2014-2015（2）2013级信计专业《概率论与数理统计》 期末考试卷（A）
参考答案

一、填空题〖每小题5分，共计30分〗

1、A,B,C 是三个随机事件至少有一个发生，A,B 发生且 C 不发生；

2、$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{7}{12}$；3、$Z=X+Y\sim\chi^2(m+n)$；4、$\overline{x}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)$；

5、$\dfrac{1}{n}$；6、经验信息。

二、〖计10分〗证明：记第 k 次取出的是黑球的事件为 B_k（$k=1,2,3,\cdots$）。显然，当 $k=1$，有 $p(B_1)=\dfrac{b}{b+r}$。当 $k=2$ 时，

$$p(B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2|B_2)+p(\overline{B_1})\cdot p(B_2|\overline{B_1})=\frac{b}{b+r}。$$

假设当 $k\le n$ 时，有 $P(B_k)=\dfrac{b}{b+r}$。则当 $k=n+1$ 时，

$$\begin{aligned}p(B_{n+1})&=p(B_1B_{n+1})+p(\overline{B_1}B_{n+1})=p(B_1)\cdot p(B_{n+1}|B_1)+p(\overline{B_1})\cdot p(B_{n+1}|\overline{B_1})\\&=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}+\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}=\frac{b}{b+r}。\end{aligned}$$

因此，由数学归纳法知：$P(B_k)=\dfrac{b}{b+r}$（$k=1,2,3,\cdots$）

三、〖计14分〗解：（1）由

$$1=\iint\limits_{R^2}p(x,y)dxdy=k\int_0^1xdx\int_0^1y^2dy=\frac{k}{6}，因此 k=6；$$

（2）由于 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2dy=2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，且

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2dx=3y^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}，因此有$$

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

故随机变量 X 与 Y 独立。

（3）由公式可得：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^z 6x(z-x)^2dx=\frac{1}{2}z^4, & 0<z\le 1\\ \int_{z-1}^1 6x(z-x)^2dx=-\frac{1}{2}z^4+3z^2-2z, & 1<z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

四、〖计 10 分〗解：似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^n p(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^n\lambda^{-1}\exp(-x_i/\lambda)=\lambda^{-n}\exp(-\lambda^{-1}\sum_{i=1}^n x_i)$$

即 $\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=-n\ln\lambda-\lambda^{-1}\sum_{i=1}^n x_i$ 。由

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i=0$$

解得 $\hat{\lambda}=\bar{x}$，此即为参数 λ 的最大似然估计。由于

$$E(\hat{\lambda})=E(\bar{x})=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^n x_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\lambda=\lambda$$

因此，$\hat{\lambda}=\bar{x}$ 是参数 λ 的无偏估计。

五、〖计 14 分〗解：由数据表可得：$\bar{x}=6$，$\bar{y}=210.4$，$l_{xx}=40$，$l_{xy}=1478$，$l_{yy}=54649.2$ 。

（1）由 $\hat{\beta}_1=l_{xy}/l_{xx}=36.95$，$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}=-11.3$，因此，$y$ 对 x 的线性回归方程为：$\hat{y}=-11.3+36.95x$ 。

（2）由 $S_R=\hat{\beta}_1^2 l_{xx}=54612.1$，$S_e=S_T-S_R=37.1$，可得下列方差分析表

来 源	平方和	自由度	均方	F 比
回 归	$S_R=54612.1$	$f_R=1$	$MS_R=54612.1$	4416.07
残 差	$S_e=37.1$	$f_e=3$	$MS_e=12.37$	
总 计	$S_T=54649.2$	$f_T=4$		

由于 $\hat{F}=4416.07>F_{0.95}(1,3)=10.13$，因此（1）中回归方程是显著的；

（3）当 $x=12$，y 的预测值为 $\hat{y}=432.1$。

六、**〖计 12 分〗解：**（1）检验假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs $H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

取检验统计量：$F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}\sim F(m-1,n-1)$

其中$m=n=6$。

当$\alpha=0.05$时，拒绝域为

$$W=\left\{F \mid F>F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\text{或}F<F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right\}$$
$$=\left\{F \mid F>7.15\text{或}F<1/7.15\right\}$$

由于$\widehat{F}=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}=\dfrac{7.4286\times10^{-6}}{7.7143\times10^{-6}}=0.9630\notin W$，因此，可以认为两批电子器件的方差相等。

（2）检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2$ vs $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，取检验统计量为：

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

其中$s_w^2=\dfrac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}$，$m=n=6$。

当$\alpha=0.05$时，拒绝域为

$$W=\left\{t \mid |t|>t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\right\}=\left\{t \mid |t|>2.2281\right\}$$

由于$|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\right|=1.2589\notin W$，因此，可以认为两批电子器件的均值相等。

七、〖计 10 分〗辛钦大数定律：设$\{X_n\}$为独立、同分布的随机变量序列。若X_n的数学期望存在，则$\{X_n\}$服从大数定律，即记$E(X_n)=\mu$，则有

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}\mu\text{。}$$

证明：记X_n的特征函数为$\varphi(t)$，由于$\varphi'(0)=iE(X_n)=\mu i$，于是，$\varphi(t)$在 0 点有展开式：$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+o(t)=1+i\mu t+o(t)$。

再由$\{X_n\}$为独立、同分布的随机变量序列，以及特征函数的性质可得Y_n的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[1+i\mu\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

因此，对任意的t有：$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{Y_n}(t)=e^{i\mu t}$，而$e^{i\mu t}$正是退化分布的特征函数。故$Y_n\xrightarrow{P}\mu$。