浙江工业大学 2019/2020 学年
第二学期试卷

课程：复变函数与积分变换　班级：______________

姓名：______________　学号：______________　教师姓名：______________

题序	一	二	三	四	五	六	总评
计分							

一、 填空题 (共 36 分，每空 3 分)

1. 若 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，那么 $z^{2020}+z^{2019}+1=$______________.
2. 对于 $0\le\theta<2\pi$，如果 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|=2$，那么 $\theta=$______________.
3. $\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})=$________________________.
4. 判断：对任意复数 z 均有 $|\cos z|\le 1$______________(正确打 ✓，错误打 ×).
5. 积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z=$______________(积分曲线取正向).
6. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\mathrm{i}n z^n$ 的收敛半径 $R=$______________.
7. 无穷远点 ∞ 是否为函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z-1)}$ 的孤立奇点______________(请填“是”或“否”).
8. 留数 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z-2)},\infty\right]$ 的值为______________.
9. 设 $f_1(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^t, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，$f_2(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，则卷积 $f_1(t)*f_2(t)=$____________________.
10. 设 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega+\omega_0)$，其中 ω_0 为常数，则 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=$______________.
11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，则其 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(x)]=$____________________.
12. 设 $F(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$，其中 a 为常数，则 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换为______________.

二、 利用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，证明 $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$. (4 分)

三、 已知 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{e}^{-x}\cos y$. (6 分)

(1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数；

(2) 求 $v(x,y)$ 使得函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数.

四、 考虑 Fibonacci 数列，$a_0=a_1=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, ($n$ 为非负整数). 定义以 Fibonacci 数列为系数的幂级数 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$ (称为 Fibonacci 数列的生成函数). (10 分)

(1) 对每个非负整数 n，求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^{n+1}},0\right]$；

(2) 验证 $(1-z-z^2)f(z)=1$；

(3) 试利用 (1), (2) 的结论求 a_n 的通项公式.

五、 在圆环域 $0 < |z-1| < 1$ 中，分别将下列函数展开成洛朗级数. (10 分)

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$,

(2) $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1}$.

六、 计算下列积分 (共 15 分，每题 5 分)

(1) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z^4}\,\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

七、 设函数 $f(t) = \mathrm{e}^{-2|t|}\sin 2t$，其中 $-\infty < t < +\infty$. (10 分)

(1) 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换；

(2) 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^4+64}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{16}\mathrm{e}^{-2|t|}\sin 2t$.

八、 利用 Laplace 变换求解微分方程 (9 分)

$$y''(t) + 4y(t) = \sin t, y(0) = y'(0) = 0.$$