浙江工业大学 2019/2020 学年
第二学期试卷

课程：复变函数与积分变换　班级：____________

姓名：____________　学号：____________　教师姓名：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总评
计分							

一、 填空题 (共 36 分，每空 3 分)

1. 若 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，那么 $z^{2020} + z^{2019} + 1 =$ $\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
2. 对于 $0 \le \theta < 2\pi$，如果 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1| = 2$，那么 $\theta =$ $\underline{\quad\pi\quad}$.
3. $\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i}) =$ $\underline{\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$.
4. 判断：对任意复数 z 均有 $|\cos z| \le 1$ $\underline{\quad\times\quad}$(正确打 ✓，错误打 ×).
5. 积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z =$ $\underline{\quad 4\pi\mathrm{i}\quad}$(积分曲线取正向).
6. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin \mathrm{i}n z^n$ 的收敛半径 $R =$ $\underline{\quad\frac{1}{\mathrm{e}}\quad}$.
7. 无穷远点 ∞ 是否为函数 $f(z) = \frac{1}{z(\mathrm{e}^z - 1)}$ 的孤立奇点$\underline{\quad 否\quad}$(请填“是”或“否”).
8. 留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z-2)}, \infty\right]$ 的值为$\underline{\quad \mathrm{e} - \mathrm{e}^2\quad}$.
9. 设 $f_1(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$，$f_2(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$，则卷积 $f_1(t) * f_2(t) =$ $\underline{\begin{cases} \mathrm{e}^t - 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}}$.
10. 设 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$，其中 ω_0 为常数，则 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] =$ $\underline{\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\quad}$.
11. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$，则其 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(x)] =$ $\underline{\begin{cases} \frac{2\sin\omega}{\omega}, & \omega \ne 0 \\ 2, & \omega = 0 \end{cases}}$.
12. 设 $F(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$，其中 a 为常数，则 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换为$\underline{\quad \frac{1}{a}\sin at\quad}$.

二、 利用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，证明 $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$. (4 分)

证：

由于

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3 = \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta \\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\
&= [(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta] + \mathrm{i}[2\cos^2\theta\sin\theta + \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]
\end{aligned}
$$

所以 $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$.

三、 已知 $u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y$. (6 分)

(1) 验证 $u(x, y)$ 为调和函数；

(2) 求 $v(x, y)$ 使得函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 为解析函数.

解:

(1) 对 $u(x, y)$ 求偏导，可得

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{e}^{-x} \cos y, \quad u_{xx} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^{-x} \cos y,$$
$$u_y = \mathrm{e}^x(-\sin y) + \mathrm{e}^{-x}(-\sin y), \quad u_{yy} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(-\cos y),$$

所以 $u_{xx} + u_{yy} = 0$，即 $u(x, y)$ 为调和函数.

(2) 由 (1) 得

$$v(x, y) = \int v_y \,\mathrm{d}y = \int (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \cos y \,\mathrm{d}y = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \sin y + \varphi(x),$$

而

$$v_x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \sin y + \varphi'(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \sin y,$$

则 $\varphi'(x) = 0$，即 $\varphi(x) = C$，所以 $f(z) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \cos y + \mathrm{i}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \sin y + \mathrm{i}C$.

四、 考虑 Fibonacci 数列，$a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ($n$ 为非负整数). 定义以 Fibonacci 数列为系数的幂级数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (称为 Fibonacci 数列的生成函数). (10 分)

(1) 对每个非负整数 n，求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}, 0\right]$；

(2) 验证 $(1 - z - z^2) f(z) = 1$；

(3) 试利用 (1), (2) 的结论求 a_n 的通项公式.

解:

(1) 先计算 $\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}$

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{z_1}{z^n} + \cdots + \frac{a_n}{z} + a_{n+1} + \cdots$$

所以 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}, 0\right] = a_n$.

(2)

$$
\begin{aligned}
(1-z-z^2)f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) z^{n+2} + (a_0 + a_1 z - a_0 z) \\
&= a_0 = 1
\end{aligned}
$$

证毕.

(3)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}z}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}z}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)^n\right]
\end{aligned}
$$

所以 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

五、 在圆环域 $0 < |z-1| < 1$ 中，分别将下列函数展开成洛朗级数. (10 分)

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$,

(2) $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1}$.

解:

(1)

$$
f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n\right].
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{z}{z-1} &= \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \sin 1\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin\frac{1}{z-1} \\
&= \sin 1\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^4 - \cdots\right] \\
&\quad + \cos 1\left[1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^5 - \cdots\right]
\end{aligned}
$$

六、 计算下列积分 (共 15 分，每题 5 分)

(1) $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z^4}\,dz$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\,d\theta$

解：

(1)

$$\begin{aligned}\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz &= \oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z+i)(z-i)}\,dz \\ &= \oint_{|z-i|=1} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{z+i}\right|_{z=i} \\ &= \pi(\cos 1 + i\sin 1)\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z^4}\,dz = -2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z^4}, \infty\right],$$

而

$$\frac{z^3}{1+z^4} = \frac{z^3}{z^4} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^4} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{z^4}\right)^n,$$

所以 $\mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z^4}, \infty\right] = -c_{-1} = -1$，即 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z^4}\,dz = 2\pi i.$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\,d\theta &= \int_0^{4\pi} \frac{du}{3-\cos u} = 2\int_0^{2\pi} \frac{du}{3-\cos u} \quad (u = 2\theta) \\ &= 4i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-6z+1} \quad (z = e^{iu}) \\ &= 4i \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-6z+1}, 3-2\sqrt{2}\right] \\ &= -8\pi \cdot \left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

七、 设函数 $f(t) = e^{-2|t|}\sin 2t$，其中 $-\infty < t < +\infty$. (10 分)

(1) 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换；

(2) 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^4+64} \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{16} \mathrm{e}^{-2|t|} \sin 2t$.

解:

(1)

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2|t|} \sin 2t \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{[2+\mathrm{i}(2-\omega)]t} \, \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{[2+\mathrm{i}(-2-\omega)]t} \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{[-2+\mathrm{i}(2-\omega)]t} \, \mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{[-2+\mathrm{i}(-2-\omega)]t} \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\frac{1}{2+\mathrm{i}(2-\omega)} - \frac{1}{2+\mathrm{i}(-2-\omega)} + \frac{1}{2+\mathrm{i}(2-\omega)} - \frac{1}{2+\mathrm{i}(-2-\omega)} \right] \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot \frac{8\omega}{\omega^4+64}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot \frac{8\omega}{\omega^4+64} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{16\omega}{\omega^4+64} \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

即 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^4+64} \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{16} \mathrm{e}^{-2|t|} \sin 2t$.

八、 利用 Laplace 变换求解微分方程 (9 分)

$$
y''(t) + 4y(t) = \sin t, \ y(0) = y'(0) = 0.
$$

解:

两边做拉氏变换

$$
s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] = \frac{1}{s^2+1},
$$

所以

$$
Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} \right),
$$

所以

$$
y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t.
$$