Apollo ReferenceLine Smooth--多项式拟合（splines)曲线平滑原理

萧潇子
学过流体算过弹道修过飞机的IT民工

+ 关注

11 人赞同了该文章

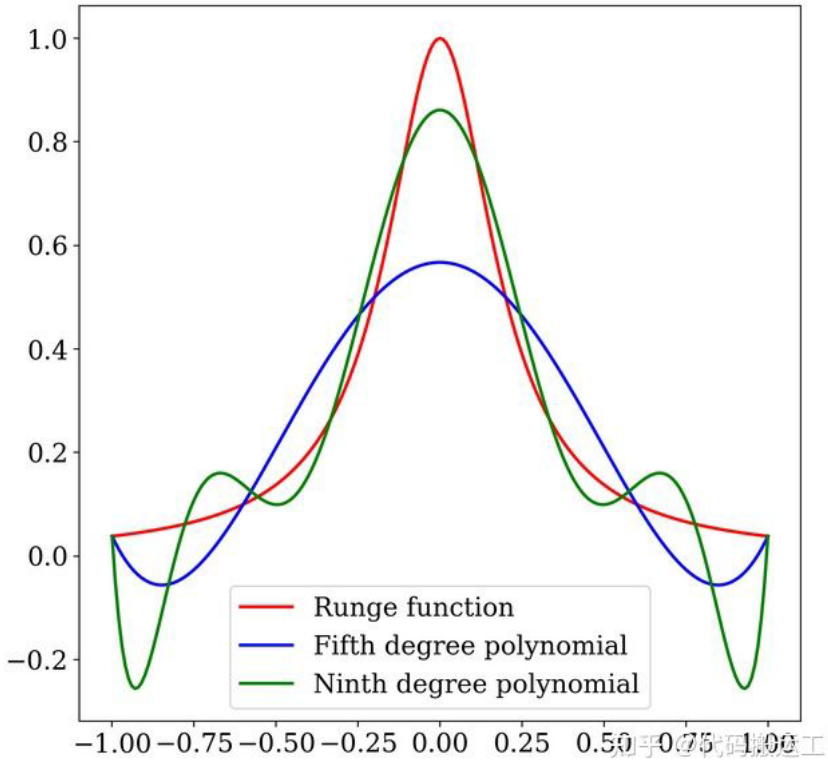
在路径规划领域中，对于处理路径平滑问题，通常有插值、拟合等方法，对于Apollo开源系统中提供的平滑方法，除了之前写过一篇介绍Apollo开源项目中直接**通过平移离散点对离散点组成曲线进行平滑的原理**，本篇文章介绍Apollo开源项目中用到的另一种使用参数方程对曲线进行拟合的平滑方法。同样也是把问题建模成优化方法去求解，为了简化对优化问题的表示，我们通常将一条路径定义为**参数曲线**。 参数曲线可以描述为具有特定参数的一组方程的曲线。在自动驾驶领域，路径参数化有两种常见类型。 第一个是**五次样条(quintic splines)**，是汽车x和y位置的五次多项式函数。第二个是**多项式螺旋(polynomial spiral)**，由相对于弧长的多项式曲率函数给出。本篇文章介绍第一种参数化方法，后续会出一篇文章介绍第二种方法。

主要思想：

通过使用多段多项式去拟合一条曲线，这里我们不禁会疑惑拟合不是用一条多项式就搞定了吗？在这里解释一下为什么使用多段多项式去拟合，其主要原因是对于比较极端的曲线（例：直角弯、U型弯）我们使用一条多项式曲线已经不足以精确描述曲线的形状。

既然这样，有人会说增加更高次数的多项式去描述是不是就可以了，这里直接给出答案是不行的，经过实践你会发现使用高次多项式拟合不可避免的会出现典型的**龙格现象**（在数值分析领域中，龙格现象是在一组等间插值点上使用具有高次多项式的多项式插值时出现的区间边缘处的振荡问题，**如下图中蓝色和绿色拟合曲线**），不能很好的描述原始曲线的形状。

因此，我们自然而然的会想到既然这样，那么我们何不分段去拟合，这样每一段多项式都能很好



这里将原始路径划分为 n 段，每段二维路径[Q]使用2个参数化多项式表示，例如第 i 段多项式表示如下：

$$x(t) = f_i(t) = a_{i0} + a_{i1} \times t + a_{i2} \times t^2 + a_{i3} \times t^3 + a_{i4} \times t^4 + a_{i5} \times t^5$$
$$y(t) = g_i(t) = b_{i0} + b_{i1} \times t + b_{i2} \times t^2 + b_{i3} \times t^3 + b_{i4} \times t^4 + b_{i5} \times t^5$$

优化变量：

使用 $\overrightarrow{a_i}$ 表示第 i 段多项式系数：

$$\overrightarrow{a_i} = [a_{i0} \quad a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad a_{i4} \quad a_{i5}]$$

优化目标：

在设计优化目标的之前我们先来看一下一维spline平滑的一些定义与演进过程：

1. shortest length curve[Q]

$$f_1^*(x) = \arg\min_{f \in \Omega} \int_a^b \sqrt{(1 + |f'(x)|^2)} dx$$

2. similar to shortest length

$$f_{1'}^*(x) = \arg\min_{f \in \Omega} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$
$$f_2^*(x) = \arg\min_{f \in \Omega} \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

3. approximately shortest length

$$f_3^*(x) = \arg\min_{f \in \Omega} \int_a^b (f'''(x))^2 dx$$

因此这里选择 $x(t), y(t)$ 的三阶导数平方和作为优化的目标函数：

$$cost = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^{t_i} (f_i''')^2(t)dt + \int_0^{t_i} (g_i''')^2(t)dt \right)$$

对 $f_i(t)$ 求导：

$$f_i(t) = \vec{a_i} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix} \quad f_i'(t) = \vec{a_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \\ 5t^4 \end{bmatrix} \quad f_i''(t) = \vec{a_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6t \\ 12t^2 \\ 20t^3 \end{bmatrix} \quad f_i'''(t) = \vec{a_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 24t \\ 60t^2 \end{bmatrix}$$

因此：

$$\int_0^{t_i} (f_i''')^2(t)dt = \vec{a_i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 72t_i^2 & 120t_i^3 \\ 0 & 0 & 0 & 72 & 192t_i^2 & 360t_i^3 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 360t_i^2 & 720t_i^3 \end{bmatrix} \vec{a_i}^T$$

同理 $\int_0^{t_i} (g_i''')^2(t)dt$

约束条件：

1. 平滑性约束

我们希望段与段之间的连接（如下图中绿色框位置）是平滑的，不仅约束位置连续，而且要约束连接处的一阶导数，二阶导数、三阶导数[9]连续，这样就使整个曲线是平滑的：

$$\begin{array}{l|l} f_i(t_i) = f_{i+1}(t_0) & g_i(t_i) = g_{i+1}(t_0) \\ f_i'(t_i) = f_{i+1}'(t_0) & g_i'(t_i) = g_{i+1}'(t_0) \\ f_i''(t_i) = f_{i+1}''(t_0) & g_i''(t_i) = g_{i+1}''(t_0) \\ f_i'''(t_i) = f_{i+1}'''(t_0) & g_i'''(t_i) = g_{i+1}'''(t_0) \end{array}$$

2. 采样点位置约束

我们在平滑路径的时候，一方面我们希望曲线越平滑越好，但是，我们还不希望平滑之后的曲线和原始曲线的差别太大，因此，我们会在路径上均匀采点，并给这些点添加一定的位置约束。这里需要注意的是第一个重点：多项式计算出来的采样点的坐标都是基于第一个点的相对坐标，第二个重点：每一个采样点的横纵向位置约束，把原始参考点坐标和拟合多项式得到坐标通过坐标变换到约束坐标系下表示边界约束（红色bounding box），如下图所示：

$$\begin{aligned} f_i(t_l) - x_l &< boundary \\ g_i(t_l) - y_l &< boundary \end{aligned}$$

3. 方向约束

关于方向约束，我们希望平滑之后曲线第一段多项式方向和原始曲线第一个点的方向要保持一致，也就是 $heading = \arctan(g_1'(t_0), f_1'(t_0))$，如上图中黄色箭头所示。

4. 正则化

为了防止过拟合，我们加入正则化项，直接对参数变量进行惩罚：

$$cost_{regular} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\vec{a_i} W_i \vec{a_i}^T + \vec{b_i} W_i \vec{b_i}^T \right) \quad | \quad W_i > 0$$

总结：

通过把公式化简，可以把此问题建模成一个二次规划问题，至此关于使用多项式平滑原始参考线建模完成。

优缺点：

使用五次样条的好处在于，对于给定的位置，航向和曲率的边界条件，存在一个封闭可行解即一组满足条件的样条系数。其实现起来比使用迭代优化方法更加便捷。其不足之处在于，通常很难实现像自动驾驶那样地把曲率限制在一定范围内。从参数曲线的曲率方程中可以看出，对于我们的五次样条而言，曲率是弧长的函数，形式并不是多项式。此时很可能引入尖点，甚至会导致曲率的不连续。这使得很难在五次样条的整个范围内大致满足曲率约束。

如果觉得对你有帮助，多谢各位大佬点赞、评论、转发、关注，后续博主会持续更新相关算法原理。

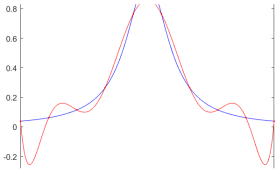
编辑于 2021-01-27 13:10

多项式　路径规划　曲线拟合

推荐阅读

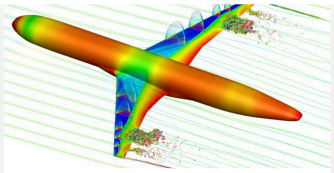
多项式插值算法与回归算法

张戎 发表于数学人生



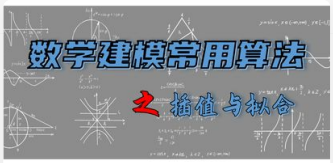
龙格现象(Runge Phenomenon)

MathICU



微分方程数值解法1.1:有限差分方法_定义与误差分析

此心安处是... 发表于微分方程数...



数学建模常用算法——插值与拟合（一）

KeepL... 发表于数学建模解...

5 条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

深水i 07-11

请问方向约束是怎么转化成线性的？泰勒展开取第一项的话误差会不会太大

赞

晴天 06-18

可以试试nurbs或者B样条全局插值

赞

西瓜子 01-18

师弟，是吗？哈哈哈

赞

萧潇子 (作者) 回复 西瓜子 01-19

是啊

赞

西瓜子 回复 萧潇子 (作者) 01-23

这么巧，哈哈哈

赞