第三章　谓词逻辑

上次内容

- 公理系统和推导定理
- Gentzen推导系统
- Gentzen推导系统的可靠性和完备性

命题逻辑

被形式化对象: 命题, 命题连接词;
命题逻辑: 命题逻辑语言; 语法: 公式, 形式推理规则:

$$(\mathit{ref}), (+), (\neg^-), (\to^-), (\to^+), (\vee^-), (\vee^+),$$
$$(\wedge^+), (\wedge^-), (\leftrightarrow^+), (\leftrightarrow^-);$$

以及语义: 赋值, 永真式, 逻辑推论;
形式证明;
协调性;
紧致性, 可靠性, 完备性, 可判定性.

Gentzen系统

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad (\wedge^{L_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \quad (\wedge^{R})$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad (\wedge^{L_2})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \quad (\vee^{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad (\vee^{R_2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad (\vee^{R_1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \quad (\to^{L}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad (\to^{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \quad (\neg^{L}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \quad (\neg^{R})$$

今天内容

- 谓词
- 代数结构
- 谓词逻辑的语言,语法
- 谓词逻辑的语义

谓词逻辑

谓词逻辑(predicate logic)
也称一阶逻辑(first-order logic).

命题逻辑中的原子

命题变元, 解释为自然语言中的命题.

张三是高的;
张三是胖的.

和

张三是高的;
李四是高的.

命题逻辑中的推理是基于逻辑连接词的

如果张三是高的并且张三是胖的则张三是高的并且张三是胖的.
如果$\Sigma \vdash A \wedge B$则$\Sigma \vdash A$.
$(*)$ 如果$\vdash A \wedge B$则$\vdash A$.

逻辑推理中不是基于连接词的推理

$$\frac{\begin{array}{l}\text{人总有一死}\\ \text{苏格拉底是人}\end{array}}{\text{苏格拉底总有一死.}}$$

注意: 每个命题是简单命题, 但上面却是一个有效的推理.

逻辑推理中不是基于连接词的推理

三段论(syllogism):

$$\frac{\text{细菌是微生物} \quad \text{酵母菌是细菌}}{\text{酵母菌是微生物.}}$$

逻辑推理

All the children in Lake Woebegone are above average.
Most People in Lake Woebegone are children.

Therefore, Most people in Lake Woebegone are above average.

量词(quantifiers)

所有, 每个,

大部分,

存在至少n个, 存在至多n个,

存在一个, 小部分,

没有一个

量词(quantifiers)

量词是逻辑的(logical).

谓词逻辑的被形式化对象

被形式化的对象: **代数结构**(algebraic structures)
代数结构是一个非空的论域和该论域上的一些函数和关系所组成的. 论域中的元素称为个体(individuals/objects, 对象, 客体).
假定: 个体是不再可分的.

结构的例子

所有自然数组成的论域, 记为N.
有一个特定的元素(个体)0;
有一个一元函数s;
有一个相等关系$=$.
记$\mathbf{N} = (N, 0, s, =)$为自然数的结构.

Peano的算术假设

Dedekind在1879年提出了一个数论的半公理系统, Peano修改为如下几条:

(P1) 0是一个自然数;

(P2) 如果x是一个自然数, 存在另一个自然数, 记为x' (称为x的后继);

(P3) 对任何自然数x, $x' \neq 0$;

(P4) 如果$x' = y'$则$x = y$;

(P5) 如果Q是一个性质对任意给定的自然数它可以成立也可以不成立, 并且,

如果(i) 0具有性质Q, 并且

当一个自然数x具有性质Q时, x'具有性质Q,

则所有自然数具有性质Q.

函数的递归定义

递归定义二元函数: $+, \times$.

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x; \\
x + y' &= (x + y)'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \times 0 &= 0; \\
x \times y' &= x \times y + x.
\end{aligned}
$$

加法和乘法的性质

结合律:

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$
$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$

交换律:

$$x + y = y + x;$$
$$x \times y = y \times x.$$

分配律:

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

整数的结构

设所有的整数的集合为Z.
有一个特定的元素(个体)0;
有一个一元函数$-$;
有两个二元函数$+, \times$;
有一个相等关系$=$.
记$\mathbf{Z} = (Z, 0, -, +, \times, =)$为整数的结构.

整数的性质

对所有的整数x, y, z,

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \qquad \text{(加法结合律)}$$

对每个整数x,

$$x + 0 = 0 + x = x; \qquad \text{(单位元)}$$

对每个整数x,存在唯一的$-x$使得

$$x + (-x) = (-x) + x = 0. \qquad \text{(逆元)}$$

群

一个论域G和G上的二元运算$\cdot$构成一个群(group), 记为$(G, \cdot)$, 如果

(1) $\cdot$的结合律: 对任何$x, y, z \in G$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

(2) 存在一个单位元e使得对每个$x \in G$,

$$x \cdot e = e \cdot x = x;$$

(3) 对每个$x \in G$, 存在一个逆元x^-使得

$$x \cdot x^- = x^- \cdot x = e.$$

Abelian群

如果一个群G满足交换律: 对任何$x, y \in G$,

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

称G为交换群(Abelian群).

Abelian群

如果一个群G满足交换律: 对任何$x, y \in G$,

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

称G为交换群(Abelian群).
对所有的整数x, y,

$$x + y = y + x.$$

整数在加法下构成一个交换群: 整数加法群.

整数加法和乘法

(1) 乘法满足结合律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

(2) 乘法与加法满足分配律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

环

一个论域R和R上的两个二元运算$+, \cdot$构成一个环(ring), 记为$(R, +, \cdot)$, 如果
(1) $(R, +)$是一个群;
(2) 乘法满足结合律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

(3) 乘法与加法满足分配律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

环

一个论域R和R上的两个二元运算$+, \cdot$构成一个环(ring), 记为$(R, +, \cdot)$, 如果
(1) $(R, +)$是一个群;
(2) 乘法满足结合律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

(3) 乘法与加法满足分配律: 对每个$x, y, z \in R$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

整数在加法和乘法下构成一个交换环: 整数环.

有理数的结构

设Q为所有的有理(rational)数的集合.
有理数在加法下构成一个群, $(Q, +, 0)$是一个群.
加法与乘法满足: 对每个有理数x, y, z,

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z; \qquad \text{(分配律)}$$

关于乘法, 对每个有理数x, 如果$x \neq 0$ 则存在唯一的有理数$\frac{1}{x}$使得

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

即, $(Q - \{0\}, \times, 1)$是一个群.

域(field)

一个论域F和F上的两个二元运算$+, \cdot$构成一个域(field), 记为$(F, +, \cdot)$, 如果$(F, +, \cdot)$是一个环, 并且$(F - \{0\}, \cdot)$是一个群.
因此, $(Q, +, \times)$是一个(有理数)域.

实数的结构

设R为所有实数的集合. 称$(R, +, \times, 0, 1)$为实数域, 记为$\mathbf{R}$.
实数在加法下构成一个群, $(R, +, 0)$是一个群.
加法与乘法满足: 对每个实数x, y, z,

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z; \qquad \text{(分配律)}$$

关于乘法, 对每个实数x, 如果$x \neq 0$ 则存在唯一的实数$\dfrac{1}{x}$使得

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

即, $(R - \{0\}, \times, 1)$是一个群.

布尔代数

布尔代数(Boolean algebra)是一个代数结构.
以上这些结构称为代数结构.

性质与性质的推理

交换律和结合律等等是代数性质，是一个代数结构的论域中的对象具有的代数性质.

我们需要一个系统，能够脱离代数结构的论域，对其共同的性质进行推理.

自然语言中的变元

张三
我相信世上有间谍;
我相信某个张三是间谍;
我相信‘光头’是间谍.

关于一个结构的命题

除了简单命题和复合命题之外，还有这样的命题:
对**每个**实数x, 如果$x \neq 0$ 则**存在**唯一的实数$\frac{1}{x}$使得

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

每个(或所有)称为全称量词(universal quantifier);
存在称为存在量词(existential quantifier).

命题函数

含个体变元的命题称为命题函数.
比如: x是素数.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x是素数	$\uparrow$	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1

量化的个体变元

对所有的自然数x，x是素数;
存在一个自然数x是素数.
量化的个体变元称为约束变元; 否则称自由变元.
不含自由变元的命题具有确定的真假值.

混合命题

对所有的自然数y，x整除y.

全称量词和存在量词

如果论域是有限的, 则全称量词等价于合取, 存在量词等价于析取.

设(D, r)是一个结构, 其中$D = \{a_1, ..., a_n\}$, 并且r是D上的一个一元关系.

全称量词和存在量词

$$\text{对所有的}x \in D, r(x)$$

等价于

$$r(a_1)\text{并且}r(a_2)\text{并且}\cdots\text{并且}r(a_n);$$

$$\text{存在某个}x \in D\text{使得}r(x)$$

等价于

$$r(a_1)\text{或者}r(a_2)\text{或者}\cdots\text{或者}r(a_n).$$

代数结构的特点

- 具有一个论域, 因而具有元素
- 论域上的函数和关系
- 量词出现在断言中, 断言是关于元素之间的.

一阶逻辑的语言

- 若干个常元(常量)符号$\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots$;
- 可数多个变元符号$x_0, x_1, x_2, \ldots$;
- 若干个函数符号$\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots$;
- 若干个关系符号$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots$;
- 逻辑连接词: $\neg, \rightarrow$;
- 量词符号: $\forall$.

定义的符号

$$
\begin{aligned}
A \vee B &\equiv \neg A \to B; \\
A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B); \\
\exists x A(x) &\equiv \neg \forall x \neg A(x).
\end{aligned}
$$

Peano算术的语言L'

- 常元(常量)符号$\mathbf{0}$;
- 可数多个变元符号$x_0, x_1, x_2, \ldots$;
- 函数符号$\mathbf{s}$; $+$, $\times$
- 关系符号$=$;
- 逻辑连接词: $\neg, \rightarrow$;
- 量词符号: $\forall$.

项

定义. 一个谓词逻辑语言L上的符号串t称为项, 如果
(1) 要么t是一个常量符号,
(2) 要么t 是一个变量符号,
(3) 要么$t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$, 其中$\mathbf{f}$ 是一个n-元函数符号, $t_1, ..., t_n$是项.
形式地表示为

$$t = \mathbf{c}|x|\mathbf{f}(t_1, ..., t_n).$$

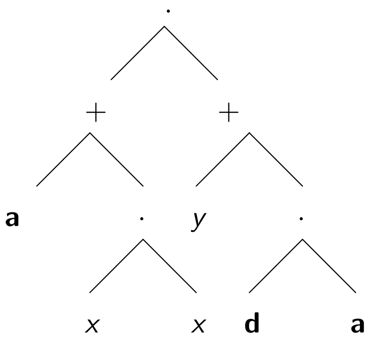
Peano算术的项

定义. L'上的符号串t称为项, 如果
(1) 要么$t = \mathbf{0}$,
(2) 要么$t = x$,
(3) 要么$t = \mathbf{s}t_1, t_1 + t_2, t_1 \times t_2$.
形式地表示为
$$t = \mathbf{0}|x|\mathbf{s}t_1|t_1 + t_2|t_1 \times t_2.$$

项的抽象句法树

$$(\mathbf{a} + x^2) \cdot (y + \mathbf{da})$$

其中$x^2 = x \cdot x, \mathbf{da} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}$.



关于项的结构归纳

如果t是一个项, 则下面3件事情中必有一个为真:
(1) t是一个常量符号; 或
(2) t是一个变量符号, 或
(3) t有形式$\mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$, 其中$\mathbf{f}$是一个$n$-元函数符号, $t_1, ..., t_n$是某些更小的项.
项集合上函数的归纳定义, 并且关于项的性质的归纳证明.

关于项的归纳定义

要定义项上的一个函数g,
(1) 给出对常元符号$\mathbf{c}$的定义, $g(\mathbf{c})$;
(2) 给出对变元符号x的定义, $g(x)$;
(3) 假定g在项$t_1, ..., t_n$上已给出定义, 定义$g(t)$, 其中$t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$.
注意: $\mathbf{f}$是谓词逻辑的语言中的符号; 但g是元语言中的函数.

关于项的归纳定义例子

定义: 出现在项t中的变量集合, 记为$var(t)$, 定义为

$$\begin{aligned} var(\mathbf{c}) &= \emptyset \\ var(x) &= \{x\} \\ var(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n)) &= var(t_1) \cup \cdots \cup var(t_n). \end{aligned}$$

$\square$

关于项的归纳定义例子

定义:一个项t的大小, 记为$size(t)$, 定义如下:

$$\begin{aligned} size(\mathbf{c}) &= 1 \\ size(x) &= 1 \\ size(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n)) &= 1 + size(t_1) + \cdots + size(t_n). \end{aligned}$$

即, t的大小$size(t)$是它的抽象句法树中结点的个数. 类似地,

关于项的归纳定义例子

一个项t的深度，记为$depth(t)$，定义如下：

$$
\begin{aligned}
depth(\mathbf{c}) &= 1 \\
depth(x) &= 1 \\
depth(\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)) &= 1 + \max\{depth(t_1), \ldots, depth(t_n)\}.
\end{aligned}
$$

□

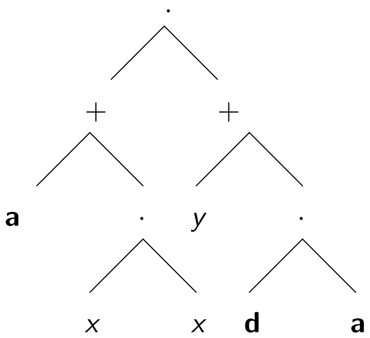
项的深度

$$(\mathbf{a} + x^2) \cdot (y + \mathbf{da})$$

$$\begin{aligned}
& \mathit{depth}((\mathbf{a} + x^2) \cdot (y + \mathbf{da})) \\
= \; & 1 + \max\{\mathit{depth}(\mathbf{a} + x^2), \mathit{depth}(y + \mathbf{da})\} \\
= \; & 1 + \max\{1 + \max\{\mathit{depth}(\mathbf{a}), \mathit{depth}(x^2)\}, \\
& \qquad\qquad 1 + \max\{\mathit{depth}(y), \mathit{depth}(\mathbf{da})\}\} \\
= \; & 2 + \max\{\max\{1, 1 + \max\{\mathit{depth}(x), \mathit{depth}(x)\}\}, \\
& \qquad\qquad \max\{1, 1 + \max\{\mathit{depth}(\mathbf{d}), \mathit{depth}(\mathbf{a})\}\}\} \\
= \; & 2 + \max\{1 + \max\{1, 1\}, 1 + \max\{1, 1\}\} \\
= \; & 2 + \max\{2, 2\} = 4.
\end{aligned}$$

项的抽象句法树的深度

$(\mathbf{a} + x^2) \cdot (y + \mathbf{da})$



项的结构归纳证明

要证明性质P对所有的项均成立，首先证明
(1) $P(\mathbf{c})$是成立的;
(2) $P(x)$是成立的;
(3) 假如$P(t_1), ..., P(t_n)$是成立的，证明$P(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n))$.

项的结构归纳证明例子

引理. 一个项t中变量的个数不大于t的大小$size(t)$,
即$|var(t)| \leq size(t)$.
证明:
情况: $t = \mathbf{c}$是一个常量.
直接有: $|var(t)| = |\emptyset| = 0 < size(t)$.
情况: $t = x$是一个变量.
直接有: $|var(t)| = |\{x\}| = 1 = size(t)$.

项的结构归纳证明例子

情况: $t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$.
由归纳假设, 对每个$1 \leq i \leq n$, $|var(t_i)| \leq size(t_i)$.

$$\begin{aligned}
|var(t)| &= |var(t_1) \cup var(t_2) \cup \cdots \cup var(t_n)| \\
&\leq |var(t_1)| + |var(t_2)| + \cdots + |var(t_n)| \\
&\leq size(t_1) + size(t_2) + \cdots + size(t_n) \\
&< size(t).
\end{aligned}$$

$\square$

项上的归纳原理

定理[项上归纳原理]. 假设P是项上的一个谓词.
如果对每个常元符号$\mathbf{c}$, $P(\mathbf{c})$;
并且对每个变元符号x, $P(x)$;
并且假设$P(t_1), ..., P(t_n)$, 我们能证明$P(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n))$,
则$P(t)$对所有的t 成立.

项上的归纳证明模式

证明: 对t作归纳
情况: $t = \mathbf{c}$.
...证明$P(\mathbf{c})$...
情况: $t = x$.
...证明$P(x)$...
情况: $t = \mathbf{f}(t_1, ..., t_n)$.
...用$P(t_1), P(t_2), ..., P(t_n)$, 证明$P(\mathbf{f}(t_1, ..., t_n))$...
(对其他句法形式也类似.) $\square$

一阶逻辑公式

定义. 一个符号串φ是公式, 如果

$$\varphi = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)|\neg\varphi|\varphi \to \psi|\forall x\varphi(x),$$

其中$\mathbf{p}$是一个n-元谓词符号, $t_1, ..., t_n$是项, x是变量符号.

Peano算术的公式

定义. 一个符号串φ是L'上的公式, 如果

$$\varphi = t_1 = t_2 | \neg\varphi | \varphi \to \psi | \forall x \varphi(x),$$

其中t_1, t_2是项, x是变量符号.

基于公式结构的归纳定义

结构归纳地定义出现在一个公式φ中的自由变量的集合$var(\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
&var(p(t_1, ..., t_n)) = var(t_1) \cup \cdots \cup var(t_n);\\
&var(\neg\varphi) = var(\varphi);\\
&var(\varphi \to \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi);\\
&var(\forall x \varphi(x)) = var(\varphi(x)) - \{x\}.
\end{aligned}
$$

一个公式φ称为一个句子(sentence), 如果$var(\varphi) = \emptyset$.

自由变元

定义. 变元符号x在公式φ中是自由的(free, unbounded), 如果$x \in var(\varphi)$. 否则, x是囿界的(界定的, bounded)

变元的出现(occurrence)

在公式

$$\forall x(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0) \vee x = 2\mathbf{a}$$

中, 第一x的出现是受限的, 因为

$$x \notin var(\forall x(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0)),$$

而

$$x \in var(x = 2\mathbf{a}).$$

但

$$x \in var(\forall x(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0) \vee x = 2\mathbf{a}).$$

变元自由出现和受限出现

如同记号与符号之间的差别, 变元的出现与变元本身之间有着差别.

在一个公式中, 同一变元的某些出现是自由的, 某些出现是受限的.

语义

代数结构
项为代数结构的元素的名称;
公式表示代数结构中公式中出现的项所表示的元素所具有的代数性质.

解释

给定一个非空论域U，一个解释(interpretation)I是一个映射，使得

• 对每个常量符号**c**，$\mathbf{c}^I$，**c**在映射I下的像，是U中的一个元素;

• 对每个n-元函数符号**f**，$\mathbf{f}^I$，**f**在映射I下的像，是U上的一个n-元函数;

• 对每个m-元关系符号**p**，$\mathbf{p}^I$，**p**在映射I下的像，是U上的一个m-元关系.

解释

给定一个非空论域U，一个解释(interpretation)I是一个映射，使得
• 对每个常量符号**c**，**c**^{I}，**c**在映射I下的像，是U中的一个元素；
• 对每个n-元函数符号**f**，**f**^{I}，**f**在映射I下的像，是U上的一个n-元函数；
• 对每个m-元关系符号**p**，**p**^{I}，**p**在映射I下的像，是U上的一个m-元关系.
这样，非空论域U和解释I构成一个代数结构:

$$M = (U, \{c^I : c\}, \{f^I : f\}, \{p^I : p\}) = (U, I).$$

赋值

一个赋值v是从变量符号到U的一个映射.
这样我们可以归纳地定义一个项在解释I和赋值v下所对应于U中的元素.

项在解释和赋值下所对应的元素

设t是一个项，设$t^{I,v}$是t在解释I和赋值v下所对应于U中的元素.
则

$$t^{I,v} = \begin{cases} \mathbf{c}^I & 如果 t = \mathbf{c} \\ x^v & 如果 t = x \\ \mathbf{f}^I(t_1^{I,v}, \ldots, t_n^{I,v}) & 如果 t = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

这样每个项在解释I和赋值v下所对应U中的唯一一个元素.

项在解释和赋值下所对应的元素

引理. 对每个项t，$t^{I,v} \in U$.

$\square$

赋值之间的一个关系

给定一个变量符号集合X, 定义一个赋值上的关系$\equiv_X$:
两个赋值v和v'具有关系$\equiv_X$, 记为$v \equiv_X v'$, 如果对任何变量符号$x \notin X$, $v(x) = v'(x)$.
显然$\equiv_X$是所有赋值上一个等价关系.
$\equiv_X$是元语言中的一个关系.

公式在解释和赋值下的真假值

如果φ 在解释I和赋值v下是真的，说明φ描述的性质与结构M中关于元素之间关系的事实是吻合的；否则是不吻合的.

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果

1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, \ldots, t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果
1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

注意: $I, v \not\models \psi$用到了元语言中的否定:

$$not\ \ I, v \models \psi.$$

命题逻辑公式在赋值下的真假值

给定一个公式φ，φ在赋值v下是真的，记为$v \models \varphi$，如果

1. $v(p) = 1$，如果$\varphi = p$；
2. $v \not\models \psi$，如果$\varphi = \neg\psi$；
3. $v \models \psi$蕴涵$v \models \chi$，如果$\varphi = \psi \to \chi$.

Peano算术公式在解释和赋值下的真假值

$\mathbf{N} = (N, I)$是Peano算术的标准模型，其中N是自然数的集合，I是一个解释，使得

$$
\begin{aligned}
& I(\mathbf{0}) = 0; \\
& I(\mathbf{s}) = \lambda n.(n+1); \\
& I(+) = +^{\mathbf{N}},\ \ I(\cdot) = \cdot^{\mathbf{N}}; \\
& I(=) = \{(n,n) : n \in N\}.
\end{aligned}
$$

Peano算术公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果

1. $t_1^{I,v} = t_2^{I,v}$, 如果$\varphi = t_1 = t_2$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

公式在解释和赋值下的真假值

引理. (1) 对任何公式φ, 要么$I, v \models \varphi$要么$I, v \models \neg\varphi$.
(2) 不存在公式φ使得$I, v \models \varphi$, 并且$I, v \models \neg\varphi$.

$\square$

公式在解释下的真假值

给定一个公式φ，φ在解释I下是真的，记为$I \models \varphi$，如果对每个赋值v，$I, v \models \varphi$.
一个语句φ是有效的(valid)，记为$\models \varphi$，如果对任何解释I和赋值v，$I, v \models \varphi$.
一个公式φ是可满足的，如果存在解释I和赋值v使得$I, v \models \varphi$.