

第五次作业参考答案 2017 年 12 月 14 日

1、解：

$$(1) Y = E_n \mu + X_1 \alpha + X_2 \beta + e,$$

$$\text{其中, } X_1 = \begin{pmatrix} E_{n_1} & & & \\ & E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{n_a} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} E_{n_{11}} & & & \\ & E_{n_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{n_{ab}} \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{k \times 1}$$

$$\text{Cov}(Y) = \sigma_a^2 X_1 X_1' + \sigma_b^2 X_2 X_2' + \text{Cov}(e)$$

(2)

套分类 A, B 都随机的混合效应模型(不平衡数据)

方差来源	平方和	自由度	随机效应模型下平方和的期望
A 因子	SS_A	$a-1$	$\left(n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a n_{i.}^2\right) \sigma_a^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}^2 \left(\frac{1}{n_{i.}} - \frac{1}{n}\right) \sigma_b^2 + (a-1) \sigma^2$
$B(A)$ 因子	$SS_{B(A)}$	$a(b-1)$	$\left[n - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left(\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}}\right)\right] \sigma_b^2 + a(b-1) \sigma^2$
误差	ESS	$n-ab$	$(n-ab) \sigma^2$
总和	TSS	$n-1$	

其中

$$TSS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2, \quad ESS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2, \quad SS_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2,$$

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2, \quad n = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}, \quad n_{i.} = \sum_{j=1}^b n_{ij}$$

由矩估计方法可求得 $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma^2$.