如何通俗解释欧拉公式？

2016-09-28 马同学 马同学高等数学

欧拉公式将指数函数的定义域扩大到了复数域，建立和三角函数和指数函数的关系，被誉为“数学中的天桥”。形式简单，结果惊人，欧拉本人都把这个公式刻在皇家科学院的大门上，看来必须好好推敲一番。

1 复数

在进入欧拉公式之前，我们先看一些重要的复数概念。

1.1 i 的由来

$i=\sqrt{-1}$ ，这个就是 i 的定义。虚数的出现，把实数数系进一步扩张，扩张到了复平面。实数轴已经被自然数、整数、有理数、无理数塞满了，虚数只好向二维要空间了。

可是，这是最不能让人接受的一次数系扩张，听它的名字就感觉它是“虚”的：

- 从自然数扩张到整数： 增加的负数可以对应“欠债、减少”
- 从整数扩张到有理数： 增加的分数可以对应“分割、部分”
- 从有理数扩张到实数： 增加的无理数可以对应“单位正方形的对角线的长度（ $\sqrt{2}$ ）”
- 从实数扩张到复数： 增加的虚数对应什么？

虚数似乎只是让开方运算在整个复数域封闭了（即复数开方运算之后得到的仍然是复数）。

看起来我们没有必要去理会 $\sqrt{-1}$ 到底等于多少，我们规定 $\sqrt{-1}$ 没有意义就可以了嘛，就好像 $\frac{1}{0}$ 一样。

我们来看一下，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的万能公式：其根可以表示为：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 。

- $\Delta>0$ ： 有两个不等的实数根
- $\Delta=0$ ： 有两个相等的实数根
- $\Delta<0$ ： 有两个不同的复数根，其实规定为无意义就好了，干嘛理会这种情况？

我们再看一下，一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$ ，一元三次方程的解太复杂了，这里写不下，大家可以参考维基百科，但愿大家能够打开。

我们讨论一下 $b=0$ ，此时，一元三次方程可以化为 $x^3+px+q=0$ ，其根可以表示为：

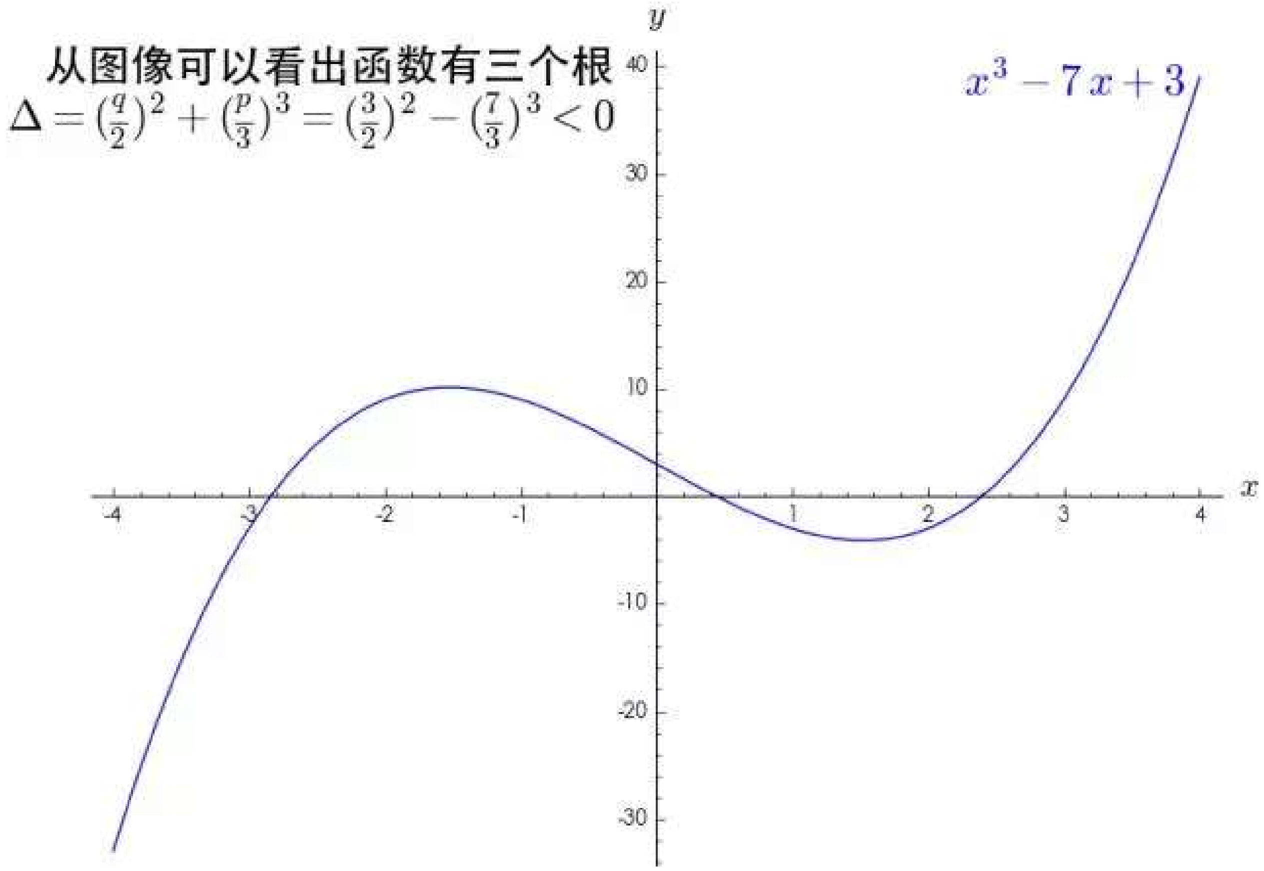
$$\begin{cases} x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \end{cases}$$

其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 。

判别式为 $\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ ，注意观察解的形式， Δ 是被包含在根式里面的。

- $\Delta>0$ ： 有一个实数根和两个复数根

- $\Delta=0$ ： 有三个实数根，当 $p=q=0$ ，根为0，当 $p,q\neq 0$ ，三个根里面有两个相等
- $\Delta<0$ ： 有三个不等的实根！懵了，要通过复数才能求得实根？

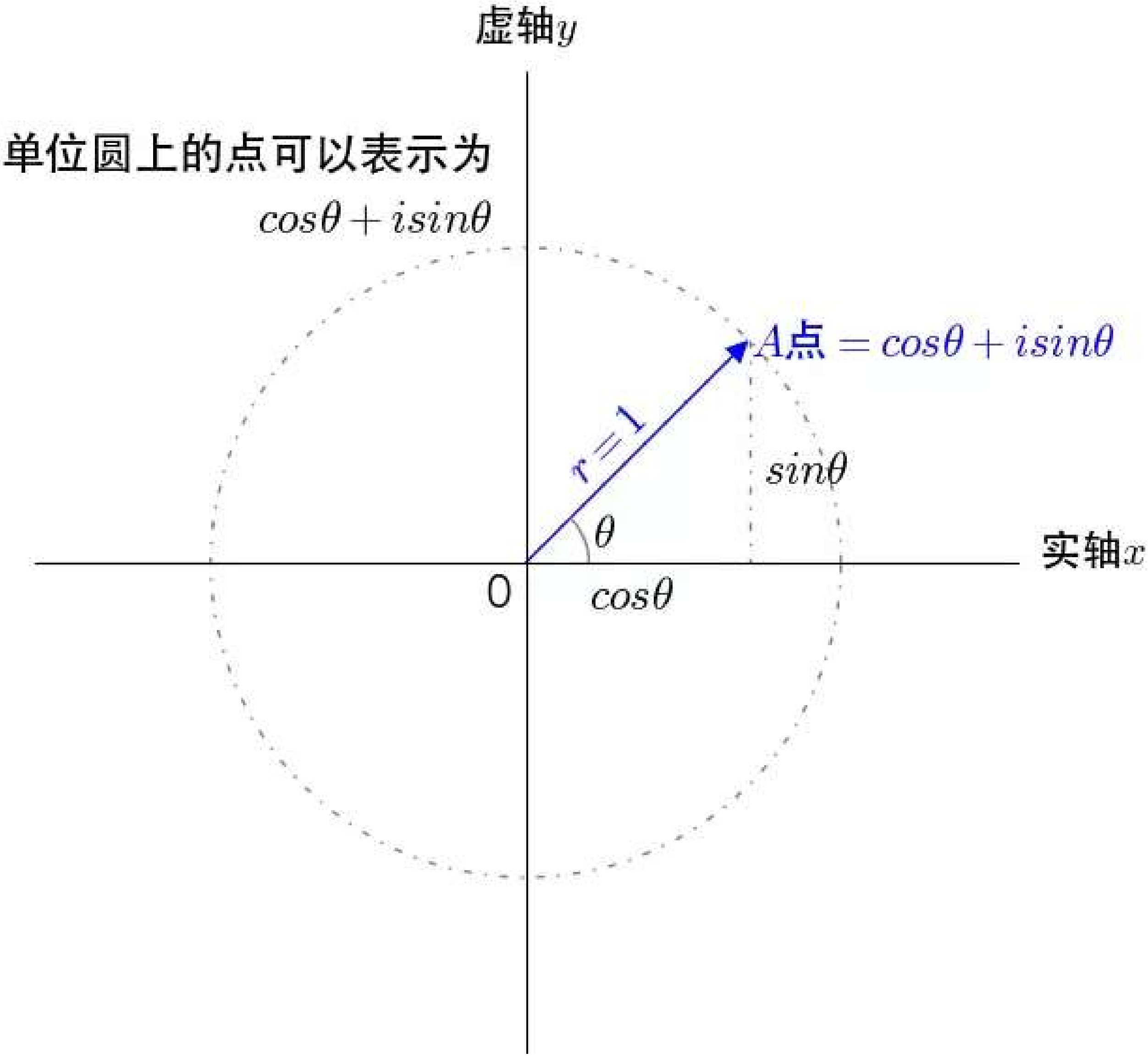


要想求解三次方程的根，就绕不开复数了吗？后来虽然发现可以在判别式为负的时候通过三角函数计算得到实根，但是在当时并不知道，所以开始思考复数到底是什么？

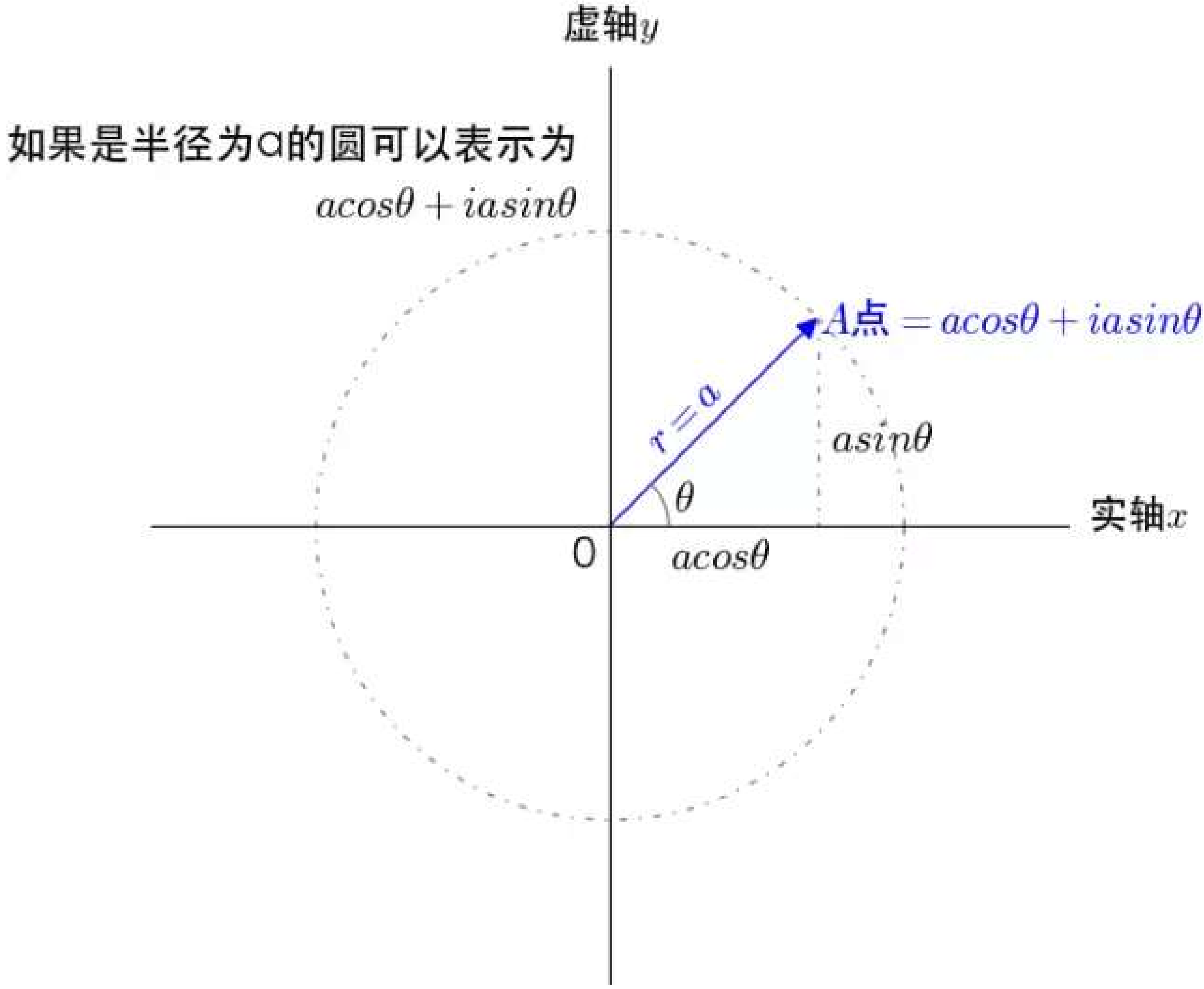
我们认为虚数可有可无，虚数却实力刷了存在感。虚数确实没有现实的对应物，只在形式上被定义，但又必不可少。数学界慢慢接受了复数的存在，并且成为重要的分支。

1.2 复平面上的单位圆

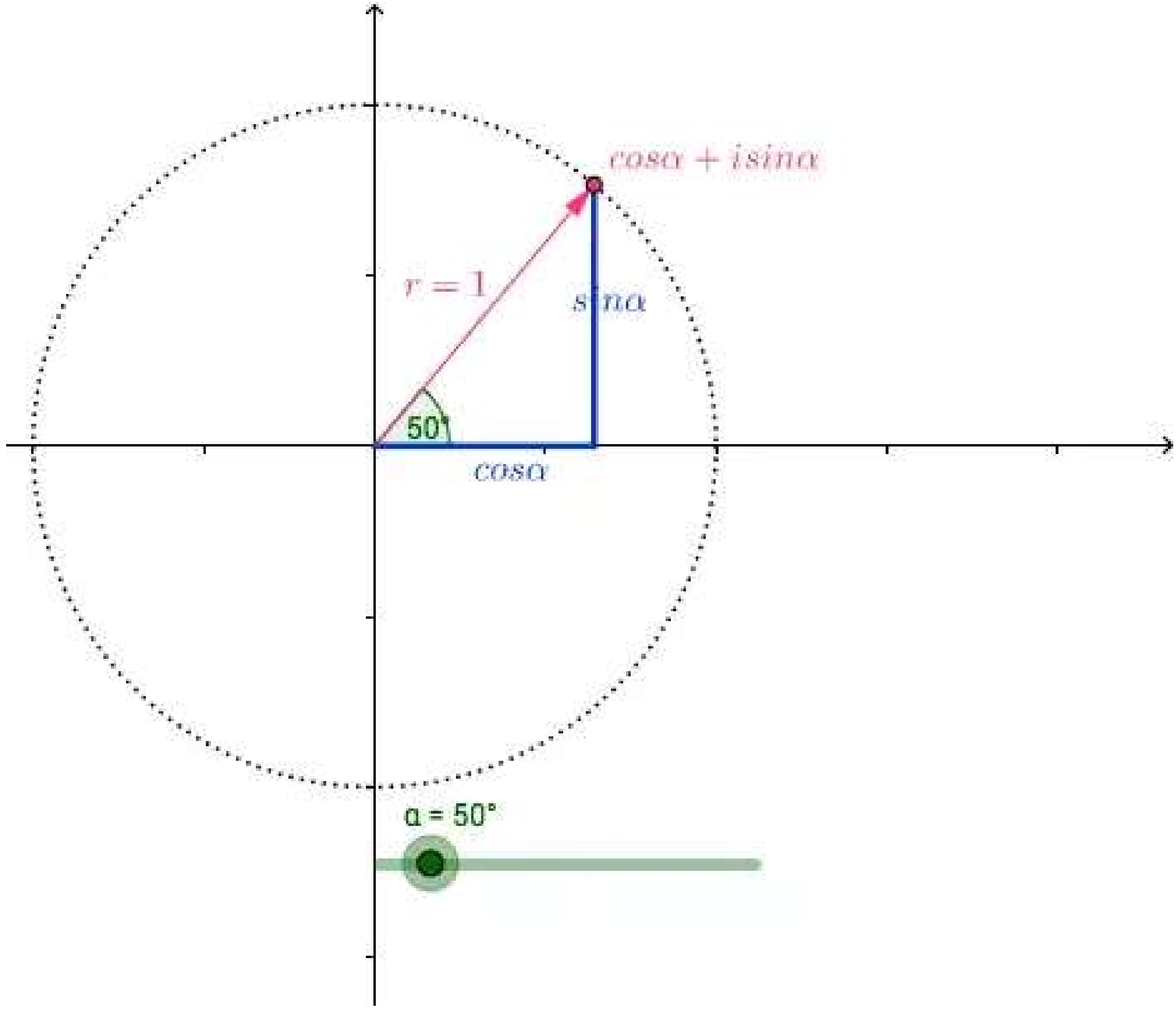
在复平面上画一个单位圆，单位圆上的点可以用三角函数来表示：



虚轴y
单位圆上的点可以表示为
$cos\theta + isin\theta$
A点 $= cos\theta + isin\theta$
r = 1
$sin\theta$
θ
实轴x
0
$cos\theta$

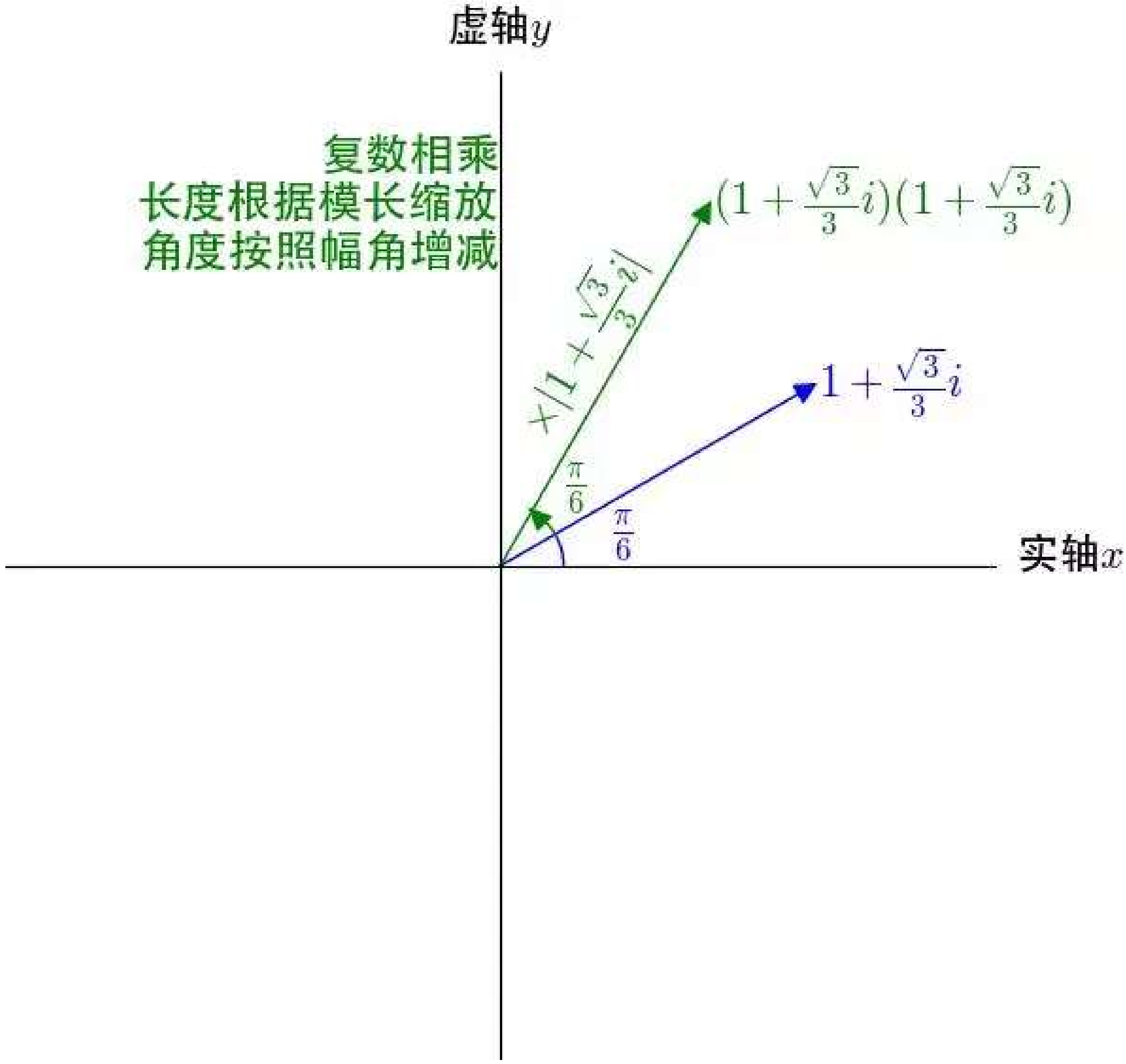

虚轴y
如果是半径为a的圆可以表示为
$acos\theta + iasin\theta$
A点 $= acos\theta + iasin\theta$
r = a
$asin\theta$
θ
实轴x
0
$acos\theta$

我们来动手玩玩单位圆：

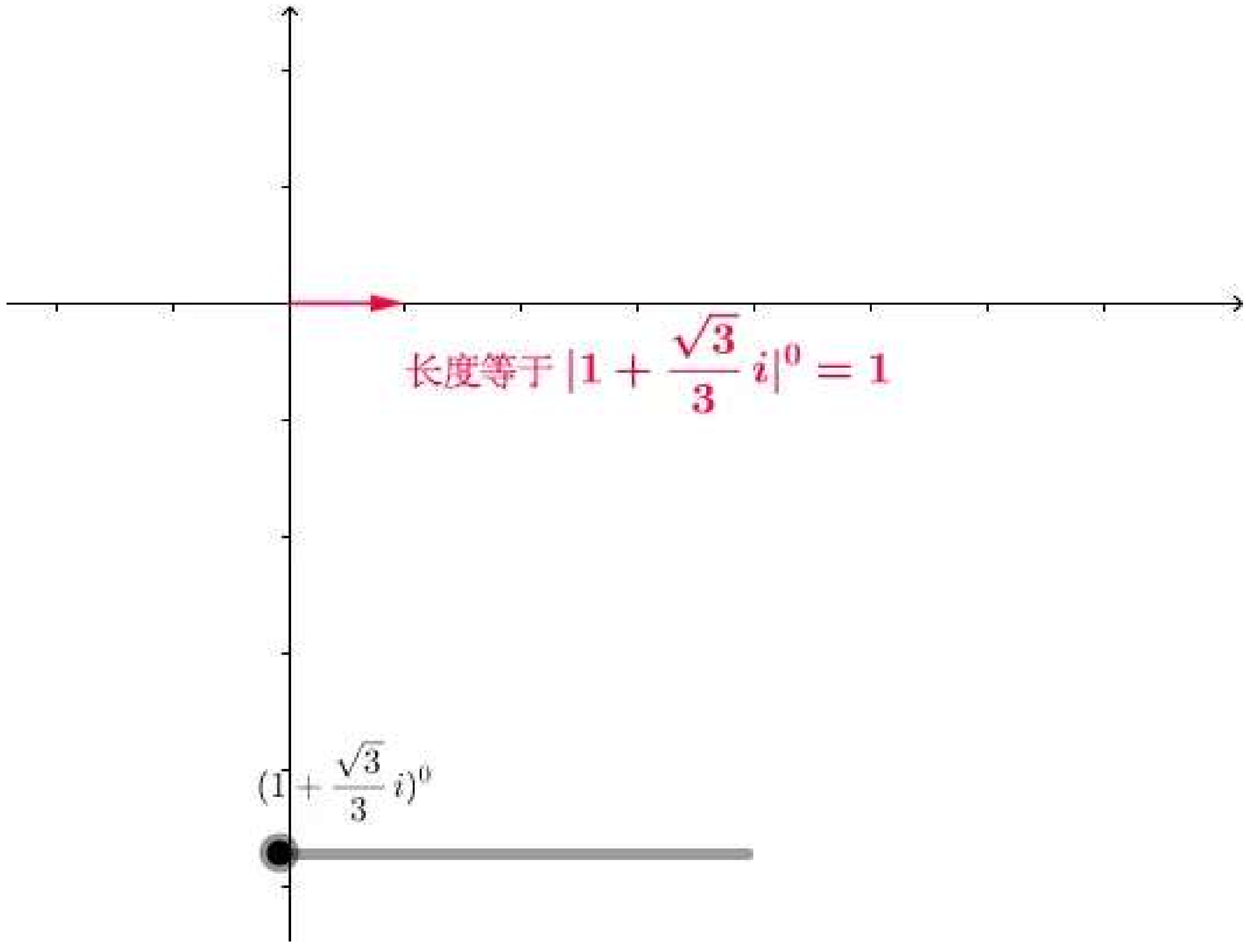


此处有互动内容，点击最下面的“阅读原文”进行操作。
需要流量较大，最好有wifi处打开，土豪请随意。

1.3 复平面上乘法的几何意义


虚轴y
复数相乘
长度根据模长缩放
角度按照幅角增减
$(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i)(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i)$
$\times\|1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\|$
$1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
实轴x

同样来感受一下：



此处有互动内容，点击最下面的“阅读原文”进行操作。
需要流量较大，最好有wifi处打开，土豪请随意。

2 欧拉公式

对于 $\theta\in\mathbb{R}$ ，有 $e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$ 。

----维基百科

欧拉公式在形式上很简单，是怎么发现的呢？

2.1 欧拉公式与泰勒公式

欧拉最早是通过泰勒公式观察出欧拉公式的：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

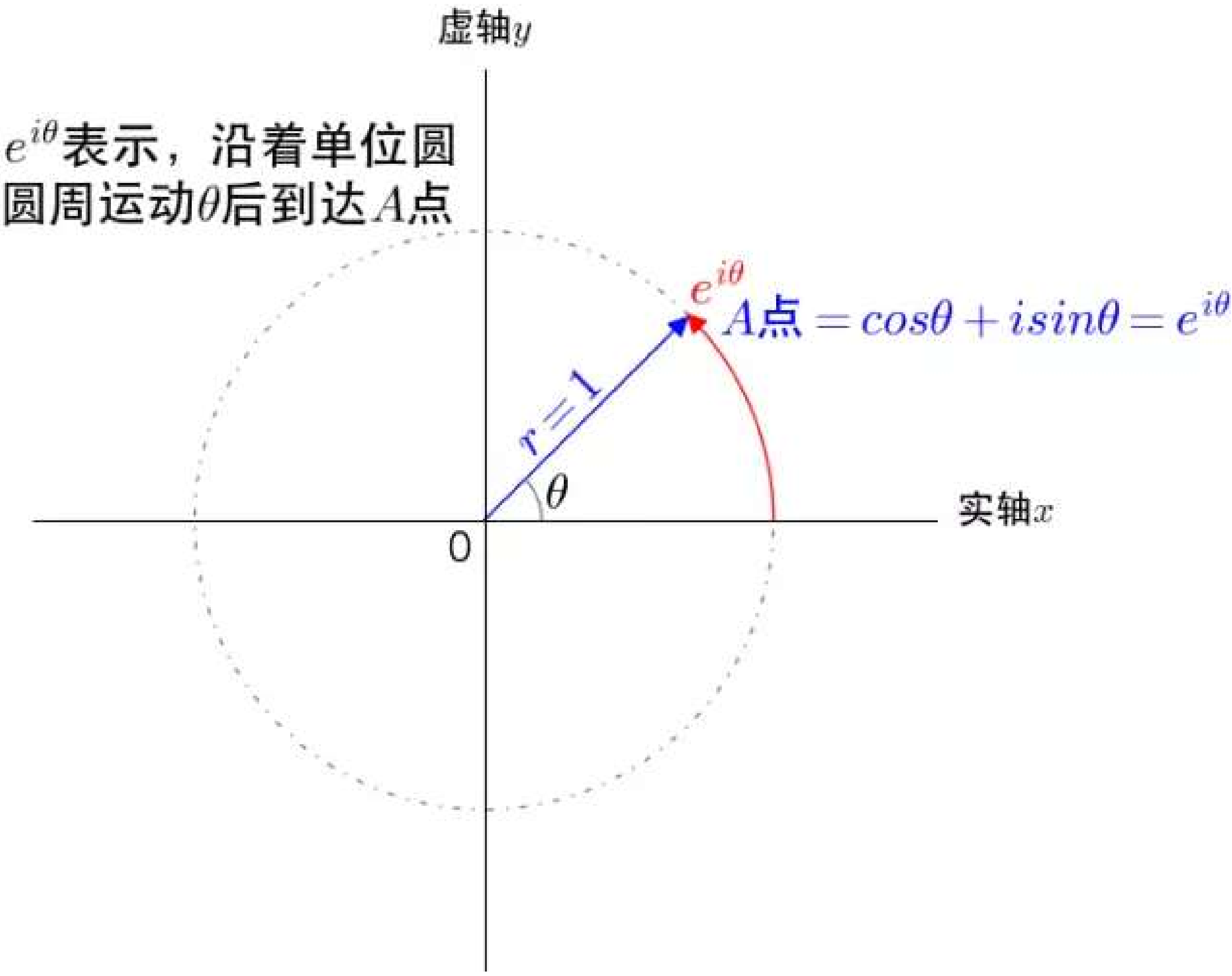
$$cos(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

将 $x=i\theta$ 代入 e 可得：

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

那欧拉公式怎么可以有一个直观的理解呢？

2.2 对同一个点不同的描述方式



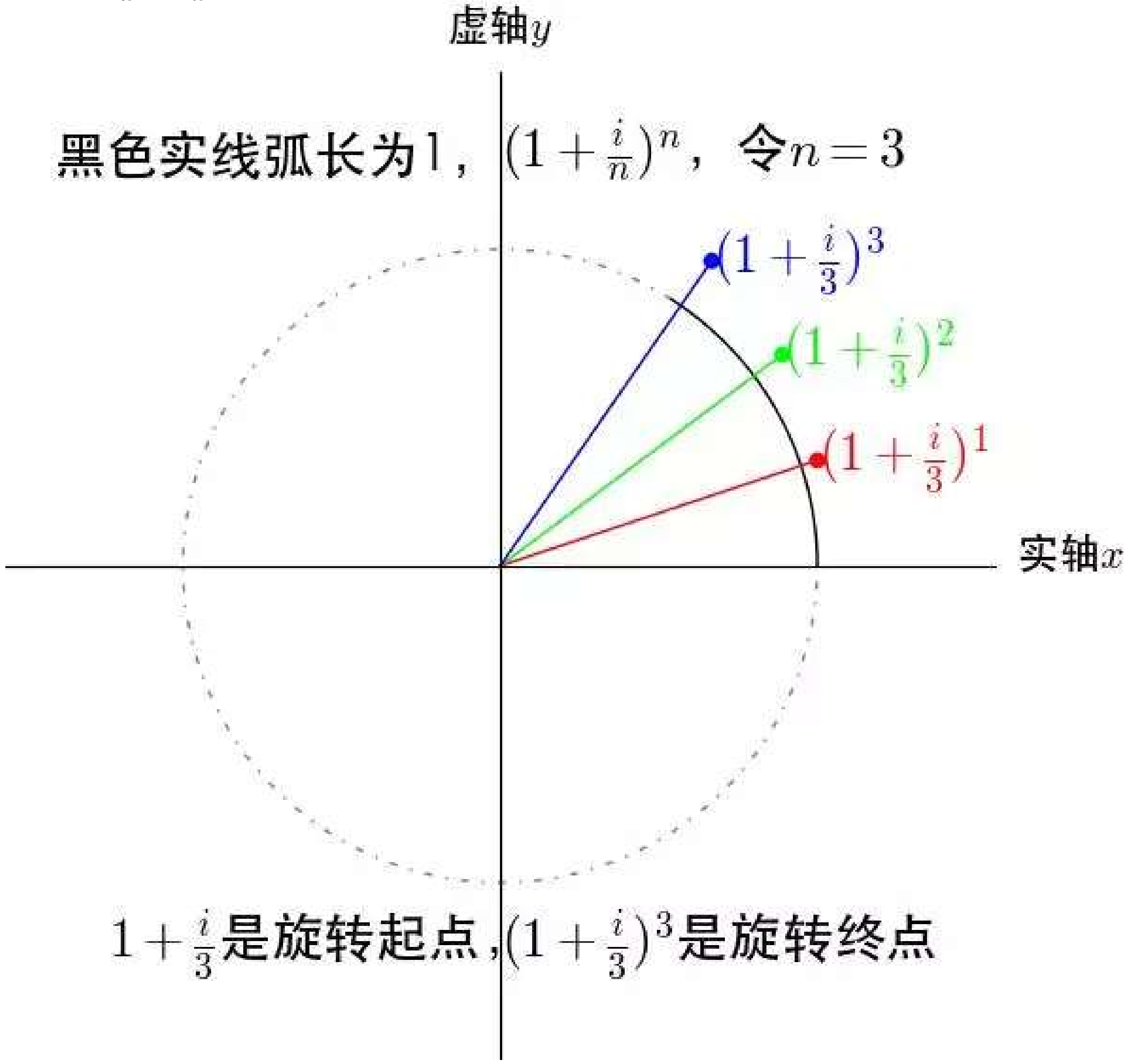
我们可以把 $e^{i\theta}$ 看作通过单位圆的圆周运动来描述单位圆上的点， $cos\theta + isin\theta$ 通过复平面的坐标来描述单位圆上的点，是同一个点不同的描述方式，所以有$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ 。

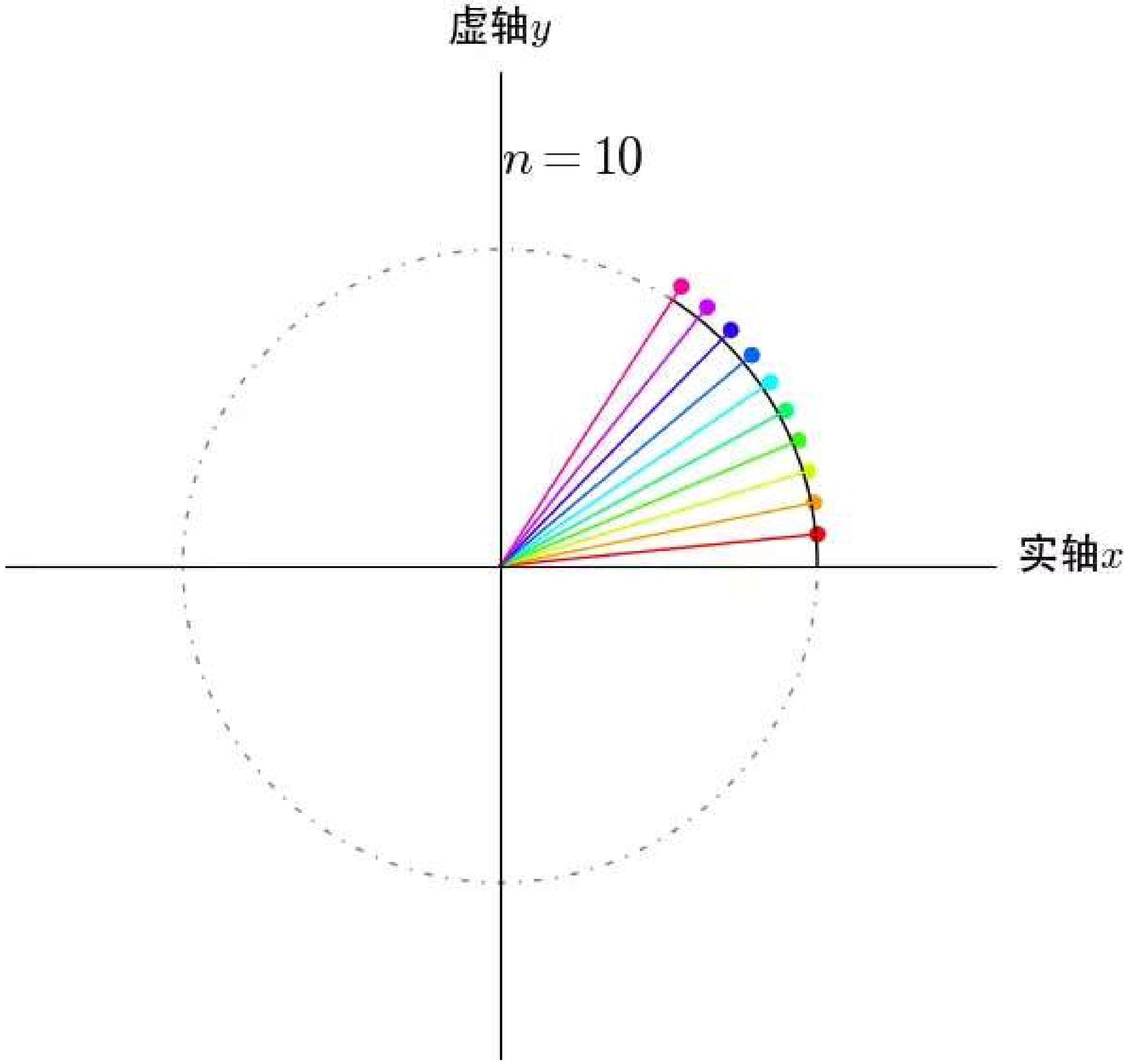
2.3 为什么 $e^{i\theta}$ 是圆周运动？

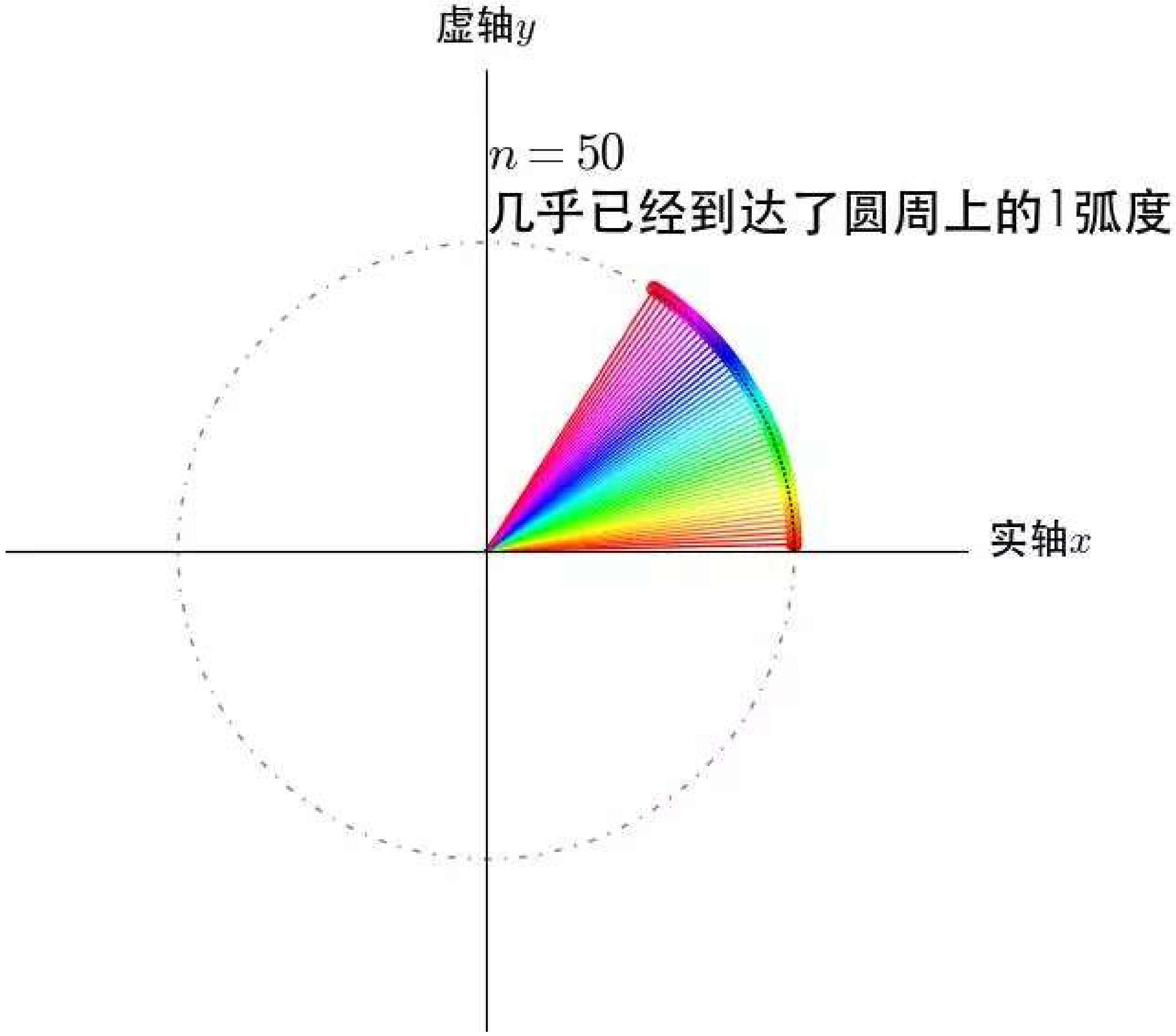
> 定义 e 为： $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
>
> ----维基百科

这是实数域上的定义，可以推广到复数域 $e^i=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{i}{n})^n$ 。根据之前对复数乘法的描述，乘上 $(1+\frac{i}{n})$ 是进行伸缩和旋转运动， n 取值不同，伸缩和旋转的幅度不同。

我们来看看 $e^i=e^{i\times 1}$ 如何在圆周上完成1弧度的圆周运动的：

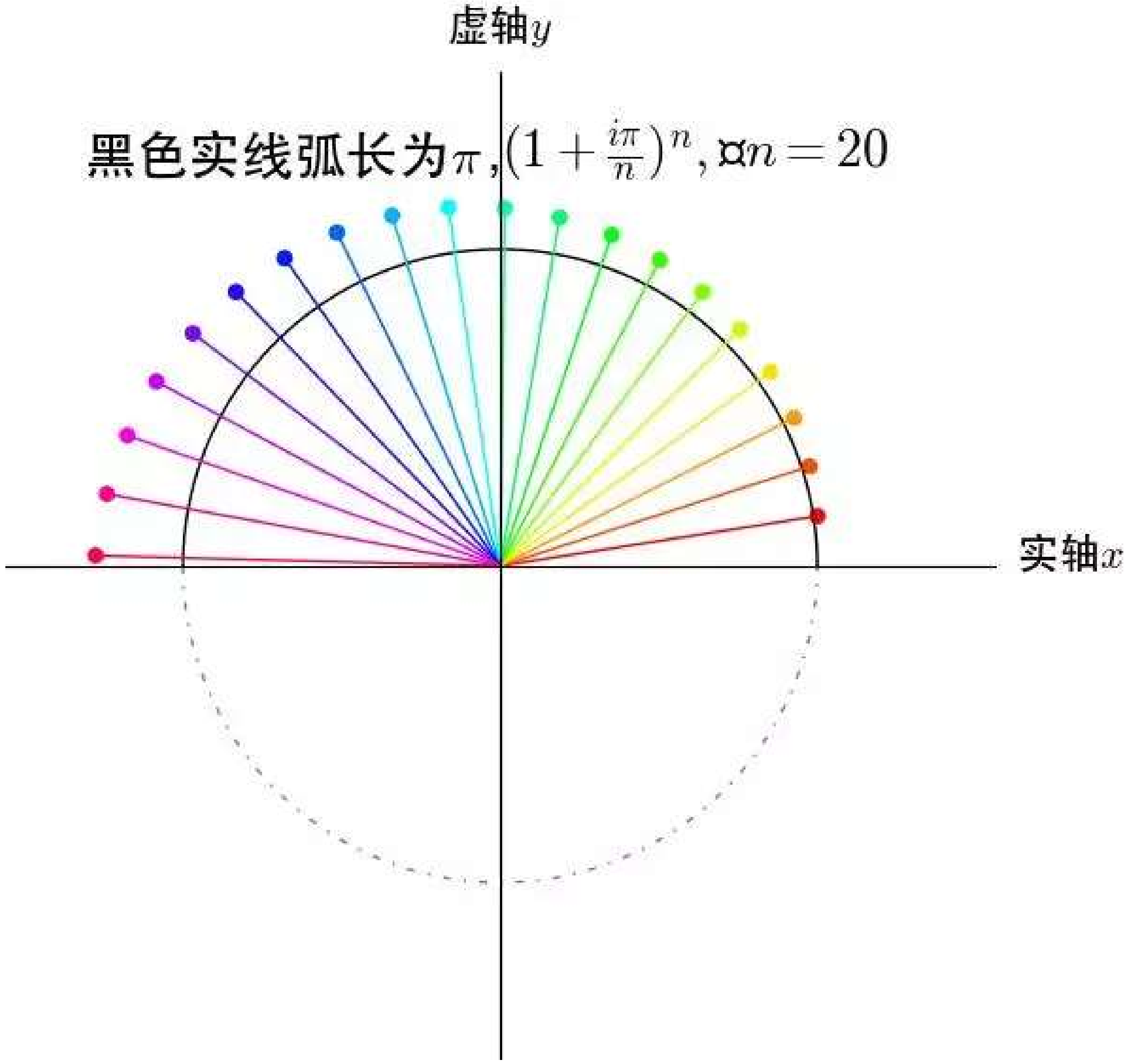



虚轴y
$n=10$
实轴x

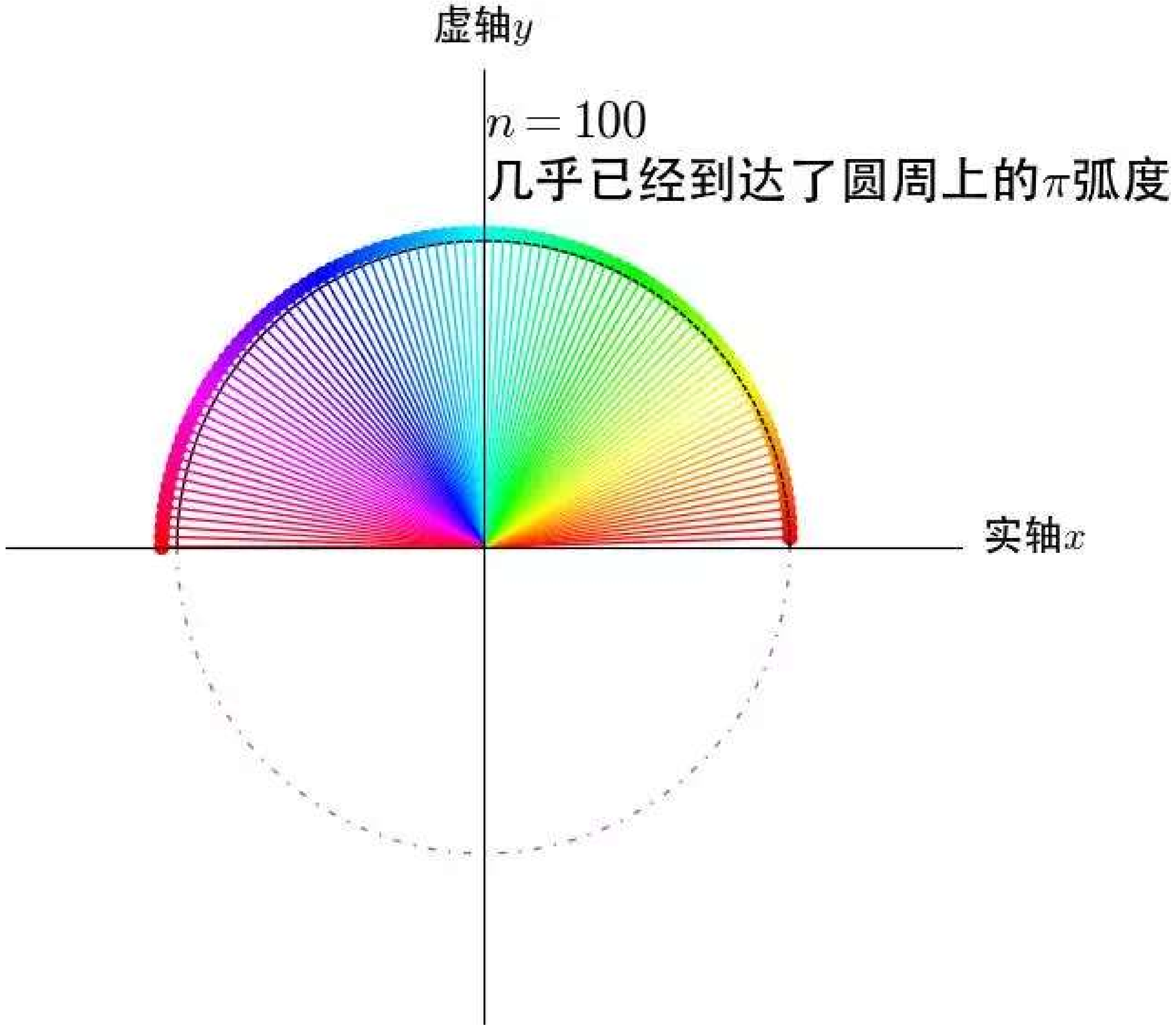


从图上可以推出 $n\to\infty$ 时， e^i 在单位圆上转动了1弧度。

再来看看 $e^{i\pi}$ ，这个应该是在单位圆上转动 π 弧度：

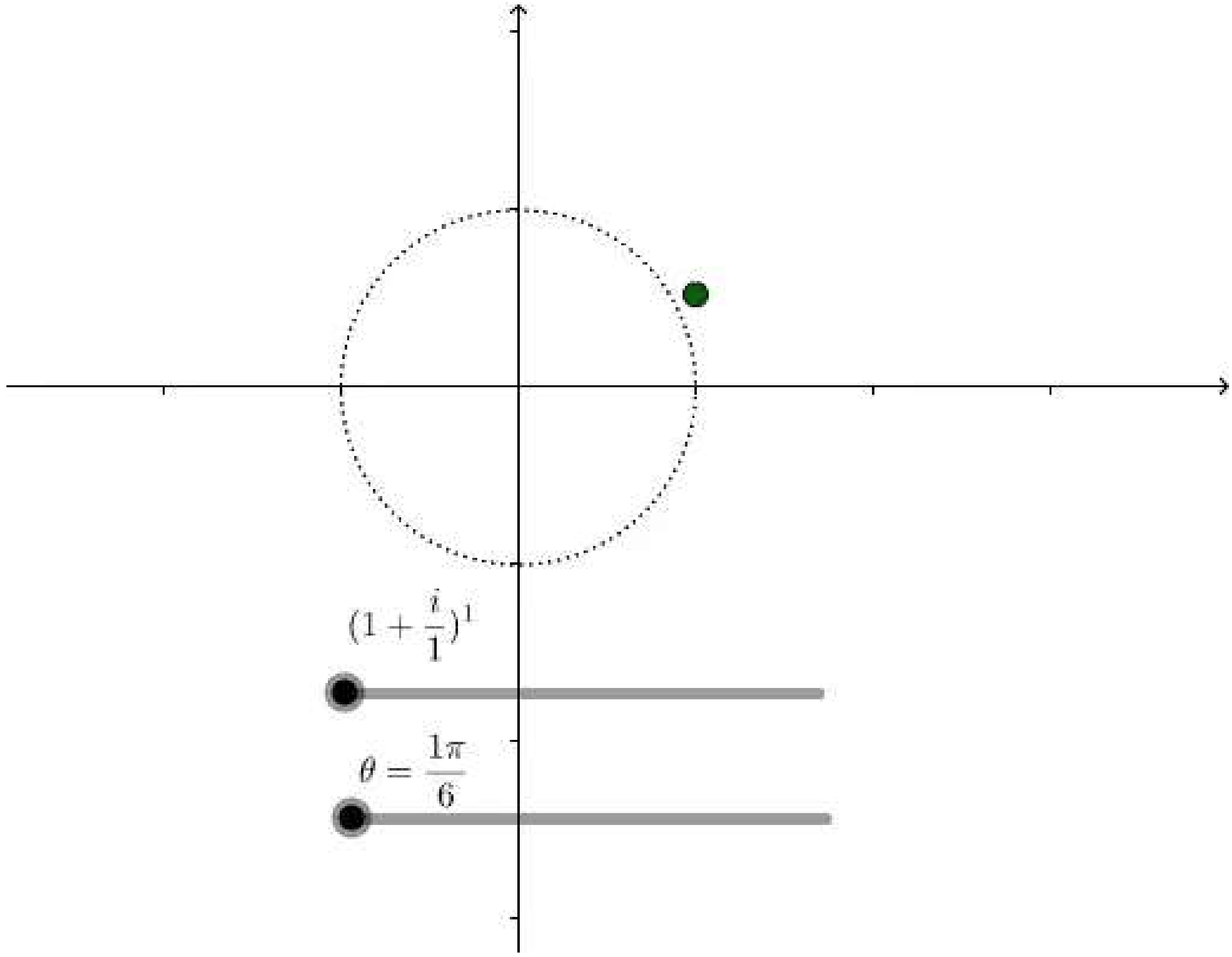


虚轴y
黑色实线弧长为π,$(1+\frac{i\pi}{n})^n$, ¤$n=20$
实轴x



看来 $e^{i\theta}$ 确实是单位圆周上的圆周运动。

动手来看看 $e^{i\theta}$ 是如何运动的吧：



此处有互动内容，点击最下面的“阅读原文”进行操作。
需要流量较大，最好有wifi处打开，土豪请随意。

2.4 2^i 的几何含义是什么？

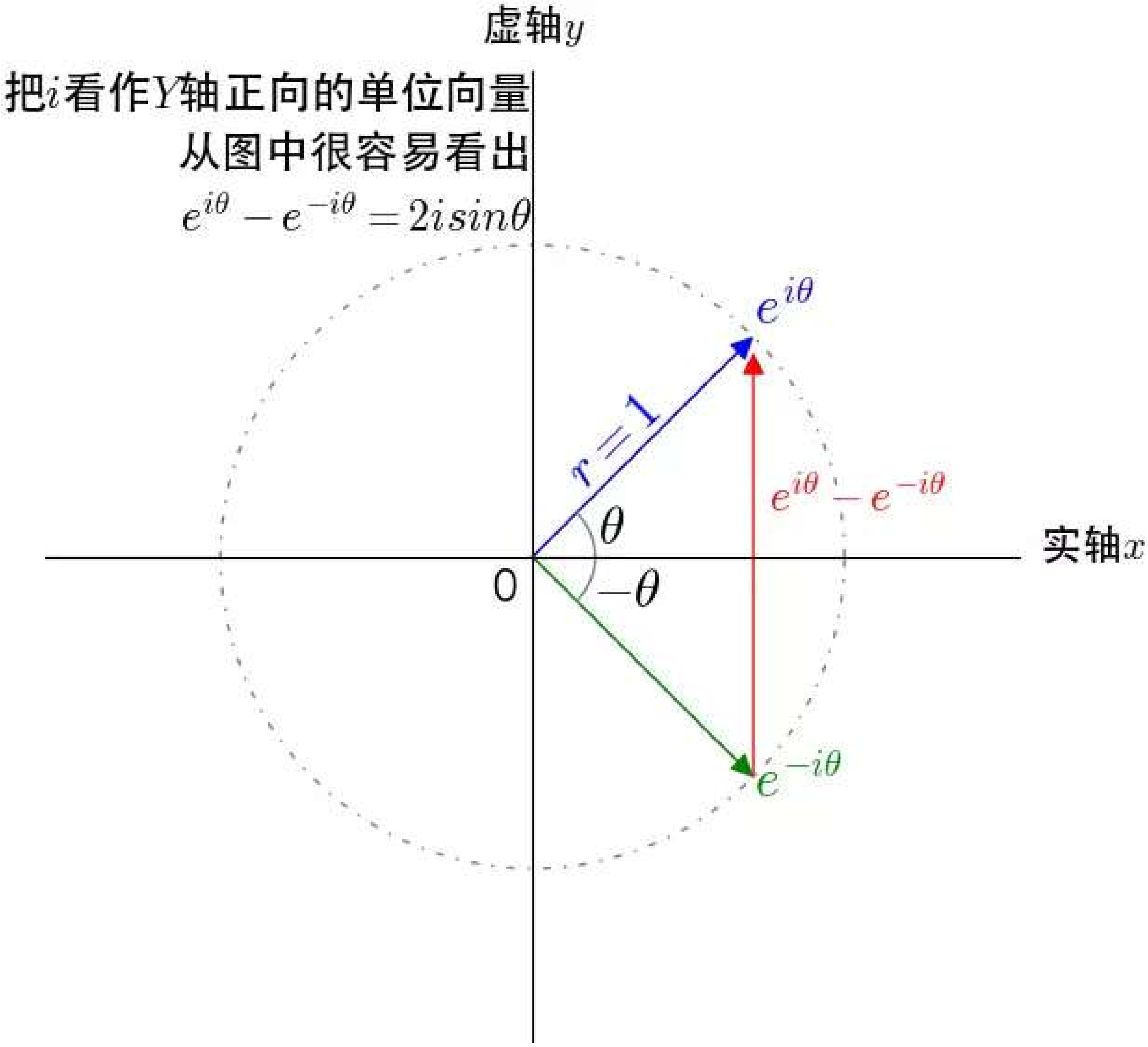
2^i 看不出来有什么几何含义，不过我们稍微做个变换 e^{iln2} ，几何含义还是挺明显的，沿圆周运动 $ln2$ 弧度。

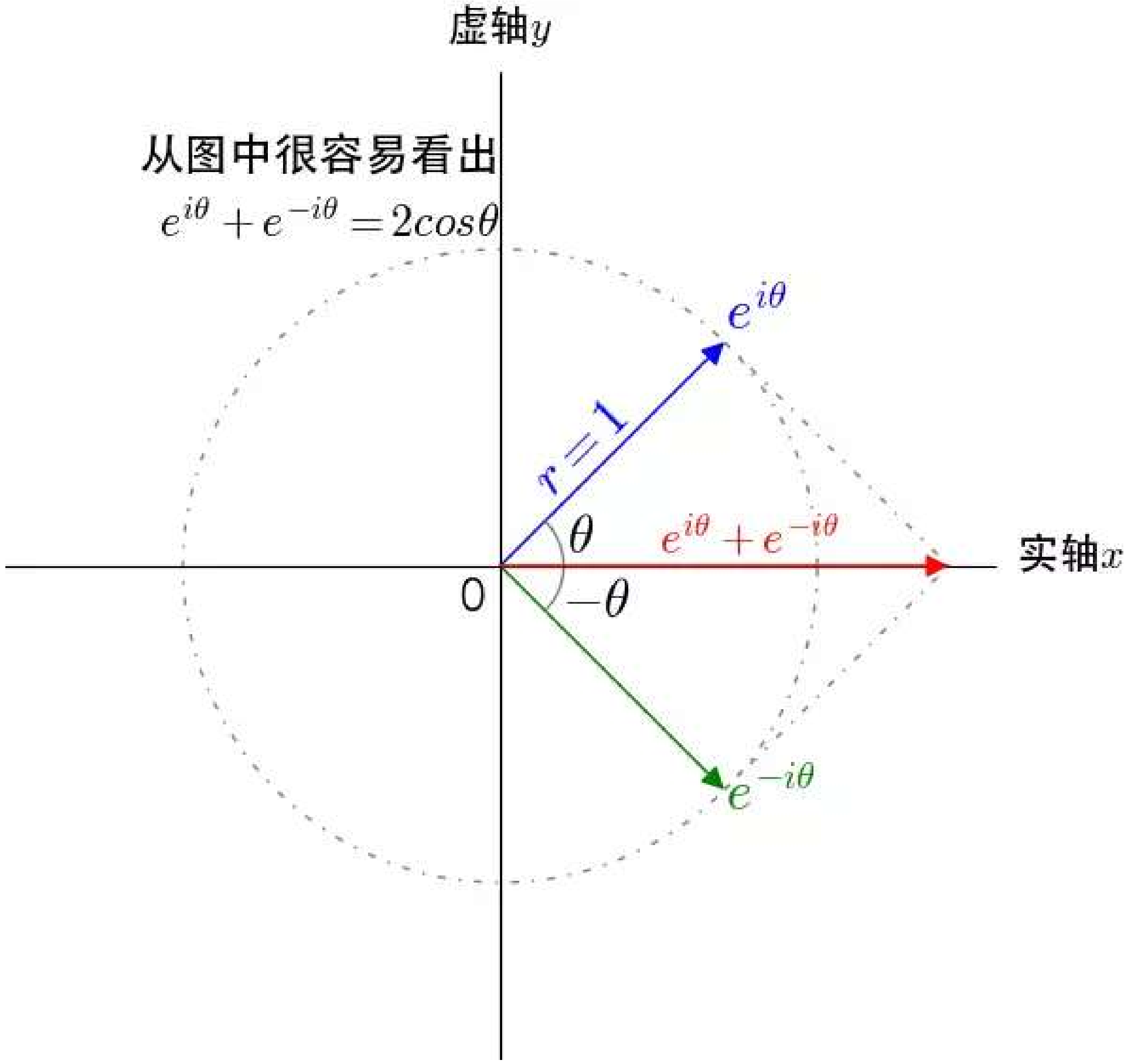
2.5 欧拉公式与三角函数

根据欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ，可以轻易推出：

$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ 和 $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ 。三角函数定义域被扩大到了复数域。

我们把复数当作向量来看待，复数的实部是 x 方向，虚部是 y 方向，很容易观察出其几何意义。


虚轴y
把i看作Y轴正向的单位向量
从图中很容易看出
$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2isin\theta$
$e^{i\theta}$
$r=1$
$e^{i\theta}-e^{-i\theta}$
θ
实轴x
0
$-\theta$
$e^{-i\theta}$



2.6 欧拉恒等式

当 $\theta=\pi$ 的时候，代入欧拉公式：

$e^{i\pi}=cos\pi+isin\pi=-1 \implies e^{i\pi}+1=0$ 。

$e^{i\pi}+1=0$ 就是欧拉恒等式，被誉为上帝公式， e 、 π 、 i 、乘法单位元1、加法单位元0，这五个重要的数学元素全部被包含在内，在数学爱好者眼里，仿佛一行诗道尽了数学的美好。

阅读原文