2015-2016(2)信计专业

《概率论与数理统计》 期末考试卷A参考答案

一、填空题〖每小题5分，共计25分〗

1、设A,B,C是三个随机事件，则事件A,B,C中至少有一个不发生的事件可表示为$\underline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$或$\underline{\overline{ABC}}$

2、已知随机事件A,B满足：$P(A)=1/2$，$P(B)=1/3$，$P(\overline{A}|B)=1/6$，则$P(A|A\cup B)$ =__0.9__。

3、设$X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X与Y相互独立，则$Z=\dfrac{X/m}{Y/n}$服从的分布为$\underline{F(m,n)}$。

4、已知$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$来自总体X的样本（$n>1$），其样本均值和样本方差分别记为$\overline{x}$和s^2。在μ未知的条件下，σ^2的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间是$\underline{\left[\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]}$。

5、假设每个人生日的月份是随机的。现某班级有30位同学，则至少有两位同学在同一月份过生日的概率是__1__。

二、〖计10分〗有m（$m>1$）个人相互传球，球开始时由甲传出。假设每次传球者等可能的把球传给其余的$m-1$个人。求第n次传球时仍有甲传出的概率。

解：记第n次由甲传球的事件为A_n，相应的概率为p_n（$n=1,2,3,\cdots$）。显然，当$n=1$，有$p_1=p(A_1)=1$。一般地，当$n>1$时，有

$$\begin{aligned}p_n=p(A_n)&=p(A_{n-1})\cdot p(A_n|A_{n-1})+p(\overline{A_{n-1}})\cdot p(A_n|\overline{A_{n-1}})\\&=\frac{1}{m-1}[1-p_{n-1}]\end{aligned}$$

因此可得p_n的递推公式如下：

$$\begin{cases}p_n=\dfrac{1}{m-1}[1-p_{n-1}]\\ p_1=1,n=2,3,\cdots\end{cases}。$$

容易求得：$p_n=\dfrac{1}{m}\left[1-\left(-\dfrac{1}{m-1}\right)^{n-2}\right]$（$n=2,3,\cdots$）。

三、〖计12分〗设随机变量X和Y相互独立，且都服从参数为λ的指数分布。令

$$\begin{cases}U=X+Y\\ V=X/Y\end{cases}$$

**试求：（1）(U,V)的联合概率密度函数$p_{U,V}(u,v)$；（2）$U=X+Y$的概率密

度函数 $p_U(u)$；（3）判断随机变量 U 与 V 是否独立。

解：（1）由 $\begin{cases} u = x + y \\ v = x / y \end{cases}$，可得 $\begin{cases} x = uv/(v+1) \\ y = u/(v+1) \end{cases}$。于是

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v/(v+1) & u/(v+1)^2 \\ 1/(v+1) & -u/(v+1)^2 \end{vmatrix} = -\frac{u}{(v+1)^2}$$

因此，(U,V) 的联合概率密度函数为

$$p_{U,V}(u,v) = p_{X,Y}(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J| = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 u e^{-\lambda u}}{(v+1)^2}, & u \ge 0, v > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（2）$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)dv = \begin{cases} \lambda^2 u e^{-\lambda u}, & u \ge 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$

（3）类似（2）可求：由公式可得：

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)du = \begin{cases} \dfrac{1}{(v+1)^2}, & v > 0 \\ 0, & v \le 0 \end{cases}$$

因为 $p_{U,V}(u,v) = p_U(u)p_V(v)$，故随机变量 U 与 V 独立。

四、〖计 12 分〗设 $x_1,\cdots,x_n$ 是来自总体 $X \sim U(0,\theta)$ 的一个样本。试求参数 θ 的矩估计和最大似然估计量，并讨论它们是否为无偏估计？

解：由于 $X \sim U(0,\theta)$，因此 $E(X) = \theta/2$，令

$$\theta/2 = E(X) = \bar{x}$$

可得参数 θ 的矩估计为：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{x}$。因 $E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{x}) = 2 \cdot \theta/2 = \theta$，因此，$\hat{\theta}_1 = 2\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计。

由 $X \sim U(0,\theta)$，即 $p(x) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\lambda) = \frac{1}{\theta^n}$$

由于 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda) = \dfrac{1}{\theta^n} \le \dfrac{1}{[\max\{x_1,\cdots,x_n\}]^n}$，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \max\{x_1,\cdots,x_n\}$。

由于 $X \sim U(0,\theta)$，其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/\theta, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

因此$Y=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$的概率密度函数为

$$P_Y(y)=nF^{n-1}(y)\cdot P(y)=\begin{cases}\dfrac{n\cdot y^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因　为　$E(\hat{\theta}_2)=E(Y)=\int_0^\theta y\cdot\dfrac{n\cdot y^{n-1}}{\theta^n}dy=\dfrac{n}{n+1}\theta\neq\theta$　，　所　以 $\hat{\theta}_2=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$不是参数$\theta$的无偏估计。

五、〖计 14 分〗已知某维尼纶纤维的耐水性能与其“缩醇化度”密切相关，且它的甲醇浓度x与“缩醇化度”y间具有近似的线性关系。现测得 7 组数据，整理如下：$\bar{x}=24.00$，$\bar{y}=28.99$，$l_{xx}=112.0000$，$l_{xy}=29.6000$，$l_{yy}=9.0729$。试求：

（1）y对x的线性回归方程；

（2）对建立的回归方程进行显著性检验（$\alpha=0.05$）；

（3）当$x=25.4$，计算y的预测值。

解：（1）由$\widehat{\beta_1}=l_{xy}/l_{xx}=0.2643$，$\widehat{\beta_0}=\bar{y}-\widehat{\beta_1}\bar{x}=22.6468$，因此，$y$对$x$的线性回归方程为：$\hat{y}=22.6468+0.2643x$；

（2）由$S_R=\widehat{\beta_1}^2 l_{xx}=7.8237$，$S_e=S_T-S_R=l_{yy}-S_R=1.2492$，可得下列方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F 比
回 归	$S_R=7.8237$	$f_R=1$	$MS_R=7.8237$	31.3148
残 差	$S_e=1.2492$	$f_e=5$	$MS_e=0.2498$	
总 计	$S_T=9.0729$	$f_T=6$		

由于$\hat{F}=31.3148>F_{0.95}(1,5)=6.61$，因此（1）中回归方程是显著的；

（3）当$x=25.4$，y的预测值为$\hat{y}=29.3600$。

六、〖计 11 分〗已知正常成年男（X）和女（Y）所含红血球（单位：$10^4/mm^3$）都服从正态分布，且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。为研究某地正常成年男和女所含红血球的差异，今随机抽取该地成年男性 15 人和女性 7 人进行检测，测得样本均值和方差如下：$\bar{x}=465.13$，$\bar{y}=422.16$，$S_x^2=54.80^2$，$S_y^2=49.20^2$。假定$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，试检验：该地区正常成年男女所含红血球的平均值是否有差异?（取$\alpha=0.05$）

解：检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2$ vs $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

取检验统计量：$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$

其中$m=15$，$n=7$，$S_w^2=\dfrac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}$。

当$\alpha = 0.05$时，拒绝域为

$$W = \left\{ t \mid |t| > t_{1-\alpha/2}(m+n-2) \right\} = \left\{ t \mid |t| > 2.0860 \right\}$$

由$\overline{x} = 465.13$，$\overline{y} = 422.16$，$S_x^2 = 54.80^2$，$S_y^2 = 49.20^2$，可得：

$$S_w = \sqrt{\frac{14 \times 54.80^2 + 6 \times 49.20^2}{20}} = 53.182$$

$\left|\hat{t}\right| = \left| \dfrac{465.13 - 422.16}{S_w \sqrt{1/15 + 1/7}} \right| = 1.7652 \notin W$，因此，可以认为该地区正常成年男女所含红血球的平均值没有差异。

七、〖计 10 分〗设随机变量$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，其特征函数为

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$$

试求：（1）利用特征函数计算$E(X)$和$Var(X)$；

（2）利用特征函数证明：Γ-分布对参数α具有可加性。

解：（1）由$\varphi_X'(t) = \dfrac{\alpha i}{\lambda}\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha-1}$，$\varphi''(t) = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha-2}$，可得：$E(X) = \dfrac{\varphi_X'(0)}{i} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$，$E(X^2) = -\varphi_X''(0) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$。因此，有：

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}，Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}。$$

证明：（2）不妨设$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，$Y \sim Ga(\beta, \lambda)$，且$X$与$Y$独立。由特征函数的性质可得$X+Y$的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha} \cdot \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\beta} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-(\alpha+\beta)}$$

由随机分布特征函数的唯一性知：$\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-(\alpha+\beta)}$所对应的分布正是参数为$\alpha + \beta$和$\lambda$的$\Gamma$-分布，即$X + y \sim Ga(\alpha+\beta, \lambda)$，故结论成立。

八、〖计 6 分〗试简述本课程 CH4“大数定律和中心极限定理”的主要内容，并说明在本课程中的作用。

解：CH4“大数定律和中心极限定理”的主要内容包括三个部分：（1）随机变量的特征函数及其性质；（2）大数定律；（3）中心极限定理。在本课程中取到“承上启下”的作用，即大数定律是对前三章概率论部分的深化和总结，而中心极限定理是对把握后四章，即数理统计部分内容，至关重要。