Model Reference Adaptive Control (MRAC)(2)

Picnicraft
佛罗里达大学 机械工程硕士在读

上一篇笔记中，Dixon 简单演示了 MRAC 如何控制一个带有未知参数的线性系统，来让它趋近一个已知的的 reference model。

这一篇中，Dixon 用另一个简单的例子演示了 MRAC **不可以**控制一个带有未知参数的线性系统，而且**系统是 controllable and observable** 的。并表示这种方法还是嫩了些。

之后Dixon 用 adaptive backstepping 设计了让系统稳定的控制器。并表示，自适应控制的 lyapunov based 方法，不知道比 MRAC 高到哪里去了。

这两篇对应的是EML6351 - Nonlinear Control II Adaptive Control 第1-3讲，其中还有用MRAC 控制一颗杰达姆的例子，没啥特别的就不赘述了。

为何航空中 MRAC 用的多，除历史原因外，还得经过下学期的学习才能领教。

一个二阶的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2\\ \dot{x}_2 &= cx_2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中 $a, b > 0$ ， a, b, c 都是未知参数。

目标：用MRAC, 来让系统输出 y 贴近 reference model 的输出 y_m 。

把系统写成状态空间

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$

$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$, $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$

可控性矩阵和可观性矩阵都满秩，系统可控可观。

Matching condition

使用MRAC, 首先要找 Matching condition, 满足后，才能说明实际系统正在趋近 reference model.

这里引入上一篇中第一条 matching condition

$A + Bk^* = A^m \rightarrow A^m - A = Bk^*$

$\begin{bmatrix} a^m - a & b^m - b \\ 0 & c^m - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1^* \quad k_2^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1^* & k_2^* \end{bmatrix}$

是不存在合适的 k^* 来达成matching condition的，也就是 MRAC 不能控制这个可控可观的系统。

下面用一个 **adaptive backstepping** 来让系统稳定 $y \rightarrow 0$ 。

一个二阶的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2\\ \dot{x}_2 &= cx_2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中 $a, b > 0$ ， a, b, c 都是未知参数。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + \underbrace{bx_2 - bx_{2d}}_{b\eta} + bx_{2d}\\ \eta &= x_2 - x_{2d}\\ \frac{1}{b}\dot{x}_1 &= \underbrace{\frac{a}{b}x_1}_{y_1\theta_1} + \eta + x_{2d}\end{aligned}$$

设计 **backstepping error signal,**

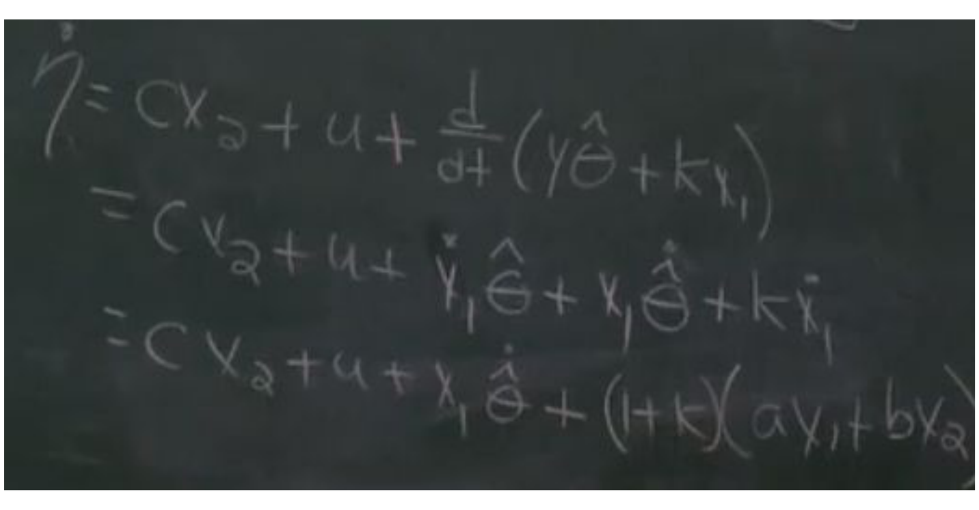
$x_{2d} = -y_1\hat{\theta}_1 - kx_1$ （ x_{2d} 里面没有 η , 不然就循环了，因为 η 是由 x_{2d} 定义的)

$\frac{1}{b}\dot{x}_1 = y_1\theta_1 + \eta - y_1\hat{\theta}_1 - kx_1 = -kx_1 + y_1\tilde{\theta}_1 + \eta$

$\dot{\eta} = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} = cx_2 + u + \frac{d}{dt}(y_1\hat{\theta}_1 + kx_1) = cx_2 + u + \dot{x}_1\hat{\theta}_1 + x_1\dot{\hat{\theta}}_1 + k\dot{x}_1$

$\dot{\eta} = \underbrace{cx_2 + (\hat{\theta}_1 + k)(ax_1 + bx_2)}_{unknown} + u + x_1\dot{\hat{\theta}}$

(这里Dixon 的板书应该错了，unknown 里写了个 $(1 + k)(ax_1 + bx_2)$ ）



把所有有未知量的项放在一起称作 $y_2\theta_2$ ，

设计控制器

$u = -y_2\hat{\theta}_2 - k_2\eta - x_1\dot{\hat{\theta}}_1 \underbrace{-x_1}_{cross\ term}$

（特意留出的cross term 会在李函数中起作用）

$\dot{\eta} = -k_2\eta + y_2\tilde{\theta}_2 - x_1$

李函数

$V = \frac{1}{2b}x_1^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^T\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^T\tilde{\theta}_2$

$\dot{V} = x_1(-kx_1 + \eta + y_1\tilde{\theta}_1) + \eta(-k_2\eta + y_2\tilde{\theta}_2 - x_1) - \tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^{-1}\dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^{-1}\dot{\hat{\theta}}_2$

（因为之前引入了cross term, 两个括号中的 $x_1\eta$ 消掉了）

$\dot{V} = -kx_1^2 - k_2\eta^2 + x_1y_1\tilde{\theta}_1 + \eta y_2\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1^T\Gamma_1^{-1}\dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{\theta}_2^T\Gamma_2^{-1}\dot{\hat{\theta}}_2$

我们只想要负的平方项，设计 **update law** 来消掉李函数导数中多余的项,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= \Gamma_1 y_1 x_1\\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \Gamma_2 y_2 \eta\end{aligned}$$

这样，我们得到一个N.S.D. 半负定的李函数导数

用下Barbalat's Lemma, 可以得到AS 渐近稳定的结果。

讨论

上一篇中，系统可以满足 matching condition，MRAC 得到的是AS或者AT, 渐进稳定/跟踪的结果。这一篇中系统不满足 match condition, 使用 backstepping，达到了同样的结果。

让实际系统表现的像 reference model，这很吸引人，但不用 MRAC一样可以做到。

设计一个渐进跟踪的控制器，让实际系统去跟踪 reference model 生成的期望轨迹, 可以达到 MRAC 的效果，同时不需要考虑 matching condition。

(想在backstepping 中达到跟踪效果就需要在整个推导的第一行加入 x_{1d} ）

编辑于 2020-08-29 12:37

非线性控制 adaptive control 自动控制

11 条评论

Picnicraft (作者) 2020-09-03
呃，那就得写一篇backstepping了，以后会写的（放卫星）
1

意大利81炮 回复 Picnicraft (作者) 2020-09-04
期待你的分享
赞

意大利81炮 2020-09-03
求作者推荐mrac的论文
赞

Picnicraft (作者) 回复 意大利81炮 2020-09-03
这方面论文没读过，想要了解的话，Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications 教材还不错，波音人写的，全是mrac,
1

意大利81炮 回复 Picnicraft (作者) 2020-09-03
x2d的物理意义麻烦楼主解释一下
赞

flyinsky 2020-08-30
为什么就可以将未知项看做y2*theta2呢?
赞

Picnicraft (作者) 回复 flyinsky 2020-08-30
有未知参数和state线性的乘在一起，可以linear parameterize，就写个y*theta来代替，然后用y*theta_hat来趋近。
y1是x1，y2是x1 x2
赞

flyinsky 回复 Picnicraft (作者) 2020-08-30
y2=x1*x2?
赞

展开其他 2 条回复

flyinsky 2020-08-30
y1 y2是什么?