Model Reference Adaptive Control (MRAC)(3)

Picnicraft
佛罗里达大学 机械工程硕士在读

这篇与之前两篇 MRAC 不同是控制了一个 MIMO 系统，即 Lyapunov 分析时就用到矩阵的迹。并且控制器中不完全是自适应项，而是在一个RSLQR 的 base line 上进行自适应。

EML 6934 Robust and Adaptive Control for Aerodynamic Systems 这门课，前半部分 Robust Servomachanism LQR 还有MIMO，后面讲了几个 MRAC, 其实没什么特别要写的。

学期快结束，发现还没发关于这门课的任何心得体会（摸鱼），就写下这门课推的最后一个 MRAC（当复习）.

MARC augmentation of an optimal baseline controller,

MIMO系统的 **dynamics** 是 （ p 代表plant）

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p\Lambda(u + f(x_p))\\ y &= C_p x_p + D_p\Lambda(u + f(x_p))\end{aligned}$$

A_p, B_p 已知， $f(x_p) = \theta^T\Phi(x_p)$ 是 linear separable 的误差项，表示对系统建模的不准确， Λ 是对角线上元素为正的对角矩阵，用来表示舵面作用力的系数（一般是）的误差。（但如果考虑到诸如跨音速或是因为机翼扭矩太大产生的形变， Λ 中的元素是会为负的，这种情况adaptive law 里会出现sgn函数）。如果控制频道很准确，$\Lambda = I$ 。

Tracking Error,

$e_y(t) = y(t) - y_{cmd}(t), \dot{e}_{y,I}(t) = e_y(t)$ ，

其中 $e_{y,I}$ 是 e_y 的积分，毕竟下面用的一阶 RSLQR 就是个 PI 控制。

用 $e_{y,I}$ 建立 Robust Servomachanism 需要的 extended system,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{e}_{y_I}\\ \dot{x}_p\end{bmatrix}}_{=\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\bar{0} & C_p\\ \bar{0} & A_p\end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{bmatrix}e_{y_I}\\ x_p\end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix}D_p\\ B_p\end{bmatrix}}_{=B}\Lambda(u+\theta^T\Phi) + \underbrace{\begin{bmatrix}-I\\ \bar{0}\end{bmatrix}}_{B_{cmd}} y_{cmd}$$

$$y = \underbrace{(0\ \ C_p)}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix}e_{yI}\\ x_p\end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{D_p}_{D}\ \Lambda\left(u+\Theta^T\Phi(x_p)\right)u = Cx + D\Lambda\left(u+\Theta^T\Phi(x_p)\right)u$$

这个结构通过增加一个积分器的 state，让 LQR 完成对常数信号的追踪，作用类似于 set point tracking, 但不需要前馈项，所以更加 Robust.

Goal,

bounded tracking in the presence of the system constant parametric uncertainties

设计控制器 u , 让dynamics 的输出 $y \to y_{cmd}$ ， $y_{cmd}(t)$ 是bounded，tracking error 可以是 bounded.

Reference Model,

在 extended system 中忽略掉所有的 uncertainty Λ, θ ,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_{cmd}y_{cmd}\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

对没有未知项的 extended system 解 ARE 就得到一个 LQR 的增益, 这个全反馈会作为我们后面自适应控制器的 base line,

$u_{bl} = -K_x^T x$ ， $K_x^T = [K_I, K_p]$

同样，我们的 reference model 就是这个RSLQR的闭环，因为我们希望系统有LQR带来的最优性质，把 u_{bl} 带到上面的 u , 注意 $B_{cmd} = B_{ref}$ ，(老师和教材都混着用这两个符号)

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ref} &= A_{ref}x_{ref} + B_{ref}y_{cmd}\\ y_{ref} &= C_{ref}x_{ref}\end{aligned}$$

其中 $A_{ref} = A - BK_x^T, C_{ref} = C - DK_x^T$ ， 这也是 MRAC 要求的 **Matching Condition.**

(A_{ref} Hurwitz)

Controller,

在 LQR 提供的 base line 上，加入自适应项，来克服系统的 uncertainty,

$u = u_{bl} + u_{ad}$ ， 其中 u_{ad} 用来对付 Λ, θ , 所以也由这两个未知量决定。

Closed-Loop System,

回到有未知量的extended system, 带入控制器,

$\dot{x} = Ax + B\Lambda(-K_x^T x + u_{ad} + \theta^T\Phi) + B_{cmd}y_{cmd}$ ，把这个式子向着 reference model 的样子变,

$\dot{x} = (A - BK_x^T)x + B\Lambda(I - \Lambda^{-1})u_{bl} + B\Lambda u_{ad} + B\Lambda\theta^T\Phi + B_{cmd}y_{cmd}$

下面，把两个未知项合并,

$\dot{x} = A_{ref}x + B\Lambda\{u_{ad} + \underbrace{[(I-\Lambda^{-1}), \theta^T]}_{\bar{\theta}^T}\underbrace{[u_{bl}, \Phi]^T}_{\bar{\Phi}}\} + B_{ref}y_{cmd}$

$\dot{x} = A_{ref}x + B\Lambda[u_{ad} + \bar{\theta}^T\bar{\Phi}] + B_{cmd}y_{cmd}$

把 $\underbrace{[(I-\Lambda^{-1}), \theta^T]}_{\bar{\theta}^T}$ 中的 $I - \Lambda^{-1}$ 叫成 K_u^T ， $\bar{\theta}^T = [K_u^T, \theta^T]$ ，

这时可以看出，我们的 u_{ad} 只消把 $\bar{\theta}^T\bar{\Phi}$ 消掉就可以让实际模型变成 reference model,

所以 $u_{ad} = -\hat{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}, \tilde{\bar{\theta}} = \hat{\bar{\theta}} - \bar{\theta}$,其中 $\hat{\bar{\theta}}^T = [\hat{K}_u^T, \hat{\theta}^T]$ (似乎用 $\Delta\bar{\theta}$ 表示这个预测误差更醒目，但顺手就用 $\tilde{\bar{\theta}}$ 了)

带回去 u_{ad} , 闭环系统变成

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{ref}x - B\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi} + B_{cmd}y_{cmd}\\ y &= C_{ref}x - D\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}\end{aligned}$$

Matching Error Dyamics,

这时候实际模型和参考模型之间的误差是，（李函数要用）

$$\begin{aligned}e &= x - x_{ref}\\ \dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_{ref} &= A_{ref}x_{ref} + B_{ref}y_{cmd} - [A_{ref}x - B\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi} + B_{cmd}y_{cmd}]\\ \dot{e} &= A_{ref}e - B\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}\end{aligned}$$

Lyapunov Analysis,

用李函数找 adaptive law,

$V(e, \tilde{\bar{\theta}}) = e^T Pe + tr(\tilde{\bar{\theta}}^T\Gamma_{\bar{\theta}}^{-1}\tilde{\bar{\theta}}\Lambda)$, 其中 $P, \Gamma_{\bar{\theta}}$ 是P.D. 的对称矩阵,

并且 P 要符合 algebraic Lyapunov equaiton,

$A_{ref}^T P + PA_{ref} = -Q$, 其中 $Q = Q^T > 0$

对李函数求导，用上 P 的性质,

$\dot{V} = -e^T Qe - 2e^T PB\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi} + 2tr(\tilde{\bar{\theta}}^T\Gamma_{\bar{\theta}}^{-1}\dot{\tilde{\bar{\theta}}}\Lambda)$

用上迹的性质， $a^T b = tr(ba^T)$

$\dot{V}(e, \tilde{\bar{\theta}}) = -e^T Qe + 2tr(-\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}e^T PB\Lambda + \tilde{\bar{\theta}}^T\Gamma_{\bar{\theta}}^{-1}\dot{\tilde{\bar{\theta}}}\Lambda)$

迹的括号中两项，通过adaptive law 消掉，我们就会得到一个N.S.D. 的 $\dot{V}$,

Adaptive Law,

$-\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}e^T PB\Lambda + \tilde{\bar{\theta}}^T\Gamma_{\bar{\theta}}^{-1}\dot{\tilde{\bar{\theta}}}\Lambda = 0$

左乘和右乘消掉 $\tilde{\bar{\theta}}^T, \Lambda$, 得到

$\dot{\tilde{\bar{\theta}}} = \Gamma_{\bar{\theta}}\bar{\Phi}e^T PB$ ， 展开这个式子就得到针对两个未知项的adatpive law,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{K}}_u &= \Gamma_u u_{bl}e^T PB\\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma_\theta\Phi e^T PB\end{aligned}$$

$\dot{V} = -e^T Qe \le 0$, N.S.D,

证明 tracking,

先就是通过证明 $\ddot{V}$ bounded, 来证 $\dot{V}$ U.C., (略略略)

用 Barbalat's Lemma 得到 $\dot{V} \to 0$ 也就说明 $e \to 0$ ， 我们证明了 $x \to x_{ref}$, 因为 V 是 R.U., 我们得到一个 UAS,

证明还没结束，现在只能说 $x \to x_{ref}$ ， 我们要的结果是 $y \to y_{cmd}$, 还得证明 $y \to y_{ref}$

$$\begin{aligned}y &= C_{ref}x - D\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}\\ y_{ref} &= C_{ref}x_{ref}\end{aligned}$$

得再用一次 Barbalat's Lemma...

先证明 $\ddot{e}$ 是bounded，因此 $\dot{e}$ U.C., 因为在上一个 Barbalat's Lemma 中得到过 $e \to 0$，所以第二次使用Barbalat's Lemma 后，得到 $\dot{e} \to 0$ ， 也就是 $\lim_{t\to\infty} ||\dot{e}(t)|| = 0$,

注意， $\dot{e} = A_{ref}e - B\Lambda\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}$ ， 现在 $\dot{e} \to 0, e \to 0$, 也就说明， $||\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}|| \to 0$

那样 $y = C_{ref}x - D\Lambda\underbrace{\tilde{\bar{\theta}}^T\bar{\Phi}}_{\to 0} \to C_{ref}x \to C_{ref}x_{ref} \to y_{ref}$ ，

我们的 reference model 比较拉跨，只能让 y_{ref} 跟踪 y_{cmd} with bounded errors,

（一阶的 RSLQR 可以指数收敛到常数，但是如果 $y_{cmd}(t)$ 是个 bounded 的时变的指令的话（一般都是），那就有一个 bounded 的误差了。）

我们得到的结果是 y 能够跟踪 y_{cmd} with bounded errors, **证明完毕**。

编辑于 2020-12-12 07:20