浙江工业大学 2022 - 2023 学年第一学期
概率论与数理统计(48学时)期中试卷

姓名：________________ 学号：________________ 班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总 分
得分				

一. 填空题，共 36 分，每空 3 分。

1. 设 $P(A)=3P(B)=6P(AB), P(\overline{A})=\frac{1}{2}P(\overline{B})$，则 $P(B|A)=\underline{\frac{1}{6}}$，$P(A\cup B)=\underline{\frac{7}{10}}$.

2. 盒中有各种颜色的球共 n 个. 已知从盒中随机取一个球，取到红球的概率为 $\frac{1}{3}$，且从盒中随机取一个球取到红球的条件下，再随机取一个球还是红球的概率是 $\frac{1}{4}$，则 $n=\underline{9}$. 从该盒中随机取两个球，两个球都不是红球的概率是 $\underline{\frac{5}{12}}$.

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数
$$F(x)=\begin{cases}1, & x>\pi,\\ A\sin\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$
则 $A=\underline{1}$，密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

4. 投掷 3 枚骰子，恰好有 1 枚是六点的概率是 $\underline{\frac{25}{72}}$.

5. 设 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，且 $E[X(X+1)]=15$，则 $\lambda=\underline{3}$，$P(X=2)=\underline{\frac{9}{2}e^{-3}}$.

6. 设 X 服从指数分布，且 $P(X>1)=\frac{2}{3}$，则 $P(X<1|X<2)=\underline{\frac{3}{5}}$.

7. 设 $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,2)$ 相互独立，则 $X-Y$ 的密度函数是 $\underline{f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{6}}}$，$-\infty<x<+\infty$.

8. 设 $EX=1$，$E[(X+1)]^2=6$，则 $DX=\underline{2}$.

二. 选择题，共 12 分，每题 4 分。

1. 设 A,B,C 是随机事件，则 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表示　　D　　(　　)
   (A) A,B,C 中至少有一个发生
   (B) A,B,C 中至多有一个发生
   (C) A,B,C 中至少有两个发生
   (D) A,B,C 中至多有两个发生

2. 从 1 至 60 的整数中随机抽取 1 个. 用 A, B, C 分别表示“取到的数是 2,3,7 的倍数”，则　B　(　　)

(A) A, C 独立，B, C 独立　　(B) A, C 独立，B, C 不独立

(C) A, C 不独立，B, C 独立　　(D) A, C 不独立，B, C 不独立

3. 设 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则当 μ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上增加时，$P(0 < X < 1)$　C　(　　)

(A) 单调增加　　(B) 单调减少

(C) 先增后减　　(D) 先减后增

三. 解答题，共 4 题，52 分。

1. 从分别写有数字 1,1,1,2,2,3,3,4 的 8 张卡片中随机抽取 2 张，所得卡片上数字的最大值记为 X.
求：(1) X 的分布列；(2) $P(X = 3|X \geq 2)$；(3) $Y = X^2 - 3X + 3$ 的分布列.

解: (1) $P(X=1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$,　　$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$

$P(X=3) = \frac{C_2^1 C_5^1 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{11}{28}$　　$P(X=4) = \frac{C_7^1}{C_8^2} = \frac{7}{28}$

(2) $P(X = 3|X \geq 2) = \frac{P(X=3, X\geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{11}{25}$

(3) $P(Y=1) = \frac{5}{14}$,　$P(Y=3) = \frac{11}{28}$　$P(Y=7) = \frac{7}{28}$

2. 设连续型随机变量 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}C(x+\cos x), & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) 常数 C；(2) 分布函数 F；(3) 令 $Z=\begin{cases}1, & X\geq\frac{\pi}{2},\\ -1, & X<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 求 Z 的期望.

解: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1,\quad C=\frac{2}{\pi^2}$

(2)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sin x, & 0\leq x<\pi,\\ 1 & x\geq\pi\end{cases}$$

(3) $P(Z=1)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2},\qquad P(Z=-1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^2},$

$EZ=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}$

3. 设 X, Y 的联合分布表为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
-1	a	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0	0.2	b

且 $EY = 0$.

求：(1) a, b 的值；(2) $P(X^2 - 2X + Y^2 \leq 3)$；(3) $Z = |X-2| + XY$ 的分布列.

解: (1) $\quad a = 0.1, \; b = 0.2$

(2) $P(X^2 - 2X + Y^2 \leq 3) = 1 - P(X = 3, Y = -1) - P(X = 3, Y = 1) = 0.6$

(3) $P(Z = -2) = 0.3, \quad P(Z = 0) = 0.1, \quad P(Z = 2) = 0.4, \quad P(Z = 4) = 0.2$

4. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{A}{y}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) 常数 A；(2) $P(Y<X+\frac{1}{2})$；(3) 边缘密度函数 f_X；(4) 条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

解:(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y \frac{A}{y}dx=1,\qquad A=1$

(2) $P(Y<X+\frac{1}{2})=1-P(Y\geq X+\frac{1}{2})=1-\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_0^{y-\frac{1}{2}}\frac{1}{y}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$f_X(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $x\leq 0$ 或 $x\geq 1$：$f_{Y|X}(y|x)$ 不存在

$0<x<1$: $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{y\ln x}, & x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$