第一次作业 2017 年 9 月 26 日

注：本次作业必须在 2017 年 10 月 10 日上课前交。

1. 设 A,B 分别为 $n\times m$， $k\times m$ 阶实矩阵，定义集合 $S=\left\{Ax\middle|Bx=0,x\in R^m\right\}$，试证明：$S$ 为线性子空间且维数 $\dim S = rank\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-rank(B)$。

2. 某公司采用一项新技术试验以求提高产品质量，设在试验前，随机抽取 n_1 件产品的质量指标值为 $y_1,y_2,\cdots,y_{n_1}$，它们可看成是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的一组样本。而试验后，随机抽取 n_2 件产品的质量指标值为 $z_1,z_2,\cdots,z_{n_2}$，它们可看成是来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的一组样本。为考察这项新技术的效果，需要比较 μ_1,μ_2，因此需要估计它们。试将这些数据表成线性模型的形式，其设计矩阵是什么？

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求其所有的广义逆 A^-。

4. 设 $X\sim N_3(\mu,\Sigma)$，密度函数为 $f(x_1,x_2,x_3)=c^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}Q(x_1,x_2,x_3)\right]$，其中 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3-6x_1-12x_2+8x_3+19$,求 c,μ,Σ.

5. 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)'$ 联合分布为零均值的正态分布，则 $Ex_1x_2x_3x_4=Ex_1x_2Ex_3x_4+Ex_1x_3Ex_2x_4+Ex_1x_4Ex_2x_3$

6. 设 $X\sim N_2(0,\Sigma)$，这里 $X=(x_1,x_2)',\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{pmatrix}$，证明 $X'\Sigma^{-1}X-\frac{x_1^2}{\sigma_{11}}\sim\chi_1^2$.

7. 设 $V\middle|W\sim\chi^2_{n+2W}$，$W\sim Poisson\left(\frac{\lambda}{2}\right)$，试证明 $V\sim\chi^2_{n,\lambda}$。

8. 设 $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，试证 $Cov(X,X'AX)=2\Sigma A\mu$，$Var(X'AX)=2trace(A\Sigma)^2+4\mu'A\Sigma A\mu$.