

## Model Reference Adaptive Control (MRAC)（1）

Picnicraft

佛罗里达大学 机械工程硕士在读

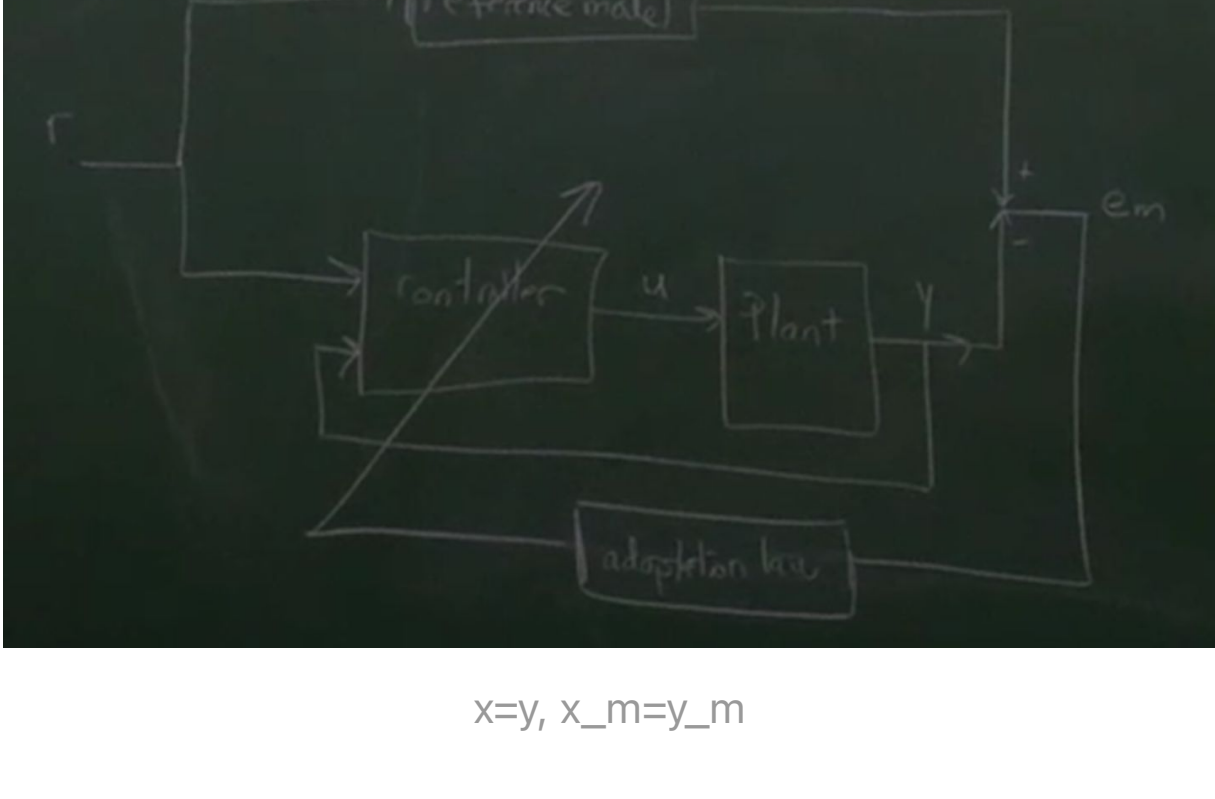
已关注

60 人赞同了该文章

本来没想写MRAC, 已经有很不错的介绍这个的文章了。但下学期选了旁边空军基地（美国阎良？）来教的Robust Control Aero, 其中第二部分全是航空中使用的各种MRAC, 所以写文复习下Dixon教过的 MRAC。

MRAC, 是Dixon 自适应控制课中，最先讲的（作为热身），主要是搞航空控制的人在用。（Dixon作为老控制人，有点看不上MRAC）。

Dixon 对这种方法的批判写在了下一篇笔记中。[Model Reference Adaptive Control \(MRAC\)\(2\)](#)



$x=y, \dot{x}_m=y_m$

控制一个有未知参数  $a, b$  的线性系统 (plant), ( $b > 0$ ), (很简化的例子,  $x$  就是输出  $y$  )

$$\dot{x} = ax + bu$$

我们想让这个系统的各种属性，比如超调量，上升时间，都表现成我们期望的样子。

所以我们建立一个reference model, (很简化的例子,  $x_m$  就是输出  $y_m$  )

$$\dot{x}_m = a_m x_m + b_m r$$

这个参考模型，是线下得来的，它是我们想要的属性。 $a_m, b_m$  已知,  $a_m < 0, b_m > 0$  。

这样的话，我们通过实际系统和参考模型间的误差，

**Model matching error**

$$e_m = x - x_m,$$

通过控制器，消除这个模型间的误差，那样实际的 dynamic system, 表现得就和我们期望的一模一样。

(一般 Lyapunov based method, 用的是实际轨迹和期望轨迹 ( $x, x_d$ ) 之间的误差，这里我们用的是两个模型间的误差，相当于期望迹述由参考模型来生成)

目标是让  $e_m \rightarrow 0$ ,

先分析一下误差的导数。

$$\begin{aligned} \dot{e}_m &= \dot{x} - \dot{x}_m = ax + bu - a_m x_m - b_m r + bk_x^* x - bk_r^* x \\ &= (a + bk_x^*)x - a_m x_m + bu - bk_r^* x - b_m r \end{aligned}$$

在求导后加上再减去  $bk_x^*$ ，这个是什么一会讲。

**Matching condition**

$$a + bk_x^* = a_m$$

$$bk_r^* = b_m$$

(注意这里的下标一个是  $x$  ,一个是  $r$  )

matching condition 是MRAC 固有的一个要求，（也会带来一些问题）

只有 matching condition 达到后，我们才能说实际系统正在向着 reference model 适应。

**Assumption:** 存在  $k_x^*, k_r^*$ , 能让matching condition 被满足。（这两个量不知道是多少）

( $*$  是从optimal control 借用来的，optimal 中，会假设存在一个上标  $*$  的量，来让什么东西最优。这里假设存在一个上标  $*$  的量，来让matching condition 被满足)

当matching condition 满足后，

误差的导数变成了

$$\dot{e}_m = a_m e_m + b(u - k_x^* x - k_r^* r)$$

现在很清晰，如果控制量  $u$  能消掉  $b$  后面的这个括号，误差指数收敛，只可惜  $k_x^*, k_r^*$  未知。

$$u = k_x(t)x + k_r(t)r$$

下面的问题就是设计  $k_x(t), k_r(t)$  , 来让他们趋近未知的  $k_x^*, k_r^*$

(自适应控制多是学习  $\hat{\theta}$  来趋近未知的系统参数  $\theta$  , 在 MRAC 中是通过学习控制器的增益，来趋近matching condition的满足条件)

参数间的误差用tilde表示，

$$\tilde{k}_x = k_x(t) - k_x^*$$

$$\tilde{k}_r = k_r(t) - k_r^*$$

闭环error变成了

$$\dot{e}_m = a_m e_m + b\tilde{k}_x^* x - b\tilde{k}_r^* r$$

尽管我们是在控制一个线性系统，但是时变的  $\tilde{k}$  乘时变的  $x$  , 已经引入了非线性，所以下面我们用 Lyapunov based method 来解决。

$$V = \frac{1}{2} e_m^2 + \frac{b}{2\gamma_x} \tilde{k}_x^2 + \frac{b}{2\gamma_r} \tilde{k}_r^2$$

很标准的sum of square, 模型误差的平方，预测误差的平方之和，我们想让它们统统收敛。

对李函数求导，

$$\text{因为 } \tilde{k}_x = k_x(t) - k_x^*, \quad k_x^* \text{ 是常数, } \quad \dot{\tilde{k}}_x = \dot{k}_x(t)$$

$$\dot{V} = e_m(a_m e_m + b\tilde{k}_x^* x + b\tilde{k}_r^* r) + \frac{b}{\gamma_x} \tilde{k}_x \dot{\tilde{k}}_x + \frac{b}{\gamma_r} \tilde{k}_r \dot{\tilde{k}}_r$$

我们可以看到有一个  $a_m e_m^2$  , 还可以通过  $\dot{\tilde{k}}_x, \dot{\tilde{k}}_r$  来消掉其余的项。

$$\dot{\tilde{k}}_x = -\gamma_x e_m x$$

$$\dot{\tilde{k}}_r = -\gamma_r e_m r$$

我们有了

$$\dot{V} = a_m e_m^2, a_m < 0, \text{ N.S.D.}$$

用Barbalat's Lemma, 可以得到一个GAT,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_m = 0,$$

控制器  $u = k_x(t)x + k_r(t)r$  , 所有量都是可获得, bounded, 实际可用。

讨论

当matching condition  $k_x^*, k_r^*$  是时变的，学界近年的研究是，如果假设参数的时变的速率的 bounded，我们可以得到一个UUB 结果，现在正在研究如何得到一个 AS 的结果。

通过MRAC, 我们最后得到一个AS,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_m = 0$  , 这个AS 可没有说明它的性质比如上升时间，超调量之类。实际的系统，只有在matching condition 被满足后， $e_m$  收敛了，才会表现的和 reference model 一模一样。

有趣的一点是，控制器  $u = k_x(t)x + k_r(t)r$  , 没有能调参的系数，我们可以通过调整  $\gamma$  , 来让  $e_m$  收敛的快一些，仅此而已。Dixon 形容这个控制器像他的mac, 没什么能自己调整的。

最后得到的还是一个N.S.D. 的李函数，我们并没有证明  $k$  真的自适应成为了  $k^*$  。这也是这门课中一系列自适应控制器一直在努力的一个方向，在online的情况下，进行参数识别。直到期中 concurrent learning, 才保证了  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  。

编辑于 2021-03-12 11:11

非线性控制

adaptive control

自动控制

已赞同 60

15 条评论

分享

取消喜欢

收藏

申请转载

...

推荐阅读



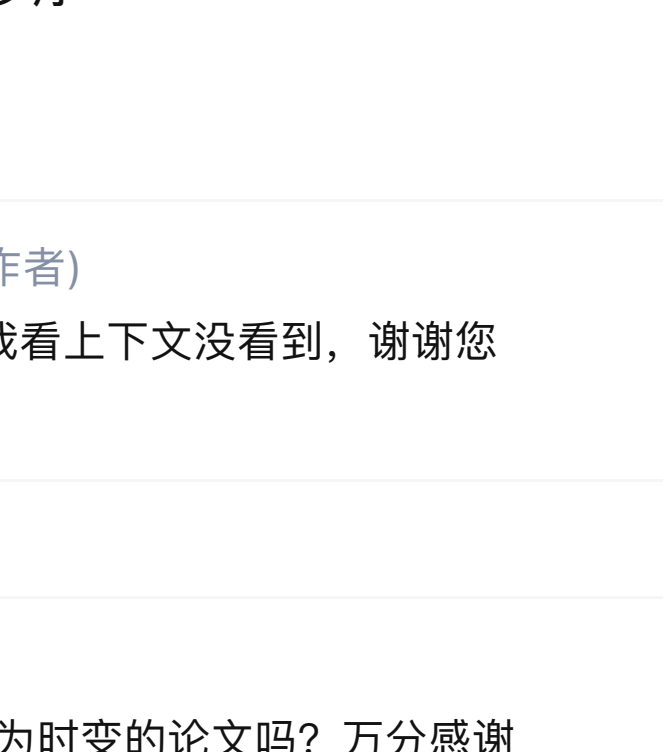
(10)Non-Autonomous System的稳定性定义

沈月



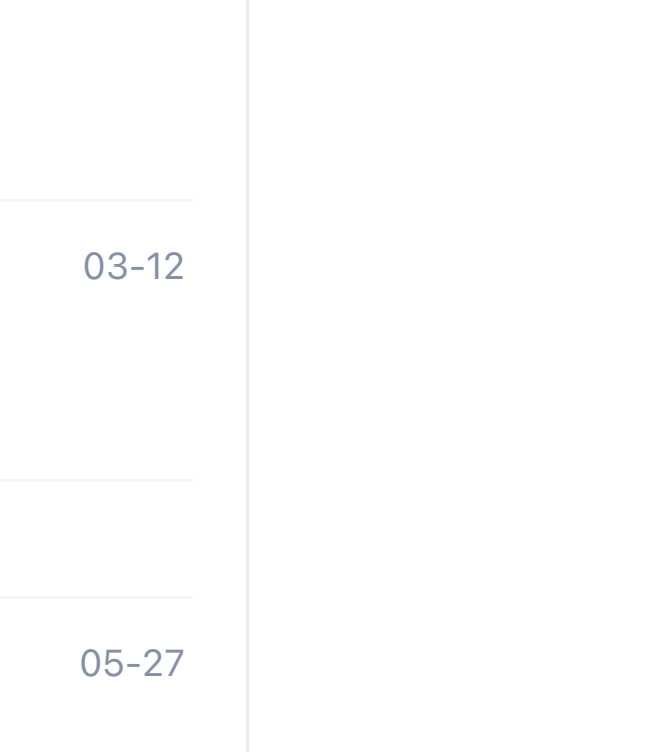
思考(7)理解passive system

沈月



(2)Autonomous System的稳定性定义

沈月



(11)Non-Autonomous System的稳定性判别

沈月

15 条评论

切换为时间排序

评论区功能升级中


👍👎

映照千年的岁月

先分析一下误差的导数。然后matching condition...从哪冒出来K\_r^x的？

1

03-12

Picnicraft (作者)

回复 映照千年的岁月

诶呀，是typo, 其实是K\_r^\*, 改了

赞

03-12

映照千年的岁月

回复 Picnicraft (作者)

就是这个下标r的k在哪搞出来的？我看上下文没看到，谢谢您

赞

03-12

展开其他 1 条回复

茹心锋

请问一下，可以推荐一篇K\_r^\*和K\_x^\*为时变的论文吗？万分感谢

赞

05-27


Picnicraft (作者)

回复 茹心锋

哪篇文章不知道，应该就是最早搞出mrac这个组做的

赞

05-28

白大将军

这种思路 and state observer 有点像啊。state observer 是设置一个观测率让观测值逼近实际值。

赞

02-19

flyinsky

这种叫直接模型参考自适应

赞

2020-08-30

flyinsky

Dotxm那里有错应该是am\*xm，而不是am\*x

赞

2020-08-30


Picnicraft (作者)

回复 flyinsky

啦啦，改

赞

2020-08-31

FJ wang

Dixon 现在还有做一线科研吗？他的很多论文启发很大

赞

2020-08-24

Picnicraft (作者)

回复 FJ wang

现在主要是接空军的项目做，switch system 吧。但之前同学问他，Dixon说要换个方向。

赞

2020-08-25

aNan

下学期我也选了robust control，真的是空军基地教的吗🙄

赞

2020-08-22

Picnicraft (作者)

回复 aNan

是的呢

赞

2020-08-22

呜呜

大佬你好，我想问一下模型预测控制可不可以用在自适应神经网络里，就是在线自适应的参数线性化处理后用MPC的方法再去做一下

赞

12-09