رياضيات المغرب
MATH MAROC

Math&Maroc Competition

Day 1

Date: July 29, 2024

Duration: 4 hours *Each problem is worth 10 points*

Problem 1:
Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function such that $\forall x \in \mathbb{R}$, we have $f(x)^2 + f'(x)^2 \neq 0$. Show that for every bounded subset E of $\mathbb{R}$, f has at most a finite number of zeros in E.

Problem 2:
Let $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ be a symmetric matrix. *i.e* $a_{ij} = a_{ji}$ for every $1 \leq i, j \leq 2n$. Let's assume further that A admits $2n$ eigenvalues such that:

$$\lambda_1 \geq \cdots \lambda_n > 1 > \lambda_{n+1} \geq \cdots \geq \lambda_{2n}$$

We define $V = \{x^T Ax = x^T x | x \in \mathbb{R}^{2n}\}$. Show that V contains a vector subspace of dimension at least or equal to n.

Problem 3:
Find all functions $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ that verify:

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, if $A \subseteq B$ then $f(B) \leq f(A)$,
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, we have $f(A + B) = f(A) + f(B)$,

where $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ is the power set of $\mathbb{R}_+$ excluding the empty set. Furthermore, given two sets A and B we define their sum, noted as $A + B$ by:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Problem 4:
Let $n \in \mathbb{N}$ and $p, q \geq 3$ two prime numbers that verify $p < q < 2p$.
Let $G(n, p)$ be the coefficient in front of the monomial $x_1^n \cdot x_2^n \cdots x_p^n$ of the polynomial

$$Q_{n,p} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^{np}$$

Show that $G(n, p)$ is not divisible by q, if and only if, the expression of n in the base q only contains 0's and 1's.

Math&Maroc Competition
Journée 1
Date: 29 Juillet 2024

Durée: 4 heures *Chaque problème est noté sur 10 points*

Problème 1:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^2 + f'(x)^2 \neq 0$. Montrer que pour tout sous-ensemble E borné de $\mathbb{R}$, f a au plus un nombre fini de zéros dans E.

Problème 2:
Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice symmétrique. *i.e* $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$. On suppose de plus que A admette $2n$ valeurs propres telles que:

$$\lambda_1 \geq \cdots \lambda_n > 1 > \lambda_{n+1} \geq \cdots \geq \lambda_{2n}$$

On définit l'ensemble $V = \{x^T Ax = x^T x | x \in \mathbb{R}^{2n}\}$. Montrer que V contient un sous-espace vectoriel de dimension au moins n.

Problème 3:
Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ qui vérifient:

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, si $A \subseteq B$ alors $f(B) \leq f(A)$,
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, on a $f(A + B) = f(A) + f(B)$,

où $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}_+$. De plus, étant donné deux ensembles A et B, on définit leur somme, notée $A + B$ par:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Problème 4:
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p, q \geq 3$ deux entiers naturels premiers qui vérifient $p < q < 2p$.
Soit $G(n, p)$ le coefficient devant le monôme $x_1^n \cdot x_2^n \cdots x_p^n$ du polynôme

$$Q_{n,p} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^{np}$$

Montrer que $G(n, p)$ n'est pas divisible par q, si et seulement si l'écriture de n dans la base q ne contient que des 0 et des 1.