第二章 命题逻辑: 基本性质

上次内容

- 形式推导规则
- 证明$\Sigma \vdash A$或$\Sigma \vdash A$的证明
- 证明的树型结构

今天内容

- 正确理解$\vdash$与$\models$之间的联系
- 命题逻辑中的布尔代数
- 永真公式的基本性质

上次内容

语义: 逻辑推论(logical consequences)$\models$: $\Sigma \models A$;
语法: 形式推导规则, 定义证明$\vdash$: $\Sigma \vdash A$.
我们希望这样的定义可以使得: 对任何公式集合Σ和公式A,

$$\Sigma \models A \text{ iff } \Sigma \vdash A.$$

上次内容

语义: 逻辑推论(logical consequences)$\models$: $\Sigma \models A$;
语法: 形式推导规则, 定义证明$\vdash$: $\Sigma \vdash A$.
我们希望这样的定义可以使得: 对任何公式集合Σ和公式A,

$$\Sigma \models A \text{ iff } \Sigma \vdash A.$$

$$\{(\Sigma, A) : \Sigma \models A\} = \{(\Sigma, A) : \Sigma \vdash A\}.$$

上次内容

$\vdash$是$\models$的形式表示(化, 语法).
$\Sigma \vdash A$是$\Sigma \models A$的形式表示(化,语法).

与程序的类比

程序中的句子:: 断言$\Sigma \vdash A$
程序:: 断言序列$\Sigma_1 \vdash A_1, ..., \Sigma_n \vdash A_n$
是否是程序:: 形式推导规则

上次内容

形式推导规则:
(1) 无条件形(唯一可以为推理树叶结点的形式推导规则):

$$(Ref)\ \text{自反} \qquad A \vdash A.$$

(2) 条件形(具有非空的前提)

$$(+) \qquad \begin{array}{l} \text{如果}\Sigma \vdash A, \\ \text{则}\Sigma, \Sigma' \vdash A. \end{array}$$

上次内容

形式推导规则:
(1) 无条件形(唯一可以为推理树叶结点的形式推导规则):

$$(Ref)\ \text{自反} \qquad A \vdash A.$$

(2) 条件形(具有非空的前提)

$$(+) \qquad \begin{array}{l} \text{如果}\Sigma \vdash A, \\ \text{则}\Sigma, \Sigma' \vdash A. \end{array}$$

注意: (i) 只有(Ref), ($\in$)属于无条件形.
(ii) 推导规则类似于公理, 是给定的, 它们的合理性只有通过形式语义才能看出来. 比如(Ref)在形式语义的解释下为

$$A \models A.$$

上次内容

形式可推演(或形式可证明): $\Sigma \vdash A$

定义. A是在命题逻辑中由Σ形式可推演(或形式可证明)的, 记为$\Sigma \vdash A$, 如果存在一个形式可推演性模式序列

$$\Sigma_1 \vdash A_1, \ldots, \Sigma_n \vdash A_n$$

使得

(1) $\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \vdash A$;

(2) 对每个$k \leq n$, $\Sigma_k \vdash A_k$可由前面的形式可推演性模式和形式推演规则得到.

上次内容

断言的形式:

(1) $\Sigma \vdash A$

上次内容

断言的形式:

(1) $\Sigma \vdash A$

(2) 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma' \vdash B$

上次内容

断言的形式:

(1) $\Sigma \vdash A$

(2) 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma' \vdash B$

例子.

$$\begin{array}{rl} \text{如果} & \Sigma, A \vdash B, \\ & \Sigma, A \vdash \neg B, \\ \text{则} & \Sigma \vdash \neg A. \end{array}$$

上次内容

断言的形式:

(1) $\Sigma \vdash A$

(2) 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma' \vdash B$

(3) 形式推导规则集合可以推出形式推导规则.

上次内容

断言的形式:

(1) $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$.

(2) 如果$\Sigma, A \vdash B$并且$\Sigma, A \vdash \neg B$, 则$\Sigma \vdash \neg A$.

(3) 形式推导规则集合可以推出形式推导规则.

例子. 由(自反), $(+)$, $(\to^+)$以及下列规则:

(3.1) 如果$\Sigma \vdash \neg\neg A$,则$\Sigma \vdash A$;

(3.2) 如果$\Sigma \vdash A \to \neg B, A \to B$ 则$\Sigma \vdash \neg A$,

推出$(\neg^-)$.

上次内容

断言的形式:

(1) $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$.

(2) 如果$\Sigma, A \vdash B$并且$\Sigma, A \vdash \neg B$, 则$\Sigma \vdash \neg A$.

(3) 形式推导规则集合可以推出形式推导规则.

例子. **如果**(自反), $(+), (\to^{+})$以及下列规则:

(3.1) 如果$\Sigma \vdash \neg\neg A$,则$\Sigma \vdash A$;

(3.2) 如果$\Sigma \vdash A \to \neg B, A \to B$ 则$\Sigma \vdash \neg A$,

则$(\neg^{-})$.

元变元(meta-variables)

A, B, C表示公式变元;
p, q, r表示原子命题变元的变元;
Σ表示公式集合变元.

元变元

$p_1 \to (p_2 \to p_1)$是一个公式.

元变元

$p_1 \to (p_2 \to p_1)$是一个公式.
"$p_1 \to (p_2 \to p_1)$是一个公式"不是一个公式.

元变元

“This is a desk”是一个英文句子.

元变元

“This is a desk”是一个英文句子, 其中

This is a desk

是对象语言(英语)中的一个句子;

元变元

“This is a desk”是一个英文句子, 其中

This is a desk

是对象语言(英语)中的一个句子,而

*“This is a desk”*是一个英文句子

是元语言(汉语)中的一个句子;

元变元

“This is a desk”是一个英文句子, 其中

This is a desk

是对象语言(英语)中的一个句子,而

*“This is a desk”*是一个英文句子

是元语言(汉语)中的一个句子; 但又不是作为对象语言的汉语中的句子.

元变元

由于$\vdash$, $\models$不是命题逻辑语言中的符号, 因此,

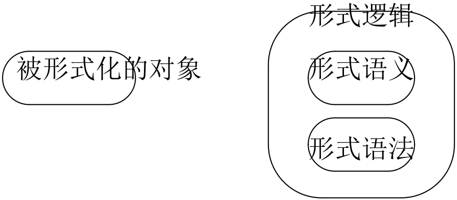
$$\Sigma \vdash A$$

或者

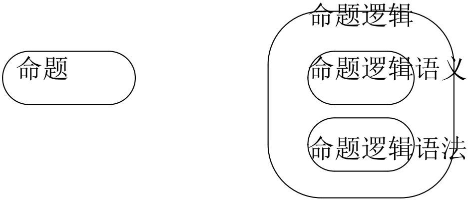
$$\Sigma \models A$$

都不是命题逻辑的公式. 是用来讨论命题逻辑中公式之间所具有的逻辑关系.

形式系统



命题逻辑(系统)



语法/语义

在命题逻辑中涉及赋值的是指语义的;

语法语义

在命题逻辑中涉及赋值的是指语义的;
只涉及公式结构的是指语法的;

在命题逻辑中涉及赋值的是指语义的;
只涉及公式结构的是指语法的;
$\Sigma \models A$是关于命题逻辑的语义性质, 但这个性质不是一个良定公式, 而是元语言中的一个(命题)断言. 比如

- $\Sigma \models A$是关于公式集合Σ和公式A之间的语义关系的断言;
- $\Sigma \vdash A$是关于Σ和A之间的语法关系的断言.

元变元

如果$\Sigma, \neg A \models B$并且$\Sigma, \neg A \models \neg B$则$\Sigma \models A$.

元变元

如果$\Sigma, \neg A \models B$并且$\Sigma, \neg A \models \neg B$则$\Sigma \models A$.
事实上, 这是说
对任何公式集合Σ和公式A, B, 如果$\Sigma, \neg A \models B$并且$\Sigma, \neg A \models \neg B$则$\Sigma \models A$.
注意: 公式集合, 什么公式的集合?
由于在命题逻辑的上下文中进行讨论的, 这里的公式是命题逻辑的公式.

数学约定

数学约定: 出现一个公式中的变元是指全称量词.
比如, 定理

$$如果b^2 - 4ac \geq 0则方程ax^2 + bx + c = 0有实数根.$$

数学约定

数学约定: 出现一个公式中的变元是指全称量词.
比如, 定理

$$\text{如果} b^2 - 4ac \geq 0 \text{则方程} ax^2 + bx + c = 0 \text{有实数根}.$$

是表示

$$\begin{array}{l}\text{对任何实数} a, b, c, \text{ 如果} b^2 - 4ac \geq 0 \\ \text{则方程} ax^2 + bx + c = 0 \text{有实数根}.\end{array}$$

相同的约定也出现在逻辑程序中.

$\emptyset^v = 1$

证明: $\emptyset \models A$当且仅当A是永真式.
证: ($\Rightarrow$) 假设$\emptyset \models A$. 则对任何赋值v, 如果$\emptyset^v = 1$则$A^v = 1$.

$\emptyset^v = 1$

证明: $\emptyset \models A$当且仅当A是永真式.
证:(⇒) 假设$\emptyset \models A$. 则对任何赋值v, 如果$\emptyset^v = 1$则$A^v = 1$.
断言: $\emptyset^v = 1$.
由定义: 如果对任何公式B, 如果$B \in \emptyset$则$B^v = 1$; 则$\emptyset^v = 1$.

$\emptyset^v = 1$

证明: $\emptyset \models A$当且仅当A是永真式.

证:($\Rightarrow$) 假设$\emptyset \models A$. 则对任何赋值v, 如果$\emptyset^v = 1$则$A^v = 1$.

断言: $\emptyset^v = 1$.

由定义: 如果对任何公式B, 如果$B \in \emptyset$则$B^v = 1$; 则$\emptyset^v = 1$.

$\because B \in \emptyset$是**假**的, $\therefore$ 断言如果$B \in \emptyset$则$B^v = 1$ 是真的.

因此, 对任何赋值v, $A^v = 1$, 即A是永真式.

$\emptyset^v = 1$

$(\Leftarrow)$ 假设A是永真式. 则对任何赋值v, $A^v = 1$.
对任何赋值v, 断言

$$\text{如果}\emptyset^v = 1\text{则}A^v = 1$$

是真的. 所以,

$$\emptyset \models A.$$

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models|(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

A^v	B^v	C^v	$(A \vee B)^v$	$((A \vee B) \wedge C)^v$	$(A \wedge C)^v$	$(B \wedge C)^v$	$((A \wedge$
0	0	0	0	**0**	0	0	
0	0	1	0	**0**	0	0	
0	1	0	1	**0**	0	0	
0	1	1	1	**1**	0	1	
1	0	0	1	**0**	0	0	
1	0	1	1	**1**	1	0	
1	1	0	1	**0**	0	0	
1	1	1	1	**1**	1	1	

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models| (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
证: 首先证明$(A \vee B) \wedge C \models (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models |(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
证: 首先证明$(A \vee B) \wedge C \models (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. 即证明: 任给一个赋值$v$, 如果$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$则$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$.

永真式

证明: $(A \vee B) \wedge C \models|(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
证: 首先证明$(A \vee B) \wedge C \models (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. 即证明: 任给一个赋值$v$, 如果$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$则$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$.
$\because ((A \vee B) \wedge C)^v = 1, \therefore C^v = 1$并且$(A \vee B)^v = 1$, 即$A^v = 1$或者$B^v = 1$.
如果$A^v = 1$则$(A \wedge C)^v = 1$, 所以$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$;
如果$B^v = 1$则$(B \wedge C)^v = 1$, 所以$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.
如果$(A \wedge C)^v = 1$, 即$A^v = 1$并且$C^v = 1$则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$;

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.
如果$(A \wedge C)^v = 1$, 即$A^v = 1$并且$C^v = 1$, 则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$;
如果$(B \wedge C)^v = 1$, 即$B^v = 1$并且$C^v = 1$, 则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.

$\square$

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.
如果$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})^{\mathbf{v}} = 1$, 即$\mathbf{A}^{\mathbf{v}} = 1$并且$\mathbf{C}^{\mathbf{v}} = 1$,则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$;
如果$(B \wedge C)^v = 1$, 即$B^v = 1$并且$C^v = 1$, 则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.

$\square$

If $\Sigma \vdash A \wedge B$ then $\Sigma \vdash A$ and $\Sigma \vdash B$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.
如果$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})^{\mathbf{v}} = 1$, 即$\mathbf{A}^{\mathbf{v}} = 1$并且$\mathbf{C}^{\mathbf{v}} = 1$,则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$;
如果$(B \wedge C)^v = 1$, 即$\mathbf{B}^{\mathbf{v}} = 1$并且$\mathbf{C}^{\mathbf{v}} = 1$, 则$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{\mathbf{v}} = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.

$\square$

If $\Sigma \vdash A$ then $\Sigma \vdash A \vee B$.

永真式

然后证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$.
即证明: 任给一个赋值v, 如果$((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1$则$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$.
$\because ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))^v = 1, \therefore (A \wedge C)^v = 1$或者$(B \wedge C)^v = 1$.
如果$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})^\mathbf{v} = 1$, 即$\mathbf{A}^\mathbf{v} = 1$并且$\mathbf{C}^\mathbf{v} = 1$,则$(A \vee B)^v = 1$, 所以$((A \vee B) \wedge C)^v = 1$;
如果$(B \wedge C)^v = 1$, 即$B^v = 1$并且$\mathbf{C}^\mathbf{v} = 1$, 则$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^\mathbf{v} = 1$, 所以$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C})^\mathbf{v} = 1$.

$\square$

If $\Sigma \vdash A$ and $\Sigma \vdash B$ then $\Sigma \vdash A \wedge B$.

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash\dashv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$\begin{array}{llll} (1) & A, C & \vdash A & (\in) \end{array}$$

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in)
\end{array}
$$

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in) \\
(3) & A, C & \vdash A \wedge C & (\wedge^{+})
\end{array}
$$

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in) \\
(3) & A, C & \vdash A \wedge C & (\wedge^{+}) \\
(4) & A, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^{+})
\end{array}
$$

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in) \\
(3) & A, C & \vdash A \wedge C & (\wedge^+) \\
(4) & A, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+) \\
(5) & B, C & \vdash B & (\in) \\
(6) & B, C & \vdash C & (\in) \\
(7) & B, C & \vdash B \wedge C & (\wedge^+) \\
(8) & B, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+)
\end{array}
$$

形式推理的方法

证明: $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & A, C & \vdash A & (\in) \\
(2) & A, C & \vdash C & (\in) \\
(3) & A, C & \vdash A \wedge C & (\wedge^+) \\
(4) & A, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+) \\
(5) & B, C & \vdash B & (\in) \\
(6) & B, C & \vdash C & (\in) \\
(7) & B, C & \vdash B \wedge C & (\wedge^+) \\
(8) & B, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^+) \\
(9) & A \vee B, C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & (\vee^-) \\
(10) & (A \vee B) \wedge C & \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & ??
\end{array}
$$

形式推理的方法

$$
\begin{aligned}
A \vee B, C &\vdash (A \vee B) \wedge C; \\
(A \vee B) \wedge C &\vdash (A \vee B); \\
(A \vee B) \wedge C &\vdash C; \\
(A \vee B) \wedge C &\vdash A \vee B, C.
\end{aligned}
$$

形式推理的方法

$$\begin{aligned} A \vee B, C &\vdash (A \vee B) \wedge C; \\ (A \vee B) \wedge C &\vdash (A \vee B); \\ (A \vee B) \wedge C &\vdash C; \\ (A \vee B) \wedge C &\vdash A \vee B, C. \end{aligned}$$

约定$\Sigma \vdash A, B$表示“$\Sigma \vdash A$并且$\Sigma \vdash B$.”
逻辑程序中的约定:

$$q_1, \ldots, q_n \leftarrow p_1, \ldots, p_m$$

表示

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_m \to q_1 \vee \cdots \vee q_n.$$

形式推理的方法

证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.

形式推理的方法

证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.

$$\begin{aligned}(A \wedge C) \vee (B \wedge C) &\vdash A \vee B, \\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) &\vdash C.\end{aligned}$$

形式推理的方法

证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.
为了证明

$$\begin{aligned}(A \wedge C) \vee (B \wedge C) &\vdash A \vee B,\\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) &\vdash C.\end{aligned}$$

我们设法证明

$$\begin{aligned}A \wedge C &\vdash A \vee B,\\ A \wedge C &\vdash C;\\ B \wedge C &\vdash A \vee B,\\ B \wedge C &\vdash C.\end{aligned}$$

形式推理的方法

证明: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & A \wedge C & \vdash A & (\wedge^-) \\
(2) & A & \vdash A \vee B & (\vee^+) \\
(3) & A \wedge C & \vdash A \vee B & (trans) \\
(4) & A \wedge C & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\wedge^+) \\
(5) & B \wedge C & \vdash B & (\wedge^-) \\
(6) & B & \vdash A \vee B & (\vee^+) \\
(7) & B \wedge C & \vdash A \vee B & (trans) \\
(8) & B \wedge C & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\wedge^+) \\
(9) & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & \vdash (A \vee B) \wedge C & (\vee^-).
\end{array}
$$

命题逻辑与布尔代数的关系

设**F**是所有公式的集合. 定义**F**上一个关系θ使得对任何$A, B \in \mathbf{F}$,

$$A\theta B \text{当且仅当} A \models| B.$$

则θ是一个等价关系.
给定一个公式A, 定义等价类

$$[A] = \{B : A \models| B\}.$$

设$\mathbf{F}/\theta$是所有等价类的集合.

命题逻辑与布尔代数的关系

定义$\mathbf{F}/\theta$上运算: 给定$[A], [B] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$\begin{aligned} &[A] + [B] = [A \vee B];\\ &[A] \times [B] = [A \wedge B];\\ &-[A] = [\neg A]. \end{aligned}$$

命题逻辑与布尔代数的关系

定义$\mathbf{F}/\theta$上运算: 给定$[A], [B] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$
\begin{aligned}
&[A] + [B] = [A \vee B];\\
&[A] \times [B] = [A \wedge B];\\
&-[A] = [\neg A].
\end{aligned}
$$

问题: (i) 所定义的运算是否是有意义的?
(ii) 什么叫运算的定义是有意义的?
(iii) 什么是运算?

命题逻辑与布尔代数的关系

引理. 所定义的运算是有意义的.

证: 对任何$A' \in [A], B' \in [B]$,

$$[A' \vee B'] = [A \vee B].$$

如果$A'\theta A$并且$B'\theta B$则$(A' \vee B')\theta(A \vee B)$. 因为如果$A' \models | A$并且$B' \models | B$则$(A' \vee B') \models | (A \vee B)$.

命题逻辑与布尔代数的关系

引理. 如果$A' \models | A$并且$B' \models | B$则$(A' \vee B') \models | (A \vee B)$.

证: 假设$A' \models | A$并且$B' \models | B$. 即$A' \models A; A \models A'; B \models B'$,并且$B' \models B$.

则$(A' \vee B') \models (A \vee B)$, 并且$(A \vee B) \models (A' \vee B')$.

$\square$

类似地证明$\times, -$.

最大元素和最小元素

$$\mathbf{0} = [A \wedge \neg A];$$
$$\mathbf{1} = [A \vee \neg A].$$

命题逻辑与布尔代数的关系

定理. $(\mathbf{F}/\theta, +, \times, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$是一个布尔代数.
证: 结合律: 任给$[A], [B], [C] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$([A] + [B]) \times [C] = ([A] \times [C]) + ([B] \times [C]).$$

即,

$$([A \vee B]) \times [C] = ([A \wedge C]) + ([B \wedge C]).$$

即,

$$[(A \vee B) \wedge C] = [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)].$$

即,

$$(A \vee B) \wedge C \models| (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

命题逻辑与布尔代数的关系

$$[(A \vee B) \wedge C] = [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)].$$

即,

$$(A \vee B) \wedge C \models| (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

如果$A \models| A', B \models| B', C \models| C'$, 则

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C &\models| \quad (A' \vee B') \wedge C' \\ (A' \wedge C') \vee (B' \wedge C') &\models| \quad (A \wedge C) \vee (B \wedge C). \end{aligned}$$

De Morgan律

任给$[A], [B] \in \mathbf{F}/\theta$,

$$-([A] + [B]) = -[A] \times -[B].$$

即,

$$-([A \vee B]) = [\neg A] \times [\neg B].$$

即,

$$[\neg(A \vee B)] = [(\neg A) \wedge (\neg B)].$$

即,

$$\neg(A \vee B) \models |(\neg A \wedge \neg B).$$

$\square$

公式之间的序关系之一

$[A] \leq [B]$当且仅当$[A] + [B] = [B]$.
注意: 在布尔代数中, $x \leq y$当且仅当$x \vee y = y$;
当且仅当$x \wedge y = x$.

公式之间的序关系之一

$$
\begin{aligned}
[A] \leq [B] & \text{当且仅当} [A] + [B] = [B]; \\
& \text{当且仅当} [A \vee B] = [B].
\end{aligned}
$$

公式之间的序关系之一

$$
\begin{aligned}
[A] \leq [B] & \text{当且仅当} [A] + [B] = [B]; \\
& \text{当且仅当} [A \vee B] = [B]; \\
& \text{当且仅当} A \vee B \models |B.
\end{aligned}
$$

公式之间的序关系之一

$$
\begin{aligned}
[A] \leq [B] & \text{当且仅当}[A] + [B] = [B]; \\
& \text{当且仅当}[A \vee B] = [B]; \\
& \text{当且仅当}A \vee B \models |B; \\
& \text{当且仅当}A \vee B \models B.
\end{aligned}
$$

公式之间的序关系之一

$[A] \leq [B]$当且仅当$[A] + [B] = [B]$;
当且仅当$[A \vee B] = [B]$;
当且仅当$A \vee B \models |B$;
当且仅当$A \vee B \models B$;
当且仅当$A \models B$.

问题: 这个布尔代数是什么样的? 最大元素是什么? 是否具有最小元素?

$\mathbf{0} = [A \wedge \neg A]$; $\mathbf{1} = [A \vee \neg A]$.

定理. 命题公式A在一个赋值下的真假值只与赋值在出现在A的命题变元上有关. 即设$p_1, ..., p_n$是出现在A中的所有命题变元, v, w是两个赋值. 如果

$$v(p_1) = w(p_1), ..., v(p_n) = w(p_n)$$

则

$$A^v = A^w.$$

证.

关于永真式

定理. 设$p_1, ..., p_n$是出现在A中的所有命题变元, v, w是两个赋值. 如果

$$v(p_1) = w(p_1), ..., v(p_n) = w(p_n)$$

则$A^v = A^w$.
证: 对公式A作结构归纳法.
如果$A = p$是某个命题变元, 并且$v(p) = w(p)$ 则显然$A^v = v(p) = w(p) = A^w$.
如果$A = \neg B$并且假定结论对B成立, 则$p_1, ..., p_n$是出现在B中的所有命题变元, 所以v, w在所有出现B中的命题变元上的取值相等. 由归纳假设, $B^v = B^w$, 所以$A^v = (\neg B)^v = (\neg B)^w = A^w$.

关于永真式

定理. 设$p_1, ..., p_n$是出现在A中的所有命题变元, v, w是两个赋值. 如果

$$v(p_1) = w(p_1), ..., v(p_n) = w(p_n)$$

则$A^v = A^w$.

证: 如果$A = B \to C$并且假定结论对B, C成立, 则出现在B, C中的命题变元是$p_1, ..., p_n$之一, 因此, 对任何出现B中的命题变元p, $v(p) = w(p)$; 并且对任何出现C中的命题变元q, $v(q) = w(q)$. 由归纳假定, $B^v = B^w$,并且$C^v = C^w$.
所以, $A^v = (B \to C)^v = (B \to C)^w = A^w$.

$\square$

命题的证明

命题. 如果$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$, 则$\Sigma^v = (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v$.
证: 假设$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$.
对任何赋值v,
(1) 如果$\Sigma^v = 1$则对每个$A \in \Sigma, A^v = 1$, 即对每个$1 \leq i \leq n$, $B_i^v = 1$. 因此, $(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 1$;
(2) 如果$\Sigma^v = 0$则存在某个$A \in \Sigma$使得$A^v = 0$, 即对某个$1 \leq i \leq n$, $B_i^v = 0$. 因此, $(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 0$.

命题的证明

命题. 如果$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$, 则$\Sigma^v = (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v$.
证: 假设$\Sigma = \{B_1, ..., B_n\}$.
对任何赋值v,
(1) 如果$\Sigma^v = 1$则对每个$A \in \Sigma$, $A^v = 1$, 即对每个$1 \leq i \leq n$, $B_i^v = 1$. 因此, $(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 1$;
(2) 如果$\Sigma^v = 0$则存在某个$A \in \Sigma$使得$A^v = 0$, 即对某个$1 \leq i \leq n$, $B_i^v = 0$. 因此, $(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 0$.
缺了什么?

引理

引理. 对任何赋值v，$(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 1$当且仅当对每个$1 \leq i \leq n$，$B_i^v = 1$.

引理

引理. 对任何赋值v, $(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 1$当且仅当对每个$1 \leq i \leq n$, $B^v = 1$.
证: 对n作归纳. 当$n = 1$时, $(B_1)^v = 1$当且仅当对每个$1 \leq i \leq 1, B_i^v = 1$.

引理

假设引理对$n = k$成立. 设$n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
&(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n)^v = 1 \\
&\text{当且仅当}((B_1 \wedge \cdots \wedge B_{k+1})^v = 1 \\
&\text{当且仅当}(((B_1 \wedge \cdots \wedge B_k) \wedge B_{k+1})^v = 1 \\
&\text{当且仅当}(B_1 \wedge \cdots \wedge B_k)^v = 1\text{并且}(B_{k+1})^v = 1 \\
&\text{当且仅当}((B_1)^v = 1, \text{并且}, ..., \text{并且}(B_k)^v = 1)\text{并且}(B_{k+1})^v = 1 \\
&\text{当且仅当对每个}1 \leq i \leq n = k + 1, (B_i)^k = 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

命题

命题. 假设A包含命题变元$p_1, ..., p_n$的一个永真式. 设B是用公式$C_1, ..., C_n$替换A中的$p_1, ..., p_n$ 得到的公式. 则B是永真的.
证: 假设A包含命题变元$p_1, ..., p_n$的一个永真式. 对任何赋值v, 定义一个赋值w使得对每个$1 \leq i \leq n$,

$$w(p_i) = (C_i)^v.$$

则我们断言

$$B^v = A^w.$$

由于A是永真式, $A^w = 1$, 所以, $B^v = 1$. 即B是永真式.

断言的证明

证明: 假设A中出现的命题变元为$p_1, ..., p_n$. 任给公式$C_1, ..., C_n$, 设B是用C_i替换A中p_i的出现所得到的公式. 对任何赋值v, 定义w使得对每个$1 \leq i \leq n, w(p_i) = (C_i)^v$. 则$B^v = A^w$.

证: 对A作结构归纳.

假设$A = p_1$为命题变元. 则$B = C_1$. 因此,

$B^v = (C_1)^v = w(p_1) = (A)^w$.

假设$A = \neg D$,并且断言对D是成立的. 设D'是用C_i替换D中p_i的出现所得到的公式. 则$B = \neg D'$, 并且

$$B^v = 1 - (D')^v = 1 - (D)^w = A^w.$$

断言的证明

假设$A = D \to E$, 并且断言对D, E是成立的. 设D', E'分别是用C_i替换D, E中p_i的出现所得到的公式. 则$B = D' \to E'$, 并且

$$\begin{aligned} B^v &= 1 - (D')^v + (E')^v \\ &= 1 - (D)^w + (E)^w \\ &= (D \to E)^w \\ &= A^w. \end{aligned}$$