第三章　谓词逻辑：形式推理

上次内容

- 谓词
- 代数结构
- 谓词逻辑的语言,语法
- 谓词逻辑的语义

今天内容

- 代换
- (谓词逻辑的)逻辑推论
- (谓词逻辑的)形式推导规则
- 证明及其例子

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示
量词

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示
量词
谓词逻辑被形式的对象是结构及其性质

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示
量词
谓词逻辑被形式的对象是结构及其性质
语言：非逻辑符号分为个体符号，函数符号和谓词符号

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示
量词
谓词逻辑被形式的对象是结构及其性质
语言：非逻辑符号分为个体符号，函数符号和谓词符号
逻辑符号包括变量符号，连接词和量词

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示
量词
谓词逻辑被形式的对象是结构及其性质
语言：非逻辑符号分为个体符号，函数符号和谓词符号
逻辑符号包括变量符号，连接词和量词
项/公式的结构归纳定义/结构归纳证明

回顾

三段论不能在命题逻辑中得到表示

量词

谓词逻辑被形式的对象是结构及其性质

语言：非逻辑符号分为个体符号，函数符号和谓词符号

逻辑符号包括变量符号，连接词和量词

项/公式的结构归纳定义/结构归纳证明

代数结构/语义(解释和赋值)

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果

1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, \ldots, t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果

1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对**每个**$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果

1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \rightarrow \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

$v' \equiv_x v$ iff 存在一个$a \in U$使得$v' = v(x/a)$, 其中对任何变量y,

$$v(x/a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{如果} y \neq x \\ a & \text{如果} y = x \end{cases}$$

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式φ, φ在解释I和赋值v下是真的, 记为$I, v \models \varphi$, 如果
1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, ..., t_n^{I,v})$, 如果$\varphi = \mathbf{p}(t_1, ..., t_n)$;
2. $I, v \not\models \psi$, 如果$\varphi = \neg\psi$;
3. $I, v \models \psi$蕴涵$I, v \models \chi$, 如果$\varphi = \psi \to \chi$;
4. 对每个$v' \equiv_x v$, $I, v' \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

$v' \equiv_x v$ 存在一个$a \in U$使得$v' = v(x/a)$, 其中对任何变量y,

$$v(x/a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{如果} y \neq x \\ a & \text{如果} y = x \end{cases}$$

对每个$a \in U, I, v(x/a) \models \psi(x)$, 如果$\varphi = \forall x \psi(x)$.

公式在解释和赋值下的真假值

给定一个公式A，A在解释I和赋值v下是真的，记为$I, v \models A$，如果

1. $\mathbf{p}^I(t_1^{I,v}, \ldots, t_n^{I,v})$，如果$A = \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$;
2. $I, v \not\models B$，如果$A = \neg B$;
3. $I, v \models B$蕴涵$I, v \models \chi$，如果$A = B \to \chi$;
4. 对每个$a \in U$，$I, v(x/a) \models B(x)$，如果$A = \forall x B(x)$.

4'. 存在一个$a \in U$使得$I, v(x/a) \models B(x)$，如果$A = \exists x B(x)$.

代换

也称替换(substitution)。

代换

代换的形式化过程
(1) 直觉定义
(2) 发现问题
(3) 代换应该满足的基本条件(本体论假设)
(4) 修改定义
(5) 发现问题
(6) 修改定义
(7) 假设
(8) 正确定义

代换

代换的操作是非常技巧性的.
$[x/s]t$表示用项s替换x在t中每个出现所得到的项;

代换

代换的操作是非常技巧性的.
$[x/s]t$表示用项s替换x在t中每个出现所得到的项;
$[x/s]\varphi$表示用项s替换x在φ中每个**自由**出现所得到的公式.

代换

代换的操作是非常技巧的.
$[x/s]t$表示用项s替换x在t中每个出现所得到的项;
隔壁的x　隔壁的张三
$[x/s]\varphi$表示用项s替换x在φ中每个**自由**出现所得到的公式.
每个人是有理性的.
$(*)$ 每个张三是有理性的.
人x是有理性的.
张三是有理性的.

代换的直观定义

项的代换:

$$\begin{aligned}
[x/s]x &= s \\
[x/s]y &= y & \text{if } x \neq y \\
[x/s]\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n) &= \mathbf{f}([x/s]t_1, \ldots, [x/s]t_n)
\end{aligned}$$

代换的直观定义

项的代换:

$$
\begin{aligned}
[x/s]\mathbf{c} &= \mathbf{c} \\
[x/s]x &= s \\
[x/s]y &= y && \text{if } x \neq y \\
[x/s]\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) &= \mathbf{f}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n)
\end{aligned}
$$

代换的直观定义

项的代换:

$$\begin{array}{lll} [x/s]x & = s & \\ [x/s]y & = y & \text{if } x \neq y \\ [x/s]\mathbf{f}(t_1, ..., t_n) & = \mathbf{f}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) & \end{array}$$

公式的代换:

$$\begin{array}{ll} [x/s]\mathbf{p}(t_1, ..., t_n) & = \mathbf{p}([x/s]t_1, ..., [x/s]t_n) \\ [x/s](\forall y \varphi) & = \forall y [x/s]\varphi \\ [x/s](\neg\varphi) & = \neg([x/s]\varphi) \\ [x/s](\varphi \to \psi) & = ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi) \end{array}$$

直观代换

这个定义对大部分例子是对的. 比如,
$[x/\mathbf{f}(z,w)](\forall y(x=x)) = \forall y(\mathbf{f}(z,w)=\mathbf{f}(z,w))$.

直观代换

这个定义对大部分例子是对的. 比如,
$[x/\mathbf{f}(z,w)](\forall y(x=x)) = \forall y(\mathbf{f}(z,w) = \mathbf{f}(z,w))$.
$[x/y](\forall y(\mathbf{f}(x) = x)) = \forall y(\mathbf{f}(y) = y))$

代换的直观要求

直觉告诉我们: 界定变量的命名是无关紧要的.
比如,

$$\forall x(\mathbf{p}(x) \to \mathbf{d}(x))$$

表示每个人将会死的,

$$\forall y(\mathbf{p}(y) \to \mathbf{d}(y)),$$
$$\forall z(\mathbf{p}(z) \to \mathbf{d}(z))$$

表示相同的断言.

代换的基本要求

代换的基本要求: 一个封闭公式在代换应具有它原来所要表示的意思.

如果φ和$[x/s]\varphi$要表示的意思不同, 那么φ和$[x/s]\varphi$将在解释下也会不同的, 这将出现问题. 比如

$$[y/x](\forall y(\mathbf{f}(y) = y)) = \forall y(\mathbf{f}(x) = x))$$

如果φ是一个语句(封闭的公式), 则应该: 对任何解释I和赋值v, $I, v \models \varphi$当且仅当$I, v \models [x/s]\varphi$.

直观代换定义的错误之处

为什么错误: 我们没有区别一个变量x在一个项t中的自由出现(在代换时应该代换的变量出现), 和界定出现(我们在代换时不应该代换的变量出现).

代换的另一个定义

$$
\begin{aligned}
[x/s]x &= s \\
[x/s]y &= y \qquad\qquad \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) &= \begin{cases} \forall y\varphi & \text{if } y = x \\ \forall y[x/s]\varphi & \text{if } y \neq x \end{cases} \\
[x/s](\varphi \to \psi) &= ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi)
\end{aligned}
$$

代换的另一个定义

$$[x/y](\forall y(y = x)) = \forall y(y = y).$$

变量扑捉(variable capture)

当朴素地用一个项s代换公式φ中的一个变量x, 在项s中**自由**变量变成界定的现象称为变量扑捉.

代换的定义

$$
\begin{aligned}
[x/s]x &= s \\
[x/s]y &= y \qquad\qquad\qquad \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) &= \begin{cases} \forall y\varphi & \text{if } y = x \\ \forall y[x/s]\varphi & \text{if } y \neq x \text{ and } y \notin var(s) \end{cases} \\
[x/s](\varphi \rightarrow \psi) &= ([x/s]\varphi) \rightarrow ([x/s]\psi)
\end{aligned}
$$

注意: 这样定义的代换是偏函数, 因为对某些公式, 代换没有定义.

代换的假设

假定: 项“在界定变量的重新命名下” 是相同的.
对界定变量符号重新命名以后使得不会出现变量扑捉, 然后再代换.
这样的代换就变为

代换的最终定义

$$
\begin{array}{lll}
[x/s]x & = s & \\
[x/s]y & = y & \text{if } y \neq x \\
[x/s](\forall y\varphi) & = \forall y[x/s]\varphi & \text{if } y \neq x \text{ and } y \notin var(s) \\
[x/s](\varphi \to \psi) & = ([x/s]\varphi) \to ([x/s]\psi) &
\end{array}
$$

注意: 这样定义的代换是一个全函数.

谓词逻辑的逻辑推论

给定公式集合Σ和一个公式A, 如果对任何解释I和赋值v, $I, v \models \Sigma$蕴涵$I, v \models A$, 称A为Σ的逻辑推论.
其中$I, v \models \Sigma$如果对每个$B \in \Sigma, I, v \models B$.

谓词逻辑的逻辑推论

谓词逻辑的逻辑推论与命题逻辑的逻辑推论之间的差别:
不可枚举性/可枚举性.
为什么?

符号约定

我们将一个解释I和一个赋值v简单地称为赋值v.
一个赋值一定依赖于某个解释.

书上定义的逻辑推论

给定公式集合Σ和一个公式A, 如果对任何赋值v, $(\Sigma)^v = 1$蕴涵$(A)^v = 1$, 称A为Σ的逻辑推论.
其中$(\Sigma)^v = 1$当且仅当对每个$B \in \Sigma, B^v = 1$;
$(A)^v = 1$定义为$I, v \models A$.

书上定义的逻辑推论

$(A)^v = 1$当且仅当

$$\begin{cases} (t_1^v, ..., t_n^v) \in I(p) & \text{if } A = p(t_1, ..., t_n) \\ (B)^v = 0 & \text{if } A = \neg B \\ (B)^v = 1 \Rightarrow (C)^v = 1 & \text{if } A = B \to C \\ \mathbf{A} a \in U((B(x))^{v(x/a)} = 1) & \text{if } A = \forall x B(x) \end{cases}$$

逻辑推论的例子

证明: $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.

逻辑推论的例子

证明: $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.
反证法. 假设$\exists x \neg A(x) \not\models \neg \forall x A(x)$.

逻辑推论的例子

证明: $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.
反证法. 假设$\exists x \neg A(x) \not\models \neg \forall x A(x)$. 存在一个赋值$v$使得
(1) $(\exists x \neg A(x))^v = 1$; 并且
(2) $(\neg \forall x A(x))^v = 0$.

逻辑推论的例子

证明: $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.

反证法. 假设$\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$. 存在一个赋值$v$使得

(1) $(\exists x \neg A(x))^v = 1$; 并且

(2) $(\neg \forall x A(x))^v = 0$.

由(1), 存在论域中一个元素a使得$(\neg A(x))^{v(x/a)} = 1$, 即

$$(A(x))^{v(x/a)} = 0.$$

逻辑推论的例子

证明: $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$.
反证法. 假设$\exists x \neg A(x) \not\models \neg \forall x A(x)$. 存在一个赋值$v$使得
(1) $(\exists x \neg A(x))^v = 1$; 并且
(2) $(\neg \forall x A(x))^v = 0$.
由(1), 存在论域中一个元素a使得$(\neg A(x))^{v(x/a)} = 1$, 即

$$(A(x))^{v(x/a)} = 0.$$

由(2), $(\forall x A(x))^v = 1$, 即对任何论域中的元素b, $(A(x))^{v(x/b)} = 1$.
设$b = a$, 则$(A(x))^{v(x/a)} = 1$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \to B(x)) \models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \models \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$.
假设$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \not\models \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \to B(x)) \models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
假设$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
存在一个赋值v使得
(1) $(\forall x(A(x) \to B(x)))^v = 1$, 并且
(2) $(\forall x A(x) \to \forall x B(x))^v = 0$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \to B(x)) \models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
假设$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
存在一个赋值v使得
(1) $(\forall x(A(x) \to B(x)))^v = 1$, 并且
(2) $(\forall x A(x) \to \forall x B(x))^v = 0$.
由(2), 得
(3) $(\forall x A(x))^v = 1$ 并且
(4) $(\forall x B(x))^v = 0$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \to B(x)) \models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
假设$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\models \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
存在一个赋值v使得
(1) $(\forall x(A(x) \to B(x)))^v = 1$, 并且
(2) $(\forall x A(x) \to \forall x B(x))^v = 0$.
由(2), 得
(3) $(\forall x A(x))^v = 1$ 并且
(4) $(\forall x B(x))^v = 0$.
对论域中的任何元素a, $(A(x) \to B(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$(A(x))^{v(x/a)} = 1$, 因此$(B(x))^{v(x/a)} = 1$.

逻辑推论的例子2

证明: $\forall x(A(x) \to B(x)) \models \forall xA(x) \to \forall xB(x)$.
假设$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\models \forall xA(x) \to \forall xB(x)$.
存在一个赋值v使得
(1) $(\forall x(A(x) \to B(x)))^v = 1$, 并且
(2) $(\forall xA(x) \to \forall xB(x))^v = 0$.
由(2), 得
(3) $(\forall xA(x))^v = 1$ 并且
(4) $(\forall xB(x))^v = 0$.
对论域中的任何元素a, $(A(x) \to B(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$(A(x))^{v(x/a)} = 1$, 因此$(B(x))^{v(x/a)} = 1$.
由(4), 存在论域中的元素b使得$(B(x))^{v(x/b)} = 0$.

数学约定

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

表示语句

$$\forall x \forall y (x^2 - y^2 = (x+y)(x-y));$$

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$$

表示语句

$$\exists x \exists y ((x+y)^2 \neq x^2 + y^2).$$

数学约定

$$ax^2 + bx + c = 0$$

表示语句

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0);$$

而

$$\forall x(ax^2 + bx + c = 0)$$

蕴涵

$$a = b = c = 0,$$

表示函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c \equiv 0.$$

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x (A(x) \to B(x))$.

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x (A(x) \to B(x))$.
存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x (A(x) \to B(x))$.

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x (A(x) \to B(x))$.
存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x (A(x) \to B(x))$.
取$A(x) = \mathbf{p}(x), B(x) = \mathbf{q}(x)$.
构造赋值I, v使得
(1) $I, v \models \forall x \mathbf{p}(x) \to \forall x \mathbf{q}(x)$; 并且
(2) $I, v \not\models \forall x (\mathbf{p}(x) \to \mathbf{q}(x))$.

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
取$A(x) = \mathbf{p}(x), B(x) = \mathbf{q}(x)$.
构造赋值I, v使得
(1) $I, v \models \forall x \mathbf{p}(x) \to \forall x \mathbf{q}(x)$; 并且
(2) $I, v \not\models \forall x(\mathbf{p}(x) \to \mathbf{q}(x))$.
设$U = \{a, b\}$, 定义$\mathbf{p}^I = \{a\}, \mathbf{q}^I = \{b\}$, 并且对每个变量符号$y$, $v(y) = a$.

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
取$A(x) = \mathbf{p}(x), B(x) = \mathbf{q}(x)$.
设$U = \{a, b\}$, 定义$\mathbf{p}^I = \{a\}, \mathbf{q}^I = \{b\}$, 并且对每个变量符号$y$, $v(y) = a$.
则

$$I, v \models \forall x \mathbf{p}(x) \to \forall x \mathbf{q}(x).$$

构造法

证明: $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
存在公式$A(x)$和$B(x)$使得$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \not\models \forall x(A(x) \to B(x))$.
取$A(x) = \mathbf{p}(x), B(x) = \mathbf{q}(x)$.
设$U = \{a, b\}$, 定义$\mathbf{p}^I = \{a\}, \mathbf{q}^I = \{b\}$, 并且对每个变量符号$y$, $v(y) = a$.
则

$$I, v \models \forall x \mathbf{p}(x) \to \forall x \mathbf{q}(x);$$
$$I, v \models \mathbf{p}(x);$$
$$I, v \not\models \mathbf{q}(x).$$

因此

$$I, v \not\models \forall x(\mathbf{p}(x) \to \mathbf{q}(x)).$$

形式推演

$$(\forall^-) \quad \frac{\Sigma \vdash \forall x A(x)}{\Sigma \vdash A(t)};$$

形式推演

$$(\forall^+) \quad \frac{\Sigma \vdash A(x)}{\Sigma \vdash \forall x A(x)};$$

其中x不在Σ中自由出现.

如果对任何赋值v, $\Sigma^v = 1$蕴涵$(A(x))^v = 1$, 则对任何赋值$v, \Sigma^v = 1$蕴涵$(\forall x A(x))^v = 1$.

形式推演

$$(\forall^+) \quad \frac{\Sigma \vdash A(x)}{\Sigma \vdash \forall x A(x)};$$

其中x不在Σ中自由出现.

$$\begin{aligned} x+x=0 \vdash &\quad x+x=0 &\qquad (ref) \\ x+x=0 \vdash &\quad \forall x(x+x=0). \end{aligned}$$

形式推演

$$(\exists^-) \quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

形式推演

$$(\exists^-) \quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0 \vdash \quad \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0 \quad (\mathit{ref})$

形式推演

$$(\exists^-) \quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

$$\begin{array}{rll} \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0 \vdash & \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0 & (ref) \\ \exists x(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0) \vdash & \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0 & \end{array}$$

形式推演

$$(\exists^-)\quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

$$\begin{array}{rll} \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & (\mathit{ref}) \\ \exists x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \\ \exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \end{array}$$

形式推演

$$(\exists^-)\quad \frac{\Sigma, A(x) \vdash B}{\Sigma, \exists x A(x) \vdash B};$$

其中x不在Σ和B中出现.

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & (\mathit{ref}) \\
\exists x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \\
\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0) \vdash & \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 & \\
\exists y(\mathbf{a}y^2+\mathbf{b}y+\mathbf{c}=0) \vdash & \forall x(\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0) & (\forall^+).
\end{array}$$

形式推演

$$(\exists^+) \quad \frac{\Sigma \vdash A(t)}{\Sigma \vdash \exists x A(x)}.$$

注意, 在$(\exists^+)$中, $A(x)$是用x替换$A(t)$中(可以部分的)t.

形式推演

$$(\equiv^{+}) \quad \vdash x \equiv x;$$

形式推演

$(\equiv^+)$ $\vdash x \equiv x$; (≡的自反性)

$$(\equiv^-) \quad \frac{\Sigma \vdash A(t_1), t_1 \equiv t_2}{\Sigma \vdash A(t_2)}.$$

可以证明:

≡的对称性: $\vdash x \equiv y \to y \equiv x$

≡的传递性: $\vdash x \equiv y \land y \equiv z \to x \equiv z$

公式的形式可推演性

公式A是Σ-形式可推演的, 如果存在一个Σ-证明

$$\Sigma_1 \vdash A_1, \ldots, \Sigma_n \vdash A_n$$

使得

$$\Sigma_n \vdash A_n = \Sigma \vdash A.$$

证明的例子1

命题. (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;
(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;
证明. (2)

证明的例子1

命题. (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;
(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;
证明. (2)

$$\forall y A(z,y) \quad \vdash \quad A(z,t)$$

证明的例子1

命题. (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;
(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;
证明. (2)

$$\begin{aligned} \forall y A(z,y) &\vdash A(z,t) \\ \forall y A(z,y) &\vdash \exists x A(x,t) \end{aligned}$$

证明的例子1

命题. (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;
(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;
证明. (2)

$$\begin{array}{rcl} \forall y A(z,y) & \vdash & A(z,t) \\ \forall y A(z,y) & \vdash & \exists x A(x,t) \\ \forall y A(z,y) & \vdash & \forall y \exists x A(x,y) \end{array}$$

证明的例子1

命题. (1) $\exists x \exists y A(x,y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x,y)$;
(2) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$;
证明. (2)

$$\begin{array}{rcl}
\forall y A(z,y) & \vdash & A(z,t) \\
\forall y A(z,y) & \vdash & \exists x A(x,t) \\
\forall y A(z,y) & \vdash & \forall y \exists x A(x,y) \\
\exists x \forall y A(x,y) & \vdash & \forall y \exists x A(x,y).
\end{array}$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$\neg A(z) \quad \vdash \quad \exists x \neg A(x)$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$\begin{array}{rcl} \neg A(z) & \vdash & \neg A(z) \\ \neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \end{array}$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$\begin{aligned} \neg A(z) &\vdash \exists x \neg A(x) \\ \neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) &\vdash \exists x \neg A(x) \end{aligned}$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$\begin{aligned}
\neg A(z) &\vdash \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) &\vdash \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) &\vdash \neg\exists x \neg A(x)
\end{aligned}$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \neg\exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x) & \vdash & A(z)
\end{array}
$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \neg\exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x \neg A(x) & \vdash & \forall x A(x) \\
\neg\forall x A(x), \neg\exists x \neg A(x) & \vdash & \forall x A(x)
\end{array}
$$

证明的例子2

命题. (1) $\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$;
(2) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
证明. (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x), \neg A(z) & \vdash & \neg\exists x \neg A(x) \\
\neg\exists x \neg A(x) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x \neg A(x) & \vdash & \forall x A(x) \\
\neg\forall x A(x), \neg\exists x \neg A(x) & \vdash & \neg\forall x A(x) \\
\neg\forall x A(x) & \vdash & \exists x \neg A(x).
\end{array}
$$

证明的例子3

命题. (1) $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \forall x A(x) \to \forall x B(x)$;
(2) $A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(A \to B(x))$, 其中$x$不在$A$中出现;
(3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$, 其中$x$不在$B$中出现;
(4) $\exists x A(x) \to B \vdash\dashv \forall x(A(x) \to B)$, 其中$x$不在$B$中出现.

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.
$\forall x A(x) \to B \models |\exists x(A(x) \to B)$.
$\forall x A(x) \to B \models \exists x(A(x) \to B)$.
反证: 假设存在模型v使得

$$(\forall x A(x) \to B)^v = 1$$

并且

$$(\exists x(A(x) \to B)^v = 0.$$

证明的例子3

反证: 假设存在模型v使得

$$(\forall x A(x) \to B)^v = 1$$

并且

$$(\exists x(A(x) \to B))^v = 0.$$

不存在论域中的元素a使得$(A(x) \to B)^{v(x/a)} = 1$, 即对论域中的每个元素$a$, $(A(x) \to B)^{v(x/a)} = 0$, 即

$$(A(x))^{v(x/a)} = 1$$

并且

$$(B)^{v(x/a)} = 0.$$

证明的例子3

不存在论域中的元素a使得$(A(x) \to B)^{v(x/a)} = 1$, 即对论域中的每个元素$a$, $(A(x) \to B)^{v(x/a)} = 0$, 即

$$(A(x))^{v(x/a)} = 1$$

并且

$$(B)^{v(x/a)} = 0.$$

对论域中的每个元素a,

$$(A(x))^{v(x/a)} = 1$$

并且

$$(B)^{v(x/a)} = 0.$$

$(A(x) \to B)^{v(x/a)} = 1$. 矛盾.

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.
$\forall x A(x) \to B \models |\exists x(A(x) \to B)$.
$\exists x(A(x) \to B) \models \forall x A(x) \to B$.
反证: 假设存在模型v使得

$$(\forall x A(x) \to B)^v = 0$$

并且

$$(\exists x(A(x) \to B)^v = 1.$$

证明的例子3

反证：假设存在模型v使得

$$(\forall x A(x) \to B)^v = 0$$

并且

$$(\exists x (A(x) \to B))^v = 1.$$

$(\forall x A(x))^v = 1$并且$B^v = 0$.
对论域中的每个元素a, $(A(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$B^v = 0$.
对论域中的每个元素a, $(A(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$B^{v(x/a)} = 0$.
引理. 任给公式B和赋值v, 如果x不自由出现在公式B中, 则对任何元素$a \in U$, $(B)^v = (B)^{v(x/a)}$

证明的例子3

反证: 假设存在模型v使得

$$(\forall x A(x) \rightarrow B)^v = 0$$

并且

$$(\exists x (A(x) \rightarrow B))^v = 1.$$

$(\forall x A(x))^v = 1$并且$B^v = 0$.
对论域中的每个元素a, $(A(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$B^v = 0$.
对论域中的每个元素a, $(A(x))^{v(x/a)} = 1$; 并且$B^{v(x/a)} = 0$.
存在一个元素a使得$(A(x))^{v(x/a)} = 1$蕴涵$B^{v(x/a)} = 1$. 矛盾.

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$\neg\exists x(A(x) \to B) \quad \vdash \quad \forall x \neg(A(x) \to B)$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x(A(x) \to B) &\vdash \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) &\vdash \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) &\vdash \neg(A(z) \to B)
\end{aligned}
$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \rightarrow B \vdash\dashv \exists x(A(x) \rightarrow B)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \rightarrow B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \rightarrow B) \\
\forall x \neg(A(x) \rightarrow B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \rightarrow B) \\
\forall x \neg(A(x) \rightarrow B) & \vdash & \neg(A(z) \rightarrow B) \\
\neg(A(z) \rightarrow B) & \vdash & A(z)
\end{array}
$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B
\end{array}
$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & A(z)
\end{array}
$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \neg B
\end{array}$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x A(x)
\end{array}
$$

证明的例子3

证明. (3) $\forall x A(x) \to B \vdash\dashv \exists x(A(x) \to B)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \forall x \neg(A(x) \to B) \\
\forall x \neg(A(x) \to B) & \vdash & \neg(A(z) \to B) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x) \to B) & \vdash & \forall x A(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\forall x A(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) \vdash & \neg B \\
\forall x A(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) \vdash & \forall x A(x) \\
\forall x A(x) \to B, \neg\exists x(A(x) \to B) \vdash & \forall x A(x) \to B
\end{array}
$$

证明的例子3

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \forall x\neg(A(x)\to B) \\
\forall x\neg(A(x)\to B) & \vdash & \forall x\neg(A(x)\to B) \\
\forall x\neg(A(x)\to B) & \vdash & \neg(A(z)\to B) \\
\neg(A(z)\to B) & \vdash & A(z) \\
\neg(A(z)\to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & A(z) \\
\neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \neg B \\
\neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \forall x A(x) \\
\forall x A(x)\to B, \neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \neg B \\
\forall x A(x)\to B, \neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \forall x A(x) \\
\forall x A(x)\to B, \neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & \forall x A(x)\to B \\
\forall x A(x)\to B, \neg\exists x(A(x)\to B) & \vdash & B \\
\forall x A(x)\to B & \vdash & \exists x(A(x)\to B).
\end{array}
$$