《概率论与数理统计》期末考试卷（B）参考答案

一、填空题〖每小题 5 分，共计 25 分〗

1、设 A,B,C 是三个随机事件，则 A,B,C 三个事件中恰好有两个发生的事件可表示为____$\underline{\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}}$_____。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z=aX+bY\sim$__$\underline{N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)}$__（其中 a 和 b 为常数，且 $ab\neq 0$）。

3、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），则 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 服从的分布为____$\underline{\chi^2(n)}$____。

4、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），其样本均值和样本方差分别记为 $\overline{x}$ 和 s^2。σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间是 $\underline{\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]}$；相应的所用枢轴量为 _$\underline{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)}$（注：指明分布）。

5、本教程中参数估计方法主要有____点估计和区间估计_____。

二、〖计 **12** 分〗有两箱零件：第一箱装 **50** 件，其中 **20** 件为一等品；第二箱装 **30** 件，其中 **18** 件为一等品。现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后任取两个零件（注：不放回抽样）。试求：

（**1**）第一次取出的零件是一等品的概率；

（**2**）已知第一次取出的是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的概率。

解： 记取出第 i 箱的事件为 A_i，第 j 次取出的是一等品的事件分别为 B_j，$j=1,2$。有条件知：

$$P(A_1)=P(A_2)=0.5$$

（1）$P(B_1)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)$

$$=0.5\times\frac{C_{20}^1}{C_{50}^1}+0.5\times\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}=0.5;$$

（2）由

$$P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)P(B_2\mid A_1B_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)P(B_2\mid A_2B_1)$$

$$=0.5\times\frac{C_{20}^1}{C_{50}^1}\times\frac{C_{19}^1}{C_{49}^1}+0.5\times\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}\times\frac{C_{17}^1}{C_{29}^1}=\frac{3601}{14210}\text{。}$$

因此，$P(B_2\mid B_1)=\dfrac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\dfrac{3601}{7105}$（或 0.5068）。

三、〖计 10 分〗设随机变量 $X\sim N(0,1)$，试求 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $P_Y(y)$。

解： 由 $X\sim N(0,1)$ 知：$Y=X^2$ 的取值范围为 $[0,+\infty)$。

$\forall y\in R$，有：当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y=X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1$

因此，$F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi(\sqrt{y})-1 & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$。于是，

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}\text{。}$$

四、〖12 分〗设随机变量 X 的期望和方差都存在，分别记为 μ 和 σ^2。$x_1,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的样本（$n>1$），试求参数 μ 和 σ^2 的矩估计量，并判断它是否是无偏估计。

解： 由题给条件，可令：$\begin{cases}\mu=E(X)=\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\\ \mu^2+\sigma^2=E(X^2)=\overline{x^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\end{cases}$

解得：$\begin{cases}\widehat{\mu}=\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2-\overline{x}^2\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2-\overline{x}^2\end{cases}$

由于

$$E\left(\widehat{\mu}\right)=E\left(\overline{x}\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$$

$$E\left(\widehat{\sigma^2}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\overline{x}^2\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2\ne\sigma^2$$

因此，$\widehat{\mu}=\overline{x}$ 是参数 μ 的无偏估计，$\widehat{\sigma^2}$ 是参数 σ^2 的有偏估计。

五、〖计 10 分〗为比较两个小麦品种的产量，选择 18 块条件相似的试验田，采用相同的耕作方法做试验。现测得播种甲品种 X 的 8 块试验田的产量和播种乙品种 Y 的 10 块试验田的产量（单位：kg/亩），计算得它们的样本均值和方差分别是 $\overline{x}=569.38$，$S_x^2=2140.55$；$\overline{y}=487.00$，$S_y^2=3256.22$。假设 X 和 Y 是相互独立，且都服从正态分布。试检验：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，两个小麦品种的产量的均值是否相等?

解：不妨设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

1) 提出假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$；

2) 构造检验统计量：$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$，其中

$$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}}$$

3)对于显著水平 $\alpha=0.05$，双侧检验的拒绝域为 $F\le F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $|t|\ge t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$，此处 $m=8,n=10$，$t_{0.975}(16)=2.1199$，由题意得拒绝域为 $W=\{t\,|\,|t|>2.1199\}$。

4)由样本值 $\overline{x}=569.38$，$\overline{y}=487.00$，$S_x^2=2140.55$ 和 $S_y^2=3256.22$，算得 $|t|=\dfrac{569.38-487}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}}}=3.3009$；

5) 因落入拒绝域，所以拒绝 H_0，接受 H_1，即认为两个小麦品种的产量的均值是不相等的。

六、〖计 14 分〗现收集了 16 组金钢中的碳含量 x 与强度 y 的数据，整理数据如下：

$\overline{x}=0.125$，$\overline{y}=45.789$，$l_{xx}=0.3024$，$l_{xy}=25.522$，$l_{yy}=2432.457$

假定 y 对 x 具有近似线性关系，试求：（1）y 对 x 的线性回归方程；（2）对建立的回归方程进行显著性检验（$\alpha=0.05$）；（3）当 $x=0.20$，计算 y 的预测区间（$\alpha=0.05$）。

解：（1）由 $\widehat{\beta}_1=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=\dfrac{25.522}{0.3024}\approx 84.3981$，

$$\widehat{\beta}_0=\overline{y}-\widehat{\beta}_1\overline{x}=45.789-84.3981\times 0.125=35.2392$$

则 y 关于 x 的回归直线方程为：$\hat{y}=35.2392+84.3981x$。

（2）对回归方程显著性检验，经计算有：

$$S_T=l_{yy}=2432.457\quad,\quad f_T=15$$

$$S_R=\widehat{\beta}_1^2 l_{xx}=84.3981^2\times 0.3024=2154.0081，\quad f_R=1$$

$$S_e=S_T-S_R=2432.457-2154.0081=278.4489，\quad f_e=14$$

由题意得拒绝域为 $F\ge F_{1-\alpha}(1,14)$，查表 $F_{0.95}(1,14)=4.60$。由计算得

$$\widehat{F}=\frac{S_R}{S_e/14}=\frac{2154.0081}{278.4489/14}=108.3004$$

由于 $\widehat{F}\ge F_{1-\alpha}(1,8)$，落入拒绝域，因此，在显著水平 $\alpha=0.05$ 下建立的回归方程是显著的。

（3）当 $x=0.2$ 时，$\hat{y}=52.1188$。在 $\alpha=0.05$ 时，$t_{0.975}(14)=2.1448$，$\widehat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{278.4489}{14}}=4.4597$，则

$$\delta=4.4597\times 2.1448\times\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{(0.2-0.125)^2}{0.3024}}=9.9455$$

从而 $\hat{y}$ 的置信度为 0.95 的预测区间

$$52.1188\pm 9.9455=(42.1733,62.0643)。$$

七、〖计 12 分〗设随机变量 $X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，其特征函数为

$$\varphi_X(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha}$$

试求：（1）利用特征函数计算 $E(X)$ 和 $Var(X)$；

（2）利用特征函数证明：Γ-分布对参数 α 具有可加性。

证明：（1）由 $\varphi_X(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha}$，则

$$\varphi_X'(t)=\frac{\alpha i}{\lambda}(1-it/\lambda)^{-\alpha-1}，\quad \varphi_X''(t)=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}(1-it/\lambda)^{-\alpha-2}$$

于是，有

$$E(X)=\frac{\varphi_X'(0)}{i}=\frac{\alpha}{\lambda}，\quad D(X)=-\varphi_X''(0)+[\varphi_X'(0)]^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}。$$

（2）假设 $X_1\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$X_2\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且 X_1 与 X_2 独立。由特征函数的性质知：

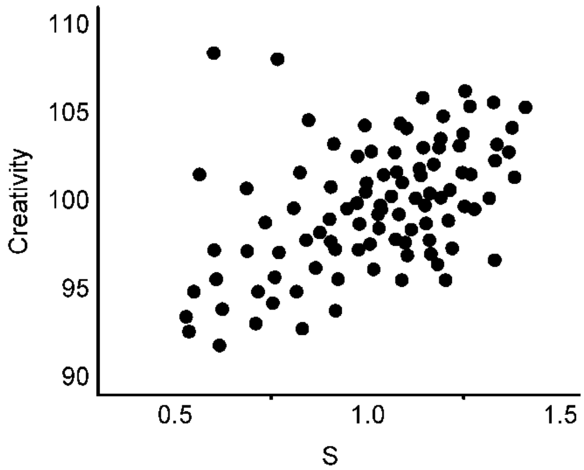
$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha_1}\times(1-it/\lambda)^{-\alpha_2}=(1-it/\lambda)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$$

由随机变量的特征函数唯一性知：$X_1+X_2\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$，即结论成立。

八、〖计 5 分〗人的大脑，表面是一层灰色的褶皱状“皮质”，里面充满了“白

质”。不同的皮质位置i，执行不同的功能。白质的功能是传递信息，使得皮质的任意两个位置有可能相互交换信息。如今，运用核磁共振技术，可以实时检测大脑皮质的活性变化。有人测量了大脑皮层活跃程度的熵S（其定义为$S=-\sum_i p_i \ln p_i$，其中p_i表示大脑皮层的某位置i处于活跃状态的概率。值S越大，则表明大脑运转的随机性越强）与创造性思维能力 **Creativity** 的关系，结果如下图所示。

试问：S与 **Creativity** 的关系是正相关还是负相关？请说明理由或列出研究计划。



答：正相关。具体回答这里略去。