《概率论与数理统计》 期末考试卷 A 参考答案

一、填空题〖每小题 5 分，共计 25 分〗

1、设 A,B,C 是三个随机事件，则事件 A,B,C 中不超过两个发生的事件可表示为 $\underline{\overline{ABC}}$。

2、已知随机事件 A,B 满足：$P(A)=1/3$，$P(B|A)=1/4$，$P(A|B)=1/6$，则 $P(A\cup B)$ = $\underline{\quad 0.75 \quad}$。

3、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\ldots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），其样本均值和样本方差分别记为 $\overline{x}$ 和 s^2。则 $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{x}-\mu\right)}{s}$ 服从的分布为 $\underline{t(n-1)}$。

4、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\ldots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），其样本均值和样本方差分别记为 $\overline{x}$ 和 s^2。在 σ^2 已知的条件下，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的左侧置信区间是 $\underline{\left[\overline{x}-u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},+\infty\right)}$；相应的所用枢轴量为 $\underline{\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$（注：指明分布）。

5、n 个男孩和 m 个女孩（$m\le n+1$）随机地站成一排，则任意两个女孩都不相邻的概率为 $\underline{\dfrac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^m}}$。

二、〖计 10 分〗某种型号电子元件的寿命 X（以小时计）具有如下的概率密度函数 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000\\ 0, & 其它\end{cases}$。现有一大批此元件（设各种元件工作相互独立），试求：(1) 任取 1 只，其寿命大于 1500 小时的概率；(2) 任取 4 只，4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时的概率。

解：（1）记“寿命大于 1500 小时”的事件为 A，则

$$P(A)=P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}p(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}。$$

（2）记“4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时”的事件为 B，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-C_4^4P^4(\overline{A})=\frac{80}{81}。$$

三、〖计 14 分〗设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数是

$$p(x,y)=\begin{cases}a\cdot x^2\cdot y, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中 a 是常数，且 $a>0$，试求：

（1）常数a；

（2）判别随机变量X与Y是否相互独立，并计算$Corr(X,Y)$；

（3）设$Z=X+Y$，求Z的概率密度函数$p_Z(z)$。

解：(1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=a\int_0^1 x^2dx\int_0^1 ydy=\frac{a}{6}$得：$a=6$。

（2）$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 6\cdot x^2ydy=3x^2, & 当0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 6\cdot x^2ydx=2y, & 当0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

因$p_X(x)\cdot p_Y(y)=p(x,y)$，则随机变量$X$与$Y$是相互独立的，且$Corr(X,Y)=0$。

（3）由（2）知：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)\cdot p_Y(z-x)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^z 6\cdot x^2\cdot(z-x)dx=z^4/2, & 当0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 6\cdot x^2\cdot(z-x)dx=-z^4/2+3z^2-2z, & 当1\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

四、〖计 10 分〗设$x_1,x_2,\dots,x_n$是来自总体X的一组样本，且X的期望μ和方差σ^2（$\sigma^2>0$）均存在。对σ^2考虑如下三个估计量：

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2，\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2，\quad S_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$$

试问：三个估计量中哪一个是σ^2的无偏估计量？

解：由$\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^n x_i^2-n\cdot\bar{x}^2$，于是$E\left[\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\right]=\sum_{i=1}^n E(x_i^2)-n\cdot E(\bar{x}^2)=$

$\sum_{i=1}^n(\sigma^2+\mu^2)-n\cdot\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=(n-1)\sigma^2$，因此有

$$E\left[S_1^2\right]=\sigma^2，\quad E\left[S_2^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2, E\left[S_3^2\right]=\frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

故S_1^2是σ^2的无偏估计量。

五、〖计 14 分〗为研究金属导线含碳量x（单位：%）对电阻y（单位：Ω），在 20℃ 时测得 8 组试验数据对(x_i,y_i)（$i=1,2,\dots,8$），整理如下：

$\bar{x}=0.4865$，$\bar{y}=19.8000$，$l_{xx}=2.6031$，$l_{xy}=86.7800$，$l_{yy}=3273.2000$。**假定** y **对** x **具有近似线性关系，试求：（1）** y **对** x **的线性回归方程；（2）对建立的回归方程进行显著性检验（**$a=0.05$**）；（3）当** $x=0.65$**，计算** y **的预测值。**

解：（1）由正则方程
$$\begin{cases} n\beta_0+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\beta_1=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\beta_0+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\beta_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \end{cases}$$
，代入数据可解得

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=\dfrac{86.7800}{2.6031}=33.3372 \\ \hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\cdot\bar{x}=19.8000-33.3372\times0.4865=3.5815 \end{cases}$$

即线性回归方程是：$\hat{y}=33.3372+3.5815x$。

（2）由 $S_T=S_R+S_e, S_R=\hat{\beta}_1^{\,2}\,l_{xx}, S_T=l_{yy}$，可得回归方程方差分析表如下：

来 源	平方和	自由度	均方和	F 比
回 归	$S_R=2893.0000$	$f_R=1$	$MS_R=2893.0000$	45.6549
残 差	$S_e=380.2000$	$f_e=6$	$MS_e=0.5117$	
总 计	$S_T=3273.2000$	$f_T=7$		

由 $F_{1-\alpha}(1,6)=5.99$，因为 $F=45.6549>5.99=F_{1-\alpha}(1,6)$，所以在 $\alpha=0.05$ 下，回归方程是显著的。

（3）当 $x=0.65$，y 的预测值为 $\hat{y}=3.5815+33.3372\times0.65=25.2506$。

六、〖计 10 分〗设随机变量 X **与** Y **相互独立，且** $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$**，**$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$**。**$x_1,x_2,\ldots,x_{10}$ **和** $y_1,y_2,\ldots,y_{10}$ **分别来自** X **与** Y **的样本，它们的样本方差分别是** $S_x^2=54.22$ **和** $S_y^2=53.14$**。在显著性水平** $\alpha=0.05$ **下，是否可以认为** X **与** Y **的方差是相等的？**

解：检验假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

取检验统计量：$F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(m-1,n-1)$

其中 $m=n=10$。

当 $\alpha=0.05$ 时，拒绝域为

$$W=\left\{F\mid F>F_{0.975}(9,9)\text{或}F<F_{0.025}(9,9)\right\}=\left\{F\mid F>4.03\text{或}F<1/4.03\right\}$$。

由 $\hat{F}=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}=1.0203\notin W$ 知：因此，可以认为 X 与 Y 的方差是相等的。

七、〖计 11 分〗设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=\mu$，$Var(X_i)=\sigma^2>0$，记$Y_n=\dfrac{X_1+X_2+...+X_n-n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$。试证明：对任意的实数$y$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(Y_n\le y)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}dt。$$

证明：由于$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=\mu$，$Var(X_i)=\sigma^2>0$，记$X_n-\mu$的特征函数为$\varphi(t)$，于是有：$\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)=-\sigma^2$。由特征函数的性质知：$Y_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)。$$

从而

$$\ln\varphi_{Y_n}(t)=n\ln\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=-\frac{1}{2}t^2+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

于是$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\varphi_{Y_n}(t)=-\dfrac{1}{2}t^2$，即$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$。因此，当$n\to+\infty$时，随机变量$Y_n$按分布收敛于标准正态分布，故结论成立。

八、〖计 6 分〗试简述贝叶斯统计学与经典统计学的差异。

解：经典统计学主要是依据总体信息和样本信息来进行统计推断分析，而贝叶斯统计学除依据总体信息和样本信息之外，还要考虑先验分布信息，也就是说，贝叶斯统计学是依据总体信息、样本信息和先验分布信息进行统计推断分析。因此，叶斯统计学与经典统计学的差异在于是否使用先验分布信息。