第二章　命题逻辑: Gentzen系统

今天内容

1. 公理系统
2. 矢列式
3. Gentzen系统
4. Gentzen系统的可靠性和完备性

命题逻辑的公理系统: 推导规则

逻辑公理: 设A, B, C是L上的公式,
(A1) $A \to (B \to C)$;
(A2) $A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
推导规则: (MP, Modus Ponens): 由A和$A \to B$, 推出B;

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \to A.$

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \to A.$

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (A2)$

$A1.\quad A \to (B \to A);$

$A2.\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C));$

$A3.\quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A).$

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \to A.$

$$
\begin{array}{lll}
1. & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) & (A2) \\
2. & A \to ((A \to A) \to A) & (A1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
A1. & A \to (B \to A); \\
A2. & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)); \\
A3. & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A).
\end{array}
$$

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \to A.$

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ $\quad$ (A2
2. $A \to ((A \to A) \to A)$ $\quad$ (A1
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ $\quad$ $(MP, 1, 2$

$A1.\quad A \to (B \to A);$

$A2.\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C));$

$A3.\quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A).$

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \rightarrow A.$

$$
\begin{array}{lll}
1. & (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) & (A2 \\
2. & A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) & (A1 \\
3. & (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) & (MP, 1, 2 \\
4. & A \rightarrow (A \rightarrow A) & (A1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
A1. & A \rightarrow (B \rightarrow A); \\
A2. & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)); \\
A3. & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A).
\end{array}
$$

公理证明的例子

$(*)\ \vdash_{axiom} A \to A.$

$$\begin{array}{lll}
1. & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) & (A2 \\
2. & A \to ((A \to A) \to A) & (A1 \\
3. & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) & (MP, 1, 2 \\
4. & A \to (A \to A) & (A1 \\
5. & A \to A & (MP, 3, 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
A1. & A \to (B \to A); \\
A2. & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)); \\
A3. & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A).
\end{array}$$

证明和定理

一个公式序列

$$A_1, ..., A_n$$

是一个理论T的一个证明(proof), 如果每个A_i要么是命题逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由推导规则(MP)和前面的公式得到的.

一个公式A是T的定理(theorem), 记为$T \vdash_{axiom} A$, 如果存在T的一个证明$A_1, ..., A_n$使得$A_n = A$.

证明和定理

记$Th(T) = \{A : T \vdash_{axiom} A\}$.
如果$T = \emptyset$则$Th(\emptyset)$称为命题演算.
命题. 对任何理论T,

$$Th(\emptyset) \subseteq Th(T).$$

$\square$

这是命题逻辑的单调性.

可靠性定理

定理. 命题演算的每个定理是逻辑永真的.

$\square$

- 每个公理是永真的;
- 推导规则是保永真的.

规则说明

- 在自然推演系统中, $\Sigma \vdash A$称为矢列式(sequent);
- 在公理系统中, $\Sigma \vdash A$称为一个断言, Σ(公理)推出A.

推导定理

推导定理连接了形式推导系统和公理系统.

命题逻辑的推导定理

定理. 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$则$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

证. 设$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$的公理证明为:

$$C_1, ..., C_i (= B).$$

我们证明对每个$k \leq i, \Sigma \vdash_{axiom} A \to C_k$.

当$k = 1$. 则要么C_1是一个公理, 要么$C_1 \in \Sigma$, 要么$C_1 = A$.

如果C_1是一个公理, 或者$C_1 \in \Sigma$,则

$$C_1, C_1 \to (A \to C_1), A \to C_1$$

是Σ的一个公理证明, 因此, $\Sigma \vdash_{axiom} A \to C_1$.

命题逻辑的推导定理

如果$C_1 = A$ 则由$(*)$, 有$\vdash_{axiom} A \to A$, 更有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to A$.

命题逻辑的推导定理

如果$C_1 = A$ 则由$(*)$, 有$\vdash_{axiom} A \to A$, 更有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to A$.

假设对每个$k' < k, \Sigma \vdash_{axiom} A \to C_{k'}$. 则
(1) C_k是一个公理, 或者
(2) $C_k \in \Sigma$, 或者
(3) $C_k = A$, 或者
(4) 存在$n, m < k$和公式D使得$C_n = D \to C_k$并且$C_m = D$.

由归纳假设, $\Sigma \vdash_{axiom} A \to (D \to C_k)$并且$\Sigma \vdash_{axiom} A \to D$. 设公理证明分别为

$$D_1, ..., D_r (= A \to (D \to C_k));$$
$$E_1, ..., E_s (= A \to D).$$

由归纳假设, $\Sigma \vdash_{axiom} A \to (D \to C_k)$并且$\Sigma \vdash_{axiom} A \to D$. 设公理证明分别为

$$\begin{aligned}&D_1, ..., D_r(= A \to (D \to C_k));\\&E_1, ..., E_s(= A \to D).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&D_1, ..., D_r, E_1, ..., E_s;\\&(A \to (D \to C_k)) \to ((A \to D) \to (A \to C_k)),\\&(A \to D) \to (A \to C_k),\\&A \to C_k\end{aligned}$$

是Σ的一个公理证明. 因此,$\Sigma \vdash_{axiom} A \to C_k$.

命题逻辑形式推导规则系统与公理系统的等价性

根据公理和MP的形式可推导性，得到：如果$\vdash_{axiom} A$ 则$\vdash A$. 如果$\Sigma \vdash_{axiom} A$则$\Sigma \vdash A$.

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash_{axiom} A \quad & \text{蕴涵} \quad \vdash_{axiom} \Sigma \to A \\ & \text{蕴涵} \quad \vdash \Sigma \to A \\ & \text{蕴涵} \quad \Sigma \vdash A. \end{aligned}$$

注意：根据定义，可以直接得到：如果$\Sigma \vdash_{axiom} A$则存在一个有限的集合$\Sigma' \subseteq \Sigma$ 使得$\Sigma' \vdash_{axiom} A$.

形式推导规则系统与公理系统的等价性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

证.

命题逻辑形式推导规则系统与公理系统的等价性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

证. 对形式推导$\Sigma \vdash A$的证明作结构归纳. 对证明的最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.
证. 对形式推导$\Sigma \vdash A$的证明作结构归纳. 对证明的最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.
$(\to^-)$: 假设$\Sigma \vdash B \to A$并且$\Sigma \vdash B$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在$B \to A$和B的Σ公理证明:

$$C_1, ..., C_i (= B \to A),$$
$$D_1, ..., D_j (= B).$$

则

$$C_1, ..., C_i = B \to A, D_1, ..., D_j = B, A.$$

命题逻辑形式推导规则系统与公理系统的等价性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash_{axiom} A$.

证. $(\rightarrow^{+})$: 假设$\Sigma, B \vdash C$并且$A = B \rightarrow C$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设,存在C的$\Sigma \cup \{B\}$公理证明:

$$C_1, ..., C_i (= C).$$

我们证明对每个$k \leq i, \Sigma \vdash_{axiom} B \rightarrow C_k$.

命题逻辑形式推导规则系统与公理系统的等价性

$(\to^+)$: 假设$\Sigma, B \vdash C$并且$A = B \to C$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在C的$\Sigma \cup \{B\}$公理证明:

$$C_1, ..., C_i (= C).$$

我们证明对每个$k \leq i, \Sigma \vdash_{axiom} B \to C_k$.
当$k = 1$. 则要么C_1是一个公理, 要么$C_1 \in \Sigma$, 要么$C_1 = B$.

$(\to^+)$: 假设$\Sigma, B \vdash C$并且$A = B \to C$,则$\Sigma \vdash A$. 由推导定理得出.

推导定理. 如果$\Sigma, B \vdash_{axiom} C$则$\Sigma \vdash_{axiom} B \to C$.

形式推导规则系统与公理系统的等价性

$(\neg^-)$ 假设$\Sigma, \neg A \vdash B$并且$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在$\neg A \to B$和$\neg A \to \neg B$的$\Sigma$公理证明:

$$C_1, ..., C_i (= \neg A \to B),$$
$$D_1, ..., D_j (= \neg A \to \neg B).$$

命题逻辑形式推导规则系统与公理系统的等价性

$(\neg^-)$ 假设$\Sigma, \neg A \vdash B$并且$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$,则$\Sigma \vdash A$. 由归纳假设, 存在$\neg A \to B$和$\neg A \to \neg B$的$\Sigma$公理证明:

$$\begin{array}{l} C_1, \ldots, C_i (= \neg A \to B), \\ D_1, \ldots, D_j (= \neg A \to \neg B). \end{array}$$

则

$$\begin{array}{l} C_1, \ldots, C_i = \neg A \to B, D_1, \ldots, D_j = \neg A \to \neg B, \\ (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A), \\ (\neg A \to \neg B) \to A, \\ A. \end{array}$$

是Σ的一个公理证明.

命题逻辑定理的基本性质

1. 定理的否定不是定理; 命题逻辑的定理集合是一个协调集合;
2. 存在一个公式使得该公式和其否定都不是定理. 因此, 命题逻辑的定理集合不是极大协调集合;
3. 定理的集合是可判定的.

矢列式

设Γ, Δ是公式集合. $\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个矢列式。
有的书表示为$\Gamma \vdash \Delta$.

矢列式中逗号的含义

$\Gamma = \{A_0, ..., A_n, ...\}$, 逗号是合取;
$\Delta = \{B_0, ..., B_m, ...\}$, 逗号是析取。
如果$\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}, \Delta = \{B_1, ..., B_m\}$是有限的公式集合，
则$\Gamma \Rightarrow \Delta$意思为

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_m.$$

原子矢列式

如果Γ, Δ是原子公式的集合，$\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个原子矢列式。

矢列式的可满足性

给定一个赋值v, $\Gamma \Rightarrow \Delta$在$v$下满足，记为$v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$v \models \Gamma$蕴含$v \models \Delta$, 其中

- $v \models \Gamma$ 如果对**每个**公式$A \in \Gamma, v \models A$;
- $v \models \Delta$ 如果对**某个**公式$B \in \Delta, v \models B$;

例子

$A, B, C \Rightarrow C, D, E$是一个矢列式，并且对任何赋值$v$,

$$v \models A, B, C \Rightarrow C, D, E.$$

永真的矢列式

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是永真的，记为$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何赋值$v$,

$$v \models \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

因此，$\models A, B, C \Rightarrow C, D, E$.

Gentzen推理系统

通过该系统，定义$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且有

- 可靠性: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$;
- 完备性: $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Gentzen推理系统

Gentzen推理系统由一个公理和若干个推理规则组成。
公理:

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta,$$

其中Γ, Δ 是命题变元的集合.

Gentzen推理系统: 推导规则

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg B, \Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

矢列式的可证性

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是可证的, 记为$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 如果存在一个序列

$$\{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n\}$$

使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过一个推导规则得到的.

可证的例子

$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$$

可证的例子(111)

$(111)\neg B, \neg A \Rightarrow \neg A, D, A \wedge \neg B$

$(111)\neg B, \neg A \Rightarrow \neg A, D, A \wedge \neg B$

$(111)\neg(A \wedge \neg B), \neg B, \neg A \Rightarrow \neg A, D$

$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$

可证的例子(111)

$(1111) \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D, A$

$(111) \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D, A \wedge \neg B$

$(112) \neg(A \wedge \neg B), \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$

$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$

可证的例子(112)

$(1112) \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D, \neg B$
$(111) \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D, A \wedge \neg B$
$(112) \neg(A \wedge \neg B), \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$
$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$

可证的例子(121)

$$(121)\neg(A\wedge\neg B),\neg A,\neg A\Rightarrow\neg A,D$$
$$\neg(A\wedge\neg B)\vee(D\vee C),\neg B\vee\neg A,\neg A\vee\neg C\Rightarrow\neg A\vee D$$

可证的例子(122)

$(122)\neg(A \wedge \neg B), \neg A, \neg C \Rightarrow \neg A, D$

$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$

可证的例子(211)

$$(211) D \vee C, \neg B, \neg A \Rightarrow \neg A, D$$
$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$$

可证的例子($2^1 12$)

$$(2^1 12) D, \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$$
$$(212) D \vee C, \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$$
$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$$

可证的例子($2^2 12$)

$(2^2 12)\, C, \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$

$(212)\, D \vee C, \neg B, \neg C \Rightarrow \neg A, D$

$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$

可证的例子(221)

$$(221) D \vee C, \neg A, \neg A \Rightarrow \neg A, D$$
$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$$

可证的例子(222)

$$(222) D \vee C, \neg A, \neg C \Rightarrow \neg A, D$$
$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (D \vee C), \neg B \vee \neg A, \neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg A \vee D$$

可证的直观

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

可靠性

对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

可靠性定理证明

证明. 我们证明每个公理是永真的以及每个推导规则保持永真性.

可靠性定理证明

对任何赋值v, 假设$v \models \Gamma, p$. 则, $v \models p$, 因而, $v \models p, \Delta$.
$(\neg^L)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow A, \Delta$. 则对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$ 则$v \models A, \Delta$. 对任何赋值w, 假设$w \models \Gamma, \neg A$. 则$w \models \Gamma$, 由归纳假设, $w \models A, \Delta$. 因为$w \models \neg A, w \models \Delta$.
$(\neg^R)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, B \Rightarrow \Delta$. 则对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma, B$. 对任何赋值$w$, 假设$w \models \Gamma$. 则存在两种情况: (i) $v \models B$. 由归纳假设, $v \models \Delta$, 因而, $v \models \neg A, \Delta$; (ii) $v \not\models A$. 则, $v \models \neg A$, 因而, $v \models \neg A, \Delta$.

可靠性定理证明

$(\wedge_1^L)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma, A_1 \wedge A_2$ 则$v \models \Gamma, A_1$, 由归纳假设, $v \models \Delta$. 类似地讨论情况$(\wedge_2^L)$.
$(\wedge^R)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta$ 并且$v \models \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$ 则存在两种情况: (i) $v \not\models B_1$ 要么$v \not\models B_2$. 由归纳假设, $v \models \Delta$; (ii) $v \models B_1$ 并且$v \models B_2$. 则, $v \models A_1 \wedge A_2$, 因而, $v \models A_1 \wedge A_2, \Delta$.

可靠性定理证明

$(\vee^L)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta$ 并且$v \models \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma, A_1 \vee A_2$ 则$v \models \Gamma$ 且$v \models A_1 \vee A_2$. 存在两种情况: 如果$v \models A_1$ 则由归纳假设, $v \models \Delta$; 并且如果$v \models A_2$ 则由归纳假设, $v \models \Delta$.
$(\vee_1^R)$ 假设对任何赋值$v, v \models \Gamma \Rightarrow B_1, \Delta$. 则, 对任何赋值$v$, 如果$v \models \Gamma$ 则由假设, $v \models B_1, \Delta$. 存在两种情况: $v \models B_1$, 则$v \models B_1 \vee B_2$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$; 且$v \models \Delta$, 因而, $v \models B_1 \vee B_2, \Delta$. 类似地讨论情况$(\vee_2^R)$.

完备性

完备性定理. 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

完备性定理证明

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

完备性定理证明

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

变成

$$(\wedge^L)\ \frac{\Gamma, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

完备性定理证明

给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 将$\Gamma, \Delta$中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式。

如果每个原子矢列式是一个公理，那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明；

如果有某个矢列式不是一个公理，那么可以构造一个赋值v是$v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

完备性定理证明

我们将构造一个树T 使得

- 要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树
- 要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

完备性定理证明

我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

$$(\wedge^L)\ \frac{\Gamma, A_1, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$(\wedge^L), (\vee^R)$不分叉,
$(\wedge^R), (\vee^L)$分叉.
每个叶节点上至少有一个矢列式是公理.

完备性定理证明:$\neg$

任给一个T上的节点$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

完备性定理证明:$\wedge$

Case $(\neg^L)$. 设$\neg A_1, \dots, \neg A_n$为$\Gamma'$中所有以$\neg$为主连接词的公式. 则,设

$$\Gamma'' \Rightarrow A_1, \dots, A_n, \Delta'$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.
Case $(\neg^R)$. 设$\neg B_1, \dots, \neg B_n$为$\Delta'$中所有以$\neg$为主连接词的公式. 则,设

$$\Gamma', B_1, \dots, B_n \Rightarrow \Delta''$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.

完备性定理证明:$\wedge$

Case $(\wedge^L)$. 设$A_1^1 \wedge A_1^2, ..., A_n^1 \wedge A_n^2$为$\Gamma'$中所有以$\wedge$为主连接词的公式. 则, 设

$$\Gamma'', A_1^1, A_1^2, ..., A_n^1, A_n^2 \Rightarrow \Delta'$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点

Case $(\wedge^R)$. 设$B_1^1 \wedge B_1^2, ..., B_n^1 \wedge B_n^2$为$\Delta'$中所有以$\wedge$为主连接词的公式. 则, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有2^n-个直接子节点:

$$\Gamma' \Rightarrow B_1^{f(1)}, ..., B_n^{f(n)}, \Delta'',$$

其中f 是$\{1, ..., n\}$ 到$\{1, 2\}$的一个函数.

完备性定理证明:$\vee$

Case $(\vee^L)$. 设$A_1^1 \vee A_1^2, ..., A_n^1 \vee A_n^2$为$\Gamma'$中所有以$\vee$为主连接词的公式. 则, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有2^n个直接子节点:

$$\Gamma'', A_1^{f(1)}, ..., A_n^{f(n)} \Rightarrow \Delta',$$

其中f 是$\{1, ..., n\}$ 到$\{1, 2\}$的一个函数.
Case $(\vee^R)$. 设$B_1^1 \vee B_1^2, ..., B_n^1 \vee B_n^2$为$\Delta'$中所有以$\vee$为主连接词的公式. 则, 设

$$\Gamma' \Rightarrow B_1^1, B_1^2, ..., B_n^1, B_n^2, \Delta''$$

为$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$的一个直接子节点.

完备性定理证明

如果T的每个叶节点是一个公理则很容易证明T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树;

完备性定理证明

否则, 设γ为一个T的树枝其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个赋值v 使得每个γ上的矢列式是不满足的.

完备性定理证明

否则, 设γ为一个T的树枝其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个赋值v 使得每个γ上的矢列式是不满足的.
设$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$为$\gamma$的叶节点. 定义$v$ 如下: 对任何命题变元p,

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{如果} p \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{如果} p \in \Delta_0 \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

v 是良定的, 因为$\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$; 并且$v \not\models \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, 因为$v \models \Gamma_0$ 并且$v \not\models \Delta_0$.

完备性定理证明

对任何$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \gamma$, 假设$v \not\models \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. 如果$\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则显然; 否则, 存在一个$\Gamma'' \Rightarrow \Delta'' \in \gamma$ 使得$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 是一个$\Gamma'' \Rightarrow \Delta''$的子节点. $\Gamma'' \Rightarrow \Delta''$有下列情形.

Case 1. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, B_1, ..., B_n \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1 \Rightarrow \neg B_1, ..., \neg B_n, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设,
$v \not\models \Gamma_1, B_1, ..., B_n \Rightarrow \Delta_1$, i.e., $v \models \Gamma_1, B_1, ..., B_n$ 并且$v \not\models \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1, v \not\models \neg B_1, ..., \neg B_n, \Delta_1$.

Case 2. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow A_1, ..., A_n, \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1, \neg A_1, ..., \neg A_n \Rightarrow \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设,
$v \not\models \Gamma_1 \Rightarrow A_1, ..., A_n, \Delta_1$, i.e., $v \models \Gamma_1$ 并且$v \not\models A_1, ..., A_n, \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma, v \models \neg A_1, ..., \neg A_n$, 并且$v \not\models \Delta_1$, 即,
$v \models \Gamma_1, \neg A_1, ..., \neg A_n$ 并且$v \not\models \Delta_1$.

完备性定理证明

Case 3. $\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1, A_1^1, A_1^2, ..., A_n^1, A_n^2 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1, A_1^1 \wedge A_1^2, ..., A_n^1 \wedge A_n^2 \Rightarrow \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1, A_1^1, A_1^2, ..., A_n^1, A_n^2 \Rightarrow \Delta_1$, i.e., $v \models \Gamma_1, A_1^1, A_1^2, ..., A_n^1, A_n^2$ 并且$v \not\models \Delta_1$. 因此, $v \models \Gamma_1, A_1^1 \wedge A_1^2, ..., A_n^1 \wedge A_n^2$, 并且$v \not\models \Delta$.

Case 4. 存在一个函数$f : \{1, ..., n\} \to \{1, 2\}$ 使得

$$\begin{cases} \Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_1 \Rightarrow B_1^{f(1)}, ..., B_n^{f(n)}, \Delta_1 \\ \Gamma'' \Rightarrow \Delta'' = \Gamma_1 \Rightarrow B_1^1 \wedge B_1^2, ..., B_n^1 \wedge B_n^2, \Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v \not\models \Gamma_1 \Rightarrow B_1^{f(1)}, ..., B_n^{f(n)}, \Delta_1$, i.e., $v \models \Gamma_1$ 并且$v \not\models B_1^{f(1)}, ..., B_n^{f(n)}, \Delta_1$. Hence, $v \models \Gamma_1$, 并且$v \not\models B_1^1 \wedge B_1^2, ..., B_n^1 \wedge B_n^2, \Delta$.

完备性定理证明

Case 5. 存在一个函数$f:\{1,...,n\}\rightarrow\{1,2\}$ 使得

$$\begin{cases} \Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1, A_1^{f(1)}, ..., A_n^{f(n)}\Rightarrow\Delta_1 \\ \Gamma''\Rightarrow\Delta''=\Gamma_1, A_1^1\vee A_1^2, ..., A_n^1\vee A_n^2\Rightarrow\Delta_1. \end{cases}$$

由归纳假设, $v\not\models\Gamma_1, A_1^{f(1)}, ..., A_n^{f(n)}\Rightarrow\Delta_1$, i.e.,
$v\models\Gamma_1, A_1^{f(1)}, ..., A_n^{f(n)}$, 并且$v\not\models\Delta_1$. 因此,
$v\models\Gamma_1, A_1^1\vee A_1^2, ..., A_n^1\vee A_n^2$, 并且$v\not\models\Delta$.

Case 6. $\begin{cases} \Gamma'\Rightarrow\Delta'=\Gamma_1\Rightarrow B_1^1, B_1^2, ..., B_n^1, B_n^2, \Delta_1 \\ \Gamma''\Rightarrow\Delta''=\Gamma_1\Rightarrow B_1^1\vee B_1^2, ..., B_n^1\vee B_n^2, \Delta_1. \end{cases}$ 由归纳假设, $v\not\models\Gamma_1\Rightarrow B_1^1, B_1^2, ..., B_n^1, B_n^2, \Delta_1$, i.e., $v\models\Gamma_1$, 并且$v\not\models B_1^1, B_1^2, ..., B_n^1, B_n^2, \Delta_1$. 因此, $v\models\Gamma_1$, 并且$v\not\models B_1^1\vee B_1^2, ..., B_n^1\vee B_n^2, \Delta$.

Gentzen系统的特点

容易找到证明，情况组合很多。

逻辑的证明系统比较

系统	公理个数	推导规则数量	机械性
公理系统	多	少	低
自然系统	中	中	中
Gentzen系统	少	多	高