



Hochschule  
Bonn-Rhein-Sieg  
University of Applied Sciences



软光栅渲染器

# 计算机图形学课程设计报告

1650940 江晓湖

1651058 王毅诚

1751984 王舸飞

软件工程学院  
同济大学

指导老师

贾金原

2020 年 1 月 12 号



# 摘要

项目思路、计划、工作量描述



# Contents

<b>1</b>	<b>项目介绍</b>	<b>1</b>
1.1	项目综述 . . . . .	2
1.1.1	... . . . .	2
1.1.2	... . . . .	4
1.2	开发环境 . . . . .	4
1.2.1	... . . . .	4
1.2.2	... . . . .	5
1.2.3	... . . . .	5
1.3	第三方依赖库 . . . . .	5
1.3.1	... . . . .	5
1.3.2	... . . . .	8
1.3.3	... . . . .	8
<b>2</b>	<b>基础功能</b>	<b>9</b>
2.1	顶点变换 . . . . .	9
2.1.1	局部坐标系 . . . . .	10
2.1.2	世界坐标系 . . . . .	10
2.1.3	相机坐标系 . . . . .	10
2.1.4	裁剪坐标系 . . . . .	11
2.1.5	规范化设备坐标系 . . . . .	12
2.1.6	屏幕坐标系 . . . . .	13
2.1.7	模型变换 . . . . .	13
2.1.8	视变换 . . . . .	14
2.1.9	投影变换 . . . . .	14
2.1.10	透视除法 . . . . .	21
2.1.11	视口变换 . . . . .	22

2.2	裁剪 . . . . .	24
2.3	线框画线 . . . . .	24
<b>3</b>	<b>附加功能</b>	<b>25</b>
3.1	区域填充 . . . . .	25
3.2	纹理贴图 . . . . .	25
3.3	光照 . . . . .	25
3.4	三维模型 . . . . .	25
3.5	天空盒子 . . . . .	25
<b>4</b>	<b>功能效果演示</b>	<b>27</b>
4.1	顶点变换 . . . . .	27
4.2	裁剪 . . . . .	27
4.3	线框画线 . . . . .	27
4.4	扫描线填充 . . . . .	27
4.5	纹理贴图 . . . . .	27
4.6	光照 . . . . .	27
4.7	三维模型 . . . . .	27
4.8	天空盒子 . . . . .	27
	<b>References</b>	<b>29</b>

## List of Figures

2.1	软光栅渲染器坐标处理流水线 . . . . .	9
2.2	相机坐标系的原点与世界坐标系的原点重合 . . . . .	11
2.3	视锥体截面 . . . . .	15
2.4	视角 Fovy 示意图 . . . . .	20
2.5	视口变换示意图 . . . . .	22





## List of Tables



# 1

## 项目介绍

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam.

Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## 1.1 项目综述

### 1.1.1 ...

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu

est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros

pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

### 1.1.2 ...

## 1.2 开发环境

### 1.2.1 ...

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien.

Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

## 1.2.2 ...

## 1.2.3 ...

## 1.3 第三方依赖库

### 1.3.1 ...

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetur quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in

ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit. Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

Vivamus eu tellus sed tellus consequat suscipit. Nam orci orci, malesuada id, gravida nec, ultricies vitae, erat. Donec risus turpis, luctus sit amet, interdum quis, porta sed, ipsum. Suspendisse condimentum, tortor at egestas posuere, neque metus tempor orci, et tincidunt urna nunc a purus. Sed facilisis blandit tellus. Nunc risus sem, suscipit nec, eleifend quis, cursus quis, libero. Curabitur et dolor. Sed vitae sem. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Maecenas ante. Duis ullamcorper enim. Donec tristique enim eu leo. Nullam molestie elit eu dolor. Nullam bibendum, turpis vitae tristique gravida, quam sapien tempor lectus, quis pretium tellus purus ac quam. Nulla facilisi.

Duis aliquet dui in est. Donec eget est. Nunc lectus odio, varius at, fermentum in, accumsan non, enim. Aliquam erat volutpat. Proin sit amet nulla ut eros consectetur cursus. Phasellus dapibus aliquam justo. Nunc laoreet. Donec consequat placerat magna. Duis pretium tincidunt justo. Sed sollicitudin vestibulum quam. Nam quis ligula. Vivamus at metus. Etiam imperdiet imperdiet pede. Aenean



turpis. Fusce augue velit, scelerisque sollicitudin, dictum vitae, tempor et, pede. Donec wisi sapien, feugiat in, fermentum ut, sollicitudin adipiscing, metus.

Donec vel nibh ut felis consectetur laoreet. Donec pede. Sed id quam id wisi laoreet suscipit. Nulla lectus dolor, aliquam ac, fringilla eget, mollis ut, orci. In pellentesque justo in ligula. Maecenas turpis. Donec eleifend leo at felis tincidunt consequat. Aenean turpis metus, malesuada sed, condimentum sit amet, auctor a, wisi. Pellentesque sapien elit, bibendum ac, posuere et, congue eu, felis. Vestibulum mattis libero quis metus scelerisque ultrices. Sed purus.

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Cras dapibus, augue quis scelerisque ultricies, felis dolor placerat sem, id porta velit odio eu elit. Aenean interdum nibh sed wisi. Praesent sollicitudin vulputate dui. Praesent iaculis viverra augue. Quisque in libero. Aenean gravida lorem vitae sem ullamcorper cursus. Nunc adipiscing rutrum ante. Nunc ipsum massa, faucibus sit amet, viverra vel, elementum semper, orci. Cras eros sem, vulputate et, tincidunt id, ultrices eget, magna. Nulla varius ornare odio. Donec accumsan mauris sit amet augue. Sed ligula lacus, laoreet non, aliquam sit amet, iaculis tempor, lorem. Suspendisse eros. Nam porta, leo sed congue tempor, felis est ultrices eros, id mattis velit felis non metus. Curabitur vitae elit non mauris varius pretium. Aenean lacus sem, tincidunt ut, consequat quis, porta vitae, turpis. Nullam laoreet fermentum urna. Proin iaculis lectus.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque,

sapien.

**1.3.2 ...**

**1.3.3 ...**

# 2

## 基础功能

### 2.1 顶点变换

在软光栅渲染器中，顶点变换的基本任务是把空间三维顶点转换成屏幕上的二维坐标。这个过程涉及坐标变换的流水线，如图所示：

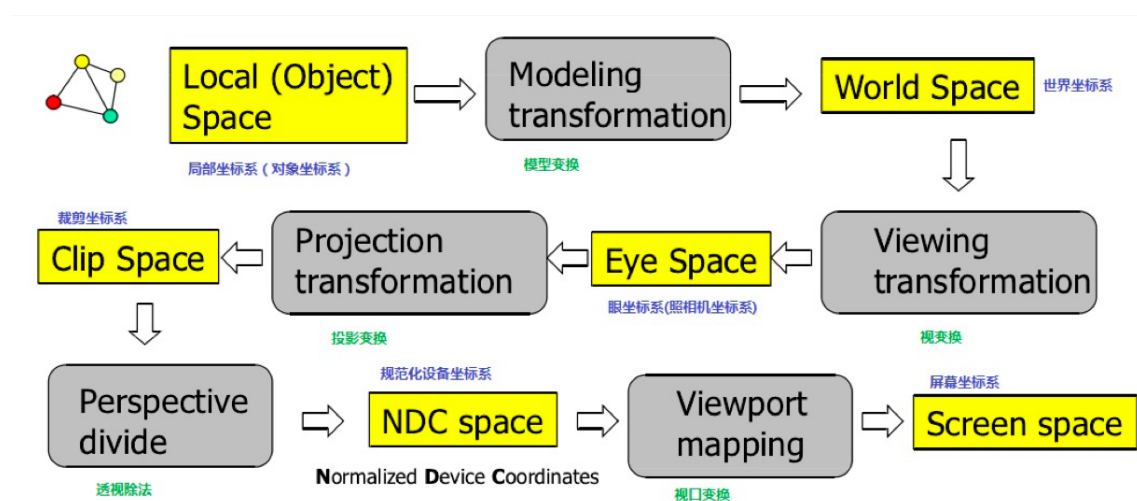


Figure 2.1: 软光栅渲染器坐标处理流水线

为了充分理解流水线各段，需要对几个坐标系进行理解。

### 2.1.1 局部坐标系

每个物体在被创建时，都会有自己的局部坐标系，一般是以物体的几何中心为原点，那么物体的每个顶点相对于几何中心都会有一个相对坐标。这个坐标系就被称为物体的局部坐标系 (Local Object Space)。该坐标系不是固定的，每个物体都有他们独立的坐标系，且仅对该对象适用。在物体移动或改变方向时，其局部坐标系也将随着移动或改变方向。

### 2.1.2 世界坐标系

因为每个物体都有自己的独立局部坐标系，如果要对多个物体观察，我们需要将它们放置到同一个绝对坐标系下，这个坐标系就叫世界坐标系 (World Space)。世界坐标系始终是固定不变的。

### 2.1.3 相机坐标系

当我们在世界坐标系中对物体进行观察时，就会有一个观察原点，对应一个相机坐标系 (Eye Space)，相机坐标系是和观察者密切相关的坐标系。相机坐标系和

屏幕坐标系相似，差别在于相机坐标系在三维空间中，而屏幕坐标系在二维平面里。为了方便处理，相机坐标系的原点和世界坐标系的原点是重合的，世界坐标系的  $z$  轴从相机的视角中心穿过。如图所示：

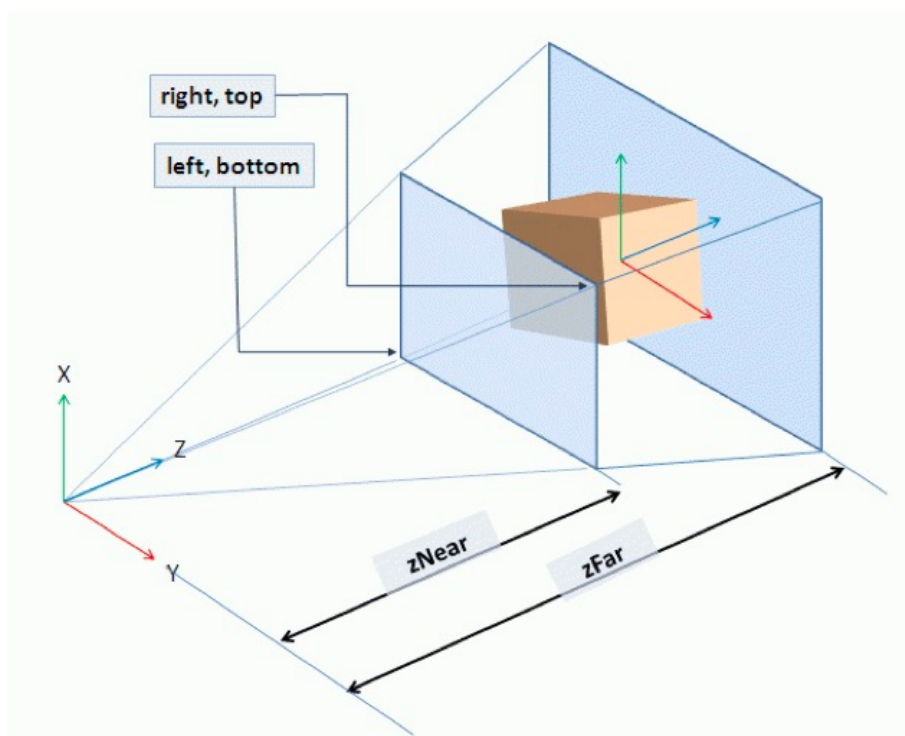


Figure 2.2: 相机坐标系的原点与世界坐标系的原点重合

### 2.1.4 裁剪坐标系

要了解为何要有裁剪坐标系，我们先得了解视锥体的概念：

## 视锥体

在图2.2中，相机有近视面  $z_{Near}$  和远视面  $z_{Far}$ ，只有处在近视面和远视面中间的物体才能被相机所观测到，近视面和远视面共同将相机的视角切分成了一个锥体，这个锥体就叫做视锥体。

正如我们前面所提，只有在视锥体中的物体才能被观测到，那么对物体处于视锥体外的部分自然要进行裁剪，但是在不规则的视锥体内进行裁剪是一件非常困难的事，所以人们将相机坐标投影到裁剪坐标系 (Clip Space)，裁剪坐标空间是一个立方体，这就很容易进行裁剪。

### 2.1.5 规范化设备坐标系

为了消除底层物理特性对裁剪的干扰，通常会把裁剪空间变换成一个规范化立方体，这个立方体的  $x, y, z$  坐标范围都是  $[-1, 1]$ 。这个坐标系被称为规范化设备坐标系 (NDC space)。

### 2.1.6 屏幕坐标系

通常将屏幕上的设备坐标称为屏幕坐标。设备坐标又称为物理坐标，是指输出设备上的坐标。设备坐标用对象距离窗口左上角的水平距离和垂直距离来指定对象的位置，是以像素为单位来表示的，设备坐标的 X 轴向右为正，Y 轴向下为正，坐标原点位于窗口的左上角。

了解了各个坐标系后，就能对各个坐标系的变换有更深入的认识。

### 2.1.7 模型变换

把物体从世界坐标系变换到局部坐标系称为模型变换。模型变换设计到的变换通常是很简单的平移变换。在我们的项目中为了进行简化，在创建物体时就给予了物体一个绝对坐标。三维空间中的平移变换矩阵如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

### 2.1.8 视变换

把物体从世界坐标变换到相机空间称为视变换，如前面所提，视变换主要是把物体通过平移和旋转变换到视锥体中，所以用到的变换主要是平移和旋转变换，平移变换矩阵为等式2.1，旋转变换矩阵为：

- 绕 Y 轴旋转

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

- 绕 X 轴旋转

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

- 绕 Z 轴旋转

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.9 投影变换

从相机坐标系到裁剪坐标系的变换称为投影变换。投影变换矩阵的推导如下：



先观察视锥体的一个截面，如图所示：

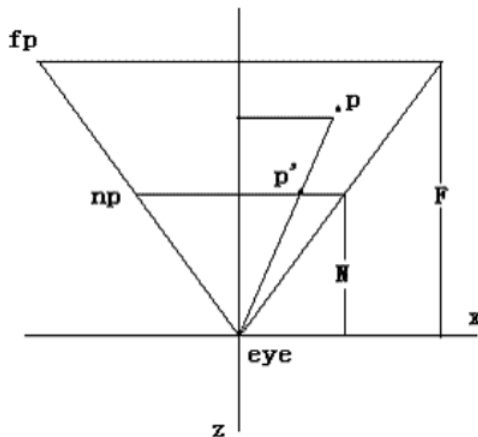


Figure 2.3: 视锥体截面

图中  $N$  是观察原点到近视面的距离， $F$  是观察原点到远视面的距离， $P(x, y, z)$  为视锥体中的点， $P'(x', y', z')$  是投影之后的点。这里  $z$  轴指向视锥体的反方向，指向正方向的推导过程与之类似。投影面可以选择任何平行于近视面的平面，为了简化分析，这里我们选择近视面作为投影平面。于是有  $z' = -N$ ，通过相似三角形容易得到以下式子：

$$\begin{aligned} \frac{x}{x'} &= \frac{z}{z'} = \frac{z}{-N} \\ x' &= -N \frac{x}{z} \\ y' &= -N \frac{y}{z} \end{aligned} \tag{2.5}$$

这样  $P'$  可以写为:

$$P' = (-N\frac{x}{z}, -N\frac{y}{z}, -N) \quad (2.6)$$

正如我们前面提到的, 在不规则视锥体中进行裁剪是一件非常麻烦的事情, 因此需要一个规范化的裁剪空间 (CVV), 假定裁剪空间中  $x, y, z \in [-1, 1]$ , 因此我们构造  $z$  的一个映射:

$$z' = -\frac{az + b}{z} \quad (2.7)$$

使得式子 Eq.2.7 在  $z = -N$  时的值为-1, 而在  $z = -F$  时的值为 1。于是投影变换可以暂时写为:

$$\begin{pmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Nx/z \\ -Ny/z \\ -(az + b)/z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

由待定系数法，有：

$$-\frac{az+b}{z} = \begin{cases} -1, & \text{if } z = -N \\ 1, & \text{if } z = -F \end{cases} \quad (2.9)$$

可以计算出系数  $a, b$ :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{F+N}{F-N} \\ b &= -\frac{2FN}{F-N} \end{aligned} \quad (2.10)$$

代入式子 Eq.2.8这样就可以得到透视投影矩阵的第一个版本：

$$\begin{pmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & \frac{-2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

虽然  $z$  方向满足 CVV 的要求了，但是  $x, y$  方向仍没有被限制在  $[-1, 1]$  之间，我们将投影平面的左边界值记为  $left$ ，右边界值记为  $right$ ，即  $[left, right]$ ，同理

对上下边界有  $[bottom, top]$ 。要把  $-Nx/z \in [left, right]$  和  $-Ny/z \in [bottom, top]$

映射到  $[-1, 1]$  中，需要用到线性插值：

$$\begin{cases} \frac{-Nx/z - left}{right - left} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \\ \frac{-Ny/z - bottom}{top - bottom} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)} \end{cases} \quad (2.12)$$

可以解得：

$$\begin{cases} x = \frac{-2Nx/z}{right - left} - \frac{right + left}{right - left} \\ y = \frac{-2Ny/z}{top - bottom} - \frac{top + bottom}{top - bottom} \end{cases} \quad (2.13)$$

于是， $P'$  可以再写为：

$$P' = \begin{pmatrix} \frac{-2Nx/z}{right - left} - \frac{right + left}{right - left} \\ \frac{-2Ny/z}{top - bottom} - \frac{top + bottom}{top - bottom} \\ -(az + b)/z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

可以改写成：

$$P' = \begin{pmatrix} \frac{2Nx}{right-left} + \frac{right+left}{right-left}z \\ \frac{2Ny}{top-bottom} + \frac{top+bottom}{top-bottom}z \\ az + b \\ -z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

设投影矩阵为 M，则运用待定系数法有：

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2Nx}{right-left} + \frac{right+left}{right-left}z \\ \frac{2Ny}{top-bottom} + \frac{top+bottom}{top-bottom}z \\ az + b \\ -z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

可以求得矩阵 M：

$$\begin{pmatrix} \frac{2N}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2N}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & \frac{-2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

在实际应用中，更常使用视角  $Fovy$  和投影面的宽高比  $Aspect$  来进行投影变换矩阵的描述， $Fovy$  和  $N F left right top bottom$  的关系如图所示：

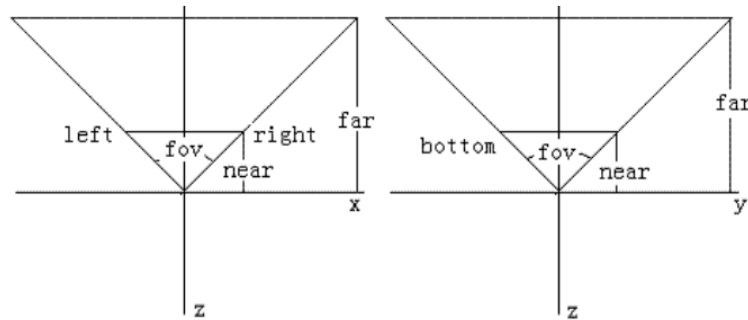


Figure 2.4: 视角 Fovy 示意图

$Fovy$  即视野，是视锥体在  $xz$  平面或者  $yz$  平面的开角角度。在 OpenGL 中使用  $yz$  平面。由图2.4可以得到如下关系：

$$right = N \times \tan(fovy/2)$$

$$left = -right \quad (2.18)$$

$$top = N \times \tan(fovy/2)$$

$$bottom = -top$$

而

$$Aspect = \frac{right - (-right)}{top - (-top)} = \frac{right}{top} \quad (2.19)$$

将式子 Eq.2.18 和式子 Eq.2.19 代入式子 Eq.2.17 可得最终的投影矩阵 M:

$$\begin{pmatrix} \frac{\cot \frac{Fovy}{2}}{Aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Fovy}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & \frac{-2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.1.10 透视除法

透视除法将裁剪坐标空间变换为 NDC 空间，方法如下：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} / w = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.1.11 视口变换

最后一个变换为视口变换，它将 NDC 空间变换到最终屏幕坐标系，视口变换矩阵的推导过程如下：视口变换是将下面立方体中的物体变换到视口即屏幕中：

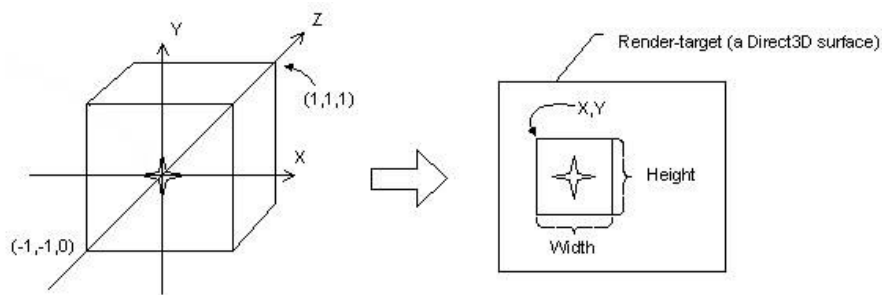


Figure 2.5: 视口变换示意图

其中，立方体的坐标范围为：

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$



而视口的坐标范围是：

$$\begin{cases} X \leq x \leq X + Width \\ Y \leq y \leq Y + Height \\ MinZ \leq z \leq MaxZ \end{cases} \quad (2.23)$$

在图2.5中，视口的起点为  $(X, Y)$ ，宽高分别为  $Width$  和  $Height$ ， $x$  轴向右为正， $y$  轴向下为正， $y$  轴的方向与三维坐标正好相反。视口是一个 2D 平面，在视口变换中， $Z$  坐标也是跟着变换的，只是在图中没有体现。假设变换矩阵的第一列为  $[x', y', z', 1]^T$ ，根据上图，立方体在  $(-1, 1, 0, 1)$  映射到视口中的起点  $(X, Y, MinZ, 1)$ ，立方体中的右上角点  $(1, 1, 0, 1)$  映射到视口中的点  $(X + Width, Y, MinZ, 1)$ ，于是可以列式：

$$\begin{cases} [-1, 1, 0, 1] * [x', y', z', 1]^T = X \\ [1, 1, 0, 1] * [x', y', z', 1]^T = X + Width \end{cases} \quad (2.24)$$

可以求得变换矩阵的第一列：

$$[\frac{Width}{2}, 0, 0, x + \frac{Width}{2}]$$

同理可以求得变换矩阵的第二列、第三列、第四列，从而可以求得视口变换矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{Width}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Height}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MaxZ - MinZ & 0 \\ X + \frac{Width}{2} & Y + \frac{Height}{2} & MinZ & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

通常的视口坐标系的起点为  $[X, Y] = [0, 0]$ ，我们也不需要关注  $Z$  方向上的变换。

## 2.2 裁剪

## 2.3 线框画线

# 3

## 附加功能

How you are planning to test/compare/evaluate your research. Criteria used.

**3.1 区域填充**

**3.2 纹理贴图**

**3.3 光照**

**3.4 三维模型**

**3.5 天空盒子**



# 4

## 功能效果演示

Your main contributions go here

4.1 顶点变换

4.2 裁剪

4.3 线框画线

4.4 扫描线填充

4.5 纹理贴图

4.6 光照

4.7 三维模型

4.8 天空盒子



## References