数 理 逻 辑

眭跃飞

中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室

今天内容

- 什么是逻辑?
  - 推理
  - 概念
  - 悖论
- 什么是数理逻辑?
- 为什么要学数理逻辑?

逻辑

什么是逻辑?

逻辑

什么是逻辑?
一般逻辑书上说:
逻辑是研究人们一般思维规律的学科.

普通逻辑

Quine: 逻辑是必然推论的科学.
Kleene: 逻辑是用来组织科学的知识和当作日常生活上推理之工具的.
Mendelson: 逻辑最通俗的定义之一是: 推理方法之分析.
Copi: 逻辑的研究是用来区分对的论证和错的论证的方法和原理的研究.
William/Martha Kneale: 逻辑是研究有效推理的规则.
Skyrms: 逻辑是关于论证的前提与结论之间论据联系强度的学问.

普通逻辑

Quine: 逻辑是必然推论的科学.
Kleene: 逻辑是用来组织科学的知识和当作日常生活上**推理**之工具的.
Mendelson: 逻辑最通俗的定义之一是: **推理方法**之分析.
Copi: 逻辑的研究是用来区分对的论证和错的论证的方法和原理的研究.
Kneales': 逻辑是研究有效推理的规则的.
Skyrms: 逻辑是关于论证的前提与结论之间**论据联系强度**的学问.

狭义和广义的理解

狭义的理解(楷书): 严格的和逻辑学层次上的理解;
广义的理解(黑体): 非严格的, 非形式的, 日常使用的, 常常有错误的理解.
人工智能的最终目的: 让狭义的理解等于广义的理解.

普通逻辑

普通逻辑是研究人们一般思维规律的学科.

普通逻辑

普通逻辑的研究对象不同于其它科学在于:
自然和社会科学是以**客观，不以思维和意识为转移**的现实对象为研究对象

普通逻辑

普通逻辑是研究人们一般思维规律的学科.
主要考虑
- 概念;
- 推理.

普通逻辑

普通逻辑是研究人们一般思维规律的学科. 主要涉及

- 概念; 偷换概念.
- 推理.

家庭作业: *什么叫偷换概念?*

推理

推理分为演绎推理和归纳推理.

演绎推理是从一般性的前提到**特殊性的结论**的推理; 特征是保真性.

归纳推理是从**特殊性的前提**到一般性的结论的推理; 特征是不保真性.

演绎推理

三段论(syllogism):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{细菌是微生物}\\\text{酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{酵母菌是微生物.}}$$

演绎推理

三段论(syllogism):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{人总有一死}\\ \text{苏格拉底是人}\end{array}}{\text{苏格拉底总有一死.}}$$

归纳推理

乌鸦会飞
大雁会飞
天鹅会飞
喜鹊会飞
海鸥会飞

所有的鸟都会飞.

演绎推理的形式

三段论(syllogism):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{所有的细菌是微生物}\\ \text{所有的酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{所有的酵母菌是微生物.}}$$

演绎推理的形式

三段论(syllogism):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{每个细菌是微生物}\\ \text{每个酵母菌是细菌}\end{array}}{\text{每个酵母菌是微生物.}}$$

演绎推理的形式

三段论(syllogism):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{细菌}\sqsubseteq\text{微生物}\\ \text{酵母菌}\sqsubseteq\text{细菌}\end{array}}{\text{酵母菌}\sqsubseteq\text{微生物}.}$$

断言的形式

逻辑推理是依靠断言形式的.

断言的形式

逻辑推理是依靠断言**形式**(form)的.
逻辑推理是依靠断言**形式的**(formal).

断言形式的种类

a		
e		
i		
o		

a, *i* from Latin *affirmo* (I affirm); *e*, *o* from *nego* (I deny).

断言形式的种类

a	SaL	所有的S有性质L
e	SeL	没有S有性质L
i	SiL	有些S有性质L
o	SoL	有些S没有性质L

a, i from Latin *affirmo* (I affirm); e, o from *nego* (I deny).

推理的形式

$$\begin{array}{l}
\text{人总有一死} \\
\text{苏格拉底是人} \\
\hline
\text{苏格拉底总是一死.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
MaL \\
SaM \\
\hline
SaL
\end{array}$$

MaL是大前提(major premiss), SaM是小前提(minor premiss); SaL是结论(conclusion).

格

I	II	III	IV
$\dfrac{ML \quad SM}{SL}$	$\dfrac{LM \quad SM}{SL}$	$\dfrac{ML \quad MS}{SL}$	$\dfrac{LM \quad MS}{SL}$

$$
\begin{array}{cccc}
\dfrac{\begin{array}{c}ML\\SM\end{array}}{SL} & \dfrac{\begin{array}{c}LM\\SM\end{array}}{SL} & \dfrac{\begin{array}{c}ML\\MS\end{array}}{SL} & \dfrac{\begin{array}{c}LM\\MS\end{array}}{SL}
\end{array}
$$

格

$$\frac{\begin{array}{c} M * L \\ S * M \end{array}}{S * L}$$

其中$* = a, e, i, o$. $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
Aristotle发现其中只有19个是有效的推理形式. 后来人们发现其中5个'有效的推理形式'是非有效的.

Aristotle认为有效而实际非有效的推理形式

$$\frac{\begin{array}{c} LeM \\ MaS \end{array}}{SoL.}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \text{没有学生是司机} \\ \text{所有司机是工人} \end{array}}{\text{有些工人不是学生.}}$$

Aristotle认为有效而实际非有效的推理形式

$$\frac{\begin{array}{l}\text{没有有角动物是独角兽}\\\text{所有独角兽是有角动物}\end{array}}{\text{有些有角动物不是有角动物},}$$

其中$L=$ 有角动物, $S=$ 有角动物, $M=$ 独角兽.

有效推理的形式

第一格：L, M, S.
如果每一M是L, 每一S是M, 则每一S是L (Barbara).
如果没有M是L, 每一S是M, 则没有S是L (Celarent).
如果每一M是L, 有的S是M, 则有的S是L (Darii).
如果没有M是L, 有的S是M, 则有的S不是L (Ferio).

有效推理的形式

第二格：M, L, S.
如果没有L是M, 每一S是M, 则没有S是L (Cesare).
如果每一L是M, 没有S是M, 则没有S是L (Camestres).
如果没有L是M, 有的S是M, 则有的S不是L (Festino).
如果每一L是M, 有的S不是M, 则有的S不是L (Baroco).

有效推理的形式

第三格：L, S, M.
如果每一M是L, 每一M是S, 则有的S是L (Darapti).
如果没有M是L, 每一M是S, 则有的S不是L (Felapton).
如果有的M是L, 每一M是S, 则有的S是L (Disamis).
如果每一M是L, 有的M是S, 则有的S是L (Datisi).
如果有的M不是L, 每一M是S, 则有的S不是L (Bocardo).
如果没有M是L, 有的M是S, 则有的S不是L (Ferison).

非有效推理的形式

这是一枝钢笔
这是兰色的

因此这是一枝兰色的钢笔.

非有效推理的形式

这是一枝钢笔
这是兰色的

因此这是一枝兰色的钢笔.

那条狗是父亲
那条狗是他的

因此那条狗是他的父亲.

原则

非有效的推理是列不完的.
没有一个有效的办法将他们全部列出来. (为什么?)
我们需要一个能有效地判断一个推理是否是有效的办法.
半可判定集合的补集可能不是半可判定的.

有效推理的形式: Modus Ponens

如果P则Q
P

所以Q.

如果天下雨则地是湿的
天下雨

所以地是湿的.

Modus Ponens (MP): *mode that affirms by affirming*; 演绎推理, 假言推理.

有效推理的形式: 反驳论证形式

如果P则Q
非Q

所以非P.

如果天下雨则地是湿的
地不是湿的

所以天没有下雨.

非有效的推理的形式: 不明推论(abduction)形式

如果P则Q
Q

所以P.

如果天下雨则地是湿的
地是湿的

所以天下雨.

事实上, 侦探推理是不明推理. 由结论推出原因.

普通逻辑

普通逻辑中另一个重要的概念是概念.

概念

概念是由内含和外延组成的.

概念

一个概念是由一个内含和一个外延组成的.
概念的内含是在概念外延中的对象所具有的共同属性的集合;

概念

一个概念是由一个内含和一个外延组成的.
概念的内含是在概念外延中的对象所具有的共同属性的集合;
概念的外延是具有概念内含中属性的对象的集合.
概念**学生**的内含: 在学校中学习并接受教育的人.

概念之间的关系

概念之间的关系: 是一个 (isa, the subsumption relation, $\sqsubseteq$)
科学院的学生是一个**大学生**是一个**学生**
外延增加;
内含减少.

概念之间的关系

概念之间的关系: 是一个 (isa, the subsumption relation, $\sqsubseteq$) 是一个是传递关系.

$$\frac{\text{细菌} \sqsubseteq \text{微生物} \quad \text{酵母菌} \sqsubseteq \text{细菌}}{\text{酵母菌} \sqsubseteq \text{微生物}.}$$

对象及其表示

注意概念与表示概念的词之间的差别.
学生这个概念在汉语中表示为“学生”;
在英语中表示为“student”.
“student”和“学生”表示相同的概念, 但作为单词,

$$\text{“student”} \neq \text{“学生”}.$$

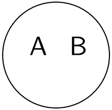
概念的种类

单独概念(个体): 中国科学院, 2013年9月9日
普遍概念: 工人, 汽车

集合概念: 外延是由集合体组成的概念. 集合体是由许多个体组成的整体, 其逻辑特征是整体所具有的本质属性并不为其中的每个个体所具有. 班, 政党, 森林,...
非集合概念: 学生, 党员, 树,...

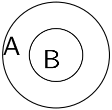
概念之间的关系

1. 同一关系: 中国的首都/北京, 医生/大夫;



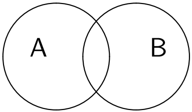
概念之间的关系

2. 包含关系: 是一个(isa)关系;



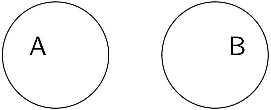
概念之间的关系

3. 交叉关系: 教授/科学家, 军人/大学生



概念之间的关系

4. 不相容关系: 桌子/粉笔,



不相容关系

- 矛盾关系: 红色/非红色, 机动车/非机动车. 某个属性在A的内含中, 其否定在B的内含中.

- 反对关系: 大学生/小学生, 长篇小说/短篇小说.

The square of opposition

所有的S是L	没有S是L
某些S是L	某些S不是L

The square of opposition

$$\begin{tikzcd} \text{所有的}S\text{是}L \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \text{没有}S\text{是}L \arrow[d, dash] \arrow[dl] \\ \text{某些}S\text{是}L \arrow[r, equal] & \text{某些}S\text{不是}L \end{tikzcd}$$

–表示反对关系(contraries); =表示下反对关系(subcontraries); →表示矛盾关系(contradictories); |表示蕴涵关系(subalternats).

悖论

克里特人伊壁孟德(600BC): 所有的克里特人都是撒谎者.
假定: (1) 撒谎者不说一句真话, 并且
(2) 所有克里特人都是撒谎者的否定形式是大家(所有的克里特人)全不撒谎.
这是撒谎者悖论的原始形式.
《科学美国人》编辑部编著, 从惊讶到思考–数学悖论奇景, 科学技术文献出版社, 1984.

逻辑悖论

我说谎.

逻辑悖论

我说谎.
理发师悖论: 给也只给不自己理发的人理发的理发师

逻辑悖论

这句话有八个字.
一般地, 一个句子不为真的话, 那么它的否定肯定为真.

逻辑悖论

这句话有八个字.
这句话没有八个字.

逻辑悖论

有三个错误的句子;

1. $2+2=4$
2. $3\times 6=17$
3. $8\div 4=2$
4. $13-6=5$
5. $5+4=9$

Zeno悖论

Achilles和乌龟的悖论;
Protagoras和他的学生Euathlus的悖论;

普通逻辑

自然语言$\xrightarrow{\text{表示}}$命题$\xrightarrow{\text{反映}}$真实世界

数理逻辑

数理逻辑(mathematical logic)
economic/economical, historic/historical, electric/electrical

数理逻辑

数理逻辑(mathematical logic)是
1. 用数学的严格方法来研究普通逻辑(mathematical);
2. 研究数学证明中的逻辑, 期望形式化(严格化)数学证明(mathematic).

数理逻辑

数理逻辑是数学分支之一: 数理逻辑与数学基础, 几何, 代数, 分析, 概率统计.

数理逻辑包含4个分支: 模型论, 集合论, 递归论和证明论.

严格的方法

用数学的严格方法来研究普通逻辑 就是形式化的方法:

人工(形式)语言$\xrightarrow{\text{表示}}$ 形式命题$\xrightarrow{\text{反映}}$ 形式化的世界.

严格的方法

就是形式化的方法:

人工(形式)语言 $\xrightarrow{\text{表示}}$ 形式命题 $\xrightarrow{\text{反映}}$ 形式化的世界.

自然语言 $\xrightarrow{\text{表示}}$ 命题 $\xrightarrow{\text{反映}}$ 真实世界.

严格的方法

就是形式化的方法:

人工(形式)语言$\xrightarrow{\text{表示}}$形式命题$\xrightarrow{\text{反映}}$形式化的世界: 形式逻辑.

自然语言$\xrightarrow{\text{表示}}$命题$\xrightarrow{\text{反映}}$真实世界: 普通逻辑.

为什么

作为计算机专业的学生, 为什么要学数学的数理逻辑课程?

为什么

因为计算机是数理逻辑的产物.

为什么

因为计算机是数理逻辑的产物.
没有数理逻辑就没有当今的计算机.

为什么

因为计算机是数理逻辑的产物.
没有数理逻辑就没有当今的计算机.
没有数理逻辑就没有当今严格定义的算法概念;

为什么

因为计算机是数理逻辑的产物.
没有数理逻辑就没有当今的计算机.
没有数理逻辑就没有当今严格定义的算法概念;
没有严格定义的算法概念就没有通用Turing机;

为什么

因为计算机是数理逻辑的产物.
没有数理逻辑就没有当今的计算机.
没有数理逻辑就没有当今严格定义的算法概念;
没有严格定义的算法概念就没有通用Turing机;
没有通用Turing机就没有当今的计算机.

计算机的简要历史

Gottfried Leibniz在1670年制造了Leibniz轮(wheel), 他期望计算的机械化可以带来很大的好处.

For it is unworthy of excellent men to lose hours like slaves in the labor of computation (Smith, 1929, 180-181).

Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill, 1929.

Gottfried Leibniz

Leibniz根据中国的易经,提出了二进制, 为布尔代数的产生提供了基础.

Leibniz律: 两个对象x和y, 如果x具有y具有的每个性质, 并且y具有x具有的每个性质, 即对任意性质φ, x具有性质φ当且仅当y具有性质φ, 则x和y是恒等的(identical).

Gottfried Leibniz

Leibniz根据中国的易经,提出了二进制, 为布尔代数的产生提供了基础.

Leibniz律(也称identity of indiscernibles): 两个对象x和y, 如果x具有y具有的每个性质, 并且y具有x具有的每个性质, 即对任意性质φ, x具有性质φ当且仅当y具有性质φ, 则x和y是恒等的(identical).

恒等律(the indiscernibility of identicals): 如果$x = y$则对任何性质φ, $\varphi(x)$成立当且仅当$\varphi(y)$成立.

Leibniz定理

定理: 如果$x = y$则$y = x$.

特修斯(Thesuese)的船

恒等在现实中是模糊使用的(不妨称为相等).
恒等(相等)是形式化中最麻烦的东西.

特修斯(Thesuese)的船

Stage 0	*Stage* 1	*Stage* 2	*Stage* 3	*Stage* 4
$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

特修斯(Thesuese)的船

Stage 0	*Stage* 1	*Stage* 2	*Stage* 3	*Stage* 4
$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

$$\{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_1, c_1, d_1\}$$

特修斯(Thesuese)的船

Stage 0	*Stage* 1	*Stage* 2	*Stage* 3	*Stage* 4
$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

$$\{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_2, c_1, d_1\}$$

特修斯(Thesuese)的船

Stage 0	*Stage* 1	*Stage* 2	*Stage* 3	*Stage* 4
$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

$$\{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_2, c_1, d_1\} = \{a_2, b_2, c_2, d_1\}$$

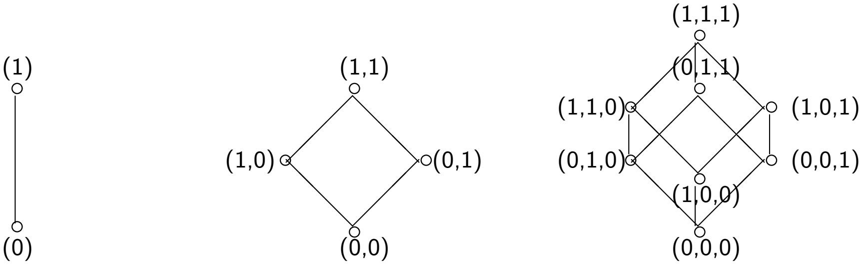
特修斯(Thesuese)的船

Stage 0	*Stage* 1	*Stage* 2	*Stage* 3	*Stage* 4
$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_1, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_1, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_1\}$	$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$
$\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_2, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_2, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_2\}$	$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$

$$\{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_1, c_1, d_1\} = \{a_2, b_2, c_1, d_1\} = \{a_2, b_2, c_2, d_1\} = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$$

Gottfried Leibniz

Leibniz根据中国的易经,提出了二进制, 为布尔代数的产生提供了基础.



Charles Babbage

19世纪30年代Charles Babbage想象出全能的自动计算的机器: 解析机(analytical engine).
Harvard大学的Howard Aiken教授甚至在1956年不相信既能计算又有商业用途的机器.

If it should turn out that the basic logics of a machine designed for the numerical soluation of differential equations coincide with the logics of a machine intended to make bills for a department store, I would regard this as the most amazing coincidence that I have ever encountered. (Ceruzzi, 1983, p43.)

Ceruzzi, P. E., *Reckoners, the Prehistory of the Digital Computer from Relays to the Stored Program Concept, 1933-1945*, Westport, CN, Greenwood Press, 1983.

Hilbert计划

1920s: 只用严格的证明方法证明形式系统的协调性.
1928: Hilbert与Ackermann的书: Grundzüge der theoretischen Logik. 提出了一个证明形式系统. 2个问题是:

1. 该系统是否是完备的.
2. 找一个算法判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.

Gödel完备性和非完备性定理

1930: Gödel证明: 该形式系统是完备的.
1934: Gödel证明: 在一个形式系统内证明该形式系统是否协调的是不可判定的.

Gödel, K., On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1934.

算法问题

Entscheidungsproblem: 找一个算法判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.

算法问题

Entscheidungsproblem: 找一个算法判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.
这个问题的算法存在预示着所有数学问题都存在算法解;
如果存在一个问题没有算法解, 那么上述问题没有算法解.

算法问题

Turing直观认为这样的算法不存在.

算法问题

Turing直观认为这样的算法不存在.
对于存在算法的问题, 找到直观的算法就可以.

算法问题

直观算法定义: 一个算法是有限的、可以机械执行的指令集合.
困难之处: 如果算法不存在而要证明它不存在.

算法问题

困难之处: 如果算法不存在而要证明它不存在.

在数据库中, 一个数据项如果在数据库中存在, 则找到这个数据项就可以了; 但要说明该数据项在数据库中不出现, 则需要找遍整个数据库.

算法问题

困难之处: 如果算法不存在而要证明它不存在.

在数据库中, 一个数据项如果在数据库中存在, 则找到这个数据项就可以了; 但要说明该数据项在数据库中不出现, 则需要找遍整个数据库.

要证明该算法不存在, 就需要严格定义的算法概念.

Turing机

1936: Turing机/通用Turing机.

通用*Turing*机可以接受一个Turing机以及一个输入作为输入，通用Turing机将模拟所接受的Turing机在输入上的计算. 这正是现代计算机的理论原型.

Turing机的研究是数理逻辑分支之一: 递归论，也称可计算性理论.

算法问题

Entscheidungsproblem: 找一个算法判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.
这样的算法是不存在的.
数学家终于喘一口气.

现代计算机

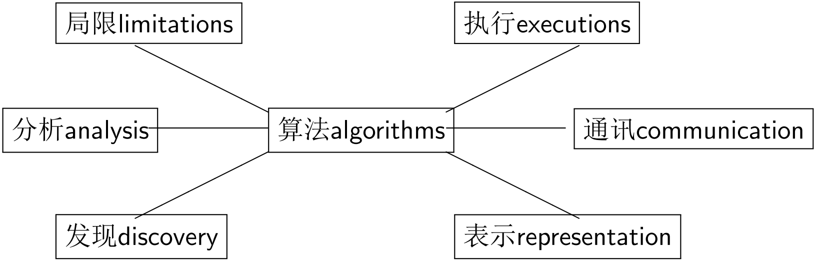
1944: ENIAC, 18,000个电子管

John van Neumann

Martin Davis

Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*42(1936), 230-265.

算法在计算机科学中的中心作用



Brookshear, J. G., *Computer Science, an overview*(计算机科学概论), 人民邮电出版社, Addison Wesley, 2000.

算法与逻辑关系

算法即是逻辑;
逻辑即是算法.

结论

计算机科学是数学的产物;
计算机科学是数理逻辑的产物;

学习《数理逻辑》的目标

分析问题;
形式表示问题;
形式分析问题
的方法.

《数理逻辑》的课程说明

1. 书面作业5次,占成绩的30

《数理逻辑》的课程说明

1. 书面作业5次,占成绩的30
2. 闭卷考试,占成绩的70
3. 参考文献：

3.1 陆钟万, 面向计算机科学的数理逻辑(第二版), 科学出版社.
3.2 李未，数理逻辑-基本原理与形式演算，科学出版社.