浙江工业大学 2021/2022 学年
第一学期试卷

课程：复变函数与积分变换　班级：____________

姓名：____________　学号：____________　教师姓名：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总评
计分							

一、 选择填空题 (每题 4 分，共 40 分)

1. 设 $z=3+4\mathrm{i}$，则 $|z|=$ ___5___.
2. 设 $z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$，$z_2=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$，则 $\mathrm{Re}(z_1^2+z_2^3)=$ ___$-2-4\sqrt{2}$___.
3. 设 $z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$，$z_2=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$，则 $\arg(z_1+z_2)=$ ___D___.

   A. $\dfrac{\pi}{4}$　B. $\dfrac{\pi}{3}$　C. $\dfrac{7\pi}{12}$　D. $\dfrac{7\pi}{24}$

4. 设 $z=3+4\mathrm{i}$，则 $\ln \mathrm{e}^z=$ ___$3+\mathrm{i}(4-2\pi)$___.
5. 方程 $|z-3|+|z+i|=4$ 表示的曲线是___C___.

   A. 空集　B. 线段　C. 椭圆　D. 原点

6. 以下表述**错误**的是___C___.

   A. $\sin\mathrm{i}\neq 0$　B. $\cos\mathrm{i}\neq 0$　C. $|\sin\mathrm{i}|\leq 1$　D. $|\cos\mathrm{i}|\geq 1$

7. 以下对函数 $\ln z$ 的陈述，错误的是___C___.

   A. 是一个单值函数　B. 对一切非零复数都有定义

   C. 对一切非零复数都解析　D. $\ln z^n=n\ln z$ 可能不成立

8. 函数 $\dfrac{1}{z^2+2z-15}$ 沿曲线___C___的积分**不为零**.

   A. $|z|=1$　B. $|z|=2$　C. $|z|=4$　D. $|z|=8$

9. 对函数 $\dfrac{z}{\sin z}$ 在扩充复平面上的奇点描述，错误的是___A___.

   A. 一切奇点都是孤立的　B. 有可去奇点　C. 有极点　D. 没有本性奇点

10. 以下函数，___B___在定义域上是调和函数.

    A. x^2+y^2　B. $\ln(x^2+y^2)$　C. e^{xy}　D. $\cos xy$

二、 (10 分) 设 $u_1(x,y)=x^2+y^2$，$u_2(x,y)=x^2-y^2$. 是否存在解析函数 $f(z)$，使得其实部为 $u_1(x,y)$ 或 $u_2(x,y)$，如存在，求出满足 $f(0)=0$ 的 $f(z)$，如不存在，说明理由.

解：

本题判断 $f(z)$ 是否存在等价于判断 $u_1(x,y)$ 和 $u_2(x,y)$ 是否为调和函数.

对于 $u_1(x,y)$：$\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=2+2\neq 0$，则不可能构成.

对于 $u_2(x,y)$：$\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0$，所以能构成解析函数 $f(z)$.
令 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则

$$v(x,y)=\int v_y\,\mathrm{d}y=\int 2x\,\mathrm{d}y=2xy+\varphi(x),$$

而 $v_x=2y+\varphi'(x)=-u_y=2y$，所以 $\varphi'(x)=0$，则 $\varphi(x)=C$，即 $v(x,y)=2xy+C$，所以 $f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)$.
又因为 $f(0)=0$，所以 $f(z)=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$.

三、 (10 分) 利用留数定理计算下面的积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{13-5\cos t}.$$

解:
令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，则 $\cos t=\dfrac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{13-5\cos t}&=\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{i}}{5z^2-26z+5}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{5}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{i}}{\left(z-\frac{1}{5}\right)(z-5)}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{5}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{2\mathrm{i}}{z-5}}{z-\frac{1}{5}}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{5}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{2\mathrm{i}}{z-5}\right|_{z=\frac{1}{5}}\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

四、 (10 分) 计算函数 $\dfrac{1}{x^2+2x+10}$ 的 Fourier 变换.

解:
即求 $\mathscr{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$.
对于 $\omega<0$，

$$\mathscr{F}[f(x)]=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{z^2+2z+10},-1+3\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{2z+2}\right|_{z=-1+3\mathrm{i}}=\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{e}^{3\omega}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}.$$

对于 $\omega > 0$，

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{z^2+2z+10}, -1+3\mathrm{i}\right] = \frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{e}^{-3\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}.$$

对于 $\omega = 1$，

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+2z+10}, -1+3\mathrm{i}\right] = \frac{\pi}{3}.$$

所以

$$\mathscr{F}[f(x)] = \begin{cases} \frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{e}^{3\omega}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}, & \omega < 0 \\ \frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{e}^{-3\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{3}, & \omega = 0 \end{cases}.$$

五、 (10 分) 利用积分变换，求解微分方程的初值问题

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \mathrm{e}^{-t}, x(0) = 2, x'(0) = 1.$$

解：

两边做拉氏变换：

$$[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \frac{1}{s+1},$$

则

$$X(s) = \frac{2s^2+9s+8}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+2},$$

于是

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = 4\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t}.$$

六、 (7 分) 求积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

解：

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\cdot(1-\cos z)'|_{z=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

七、 (13 分) 设 $h(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{2z}{z^2-\pi^2}$.

(1) (6 分) 判断 0 和 $\pm\pi$ 作为 $h(z)$ 的奇点类型.

(2) (7 分) 求出 $h(z)$ 在原点去心领域上的 Laurent 级数 (求出至少三项的系数)，并指出该级数的收敛范围.

解：

(1) 对于 $z=0$，

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \frac{z-\sin z}{z\cdot\sin z}+\frac{2z}{z^2-\pi^2}\\
&= \frac{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}+\frac{2z}{z^2-\pi^2}\\
&= \frac{z\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots\right)}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}+\frac{2z}{z^2-\pi^2}
\end{aligned}
$$

则 $\lim\limits_{z\to 0}h(z)=0+\dfrac{0}{-\pi^2}=0$，所以 0 是 $h(z)$ 的可去奇点.
对于 $z=\pm\pi$，

$$
h(z)=\frac{z^2-\pi^2+2z^2\sin z}{\sin z\,(z^2-\pi^2)}-\frac{1}{z},
$$

所以 $\pm\pi$ 是 $h(z)$ 的可去奇点.

(2) 对于 $0<|z-0|<\pi$，

$$
\begin{aligned}
2z\cdot\frac{1}{z^2-\pi^2} &= \frac{2z}{-\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{\pi}\right)^2}=\frac{2z}{-\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n},\\
\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7}{360}z^3+\cdots,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \left(\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7}{360}z^3+\cdots\right)-\frac{1}{z}-\frac{2z}{-\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n}\\
&= 0\cdot\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\right)z+\left(\frac{7}{360}-\frac{2}{\pi^4}\right)z^3+\cdots
\end{aligned}
$$