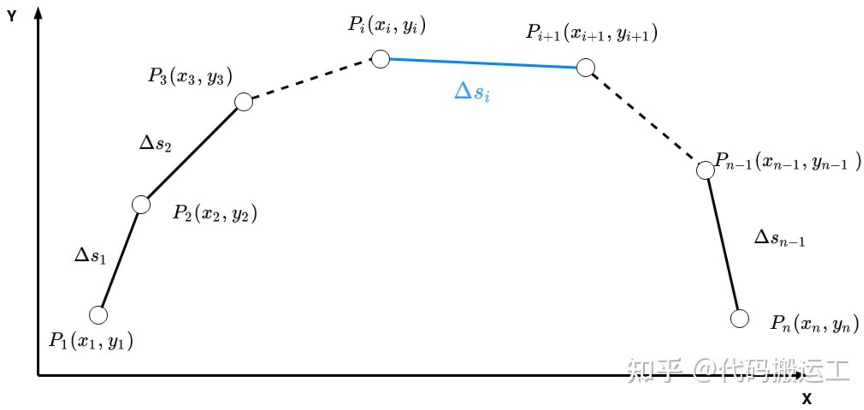
Apollo ReferenceLine Smooth--Polynomial Spiral平滑原理

萧潇子
学过流体算过弹道修过飞机的IT民工

摘要：本文主要介绍使用优化方法利用多项式螺旋线平滑曲线的建模过程，参考资料包括但不限于：Apollo开源代码、百度申请的专利、数值积分等。
Date: 2021/01/24
Editor: 任于帅
Contact: 1223167600@qq.com

在路径规划领域中，处理路径平滑问题通常有插值、拟合、优化等方法，对于Apollo开源系统中提供的平滑方法主要是通过把曲线平滑问题建模成优化相关的问题去求解，除了之前写过一篇介绍Apollo开源项目中直接通过**平移离散点对离散点组成曲线进行平滑**的原理，本篇文章介绍Apollo开源项目中用到的另一种使用参数化方程对曲线进行拟合的平滑方法。为了简化对优化问题的表示，我们通常将一条路径定义为参数曲线。 参数曲线可以描述为具有特定参数的一组方程的曲线。

在自动驾驶领域，路径参数化有两种常见类型。 第一个是五次样条(quintic splines)，是汽车x和y位置的五次多项式函数。第二个是多项式螺旋线(polynomial spiral)，由相对于弧长的多项式曲率函数给出。之前一篇文章已经介绍了**五次多项式参数化拟合平滑路径**方法，本篇文章着重介绍多项式螺旋线参数化方法。



参考线原始点

如图所示，假设有 n 点 $P_i(x_i, y_i) \quad | \quad 1, 2, 3, \ldots, n$ 把参考线分成 $n-1$ 段线段，这里仍然采用分段的思想，用 $n-1$ 段多项式螺旋线描述整个参考线。

我们在这里使用弧长的五次多项式函数表示螺旋线上点的切线方向，参数化公式如下：

$$\theta(s) = a + bs + cs^2 + ds^3 + es^4 + fs^5$$

$\theta(s)$ 表示螺旋线上点的切线方向， s 表示沿螺旋线弧长。根据微分几何原理，给定函数 $\theta(s), s \in [0, s_g]$ 可以完全确定一条曲线形状（ s_g 为曲线上点到起点之间的长度）。

对于任意 $s \in [0, s_g]$，任意点坐标 $x(s), y(s)$ 表示如下：

$$x(s) = x_i + \int_0^s cos(\theta(s))ds$$
$$y(s) = y_i + \int_0^s sin(\theta(s))ds$$

在开始介绍多项式螺旋线分段拟合之前，我们先介绍一下两点确定一条五次多项式螺旋线的过程：

每一段五次多项式螺旋线系数 a, b, c, d, e, f 可以由螺旋线两个端点状态相关的7个参数决定，并且满足以下约束，以第 i 段为例：

$$\begin{aligned} \theta_i(0) &= \theta_i \quad | \quad \theta_i(\Delta s_i) = \theta_{i+1} \\ \dot{\theta}_i(0) &= \dot{\theta}_i \quad | \quad \dot{\theta}_i(\Delta s_i) = \dot{\theta}_{i+1} \\ \ddot{\theta}_i(0) &= \ddot{\theta}_i \quad | \quad \ddot{\theta}_i(\Delta s_i) = \ddot{\theta}_{i+1} \end{aligned}$$

其中： θ_i : 起点方向， $\dot{\theta}_i | \frac{dk}{ds}$: 起点曲率， $\ddot{\theta}_i$: 起点曲率导数， θ_{i+1} : 终点方向， $\dot{\theta}_{i+1} | \frac{dk}{ds}$: 终点曲率， $\ddot{\theta}_{i+1}$: 终点曲率导数， Δs_i : 两点之间曲线长度。

由以上7个参数就可以确定一条 $\theta(s)$ 的五次多项式，进而确定一条五次多项式螺旋线。使用多段连接的方式去描述原始参考线，保证由多段螺旋线连接曲线的平滑性能，那么第 i 段与第 $i+1$ 段螺旋线连接处位置(x_{i+1}, y_{i+1})、方向(θ_{i+1})、曲率($\dot{\theta}_{i+1}$)、曲率变化率($\ddot{\theta}_{i+1}$)需要保持一致，也就是满足如下约束：

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_0^{\Delta s_i} cos(\theta(s))ds \\ y_{i+1} &= y_i + \int_0^{\Delta s_i} sin(\theta(s))ds \\ \theta_{i+1} &= \theta_i(\Delta s_i) \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i(\Delta s_i) \\ \ddot{\theta}_{i+1} &= \ddot{\theta}_i(\Delta s_i) \end{aligned}$$

平滑的过程的本质是一个优化问题，其目的就是找到一系列最优的多项式，使得多项式螺旋线段

更平滑的描述原始参考线。对于这种多项式参数化，定义的多项式系数 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ 都根据 s 的大小表现出不同的灵敏度。例如，如果 s 很大，在相同微小变化情况下，f 比 a 导致 $\theta(s)$ 的变化要大得多，且该问题随着所需路径长度 s 增加而恶化，尤其在计算雅可比矩阵及其逆矩阵时容易出现较大的数值误差。为了提高数值精度，结合整个优化问题以及上面确定一条五次多项式螺旋线的过程，这里选择 $\theta, \dot\theta, \ddot\theta, x, y, \Delta s$ 作为此优化问题变量。

优化变量：

$$\theta, \dot\theta, \ddot\theta, x, y, \Delta s$$

目标函数：

- 长度
- 曲率
- 曲率变化率

$$cost = w_{length}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta s_i + w_{kappa}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}(\dot\theta_i(s_j))^2 + w_{dkappa}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}(\ddot\theta_i(s_j))^2$$

其中：第一项代表曲线长度，第二项代表曲率，第三项代表曲率变化率。参数 n 代表 $n-1$ 段螺旋线的端点，m 表示每一段螺旋线上等间距点数，如下图所示。

第 i 段螺旋线m个等分点

约束条件：

- 优化变量约束

起点：

$$\begin{cases} \theta_1 & = & \theta_{start} \\ \kappa_1 & = & \kappa_{start} \\ d\kappa_1 & = & d\kappa_{start} \\ x_1 & = & x_{start} \\ y_1 & = & y_{start} \end{cases}$$

中间点：

$$\begin{cases} \theta_{relative} + \pi/2 & \le \theta_i & \le \theta_{relative} + \pi/2 \\ -0.25 & \le \kappa_i & \le 0.25 \\ -0.02 & \le d\kappa_i & \le 0.02 \\ \bar{x}_i - r_i & \le x_i & \le \bar{x}_i + r_i \\ \bar{y}_i - r_i & \le y_i & \le \bar{y}_i + r_i \\ distance(p_i, p_{i+1}) - 2r_i & \le \Delta s_i & \le distance(p_i, p_{i+1}) * \pi/2 \end{cases}$$

终点：

$$\begin{cases} \theta_n & = & \theta_{end} \\ \kappa_n & = & \kappa_{end} \\ d\kappa_n & = & d\kappa_{end} \\ x_n & = & x_{end} \\ y_n & = & y_{end} \end{cases}$$

- 连接点等式约束

$$\begin{cases} \theta_{i+1} & = \theta_i(\Delta s_i) \\ \dot{\theta}_{i+1} & = \dot{\theta}_i(\Delta s_i) \\ \ddot{\theta}_{i+1} & = \ddot{\theta}_i(\Delta s_i) \\ x_{i+1} & = x_i + \int_0^{\Delta s_i} cos(\theta(s))ds \quad i = 1,2,3\dots n-1 \\ y_{i+1} & = y_i + \int_0^{\Delta s_i} sin(\theta(s))ds \quad i = 1,2,3\dots n-1 \end{cases}$$

- 位置平移约束

$$(x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2 \le r_i^2 \quad i = 1\dots n$$

其中 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 代表原始参考点的位置坐标， r_i 代表原始参考点可以平移的距离，如下图所示。

端点平移距离约束

扩展：

1. 在计算位置约束中的 (x_i, y_i) 坐标时，其中存在Fresnel积分，求不出解析解，实际程序计算中采用数值积分方法计算积分，可供选择的有**Simpson's rule**、**Trapezoidal rule**、**Gauss Legendre**，Apollo默认采用Gauss Legendre，同时在intrgral.h中提供了其他方法。
2. 根据两个端点确定一条多项式螺旋线是一个典型的两点边值问题，这里使用**牛顿打靶法**求解。

如果觉得对你有帮助，多谢各位大佬点赞、评论、转发、关注，后续博主会持续更新相关算法原理。

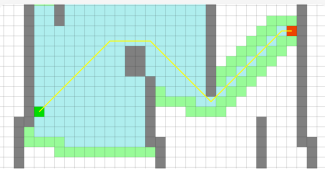
参考：

1. **Non-linear reference line optimization method using piecewise quintic polynomial spiral paths for operating autonomous driving vehicles**
2. **Apollo**
3. **数值积分**

编辑于 2021-01-27 14:33

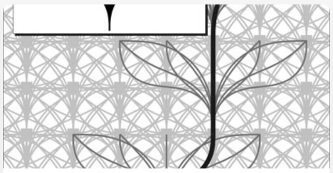
路径规划 百度无人驾驶车 曲线拟合

推荐阅读



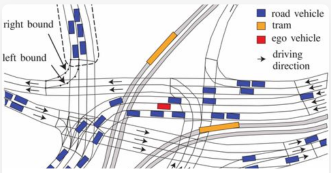
常用规划算法解析1-图搜索篇

steve　发表于steve...



自动驾驶规划里面最钟爱的采样类算法

小邬



运动规划仿真的开源项目

小邬　发表于运动规划、...

Dubins曲线详细笔记

Dubins 曲线计算笔记前言Dubins曲线是在无障碍的情况下，提供一条最优的前向路径，与A*，RRT等那些搜索算法相比，还有一个优势就是规划的路径是满足车辆运动学要求的。具体的介绍、求解方...

烟酒僧　发表于motio...

14 条评论　　切换为时间排序

写下你的评论...

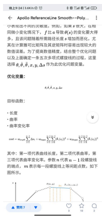
xinxin　02-03

delta_s是两点之间直线距离吗？delta_s应该也是待优化的未知量吧？

1

萧潇子 (作者) 回复 xinxin　02-03

是的，优化变量如下文章内容截图所示



1

ann　10-11

请问最终结果通过什么优化器求解呢

赞

萧潇子 (作者) 回复 ann　10-11

osqp

赞

ann 回复 萧潇子 (作者)　10-11

您好，可以请教连接点的等式约束怎么理解么

赞

展开其他 2 条回复

ywwang　05-23

您好，请教下为什么x ,y是优化变量。θ、dθ、ddθ、s确定后，x y不是可以直接求出来吗?

赞

xinxin　02-23

未知数a,b,c,d,e,f在优化时被theta以及它的一阶二阶导数代替，以及优化器选择的细节能否再介绍一下，谢谢

赞

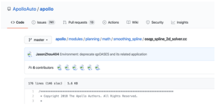
知乎用户42TDZj 02-04

但是我看 apollo 的代码里面只实现了针对两个端点的 cubic 和 quintic curve 呀？而不是 N 个点的逐段 spline. 唯一的例外可能是 planning/math 底下的 piecewise_quintic_spiral_path.h，但是那里也是逐个 append 加入的，每次只处理一段这样的。

赞

萧潇子 (作者) 回复 知乎用户42TDZj 02-04

不知道你看的哪个版本的，Apollo主分支master上是有的



1

知乎用户42TDZj 回复 萧潇子 (作者) 02-04

多谢。apollo 里面在 common/math, planning/math 和您给出的 planning/math/smooth_spline 下面都有一些曲线类/多项式类，这些类之间有什么联系吗？

赞

展开其他 1 条回复

行学天下申 01-28

打扰您一下，能不能讲解一下apollo中关于优化速度的。
优化函数piecewise_jerk_problem。
或者推荐点资料，感谢。
麻烦您了

赞