

《仪器系统设计基础》第五讲

仪器精度理论

仪器科学与工程系专业必修课

主讲： 宋开臣 教授

kcsong@zju.edu.cn

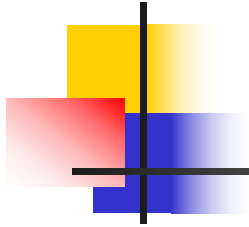
13600513662



仪器精度理论讲座内容

一、仪器精度理论

二、数据处理的一般方法



一、仪器精度理论

1. 误差的基本概念
2. 误差的分类
3. 仪器误差的来源
4. 误差的简化
5. 精度理论基本概念
6. 阿贝原则



1. 误差的基本概念

误差的定义：测量结果与其真值的差异。

$$\Delta x = x - x_0$$

Δx – 测量误差

x – 测量结果

x_0 – 真值



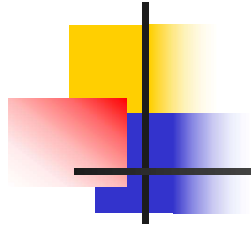
1. 误差的基本概念

真值的定义：被测量的客观真实值。

理论真值：理论上存在、计算推导出来。如：三角形内角和 180°

约定真值：国际上公认的最高基准值。如基准米定义：
1983年10月在巴黎召开的第十七届国际计量大会上又通过了米的新定义：“米是 $1 / 299792458$ 秒的时间间隔内光在真空中行程的长度”。

相对真值：利用高一等级精度的仪器或装置的测量结果作为近似真值。标准仪器的测量标准差 $< 1/3$ 测量系统标准差 \rightarrow 检定



2. 误差的分类

随机误差

- (1) 随机误差产生的原因
- (2) 随机误差的一般特性
- (3) 测量的极限误差
- (4) 随机误差的合成

系统误差

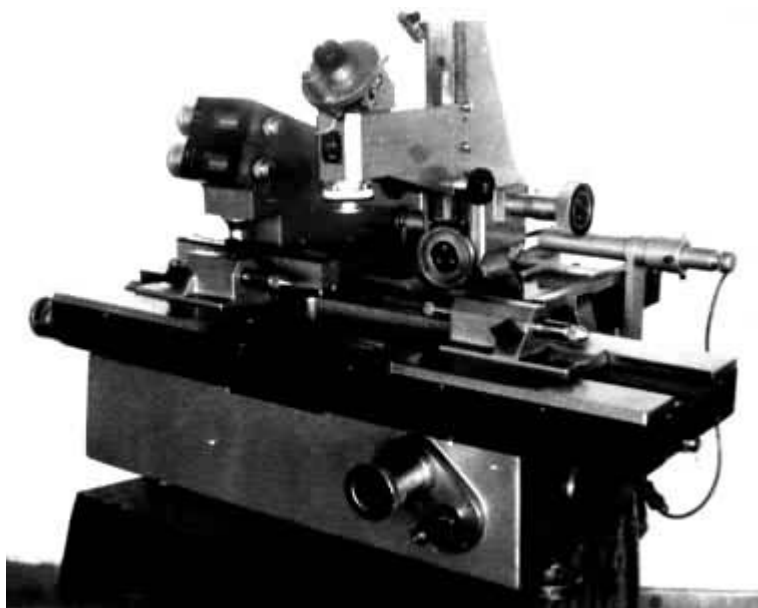
- (5) 系统误差产生的原因
- (6) 系统误差的特性

粗大误差

- (7) 粗大误差产生的原因
- (8) 粗大误差的判别准则

(1) 随机误差产生的原因

- **测量装置方面的因素：** 零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。



(1) 随机误差产生的原因

- **环境方面的因素：**温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。



(1) 随机误差产生的原因

- 人员方面的因素：瞄准、读数的不稳定性等。



(2) 随机误差的一般特性

对称、单峰、抵偿、有界

对称性

绝对值相等的正负误差出现的次数相等

单峰性

绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多

抵偿性

当测量次数足够多时，偶然误差算术平均值趋于0

有界性

随机误差绝对值不会超过一定程度

定义：测量结果与统一测量量的大量重复测量的平均结果之差



(3) 测量的极限误差

在一般测量中，一般认为绝对值大于 3σ 的误差是不可能出现的，通常把这个误差称为单次测量的极限误差

$$\delta_{\lim} x = \pm 3\sigma$$

3σ 对应的概率 $P=99.73\%$

2σ 对应的概率 $P=95.4\%$

1σ 对应的概率 $P=68.3\%$

(4) 随机误差的合成

若有 q 个单项随机误差，他们的标准差分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ ，其相应地误差传递系数为 a_1, a_2, \dots, a_q ，根据方和根的运算方法，各个标准差合成后的总标准差为

互相关函数

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j}$$

一般情况下各个误差互不相关，相关系数 $\rho=0$ ，则有

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \sigma_i)^2}$$

进一步的，
如果采用相同的仪器测量，
则各误差传递系数 $a_i=1$

(5) 系统误差产生的原因

- **测量装置方面的因素：** 仪器机构设计原理上的缺点，仪器零件制造和安装不正确，仪器附件制造偏差。



(5) 系统误差产生的原因

- **环境方面的因素：**测量过程中温度、湿度等按一定规律变化的误差。



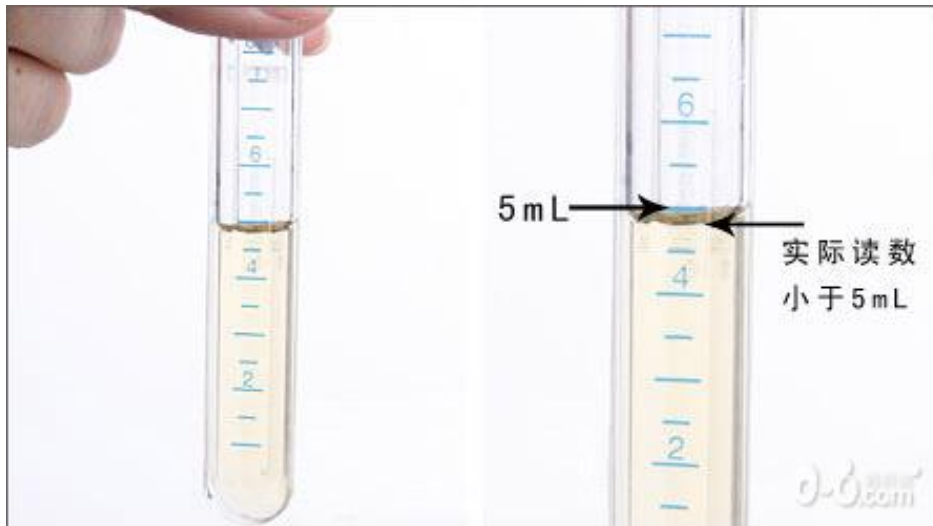
(5) 系统误差产生的原因

- **测量方法的因素：**采用近似的测量方法或近似的计算公式等引起的误差。



(5) 系统误差产生的原因

- **测量人员方面的因素：** 由于测量者的个人特点，在刻度上估计读数时，习惯偏于某一方向；动态测量时，记录某一信号有滞后的倾向。



(6) 系统误差的特性

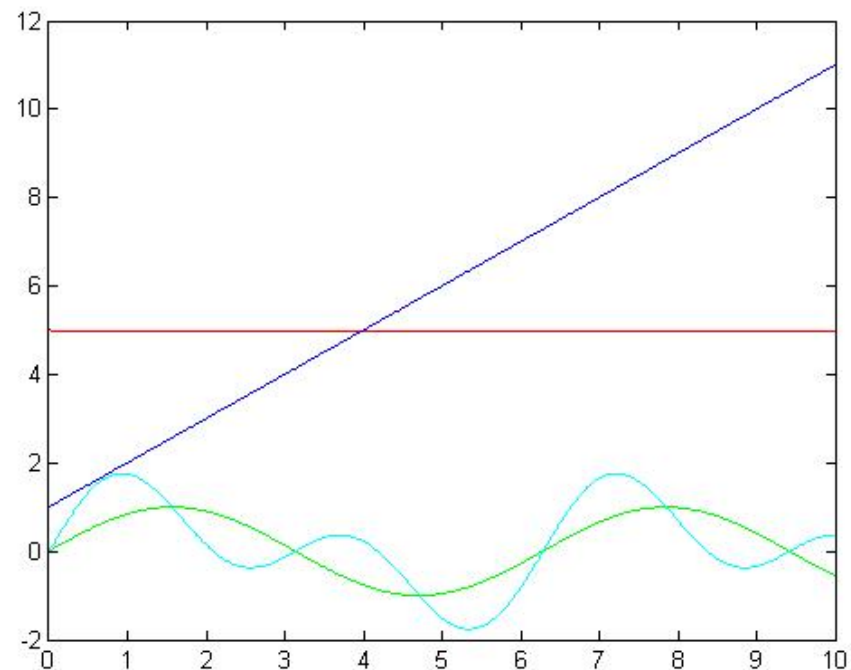
定义：在同一测量条件下，对同一被测量进行多次重复测量时，误差大小、符号不变，在条件变化时依旧保持不变或按一定规律变化

不变的系统误差

线性变化的系统误差

周期性变化的系统误差

复杂规律变化的系统误差



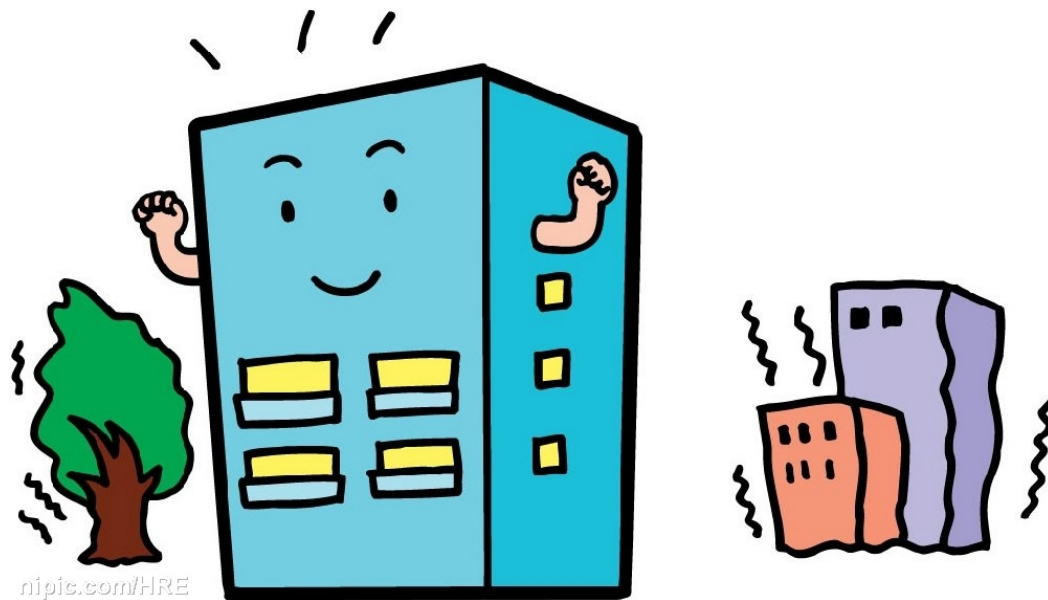
(7) 粗大误差产生的原因

- **测量人员的主观原因：**由于测量者工作责任感不强，工作过于疲劳或者缺乏经验操作不当，或在测量时不小心、不耐心、不仔细等，从而造成了错误的读数或者错误的记录，这是产生粗大误差的主要原因。



(7) 粗大误差产生的原因

- **客观外界条件的原因：**由于测量条件意外地改变（如机械冲击、外界振动等），引起仪器示值或被测对象位置的改变而产生粗大误差。



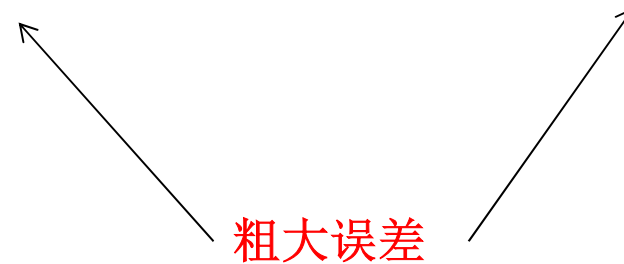


(8) 粗大误差判别准则

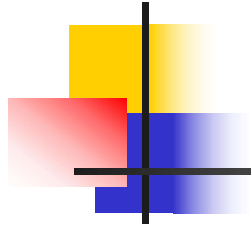
3σ 准则是最常用也是最简单的
判别粗大误差的准则。

粗大误差的剔除：

如果在测量列中，发现
有大于 3σ 的残余误差
测量值，则可认为它含
有粗大误差。



定义：在一定测量条件下，超出规定条件下预期的误差



3. 仪器误差的来源

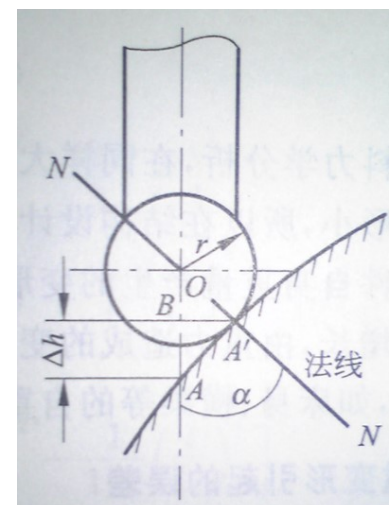
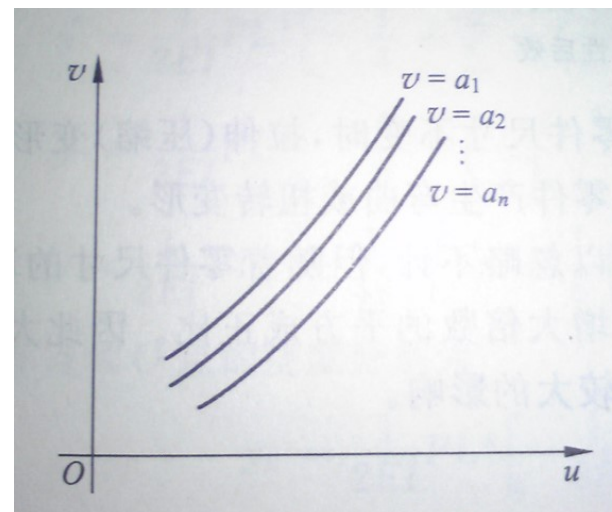
(1) 原理误差

(2) 制造误差

(3) 运行误差

(1) 原理误差

- 1) 理论误差
- 2) 方案误差
- 3) 技术原理误差
- 4) 机构原理误差
- 5) 零件原理误差
- 6) 电路控制系统的原理误差





(2) 制造误差

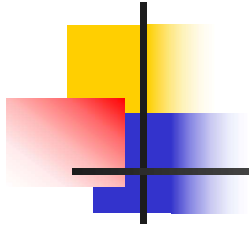
基准面大体上可分为以下3种：

设计基准面：零件工作图上注尺寸的基准面；

工艺基准面：加工时，用它定位去加工其他面；

装配基准面：以它为基准，确定零件间的互相位置。

尽可能把以上3个基面统一起来，以利保证精度



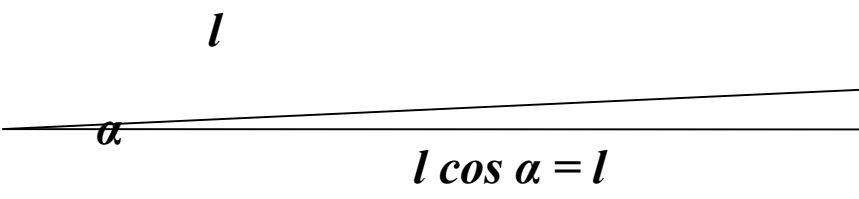
(3) 运行误差

- 1)** 自重变形引起的误差
- 2)** 应力变形引起的误差
- 3)** 接触变形引起的误差
- 4)** 磨损
- 5)** 间隙与空程引起的误差
- 6)** 温度引起的误差
- 7)** 振动引起的误差



4. 误差的简化

在对仪器误差进行分析时，如不进行合理的简化，那么误差的分析过程将变得非常复杂。

$$\begin{array}{l} \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{array}$$


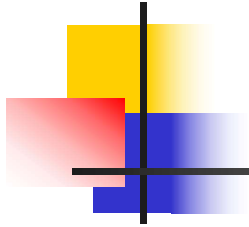
The diagram shows a right triangle with a horizontal base and a vertical height. The hypotenuse is labeled l . The angle at the bottom-left vertex is labeled α . The horizontal side is labeled $l \cos \alpha = l$, and the vertical side is labeled $l \sin \alpha = l \alpha$.

最简单的化简就是正、余弦小角度的化简

$$\sin \alpha \sin \alpha \approx \alpha \cdot \alpha \approx 0$$

$$\cos \alpha \sin \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$$

二次误差化为0的原则



5. 精度理论

- (1) 精度的含义
- (2) 仪器精度分类
- (3) 线性度
- (4) 回程误差
- (5) 分辨力
- (6) 重复性
- (7) 灵敏度



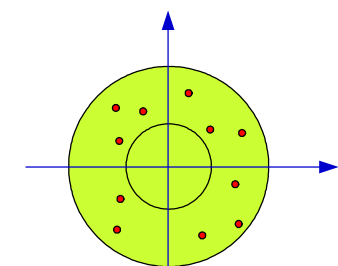
(1) 精度的含义

精度（不确定度）是误差的反义词，
精度的高低是用误差来衡量的。

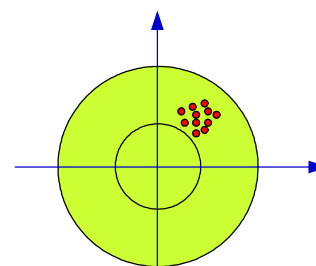
通常把精度区分为

- ①**准确度**：它反映了**系统误差**的大小；
- ②**精密度**：它反映了**随机误差**的大小；
- ③**精确度**：它反映了**系统误差和随机误差**两者的综合

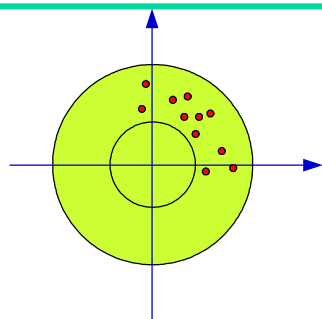
(1) 精度的含义



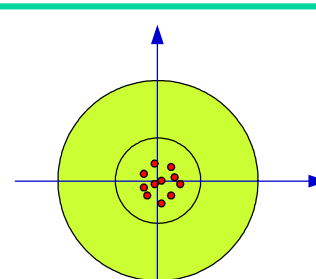
不精密 (随机误差大)
准确 (系统误差小)



精密 (随机误差小)
不准确 (系统误差大)



不精密 (随机误差大)
不准确 (系统误差大)



精密 (随机误差小)
准确 (系统误差小)

(2) 仪器精度分类



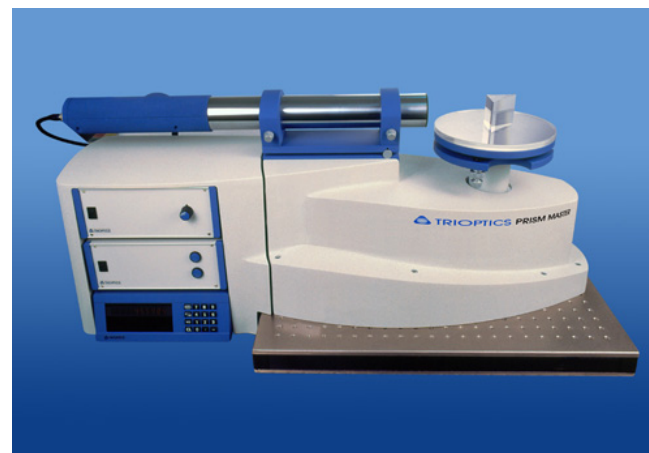
螺旋测微仪

中等精度：直线位移精度 $1\text{ }\mu\text{m}$ - $10\text{ }\mu\text{m}$ ，主轴回转精度 $1\text{ }\mu\text{m}$ - $10\text{ }\mu\text{m}$ ，圆分度精度 $1''$ - $10''$

高精度：直线位移精度 $0.1\text{ }\mu\text{m}$ - $1\text{ }\mu\text{m}$ ，主轴回转精度 $0.1\text{ }\mu\text{m}$ - $1\text{ }\mu\text{m}$ ，圆分度精度 $0.2''$ - $1''$



Talyrond圆柱度仪



PrismMaster精密测角仪

超高精度：直线位移精度 $<0.1\text{ }\mu\text{m}$ ，主轴回转精度 $<0.1\text{ }\mu\text{m}$ ，圆分度精度 $<0.2''$

(3) 线性度

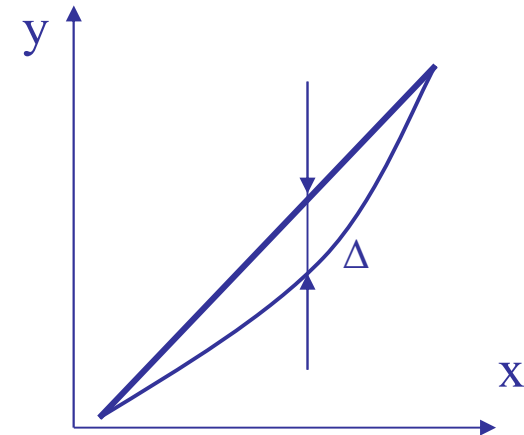
定义: 检测系统输入输出曲线与理想直线的偏离程度。

亦称非线性误差(non-linearity)

表达: 相对误差
$$e_L = \pm \frac{\Delta L_{\max}}{y_{F.S.}} \times 100 \%$$

ΔL_{\max} 输出值与理想直线的最大偏差值

$y_{F.S.}$ 理论满量程输出值



理想直线: 一般不存在或很难获得准确结果

利用测量数据, 通过计算获得 —————> 拟合直线

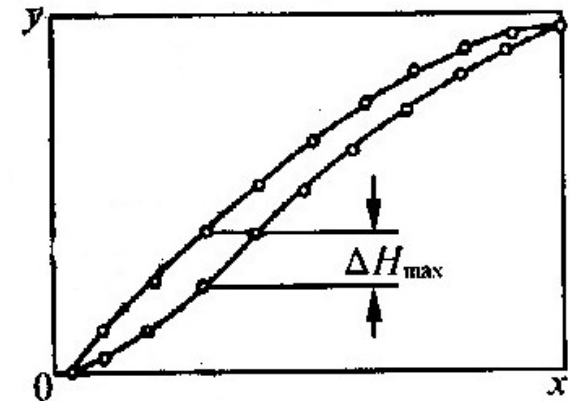
(4) 回程误差

定义： 检测系统在正行程和反行程的输入输出曲线不重合的程度，

亦称空程误差、滞后 (hysteresis)

算法： 相对误差
$$e_H = \frac{\Delta H_{\max}}{y_{F.S.}} \times 100\%$$

ΔH_{\max} ：正反行程输出值的最大偏差





(5) 分辨力

定义：能够检测出的被测量的最小变化量，
表征测量系统的分辨能力 (resolution)

分辨力时不确定度的组成部分之一

说明：1、分辨力 --- 是绝对数值。如 0.01mm, 0.1g, 10ms,

2、分辨率 --- 是相对数值。

能检测的最小被测量的变换量相对于满量程的百分数，

如：0.1%, 0.02%。灵敏度：测量系统稳态下输出变化量与输入变化量的比值

3、阈值 --- 系统能够感知的最小输入量值。

在系统输入零点附近的分辨力。



(6) 重复性

定义： 同一条件下，对同一被测量，同一方向，多次重复测量，差异程度。

对同一被测量值：各次测量数值的偏差程度
对不同被测数值：各次测量曲线的偏差程度

➤ 测量数据的分散性

重复性是检测系统最基本的技术指标，是其他各项指标的前提和保证

重复性误差：属随机误差。

标准差计算：贝塞尔公式：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}}$$

y_i ---测量输出值， $i=1,2,\dots,n$

\bar{y} ---输出值的平均值



(7) 灵敏度

定义：测量系统在稳态下输出量的增量与输入量的增量之比。

斜率 (灵敏度系数)：

$$K = \Delta y / \Delta x \quad \mathbf{K=2pF/nm}$$

说明： a. 线性检测系统：灵敏度为常数；

$$y = a + bx \quad K = b$$

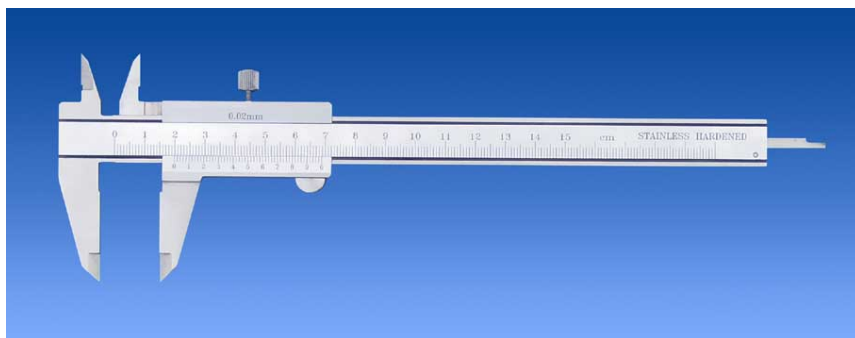
b. 非线性检测系统：灵敏度为变数。

$$y = f(x)$$

$$K = \frac{df(x)}{dx}$$

6. 仪器设计基本原则——阿贝原则

要使量仪给出准确的测量结果，必须将被测件布置在基准元件沿运动方向的延长线上。

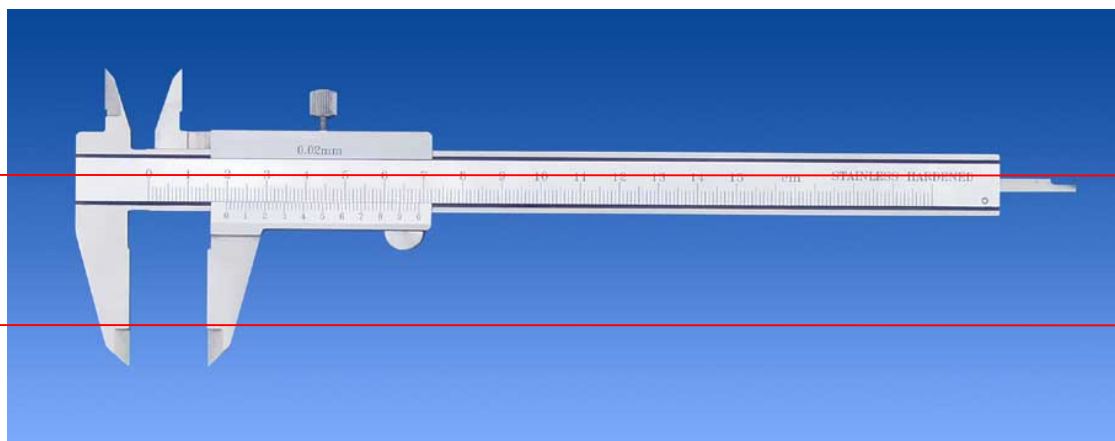


游标卡尺
不符合阿贝原则

螺旋测微仪
符合阿贝原则

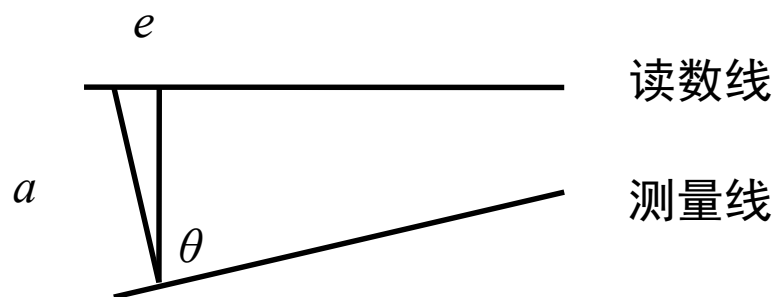


6. 仪器设计基本原则——阿贝原则



读数线

测量线

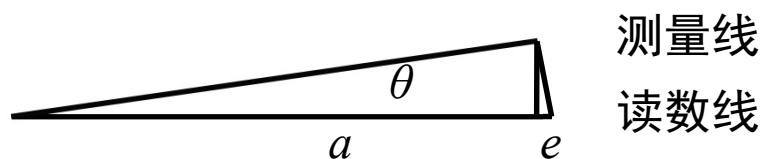


$$\text{误差} \approx e = a \tan \theta \approx a \theta$$

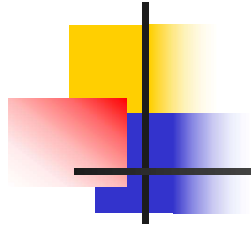
6. 仪器设计基本原则——阿贝原则



读数线、测
量线共线



$$e = a(1 - \cos \theta) = a[1 - (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} + \dots)] \approx \frac{a}{2} \theta^2$$



二、数据处理的一般方法

- 1.** 最小二乘法
- 2.** 线性拟合与非线性修正
- 3.** 计算机误差修正方法



1. 最小二乘法

为了确定 t 个不可直接测量的未知量 X_1, X_2, \dots, X_t 的估计值 x_1, x_2, \dots, x_t , 可对与该 t 个未知量有函数关系的直接测量量 Y 进行 n 次测量, 得测量数据 l_1, l_2, \dots, l_n , 其关系如下:

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_t) \\ Y_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_t) \\ &\vdots \\ Y_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_t) \end{aligned}$$



1. 最小二乘法

若 $n=t$ ，则可由前面的式子直接求得未知量。由于测量数据不可避免地包含着测量误差，所以求得的结果也必定包含一定的误差。为提高精度，应适当增加测量次数 n ，以便利用抵偿性减小随机误差的影响。但此时由于方程个数 $>$ 未知数个数，不能从方程中直接得到结果。最小二乘法原理指出，最可信赖值应在使残余误差平方和最小的条件下求得。

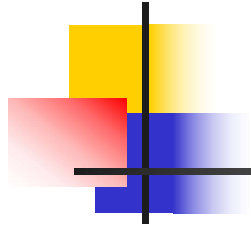
$$v_1 = l_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots x_t)$$

$$v_2 = l_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots x_t)$$

$$\vdots$$

$$v_n = l_n - f_n(x_1, x_2, \cdots x_t)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \text{最小}$$



2. 线性拟合与非线性修正

(1) 线性拟合方法

作图法（最大包容）

最小二乘法

(2) 非线性修正方法

分段线性拟合与插值

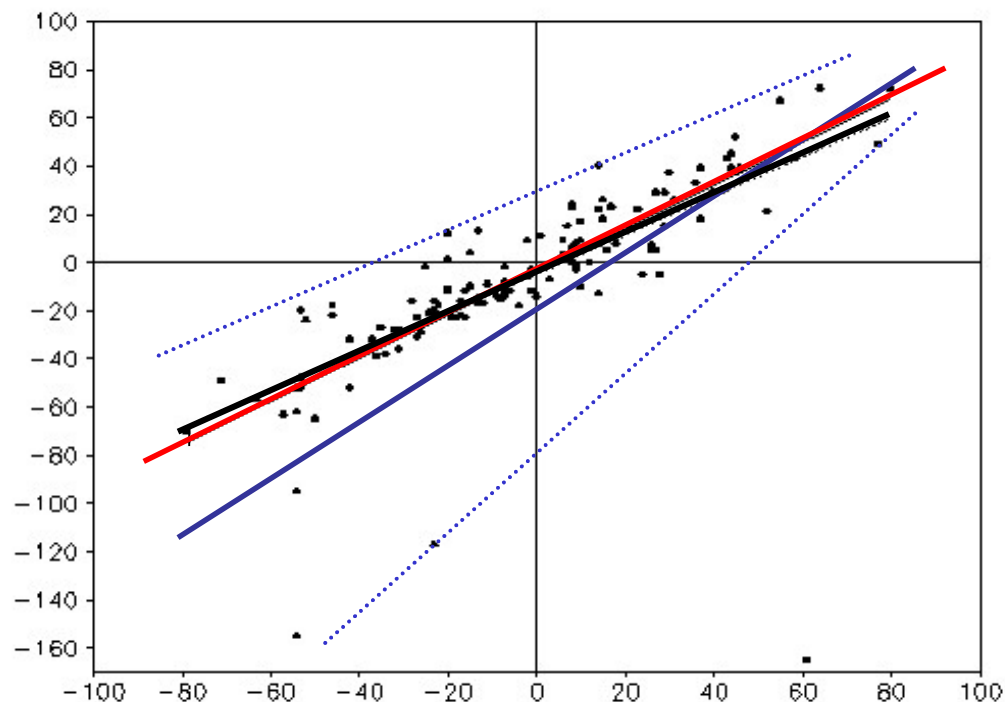
曲线拟合与插值

(2) ~~非线性修正方法~~

作图法（直观判断）

作图法（最大包容）

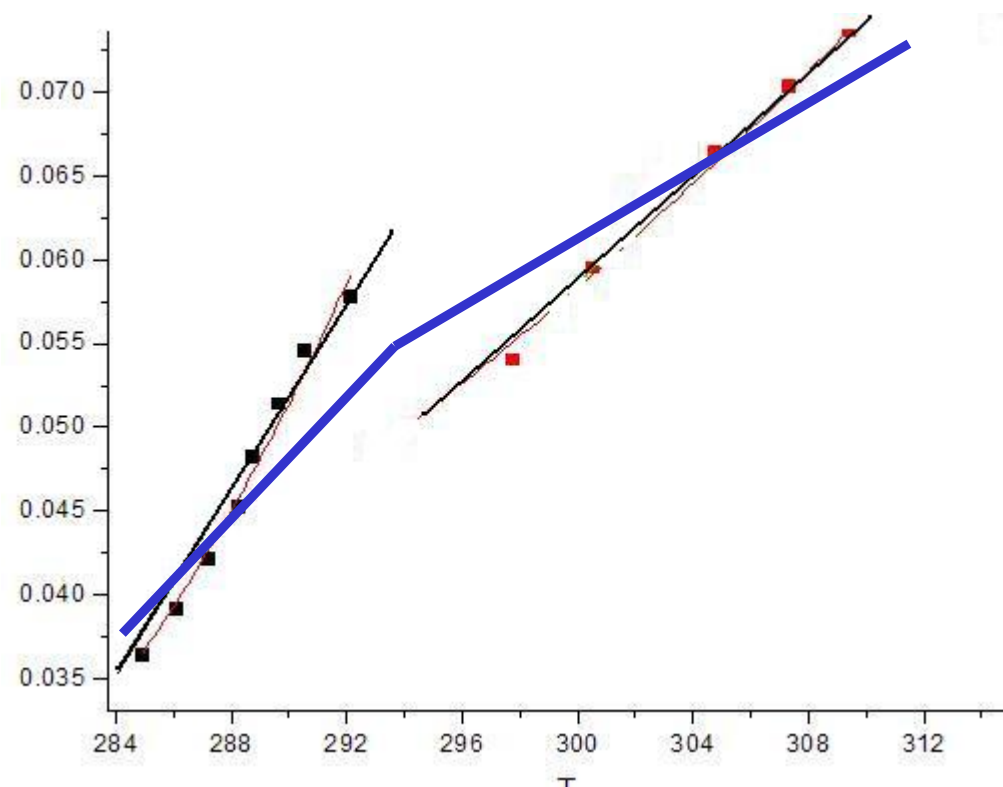
最小二乘法



(2) 非线性修正方法

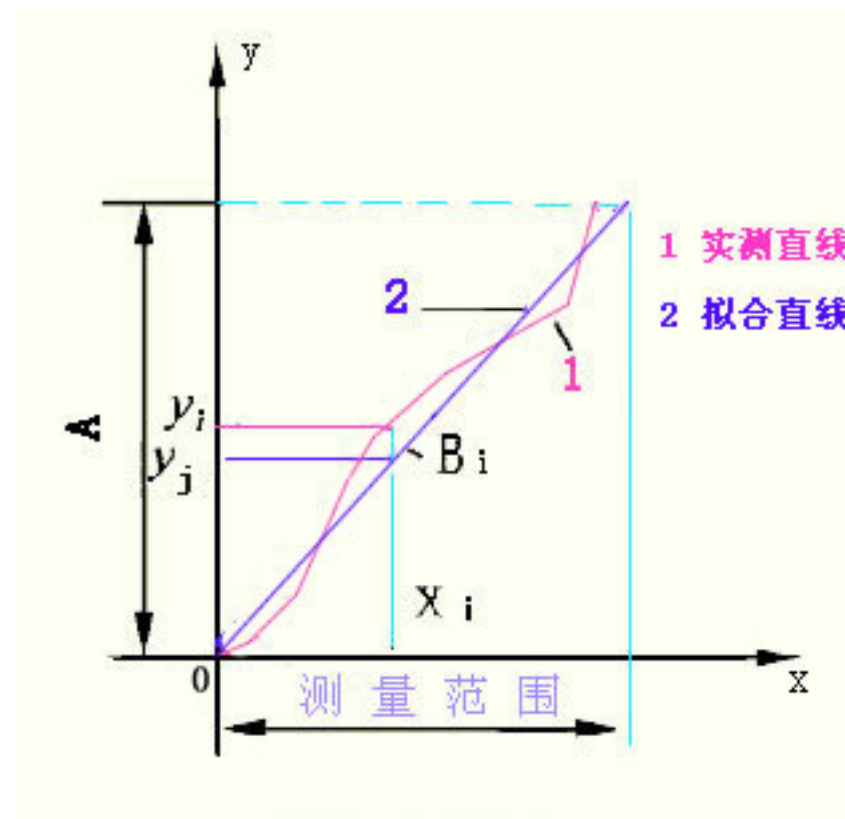
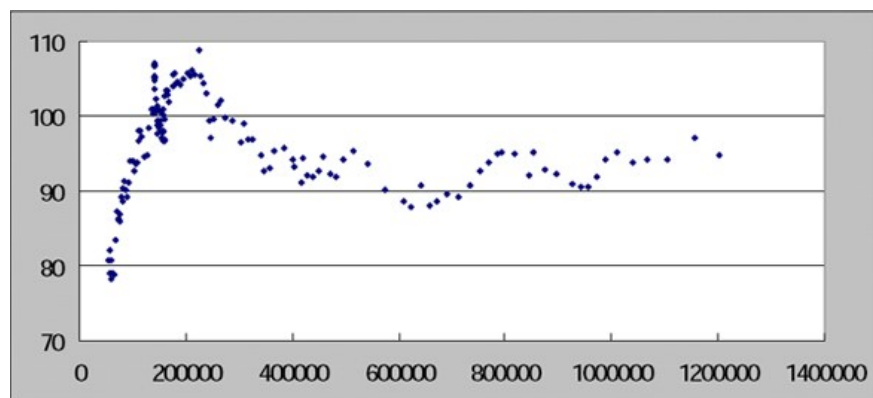
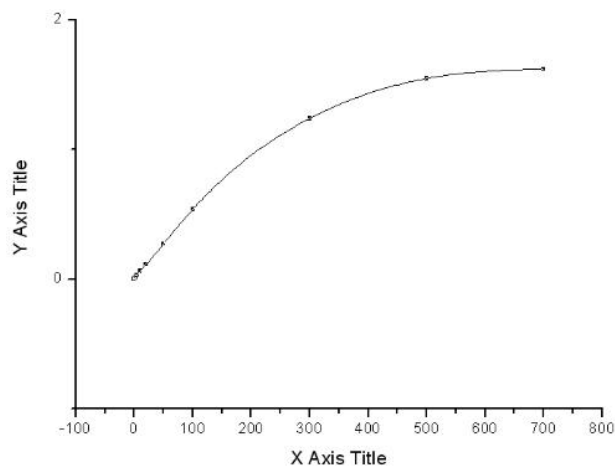
分段线性拟合与插值

通常还要保证折线时连续的



(2) 非线性修正方法

曲线拟合与插值 (二次、三次样条、多项式)



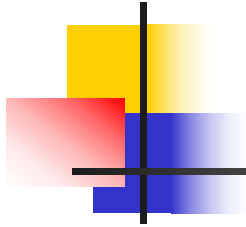


3.计算机误差修正方法

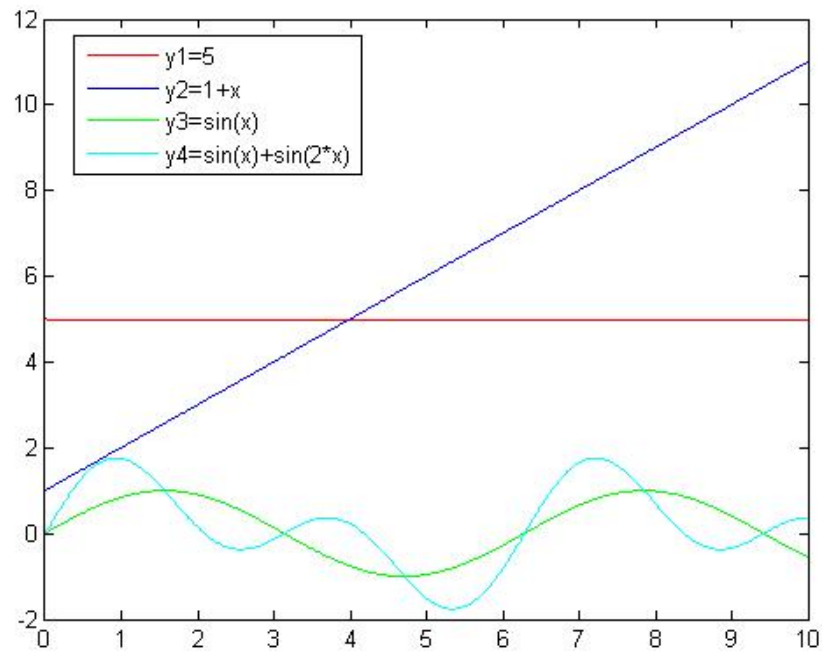
(1) 公式法 有规律的系统误差

(2) 查表法 无规律系统误差

误差修正方法只适用于系统误差，
效果与重复性好坏有关



(1) 公式法



公式法对修正有规律的系统误差非常有效



(2) 查表法

- 对于规律性不强的系统误差的修正，则只能预先将误差的特性曲线输入计算机，通过查表法来得到。



参考资料

1. 《误差理论与数据处理》 费业泰主编 机械工业出版社
2. 《测量误差与不确定度评定》 王中宇等著 科学出版社
3. 《智能检测技术与系统》 胡向东编 高等教育出版社
4. 《现代精密仪器设计》 李庆祥等 清华大学出版社
5. 《智能仪器工程设计》 尚振东等 西安电子科技大学出版社



课后作业

1. 真值的定义是什么？有几种真值？
2. 叙述系统误差、随机误差和粗大误差的定义。描述它们的基本特征。如何合成系统误差和随机误差？如何剔除粗大误差？
3. 分辨力与不确定度有什么不同，分析二者的相互关系。分辨力与灵敏度的区别是什么？
4. 对测量仪器校准时为什么要做线性拟合。描述最小二乘线性拟合方法。
5. 解释非线性误差的定义。如何修正非线性误差。