第二章　命题逻辑：可靠性和完备性

上次内容

- 正确理解$\vdash$与$\models$之间的联系
- 命题逻辑中的布尔代数
- 永真公式的基本性质

今天内容

- 元语言
- 命题逻辑形式推理的基本性质：传递性和有限性
- 命题逻辑的可靠性和完备性(第一种证明方法)

元语言

证明: $A \models B$当且仅当$\neg B \models \neg A$.

"A"是命题语言里的公式.

元语言

证明: $A \models B$当且仅当$\neg B \models \neg A$.
"A"是命题语言里的公式.
"$A \models B$"是什么语言里的什么?

元语言

证明: $A \models B$**当且仅当**$\neg B \models \neg A$.
"A"是命题语言里的公式.
"$A \models B$"是什么语言里的什么? 是讨论公式之间逻辑关系的语言里的公式(断言).
"证明, 当且仅当"是什么语言里的什么?

元语言

证明: $A \models B$当且仅当$\neg B \models \neg A$.
"A"是命题语言里的公式.
"$A \models B$"是什么语言里的什么? 是讨论公式之间逻辑关系的语言里的公式(断言).
"证明, 当且仅当"是什么语言里的什么? 是讨论命题逻辑的元语言里的符号.

元语言

"当且仅当"在元语言中对应于

$\models\mid$ 在命题逻辑的语义中

$\vdash\dashv$ 在命题逻辑的语法中

$\leftrightarrow$ 在命题逻辑的语言中

但是'当且仅当'不同任何一个.

蕴涵

$B \models A$当且仅当$\models B \to A$.

蕴涵

$B \models A$当且仅当$\models B \to A$.
$B \vdash A$当且仅当$\vdash B \to A$.

蕴涵

$B \models A$当且仅当$\models B \to A$.
$B \vdash A$当且仅当$\vdash B \to A$.
$B \models A$与$B \to A$没有等价方面的关系

蕴涵

$B \models A$当且仅当$\models B \rightarrow A$.
$B \vdash A$当且仅当$\vdash B \rightarrow A$.
$B \models A$与$B \rightarrow A$没有等价方面的关系
因为$B \models A$与$B \rightarrow A$是在不同语言中的公式(断言).

蕴涵

$B \models A$当且仅当$\models B \to A$.
$B \vdash A$当且仅当$\vdash B \to A$.
$B \models A$与$B \to A$没有等价方面的关系
因为$B \models A$与$B \to A$是在不同语言中的公式(断言).
没法建立$B \models A$与$B \to A$之间的关系?
affirmative.

蕴涵

只是如何的问题.
两种解决办法: 给定两个语言: 语言和子语言,
在这里,
语言: 讨论命题逻辑性质的元语言, 包含符号$\models$, $\vdash$;
子语言: 命题逻辑的语言

蕴涵

只是如何的问题.
两种解决办法: 给定两个语言: 语言和子语言,

- 一个是提升子语言中的断言到语言中, 并在语言中讨论;

蕴涵

只是如何的问题.
两种解决办法: 给定两个语言: 语言和子语言,
- 一个是**提升**子语言中的断言到语言中, 并在语言中讨论;
- 一个是将元语言中的断言**解释**到子语言中, 并在子语言中进行讨论.

蕴涵

提升:
$A \to B$是一个公式,
$\vdash A \to B, A \vdash B$是一个元语言断言.
解释:
$A \vdash B$是一个元语言断言;
$\vdash A \to B$; $A \to B$是一个公式, A和B在公式结构上具有一定的性质.

形式推理规则的结构

形式推演规则: 自反

$$(Ref)\ \text{自反} \qquad A \vdash A.$$

形式推演规则: 单调性

$$(+) \qquad \begin{array}{l} \text{如果}\Sigma \vdash A, \\ \text{则}\Sigma, \Sigma' \vdash A. \end{array}$$

形式推演规则: $\neg$

$$
(\neg^-) \qquad \begin{array}{rl} \text{如果} & \Sigma, \neg A \vdash B, \\ & \Sigma, \neg A \vdash \neg B, \\ \text{则} & \Sigma \vdash A. \end{array}
$$

形式推演规则: $\to$

$$
\begin{array}{lrl}
(\to^-) & \text{如果} & \Sigma \vdash A \to B, \\
 & & \Sigma \vdash A, \\
 & \text{则} & \Sigma \vdash B.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
(\to^+) & \text{如果} & \Sigma, A \vdash B, \\
 & \text{则} & \Sigma \vdash A \to B.
\end{array}
$$

形式推演规则: $\wedge$

$$
\begin{array}{lrl}
(\wedge^-) & \text{如果} & \Sigma \vdash A \wedge B, \\
 & \text{则} & \Sigma \vdash A, \\
 & & \Sigma \vdash B. \\
 & & \\
(\wedge^+) & \text{如果} & \Sigma \vdash A, \\
 & & \Sigma \vdash B, \\
 & \text{则} & \Sigma \vdash A \wedge B.
\end{array}
$$

形式推演规则: $\vee$

$$
\begin{array}{lrl}
(\vee^-) & \text{如果} & \Sigma, A \vdash C, \\
 & & \Sigma, B \vdash C, \\
 & \text{则} & \Sigma, A \vee B \vdash C. \\
 & & \\
(\vee^+) & \text{如果} & \Sigma \vdash A, \\
 & \text{则} & \Sigma \vdash A \vee B, \\
 & & \Sigma \vdash B \vee A.
\end{array}
$$

形式推演规则: $\leftrightarrow$

$$
\begin{array}{llr l}
(\leftrightarrow^-) & & \text{如果} & \Sigma \vdash A \leftrightarrow B, \\
& & & \Sigma \vdash A, \\
& & \text{则} & \Sigma \vdash B; \\
\\
& & \text{如果} & \Sigma \vdash A \leftrightarrow B, \\
& & & \Sigma \vdash B, \\
& & \text{则} & \Sigma \vdash A; \\
\\
(\leftrightarrow^+) & & \text{如果} & \Sigma, A \vdash B, \\
& & & \Sigma, B \vdash A, \\
& & \text{则} & \Sigma \vdash A \leftrightarrow B.
\end{array}
$$

形式推理的例子

证明: $A \leftrightarrow B \vdash (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

形式推理的例子

证明: $A \leftrightarrow B \vdash (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

$A \leftrightarrow B \vdash \quad A \rightarrow B$

$A \leftrightarrow B \vdash \quad B \rightarrow A$

形式推理的例子

证明: $A \leftrightarrow B \vdash (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

$$\begin{array}{ll} A \leftrightarrow B \vdash & A \rightarrow B \\ A \leftrightarrow B \vdash & B \rightarrow A \\ A \rightarrow B \vdash & (\neg A \vee B) \\ B \rightarrow A \vdash & (A \vee \neg B) \end{array}$$

形式推理的例子

证明:
$$\begin{array}{l} A \vdash \neg A \to B; \\ B \vdash A \to B. \end{array}$$

形式推理的例子

证明: $A \vdash \neg A \to B$;

形式推理的例子

证明: $A \vdash \neg A \to B$;

$$
\begin{array}{rl}
\hline
A, \neg A, \neg B \vdash & A \\
A, \neg A, \neg B \vdash & \neg A \\
A, \neg A \vdash & B \\
A \vdash & \neg A \to B.
\end{array}
$$

形式推理的例子

证明: $B \vdash A \to B$.

形式推理的例子

证明: $B \vdash A \to B$.

$$\begin{aligned} B &\vdash B \\ B, A &\vdash B \\ B &\vdash A \to B. \end{aligned}$$

形式推理的例子

定理. (iv) $A \vee B \vdash\dashv \neg A \rightarrow B$.

形式推理的例子

定理. (iv) $A \vee B \vdash \neg A \to B$.

形式推理的例子

定理. (iv) $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$.

$$\frac{\begin{array}{rl} A \vdash & \neg A \rightarrow B \\ B \vdash & \neg A \rightarrow B \end{array}}{A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B.}$$

形式推理的例子

定理. (iv) $\neg A \to B \vdash A \vee B$.

形式推理的例子

定理. (iv) $\neg A \to B \vdash A \vee B$.

$$
\begin{array}{rl}
\hline
A \vdash & A \vee B \\
\neg(A \vee B) \vdash & \neg A \\
\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \neg A \\
\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \neg A \to B \\
\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & B \\
\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & A \vee B \\
\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash & \neg(A \vee B) \\
\neg A \to B \vdash & A \vee B.
\end{array}
$$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则

$$\Sigma \vdash A.$$

传递性

一个关系r是传递的, 如果对任意x, y, z, $r(x, y)$和$r(y, z)$蕴涵$r(x, z)$.

传递性

一个关系r是传递的, 如果对任意x, y, z, $r(x, y)$和$r(y, z)$蕴涵$r(x, z)$.
逻辑中的传递性:

传递性

一个关系r是传递的, 如果对任意x, y, z, $r(x, y)$和$r(y, z)$蕴涵$r(x, z)$.
逻辑中的传递性:
(1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;

传递性

一个关系r是传递的, 如果对任意x, y, z, $r(x, y)$和$r(y, z)$蕴涵$r(x, z)$.

逻辑中的传递性:

(1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;

(2) $A \vdash B$并且$B \vdash C$蕴涵$A \vdash C$.

传递性

一个关系r是传递的, 如果对任意x, y, z, $r(x, y)$和$r(y, z)$蕴涵$r(x, z)$.
逻辑中的传递性:
(1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;
(2) $A \vdash B$并且$B \vdash C$蕴涵$A \vdash C$.
(2)的一般形式:
定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则

$$\Sigma \vdash A.$$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	$\Sigma' \vdash A$	(assumption)

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, \ldots, A_n$	$\vdash A$	

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, \ldots, A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, \ldots, A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots)$	(*ibid*)

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	(*ibid*)
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(+, (4))$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots)$	$(ibid)$
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots)$	$(+, (4))$
(6)	Σ	$\vdash A_1$	$(A_1 \in \Sigma')$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \Sigma' & \vdash A & \text{(assumption)} \\
(2) & A_1, ..., A_n & \vdash A & \\
(3) & A_1, ..., A_{n-1} & \vdash A_n \to A & (\to^+, (2)) \\
(4) & \emptyset & \vdash A_1 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots) & (\mathit{ibid}) \\
(5) & \Sigma & \vdash A_1 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots) & (+, (4)) \\
(6) & \Sigma & \vdash A_1 & (A_1 \in \Sigma') \\
(7) & \Sigma & \vdash A_2 \to (\cdots(A_n \to A)\cdots) & (\to^-, (5), (6))
\end{array}
$$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \Sigma' & \vdash A & \text{(assumption)} \\
(2) & A_1, ..., A_n & \vdash A & \\
(3) & A_1, ..., A_{n-1} & \vdash A_n \to A & (\to^+, (2)) \\
(4) & \emptyset & \vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots) & (\textit{ibid}) \\
(5) & \Sigma & \vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots) & (+, (4)) \\
(6) & \Sigma & \vdash A_1 & (A_1 \in \Sigma') \\
(7) & \Sigma & \vdash A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots) & (\to^-, (5), (6)) \\
(8) & \Sigma & \vdash A_n \to A & (\textit{ibid})
\end{array}
$$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$		(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$		
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$		$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$		$(ibid)$
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$		$(+, (4))$
(6)	Σ	$\vdash A_1$		$(A_1 \in \Sigma')$
(7)	Σ	$\vdash A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$		$(\to^-, (5), (6))$
(8)	Σ	$\vdash A_n \to A$		$(ibid)$
(9)	Σ	$\vdash A_n$		$(A_n \in \Sigma')$

形式推理的传递性

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	(*ibid*)
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(+, (4))$
(6)	Σ	$\vdash A_1$	$(A_1 \in \Sigma')$
(7)	Σ	$\vdash A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(\to^-, (5), (6))$
(8)	Σ	$\vdash A_n \to A$	(*ibid*)
(9)	Σ	$\vdash A_n$	$(A_n \in \Sigma')$
(10)	Σ	$\vdash A$	$(\to^-, (8), (9))$

问题?

定理. (trans) 如果$\Sigma \vdash \Sigma'$,并且$\Sigma' \vdash A$, 则$\Sigma \vdash A$.

(1)	Σ'	$\vdash A$	(assumption)
(2)	$A_1, ..., A_n$	$\vdash A$	
(3)	$A_1, ..., A_{n-1}$	$\vdash A_n \to A$	$(\to^+, (2))$
(4)	$\emptyset$	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	(*ibid*)
(5)	Σ	$\vdash A_1 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(+, (4))$
(6)	Σ	$\vdash A_1$	$(A_1 \in \Sigma')$
(7)	Σ	$\vdash A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots)$	$(\to^-, (5), (6))$
(8)	Σ	$\vdash A_n \to A$	(*ibid*)
(9)	Σ	$\vdash A_n$	$(A_n \in \Sigma')$
(10)	Σ	$\vdash A$	$(\to^-, (8), (9))$

形式证明的基本定理

定理2.6.2. 如果$\Sigma \vdash A$, 则存在有限的$\Sigma^0 \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

形式证明的基本定理

定理2.6.2. 如果$\Sigma \vdash A$, 则存在有限的$\Sigma^0 \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

证明. 假设$\Sigma \vdash A$. 则存在公式集合序列$(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$和公式序列$(A_1, ..., A_n)$使得

$$\Sigma_1 \vdash A_1, ..., \Sigma_n \vdash A_n$$

是一个证明, 其中$\Sigma_n = \Sigma, A_n = A$.

形式证明的基本定理的证明

定理2.6.2. 如果$\Sigma \vdash A$, 则存在有限的$\Sigma^0 \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

证明. 我们对$\Sigma \vdash A$的证明长度n作归纳, 并且对最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.

形式证明的基本定理的证明

定理2.6.2. 如果$\Sigma \vdash A$, 则存在有限的$\Sigma^0 \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

证明. 我们对$\Sigma \vdash A$的证明结构作归纳, 并且对最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.
如果最后一步使用的形式推理规则是$(\in)$则$A \in \Sigma$.
设$\Sigma^0 = \{A\}$, 有$\Sigma^0 \vdash A$.

形式证明的基本定理的证明

如果最后一步使用的形式推理规则是(+)则存在Σ'和$i < n$使得

$$\Sigma' \subseteq \Sigma,$$
$$\Sigma' \vdash A = \Sigma_i \vdash A_i.$$

由归纳假设, 存在有限的$\Sigma^{0,\prime} \subseteq \Sigma'$使得$\Sigma^{0,\prime} \vdash A$. 设$\Sigma^0 = \Sigma^{0,\prime}$, 则有

$$\Sigma^0 \vdash A.$$

形式证明的基本定理的证明

如果最后一步使用的形式推理规则是$(\neg^-)$则存在一个公式B和$i, j < n$使得

$$\frac{\begin{array}{l} \Sigma_i \vdash A_i = \Sigma, \neg A \quad \vdash B \\ \Sigma_j \vdash A_j = \Sigma, \neg A \quad \vdash \neg B \end{array}}{\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \quad \vdash A.}$$

则定理对$\Sigma, \neg A \vdash B$和$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$是成立的.

形式证明的基本定理的证明

如果最后一步使用的形式推理规则是$(\neg^-)$则存在一个公式B和$i, j < n$使得

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma_i \vdash A_i = \Sigma, \neg A \quad \vdash B \\ \Sigma_j \vdash A_j = \Sigma, \neg A \quad \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \quad \vdash A.}$$

则定理对$\Sigma, \neg A \vdash B$和$\Sigma, \neg A \vdash \neg B$是成立的. 我们首先证明
(1) 存在有限的$\Sigma_1 \subseteq \Sigma$使得$\Sigma_1, \neg A \vdash B$;
(2) 存在有限的$\Sigma_2 \subseteq \Sigma$使得$\Sigma_2, \neg A \vdash \neg B$.

形式证明的基本定理的证明

(1) 由归纳假设，存在有限的$\Sigma' \subseteq \{\Sigma, \neg A\}$使得$\Sigma' \vdash B$. 这里有两种情况:
a) 如果$\neg A \notin \Sigma'$, 则设$\Sigma_1 = \Sigma'$, 并有$\Sigma_1, \neg A \vdash B$;
b) 如果$\neg A \in \Sigma'$, 则设$\Sigma_1 = \Sigma' - \{\neg A\}$, 并有$\Sigma_1, \neg A \vdash B$.
类似地证明(2).

形式证明的基本定理的证明

这样, 我们有

$$\Sigma_1, \neg A \vdash B;$$
$$\Sigma_2, \neg A \vdash \neg B.$$

因此

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash B;$$
$$\Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash \neg B;$$
$$\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash A.$$

形式证明的基本定理的证明

因此

$$\begin{aligned}&\Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash B;\\&\Sigma_1, \Sigma_2, \neg A \vdash \neg B;\\&\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash A.\end{aligned}$$

设$\Sigma^0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 则有

$$\Sigma^0 \vdash A,$$

因为$\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash A$.
类似地讨论其它8种形式推演规则.

$\square$

语义与形式语义

设p, q是命题变元. 语义将p, q映射为命题,
比如设
$p =$张三打人;
$q =$张三骂人.
则$p \wedge q$解释为复合命题

"张三打人, 与张三骂人".

如果命题"张三骂人"为真, 而命题"张三打人"为假, 则复合命题"张三打人,与张三骂人"为假. 理由是"与命题"的真值表.

语义与形式语义

而形式语义是将p, q映射为0,1值.
形式语义为一个赋值v. 如果$v(p) = 0$且$v(q) = 1$则

$$(p \wedge q)^v = 0.$$

语法与语义

$\Sigma \models A$ (逻辑推论)
$\Sigma \vdash A$ (形式推论)

语法与语义

$\Sigma \models A$ (逻辑推论)
$\Sigma \vdash A$ (形式推论)
加上形式推导规则模式:
如果$\Sigma \vdash A \to B$并且$\Sigma \vdash \neg A \to B$则$\Sigma \vdash B$.

逻辑推论与形式推论

首先逻辑推论是确定的, 事先定义好的.

逻辑推论与形式推论

首先逻辑推论是确定的, 事先定义好的.
形式推论是人为给出的.

逻辑推论与形式推论

首先逻辑推论是确定的, 事先定义好的.
形式推论是人为给出的.
我们希望
(1) 形式推论不会推出更多的东西;
(2) 形式推论不会推出更少的东西.
'更多, 更少'是相对逻辑推论而言的.

逻辑推论与形式推论

首先逻辑推论是确定的, 事先定义好的.
形式推论是人为给出的.
我们希望
(1) 形式推论不会推出更多的东西(可靠性);
(2) 形式推论不会推出更少的东西(完备性).

逻辑推论与形式推论

可靠性: 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$;
完备性: 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

命题逻辑的可靠性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$.

命题逻辑的可靠性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$.

证. 对$\Sigma \vdash A$的形式证明长度作归纳，并且对最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.

命题逻辑的可靠性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$.

证. 对$\Sigma \vdash A$的形式证明长度作归纳，并且对最后一步用到的形式推导规则分情况讨论.

情况1. 最后用到的是$(\in)$. 则$A \in \Sigma$. 所以$\Sigma \models A$.

如果$A \in \Sigma$则$\Sigma \models A$.

命题逻辑的可靠性

定理. 如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \models A$.

证. 对$\Sigma \vdash A$的形式证明中最后用到的形式推导规则分情况讨论.

情况1. 最后用到的是$(\in)$. 则$A \in \Sigma$. 所以$\Sigma \models A$.

情况2. 最后用的是$(+)$. 则存在Σ'使得

$$\Sigma' \subseteq \Sigma,$$
$$\Sigma' \vdash A.$$

由归纳假设, $\Sigma' \models A$. 所以$\Sigma \models A$.

如果$\Sigma' \subseteq \Sigma$并且$\Sigma' \models A$ 则$\Sigma \models A$.

情况3. 最后用的是$(\neg^-)$. 则存在一个公式B使得

$$\frac{\begin{array}{rl}\Sigma, \neg A & \vdash B \\ \Sigma, \neg A & \vdash \neg B\end{array}}{\begin{array}{rl}\Sigma & \vdash A.\end{array}}$$

由归纳假设, $\Sigma, \neg A \models B$和$\Sigma, \neg A \models \neg B$. 则$\Sigma \models A$.
如果$\Sigma, \neg A \models B$并且$\Sigma, \neg A \models \neg B$ 则$\Sigma \models A$.

命题逻辑的可靠性

情况3. 最后用的是$(\neg^-)$. 则存在一个公式B使得

$$\frac{\begin{array}{ll}\Sigma, \neg A & \vdash B \\ \Sigma, \neg A & \vdash \neg B\end{array}}{\Sigma \ \vdash A.}$$

由归纳假设, $\Sigma, \neg A \models B$和$\Sigma, \neg A \models \neg B$. 则$\Sigma \models A$.
反证法: 假设存在一个赋值v使得$\Sigma^v = 1$并且$(A)^v = 0$.
则$(\neg A)^v = 1$, 所以, $(B)^v = (\neg B)^v = 1$. 矛盾.
类似地考虑其它情况. $\square$

定理. 如果$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

证.

引理1. 设A是一个含有命题变元$p_1, ..., p_n$的公式. 任给一个赋值v, 定义: 对每个$1 \leq i \leq n$,

$$A_i = \begin{cases} p_i & \text{如果} p_i^v = 1 \\ \neg p_i & \text{如果} p_i^v = 0. \end{cases}$$

则
(i) 如果$A^v = 1$则$A_1, ..., A_n \vdash A$.
(ii) 如果$A^v = 0$则$A_1, ..., A_n \vdash \neg A$.
证. 对A的结构作归纳.

命题逻辑的完备性

假设$A = p_1$.
如果$A^v = 1$则$A_1 = p_1$, 且$A_1 \vdash p_1$, 即$A_1 \vdash A$;
如果$A^v = 0$则$A_1 = \neg p_1$, 且$A_1 \vdash \neg p_1$, 即$A_1 \vdash \neg A$.

假设$A = \neg B$并且结论对B是成立的.
(i) 如果$A^v = 1$则$(B)^v = 0$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash \neg B$,
即$A_1, ..., A_n \vdash A$;

命题逻辑的完备性

假设$A = \neg B$并且结论对B是成立的.
(i) 如果$A^v = 1$则$(B)^v = 0$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash \neg B$,
即$A_1, ..., A_n \vdash A$;
(ii) 如果$A^v = 0$则$(B)^v = 1$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash B$.

$$
\begin{aligned}
A_1, ..., A_n \vdash &\quad B \\
B \vdash &\quad \neg\neg B \\
B \vdash &\quad \neg A \\
A_1, ..., A_n \vdash &\quad \neg A
\end{aligned}
$$

命题逻辑的完备性

假设$A = B \to C$并且结论对B, C是成立的.
(i) 如果$A^v = 1$
(ii) 如果$A^v = 0$

命题逻辑的完备性

假设$A = B \to C$并且结论对B, C是成立的.
(i) 如果$A^v = 1$则或者
(i1) $(B)^v = 1$并且$(C)^v = 1$;
(i2) $(B)^v = 0$并且$(C)^v = 0$; 或者
(i3) $(B)^v = 0$并且$(C)^v = 1$;

命题逻辑的完备性

(i1) $(B)^v = 1$并且$(C)^v = 1$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash B$,并且$A_1, ..., A_n \vdash C$.

$$\begin{aligned} A_1, ..., A_n \vdash &\quad C \\ A_1, ..., A_n, B \vdash &\quad C \\ A_1, ..., A_n \vdash &\quad B \to C \\ A_1, ..., A_n \vdash &\quad A \end{aligned}$$

(i2) $(B)^v = 0$并且$(C)^v = 0$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash \neg B$,并且$A_1, ..., A_n \vdash \neg C$.

$$\begin{array}{rl} A_1, ..., A_n \vdash & \neg B \\ A_1, ..., A_n, \neg C \vdash & \neg B \\ A_1, ..., A_n \vdash & \neg C \to \neg B \\ \neg C \to \neg B \vdash & B \to C \\ A_1, ..., A_n \vdash & A \end{array}$$

命题逻辑的完备性

(i3) $(B)^v = 0$并且$(C)^v = 1$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash \neg B$,并且$A_1, ..., A_n \vdash C$.

$$\begin{aligned} A_1, ..., A_n &\vdash C \\ A_1, ..., A_n, B &\vdash C \\ A_1, ..., A_n &\vdash B \to C \\ A_1, ..., A_n &\vdash A \end{aligned}$$

命题逻辑的完备性

(ii) 如果$A^v = 0$则$(B)^v = 1$并且$(C)^v = 0$. 由归纳假设, $A_1, ..., A_n \vdash B$,并且$A_1, ..., A_n \vdash \neg C$.

$$
\begin{array}{rl}
A_1, ..., A_n \vdash & B \\
A_1, ..., A_n, B \to C \vdash & B \\
A_1, ..., A_n, B \to C \vdash & B \to C \\
A_1, ..., A_n, B \to C \vdash & C \\
A_1, ..., A_n \vdash & \neg C \\
A_1, ..., A_n, B \to C \vdash & \neg C \\
A_1, ..., A_n \vdash & \neg(B \to C) \\
A_1, ..., A_n \vdash & \neg A
\end{array}
$$

$\square$

引理证明

引理2. 如果$\Sigma, B \vdash A$并且$\Sigma, \neg B \vdash A$则$\Sigma \vdash A$.

引理证明

引理2. 如果$\Sigma, B \vdash A$并且$\Sigma, \neg B \vdash A$则$\Sigma \vdash A$.
$(\neg^{+})$ 如果$\Sigma, A \vdash C$并且$\Sigma, A \vdash \neg C$则$\Sigma \vdash \neg A$.
$(\neg^{-})$ 如果$\Sigma, \neg A \vdash C$并且$\Sigma, \neg A \vdash \neg C$则$\Sigma \vdash A$.

引理证明

引理2. 如果$\Sigma, B \vdash A$并且$\Sigma, \neg B \vdash A$则$\Sigma \vdash A$.

$$
\begin{aligned}
\Sigma, B &\vdash A \\
\Sigma &\vdash B \to A \\
B \to A &\vdash \neg A \to \neg B \\
\Sigma &\vdash \neg A \to \neg B \\
\Sigma, \neg B &\vdash A \\
\Sigma &\vdash \neg B \to A \\
\neg B \to A &\vdash \neg A \to B \\
\Sigma &\vdash \neg A \to B
\end{aligned}
$$

引理证明

引理2. 如果$\Sigma, B \vdash A$并且$\Sigma, \neg B \vdash A$则$\Sigma \vdash A$.

$$
\begin{aligned}
\Sigma &\vdash \neg A \to \neg B \\
\Sigma &\vdash \neg A \to B \\
\Sigma, \neg A &\vdash \neg A \\
\Sigma, \neg A &\vdash \neg A \to \neg B \\
\Sigma, \neg A &\vdash \neg B \\
\Sigma, \neg A &\vdash \neg A \to B \\
\Sigma, \neg A &\vdash B \\
\Sigma &\vdash A
\end{aligned}
$$

命题逻辑的完备性的证明

我们证明如果$\models A$则$\vdash A$.
假设A含有命题变元$p_1, ..., p_n$. 定义一个赋值v使得对每个$1 \leq i \leq n$, $v(p_i) = 1$. 则由引理1, 对每个$1 \leq i \leq n$, $A_i = p_i$,并且

$$A_1, A_2, ..., A_n \vdash A,$$

即

$$p_1, p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{1}$$

命题逻辑的完备性的证明

设w是一个赋值使得

	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
$w(p)$	0	1	$\cdots$	1.

则对w运用引理1, 存在$A_1 = \neg p_1, A_2 = p_2, ..., A_n = p_n$,并且

$$\neg p_1, p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{2}$$

由(1)和(2), 和引理2, 我们得到

$$p_2, ..., p_n \vdash A. \tag{3}$$

命题逻辑的完备性的证明

设w_1, w_2是赋值使得

	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n
$w_1(p)$	0	0	1	$\cdots$	1
$w_2(p)$	1	0	1	$\cdots$	1

则有

$$\begin{aligned} \neg p_1, \neg p_2, p_3, \ldots, p_n &\vdash A, \\ p_1, \neg p_2, p_3, \ldots, p_n &\vdash A. \end{aligned}$$

由引理2, 有

$$\neg p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash A. \tag{4}$$

由(3)和(4), 和引理2, 我们得到

$$p_3, \ldots, p_n \vdash A. \tag{5}$$

命题逻辑的完备性的证明

设w_1, w_2, w_3, w_4是赋值使得

	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_n
$w_1(p)$	0	0	0	1	$\cdots$	1
$w_2(p)$	1	0	0	1	$\cdots$	1
$w_3(p)$	0	1	0	1	$\cdots$	1
$w_4(p)$	1	1	0	1	$\cdots$	1

则有

$$\begin{aligned}
\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n &\vdash A, \\
p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n &\vdash A, \\
\neg p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n &\vdash A, \\
p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n &\vdash A;
\end{aligned}$$

命题逻辑的完备性的证明

分别用引理2于前2个和后2个式子, 得到

$$\neg p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n \vdash A,$$
$$p_2, \neg p_3, p_4, \ldots, p_n \vdash A.$$

用引理2于上2个式子, 得到

$$\neg p_3, p_4, \ldots, p_n \vdash A. \tag{6}$$

由(5)和(6), 和引理2, 我们得到

$$p_4, \ldots, p_n \vdash A.$$

注意: 整个消除过程需要从一个赋值v开始构造2^n个赋值.

命题逻辑的完备性的证明

证明: 如果Σ是**有限的**并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.

假设$\Sigma \models A$. 则$\models \Sigma \to A$. 由上述证明, 有$\vdash \Sigma \to A$.

$$
\begin{aligned}
\vdash &\ \Sigma \to A \\
\Sigma \vdash &\ \Sigma \to A \\
\Sigma \vdash &\ \Sigma \\
\Sigma \vdash &\ A
\end{aligned}
$$

命题逻辑的完备性的证明

问题: 这样的证明能否推广到无穷的Σ?
证明: 如果Σ是**无穷的**并且$\Sigma \models A$则$\Sigma \vdash A$.
$\vdash$-有限性: 如果$\Sigma \vdash A$则存在一个有限子集$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma' \vdash A.$$

$\models$-有限性? 如果$\Sigma \models A$则存在一个有限子集$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得

$$\Sigma' \models A.$$

如果有$\models$-有限性, 则完备性可以证明如下: 假设$\Sigma \models A$.
设$\Sigma' \subseteq \Sigma$使得$\Sigma' \models A$. 由有限完备性定理, $\Sigma' \vdash A$, 由$(+)$, $\Sigma \vdash A$.

分析法(analytic method)

整个句子的意思是组成句子成分的意思的某种函数.
The Frege Principle: The meaning of a complex expression is a function of the meanings of its parts.
一个公式的在一个赋值下的真假值是由A出现的原子公式在赋值下的真假值在公式的逻辑连接词所对应的函数.

原子主义

任何一个个体可以分解为不可再分解的部分(原子);
个体的性质是由原子的性质以及原子之间的关系的性质所决定.

综合法

综合法(synthetic method)是与分析法的相对的方法.
因为一个整体可能具有某个性质不是组成部分所具有性质的复合.
$1 + 1 > 2$.