第二章　命题逻辑：完备性定理

上次内容

1. 元语言
2. 命题逻辑形式推理的基本性质: 传递性和有限性
3. 命题逻辑的可靠性和完备性(第一种证明方法)

注意: 证明方法-基于证明长度的普通归纳法; 普通归纳法是特殊的结构归纳法.

回顾

非常巧妙地证明:
如果Σ是有限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

今天内容

1. 幽默
2. 协调公式集合
3. 完备性的一般证明方法

幽默

某后勤主任到教室检查桌椅的保养情况,发现一张空课桌上刻了几行字, 顿觉不快, 就问邻座学生: “这是谁写的?” 学生探过头一看, 上面刻的是《再别康桥》,就说:“是徐志摩写的.” 后勤主任气愤地大声说: “你告诉徐志摩,下午到我办公室去一趟.

标记(token)和句子之间的差别

某后勤主任到教室检查桌椅的保养情况,发现一张空课桌上刻了几行字, 顿觉不快, 就问邻座学生: “这是谁写的?” 学生探过头一看, 上面刻的是《再别康桥》,就说:“是徐志摩写的.” 后勤主任气愤地大声说: “你告诉徐志摩,下午到我办公室去一趟.

记号/符号;

对象/名称

The Hardest Logical Puzzle Ever

Three gods A, B, and C are called, in some order, True, False, and Random.

True always speaks truly, False always speaks falsely, but whether Random speaks truly or falsely is a completely *random* matter.

Your task is to determine the identities of A, B, and C by asking three yes-no questions; each question must be put to exactly one god.

The gods understand English, but will answer all questions in their own language, in which the words for "yes" and "no" are "da" and "ja", in some order. *You do not know which word means which.*

形式系统

1. 建立形式系统
2. 分析形式系统.

形式系统

1. 建立形式系统

形式系统

1. 建立形式系统
2. 分析形式系统.

关于推理: 可靠性, 完备性

形式系统

1. 建立形式系统
2. 分析形式系统.

关于推理: 可靠性, 完备性
关于公式集合: 协调性

形式系统

任给一个赋值v, 考虑集合

$$\{A : (A)^v = 1\}.$$

形式系统

任给一个赋值v, 考虑集合

$$\{A : (A)^v = 1\}.$$

任给一个公式A, 有也仅有一个A或者$\neg A$在这集合中.

形式系统

任给一个赋值v, 考虑集合

$$\Sigma_v = \{A : (A)^v = 1\}.$$

任给一个公式A, 有也仅有一个A或者$\neg A$在这集合中, 即

- 要么$A \in \Sigma_v$要么$\neg A \in \Sigma_v$;
- $A \in \Sigma_v$ 当且仅当$\neg A \notin \Sigma_v$.

协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 如果不存在公式A使得

$$\Sigma \vdash A \text{ 并且 } \Sigma \vdash \neg A.$$

协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 如果不存在公式A使得

$$\Sigma \vdash A \text{ 并且 } \Sigma \vdash \neg A.$$

等价地,

定义. 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 如果对任何公式A,

$$\text{要么 } \Sigma \nvdash A \text{ 要么 } \Sigma \nvdash \neg A.$$

协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 如果不存在公式A使得

$$\Sigma \vdash A \text{ 并且 } \Sigma \vdash \neg A.$$

等价地,

定义. 一个公式集合Σ是协调的(consistent), 如果存在公式A使得

$$\Sigma \nvdash A.$$

极大协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是极大协调的(maximally consistent), 如果Σ是协调的, 并且对任何公式集合Σ', $\Sigma' \supset \Sigma$蕴涵Σ'是不协调的.

极大协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是极大协调的(maximally consistent), 如果Σ是协调的, 并且对任何公式集合Σ', $\Sigma' \supset \Sigma$蕴涵Σ'是不协调的.

命题1. 如果Σ是极大协调公式集合, 则对每个公式A, 要么

$$\Sigma \vdash A$$

要么

$$\Sigma \vdash \neg A.$$

极大协调公式集

命题2. 如果Σ是一个极大协调公式集合, 则对任何公式A, 要么

$$A \in \Sigma,$$

要么

$$\neg A \in \Sigma.$$

$\square$

典型的极大协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是极大协调的(maximally consistent), 如果Σ是协调的, 并且对每个公式A, 要么

$$\Sigma \vdash A$$

要么

$$\Sigma \vdash \neg A.$$

例子: 任给一个赋值v, 集合$\{A : (A)^v = 1\}$是一个极大协调公式集合.

典型的极大协调公式集

定义. 一个公式集合Σ是极大协调的(maximally consistent), 如果Σ是协调的, 并且对每个公式A, 要么

$$\Sigma \vdash A$$

要么

$$\Sigma \vdash \neg A.$$

例子: 任给一个赋值v, 集合$\{A : (A)^v = 1\}$是一个极大协调公式集合.
我们将证明反之也然: 任给一个极大协调公式集合Σ, 存在唯一的赋值v使得

$$\Sigma = \{A : (A)^v = 1\}.$$

引理

引理. 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

引理

引理. 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

证. 将所有公式排成一列:

$$A_1, ..., A_n, ...$$

引理

引理. 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

证. 将所有公式排成一列:

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots$$

对n作归纳定义, 定义

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma; \\ \Sigma_{n+1} &= \begin{cases} \Sigma_n & \text{如果}\Sigma_n \vdash \neg A_n \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} & \text{否则.} \end{cases} \end{aligned}$$

为什么我们可以将所有的公式排成一列?

引理

引理. 任给一个协调公式集Σ, 存在一个极大协调公式集$\Sigma^* \supseteq \Sigma$.

证. 将所有公式排成一列:

$$A_1, ..., A_n, ...$$

对n作归纳定义, 定义

$$\Sigma_0 = \Sigma;$$
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n & \text{如果}\Sigma_n \vdash \neg A_n \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} & \text{否则.} \end{cases}$$

归纳证明: 对任何n, Σ_n是协调的.

引理

设

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n.$$

引理

设
$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n.$$
则Σ^*是协调的, 并且是极大协调的.

引理

断言1. Σ^*是协调的.
假设Σ^*不协调, 则存在一个公式A使得$\Sigma^* \vdash A$, 并且$\Sigma^* \vdash \neg A$.

引理

断言1. Σ^*是协调的.
假设Σ^*不协调, 则存在一个公式A使得$\Sigma^* \vdash A$, 并且$\Sigma^* \vdash \neg A$.
由形式推理的基本定理, 存在有限集$\Sigma^0, \Sigma^1 \subseteq \Sigma^*$使得$\Sigma^0 \vdash A$, 并且$\Sigma^1 \vdash \neg A$.

引理

断言1. Σ^*是协调的.
假设Σ^*不协调, 则存在一个公式A使得$\Sigma^* \vdash A$, 并且$\Sigma^* \vdash \neg A$.
由形式推理的基本定理, 存在有限集$\Sigma^0, \Sigma^1 \subseteq \Sigma^*$使得$\Sigma^0 \vdash A$, 并且$\Sigma^1 \vdash \neg A$.
则$\Sigma^0 \cup \Sigma^1$是不协调的有限公式集合.
存在一个n使得$\Sigma^0 \cup \Sigma^1 \subseteq \Sigma_n$, 并且$\Sigma_n$ 是不协调的. 矛盾.

引理

断言2. 任给公式集合Σ, Σ'和公式A使得$\Sigma \subseteq \Sigma'$, 如果$\Sigma' \cup \{A\}$是协调的, 则$\Sigma \cup \{A\}$ 是协调的.

引理

断言3. Σ^*是极大的.
因为
$$A_1, ..., A_n, ...$$
是所有公式的排列.
任给一个公式$A \notin \Sigma^*$, 如果$\Sigma^* \cup \{A\}$是协调的, 设$A = A_n$,
则$A \in \Sigma_{n+1}$. 矛盾.

$\square$

极大协调公式集所确定的赋值

任给一个极大协调公式集Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma.$$

极大协调公式集的可满足性定理

定理. 任给一个极大协调公式集Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma.$$

则对任何公式A, $A^v = 1$当且仅当$A \in \Sigma$.

极大协调公式集的可满足性定理

定理. 任给一个极大协调公式集Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma.$$

则对任何公式A, $A^v = 1$当且仅当$A \in \Sigma$.

证. 对A作结构归纳证明.

极大协调公式集的可满足性定理

定理. 任给一个极大协调公式集Σ, 定义赋值v使得对任何命题变元p,

$$v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma.$$

则对任何公式A, $A^v = 1$当且仅当$A \in \Sigma$.

证. 对A作结构归纳证明.

假设$A = p$是命题变元. 则由v的定义,

$$A^v = v(p) = 1 \text{ 当且仅当 } p \in \Sigma,$$

即$A \in \Sigma$.

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$A^v = 1 \quad 当且仅当 \quad B^v = 0$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} A^v = 1 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \notin \Sigma \end{aligned}$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} A^v = 1 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \notin \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad \neg B \in \Sigma \end{aligned}$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = \neg B$并且定理对B成立. 则

$$\begin{aligned} A^v = 1 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \notin \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad \neg B \in \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad A \in \Sigma. \end{aligned}$$

注意: 第3个'当且仅当'利用了Σ的极大性.

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$A^v = 0 \quad 当且仅当 \quad B^v = 1 并且 C^v = 0$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$\begin{aligned} A^v = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 1\text{并且}C^v = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \in \Sigma\text{并且}\neg C \in \Sigma \end{aligned}$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$\begin{aligned} A^v = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 1 \text{并且} C^v = 0 \\ & \text{当且仅当} \quad B \in \Sigma \text{并且} \neg C \in \Sigma \\ & \text{当且仅当} \quad B \to C \notin \Sigma \end{aligned}$$

极大协调公式集的可满足性定理

假设$A = B \to C$并且定理对B, C成立. 则

$$\begin{aligned}
A^v = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad B^v = 1 \text{并且} C^v = 0 \\
& \text{当且仅当} \quad B \in \Sigma \text{并且} \neg C \in \Sigma \\
& \text{当且仅当} \quad B \to C \notin \Sigma \\
& \text{当且仅当} \quad A \notin \Sigma.
\end{aligned}$$

注意: 第3个'当且仅当'利用了Σ的极大性.

命题逻辑的完备性的证明

定理: 如果Σ是无限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

命题逻辑的完备性的证明

定理: 如果Σ是无限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

证. 假设$\Sigma \models A$.

命题逻辑的完备性的证明

定理: 如果Σ是无限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

证. 假设$\Sigma \models A$.

反证. 假设$\Sigma \nvdash A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的.

命题逻辑的完备性的证明

定理: 如果Σ是无限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.
证. 假设$\Sigma \models A$.
反证. 假设$\Sigma \nvdash A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的.
设Σ^*是包含Σ的极大协调集合. 则存在一个赋值v使得对每个$B \in \Sigma^*$, $B^v = 1$, 即$(\Sigma^*)^v = 1$.

命题逻辑的完备性的证明

证明: 如果Σ是无限的并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

证. 假设$\Sigma \models A$.

反证. 假设$\Sigma \not\models A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的.

设Σ^*是包含$\Sigma \cup \{\neg A\}$的极大协调集合. 则存在一个赋值v使得对每个$B \in \Sigma^*$, $B^v = 1$, 即$(\Sigma^*)^v = 1$.

$(\Sigma)^v = 1$并且$(\neg A)^v = 1$. 与假设$\Sigma \models A$矛盾.

□

注意: (1) 证明不仅适合无穷的Σ, 同样适用于有限的Σ.

(2) 11条形式推导规则在什么地方起作用了?

命题逻辑的完备性的证明

命题逻辑的完备性定理: 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

完备性定理证明模式

1. 假设$\Sigma \models A$并且$\Sigma \not\vdash A$. 则$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的;
2. 每个协调集合可以扩展为一个极大协调集合;
3. 一个极大协调集合存在一个模型, 使得在模型下为真的公式集合正好是极大协调集合.

命题逻辑的完备性的一个推理

一个公式A称为是命题逻辑的一个定理，如果$\vdash A$.

命题逻辑的完备性的一个推理

一个公式A称为是命题逻辑的一个定理，如果$\vdash A$.

推论. 命题逻辑的定理是可判定的.

$\vdash A$当且仅当$\models A$. 即对所有的赋值v, $(A)^v = 1$.

逻辑程序: 文字

一个文字(literal)l是一个命题变元p或是一个命题变元的否定$\neg p$;

子句

一个文字(literal)l是一个命题变元p或是一个命题变元的否定$\neg p$;
一个子句(clause)s是有限多个文字的析取:

$$s = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n.$$

理论

一个文字(literal)l是一个命题变元p或是一个命题变元的否定$\neg p$;
一个子句(clause)s是有限多个文字的析取:

$$s = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n.$$

有限多个子句组成一个理论(theory)$S = s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_m$.

项, 余理论

一个文字(literal)l是一个命题变元p或是一个命题变元的否定$\neg p$;
一个子句(clause)s是有限多个文字的析取$l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$.
有限多个子句组成一个理论(theory)$S = s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_m$.
对偶地, 一个项(term)t是有限多个文字的合取$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$.
有限多个项组成一个余理论(co-theory)$T = t_1 \vee t_2 \vee \cdots \vee t_m$.

析取范式和合取范式

一个公式A是一个析取范式(disjunctive normal form, DNF), 如果存在项$A_1, ..., A_n$使得

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n.$$

公式A是一个合取范式(conjunctive normal form, CNF), 如果存在子句$A_1, ..., A_n$使得

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n.$$

真值函数

定义. 如果f是一个n-元函数使得$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, 则f称为真值函数.

一个真值函数f与一个公式A是等值的, 如果对每个$\{0,1\}$-数组$(x_1, ..., x_n)$,

$$f(x_1, ..., x_n) = (A)^v,$$

其中v是一个赋值定义为

$$(p_1)^v = x_1; \cdots ; (p_n)^v = x_n,$$

其中$p_1, ..., p_n$是出现在A中的命题变元符号.

发现错误?

$$(p_1)^v = x_1; \cdots ; (p_n)^v = x_n.$$

真值函数

命题. 每个真值函数等值于一个只包含$\neg, \vee$和$\wedge$的公式.

证明. 设$f(x_1, ..., x_n)$是一个n-元真值函数. 则f可以表示为一个2^n行的真假值表, 每一行是由$x_1, ..., x_n$和$f(x_1, ..., x_n)$的值组成. 我们用

$$x_1^i, ..., x_n^i, f(x_1^i, ..., x_n^i)$$

表示第i行的序对.

真值函数

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	$\cdots$	0	$f(0, 0, ..., 0)$
0	0	$\cdots$	1	$f(0, 0, ..., 1)$
		$\vdots$		$\vdots$
x_1^i	x_2^i	$\cdots$	x_n^i	$f(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i)$
		$\vdots$		$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	$f(1, 1, ..., 1)$

真值函数

对每个$1 \le i \le 2^n$, 定义

$$B_i = p_1^i \wedge p_2^i \wedge \cdots \wedge p_n^i,$$

其中对每个$1 \le j \le n$,

$$p_j^i = \begin{cases} p_j & \text{如果} x_j^i = 1 \\ \neg p_j & \text{如果} x_j^i = 0. \end{cases}$$

真值函数

对每个$1 \le i \le 2^n$, 定义

$$B_i = p_1^i \wedge p_2^i \wedge \cdots \wedge p_n^i,$$

其中对每个$1 \le j \le n$,

$$p_j^i = \begin{cases} p_j & 如果 x_j^i = 1 \\ \neg p_j & 如果 x_j^i = 0. \end{cases}$$

设

$$A = \bigvee_{i:f(x_1^i,\ldots,x_n^i)=1} B_i$$

是所有使得$f(x_1^i, \ldots, x_n^i) = 1$行所对应的$B$的析取. 如果不存在这样的行, 则设$A = p_1 \wedge \neg p_1$.

真值函数

断言. A是与f等值的.
证. 任给一个$\{0,1\}$-序列$(x_1, ..., x_n)$, 设相应的赋值为v.

真值函数

断言. A是与f等值的.
证. 任给一个{0,1}-序列$(x_1, ..., x_n)$, 设相应的赋值为v.
存在唯一的i使得$(x_1, ..., x_n) = (x_1^i, ..., x_n^i)$.
则$(B_i)^v = 1$, 对任何$j \neq i$, $(B_j)^v = 0$.

真值函数

断言. A是与f等值的.

证. 任给一个$\{0,1\}$-序列$(x_1, ..., x_n)$, 设相应的赋值为v.

存在唯一的i使得$(x_1, ..., x_n) = (x_1^i, ..., x_n^i)$.

则$(B_i)^v = 1$, 对任何$j \neq i$, $(B_j)^v = 0$.

如果$f(x_1, ..., x_n) = 1$ 则B_i是A 的一个析取子. 因此, $(A)^v = 1$;

如果$f(x_1, ..., x_n) = 0$ 则B_i不是A 的一个析取子. 由于所有的A 的析取子在赋值v取假值, 因此, $(A)^v = 0$.

因此, A与f是等值的. $\square$

真值函数

例子. 设f定义为

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

则与f等值的公式为

$$A = (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2).$$

真值函数

设f定义为

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1

真值函数

设f定义为

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1

则与f等值的公式为

$$\begin{aligned} A = \quad & (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \\ & \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3). \end{aligned}$$

正则形(normal forms)

推论. 任给一个公式A, 存在一个析取范式B使得

$$\models A \leftrightarrow B.$$

$\square$

正则形(normal forms)

根据合取和析取符号的交换律, 结合律, 分配律以及De Morgen律, 我们可证明

命题. 任给一个公式A, 存在一个合取范式B使得

$$\models A \leftrightarrow B.$$

证: 对公式A作结构归纳法.

假设$A = p$是一个命题变元, 则A是合取范式.

正则形(normal forms)

假设$A = \neg C$并且假设结论对C成立. 设D是合取范式使得$\models C \leftrightarrow D$.
设

$$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2).$$

正则形(normal forms)

$$A \quad = \quad \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2))$$

正则形(normal forms)

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2)
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

$$\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2)
\end{aligned}$$

正则形(normal forms)

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2') \\
&\equiv (D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2').
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$A \;=\; \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2))$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2)
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2)
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv (((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_1') \\
&\quad \wedge (((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_2')
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D = \neg((D_1 \vee D_2) \wedge (E_1 \vee E_2) \wedge (F_1 \vee F_2)) \\
&\equiv \neg(D_1 \vee D_2) \vee \neg(E_1 \vee E_2) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \\
&\equiv (\neg D_1 \wedge \neg D_2) \vee (\neg E_1 \wedge \neg E_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2) \\
&\equiv (D_1' \wedge D_2') \vee (E_1' \wedge E_2') \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \wedge D_2') \vee E_1') \wedge (D_1' \wedge D_2') \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv ((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee (F_1' \wedge F_2') \\
&\equiv (((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_1') \\
&\quad \wedge (((D_1' \vee E_1') \wedge (D_2' \vee E_1') \wedge (D_1' \vee E_2') \wedge (D_2' \vee E_2')) \vee F_2') \\
&\equiv (D_1' \vee E_1' \vee F_1') \wedge (D_2' \vee E_1' \vee F_1') \wedge (D_1' \vee E_2' \vee F_1') \wedge (D_2' \vee E_2' \vee F \\
&\quad \wedge (D_1' \vee E_1' \vee F_2') \wedge (D_2' \vee E_1' \vee F_2') \wedge (D_1' \vee E_2' \vee F_2') \wedge (D_2' \vee E_2' \vee
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

设$D = (D_{11} \vee \cdots \vee D_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge (D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nn_n})$.

$$
\begin{aligned}
A &= \neg C \equiv \neg D \\
&= \neg[(D_{11} \vee \cdots \vee D_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge (D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nn_n})] \\
&\equiv \neg(D_{11} \vee \cdots \vee D_{1n_1}) \vee \cdots \vee \neg(D_{n1} \vee \cdots \vee D_{nn_1}) \\
&\equiv (\neg D_{11} \wedge \cdots \wedge \neg D_{1n_1}) \vee \cdots \vee (\neg D_{n1} \wedge \cdots \wedge \neg D_{nn_1}) \\
&\equiv (E_{11} \wedge \cdots \wedge E_{1n_1}) \vee \cdots \vee (E_{n1} \wedge \cdots \wedge E_{nn_1}) \\
&\equiv \bigwedge_{\substack{f:n \to N \\ f(i) \leq n_i}} \bigvee_{1 \leq j \leq n} E_{jf(j)}.
\end{aligned}
$$

正则形(normal forms)

假设$A = B \to C$并且假设结论对B, C成立. 设D, E是合取范式使得$\models B \leftrightarrow D, \models C \leftrightarrow E$.

$$
\begin{aligned}
A &= B \to C \\
&\equiv \neg B \vee C \\
&\equiv \neg (B \wedge \neg C).
\end{aligned}
$$

$\square$

Horn子句

一个子句A是Horn的, 如果A至多只有一个正文字.
比如:

$$\begin{aligned} p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 &\equiv p_1 \vee \neg(p_2 \wedge p_3) \\ &\equiv p_2 \wedge p_3 \to p_1 \\ &\equiv p_1 \leftarrow p_2, p_3. \end{aligned}$$

SAT问题

SAT问题: 给定一个合取公式A, 判定是否存在一个赋值v使得$(A)^v = 1$.

形式系统

一个形式理论$\mathcal{L}$是由下列部分组成:

1. 一个可数集合的符号作为$\mathcal{L}$的符号(形式系统的语言).
2. $\mathcal{L}$表达式集合的子集, 称为$\mathcal{L}$的良定公式集合.
3. $\mathcal{L}$良定公式的子集, 称为$\mathcal{L}$的公理集合.
4. 良定公式上的有限多个推导规则.

形式系统

一个$\mathcal{L}$证明是一个良定公式的序列$A_1, A_2, ..., A_n$使得对每个i, 要么A_i是$\mathcal{L}$的公理, 要么A_i是前面若干个良定公式由推导规则得到的.
一个$\mathcal{L}$良定公式A是$\mathcal{L}$的一个定理, 如果存在一个$\mathcal{L}$证明$A_1, A_2, ..., A_n$ 使得$A = A_n$.

形式系统与程序语言

逻辑	程序语言
逻辑符号	保留字或符号
非逻辑符号	用户自定义的符号(变量名、函数名等)
语句规则	构造一个程序的语句规则
语义规则	定义程序做什么的语句规则.

但一般程序语言没有推理规则、公理和证明.