数 学 实 验

题 目 _　　　　_Segway Tours___ _　　____

学 院 ____ _　　　理学院___________________

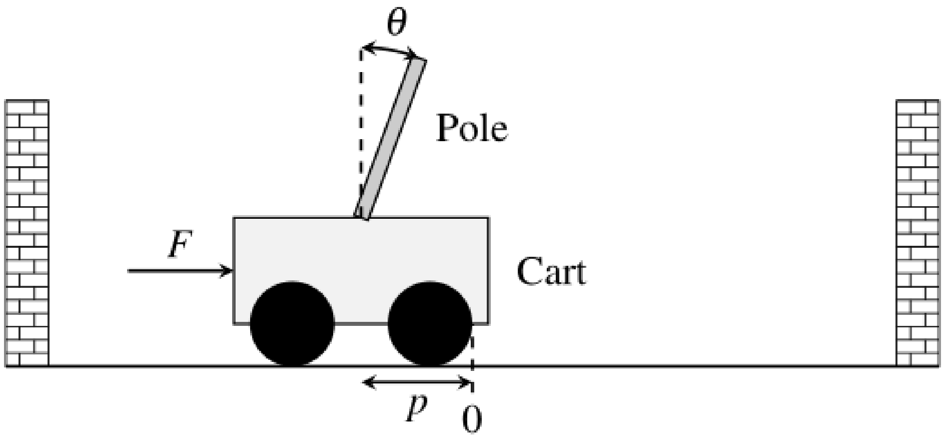
专 业 __　　　　信息与计算科学__ ___ ______

姓 名 ___　　　　　_唐川淇_ _________ _________

学 号 _______　　　_1131190111___ _ ___ _________

二〇二一年 七月一日

Segway Tours



一个平衡车可以用位置 P, 速度P', 角度θ, 角速度θ'来描述, 把它写成向量形式:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} P \\ P' \\ \theta \\ \theta' \end{bmatrix}$$

输入这个模型得只有 u, 即对平衡车的力, 在 n 时刻, 我们可以输入 u[n], 这个系统可以用线性模型描述为:

$$\vec{X}[n+1] = A\vec{X}[n] + \vec{b}u[n]$$

A 是一个 4X4 的矩阵, b 是一个 4X1 的矩阵。在给定初始状态$\vec{x}[0]$的情况下, 试问如何用 N 步达到最后的状态$\overrightarrow{x_f}$呢?

(a) 用$\vec{x}[0]$和$u[0]$表达$\vec{x}[1]$。

$$\vec{x}[1] = A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]$$

(b) 用$\vec{x}[0]$和输入的$u[0], u[1]$表达$\vec{x}[2]$, 用$\vec{x}[0]$和输入的$u[0], u[1], u[2]$表达$\vec{x}[3]$, 用$\vec{x}[0]$和输入的$u[0]$, $u[1]$, $u[2], u[3]$表达$\vec{x}[4]$。

根据线性模型知:

$$\vec{x}[2] = A\vec{x}[1] + \vec{b}u[1]$$

代入$\vec{x}[1] = A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]$，得：

$$\vec{x}[2] = A\left(A\vec{x}[0] + \vec{b}u[0]\right) + \vec{b}u[1]$$

化简，得：

$$\vec{x}[2] = A^2\vec{x}[0] + A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1]$$

同理得到$\vec{x}[3]$：

$$\vec{x}[3] = A(A^2\vec{x}[0] + A\vec{b}u[0] + \vec{b}u[1]) + \vec{b}u[2]$$

化简，得：

$$\vec{x}[3] = A^3\vec{x}[0] + A^2\vec{b}u[0] + A\vec{b}u[1] + \vec{b}u[2]$$

同理可得$\vec{x}[4]$：

$$\vec{x}[4] = A^4\vec{x}[0] + A^3\vec{b}u[0] + A^2\vec{b}u[1] + A\vec{b}u[2] + \vec{b}u[3]$$

(c) 用$\vec{x}[0]$和输入的$u[0], \dots, u[N-1]$表达$u[N]$。

$$\vec{x}[N] = A^N\vec{x}[0] + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n}\vec{b}u[n]$$

为了下一步计算，这里给出了矩阵 A 和向量$\vec{b}$：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0.22 & -0.17 & -0.01 \\ 0 & 0.10 & 1.14 & 0.10 \\ 0 & 1.66 & 2.85 & 1.14 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.21 \\ -0.03 \\ -0.44 \end{bmatrix}$$

假设平衡车得初始状态为：

$$\vec{x}[0] = \begin{bmatrix} -0.3853493 \\ 6.1032227 \\ 0.8120005 \\ -14 \end{bmatrix}$$

现在通过控制输入$u[0], \dots, u[N-1]$达到最终状态$\vec{x_f} = \vec{0}$，$\vec{x_f} = \vec{0}$意味着平衡车竖直向上且停止。

(d) 可以在两步达到$\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$吗?

根据公式$\vec{x}[2]=A^2\vec{x}[0]+A\vec{b}u[0]+\vec{b}u[1]$，其中$\vec{x}[2]=\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$。

变形上式，得到:

$$A\vec{b}u[0]+\vec{b}u[1]=\overrightarrow{x_f}-A^2\vec{x}[0]$$

令$A_2=[A\vec{b},\vec{b}]$，$U=\begin{bmatrix}u[0]\\u[1]\end{bmatrix}$，$B_2=\overrightarrow{x_f}-A^2\vec{x}[0]$，得:

$$A_2U=B_2$$

利用 MATLAB 求解线性方程组，得到:

$$\begin{cases}u[0]=-3.11881188729381\\u[1]=-1.284737395238204\end{cases}$$

对答案进行验证，计算$A_2U=B_2$的 2 范数为 0.2418，因此认为两步无法达到最终的状态$\overrightarrow{x_f}$。

(e) 可以在三步达到$\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$吗?

同样根据公式

$$\vec{x}[3]=A^3\vec{x}[0]+A^2\vec{b}u[0]+A\vec{b}u[1]+\vec{b}u[2]$$

令$A_3=[A^2\vec{b},A\vec{b},\vec{b}]$，$U=\begin{bmatrix}u[0]\\u[1]\\u[2]\end{bmatrix}$，$B_3=\overrightarrow{x_f}-A^3\vec{x}[0]$，得:

$$A_3U=B_3$$

利用 MATLAB 求解得到:

$$\begin{cases}u[0]=-7.245407128567499\\u[1]=8.633925277158380\\u[2]=-1.876776887106062\end{cases}$$

计算$A_3U=B_3$的 2 范数为 0.0236，因此认为三步无法达到最终的状态$\overrightarrow{x_f}$。

(f) 可以在四步达到$\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$吗?

根据公式

$$\vec{x}[4]=A^4\vec{x}[0]+A^3\vec{b}u[0]+A^2\vec{b}u[1]+A\vec{b}u[2]+\vec{b}u[3]$$

令$A_4=\left[A^3\vec{b},A^2\vec{b},A\vec{b},\vec{b}\right]$, $U=\begin{bmatrix}u[0]\\u[1]\\u[2]\\u[3]\end{bmatrix}$, $B_4=\overrightarrow{x_f}-A^4\vec{x}[0]$, 得:

$$A_4U=B_4$$

利用 MATLAB 求解得到:

$$\begin{cases}u[0]=\text{-}13.248750750137665\\u[1]=23.733251248639156\\u[2]=\text{-}11.571818716797430\\u[3]=1.465159727250111\end{cases}$$

计算$A_4U=B_4$的 2 范数为 4.496415296406552e-16, 因此认为四步可以达到最终的状态$\overrightarrow{x_f}$。

(g) 如果可以在四步达到$\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$, 找到合适的输入。

根据上一问的求解, 知:

$$\begin{cases}u[0]=\text{-}13.248750750137665\\u[1]=23.733251248639156\\u[2]=\text{-}11.571818716797430\\u[3]=1.465159727250111\end{cases}$$

(h) 考虑一般的矩阵 A 和向量$\vec{b}$, 在什么状况下

$$span\{\vec{b},A\vec{b}\ \ldots,A^{N-1}\vec{b}\}$$

对于$\overrightarrow{x_f}=\vec{0}$在 N 步是“可达到的”。

考虑$A_N=\left[A^{N-1}\vec{b},A^{N-2}\vec{b},\ldots,A^2\vec{b},A\vec{b},\vec{b}\right]$, $B_N=\overrightarrow{x_f}-A^N\vec{x}[0]$。

若$r(A_N)=r(A_N,B_N)$, 则方程有解。

代码:

```
clear,clc
A=[1 0.05 -0.01 0
    0 0.22 -0.17 -0.01
    0 0.10 1.14 0.10
    0 1.66 2.85 1.14
    ];
b=[0.01;0.21;-0.03;-0.44];
x0=[-0.3853493;6.1032227;0.8120005;-14];
xf=[0;0;0;0];
%%
bb=xf-A*A*x0;
aa=[A*b,b];
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
%%
aa=[A*A*b,A*b,b];
bb=xf-A^3*x0;
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
%%
aa=[A^3*b,A*A*b,A*b,b];
bb=xf-A^4*x0;
u=linsolve(aa,bb);
norm(aa*u-bb)
```