第1章作业

1、合式公式的生成树的哪些遍历构成其构造序列？

解：

构造序列：

其中<>，其中是命题符号(l<=i<=n)，

或 =E(a)，

或 ,=E() (j, k < i)

也就是说后面的命题符号是自己生成，或者是由前面的出现的有限个命题符号通过连接 符号连接的。

举例子：这个合式公式的有限序列为<A1, A2, >,其生成树为：

A1—A2

八 ,

A1 A2

此生成树的先序遍历为：Al—A2, Al, A2

中序遍历为：Al, Al—"A2, A2

后序遍历为：Al, A2, A1—A2

层次遍历为：Al—A2, Al, A2

其中先序遍历、中序遍历和层次遍历中A1—A2不能由A1和A2推出，不满足构造序列的 定义，所以不能构成构造序列。

2、用归纳原理2证明归纳原理1。

解：

归纳原理1:如果S是一个合式公式的集合，它包含所有的命题符号，且在对5种公式 构造运算封闭，则S即为所有合式公式的集合。

归纳原理2:设R是一个关于合式公式的性质。若每个命题符号都满足R,且V满足R 的合式公式a和P,合式公式卜a)、（adp)也满足R,则所有的合式公式都满足R。

要求用归纳原理2证明归纳原理丨。利用归纳原理I是条件，使用归纳原理2的证明方 法，证明归纳原理U

归纳原理1的提供的条件是:S是一个合式公式的集合,且在对5种公式构造运算封闭。 证明：

根据归纳原理2,设R是一个关于合式公式的性质s R: V合式公式asS,则a满足R。

S是包含所有命题符号的合式公式的集合•

1. 对V命题符号aeS,肯定是属于S的，也就是说对于V命题符号a肯定是满足R的.
2. 假设合式公式a、P,满足R,根据归纳原理丨的条件，S是一个合式公式集合，且 S对五种构造运算封闭•即卜°°和(01 口P)也满足R

那么就有归纳原理2的结论，即所有的合式公式都满足R。

又因为R: V合式公式aeS，则a满足R。所以S为所有合式公式的集合。即归纳原理！ 得证。

3、若a、P、P'都是合式公式，（}是a的子公式，则十.p，".）是合式公式。

解：

假设R:若a(…(3“〇，则<x(…(V…)是合式公式。

(1)考虑a是命题符号。又因为P是a的子公式，所以p=a，所以

a(-"p"-)=p，a(…p'“〇=p'，又因为p'是合式公式，所以a(."p,".)是合式公式。 即每个命题符号都满足R。

(2) 若a，t■是^公式，且a满足R:

1)考虑二2；.，P1…）肯定也是合式公式也要满足R。

2)考虑aDr，a(…p’…)dr (…p’“.)也要满足R。

得证

4、假设合式公式aWAA„)仅含命题符号。证明：对于任意两个真值指派v 和 V，

如果 v(A1)=v，(A1),...,v(An)=vlAn),则 v (a)= v’ (a)。

解•.这道题同样也是运用归纳原理2解题。

第一步：设性质R是：对于v,v'是两个真值指派，若一个合式公式中所有命题符号的两 个真值指派相同，那么这个合式公式的两个真值指派v,v'也相同。

第二步：对于每个命题符号显然是成立的，因为这个合式公式本身就只是一个命题符号。

第三步：V满足R的合式公式a (、...》和0 (Bi M ’即如果vfAA 丄 V,(B1}...,v(Bn)=V,<Br〇,那么 v(a〇=v’（a), v(/?>=V，（外 可得出 v (-•〇〇=-> v (o〇=-i v'(a> = v'Hx)。

对于（aA/?)，如果[(a)和[(/?)都为丁，则v(aA/?)=T，否则V(QTA/?)=F。因 为（列，所以"’（《八约与"（〇:八/?)取值一样。

同理可证（a/\/?)、（avf)、（a-»/?)、即v (aCip)=v'(aC3P>。 所以，根据归纳原理2,所有的合式公式都满足R,即：

如果 v(A!): v(a )= V' (a >。

5 .证明 C=BU(ran fc)U(ran gc)。

解：

集合归纳定义：集合U，从某些初始元素开始，反复（有限次）利用若干种运算，构造出 子集C; C包含所有初始元素，关于那些运算封闭；（：是具有上述性质的最小集合。

这道题目要分两步走：

1. C a B U (ran fc) U (ran gc)

构造序列：U的元素的有限序列〈•，…，^，的—满足下列三者之一：

(1) x,eB

(2) x,=f(Xi, xj) j,k<i

(3) Xi=f(Xj) j<i 又因为

K C,=B

2-. CiQ Cj+)

3、C = C\*=UnCn

所以很容易知道，BQC, ranfcgC，rangedC 所以 C 3 B U (ran fc) U (ran gc)

(2) C c B U (ran fr) U (ran gr)

又因为C是归纳的，即是封闭的。所以CeBU(ranfc)U(rangc)。

所以综合(1),(2) , C=BU(ranfc)U(rangc^i

6、证明：合式公式是自由生成的。

解：自由生成：

C由B在f和g的作用下自由生成，若：

(1) fc和gc都是单射

(2) ran fc和ran gc和B互不相交

证明：记集合U为所有表达式的集合，B为命题符号的集合，V〇S ^eB，定义函数 f^Pg ， f:UxU^U 汉《,/?) = 〇(8)灼，0可以为八〜，-^，<^ ，

g: UAU，g(a) =卜〇〇, c是由B在函数f，g作用下生成的集合，显然，c是合 式公式集。

首先证明乂和匕是一对一的（单射)。

设，’沃？7’ fee，以六为例，假设同时去掉左边的第一个括号，

若n，则则八是一对一的。若rw，则其中一个是另一个的真的初始段，

假设是真初始段，但是合式公式的任意一个真的初始段含有的左括号数多于右括号数，

而合式公式的左右括号数相等，与”是合式公式矛盾，则A是一对一的，同理可证

-■都是一对一的。

再证明值域互不相交。

假设“句=一4类似上面可证必有广77,则八=V，不成立，则八和V值域 互不相交，同理可证/^(，->，<^,-1的值域互不相交。f^°ge的运算结果都不是命题符号，与B不想交。 因此，C是自由生成的。

7、证明：是重言式。

证明：

aHfi, a重言等价P就是a和p的任意真值指派都是相同的，即v(a)=v(")

(a〇P)，a蕴含等价p就是e

因为:v(a 〇灼⑷)<=> V(“) = V⑷

所以a H P»(a«Kp)是重言式。

8、V合式公式a,若a含命题符号X，则x的实例替代a(p)也是合式公式，且V真值指 派 V，v(a(p))=v'(a(x))，其中：

解：

令合式公式a的性质R:若a中的命题符号X, V合式公式(3, a(x)的实例替换a(p)的实例替换 a(P)也是合式公式，且Vv，v(a(p))=v\a(x))

1) 对V命题符号a，p，

若a(x)=P，则a(x)=a(p)=p=>a(p)是合式公式，且 v(a(p))= v (P)=V(a(x))

若 x=|i，则a(x)= a(p)=p=x=>a(p)是合式公式，且v(a(p)>= v (p)=v\s)= v\x)=/

(a(x))

即每个命题符号都满足R

2) 若合式公式a满足R,则a(p)是合式公式，故(^a)(p)=(，a(p))是合式公式 且 v (a(p》=v’ (a(x))=T=> U (，a(p))= （，a(x))=F

v (a((3))= vr (a(x))=F=> v (-，a((3))= V ( -.a(x))=T

又由(-叫职气-也少))，（"laXxM-^x))，当 x=p时，有(-!aXP)=(->a(x))

即ha)满足R„

1. 若合式公式a, r满足R，则a(p)，r(p)都是合式公式，故(a/\r)(p)=(a(p)A r(P)),

(a A r)( x)=(a(x) A r(x))也是合式公式，

v (a(p))= v’ (a(x))=T 且 v (r(p))=7 (r(x))=T=> v(<x(P)八 r(p)K v’ (<x(x)八 r(x)) T

v (a(p))= vf (a(x))=T 且 v (r(p))= 7 (r(x))=F=> v (a(p) A r(p))= v' (tx(x) A r(x)H. v (a(p))= v’ (cx(x))=F 且[(r(p))=? (r(x))=T=> v (a(P)八 r(p))= v' (a(x)八 r(x))=F v (a(p))= vf (a(x))=F 且 f (r(p))= 7 (r(x))=F=> v (a(p)八 r(p))= v' (cx(x) A r(x))=F 又由(aAr)(p：Ka(p)Ar(p)),(aAr)(x)=(a(x)Ar(x))，故

即(a A r)满足R,同理可得(a&)也满足R。

综上，由归纳原理2可得，所有合式公式都满足R。

9、紧致性定理：合式公式的集合是可满足的《每个有限子集是可满足的证明（2)简化A 的定义：在扩展E时，仅考虑命题符号及其否定。

解：

(1) 命题符号的集合不可数的情况

定义合式公式的集合簇：

B={X|X是有限可满足的合式公式的集合，且sex}

设{AkwAm，...}为不可数的命题符号集合

(2) 定义：

A〇=S

A〇;An+1如果A〇; An+I是有限可满足的

An=u„An=j

A〇; -iAn+i 否则

(3) A的性质：

a)

a) V合式公式a，v满足a<=>aeA或->aeA总有一个成立

b) A有限可满足

(4) V合式公式a, v满足a<=>aeA,从而v满足A 由v的定义，A的性质直接证明

VaeA，设其中仅含命题符号A,，A2, ...,An，不妨设八"A2, ...A^A， ->Am+2，…，~iAneA

{ a，Ai，A2，".，Am,-iAm+|，-iAm+2，...，-iAn}有限gA可满足

设 v\_可满足{a，Ai，A2，."，A„1，-1Am+1，，Am+2，...，~1An}Jj^(a)=T，vXAi)=^(Ai>=T，v’(A2)S： T. v'(Am+,>=F, v'(A„)=F

从而 vXA^vA), v\_(An)=v(An)

所以v(a)=p (a)=T,即v满足a