《概率论与数理统计》 期末考试卷 A 参考答案

一、填空题〖每小题 5 分，共计 25 分〗

1、$\overline{ABC}$；**2**、**0.25**；**3**、$t(n-1)$；**4**、$\left[(n-1)s^2 \big/ \chi^2_{1-\alpha}(n-1), +\infty\right)$；

$(n-1)s^2 \big/ \sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$；**5**、$F(4,2)$。

二、〖计 10 分〗解：记 A_i 为事件“第 i 个人自己抽到自己礼物”，$i=1,2,\ldots,n$。有条件知：

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\ldots=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n\cdot(n-1)}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\ldots=P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}$$

......

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=\frac{1}{n!}$$

于是，由全概率公式可知，所求概率为：

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\text{。}$$

三、〖计 14 分〗解：(1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=a\int_0^1 y^2dy\int_0^y x^2dx=\frac{a}{18}$得：$a=18$。

（2）$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_x^1 18\cdot x^2y^2dy=6x^2(1-x^3), & \text{当}0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^y 18\cdot x^2y^2dx=6y^5, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\text{。}$$

因 $p_X(x)\cdot p_Y(y)\ne p(x,y)$，则随机变量 X 与 Y 不是相互独立的。

（3）由随机变量和的密度计算公式知：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$

$$=\begin{cases} \int_0^{z/2} 18\cdot x^2\cdot(z-x)^2\,dx = 0.3z^5, & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^{z/2} 18\cdot x^2\cdot(z-x)^2\,dx = -0.3z^5+6z^2-9z+3.6, & 1\le z\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ 。

四、〖计 12 分〗解：由

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

因此，$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 。可求参数μ和σ^2的最大似然估计量为：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}，\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=s_n^2。$$

由于$E\left(\hat{\mu}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i)=\mu$，$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$，因此$\hat{\mu}$是$\mu$的无偏估计量，而$\hat{\sigma}^2$是$\sigma^2$的有偏估计量。若取统计量

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

则s^2是σ^2的无偏估计量。

五、〖计 14 分〗

解：（1）由正则方程$\begin{cases} n\beta_0+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\beta_1=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\beta_0+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\beta_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \end{cases}$，代入数据可解得

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} = \dfrac{2.4675}{0.0186} = 132.6613 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x} = 49.1250 - 132.6613 \times 0.1563 = 28.3900 \end{cases}$$

即线性回归方程是：$\hat{y} = 28.3900 + 132.6613x$。

（2）由 $S_T = S_R + S_e, S_R = \hat{\beta}_1^{\,2} l_{xx}, S_T = l_{yy}$，可得回归方程方差分析表如下：

来　源	平方和	自由度	均方和	F 比
回　归	$S_R = 327.3417$	$f_R = 1$	$MS_R = 327.3417$	184.7478
残　差	$S_e = 17.7183$	$f_e = 10$	$MS_e = 1.7718$	
总　计	$S_T = 345.0600$	$f_T = 11$		

由 $F_{1-\alpha}(1,10) = 4.96$，因为 $F = 184.7478 > 4.96 = F_{1-\alpha}(1,10)$，所以在 $\alpha = 0.05$ 下，回归方程是显著的。

（3）当 $x = 0.20$，$E\left(\hat{y}\right) = 28.3900 + 132.6613 \times 0.20 = 54.9223$。

$$\delta = \delta(x) = t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{S_e}{n-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}}$$

$$= 2.2281 \cdot \sqrt{\frac{17.7183}{10}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(0.20-0.1563)^2}{0.0186}} = 3.2299$$

因此，y 的预测值为 $54.9223 \pm 3.2299 = [51.6924, 58.1522]$。

六、〖计 10 分〗解：检验假设：$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

取检验统计量：$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t(m+n-2)$

其中 $m = 8$，$n = 9$，$S_w^2 = \dfrac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}$。

当 $\alpha = 0.05$ 时，拒绝域为

$$W = \{t \mid |t| > t_{0.975}(15)\} = \{t \mid |t| > 2.1314\}。$$

由 $\left|\hat{t}\right| = \left|\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{1/m + 1/n}}\right| = 2.3656 \in W$ 知：因此，不`能认为 X 与 Y 的均值是相等的。

七、〖计 10 分〗辛钦大数定理：设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，若 X_n 的数学期望存在，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

证明：由于$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列,且$E(X_n)=\mu$,，记X_n的特征函数为$\varphi(t)$，于是有：$\varphi'(0)=\mu i$。由特征函数的性质知：$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\varphi^n\left(\frac{t}{n}\right)=\left[1+\mu it+o(1/n)\right]^n。$$

于是$\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(t)=e^{\mu it}$，即$X_n\xrightarrow{P}\mu$，从而$\{X_n\}$服从大数定律。

八、〖计5分〗**解：**略。