次序** $12345\cdots n$的**逆序数**。

定义3 （维基百科定义）

一个n阶方块矩阵A的行列式可直观地定义如下：

$$det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

其中，S_n是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$上置换的全体，即集合$\{1, 2, \cdots, n\}$到自身上的一一映射(双射)的全体。

$\sum_{\sigma \in S_n}$表示对S_n全部元素的求和，即对于每个$\sigma \in S_n$，$sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$在加法算式中出现一次。

对每一个满足$1 \leq i, j \leq n$的数对(i, j)，$a_{i,j}$是矩阵A的第i行第j列的元素。

$sgn(\sigma)$表示置换$\sigma \in S_n$的符号差，具体地说，满足$1 \leq i, j \leq n$但$\sigma(i) > \sigma(j)$的有序数对(i, j)称为i的一个逆序。

行列式意义的多角度描述（仅供理解，不予证明）

- 行列式是一个函数，它将一个方阵映射为数，是一个以**方阵**为自变量，**数**为因变量的函数。
- 行列式在3维空间有“体积、面积”的概念。

两个平面向量构成的行列式就是它们做出**平行四边形**的面积

三个空间向量构成的行列式就是它们做出**平行六面体**的体积

例如下图平面向量 $\overrightarrow{v_1} = (3, 1)$　$\overrightarrow{v_2} = (1, 3)$，其行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

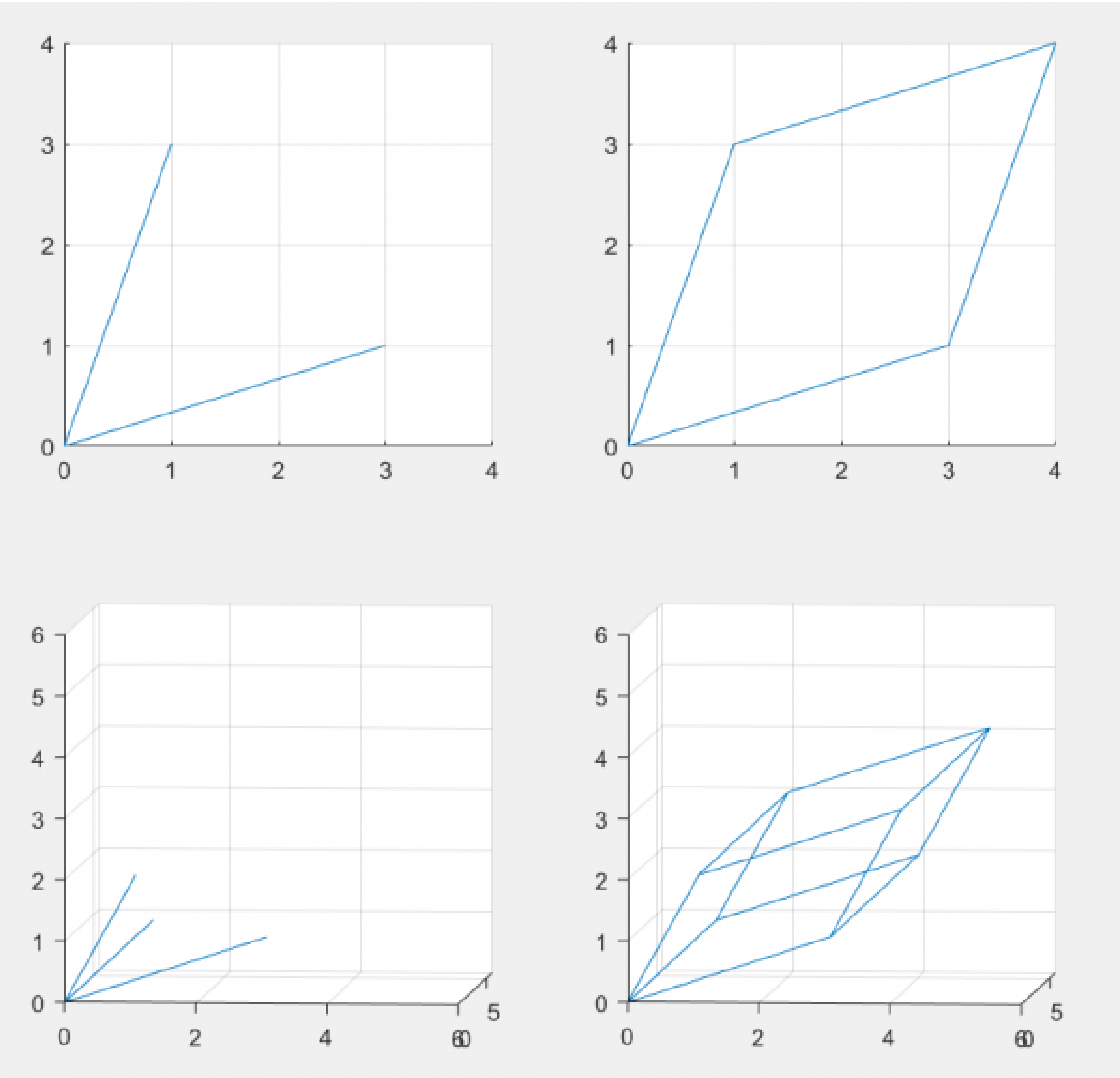
可以通过解三角形的方法得到**平行四边形**的面积也为8

对于**平行六面体**的体积也有同样的规律

其中空间向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,1,2)$ $\overrightarrow{v_2}=(3,1,1)$ $\overrightarrow{v_3}=(1,4,1)$

则该**平行六面体**的体积为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 17$$



低阶行列式的一般计算方法（2阶、3阶）★★★

一般低阶行列式的计算公式通过对称性来记忆

对于二阶行列式有

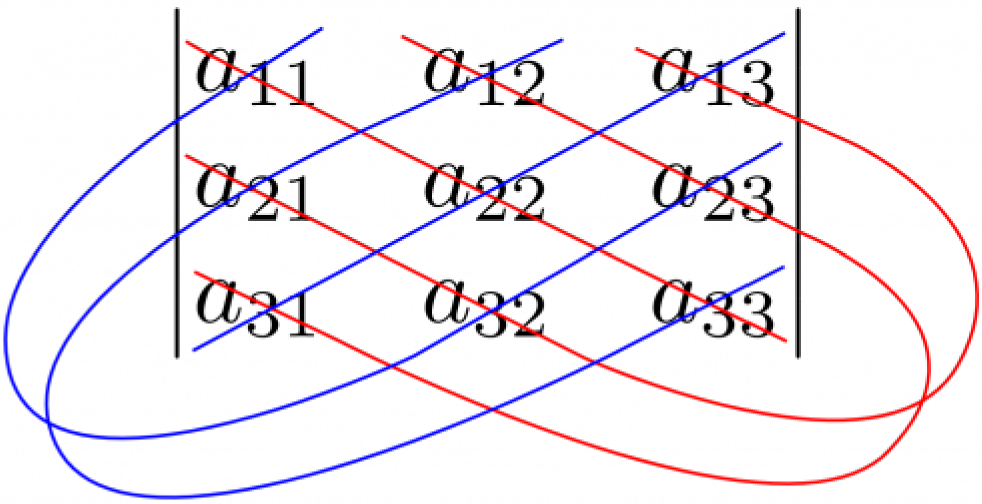
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

> 记忆这个公式，首先区分每一项的正负号，**主对角线**元素乘积前的系数是正的，**副对角线**元素乘积前的系数是负的。

> ————尼斯湖水怪

对于三阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

> 可以注意到该行列式一共有6项，其中3项系数是正的，另外3项系数是负的，可以按照下图来记忆
>
> 
>
>
> 一共有3根红色线与3根蓝线，每一根红线扫过的元素乘积就是一个**正项**，每一根蓝线扫过的元素乘积就是一个**负项**。可以沿用二阶行列式中的记法，即**主对角线**元素乘积是正的，**副对角线**元素乘积是负的。
>
> ————尼斯湖水怪

> **注意事项**
>
> 对于四阶及四阶以上行列式，元素间不再具有**对角线**相乘的规律。
>
> 实际上对于n阶行列式，展开后会是$n!$个项的和，每一项是n个元素的积，其中有$\frac{n!}{2}$个项前系数为正，另外$\frac{n!}{2}$个项前系数为负。
>
> ————尼斯湖水怪

行列式的性质★★★

行列式为零的情况

1. 存在一行或一列元素全为零
2. 存在两行或两列元素完全相同
3. 存在两行或两列元素成比例
4. 存在一行(列)元素可以由其他行(列)经过**线性组合**得到

初等变换性质

1. 若 $\mathrm{A} \stackrel{r_i \leftrightarrow r_j}{\longrightarrow} \mathrm{B}$，则 $|\mathrm{B}| = -|\mathrm{A}|$
2. 若 $\mathrm{A} \stackrel{kr_i}{\longrightarrow} \mathrm{B}$，则 $|\mathrm{B}| = k|\mathrm{A}|$
3. 若 $\mathrm{A} \stackrel{r_i + kr_j}{\longrightarrow} \mathrm{B}$，则$|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}|$

性质2的推论：若矩阵A为n阶方阵，则 $|k\mathrm{A}| = k^n|\mathrm{A}|$

★★★ 以上性质对**列变换**同样成立

其他性质

4. $|\mathrm{A}^T| = |\mathrm{A}|$
5. 若A与B是同阶方阵，则 $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$
6. 设A是m阶方阵，B是n阶方阵，则 $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$
7. 若γ_i表示方阵A的第i行元素构成的**行向量**，则下式成立：

$$det(\mathrm{A}) = det\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k_1} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k_2} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

8. 对于n阶方阵A，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |\mathrm{A}| & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

> 其中 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$可以理解为方阵$\mathrm{A}$的第i行构成的**行向量**和第j行的**代数余子式**构成的**行向量**的**内积**，即
>
> $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
>
> $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \cdot (A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn})$$
>
> 由于在行列式中，行与列的地位相当，这个公式也可以按列的方向来写，这个时候

> $$
> A=\begin{pmatrix}
> a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
> a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
> \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
> a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
> \end{pmatrix}
> $$
>
> $$
> \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})\cdot(A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj})
> $$
>
> ————尼斯湖水怪

> 性质3可以由性质7推得
>
> 假设γ_i是A的第i行的**行向量**，γ_j是A的第j行的**行向量** ($i\neq j$)，
>
> $$
> det(A)=det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_p+k\gamma_j\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_p\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}+det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ k\gamma_j\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}
> $$
>
> 由于γ_j和$k\gamma_j$同时存在于不同的两行中，所以
>
> $$
> det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ k\gamma_j\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}=0
> $$
>
> 从而
>
> $$
> det(A)=det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_p\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}
> $$
>
> 这就证明了在 $A\xrightarrow{r_i+kr_j}B$ 的初等变换下，$|A|=|B|$

行列式的展开★★★

> 在《高等数学》中我们计算向量外积的时候就借用了三阶行列式记法，其本质就是**行展开。**

> $$\begin{aligned}\vec{v_1}\times\vec{v_2} &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) \\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}\,\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\,\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\,\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}\end{aligned}$$
>
> ————尼斯湖水怪

行列式展开是在**代数余子式**定义下的推广，同时也是**性质7**的特殊形式

对于n阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

可以按第i行展开

$$|\mathrm{A}| = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

可以按第i列展开

$$|\mathrm{A}| = (-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}+(-1)^{2+i}a_{2i}M_{2i}+\cdots+(-1)^{n+i}a_{ni}M_{ni}$$

其中M_{ij}为**余子式**，即在原n阶行列式的基础上，划去(i,j)所在行和所在列，剩下部分按原来的顺序构成的n-1阶行列式。

> 行列式展开，本质上是将**高阶行列式**化为**低阶行列式**之和。
>
> ————尼斯湖水怪

行列式展开的使用方法

对于一个超过三阶的行列式，例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

先对其进行第三类**行变换**，化作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix}$$

然后对第一列进行行列式展开，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix}$$

重复这两个步骤，最终能计算得到该行列式的值。

行列式展开的灵活运用

要懂得灵活运用行列式展开，比如遇到这样的情况

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

这个时候就要按照第3行展开，变为

$$(-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

三、线性方程组

表示形式

课本上主要介绍了**标准形式**和**矩阵形式**，为了理清楚它们之前的关系，我以**向量形式**作为一个过渡。

标准形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

向量形式

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\\vdots\\a_{m3}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\a_{3n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

简写为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\beta$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

简写为

$$\mathrm{A}x=\beta$$