第三章　谓词逻辑：公理系统和Gentzen系统

上次内容

- 代换(substitution)
- (谓词逻辑的)逻辑推论
- 形式推导规则
- 形式证明

今天内容

- (谓词逻辑的)公理系统
- 矢列式
- Gentzen系统
- Gentzen系统的可靠性和完备性
- 算术公理系统和公理集合论

代换

代换的形式化过程

直觉定义

$[x/s]t$表示用项s替换x在t中每个出现所得到的项;

$[x/s]\varphi$表示用项s替换x在φ中每个**自由**出现所得到的公式.

$$
\begin{array}{lll}
[x/s]x & = s & \\
[x/s]y & = y & \text{if } x \neq y \\
[x/s]\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) & = \mathbf{f}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \\
[x/s]\mathbf{p}(t_1, ..., t_n) & = \mathbf{p}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \\
[x/s](\forall y\varphi) & = \forall y[x/s]\varphi & \\
[x/s](\neg\varphi) & = \neg([x/s]\varphi) & \\
[x/s](\varphi \to \psi) & = ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi) &
\end{array}
$$

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题

代换

代换的形式化过程

直觉定义

发现问题

$[y/x](\forall y(\mathbf{f}(y) = y)) = \forall y(\mathbf{f}(x) = x))$

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题
基本条件(本体论假设)
界定变量的命名是无关紧要的.
代换的基本要求: 一个封闭公式在代换应具有它原来所要表示的意思.
公式中变量符号的自由出现和囿界出现

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题
基本条件(本体论假设)
修改定义

$$
\begin{array}{ll}
[x/s]x & = s \\
[x/s]y & = y \qquad\qquad \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) & = \begin{cases} \forall y\varphi & \text{if } y = x \\ \forall y[x/s]\varphi & \text{if } y \neq x \end{cases} \\
[x/s](\varphi \to \psi) & = ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi)
\end{array}
$$

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题
基本条件(本体论假设)
修改定义
发现问题
$[x/y](\forall y(y = x)) = \forall y(y = y)$.
变量扑捉

代换

代换的形式化过程

直觉定义 发现问题 基本条件(本体论假设) 修改定义 发现问题 修改定义

$$
\begin{aligned}
[x/s]x &= s \\
[x/s]y &= y \qquad\qquad\qquad \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) &= \begin{cases} \forall y\varphi & \text{if } y = x \\ \forall y[x/s]\varphi & \text{if } y \neq x \text{ and } y \notin var(s) \end{cases} \\
[x/s](\varphi \to \psi) &= ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi)
\end{aligned}
$$

不是全函数

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题
基本条件(本体论假设)
修改定义
发现问题
修改定义
假设
假定: 项“在界定变量的重新命名下” 是相同的.

代换

代换的形式化过程
直觉定义
发现问题
基本条件(本体论假设)　修改定义　发现问题　修改定义　假设
正确定义

$$
\begin{aligned}
[x/s]x &= s & & \\
[x/s]y &= y & & \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) &= \forall y[x/s]\varphi & & \text{if } y \neq x \text{ and } y \notin var(s) \\
[x/s](\varphi \to \psi) &= ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi) & &
\end{aligned}
$$

排版约定

斜体(意大利体)的字母表示数学变量;
英文单词的缩写为正体.
e应该是斜体还是正体?
微分符号d是斜体还是正体?
时刻注意符号的变化的说明.

形式推演

$$(\forall^-) \quad \frac{\Sigma \vdash \forall x A(x)}{\Sigma \vdash A(t)};$$

形式推演

$$(\forall^+)\quad \frac{\Sigma \vdash A(x)}{\Sigma \vdash \forall x A(x)};$$

其中x不在Σ中自由出现.
如果对任何赋值v, $\Sigma^v = 1$蕴涵$(A(x))^v = 1$, 则对任何赋值$v, \Sigma^v = 1$蕴涵$(\forall x A(x))^v = 1$.

$$\begin{array}{lll} x + x = 0 \vdash & x + x = 0 & \qquad (ref) \\ x + x = 0 \vdash & \forall x(x + x = 0). & \end{array}$$

形式推演

$$(\exists^-)\quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & (ref) \\
\exists x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \\
\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \\
\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0) \vdash & \forall x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0) & (\forall^+).
\end{array}$$

形式推演

$$(\exists^+) \quad \frac{\Sigma \vdash A(t)}{\Sigma \vdash \exists x A(x)}.$$

注意, 在$(\exists^+)$中, $A(x)$是用x替换$A(t)$中(可以部分的)t.

形式推演

$(\equiv^+)\quad \vdash x \equiv x;$ (≡的自反性)

$$(\equiv^-)\quad \frac{\Sigma \vdash A(t_1),\, t_1 \equiv t_2}{\Sigma \vdash A(t_2)}.$$

可以证明:

≡的对称性: $\vdash x \equiv y \to y \equiv x$

≡的传递性: $\vdash x \equiv y \wedge y \equiv z \to x \equiv z$

公式的形式可推演性

公式A是Σ-形式可推演的, 如果存在一个Σ-证明

$$\Sigma_1 \vdash A_1, \dots, \Sigma_n \vdash A_n$$

使得

$$\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \vdash A.$$

证明的例子3

命题. (1) $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \forall x A(x) \to \forall x B(x)$;
(2) $A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(A \to B(x))$, 其中$x$不在$A$中出现;
(3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$, 其中$x$不在$B$中出现;
(4) $\exists x A(x) \to B \vdash\dashv \forall x(A(x) \to B)$, 其中$x$不在$B$中出现.

一阶逻辑的公理系统: 公理

逻辑公理: 设A, B, C是L上的公式,
(A1) $A \to (B \to A)$;
(A2) $A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
(A4) $\forall x A(x) \to A(t)$, 其中t是在$A(x)$中对x自由的一个项, 即t可代换x;
(A5) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ 如果A中不含任何自由出现的x.

一阶逻辑的公理系统: 推导规则

逻辑公理: 设A, B, C是L上的公式,
(A1) $A \to (B \to A)$;
(A2) $A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
(A4) $\forall x A(x) \to A(t)$, 其中t是在$A(x)$中对x自由的一个项, 即t可代换x;
(A5) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ 如果A中不含任何自由出现的x.
推导规则:

1. (MP, Modus Ponens): 由A和$A \to B$, 推出B;
2. 推广(Gen, generalization): 由A, 推出$\forall x A$.

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A.$

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

(1) $\forall x \forall y A$ (假设)

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

(1)	$\forall x \forall y A$	(假设)
(2)	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	(公理$A4$)

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

(1)	$\forall x \forall y A$	(假设)
(2)	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	(公理$A4$)
(3)	$\forall y A$	$(1, 2, MP)$

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall x \forall y A & (\text{假设}) \\
(2) & \forall x \forall y A \to \forall y A & (\text{公理}A4) \\
(3) & \forall y A & (1, 2, MP) \\
(4) & \forall y A \to A & (A4)
\end{array}
$$

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall x \forall y A & (\text{假设}) \\
(2) & \forall x \forall y A \to \forall y A & (\text{公理}A4) \\
(3) & \forall y A & (1, 2, MP) \\
(4) & \forall y A \to A & (A4) \\
(5) & A & (3, 4, MP)
\end{array}
$$

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

(1)	$\forall x \forall y A$	(假设)
(2)	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	(公理$A4$)
(3)	$\forall y A$	$(1, 2, MP)$
(4)	$\forall y A \to A$	$(A4)$
(5)	A	$(3, 4, MP)$
(6)	$\forall x A$	$(5, Gen)$

证明的例子

$\vdash_{axiom} \forall x \forall y A \to \forall y \forall x A.$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall x \forall y A & (\text{假设}) \\
(2) & \forall x \forall y A \to \forall y A & (\text{公理}A4) \\
(3) & \forall y A & (1, 2, MP) \\
(4) & \forall y A \to A & (A4) \\
(5) & A & (3, 4, MP) \\
(6) & \forall x A & (5, Gen) \\
(7) & \forall y \forall x A & (6, Gen).
\end{array}
$$

注意：在证明中运用到了Gen规则.

规则说明

一个公式A在解释I下为真, 记为$I \models A$, 如果对任何赋值v, $I, v \models A$.

规则说明

在形式推导规则中, "如果$\Sigma \vdash A$则$\Sigma \vdash B$"是说: 如果对任何解释I和赋值v, $I, v \models \Sigma$蕴含$I, v \models A$, 则对任何解释J和赋值w, $J, w \models \Sigma$蕴含$J, w \models A$.

在形式理论中, 每个公理是永真的, 即在任何解释I和赋值v下是真的; 形式理论的推导规则是保永真的, 即如果一个句子A是由另外一个或两个句子B通过推导规则得到的, 且B是永真的, 则A是永真的.

规则说明

一个公式A在解释I下为真, 记为$I \models A$, 如果对任何赋值v, $I, v \models A$.
如果由A推导出B, 记为$A \vdash_{axiom} B$, 则对任何解释I, 如果对任何赋值v, $I, v \models A$则对任何赋值v, $I, v \models B$.

规则说明

如果由A和$A \to B$推出B, 则对任何解释I
“对任何赋值v, $I, v \models A, A \to B$”
蕴含
“对任何赋值v, $I, v \models B$.

规则说明

如果由$A(x)$推出$\forall x A(x)$, 则对任何解释I,
“对任何赋值v, $I, v \models A(x)$”
蕴含
“对任何赋值v, $I, v \models \forall x A(x)$.
注意: 错误的解释: 对任何解释I和赋值v,
“$I, v \models A(x)$蕴含$I, v \models \forall x A(x)$”.

重要的定理们

命题. 如果t在$A(x)$中对x是自由的, 则

$$\forall x A(x) \vdash_{axiom} A(t).$$

$\square$

命题. 设t在$A(x,t)$中对x是自由的. 则

$$A(t,t) \vdash_{axiom} \exists x A(x,t),$$

其中$A(t,t)$是用t替换$A(x,t)$中所有自由出现的x得到的公式.

$\square$

重要的定理们

命题. 如果t在$A(x)$中对x是自由的, 则

$$\forall x A(x) \vdash_{axiom} A(t).$$

$\square$

命题. 设t在$A(x,t)$中对x是自由的. 则

$$A(t,t) \vdash_{axiom} \exists x A(x,t),$$

其中$A(t,t)$是用t替换$A(x,t)$中所有自由出现的x得到的公式.

$\square$

$(\forall^-)$ $\dfrac{\Sigma \vdash \forall x A(x)}{\Sigma \vdash A(t)}$; $(\forall^-_w)$ $\dfrac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(t)}$; $(\exists^+)$ $\dfrac{\Sigma \vdash A(t)}{\Sigma \vdash \exists x A(x)}$;

$(\exists^+_w)$ $\dfrac{\vdash A(t)}{\vdash \exists x A(x)}$; 其中$x$不在$\Sigma$中出现.

一阶理论

定义. 一阶理论是一阶公式的集合.
一个理论中不同于一阶逻辑公理的公式称为该一阶理论的真公理.

一阶理论的例子

Peano的算术假设:
(P1) 0是一个自然数;
(P2) 如果x是一个自然数, 存在另一个自然数, 记为x' (称为x的后继);
(P3) 对任何自然数x, $x' \neq 0$;
(P4) 如果$x' = y'$则$x = y$;
(P5) 如果Q是一个性质对任意给定的自然数它可以成立也可以不成立, 并且,
如果(i) 0具有性质Q, 并且
当一个自然数x具有性质Q时, x'具有性质Q,
则所有自然数具有性质Q.

一阶理论的例子

设$L = \{', \mathbf{0}, =\}$. 则下列公式

$$\begin{aligned}
& x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3); \\
& x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'; \\
& \mathbf{0} \neq x_1'; \\
& x_1' = x_2' \to x_1 = x_2; \\
& A(\mathbf{0}) \wedge \forall x (A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x),
\end{aligned}$$

其中$A(x)$是L上任何公式.
这个公理系统称为Peano算术, 记为PA.

一阶理论的例子

设$L = \{', \mathbf{0}, =\}$. 则下列公式

$$\begin{array}{l}
\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)); \\
\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'); \\
\forall x_1 (\mathbf{0} \neq x_1'); \\
\forall x_1 \forall x_2 (x_1' = x_2' \to x_1 = x_2); \\
A(\mathbf{0}) \land \forall x (A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x),
\end{array}$$

其中$A(x)$是L上任何公式.
这个公理系统称为Peano算术, 记为PA.

一阶理论的模型

定义. 设T是一个一阶理论. T的一个模型(model)是L的一个解释, 在这个解释下所有T的公理为真.
一个公式A在解释I下为真, 记为$I \models A$, 如果对任何赋值v, $I, v \models A$.

一阶理论的模型

定义. 设T是一个一阶理论. T的一个模型(model)是L的一个解释, 在这个解释下所有T的公理为真.
一个公式A在解释I下为真, 记为$I \models A$, 如果对任何赋值v, $I, v \models A$.

一阶理论的证明和定理

一个公式序列

$$A_1, \ldots, A_n$$

是一阶理论T的一个证明(proof), 如果每个A_i要么是一阶逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由推导规则(MP,Gen)和前面的公式得到的.

一阶理论的证明和定理

一个公式序列

$$A_1, \dots, A_n$$

是一阶理论T的一个证明(proof), 如果每个A_i要么是一阶逻辑的公理的事例, 要么是T中的公式, 要么由推导规则(MP,Gen)和前面的公式得到的.
一个公式A是T的定理(theorem), 记为$T \vdash_{axiom} A$, 如果存在T的一个证明$A_1, \dots, A_n$使得$A_n = A$.

一阶理论的证明和定理

记$Th(T) = \{A : T \vdash_{axiom} A\}$.
如果$T = \emptyset$则$Th(\emptyset)$称为谓词演算, 或一阶逻辑演算.
命题. 对任何理论T,

$$Th(\emptyset) \subseteq Th(T).$$

$\square$

这是谓词逻辑的单调性.

协调的一阶理论

定义. 一个一阶理论T是协调的, 如果不存在公式A使得A和$\neg A$是T的定理; 否则T是不协调的.

协调的一阶理论

定义. 一个一阶理论T是不协调的, 如果存在公式A使得A和$\neg A$是T的定理; 否则T是协调的.

推论. 一阶谓词演算是协调的.

$\square$

对于不协调的理论T, 每个公式都是T的定理.

推导定理

命题逻辑中的推导定理在一阶理论中不一定成立: 对任何公式A, B, 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$ 则$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.
存在公式A 使得$A \vdash_{axiom} \forall x A$ 是成立的, 但$\vdash_{axiom} A \to \forall x A$不一定成立.

推导定理

比如: 设T为一阶谓词演算, $A = \mathbf{p}(x)$.
设论域中含有至少2个元素c, d, 并且解释I使得$\mathbf{p}^I(c), \neg\mathbf{p}^I(d)$.
定义赋值v为$x^v = c$. 则

$$v \models \mathbf{p}(x);$$
$$v \not\models \forall x \mathbf{p}(x).$$

推导定理

推导定理. 如果$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$, 并且在证明$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$中没有用到推广规则, 则有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

证. 省略.

$\square$

推论. 如果A是封闭公式, 并且$\Sigma, A \vdash_{axiom} B$, 则有$\Sigma \vdash_{axiom} A \to B$.

命题

命题. 对任何公式A, B, $\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall x A \leftrightarrow \forall x B)$.

证明.

$$\forall x(A \to B)$$
$$\forall x A$$
$$A \to B$$
$$A$$
$$B$$
$$\forall x B$$
$$\forall x(A \leftrightarrow B), \forall x A \vdash \forall x B$$
$$\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall x A \to \forall x B$$
$$\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall x B \to \forall x A$$
$$\forall x(A \leftrightarrow B) \vdash \forall x A \leftrightarrow \forall x B$$
$$\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall x A \leftrightarrow \forall x B).$$

一阶逻辑的形式推演

一阶逻辑的形式推演与命题逻辑的形式推演之间的计算差别:

- 可计算的;
- 半可计算的.

矢列式

设Γ, Δ是公式集合. $\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个矢列式。
$\Gamma \vdash \Delta$.

矢列式中逗号的含义

$\Gamma = \{A_0, ..., A_n, ...\}$, 逗号是合取;
$\Delta = \{B_0, ..., B_m, ...\}$, 逗号是析取。
如果$\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}, \Delta = \{B_1, ..., B_m\}$是有限的公式集合，
则$\Gamma \Rightarrow \Delta$意思为

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_m.$$

原子矢列式

如果Γ, Δ是原子公式的集合，$\Gamma \Rightarrow \Delta$是一个原子矢列式。

矢列式的可满足性

给定一个模型M和赋值v, $\Gamma \Rightarrow \Delta$在$(M, v)$下满足，记为$M, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$M, v \models \Gamma$蕴含$M, v \models \Delta$, 其中

- $M, v \models \Gamma$ 如果对**每个**公式$A \in \Gamma, M, v \models A$;
- $M, v \models \Delta$ 如果对**某个**公式$B \in \Delta, M, v \models B$;

例子

$\Rightarrow \neg\exists y \forall x (p(x, y) \leftrightarrow \neg p(x, x))$是一个矢列式.

永真的矢列式

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$是永真的，记为$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果对任何赋值$v$,

$$M, v \models \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Gentzen推理系统

通过该系统，定义$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且有

- 可靠性: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$;
- 完备性: $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$蕴含$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Gentzen推理系统

Gentzen推理系统由一个公理和若干个推理规则组成。
公理:

$$\frac{\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset}{\Gamma \Rightarrow \Delta},$$

其中Γ, Δ 是原子公式的集合.

Gentzen推理系统: 逻辑连接词的推导规则

$$(\neg^L)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg^R)\ \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg B, \Delta}$$

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(\vee^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\vee_1^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

$$(\vee_2^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta}$$

Gentzen推理系统: 量词的推导规则

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B(x), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x B(x), \Delta}$$

$$(\exists^L)\ \frac{\Gamma, A(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\exists^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x B(x), \Delta}$$

其中t是一个项，x是一个新的变量符号。

矢列式的可证性

一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是可证的, 记为$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 如果存在一个序列

$$\{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n\}$$

使得$\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n = \Gamma \Rightarrow \Delta$, 并且对每个$1 \leq i \leq n, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 要么是一个公理, 要么由此前的矢列式通过一个推导规则得到的.

不可证的例子

$$\Rightarrow \neg\exists y\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))$$

不可证的例子

$$\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))$$

不可证的例子

$$\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \land (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \land (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \land (\neg p(x,x) \to p(x,y)))$$

不可证的例子

$$(p(c,y) \to \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \to p(c,y)) \Rightarrow$$
$$\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))$$

不可证的例子

$$
\begin{aligned}
&\forall x((p(x,c) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,c))) \Rightarrow \\
&(p(c,y) \to \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \to p(c,y)) \Rightarrow \\
&\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow \\
&\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))
\end{aligned}
$$

不可证的例子

$$(p(d,c) rt \neg p(d,d)) \wedge (\neg p(d,d) \rightarrow p(d,c)) \Rightarrow$$
$$\forall x((p(x,c) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,c))) \Rightarrow$$
$$(p(c,y) \rightarrow \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \rightarrow p(c,y)) \Rightarrow$$
$$\forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\exists y \forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y)))$$

不可证的例子

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (p(d,c) \to \neg p(d,d)) \Rightarrow \\
&(p(d,c) \to \neg p(d,d)) \wedge (\neg p(d,d) \to p(d,c)) \Rightarrow \\
&\forall x((p(x,c) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,c))) \Rightarrow \\
&(p(c,y) \to \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \to p(c,y)) \Rightarrow \\
&\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow \\
&\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))
\end{aligned}
$$

不可证的例子

$(11)\ \neg p(d,c) \Rightarrow\ \ \&\ (12)\neg p(d,d)$

$(1)\ (p(d,c) \rightarrow \neg p(d,d)) \Rightarrow$

$(p(d,c) \rightarrow \neg p(d,d)) \wedge (\neg p(d,d) \rightarrow p(d,c)) \Rightarrow$

$\forall x((p(x,c) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,c))) \Rightarrow$

$(p(c,y) \rightarrow \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \rightarrow p(c,y)) \Rightarrow$

$\forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y))) \Rightarrow$

$\exists y \forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y))) \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\exists y \forall x((p(x,y) \rightarrow \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \rightarrow p(x,y)))$

不可证的例子

$$
\begin{aligned}
&(21)\ p(d,d) \Rightarrow\ \ \&\ (22) p(d,c)\\
&(2)\ \neg p(d,d) \to p(d,c) \Rightarrow\\
&(p(d,c) \to \neg p(d,d)) \wedge (\neg p(d,d) \to p(d,c)) \Rightarrow\\
&\forall x((p(x,c) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,c))) \Rightarrow\\
&(p(c,y) \to \neg p(c,c)) \wedge (\neg p(c,c) \to p(c,y)) \Rightarrow\\
&\forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow\\
&\exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y))) \Rightarrow\\
&\Rightarrow \neg \exists y \forall x((p(x,y) \to \neg p(x,x)) \wedge (\neg p(x,x) \to p(x,y)))
\end{aligned}
$$

无穷长的证明例子

$$
\begin{array}{l}
\vdots \\
\forall y A(c_3, y) \Rightarrow \\
A(c_2, c_3) \Rightarrow \\
\forall y A(c_2, y) \Rightarrow \\
A(c_1, c_2) \Rightarrow \\
\forall y A(c_1, y) \Rightarrow \\
A(a, c_1) \Rightarrow \\
\forall y A(a, y) \Rightarrow \\
\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow
\end{array}
$$

无穷长的证明例子

$$
\begin{array}{l}
\vdots \\
\Rightarrow A(c_3, c_4) \\
\Rightarrow \exists y A(c_3, y) \\
\Rightarrow A(c_2, c_3) \\
\Rightarrow \exists y A(c_2, y) \\
\Rightarrow A(c_1, c_2) \\
\Rightarrow \exists y A(c_1, y) \\
\Rightarrow A(a, c_1) \\
\Rightarrow \exists y A(a, y) \\
\Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)
\end{array}
$$

非无穷长的证明例子

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A(c,c)\\ &\Rightarrow \forall y A(c,y)\\ &\Rightarrow \exists x \forall y A(x,y) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &A(c,c) \Rightarrow\\ &\exists y A(c,y) \Rightarrow\\ &\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \end{aligned}$$

可靠性

对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

可靠性定理证明

证明. 我们证明每个公理是永真的以及每个推导规则保持永真性.

可靠性定理证明

给定一个模型$\mathbf{M}$和一个赋值v。
对于公理，假设$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$，其中$\Gamma, \Delta$是原子公式的集合。假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma$。则，存在一个原子公式$l$使得$l \in \Gamma \cap \Delta$，并且根据归纳假设，$\mathbf{M}, v \models l$，因此，$\mathbf{M}, v \models \Delta$。

可靠性定理证明

给定一个模型$\mathbf{M}$和一个赋值v。
对于$(\forall^L)$，假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta$。为了证明$\mathbf{M}, v \models \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta$，假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma, \forall x A(x)$。则对于模型$\mathbf{M}$的论域中的任意元素$c$，$\mathbf{M}, v(x/c) \models A(x)$。令$c = t^{I,v}$，我们有

$$\mathbf{M}, v(x/t^{I,v}) \models A(x),$$

即，$\mathbf{M}, v \models A(t)$。根据归纳假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta$，我们有$\mathbf{M}, v \models \Delta$。

可靠性定理证明

对于$(\forall^R)$，假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma \Rightarrow A(a), \Delta$。为了证明$\mathbf{M}, v \models \Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta$，假设$\mathbf{M}, v \models \Gamma$。根据归纳假设$\mathbf{M}, v \models A(a), \Delta$。如果$\mathbf{M}, v \models \Delta$则$\mathbf{M}, v \models \forall x A(x), \Delta$。否则，假设$\mathbf{M}, v \models A(a)$。因为$a$不在$\Gamma$和$\Delta$中出现，对于模型$\mathbf{M}$的论域中的任意元素$c$，$\mathbf{M}(a^I = c), v \models \Gamma$，并且，$\mathbf{M}(a^I = c), v \models A(c)$，即，$\mathbf{M}, v(x/c) \models A(x)$。因此，我们有$\mathbf{M}, v \models \forall x A(x)$。

完备性

完备性定理. 对任何矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 如果$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ 则$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

完备性定理证明

比较

$$(\wedge_1^L)\ \frac{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow B_1, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta}$$

$$(\wedge_2^L)\ \frac{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$$

和

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta}$$

完备性定理证明

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta}$$

变成

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(c_1) \wedge \cdots \wedge A(c_n), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta}$$

完备性定理证明

给定一个矢列式$\Gamma \Rightarrow \Delta$, 将$\Gamma, \Delta$中每个公式通过规则分解为若干个原子矢列式。
如果每个原子矢列式是一个公理，那么分解过程反过来是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明；
如果有某个矢列式不是一个公理，那么可以构造一个赋值v是$v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

完备性定理证明

我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

完备性定理证明

我们将构造一个树T 使得要么T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树要么存在一个树枝$\gamma \in T$ 和一个赋值v 使得每个γ中的矢列式在赋值v下是不满足的.

$$(\forall^L)\ \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\forall^R)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta}$$

$(\wedge^L), (\vee^R)$不分叉,
$(\wedge^R), (\vee^L)$分叉.
$(\forall^L), (\exists^R)$不分叉,
$(\forall^R), (\exists^L)$分叉.

完备性定理证明

$$
\begin{cases}
\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1, \neg A \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\Gamma_1, B \Rightarrow \Delta_1 & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \neg B, \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_1 \in \xi \\
\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, A_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \Gamma_1, A_2 \Rightarrow \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \\
\left[\begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1, \Delta_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow B_2, \Delta_1 \end{array}\right. & \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_1 \in \xi
\end{cases}
$$

其中$\left[\begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array}\right.$ 表示δ_1, δ_2在同一个子节点中; 而$\left\{\begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array}\right.$ 表示δ_1, δ_2在不同的子节点中.

完备性定理证明:$\neg$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1, A_1(c) \Rightarrow \Delta_1; c\text{不出现在}T\text{中} \\ \Gamma_2 \Rightarrow B(c), \Delta_2; \text{对每个}\Gamma_2 \Rightarrow \forall x B(x), \Delta_2 \subseteq \xi \\ \Gamma_2, A'(c) \Rightarrow \Delta_2; \text{对每个}\Gamma_2, \exists x A'(x) \Rightarrow \Delta_2 \subseteq \xi \end{array} \right. \\ \text{如果}\Gamma_1, \forall x A_1(x) \Rightarrow \Delta_1 \in \xi \end{array} \right.$$

其中$\left[\begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array} \right.$ 表示δ_1, δ_2在同一个子节点中; 而$\left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array} \right.$ 表示δ_1, δ_2在不同的子节点中.

完备性定理证明:¬

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow B_1(c), \Delta_1; c\text{不出现在}T\text{中} \\ \Gamma_2 \Rightarrow B(c), \Delta_2; \text{对每个}\Gamma_2 \Rightarrow \forall x B(x), \Delta_2 \subseteq \xi \\ \Gamma_2, A'(c) \Rightarrow \Delta_2; \text{对每个}\Gamma_2, \exists x A'(x) \Rightarrow \Delta_2 \subseteq \xi \end{array} \right. \\ \text{如果}\Gamma_1 \Rightarrow \exists x B_1(x), \Delta_1 \in \xi \end{array} \right.$$

其中$\left[\begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array} \right.$ 表示δ_1, δ_2在同一个子节点中; 而$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array} \right.$ 表示δ_1, δ_2在不同的子节点中.

完备性定理证明

如果T的每个叶节点是一个公理则很容易证明T 是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树;

定理. 如果对每个T的枝$\xi \subseteq T$, 存在一个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$为**G**的公理，则$T$是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树。

证明. 由T的定义，T是$\Gamma \Rightarrow \Delta$的一个证明树。

完备性定理证明

否则, 设γ为一个T的树枝其叶节点不是一个公理, 则我们定义一个模型M和赋值v 使得每个γ上的矢列式是不满足的.

完备性定理证明

定理. 如果存在一个枝$\xi \subseteq T$使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$均不是$\mathbf{G}$的公理，则存在一个模型$\mathbf{M}$和一个赋值$v$使得$\mathbf{M}, v \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明. 设ξ为T的枝使得每个矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$不是$\mathbf{G}$的公理。

完备性定理证明

设

$$\Theta^L = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Gamma',$$
$$\Theta^R = \bigcup_{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi} \Delta'.$$

定义一个模型$\mathbf{M} = (U, I)$和赋值v如下:

- U为出现在T中的所有常量符号的集合;
- 对每个常量符号c, $I(c) = c$, 并且对每个n-元谓词符号p, $I(p) = \{(c_1, ..., c_n) : p(c_1, ..., c_n) \in \Theta^L\}$;
- $v(x) = x$.

完备性定理证明

我们对节点$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$做归纳证明$v(\Theta^L) = 1$并且$v(\Theta^R) = 0$, 即, 对每个$\Gamma' \Rightarrow \Delta' \in \xi$, $v(\Gamma') = 1$ 并且$v(\Delta') = 0$.

我们对ξ的节点η做归纳证明对每个η上的矢列式$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$，均有$v(\Gamma') = 1$ 并且$v(\Delta') = 0$.

情况 1. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \neg A_1 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow A_1, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, A_1) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2, \neg A_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$.

情况 2. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \neg B_1, \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, B_1 \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, B_1) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, \neg B_1) = 0$.

完备性定理证明

情况 3. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, A_1 \Rightarrow \Delta_2$ 并且$\Gamma_2, A_2 \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, A_1) = v(\Gamma_2, A_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$, i.e., $v(\Gamma_2, A_1 \wedge A_2) = 1$并且$v(\Delta_2) = 0$.

情况 4. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2, \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow B_i, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, B_i) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, B_1 \wedge B_2) = 0$.

完备性定理证明

情况 5. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, A_i \Rightarrow \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2, A_i) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2, A_1 \vee A_2) = 1$并且$v(\Delta_2) = 0$.
情况 6. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow B_1 \vee B_2, \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow B_1, \Delta_2$并且$\Gamma_2 \Rightarrow B_2, \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, B_1) = v(\Delta_2, B_2) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, B_1 \vee B_2) = 0$.

完备性定理证明

情况 7. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2, \forall x A_1(x) \Rightarrow \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2, A_1(d) \Rightarrow \Delta_2$，对每个$d \in U$. 由归纳假设, 对每个$d \in U$ $v(\Gamma_2, A_1(d)) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$. 因此,
$v(\Gamma_2, \forall x A_1(x)) = 1$ 并且$v(\Delta_2) = 0$.
情况 8. $\Gamma' \Rightarrow \Delta' = \Gamma_2 \Rightarrow \forall x B_1(x), \Delta_2 \in \eta$. 则$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$有一个直接子节点包含矢列式$\Gamma_2 \Rightarrow B_1(c), \Delta_2$. 由归纳假设, $v(\Gamma_2) = 1$并且$v(\Delta_2, B_1(c)) = 0$. 因此, $v(\Gamma_2) = 1$ 并且$v(\Delta_2, \forall x B_1(x)) = 0$.

Gentzen系统的特点

容易找到证明，情况组合很多。

逻辑的证明系统比较

系统	公理个数	推导规则数量	机械性
公理系统	多	少	低
自然系统	中	中	中
Gentzen系统	少	多	高

一阶理论

定义. 一阶理论是一阶公式的集合.
一个理论中不同于一阶逻辑公理的公式称为该一阶理论的真公理.

形式数论

归纳定义+和·:

$$t + r = \begin{cases} t & \text{if } r = \mathbf{0} \\ (t + r_1)' & \text{if } r = r_1' \end{cases}$$

$$t \cdot r = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if } r = \mathbf{0} \\ (t \cdot r_1) + t & \text{if } r = r_1' \end{cases}$$

引理. 对任何项t, s, r, 下面公式是PA的定理:

(1) $t = r \wedge t = s \to r = s$;

(2) $t = r \to t' = r'$;

(3) $\mathbf{0} \neq t'$;

(4) $t' = r' \to t = r$;

(*5) $t + \mathbf{0} = t$;

(6) $t + r' = (t + r)'$;

(7) $t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

(8) $t \cdot r' = (t \cdot r) + t$.

$\square$

形式数论

命题. 对任何项t, s, r, 下面公式是PA的定理:

(1) $t = t$;
(2) $t = r \to r = t$;
(3) $t = r \wedge r = s \to t = s$;
(4) $r = t \wedge s = t \to r = s$;
(5) $t = r \to t + s = r + s$;
(6) $t = \mathbf{0} + t$;
(7) $t' + r = (t + r)'$;
(8) $t + r = r + t$;
(9) $t = r \to s + t = s + r$;
(10) $(t + r) + s = t + (r + s)$;
(11) $t = r \to t \cdot s = r \cdot s$;
(12) $\mathbf{0} \cdot t = \mathbf{0}$;
(13) $t' \cdot r = t \cdot r + r$.

形式数论:(1) $t = t$;

证明.

(1) $t + \mathbf{0} = t$;

$$(t + \mathbf{0} = t) \rightarrow (t + \mathbf{0} = t \rightarrow t = t);$$

$$t + \mathbf{0} = t \rightarrow t = t;$$

$$t = t.$$

形式数论:(2) $t = r \to r = t$;

(2) $t = r \wedge t = t \to r = t$;

$t = t \wedge t = r \to r = t$;

$t = r \to r = t$;

形式数论:(5) $t = r \to t + s = r + s$;

(5) 对公式$x = y \to x + z = y + z$作归纳证明.

(5.1) $x + \mathbf{0} = x$;

$y + \mathbf{0} = y$;

$x = y$;

$x + \mathbf{0} = y$;

$x + \mathbf{0} = y + \mathbf{0}$;

$\vdash_{PA} x = y \to x + \mathbf{0} = y + \mathbf{0}$.

形式数论

(5.2) $x = y \to x + z = y + z$;

$$
\begin{aligned}
& x = y \\
& x + z' = (x + z)' \\
& y + z' = (y + z)' \\
& x + z = y + z \\
& (x + z)' = (y + z)' \\
& x + z' = (y + z)' \\
& x + z' = y + z' \\
& \vdash_{PA} (x = y \to x + z = y + z) \to (x = y \to x + z' = y + z').
\end{aligned}
$$

利用归纳公理, 得到

$$\vdash_{PA} \forall z(x = y \to x + z = y + z).$$

利用规则A4, 得到

$$\vdash_{PA} t = r \to t + s = r + s.$$

形式数论的标准模型和非标准模型

将PA解释到结构**N**中:

- 论域为自然数;
- $\equiv^{I}$==为自然数的相等;
- $\mathbf{0}^{I} = 0$;
- $'^{I} = \lambda x.(x+1)$.

那么可以验证PA的每个真公理在$\mathcal{N}$中是真的.

称**N**为PA的标准模型.

如果PA的一个模型与**N**不同构, 那么这个模型称为PA的非标准模型(nonstandard).

公理集合论

Russell 悖论: 设$A(x) = x \notin x$. 定义

$$V = \{x : A(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

如果$V \in V$则$V \notin V$;
如果$V \notin V$则$V \in V$.

公理集合论的语言

公理集合论的语言L_{set}包含$=, \in$, 分别表示集合的相等和属于关系, 不含函数符号.
原子公式为

$$x \in y$$

或

$$x = y.$$

类

给定一个公式$A(x)$, 称

$$C = \{x : A(x)\}$$

为类(class).
类C为满足性质$A(x)$的元素的集体, 即

$$x \in C \text{ iff } A(x).$$

类的相等

两个类相等, 如果他们具有相同的成员:
如果$C = \{x : A(x)\}, D = \{x : B(x)\}$则$C = D$当且仅当对任何$x$,

$$A(x) \leftrightarrow B(x).$$

所有集合组成的类称为论域类, 或论域, 即

$$V = \{x : x = x\}.$$

类的运算$\cup, \cap, \setminus$

$$\begin{aligned}
C \cap D = \{x : x \in C \wedge x \in D\} &= \{x : A(x) \wedge B(x)\};\\
C \cup D = \{x : x \in C \vee x \in D\} &= \{x : A(x) \vee B(x)\};\\
C \setminus D = \{x : x \in C \wedge x \notin D\} &= \{x : A(x) \wedge \neg B(x)\}.
\end{aligned}$$

这些就是朴素集合论的基本内容. 在公理集合论中他们只是关于类的理论.

公理集合论的公理1

1. 外延性: 如果X和Y具有相同的元素, 则$X = Y$:

$$\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y;$$

2. 配对: 对任何集合a和b 存在一个集合$\{a, b\}$只包含a和b :

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b);$$

3. 分离模式: 设$A(x)$是一个公式. 对任何X, 存在一个集合$Y = \{x \in X : A(x)\}$:

$$\forall X \exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow x \in X \wedge A(x)\};$$

公理集合论的公理2

4. 并: 对任何X存在一个集合$Y = \bigcup X$:

$$\forall X \exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge x \in z));$$

5. 幂集: 对任何X存在一个集合$Y = P(X)$:

$$\forall X \exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow x \subseteq X);$$

6. 无穷集: 存在一个归纳集合:

$$\exists S (\emptyset \in S \wedge \forall x \in S (x \cup \{x\} \in S));$$

公理集合论的公理3

7. 替换模式: 如果F是一个函数集合, 则对任何X, $F(X)$是一个集合: 对每个公式$A(x,y)$,

$$\begin{aligned}&\forall x\forall y\forall z(A(x,y)\wedge A(x,z)\to y=z)\\&\qquad\to\forall X\exists Y\forall y(y\in Y\leftrightarrow\exists x\in XA(x,y));\end{aligned}$$

8. 正则公理: 每个非空集合有一个$\in$-极小元素;

公理集合论的公理4

9. 选择公理: 每个非空集合组成的集簇有一个选择函数.
其中: 给定一个非空集合组成的集簇X, 函数f是X的一个选择函数, 如果对每个集合$Y \in X, f(Y)$ 有定义, 并且$f(Y) \in Y$.