关节型机器人

刘山
浙江大学控制科学与工程学院

动力学

机械臂动力学

- 描述机械臂在力作用下的动态行为的数理方程
  - 在计算机仿真方面很有用
  - 可用于设计合适的控制器
  - 评估机械臂的结构的合理性

  - 施加在关节上的关节力矩矢量 $\Longleftrightarrow$ 机械臂运动轨迹，即：加速度，速度，位置

机械臂动力学建模

- 研究机械臂的关节力矩和在关节力矩作用下的动态响应之间的关系问题。
- 建立机械臂动力学方程的主要方法：
  - 拉格朗日法：基于能量的方法
  - 牛顿-欧拉法：力平衡方法

重点介绍拉格朗日法

建立动力学方程的步骤

- 拉格朗日方法：
  - （1）计算任一连杆上任一质点的速度；
  - （2）计算各连杆的动能和机械臂的总动能；
  - （3）计算各连杆的位能和机械臂的总位能；
  - （4）建立机械臂系统的拉格朗日函数；
  - （5）对拉格朗日函数求导，导出动力学方程。

机械臂动力学

- **Lagrange-Euler公式**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

  - **Lagrange函数定义如下**

$$L = K - P$$

    - ***K*: 机械臂的总动能**
    - ***P*: 机械臂的总势能**
    - q_i**: 第*i*关节的关节角变量**
    - $\dot{q}_i$**: 第*i*关节的角速度，即** q_i**的导数**
    - τ_i **: 第*i*关节的总力矩（广义力）**

惯性张量

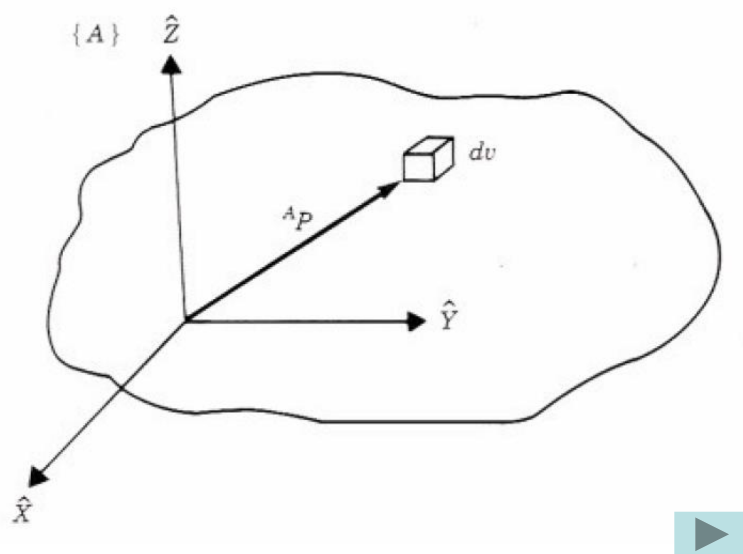
$$I \equiv \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

- 惯量矩：对角线上

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)dm$$

- 惯量积：非对角线上

$$I_{xy} = \int (xy)dm$$

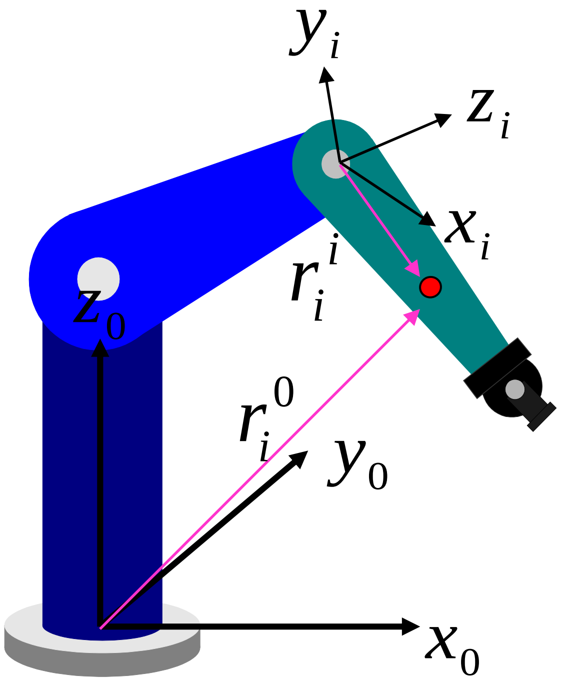


机械臂动力学

- 动能
  - **质心线速度动能:**
    $$k = \frac{1}{2} m v^2$$
  - **具有质心线速度(*V*)和角速度(*ω*)的连杆所具有的动能:**
    $$k = \frac{1}{2} m V^T V + \frac{1}{2} I \omega^T \omega$$
  - **此处*I* 为惯性张量**

连杆上固定点表示

$$r_i^i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$ 表示连杆 ***i*** 上的一个固定点在关节 ***i*** 坐标系上的表示



相同点在基坐标系中的表示如下

$$r_i^0 = T_i^0 r_i^i = (T_1^0 T_2^1 \cdots T_i^{i-1}) r_i^i$$

连杆上固定点速度计算

由于r_i^i是 ***i*** 坐标系上的固定点，因此，相对 ***i*** 坐标系的速度为零

$$\dot{r}_i^i = 0$$

点 r_i^i 在基坐标系中的<u>速度</u>表示如下**:**

$$V_i \equiv V_i^0 = \frac{d}{dt} r_i^0 = \frac{d}{dt}(T_1^0 T_2^1 \cdots T_i^{i-1}) r_i^i$$

$$= \dot{T}_1^0 T_2^1 \cdots T_i^{i-1} r_i^i + T_1^0 \dot{T}_2^1 \cdots T_i^{i-1} r_i^i +$$

$$\cdots + T_1^0 T_2^1 \cdots \dot{T}_i^{i-1} r_i^i + T_i^0 \dot{r}_i^i = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial T_i^0}{\partial q_j} \dot{q}_j\right) r_i^i$$

连杆速度

- 转动关节, $q_i = \theta_i$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T_i^{i-1}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} -S\theta_i & -C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T_i^{i-1}}{\partial q_i} = Q_i T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

连杆速度

- 滑动关节，$q_i = d_i$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial T_i^{i-1}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T_i^{i-1}}{\partial q_i} = Q_i T_i^{i-1}$$

连杆速度

当关节j运动时，连杆i上点的变化

$$\frac{\partial T_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} T_1^0 T_2^1 \cdots T_{j-1}^{j-2} Q_j T_j^{j-1} \cdots T_i^{i-1} & for \quad j \le i \\ 0 & for \quad j > i \end{cases}$$

$$U_{ij} \equiv \frac{\partial T_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} T_{j-1}^0 Q_j T_i^{j-1} & for \quad j \le i \\ 0 & for \quad j > i \end{cases}$$

连杆上点的速度

$$V_i \equiv V_i^0 = \frac{d}{dt} r_i^0 = \frac{d}{dt}(T_1^0 T_2^1 \cdots T_i^{i-1}) r_i^i = (\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial T_i^0}{\partial q_j} \dot{q}_j) r_i^i = (\sum_{j=1}^{i} U_{ij} \dot{q}_j) r_i^i$$

连杆 *i* 动能

- 连杆 ***i*** 上质量块 ***dm*** 的动能

$$dK_i=\frac{1}{2}(\dot{x}_i{}^2+\dot{y}_i{}^2+\dot{z}_i{}^2)dm=\frac{1}{2}trace(V_iV_i{}^T)dm$$

$$=\frac{1}{2}Tr\left[\sum_{p=1}^{i}U_{ip}\dot{q}_p r_i^i\left(\sum_{r=1}^{i}U_{ir}\dot{q}_r r_i^i\right)^T\right]dm$$

$$=\frac{1}{2}Tr\left[\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}U_{ip}r_i^i r_i^{iT}U_{ir}^T\dot{q}_p\dot{q}_r\right]dm$$

$$=\frac{1}{2}Tr\left[\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}U_{ip}(r_i^i dm r_i^{iT})U_{ir}^T\dot{q}_p\dot{q}_r\right]$$

$$Tr(A)\equiv\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

连杆 *i* 动能

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i} U_{ip}\left(\int {}^{i}r_i {}^{i}r_i^{T} dm\right) U_{ir}^{T} \dot{q}_p \dot{q}_r\right]$$

$$I_i = \int {}^{i}r_i {}^{i}r_i^{T} dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}$$

$${}^{i}\bar{r}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i\bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i\bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & m_i\bar{z}_i \\ m_i\bar{x}_i & m_i\bar{y}_i & m_i\bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m_i}\int x_i dm$$

质心

连杆*i*的伪惯量矩阵

机械臂动力学

- 一个机械臂的总动能

$$K=\sum_{i=1}^{n}K_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Tr\left[\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}U_{ip}\left(\int {}^{i}r_i\,{}^{i}r_i^{T}dm\right)U_{ir}^{T}\dot{q}_p\dot{q}_r\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}\left[Tr(U_{ip}I_iU_{ir}^{T})\dot{q}_p\dot{q}_r\right]$$

动能为 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数。

I_i :连杆***i***的伪惯量矩阵, 依赖于连杆***i***的质量分布

机械臂动力学

- 连杆*i*的势能

$\bar{r}_i^{\,0}$:质心在基坐标系中的表达

$$P_i = -m_i g \bar{r}_i^{\,0} = -m_i g (T_i^0 \bar{r}_i^{\,i})$$

$\bar{r}_i^{\,i}$:质心在关节*i*坐标系中的表达

$$g = (g_x, g_y, g_z, 0)$$

g :在基坐标系中的重力矢量

$$|g| = 9.8 m/\sec^2$$

- 一个机械臂的总势能

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} [-m_i g (T_i^0 \bar{r}_i^{\,i})]$$

势能为 q_i 的函数

机械臂动力学

- **Lagrangian函数**

$$L = K - P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\left[Tr(U_{ij}I_iU_{ik}{}^T)\dot{q}_j\dot{q}_k\right] + \sum_{i=1}^{n} m_i g(T_i^0\bar{r}_i^{\,i})$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j} Tr(U_{jk}I_jU_{ji}{}^T)\ddot{q}_k + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{j} Tr\left(\frac{\partial U_{jk}}{\partial q_m} I_jU_{ji}{}^T\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$-\sum_{j=i}^{n} m_j g U_{ji}\bar{r}_j^{\,j}$$

机械臂动力学

当关节j运动时，连杆i上点的变化

$$U_{ij} \equiv \frac{\partial T_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} T_{j-1}^0 Q_j T_i^{j-1} & for \quad j \le i \\ 0 & for \quad j > i \end{cases}$$

同样，可以得到当关节j和关节k运动时，连杆i上的点的变化

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \equiv U_{ijk} = \begin{cases} T_{j-1}^0 Q_j T_{k-1}^{j-1} Q_k T_i^{k-1} & i \ge k \ge j \\ T_{k-1}^0 Q_k T_{j-1}^{k-1} Q_j T_i^{j-1} & i \ge j \ge k \\ 0 & i < j \quad or \quad i < k \end{cases}$$

机械臂动力学

- 动力学模型

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m + C_i$$

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} Tr(U_{jk} I_j U_{ji}^{T})$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} Tr(U_{jkm} I_j U_{ji}^{T})$$

$$C_i = -\sum_{j=i}^{n} m_j g U_{ji} \bar{r}_j^{\,j}$$

机械臂动力学

- ***n***连杆机械臂的动态模型

$$\tau = D(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) + C(q)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ & \vdots & \\ D_{n1} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}$$ 对称阵，与加速度相关的惯量矩阵项

$$h(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$ 与离心力和哥氏力有关的项

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$ 重力项

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$ 作用在各连杆上的力矩

例

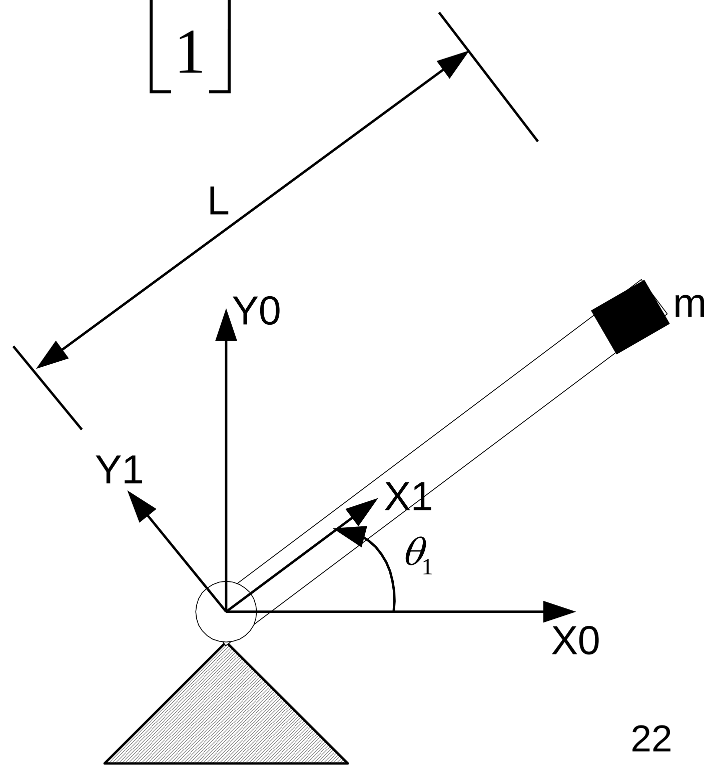
连杆质量(*m*)集中在末端，连杆长度为*l*

如图设定坐标系

$$r_1^1 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad g = [0, -9.8, 0, 0]$$

$$r_1^0 = T_1^0 r_1^1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_1^1$$

$$V_1 = \dot{r}_1^0 = \frac{d}{dt} T_1^0 r_1^1 = Q_1 T_1^0 r_1^1 = \begin{bmatrix} -l \cdot S\theta_1 \\ l \cdot C\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}$$



例

- 动能

$$dK = \frac{1}{2} Tr(V_1 V_1^T) dm$$

$$K = \frac{1}{2} \int Tr(\begin{bmatrix} -l \cdot S\theta_1 \\ l \cdot C\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l \cdot S\theta_1 & l \cdot C\theta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) \dot{\theta}_1^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} Tr(\begin{bmatrix} l^2 \cdot (S\theta_1)^2 & -l^2 \cdot S\theta_1 \cdot C\theta_1 & 0 & 0 \\ -l^2 \cdot S\theta_1 \cdot C\theta_1 & l^2 \cdot (C\theta_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) \dot{\theta}_1^2 m$$

$$= \frac{1}{2} [l^2 (S\theta_1)^2 + l^2 (C\theta_1)^2] m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} l^2 m \dot{\theta}_1^2$$

例

- 势能

$$P=-mg(T_0^1\bar{r}_1)=-m\begin{bmatrix}0 & -9.8 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0\\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=9.8m\cdot l\cdot S\theta_1$$

- **Lagrange函数**

$$L=K-P=\frac{1}{2}l^2m\dot{\theta}_1^{\,2}-9.8m\cdot l\cdot S\theta_1$$

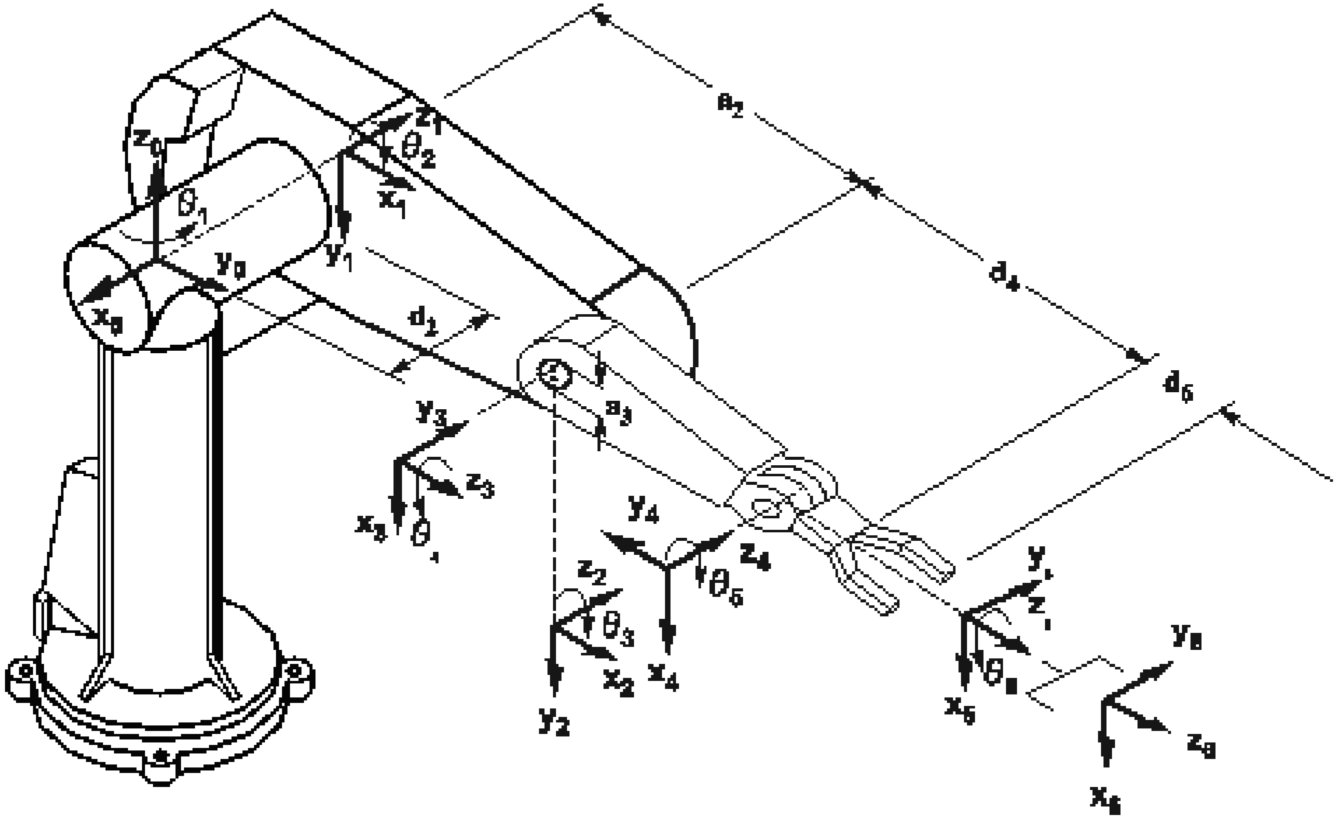
- 动力学方程

$$\tau_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}$$

$$=\frac{d}{dt}(l^2m\dot{\theta}_1)-9.8m\cdot l\cdot C\theta_1=l^2m\ddot{\theta}_1-9.8m\cdot l\cdot C\theta_1$$

例: Puma 560

- **PUMA 560机械臂前四个连杆的动力学方程**



例: Puma 560

- **建立D-H坐标系**
- 机械臂连杆参数

Joint i	$\boldsymbol{\theta_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{a_i}$***(mm)***	$\boldsymbol{d_i}$***(mm)***
1	θ_1	-90	0	0
2	θ_2	0	431.8	-149.09
3	θ_3	90	-20.32	0
4	θ_4	-90	0	433.07
5	θ_5	90	0	0
6	θ_6	0	0	56.25

- 坐标变换矩阵 T_i^{i-1}
- 计算 ***D, H, C***

例: Puma 560

- 计算 ***D, H, C***

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} Tr(U_{jk} I_j U_{ji}^T) \qquad n=3; i=1,2,3$$

$$D_{11} = Tr(U_{11} I_1 U_{11}^T) + Tr(U_{21} I_2 U_{21}^T) + Tr(U_{31} I_3 U_{31}^T)$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22} I_2 U_{21}^T) + Tr(U_{32} I_3 U_{31}^T)$$

$$D_{13} = D_{31} = Tr(U_{33} I_3 U_{31}^T)$$

$$D_{22} = Tr(U_{22} I_2 U_{22}^T) + Tr(U_{32} I_3 U_{32}^T)$$

$$D_{23} = D_{32} = Tr(U_{33} I_3 U_{32}^T)$$

$$D_{33} = Tr(U_{33} I_3 U_{33}^T)$$

例: Puma 560

- 计算 ***D, H, C***

$$h(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$h_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} Tr(U_{jkm} I_j U_{ji}^{T})$$

$$h_1 = h_{111}\dot{q}_1^{\,2} + h_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + h_{113}\dot{q}_1\dot{q}_3 + h_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + h_{122}\dot{q}_2^{\,2}$$

$$+ h_{123}\dot{q}_2\dot{q}_3 + h_{131}\dot{q}_3\dot{q}_1 + h_{132}\dot{q}_3\dot{q}_2 + h_{133}\dot{q}_3^{\,2}$$

$$h_{111} = Tr(U_{111} I_1 U_{11}^{T}) + Tr(U_{211} I_2 U_{21}^{T}) + Tr(U_{311} I_3 U_{31}^{T})$$

$$h_{112} = Tr(U_{212} I_2 U_{21}^{T}) + Tr(U_{312} I_3 U_{31}^{T})$$

$$h_{121} = Tr(U_{221} I_2 U_{21}^{T}) + Tr(U_{321} I_3 U_{31}^{T}) \qquad h_{113} = Tr(U_{313} I_3 U_{31}^{T})$$

$$h_{122} = Tr(U_{222} I_2 U_{21}^{T}) + Tr(U_{322} I_3 U_{31}^{T}) \qquad h_{123} = Tr(U_{323} I_3 U_{31}^{T})$$

……

例: Puma 560

- 计算 ***D, H, C***

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \equiv U_{ijk} = \begin{cases} T_{j-1}^{0} Q_j T_{k-1}^{j-1} Q_k T_i^{k-1} & i \geq k \geq j \\ T_{k-1}^{0} Q_k T_{j-1}^{k-1} Q_j T_i^{j-1} & i \geq j \geq k \\ 0 & i < j \quad or \quad i < k \end{cases}$$

$$U_{111} = (Q_1)^2 T_1^0 \qquad U_{211} = (Q_1)^2 T_2^0 \qquad U_{311} = (Q_1)^2 T_3^0$$

$$U_{212} = U_{221} = Q_1 T_1^0 Q_2 T_2^1 \qquad U_{312} = U_{321} = Q_1 T_1^0 Q_2 T_3^1$$

$$U_{313} = Q_1 T_2^0 Q_3 T_3^2 \qquad U_{222} = T_1^0 (Q_2)^2 T_2^1 \qquad U_{322} = T_1^0 (Q_2)^2 T_3^1$$

$$U_{323} = U_{332} = T_1^0 Q_2 T_2^1 Q_3 T_3^2 \qquad U_{331} = Q_1 T_2^0 Q_3 T_3^2 \qquad U_{333} = T_2^0 Q_3 Q_2 T_3^2$$

例: Puma 560

- 计算 ***D, H, C***

$$C_i = -\sum_{j=i}^{n} m_j g U_{ji} \bar{r}_j^{\,j}$$

$$C_1 = -m_1 g U_{11} \bar{r}_1^{\,1} - m_2 g U_{21} \bar{r}_2^{\,2} - m_3 g U_{31} \bar{r}_3^{\,3}$$

$$C_2 = -m_2 g U_{22} \bar{r}_2^{\,2} - m_3 g U_{32} \bar{r}_3^{\,3}$$

$$C_3 = -m_3 g U_{33} \bar{r}_3^{\,3}$$

思考题

- 如图所示两连杆机械臂，每杆长为l；两杆的质量分别为m_1和m_2；假定连杆的质量均匀分布，其它部分(包括驱动和连接件)的惯量均忽略，两连杆的伪惯量矩阵如右所示. 请用拉格朗日法推导出此机械臂的动力学模型.

$$J_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}m_1l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1l\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2}m_1l & 0 & 0 & m_1\end{bmatrix}$$

$$J_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}m_2l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2l\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2}m_2l & 0 & 0 & m_2\end{bmatrix}$$