第三讲：不完全信息博弈

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2018年4月8日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

CASIA
自动化研究所
Institute of Automation

本讲提纲

- 博弈类型介绍
- 不完全信息静态博弈
- 不完全信息动态博弈
- 博弈案例探讨

不完全信息博弈

- 不完全（incomplete information）信息博弈：对于一个博弈，当参与人准备行动时，至少有一个参与人有关于该博弈的私人信息（private information），而其他人没有该信息。该私有信息称为参与人的类型（type）。
- 不完全信息博弈也成为贝叶斯博弈。
- 这种私有信息的存在使得关于博弈的损益函数并不全都是所有参与人的共同知识（common knowledge）。
- 实际中的不完全信息博弈举例
  - 打扑克时对方手中的底牌
  - 和陌生人接触对方的喜好
  - 购买商品商家的心理底价
  - 进入市场已有企业的成本

完全信息和完美信息之间的比较

- 完全信息：对所有局中人的策略（strategies）和损益（payoffs）函数等都完全了解；
- 完美信息：对所有局中人已有行动（actions）完全把握。
- 举例说明：
  - 完全并且完美信息博弈：
  - 完全但不完美信息博弈：
  - 不完全但完美信息博弈：
  - 不完全不完美信息博弈：
- 任何不完全信息博弈均可以从术语上转换为一个不完美信息博弈，只需要简答将“自然”引入作为一个局中人且支付函数受制于自然的位置发展（即自然的选择不可观察）。

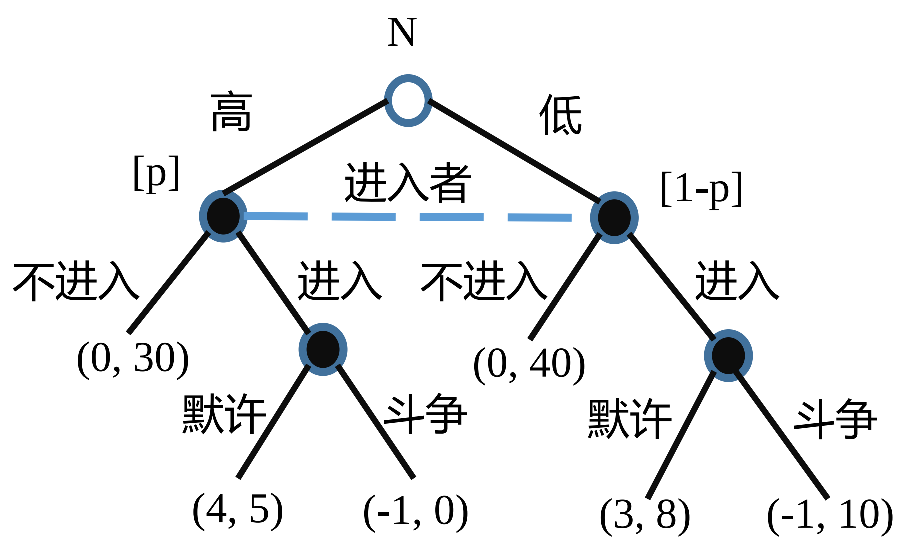
不完全信息博弈示例分析

- 不完全信息下市场进入阻挠博弈
  - 进入者不知道阻挠者的成本函数，不知道阻挠着决定默许或者斗争，自己可供选择的动作有进入和不进入
  - 阻挠者有两种可能的成本函数：低成本和高成本，知道进入者的成本，可供选择的动作有默许和斗争。
  - 两种情况下对应的不同策略组合的支付矩阵如下所示：
- 分析与求解
  - 高成本：双方最优行动是?
  - 低成本：双方最优行动是?
  - 不完全信息下呢?

进入者 \ 阻挠者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	4, 5	-1, 0	3, 8	-1, 10
不进入	0, 30	0, 30	0, 40	0, 40

不完全信息博弈示例分析

- 海萨尼（Harsanyi）转换：将不完全博弈转换为完全不完美信息博弈
  - 方法：通过引入一个虚拟的参与人——“自然” （Nature），来对博弈中的相关局中人的不确定性因素进行“行动”，得到其确定性结果（特性，type），然后告知相关局中人，使得博弈继续分析下去。
- 不完全信息下市场进入阻挠博弈进行海萨尼转换



不完全信息博弈的分类和求解

不完全信息静态博弈

- 定义与表示：同时、策略式、类型
- 示例与分析：竞争、招标、拍卖等
- 均衡与求解：贝叶斯纳什均衡

不完全信息动态博弈

- 定义与表示：顺序、展开式、类型
- 示例与分析：空谈博弈、谈判等
- 均衡与求解：精炼贝叶斯均衡

定义和表示

- 不完全信息静态博弈：博弈过程中并不是所有参与人都完全知道关于博弈的所有信息，并且参与人需要同时行动或者预先不知晓对方行动的博弈。
- 不完全静态博弈表示时由于信息的不完全性，需要反映出参与人的类型以及对于其他参与人类型的推断，因此其表示需要包含如下要素：
  - 参与人的类型空间：$\Theta_1, \dots, \Theta_n$
  - 对于其他参与人类型的推断：$p(\theta_{-1}|\theta_1), \dots, p(\theta_{-n}|\theta_n)$
  - 参与人的策略空间：$S_1(\theta_1), \dots, S_n(\theta_n)$
  - 参与人的损益函数：$\mu_1(s_1, \dots, s_n|\theta_1), \dots, \mu_n(s_1, \dots, s_n|\theta_n)$
- 因此不完全信息静态博弈可以表示为：$G = (\{\Theta_i\}, \{S_i(\Theta_i)\}, \{p(\theta_{-i}|\theta_i)\}, \{\mu_i(a_1, \dots, a_n|\theta_i)\})$

定义和表示

- 静态贝叶斯博弈的等价执行时间顺序

1. 自然赋予博弈各方类型向量$\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$
2. 自然告知每一个参与者i的应知相关类型
3. 参与者根据已知类型，从可行集S_i选择策略s_i
4. 每一个参与者i得到收益$\mu_i = \{s_1, \dots, s_n | \theta_i\}$

定义和表示

- 上述定义和表示的一些特例分析
  - 参与人i可能预先知道具有某些参与人类型信息，比如知道参与人j类型信息θ_j，这种情况下，参与人对于剩下的参与人的类型信息估计变为：$p\left(\theta_{-\{ij\}}|\theta_i,\theta_j\right)$。
  - 如果所有参与人的类型空间只包含一个元素，那么不完全信息静态博弈就退化为完全信息静态博弈。
  - 如果所有参与人的类型是完全相关的，即当参与人i观测到自己的类型是也就知道了其他参与人的类型，博弈也退化为完全信息静态博弈了。

定义和表示

- 上述定义和表示的一些特例分析（Cont.）
  - 如何推断$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$：贝叶斯法则

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=\frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{p(\theta_i)}=\frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{\sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}}p(\theta_{-i},\theta_i)}$$

当类型的分布是独立的：$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=p_i(\theta_{-i})$

  - 每个参与人自己的优化目标：给定参与人i只知道自己的类型θ_i，而不知道其他人的类型θ_i，参与人i将选择策略$s_i(\theta_i)$来最大化自己的期望效用，参与i人的期望效用函数定义如下：

$$v_i=\sum_{\theta_{-i}}p_i(\theta_{-i}|\theta_i)\mu_i(s_i(\theta_i),s_{-i}(\theta_{-i});\theta_i,\theta_{-i})$$

贝叶斯纳什均衡

- 贝叶斯纳什均衡：n人不完全信息静态博弈$G = (\{\Theta_i\}, \{S_i(\Theta_i)\}, \{p(\theta_{-i}|\theta_i)\}, \{\mu_i(a_1, \dots, a_n|\theta_i)\})$的纯策略贝叶斯纳什均衡是一个类型依存策略组合$\{s_i^*(\theta_i)\}_{i=1}^n$，其中每个参与人$i$在给定自己的类型$\theta_i$和其他人类型依存策略$s_{-i}^*(\theta_{-i})$的情况下最大化自己的期望效用函数$v_i$。换言之，策略组合$s^* = \left(s_1^*(\theta_1), \dots, s_n^*(\theta_n)\right)$是一个贝叶斯纳什均衡，如果对于所有的$i$，$s_i \in S_i(\theta_i)$，都有：

$$a_i^*(\theta_i) \in \underset{a_i}{\operatorname{argmax}} \sum p_i(\theta_{-i}|\theta_i)\mu_i(s_i, a_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$$

即没有参与人愿意改变自己的策略，即使这种改变只涉及一种类型下的一个行动。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性

- 纳什均衡的存在性定理是纳什均衡存在性定理的一个直接推广。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性定理

一个有限的静态贝叶斯博弈（即博弈中n是有限的，并且$(\theta_1, \dots, \theta_n)$，$\left(S_1(\theta_i), \dots, S_n(\theta_n)\right)$都是有限集）存在贝叶斯纳什均衡，其中的纳什均衡也可以包含了混合策略。

- 证明过程同完全信息下有限博弈中混合策略纳什均衡存在性证明基本一致。

贝叶斯纳什均衡应用举例

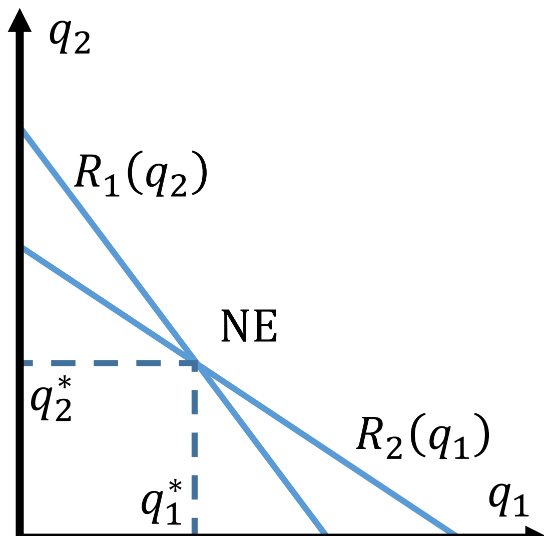
- 库诺特（Cournot）双寡头竞争模型回顾
  - 两寡头（假定A和B）生产同质产品，每个企业的策略式选择产量，支付函数是利润，是产量的函数。
  - 形式化：$q_i \in [0,\infty)$表示第i个企业的产量，$C(q_i)$表示成本函数，$p = P(q_1 + q_2)$是逆需求函数（产品价格），第i个企业的利润函数为：$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C(q_i), i = 1,2$
  - (q_1^*, q_2^*)是纳什均衡产量，则：

$$\begin{cases} q_1^* \in \operatorname{argmax} \pi_1(q_1, q_2^*) = q_1 P(q_1 + q_2^*) - C(q_1) \\ q_2^* \in \operatorname{argmax} \pi_2(q_1^*, q_2) = q_2 P(q_1^* + q_2) - C(q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = P(q_1 + q_2) + q_1 P'(q_1 + q_2) - C'(q_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = P(q_1 + q_2) + q_2 P'(q_1 + q_2) - C'(q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = R_1(q_2) \\ q_2^* = R_2(q_1) \end{cases}$$

定义了双方的反映函数



贝叶斯纳什均衡应用举例

- 不完全信息库诺特（Cournot）寡头竞争模型
  - 参与人的成本函数互不知道，可令参与人的类型是成本函数。假设拟需求函数形式为$P(q_1,q_2)=a-q_1-q_2$，每个企业具有不变的单位成本，令企业i单位成本为c_i，则其利润为$\pi_i=q_i(a-q_1-q_2-c_i)$。
  - 假设参与人1成本c_1是共同知识，参与人2成本可能是c_2^L或者c_2^H；企业2知道自己的成本是c_2^L还是c_2^H；企业1只知道$c_2=c_2^L$的概率是μ，$c_2=c_2^H$的概率是$(1-\mu)$，μ是共同知识。
  - 进一步为了直观，假定$a=2, c_1=1, c_2^L=3/4, c_2^H=5/4, \mu=1/2$。

贝叶斯纳什均衡应用举例

- 不完全信息库诺特（Cournot）寡头竞争模型
  - 给定企业2知道企业1的成本，企业2将选择q_2最大化利润函数:

$$\pi_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - c_2)$$

令$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$，得到：$q_2^*(q_1; c_2) = \frac{1}{2}(a - c_2 - q_1)$

$$q_2^L = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - q_1\right), q_2^H = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - q_1\right)$$

  - 企业1不知道企业2的成本，企业1将最大化期望利润函数:

$$\mathbb{E}\pi_1 = \frac{1}{2}q_1(a - q_1 - q_2^L - c_1) + \frac{1}{2}q_1(a - q_1 - q_2^H - c_1)$$

令$\frac{\partial \mathbb{E}\pi_1}{\partial q_1} = 0$，得到：$q_1^*(q_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}q_1^L - \frac{1}{2}q_1^H\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}q_2)$

  - 根据纳什均衡，$q_1^*(q_2)$和$q_2^*(q_1; c_2)$达到均衡时满足：

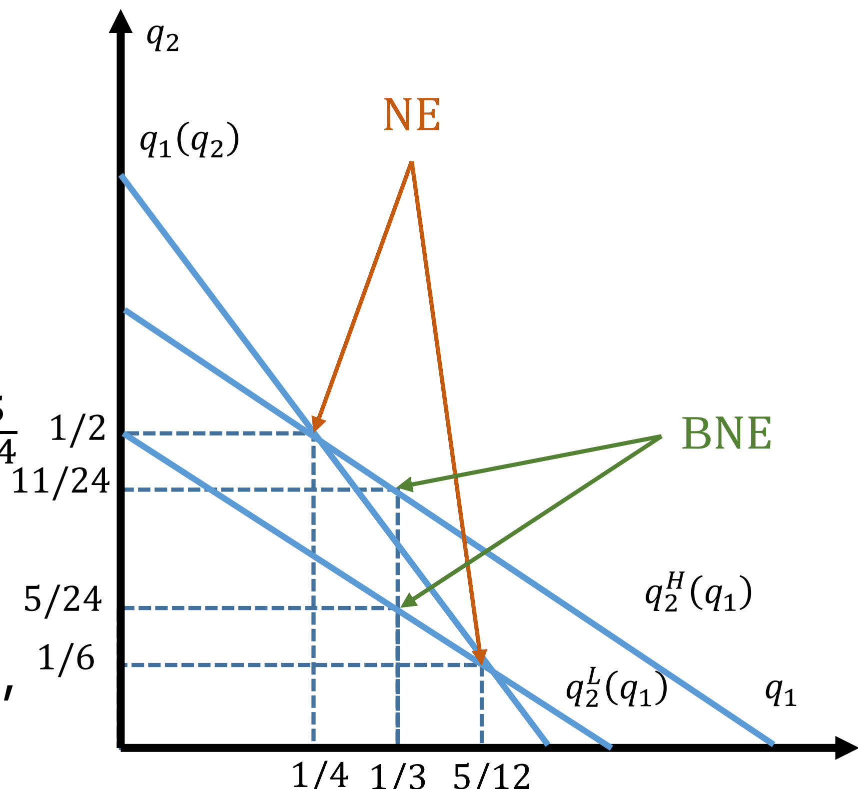
$$q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$

贝叶斯纳什均衡应用举例

- 不完全信息库诺特（Cournot）寡头竞争模型
  - 在完全信息条件下，企业1知道企业2的成本函数，双方的反应函数为：$q_1^* = 1/2\,(1 - q_2)$，$q_2^* = 1/2\,(5/4 - q_1)$
  - 那么，企业2低成本和高成本时的纳什均衡分别为：
    - 低成本：$q_{1L}^{NE} = 1/4\,, q_{2L}^{NE} = 1/2$
    - 高成本：$q_{1H}^{NE} = 5/12\,, q_{2H}^{NE} = 6$
  - 两种均衡之间的关系：

$$q_{1L}^{NE} = \frac{1}{4} < q_1^* = \frac{1}{3};\ q_{2L}^{NE} = \frac{1}{2} > q_2^{L*} = \frac{11}{24}$$

$$q_{1H}^{NE} = \frac{5}{12} > q_1^* = \frac{1}{3};\ q_{2H}^{NE} = \frac{1}{6} < q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$



总结：当企业1不知道c_2时，只能生产预期的最优产量，高于完全信息下低成本对手的产量，低于高成本对手的产量，企业2相应地做出最优反应。

贝叶斯纳什均衡应用举例

- 不完全信息下的公共产品提供博弈：问题描述
  - 两个参与人，$i = 1, 2$。
    - 同时决定是否提供公共产品
    - 参与人 i提供产品的成本为c_i
    - 决策：提供$a_i = 1$或不提供$a_i = 0$
    - 支付矩阵见右图
    - 成本c_1和c_2具有独立、相同的定义在$[\underline{c}, \overline{c}]$上的分布函数$F(\cdot)$，

参与人2 \ 参与人1	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1, 1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1, 1$
不提供	$1, 1\text{-}c_2$	$0, 0$

  - 假设：参与人知道自己的成本，不知道对方的成本，双方成本函数的分布是共同知识，公共产品的好处是双方共同知识。
  - 博弈策略函数$a_i(c_i)$是从$[\underline{c}, \overline{c}]$到$\{0,1\}$的一个函数，其中0表示不提供，1表示提供。参与人i的支付函数为：

$$u_i(a_i, a_j, c_i) = \max(a_1, a_2) - a_i c_i$$

  - 最优策略组合$(a_1^*(\cdot), a_2^*(\cdot))$是使得对于每一个$i$和每一个可能的$c_i$，$a_1^*(\cdot)$最大化参与人$i$的期望效用函数$E_{c_j} u_i = (a_i, a_j^*(c_j), c_i)$

贝叶斯纳什均衡应用举例

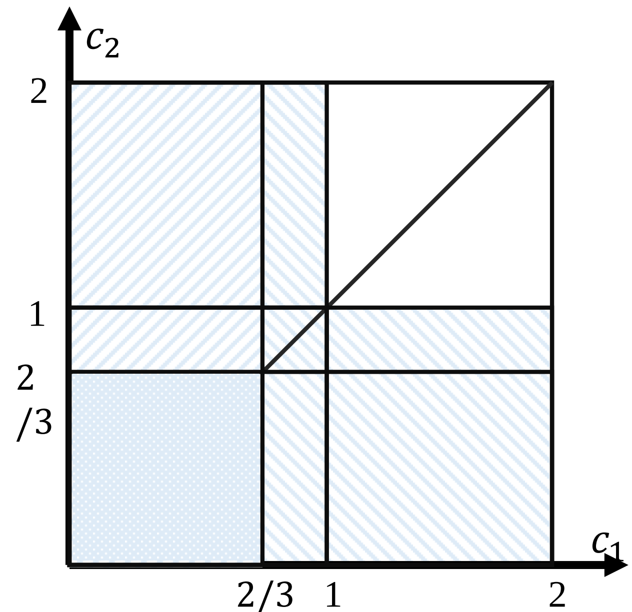
- 不完全信息下的公共产品提供博弈：贝叶斯均衡求解
  - 令$z_j = \mathrm{Prob}\left(a_j^*(c_j) = 1\right)$表示均衡状态下参与人$j$的提供的概率
  - $1 - z_j$：表示均衡状态下参与人j不提供的概率
  - 参与人i提供时的预期收益：$\left(1 - z_j\right)(1 - c_i) - z_j(1 - c_i) = 1 - c_i$；参与人$i$不提供的预期收益：$\left(1 - z_j\right) \cdot 0 + z_j \cdot 1 = zj$
  - 参与人i提供的条件：$1 - c_i > z_j$，即：当$c_i < 1 - z_j$，$a_i^*(c_i) = 1$；$c_i > 1 - z_j$，$a_i^*(c_i) = 0$；分割点$c_i^* = 1 - z_j$
  - 因为$z_j = \mathrm{Prob}\left(\underline{c} \le c \le c_j^*\right) = F\left(c_j^*\right)$，则有：$c_i^* = 1 - F\left(c_j^*\right)$
  - 由于对称性，c_i^*和c_j^*都须满足：$c^* = 1 - F\left(1 - F(c^*)\right)$
  - 当$F(\cdot)$是[0,2]上的均匀分布时，$c^* = 2/3$
- 贝叶斯纳什均衡
  - 当$c_i \le c^* = 2/3$时，参与人i提供；当$c_i > c^* = 2/3$时，不提供

贝叶斯纳什均衡应用举例

- 不完全信息下的公共产品提供博弈：与完全信息下比较
  - 当c_1和c_2都小于1时：斗鸡博弈
    - 均衡点1：（提供，不提供）
    - 均衡点2：（不提供，提供）

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1$, $1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1$, 1
不提供	1, $1\text{-}c_2$	0, 0

  - 当$c_1 < 1, c_2 > 1$或$c_2 < 1, c_1 > 1$时：智猪博弈
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（提供，不提供）
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（不提供，提供）
  - 当c_1和c_2都大于1时：囚徒博弈
    - 均衡点：（不提供，不提供）
- 具体决策区域和相互关系见右图



贝叶斯纳什均衡应用举例

- 抓钱博弈：混合纳什均衡
  - 桌上放了一块钱，两个人伸手去抓
  - 同时抓，每人罚一块
  - 都不抓，什么都不得
  - 只有一人抓，得一块

参与人1 \ 参与人2	抓	不抓
抓	-1, -1	1, 0
不抓	0, 1	0, 0

- 均衡分析：两个非对称纯策略均衡（一人抓，一人不抓），一个对称混合策略均衡（两人同时以1/2的概率抓）
- 不完全信息抓钱博弈
  - 参与人 i 具有私有信息θ_i
  - θ_i在$[-\epsilon, +\epsilon]$区间上均匀分布

参与人1 \ 参与人2	抓	不抓
抓	-1, -1	$1+\theta_1, 0$
不抓	$0, 1+\theta_2$	0,0

贝叶斯纳什均衡应用举例

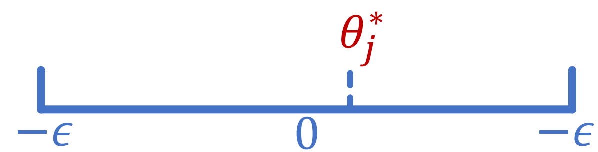
- 不完全信息抓钱博弈
  - 对于参与人i，考虑如下纯战略：
    - 如果$\theta_i \geq \theta_i^*$，选择抓
    - 如果$\theta_i < \theta_i^*$，选不抓
  - 参与人i选择抓（用1表示）的期望利润为：

参与人1 \ 参与人2	抓	不抓
抓	-1, -1	$1+\theta_1, 0$
不抓	$0,1+\theta_2$	0,0

$$u_i(1) = \left(1 - \frac{\theta_j^* + \epsilon}{2\epsilon}\right)(-1) + \left(\frac{\theta_j^* + \epsilon}{2\epsilon}\right)(1+\theta_i)$$

令$u_i(1)=0$，得到$2\theta_j^* + \theta_j^*\theta_i^* + \epsilon\theta_i^* = 0$

由于对称性$\theta_i^* = \theta_j^*$，得到：$\theta_i^* = \theta_j^* = 0$



当$\epsilon \to 0$，上述不完全信息纯战略贝叶斯均衡就收敛为一个完全信息的混合战略纳什均衡。

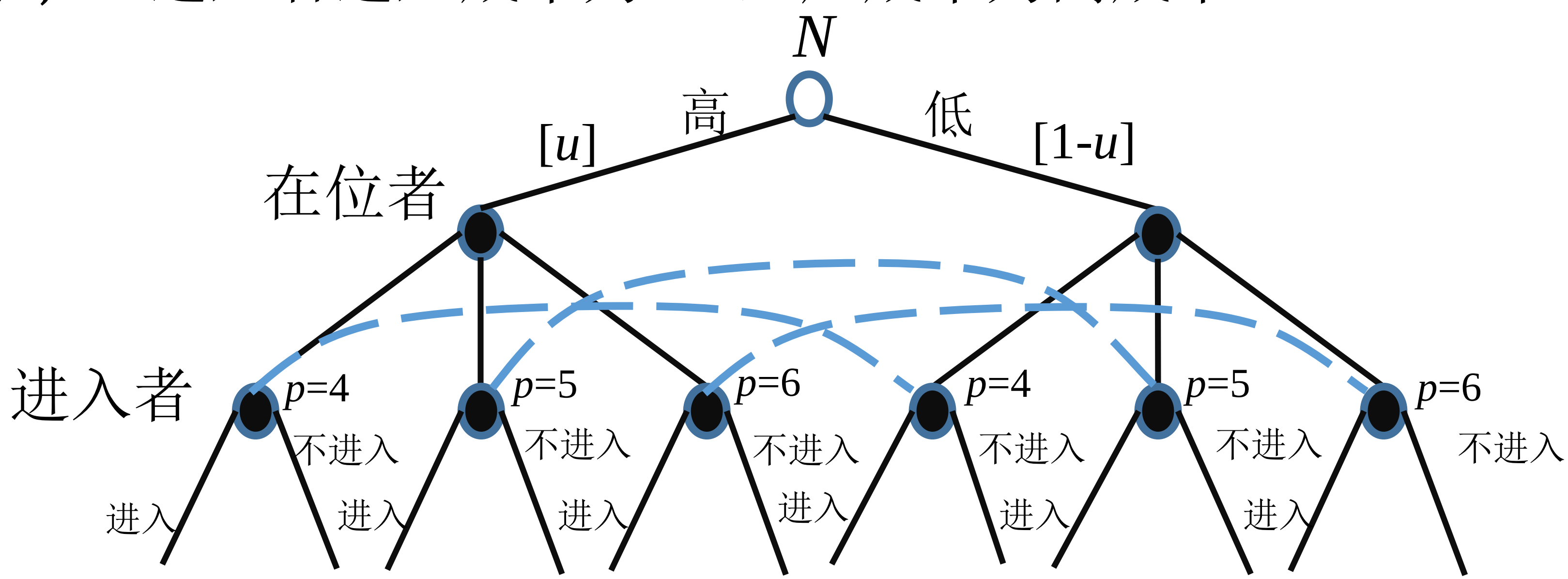
- 定理：完全信息情况下的混合战略均衡可以解释为不完全信息情况下的纯策略均衡的极限（海萨尼，1973）。

定义和表示

- 不完全信息动态博弈：博弈过程中参与人预先不知道关于博弈的所有信息，参与人的行动有先后顺序，且后行动者能够观察到先行动者行动的博弈。
- 不完全信息动态博弈的展开式表示：
  - 参与人集合：$i \in \Gamma, \Gamma=(1,2,\ldots,n)$，用$N$表示自然
  - 参与人的行动顺序：谁在什么时候行动
  - 参与人的行动空间：每次行动时，有什么选择
  - 信息集合：每次行动结束，参与人知道些什么
  - 效益函数：每次行动时，参与人知道什么
  - 外生事件（即自然选择）的概率分布

举例:不完全信息下的市场进入阻挠博弈

- **博弈描述**
  - 两阶段博弈：第一阶段在位者垄断市场，进入者考虑是否进入；第一阶段如果进入者进入，两者进行库诺特博弈，否则在位者继续垄断。在位者有高和低两种成本，有三种价格选择$p=$ 4,5,6。进入者进入成本为2，生产成本为高成本。



第一阶段 (2, 0) (2, 0) (6, 0) (6, 0) (7, 0) (7, 0) (6, 0) (6, 0) (9, 0) (9, 0) (8, 0) (8, 0)

第二阶段 (3, 1) (7, 0) (3, 1) (7, 0) (3, 1) (7, 0) (5, -1)(9, 0) (5, -1)(9, 0) (5, -1)(9, 0)

举例:不完全信息下的市场进入阻挠博弈

- 沿用静态博弈的思路:
  - 对于在位者而言，第二阶段的收益都是相同的。从第一阶段的结果来看，如果在位者是高成本的，它的最优选择是$p = 6$;如果在位者是低成本的，它的最优选择是$p = 5$。
  - 对于进入者而言，如果在位者是高成本的，它的最优选择是进入，如果在位者是低成本的，它的最优选择是不进入。而只有进入者认为在位者是高成本的概率u大于1/2时，才会选择进入。
  - 与静态博弈不同的是，在观察到在位者第一阶段的价格选择后，进入者可以修正对在位者的先验概率u，因为在位者的价格选择可能包含着有关其成本函数的信息。
  - 因此，尽管$p = 6$对高成本在位者是有利可图的，但这将导致进入者推断在位者是高成本的，因此进入者将选择进入。因此高成本的在位者在第一阶段就不会选择$p = 6$。
- 因此，采用静态分析的方法会得到不合理的均衡。

不完全信息动态博弈

- 基本思路
  - 参与人的类型，只有参与人自己知道。
  - 后行动者可以通过观察先行动者所选择的行动来推断其类型或修正对其类型的先验信念（概率分布），选择自己的最优行动。
  - 先行动者预测到自己的行为将被后行动者所利用，就会设法选择传递对自己最有利的信息。
  - 参与人双方都只知道对方行动的类型以及采取这样行动的概率，然后双方不断试探，根据对方的反应调整自己的策略，最终取得最优决策。总之，**不完全信息动态博弈不仅是参与人选择行动的过程，而且是参与人不断修正信念的过程**。
- 直观例子
  - 黔驴技穷
  - 信号传递

定义和表示

- 不完全信息动态博弈的执行顺序

1. 自然赋予博弈各方类型向量$\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$

2. 参与人得知自己的类型，但不知其他人的类型

3. 第一个行动者根据类型行动，传递出某种信息

4. 下一个行动者根据上个行动者的行动更新对其类型的先验推断，得到后验推断，然后做出行动

5. 下来的行动者不断重复上述过程直到博弈截止

贝叶斯法则（Bayesian's Rule）

- 贝叶斯法则的基本思想
  - 当面临不确定性时，在任何一个时间点上，人们对某件事情发生的可能性有一个初步判断。然后人们会根据新的信息来修正这一判断。修正之前的初步判断称为**“先验概率”**，修正之后的判断称为**“后验概率”**。
  - 贝叶斯法则是根据**新信息**从**先验概率**得到**后验概率**的基本方法。
  - 贝叶斯法则并不是一个技术性法则，而是人们修正信念的唯一合理方法。

Likelihood：似然函数
How probable is the evidence given that our hyper thesis is true?

Prior：先验概率
How probable was our hypothesis before observing the evidence?

Posterior：后验概率 $P(H|e) = \dfrac{P(e|H)P(H)}{P(e)}$

How probable is our hypothesis given the observed evidence?
(Not directly computable)

Marginal：边界分布
How probable is the new evidence under all possible hypotheses?
$P(e) = \sum_i P(e|H_i)P(H_i)$

贝叶斯法则（Bayesian's Rule）

- 贝叶斯法则的推导过程（以不完全信息博弈为例）
  - $\{\theta^k\}_{k=1}^K$为参与人可能的类型集合，$\{a^h\}_{h=1}^H$为可能的行动集合
  - 则参与人 i 属于θ^k的先验概率$p(\theta^k) \geq 0, \sum_{k=1}^K p(\theta^k) = 1.$
  - 假设 i属于θ^k，选择 a^h的条件概率为 $p(a^h|\theta^k)$，则边际概率为 $\mathrm{P}(a^h) = \sum_{k=1}^K p(a^h|\theta^k)p(\theta^k)$
  - 贝叶斯法则推导过程：假如观测到了 i选择了行动a^h，那么 i 属于类型θ^k的后验概率为：

$$p(\theta^k|a^h) = \frac{p(\theta^k, a^h)}{\mathrm{P}(a^h)} = \frac{p(a^h|\theta^k)p(\theta^k)}{\sum_{k=1}^K p(a^h|\theta^k)p(\theta^k)}$$

  - 贝叶斯法则要求$\mathrm{P}(a^h) > 0$，否则后验概率没有定义。如果$\mathrm{P}(a^h) = 0$,则我们允许$p(\theta^k|a^h)$取[0,1]之间任何值。
  - 在动态博弈中，$\mathrm{P}(a^h) = 0$对应非均衡路径上的信息集。

贝叶斯法则（Bayesian's Rule）

- 贝叶斯法则举例分析：好人坏人的例子
  - 我们把所有的人分为好人（GP）和坏人（BP），所有的事分为好事（GT）和坏事（BT），那么一个人干好事的概率$p(\mathrm{GT})$等于他是好人的概率$p(\mathrm{GP})$乘以好人做好事的概率$p(\mathrm{GT}|\mathrm{GP})$，加上他是坏人的概率$p(\mathrm{BP})$乘以坏人做好事的概率$p(\mathrm{GT}|\mathrm{BP})$

$$p(\mathrm{GT}) = p(\mathrm{GT}|\mathrm{GP})p(\mathrm{GP})+p(\mathrm{GT}|\mathrm{BP})p(\mathrm{BP})$$

  - 假设我们观测到了一个人干了一件好事，那么这个人是好人的后验概率是：

$$p(\mathrm{GP}|\mathrm{GT}) = \frac{p(\mathrm{GT}|\mathrm{GP})p(\mathrm{GP})}{p(\mathrm{GT})}$$

贝叶斯法则（Bayesian's Rule）

- 贝叶斯法则举例分析：好人坏人的例子
  - 假设我们认为一个人是好人的先验概率是1/2，那么观察到他干了一件好事之后，我们如何修正他是好人的先验概率依赖于我们认为这件好事好到了什么程度。
  - 第一种情况：这是一件非常好的好事，好人一定干，坏人绝对不可能干，那么：

$$p(\mathrm{GP}|\mathrm{GT}) = \frac{1\times1/2}{1\times1/2+0\times1/2}=1$$

  - 第二种情况：这是一件非常一般的好事，好人会干，坏人也会干，那么：

$$p(\mathrm{GP}|\mathrm{GT}) = \frac{1\times1/2}{1\times1/2+1\times1/2}=1/2$$

  - 第三种情况：这是一件不错的好事，好人肯定会干，坏人有可能干，也可能不干，那么

$$p(\mathrm{GP}|\mathrm{GT}) = \frac{1\times1/2}{1\times1/2+1/2\times1/2}=3/4$$

精炼贝叶斯均衡

- 精炼贝叶斯的相关概念定义
  - 假定有n个参与人，参与人i的类型为θ_i，$p(\theta_{-i}|\theta_i)$是参与人i认为其他$n-1$个参与人属于类型$\theta_{-i}=(\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\ldots,\theta_n)$的先验概率。
  - 令$S_i=\{s_i(\theta_i)\}$是参与人i的策略空间，s_i是一个特定的策略。
  - 令$a^h_{-i}=\left(a^h_1,\ldots,a^h_{i-1},a^h_{i+1},\ldots,a^h_n\right)$是在第h个信息集上参与人i观测到的其他个$n-1$参与人的行动组合，这个行动组合是策略组合$s_{-i}=(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i-2},\ldots,s_n)$的一部分。
  - 令$\tilde{p}_i\left(\theta_{-i}|a^h_{-i}\right)$是在观测到 a^h_{-i}的情况下参与人 i认为其他 $n-1$ 个参与人属于类型 θ_{-i} 的后验概率。$\tilde{p}_i$ 是所有后验概率的集合，即 $\tilde{p}_i$包含了参与人 i在每一个信息集上的后验概率。
  - 令$u_i(s_i,s_{-i},\theta_i)$是参与人 i的效用函数。

精炼贝叶斯均衡

- 精炼贝叶斯的相关概念定义
  - 假定有n个参与人，参与人i的类型为θ_i，$p(\theta_{-i}|\theta_i)$是参与人i认为其他$n-1$个参与人属于类型$\theta_{-i}=(\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\ldots,\theta_n)$的先验概率。
  - 令$S_i=\{s_i(\theta_i)\}$是参与人i的策略空间，s_i是一个特定的策略。
  - 令$a_{-i}^h=\left(a_1^h,\ldots,a_{i-1}^h,a_{i+1}^h,\ldots,a_n^h\right)$是在第h个信息集上参与人i观测到的其他个$n-1$参与人的行动组合，这个行动组合是策略组合$s_{-i}=(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$的一部分。
  - 令$\tilde{p}_i\left(\theta_{-i}|a_{-i}^h\right)$是在观测到 a_{-i}^h的情况下参与人 i认为其他 $n-1$ 个参与人属于类型 θ_{-i} 的后验概率。$\tilde{p}_i$ 是所有后验概率的集合，即 $\tilde{p}_i$包含了参与人 i在每一个信息集上的后验概率。
  - 令$u_i(s_i,s_{-i},\theta_i)$是参与人 i的效用函数。

精炼贝叶斯均衡

- 精炼贝叶斯均衡定义：

精炼贝叶斯均衡

精炼贝叶斯均衡是一个策略组合$s^*(\theta) = \left(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_n^*(\theta_n)\right)$和一个后验概率组合$\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)$，满足：

（P）对于所有的参与人i，在每一个信息集合h，

$$s_i^*(s_{-i}, \theta_i) \in \underset{s_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{\theta_{-i}} \tilde{p}_i\left(\theta_{-i} | a_{-i}^h\right) u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$$

（B）$\tilde{p}_i\left(\theta_{-i} | a_{-i}^h\right)$是使用贝叶斯法则从先验概率$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$、观测到的$a_{-i}^h$和最优策略$s_{-i}^*(*)$得到的（在可能的情况下）。

精炼贝叶斯均衡

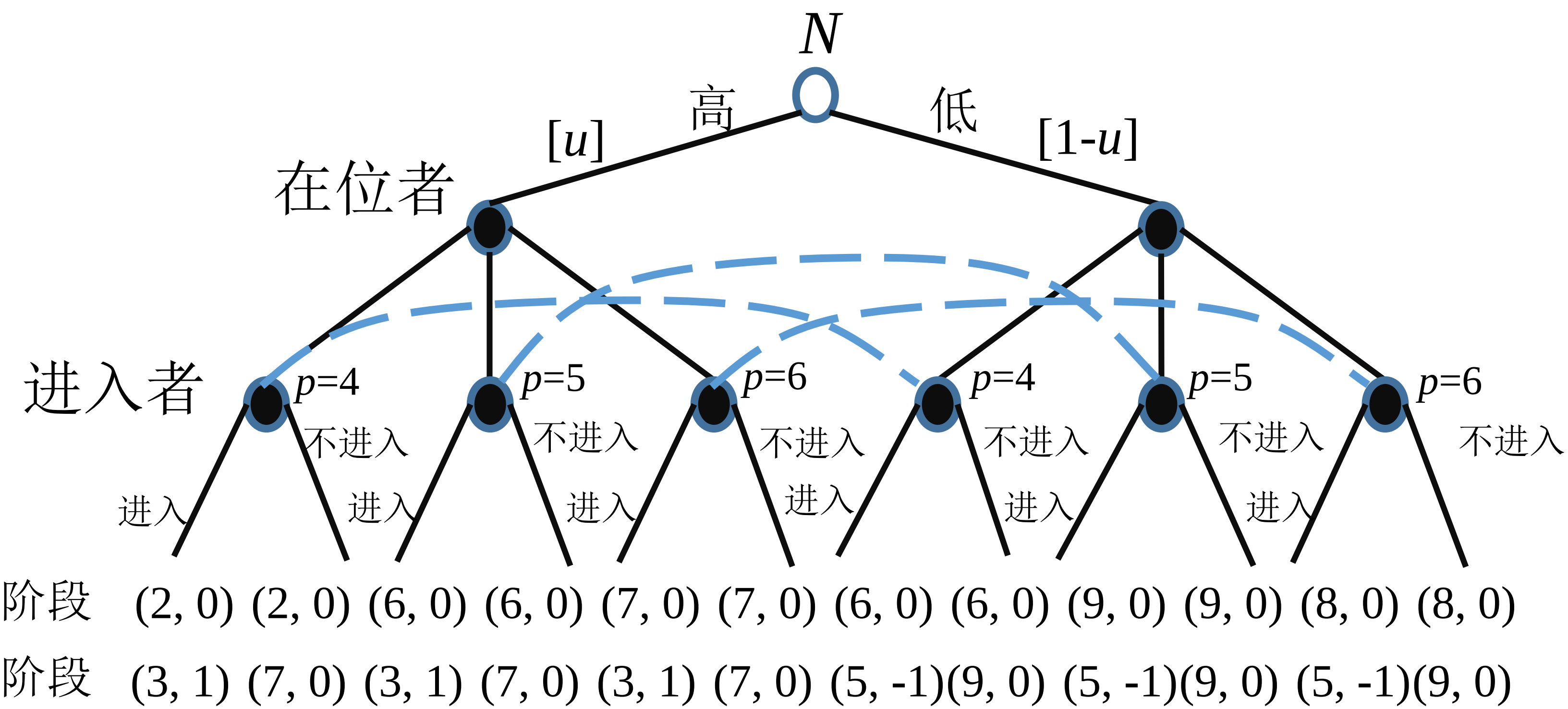
- 关于贝叶斯纳什均衡的一些解释
  - （P）是精炼条件 (perfectness condition)，给定其他参与人的策略s_{-i}和参与人的后验概率$\tilde{p}_i(\theta_{-i}|a^h_{-i})$，每个参与人 i的策略在所有从信息集 h开始的**后续博弈**上都是最优的，即所有参与人都是序贯理性的 (sequentially rational)。
  - （B）对应的是贝叶斯法则的运用。如果参与人是多次行动的，修正概率涉及贝叶斯法则的重复运用。其中策略本身是不可观测的，因此参与人 i 只能根据观测到的行动组合 a_{-i} 修正概率，但它假定所观测到的行动是最优策略s^*_{-i}规定的行动。
  - “在可能的情况下”：如果a_{-i}不是均衡策略下的行动，即a_{-i}是一个零概率事件。根据贝叶斯法则，任何$\tilde{p}_i(\theta_{-i}|a^h_{-i})$都是允许的，只要它与均衡策略相容。

精炼贝叶斯均衡

- 贝叶斯纳什均衡定义的关键
  - 精炼贝叶斯均衡是均衡策略和均衡信念的结合：给定信念$\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_n)$，策略$s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$是最优的；给定策略$s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$，信念$\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_n)$是使用贝叶斯法则从均衡策略和所观测到的行动得到的。
  - 因此，精炼贝叶斯均衡是一个不动点，后验概率依赖于策略，策略依赖于后验概率，因此完全信息博弈中使用的**逆向归纳法**（backward induction）在不完全信息中不再适用（如果我们不知道先行者如何选择，我们就不可能知道后行动者应该如何选择），必须使用**前向法**（forward manner）进行贝叶斯修正。

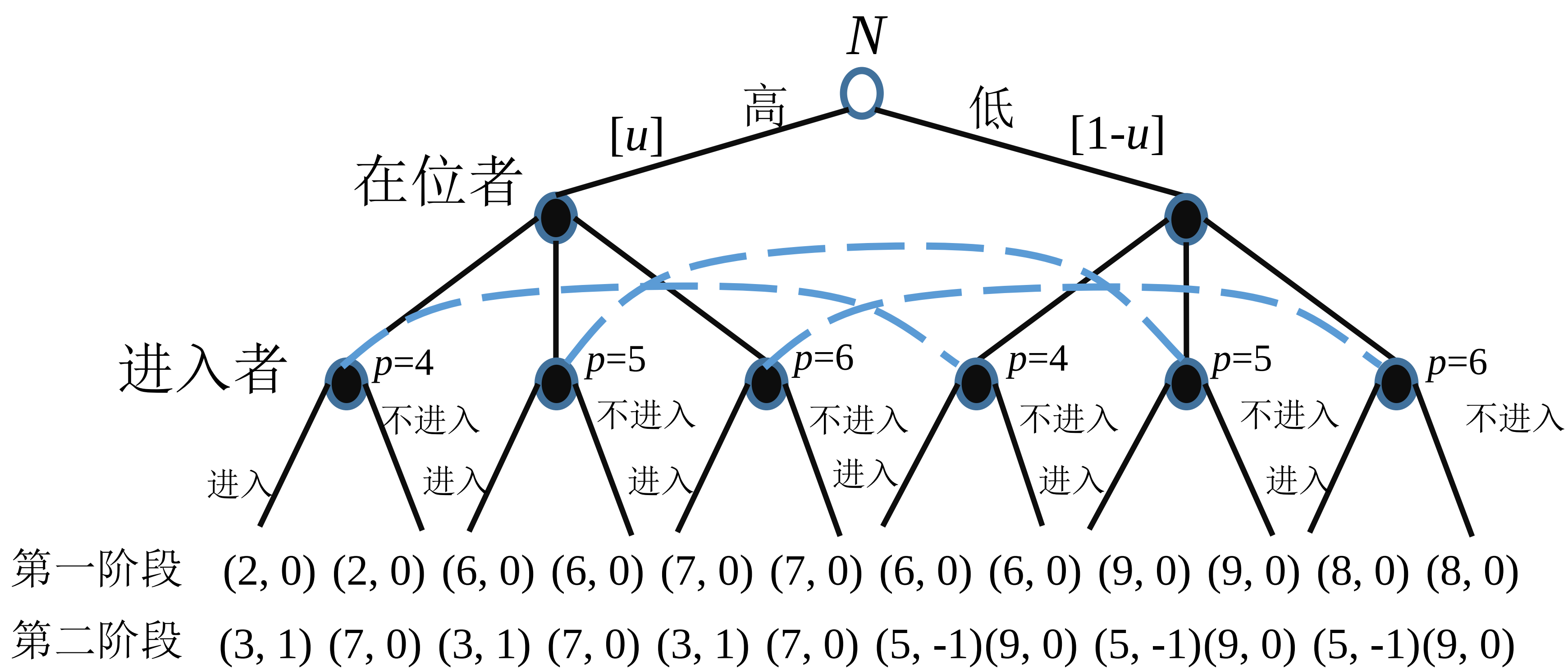
示例回顾：不完全信息市场进入阻挠博弈

- 在位者有两个潜在类型：高成本和低成本；进入者只有一个类型：进入成本；因此只有进入者需要修正信念。
- 令$\tilde{u}(p)$是进入者在观测到在位者的价格选择后认为在位者是高成本的概率（p代表在位者的价格而非概率）。



示例回顾：不完全信息市场进入阻挠博弈

- 首先证明在位者选择单阶段最优垄断价格（即高成本者选择$p = 6$，低成本者选择$p = 5$）并不是精炼贝叶斯均衡：因为即使在高成本时选择$p = 5$可以获得更大收益（13=6+7>7+3=10）。



示例回顾：不完全信息市场进入阻挠博弈

- 下来证明：当$u < 1/2$时，精炼贝叶斯均衡是：不论成本高低，在位者选择$p = 5$；当观测到$p = 6$时，进入者选择进入，否则不进入。
- 证明：首先容易得到在位者无论成本高低，选择$p = 5$都是最优的；在位者选择$p = 5$时，进入者不能从观测到的价格得到任何新的信息，即：$\tilde{u}(5) = \frac{1\times u}{(1\times u)+1\times(1-u)} = u < \frac{1}{2}$；进入者选择进入的期望收益是$u \times 1 + (1-u) \times (-1) = 2u - 1 < 0$，选择不进入的期望收益是0，因此进入者的最优策略是不进入。
- 上述均衡称为**混同均衡**，因为两类在位者选择相同的价格，用于隐藏自己是高成本这个事实。

示例回顾：不完全信息市场进入阻挠博弈

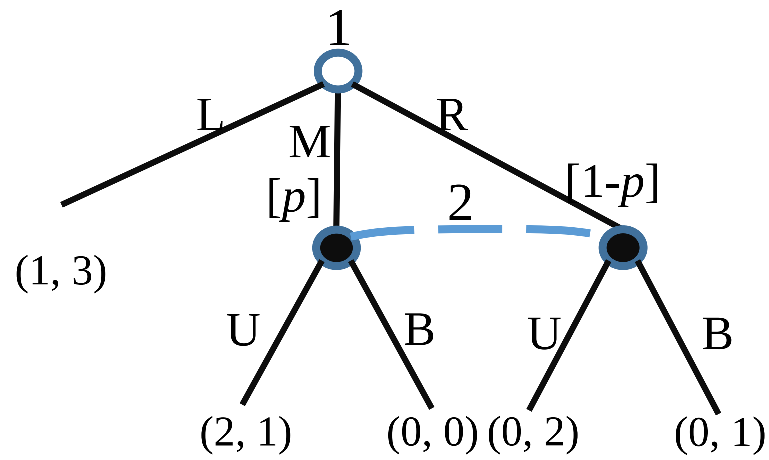
- 最后证明：当$u > 1/2$时，精炼贝叶斯均衡是：低成本在位者选择$p = 4$，高成本在位者选择$p = 6$；当观测到$p = 4$时，进入者选择不进入，否则进入。
- 证明：首先不同类型在位者选择相同价格$p = 5$，进入者将进入。下来考虑低成本在位者：选择$p = 4$，进入者不进入，在位者收益为6+9；选择$p = 5$，进入者进入在位者，收益为9+5；因此$p = 4$最优；考虑高成本在位者：选择$p = 4$，进入者不进入，在位者收益为2+7；选择$p = 6$，进入者收益7+3。最后考虑进入者的后验概率和策略。看到$p = 6$，选择进入；看到$p = 4$，选择不进入。
- 上述均衡称为**均衡**，因为两类在位者选择不同的价格，用于证明自己真实的成本。

不完美信息的精炼贝叶斯均衡

- 因为不完全信息博弈能够通过模型转换为不完美信息博弈，因此精炼贝叶斯均衡也适用于不完美信息博弈。
- 贝叶斯法则在不完美信息博弈中的运用
  - 在不完全信息博弈中，参与人根据观测到其他参与人的行动和其他参与人的最优战略，使用贝叶斯法则修正对其他参与人类型的信念。
  - 在不完美信息博弈中，参与人观测不到其他参与人的行动，通过观测到博弈是否进入自己的信息集，修正自己处于该信息集的每一个决策结的概率。
  - 尽管贝叶斯法则在非均衡路径上没有定义，但如何规定非均衡路径上的后验概率是至关重要的。

不完美信息的精炼贝叶斯均衡

- 不完美信息博弈举例1：
  - 参与人1首先行动，选择L、M或R
  - 选择L，博弈结束；
  - 选择M或R，参与人2选择U或B

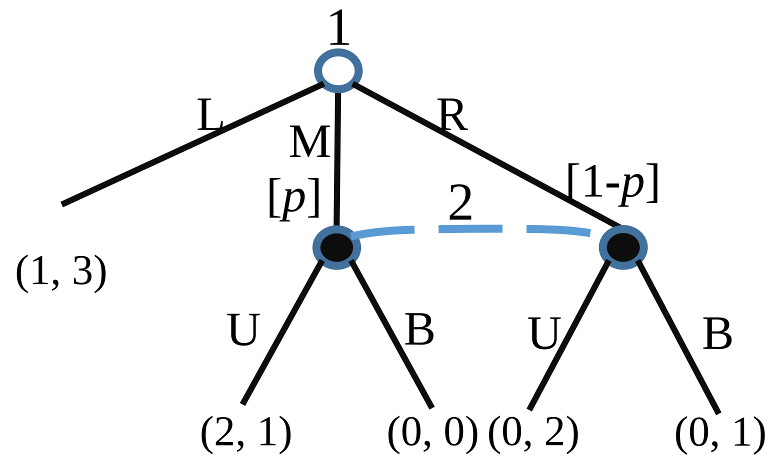


- 不完美信息
  - 参与人2在作出自己决策时（U or B）时并不知道参与人 1 选择了M 或是 R，尽管他知道 L没有被选择。
- 均衡分析
  - 两个纯策略纳什均衡(L, B)和(M, U)
  - 这两个同时也是子博弈精炼纳什均衡
  - 但(L, B)却不是合理的均衡
  - 需要通过精炼贝叶斯均衡剔除

参与人2 / 参与人1	U	B
L	1, 3	1, 3
M	2, 1	0, 0
R	0, 2	0, 1

不完美信息的精炼贝叶斯均衡

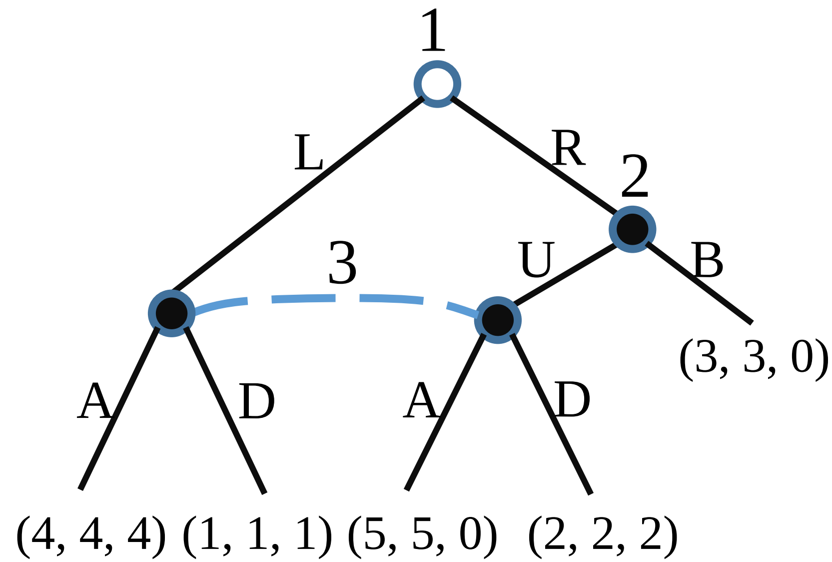
- 不完美信息博弈举例1：
  - 参与人1首先行动，选择L、M或R
  - 选择L，博弈结束；
  - 选择M或R，参与人2选择U或B



- 通过精炼贝叶斯均衡剔除(L,B)
  - 当博弈进入到参与人2的信息集时，必须有一个参与人1选择M或者R的概率分布，假设其为p和$1-p$：
    - 参与人2选择U收益：$p \times 1 + (1-p) \times 2 = 2 - p$
    - 参与人2选择B收益：$p \times 0 + (1-p) \times 1 = 1 - p$
    - 由于$2 - p > 1 - p$，故参与人2一定会选择U，因此贝叶斯均衡(L, B)依赖于一个不可置信的危险：(L, U)
  - 给定参与人2的最优策略U，参与人1的最优策略是M，因此（M, U）是一个精炼贝叶斯均衡。

不完美信息的精炼贝叶斯均衡

- 不完美信息博弈举例2：
  - 三个参与人，$i = 1, 2, 3$；
  - 1首先行动，选择L或R
  - 1选择R，2选择U或B（结束）
  - 1选择L，或2选择U，3选择A或D
- 不完美信息：参与人3的信息集

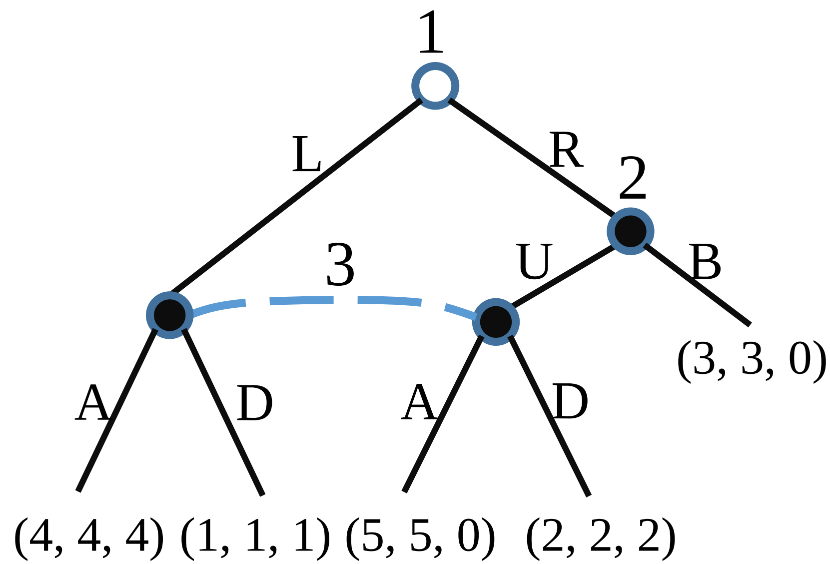


- 均衡分析
  - 两个纳什均衡(L, B, A)和(R, B, D)
  - 同时也是子博弈精炼纳什均衡
  - 但(L,B,A)却不是合理的均衡
  - 需要通过精炼贝叶斯均衡剔除

3	A		D	
1 \ 2	U	B	U	B
L	4,4,4	4,4,4	1,1,0	1,1,0
R	5,5,0	3,3,0	2,2,2	3,3,0

不完美信息的精炼贝叶斯均衡

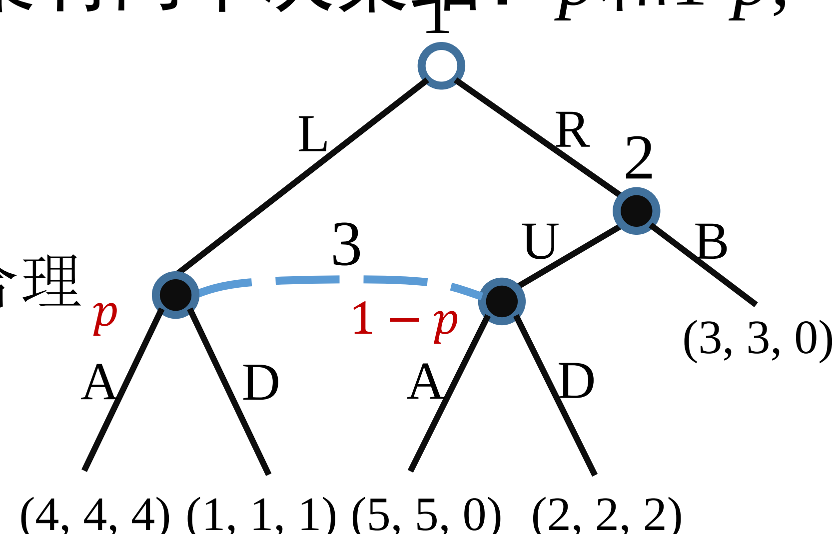
- 不完美信息博弈举例2：
  - 三个参与人，$i = 1, 2, 3$；
  - 1首先行动，选择L或R
  - 1选择R，2选择U或B（结束）
  - 1选择L，或2选择U，3选择A或D



- 利用精炼贝叶斯均衡求解均衡
  - 均衡(L,B,A)中2的选择B不在均衡路径上，需要利用精炼贝叶斯均衡检查其合理性：给定3选择A，2的最优选择是U而不是B
  - 给定2选择U而不是B，1应该选择R而不是L，进而3应该选择D
  - 假设3选择D，2应该选择B，进而1应该选择R。
  - 可以检查(R, B, D)是该博弈的另一个纳什均衡。

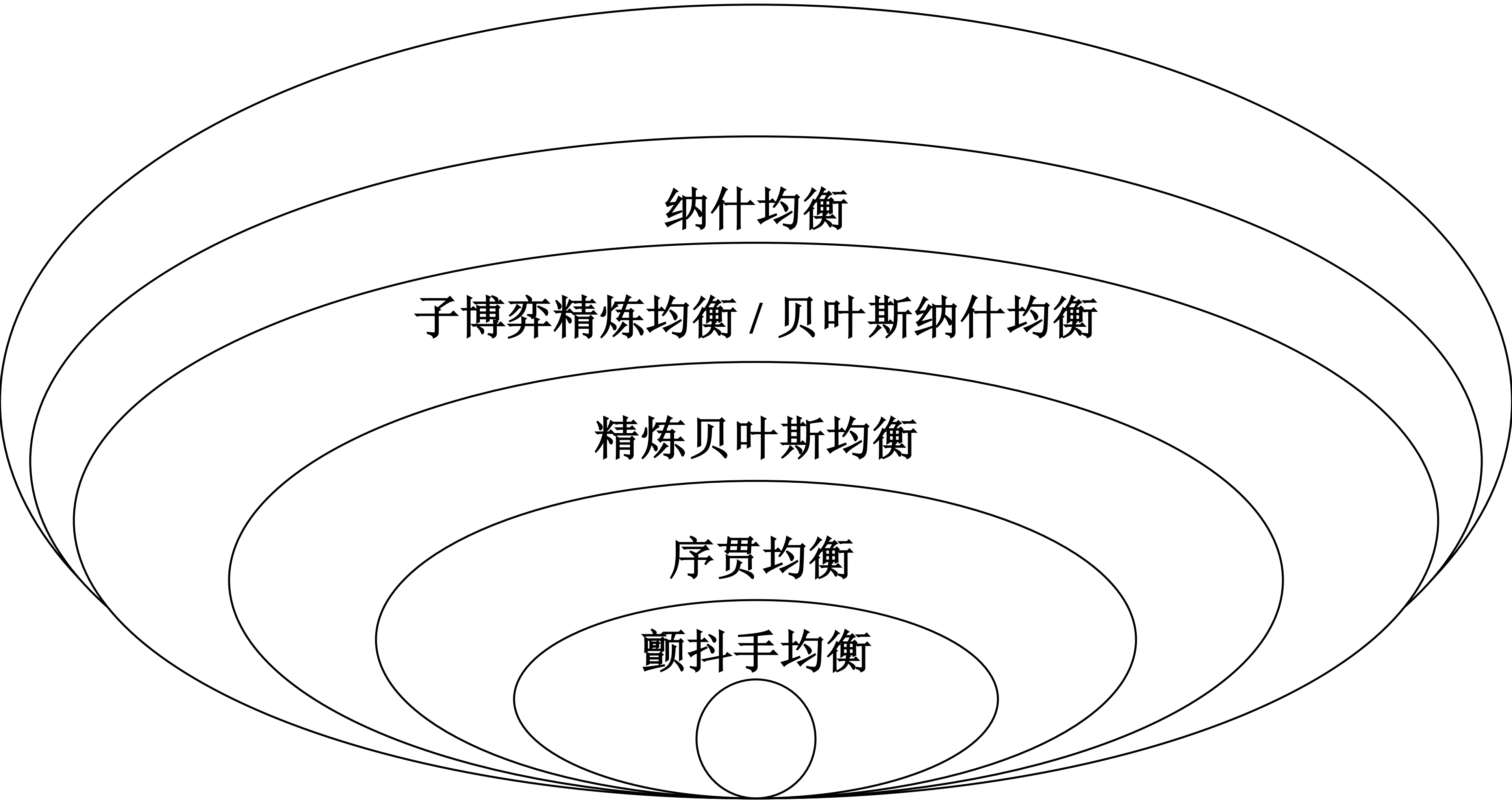
不完美信息的精炼贝叶斯均衡

- 不完美信息博弈举例2：精炼贝叶斯均衡要求
  - 1）每一个参与人的信息集上有一个概率分布；
  - 2）给定概率分布和其他参与人选择，每个参与人的策略最优；
  - 3）概率分布是使用贝叶斯法则从最优策略和观测到的行动得到的（在可能的情况下）；
- 参与人1和2都只有一个单结信息集，在该决策结他们决策的概率为1；参与人3的信息集有两个决策结：p和1-p;
- （L, B, A）及相关联的$p=1$
  - 不满足（2）：B不是最优
  - 不满足（3）：进而B的$p=1$不合理
- 检查一下均衡（R,B, D; p<2/5）

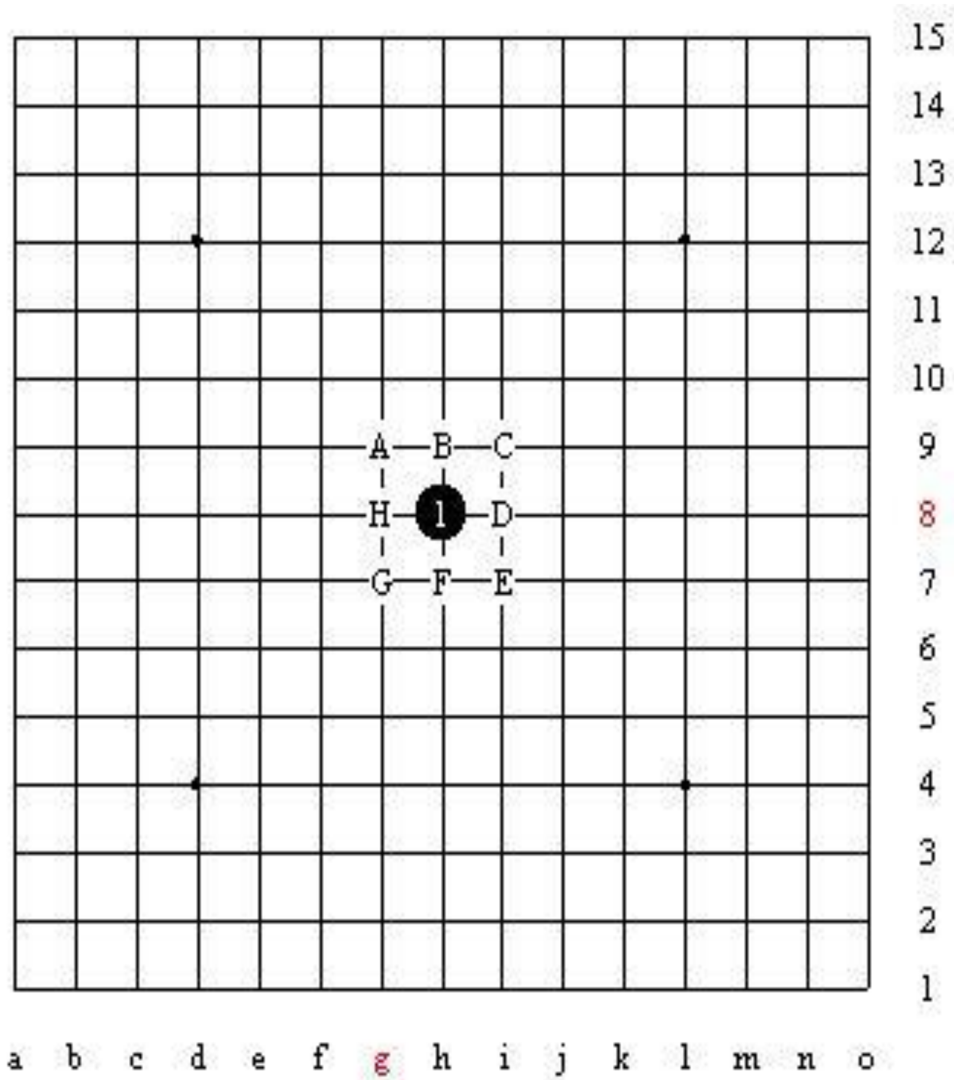


博弈论中的纳什均衡小结

- 不同纳什均衡之间的关系



课堂研讨：五子棋AI设计讨论和答疑



本次课程作业

- 作业内容：在相关博弈论教材中分别寻找关于**不完全信息静态博弈**和**动态博弈**的**各一道习题**，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果。
  - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义。
- 提交时间：2018年4月20日17:00之前
- 提交方法：在课程网站上提交，同时提交电子版Word实验报告到助教邮箱（peixi.peng@ia.ac.cn）
- 邮件发送规范
  - 邮件主题：博弈论第三次作业_学号_姓名
  - 附件名称：博弈论第三次作业_学号_姓名.zip

感谢聆听！

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2018年4月12日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

CASIA 自动化研究所
Institute of Automation