第四章　模态逻辑

上次内容

- 谓词逻辑的可靠性定理
- 谓词逻辑的完备性定理

今天内容

- ○ 逻辑应用中容易出现的问题
- 模态词
- 命题模态逻辑
- 谓词模态逻辑(略)
- 模态逻辑应用中的问题

逻辑

The very first lesson that we have a right to demand that logic shall teach us is, how to **make our ideas clear**; and a most important one it is, depreciated only by minds who stand in need of it. To know what we think, to be masters of our own meaning, will make a solid foundation for great and weighty thought.

Charles Sanders Peirce, *How to make our ideas clear*

表示中易出现的错误

- “所有天鹅是白的”，

$$\forall x(x\text{是白的} \wedge x\text{是天鹅}).$$

这样世界上也就只有天鹅而没有其他东西了.
“有些天鹅是白的”，

$$\exists x(x\text{是天鹅} \to x\text{是白的}).$$
$$\forall x(x\text{是天鹅} \wedge x\text{是白的}) \Leftrightarrow \forall x(x\text{是天鹅}) \wedge \forall x(x\text{是白的}),$$
$$\exists x(\neg x\text{是天鹅} \vee x\text{是黑的}) \Leftrightarrow \exists x\neg(x\text{是天鹅}) \vee \exists x\neg(x\text{是白的}).$$

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别

- $A \to B$只意味着要么A为假要么B为真, 并不是指可以由A 推出B, B是A为真的结果等等.
如果$A \vdash B$则在任何解释下, A为真蕴涵B为真.
因此, $A \to B$与$A \vdash B$是不等价的.
由推导定理, 当A, B为语句时, $A \vdash B$和$\vdash A \to B$是等价的.

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

A sure sign of appendicitis is that, if you push on the right side of the abdomen then there will be pain on release.
如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎；如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎；如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.

如果表示为

$$阑尾炎(x) \leftrightarrow (压右腹部(x) \to 松开疼(x))$$

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎；如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.
如果表示为

$$\text{阑尾炎}(x) \leftrightarrow (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x))$$

则是不正确的.

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎；如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.
如果表示为

$$\text{阑尾炎}(x) \leftrightarrow (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x)),$$

则是不正确的,

$$\text{阑尾炎}(x) \to (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x))$$

是正确的.

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

如果你用手压右腹部, 松开后疼, 那么你得了阑尾炎；如果你得了阑尾炎, 那么如果你用手压右腹部, 松开后会疼.
如果表示为

$$\text{阑尾炎}(x) \leftrightarrow (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x)),$$

则是不正确的,

$$\text{阑尾炎}(x) \to (\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x))$$

是正确的, 但

$$(\text{压右腹部}(x) \to \text{松开疼}(x)) \to \text{阑尾炎}(x)$$

是不正确的.

$A \to B$与$A \vdash B$之间的差别: 例子

$$(压右腹部(x) \to 松开疼(x)) \to 阑尾炎(x)$$

是不正确的.
因为前件：压右腹部$(x) \to$ 松开疼(x)自然为真, 如果你不压腹部的；但这时候不能说你得了阑尾炎. 正确的形式为

$$(压右腹部(x) \wedge 松开疼(x)) \to 阑尾炎(x).$$

即

$$压右腹部(x) \to (松开疼(x) \leftrightarrow 阑尾炎(x)).$$

表示中易出现的错误

- 用项替代受限变量.

比如, $\exists x A(x)$表示“有一个人活了120岁”.
我们不能用任何一个项(尤其是不含自由变元符号的项)去代替变量符号x.
例如, $\exists x A(t)$表示“存在一个人, 张三活了120岁”, 其中t表示“张三”.

表示中易出现的错误

You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you cannot fool all the people all the time.

$p(x)$ means that x is a person;
$t(y)$ means that y is a time;
$q(x, y)$ means that you can fool x at time y;

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y(t(y) \rightarrow q(x, y)))$$

表示中易出现的错误

You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you cannot fool all the people all the time.

$p(x)$ means that x is a person;
$t(y)$ means that y is a time;
$q(x,y)$ means that you can fool x at time y;

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y(t(y) \to q(x,y)))$$

iff

$$\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))$$

表示中易出现的错误

You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you cannot fool all the people all the time.

$p(x)$ means that x is a person;
$t(y)$ means that y is a time;
$q(x,y)$ means that you can fool x at time y;

$$\begin{aligned}
&\exists x \forall y (p(x) \wedge t(y) \rightarrow q(x,y)) \\
&\wedge \exists y \forall x (p(x) \wedge t(y) \rightarrow q(x,y)) \\
&\wedge \neg \forall x \forall y (p(x) \wedge t(y) \rightarrow q(x,y)).
\end{aligned}$$

表示中易出现的错误

$$\neg(\exists x \forall y (p(x) \wedge t(y) \to q(x,y)) \wedge \exists y \forall x (p(x) \wedge t(y) \to q(x,y)) \\ \to \forall x \forall y (p(x) \wedge t(y) \to q(x,y))).$$

That you fool some of the people all of the time and you fool all the people some of the time, **does not imply** that you can fool all the people all the time.

表示中易出现的错误

$$\neg(\exists x \forall y (p(x) \wedge t(y) \to p(x,y)) \wedge \exists y \forall x (p(x) \wedge t(y) \to p(x,y)) \\ \to \forall x \forall y (p(x) \wedge t(y) \to p(x,y))).$$

That you fool some of the people all of the time and you fool all the people some of the time, **does not imply** that you can fool all the people all the time.
$\exists x \forall y A(x,y) \wedge \exists y \forall x A(x,y) \to \forall x \forall y A(x,y)$不是永真式.

表示中易出现的错误

$$\exists x \forall y(p(x) \wedge t(y) \rightarrow p(x,y)) \wedge \exists y \forall x(p(x) \wedge t(y) \rightarrow p(x,y))$$
$$\rightarrow \neg \forall x \forall y(p(x) \wedge t(y) \rightarrow p(x,y))).$$

If you fool some of the people all of the time and you fool all the people some of the time, **then** you cannot fool all the people all the time.

表示中易出现的错误

$$\Diamond\exists x\forall y(p(x)\wedge t(y)\to p(x,y))\wedge\Diamond\exists y\forall x(p(x)\wedge t(y)\to p(x,y))$$
$$\wedge\neg\Diamond\forall x\forall y(p(x)\wedge t(y)\to p(x,y))).$$

It is possible that you fool some of the people all of the time, **It is possible** that you fool all the people some of the time, and **It is impossible** that you cannot fool all the people all the time.

Aristotle的模态逻辑

What is, **necessarily** is, when it is; and what is not, **necessarily** is not, when it is not. But not everything that is, **necessarily** is; and not everything that is not, **necessarily** is not. For to say that everything that is, is **of necessity,** when it is, is not the same as saying unconditionally that it is **of necessity**. Similarly with what is not. And the same account holds for contradictiories: everything **necessarily** is or is not, and **will be** or **will not be**; but one cannot divide and say that one or the other is necessary. I mean, for example: it is **necessary** for there to be or not to be a sea-battle tomorrow; but it is **not necessary** for a sea-battle to take place tomorrow, **nor** for one not to take place – though it is **necessary** for one to take place or not to take place.

Aristotle的模态逻辑

任何东西, 当它是什么的时候, **必然**是什么; 并且任何东西, 当它不是什么的时候, **必然**不是什么. 但是, 不是每个是什么的东西**必然**是什么; 并且不是每个不是什么的东西**必然**不是什么. 因为当一个东西是什么的时候**必然**是什么, 与无条件地说这个东西**必然**是什么是不同的. 类似于不是什么的东西. 这样的解释对于矛盾断言(们)也成立: 每个东西**必然**是或不是什么; 并且**将**是或不是什么; 但却不能说一个或另一个是**必然**是的. 我的意思是, 比如: 这是**必然的**: 明天要么有海战要么没有海战; 但明天发生海战**不是必然的**, 明天不发生海战也**不是必然的**, 尽管明天或者发生海战或者不发生海战是**必然的**.

Aristotle的模态逻辑

So, since statements are true according to how the actual things are, it is clear that wherever there are such as to allow of contraries as chance has it, the same necessarily holds for the contradictories also. This happens with things that are not always so or are not always not so. With these it is necessary for one or the other of the contradictories to be true or false – not however, this one or that one, but as chance has it; or for one to be true *rather* than the other, yet not *already* true or false.

Aristotle的逻辑

Kant thought that Aristotle had discovered everything there was to know about logic, and the historian of logic Prantl drew the corollary that any logician after Aristotle who said anything new was confused, stupid, or perverse.

模态词

模态词是描述断言是真假的方式*(*程度*)*的.
必然为真
必然为假
可能为真
我认为为真

模态词

语句上的算子.
谓词演算只能描述关于个体的陈述, 而不能描述关于语句的陈述.
我相信地球是圆的;
这个计划**可能**会成功的;

这种语句的一阶不可表示性

这种语句是不能直接用一阶逻辑来表示.
比如, 设A表示“地球是圆的”, 如果用i表示“我”, 关系$b(x, y)$表示x相信y, 则有

$$b(i, A).$$

这种语句的一阶不可表示性

这种语句是不能直接用一阶逻辑来表示.
比如, 设φ表示“地球是圆的”, 如果用i表示“我”, 关系$b(x,y)$表示x相信y, 则有

$$b(i,\varphi).$$

但φ为公式, 在谓词演算中公式是不能出现在项的位置上.

这种语句的一阶不可表示性

在谓词演算中公式是不能出现在项的位置上.
一阶逻辑中的原子公式:

$$r(t_1, t_2, ..., t_n)$$

模态推理的实际例子

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Every man must have a head}\\ \text{Tom is a man}\end{array}}{\text{Tom must have a head;}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Every boxer must have hands}\\ \text{Pat is a boxer}\end{array}}{\text{Pat must have hands.}}$$

几种处理办法

要表示这样的断言, 有三种处理方法:
(i) 设法消除A, 合成关系表示$b(i, A)$, 所得到的断言结构将不同我们自然语言的陈述.
(ii) 扩展逻辑系统使得允许将一个个体符号和一个语句联系成一个新的语句.
(iii) 引入作用语句上的算子.

模态逻辑的处理办法

(iii) 引入作用语句上的算子.

命题逻辑，谓词逻辑和模态逻辑

	关于	语法特点	语义特点
命题逻辑	命题		
谓词逻辑	对象的性质		
模态逻辑	命题的模态		

命题逻辑，谓词逻辑和模态逻辑

	关于	语法特点	语义特点
命题逻辑	命题	$\neg, \rightarrow$	
谓词逻辑	对象的性质	$\neg, \rightarrow, \forall$	
模态逻辑	命题的模态	$\neg, \rightarrow, \forall, \Box$	

模态词的分类

逻辑	符号	符号的意思
模态逻辑Modal Logic	$\Box$	It is necessary that …
	$\Diamond$	It is possible that …
道义逻辑Deontic Logic	$\mathbf{O}$	It is obligatory that …
	$\mathbf{P}$	It is permitted that …
	$\mathbf{F}$	It is forbidden that …
时态逻辑Temporal Logic	$\mathbf{G}$	It will always be the case that …
	$\mathbf{F}$	It will be the case that …
	$\mathbf{H}$	It has always been the case that …
	$\mathbf{P}$	It was the case that…
认知逻辑Doxastic Logic	$\mathbf{B}_a$	a believes that …
	$\mathbf{K}_a$	a knows that …

模态词的对偶

每个模态词$\Box$均有一个对称模态词$\Diamond = \neg\Box\neg$, 比如

$\Box(\varphi)$	$\Diamond(\varphi)$
φ必然为真	φ可能为真
*agent a*知道φ	*agent a*不知道φ为假
*agent a*相信φ	*agent a*不怀疑φ
在任何时刻φ都为真	存在某时刻φ 为真

模态词的对偶

$\Box(\varphi)$	$\Diamond(\varphi)$
φ必然为真	φ可能为真
主体a知道φ	主体a不知道φ为假
主体a相信φ	主体a不怀疑φ
在任何时刻φ都为真	存在某时刻φ为真
张三狠狠地打了李四	??

模态词的真假值

$\Box A$与A的真假值的关系.

A	A	$\neg A$	?	??
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

$\Box A$的真假值不应等于?和??的.

The square of opposition

$$
\begin{tikzcd}
\forall x A(x) \arrow[r, dash] \arrow[d] \arrow[dr] & \forall x \neg A(x) \arrow[d] \arrow[dl] \\
\begin{array}{c} \neg\forall x \neg A(x) \\ \exists x A(x) \end{array} \arrow[r, equal] & \begin{array}{c} \neg\forall x A(x) \\ \exists x \neg A(x) \end{array}
\end{tikzcd}
$$

$--$表示反对关系(contraries);
$==$表示下反对关系(subcontraries);
$\rightarrow$表示矛盾关系(contradictories);
从$\downarrow$表示蕴涵关系(subalternatives).

The square of opposition

$$\begin{tikzcd}
\Box A \arrow[r, dash] \arrow[d] \arrow[dr] & \Box\neg A \arrow[d] \arrow[dl] \\
\begin{array}{c}\neg\Box\neg A \\ \Diamond A\end{array} \arrow[r, equal] & \begin{array}{c}\neg\Box A \\ \Diamond\neg A\end{array}
\end{tikzcd}$$

−−表示反对关系(contraries);
==表示下反对关系(subcontraries);
→表示矛盾关系(contradictories);
从↓表示蕴涵关系(subalternatives).

命题模态逻辑的语言

在命题逻辑语言上加模态词□

命题模态逻辑的公式

定义. 命题模态逻辑的公式集合是满足下列条件的表达式集合:

1. 每个命题变元是一个公式;
2. 如果A是公式则$\neg A$也是公式;
3. 如果A和B是公式则$A \to B$也是公式;
4. 如果A是公式, 则$\Box A$也是公式.

命题模态逻辑的语义

张三是幸福的.

命题模态逻辑的语义

张三是幸福的

是一个命题函数.

命题模态逻辑的语义

$$\text{张三是幸福的}$$

是一个命题函数.

$$\text{张三在某时刻是幸福的}$$

是一个合适的断言.

命题模态逻辑的语义

张三在某解释下是幸福的.

命题模态逻辑的语义

张三在某解释下是幸福的.

□张三是幸福的对应于

对任何解释I, 张三在解释I下是幸福的;

◊张三是幸福的对应于

对某个解释I, 张三在解释I下是幸福的.

命题模态逻辑的语义

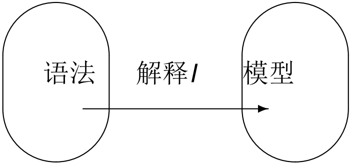
□张三是幸福的对应于

$\forall I$(张三在解释I下是幸福的);

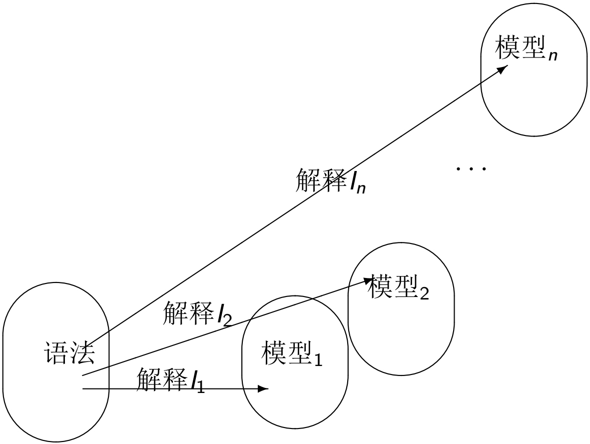
◊张三是幸福的对应于

$\exists I$(张三在解释I下是幸福的).

逻辑系统



模态逻辑系统



外延性和内含性逻辑

将变元符号指派一个结构中的元素;
将关系符号解释为一个结构中的关系;
这种语义是外延性的.
一个关系符号的内含是关系符号在不同解释下的关系综合.

框架

定义. 一个框架是由
(1) 一个非空的集合W, 其元素称为可能世界(possible worlds); 和
(2) W上的一个二元关系R组成, 其中R称为可达关系(accessibility relation).
一个这样的框架记为(W, R).

模型

定义. 一个命题模态模型是一个三元组(W, R, I), 其中I是W到命题变元集合的映射.
对于命题变元p和可能世界$w \in W$, 如果$p \in I(w)$ 则称p在可能世界w中为真, 记为$w \models p$.

公式在一个模型中的真假值

给定一个模型(W, R, I), 一个可能世界$w \in W$, 一个公式A在w中为真(记为$w \models A$)定义如下:

1. $w \models \neg A$当且仅当$w \not\models A$;
2. $w \models A \to B$当且仅当, 要么$w \not\models A$要么$w \models B$;

公式在一个模型中的真假值

给定一个模型(W, R, I), 一个可能世界$w \in W$, 一个公式A在w中为真(记为$w \models A$)定义如下:

1. $w \models \neg A$当且仅当$w \not\models A$;
2. $w \models A \to B$当且仅当, 要么$w \not\models A$要么$w \models B$; 即, 如果$w \models A$则$w \models B$;
3. $w \models \Box A$当且仅当, 对每个$w' \in W$, 如果$(w, w') \in R$则$w' \models A$.

公式在一个模型中的真假值

给定一个模型(W, R, I)，一个可能世界$w \in W$，一个公式A在w中为真(记为$w \models A$)定义如下:

1. $w \models \neg A$当且仅当$w \not\models A$;
2. $w \models A \to B$当且仅当，要么$w \not\models A$要么$w \models B$;
3. $w \models \Box A$当且仅当，对每个$w' \in W$，如果$(w, w') \in R$则$w' \models A$.
4. $w \models \Diamond A$当且仅当，存在某个$w' \in W$使得$(w, w') \in R$且$w' \models A$.

真假值

$$
\begin{aligned}
w \models A \vee B \quad & \text{当且仅当} \quad w \models \neg A \rightarrow B \\
& \text{当且仅当} \quad w \not\models \neg A \text{或者} w \models B \\
& \text{当且仅当} \quad w \models \text{或者} w \models B.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$w \models A \wedge B \text{当且仅当} w \models A \text{并且} w \models B.$$

例子

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{w} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{w'} & & \boxed{w''}
\end{tikzcd}
$$

例子

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{w} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{w'} \quad I(w') = \{p\} & & \boxed{w''} \quad I(w'') = \{q\}
\end{tikzcd}
$$

例子

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \boxed{w} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\ \boxed{w'} \quad I(w') = \{p\} & & & & \boxed{w''} \quad I(w'') = \{q\} \end{tikzcd}$$

$$w \not\models (\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q).$$

例子

$$\begin{tikzcd} \boxed{w} \arrow[d] & \\ \boxed{w'} \arrow[d] & I(w'') = \{p\} \\ \boxed{w''} & \end{tikzcd}$$

$$w \not\models \Box p \to \Box\Box p.$$

例子

对任何模型(W, R, I)的任何$w \in W$,

$$w \models \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B).$$

假设$w \models \Box(A \wedge B)$.

例子

假设$w \models \Box(A \wedge B)$.
对任意$w' \in W$使得$(w, w') \in R$, $w' \models A \wedge B$;
即$w' \models A$, 并且$w' \models B$.
由于w'是任意的w'使得$(w, w') \in R$,

$$\begin{array}{c} w \models \Box A; \\ w \models \Box B, \end{array}$$

即

$$w \models \Box A \wedge \Box B.$$

$\Box$

命题逻辑, 谓词逻辑和模态逻辑

	关于	语法特点	语义特点
命题逻辑	命题	$\neg, \rightarrow$	$v : P \rightarrow \{0, 1\}$
谓词逻辑	对象的性质	$\neg, \rightarrow, \forall$	(U, I)
模态逻辑	命题的模态	$\neg, \rightarrow, \forall, \Box$	(W, R, I)

基本性质

$$
\begin{aligned}
&\models \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B);\\
&\models (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B);\\
&\models (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B);\\
&\models \Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B);\\
&\models (\Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \vee B);\\
&\models \Diamond(A \wedge B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B).
\end{aligned}
$$

基本性质

$$\models \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B);$$
$$\models (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B);$$
$$\models \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B);$$
$$\models \Diamond(A \wedge B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B).$$

重要的量词性质

$$\models \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B);$$
$$\models (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B);$$
$$\models \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B);$$
$$\models \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B).$$

$$\vdash \forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x);$$
$$\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x));$$
$$\vdash \exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge \exists x B(x);$$
$$\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)).$$

注意: 量词与连接词的关系, 模态词与连接词的关系是如此地相似.

重要的命题模态逻辑

框架的分类

一个框架(W, R)是
(1) 自反的, 如果对任意的$w \in W, (w, w) \in R$;
(2) 对称的, 如果对任意的$w, w' \in W, (w, w') \in R$蕴涵$(w', w) \in R$;
(3) 传递的, 如果对任意的$w, w', w'' \in W, (w, w'), (w', w'') \in R$蕴涵$(w, w'') \in R$;
(4) 序列的(serial), 如果对任意的$w \in W$,存在某个$w' \in W$使得$(w, w') \in R$.

框架类

逻辑	框架条件
K	没有条件
D	序列的
T	自反的
B	自反的,对称的
K4	传递的
S4	自反的, 传递的
S5	自反的, 对称的, 传递的

在框架类中永真

给定一个模型(W, R, I), 称模型(W, R, I)是基于框架(W, R)的.
一个公式A在模型(W, R, I)中是永真的, 如果A在W的每个可能世界中为真;
给定一个框架(W, R), 一个公式A在框架(W, R)中是永真的, 如果A在基于(W, R)的模型中是永真的;
给定一个框架类$\mathbf{L}$, 一个公式A在框架类$\mathbf{L}$中是永真的, 如果A在$\mathbf{L}$的每个框架中是永真的.

命题模态逻辑的公理系统

公理:
经典逻辑公理: 所有的命题逻辑定理;
公理: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;

命题模态逻辑的公理系统

公理:

经典逻辑公理: 所有的命题逻辑定理;

公理: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;

推导规则:

(1) (MP): $\dfrac{A, A \to B}{B}$;

(2) 必然律(Nec): $\dfrac{A}{\Box A}$.

命题模态逻辑的公理系统

公理:

(A1) $A \to (B \to A)$;

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

(A4) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

推导规则:

(1) (MP): $\dfrac{A, A \to B}{B}$;

(2) 必然律(Nec): $\dfrac{A}{\Box A}$.

正则性推导规则

$$(Reg)\quad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}.$$

$$\begin{array}{lr}
A \to B & \text{假设} \\
\Box(A \to B) & (Nec) \\
\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) & (A4) \\
\Box A \to \Box B & (MP).
\end{array}$$

证明的例子

证明: $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

(1) $(A \wedge B) \rightarrow A$

证明的例子

证明: $\Box(A \land B) \rightarrow (\Box A \land \Box B)$.

(1) $(A \land B) \rightarrow A$

(2) $\Box(A \land B) \rightarrow \Box A$

证明的例子

证明: $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$.

(1) $(A \wedge B) \to A$

(2) $\Box(A \wedge B) \to \Box A$

(3) $(A \wedge B) \to B$

证明的例子

证明: $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (A \wedge B) \rightarrow A \\
(2) & \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \\
(3) & (A \wedge B) \rightarrow B \\
(4) & \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B
\end{array}
$$

证明的例子

证明: $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

(1) $(A \wedge B) \rightarrow A$

(2) $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$

(3) $(A \wedge B) \rightarrow B$

(4) $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$

(5) $(\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A) \rightarrow ((\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B)$
$\rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)))$

证明的例子

证明: $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$.

(1) $(A \wedge B) \to A$

(2) $\Box(A \wedge B) \to \Box A$

(3) $(A \wedge B) \to B$

(4) $\Box(A \wedge B) \to \Box B$

(5) $(\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to ((\Box(A \wedge B) \to \Box B)$
$\to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)))$

(6) $(\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B))$

(7) $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$.

公理名称

名称	公理模式	框架条件
D	$\Box A \to \Diamond A$	序列的
T	$\Box A \to A$	自反的
4	$\Box A \to \Box\Box A$	传递的
B	$A \to \Box\Diamond A$	对称的
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	对称的, 传递的

命题模态逻辑们

逻辑	公理模式	框架条件
D	D	序列的
T	T	自反的
K4	4	传递的
B	T, B	自反的,对称的
S4	$T, 4$	自反的, 传递的
S5	$T, 5$	自反的, 对称的, 传递的

注意：$T, 5$等价于$T, 4, B$.

谓词模态逻辑的语言

在一阶语言上加模态词□

用模态逻辑表示知识时需要考虑的问题

关于模态词(算子)的形式性质.

关于模态词的形式性质1

1．模态词使用是否要受限：
如B_a可以递归使用.
例如，

‘我相信你会相信地球是圆的”

$[B_iB_j(A)]$，其中i是我，j是你，A表示“地球是圆的”．
但是，如果$\mathbf{A}_t$表示在时间t，则$\mathbf{A}_t(A)$表示在时间t，A成立，
$\mathbf{A}_t A_{t'}(A)$ 的意义往往不大.

关于模态词的形式性质2

2．模态词能否与量词交换：即$\Box(\exists x A(x))$是否等价于$\exists x \Box(A(x))$.
如果这样, 我们就只需要讨论模态词作用于无量词的公式上.
通常模态词与量词是不可交换的.

关于模态词的形式性质2

比如，$\mathbf{K}_a(A)$表示"agent a 知道A"，例如，$\mathbf{K}_i(\exists x L(x))$表示

$$\text{我知道有人}x\text{住在这个荒岛上,}$$

(存在这样的人,但是谁可能不知道)，而$\exists x \mathbf{K}_i(L(x))$表示

$$\text{存在一个人}x\text{我知道}x\text{是住在这个荒岛上的}$$

(x是谁我是知道的).

关于模态词的形式性质2

但$\mathbf{A}_t$可以与量词交换，例如，“在5:00钟，某个东西在这个桌子上”等价于“某个东西在5:00钟在这个桌子上”.

关于模态词的形式性质2

如果$\Box$与量词不能交换, 则设A为一个公式含有模态词$\Box$和项t, 那么公理

$$A(t) \to \exists x A(x)$$

可能不成立, 其中A, t满足一阶逻辑对公理的限制, 即t中不含在$A(t)$中受限的变量.

关于模态词的形式性质2

比如, $\mathbf{K}_i(L(t))$, “我知道最年长的人住在这个荒岛上”, 不一定蕴涵$\exists x \mathbf{K}_i(L(x))$, “存在一个人我知道他住在这个荒岛上”, 其中表示荒岛上住居的最年长的人, 这是因为我知道这个岛上只有有限多个人, 而有限多个人中必有一个最年长的, 但这不蕴涵我知道他究竟是谁.

关于模态词的形式性质3

3．模态词是否与Boole运算交换：即$\Box(A \vee B)$是否等价于$\Box(A) \vee \Box(B)$?
$\Box(\neg A)$等价于$\neg\Box(A)$.
比如$\mathbf{K}_a$不能与Boole运算交换：$\mathbf{K}_a(\neg R)$表示

我知道现在没有下雨

不等于$\neg\mathbf{K}_a(R)$, 即

我不知道现在下雨.

前者蕴涵后者, 但后者不蕴涵前者. $\mathbf{K}_a(R)$是错的, 可能是我不知道现在下雨或者我知道现在不下雨.

关于模态词的形式性质3

$\mathbf{A}_t$时间是可以与Boole运算交换的,

$$\mathbf{A}_t(\neg A) \leftrightarrow \neg\mathbf{A}_t(A),$$

且

$$\mathbf{A}_t(A \vee B) \leftrightarrow \mathbf{A}_t(A) \vee \mathbf{A}_t(B).$$

例如, “在1979年1月, Bush不是美国总统” 等价于“这是错误的: 在1979年1月Bush是美国总统”.
任何与Boole运算交换的模态词必须满足矛盾律和排中律: 对任何命题A, 要么$\Box(A)$要么$\Box(\neg A)$为真, 但不能两者都真.

关于模态词的形式性质4

4．等项能否替换：即

$$t \equiv s \to (\Box(A(s)) \leftrightarrow \Box(A(t))).$$

(1) 相等关系是一个等价关系:
自反性: $x = x$;
反对称性: $x = y \wedge y = x \to x = y$;
传递性: $x = y \wedge y = z \to x = y$;
(2) 替换公理:

$$\frac{\varphi(t_1) \quad t_1 = t_2}{\varphi(t_2)},$$

其中$\varphi(x)$是任何一个含一个自由变元的公式.

关于模态词的形式性质4

4. 等项能否替换：即

$$t \equiv s \to (\Box(A(s)) \leftrightarrow \Box(A(t))).$$

如$\Box$能等项替换，$\Box$称为参照透明的(referentially transparent)，否则$\Box$称为参照不透明的(referentially opaque).

关于模态词的形式性质4

如$\mathbf{K}_a$就是参照不透明的，因为$\mathbf{K}_a(A(s))$且$s \equiv t$，但$\mathbf{K}_a(A(t))$ 可能不成立. 因此，$s \equiv t$不蕴涵$\mathbf{K}_a(s \equiv t)$. 对a来说，a可能不知道$s \equiv t$，只知道$A(s)$.

如果$T(A)$表示“A为真”，那么T就是参照透明的.

关于模态词的形式性质4

(1) Lois believes that Superman is strong.
(2) Lois believes that Clark Kent is not strong.
(3) Lois does not believe that Clark Kent is strong.
由于Clark Kent=Superman, 在(1)中用Clark Kent替换Superman得到
(4) Lois believes that Clark Kent is strong.
在假设Clark Kent=Superman下, 句子
(1) Superman is strong.
为真当且仅当句子
(2) Clark Kent is strong.
为真.

关于模态词的形式性质5

5．模态词是否在推导规则下封闭：即由

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash B$$

是否会有

$$\Box(\mathbf{A}_1), \ldots, \Box(\mathbf{A}_n) \vdash \Box(B).$$

如果可以则模态词$\Box$称为结论封闭的. 比如, $\mathbf{A}_t$是结论封闭的：

如果昨天每个学生参加了开学典礼, 昨天张三是一个学生, 则昨天张三参加了

$$\mathbf{A}_t(\forall x A(x)) \vdash \mathbf{A}_t(A(t)),$$

其中t为项.

关于模态词的形式性质5

$\mathbf{S}_a(A)$表示“agent a说”, 不是结论封闭的.
$\mathbf{S}_l(\forall x A(x))$表示

李四说学生都在听课,

并且$\mathbf{S}_l(t)$表示

李四说张三是一个学生,

但不一定正确的是：$\mathbf{S}_l(A(t))$,

李四说张三在听课.

如果一个模态词□是参照透明的, 且与量词、Boole运算交换, 则□一定是结构封闭的.

关于模态词的形式性质6

6．对语句取量词：$\forall A(B(A)), \exists A(B(A))$. 所有张三说的都是真的.

我非常高兴认识您们;

在以后任何时候,

有什么逻辑问题,

欢迎您们与我联系:

yfsui@ict.ac.cn

计算技术研究所

010-62600538