课程名称：数学分析2 学号：1131190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

二、1.

(1) 证：$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$，故$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}$一致收敛

$f(x)$连续，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$

$|f(x_1)-f(x_2)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3^n+x_1)}\cdot\frac{1}{(3^n+x_2)}|x_1-x_2|\leqslant\frac{9}{8}|x_1-x_2|$

$f(x)$一致连续，$\left|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}\right)'\right|\leqslant\frac{1}{9^n}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n+x}\right)'$一致收敛

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$可导

(2) 证：$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}dx$

$=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(\ln(x+3^n)-\ln 3^n)$

$=\lim_{x\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{3^n}\right)$

x取子列3^n时，$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\ln 2$ 发散

故$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$发散.

2.

证：$f'(t)=2e^{-t}\int_0^t e^{-x^2}dx$，令$x=ty$

$f'(t)=2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2y^2}dy$

$g'(t)=\int_0^1\left(\frac{e^{-(1+x^2)t}}{1+x^2}\right)'dx=-2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx$

$f'(t)+g'(t)=2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2y^2}dy-2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx$

$=0$

因为$f'(t)+g'(t)=0$

故$f(t)+g(t)$为常数

三、解：

1) 不可以

令 $f(x)=\begin{cases}1 & x=[x] \quad (\text{整数}) \\ 0 & x\neq[x] \quad (\text{非整})\end{cases}$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx=0$ 收敛

但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 不成立

2) ① $f(x)$ 单调

$\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

有界单调则必有极限

设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=T\neq0$

则 $\exists N>0$，使 $a'>N$，$|f(x)-T|<\varepsilon$

$\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

② $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-f(a)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=T\neq0$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，矛盾

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

课程名称：数学分析2 学号：1181190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

1.解：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x f'(\cos x - \cos y)$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin y f'(\cos x - \cos y)$

$\csc x \frac{\partial z}{\partial x} + \csc y \frac{\partial z}{\partial y}$

$= -f' - 1 + f'$

$= -1$

2.解：$\int_0^1 x(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots)dx$

$= \int_0^1 x e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1$

$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$

3.解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (a\sqrt{|x|} + 2x^2 + y^2 + b)\frac{\tan xy^2}{x^2+y^4}$

$\leqslant (a\sqrt{|x|} + 2x^2 + y^2 + b)\left|\frac{\tan xy^2}{2|xy^2|}\right|$

$\leqslant \frac{1}{2}(a\sqrt{x} + 2x^2 + y^2 + b)$

令 $x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

原式 $= \lim\limits_{\rho\to 0}(a\sqrt{\rho\cos\theta} + \rho^2 + \rho^2\cos\theta + b) = 0$

故 $b = 0$，a 为任意常数

课程名称：数学分析2 学号：1131190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

4. 解：(1) $h = 75 - x^2 - y^2 + xy$

$\mathrm{grad}\, h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} h(x,y) \vec{j}$

$\frac{\partial h}{\partial x} = -2x + y$, $\frac{\partial h}{\partial y} = -2y + x$

$|\mathrm{grad}\, h(x,y)| = \sqrt{(-2x+y)^2 + (-2y+x)^2}$

$M(x_0, y_0)$ 处方向导数最大

$g(x_0, y_0) = |\mathrm{grad}(x,y)|_{(x_0,y_0)}$

$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y-2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2}$

$= \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}$

(2) $L = 5x_0^2 + 5y_0^2 - \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75)$

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ L_y = 10y - 8x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 5\sqrt{3} \\ y_3 = 5\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -5\sqrt{3} \\ y_4 = -5\sqrt{3} \end{cases}$

分别代入 $g^2(x,y)$

$g_1^2 = 450$, $g_2^2 = 450$, $g_3^2 = 150$, $g_4^2 = 150$

故 $M_1(5, -5)$, $M_2(-5, 5)$ 可为起点，

课程名称：数学分析2　学号：1131190111　姓名：唐川淇　班级：信计1901

二、1.

(1) 证：$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$，故 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}$ 一致收敛

$f(x)$ 连续，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$

$|f(x_1)-f(x_2)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3^n+x_1)}\cdot\frac{1}{(3^n+x_2)}|x_1-x_2|\leqslant\frac{9}{8}|x_1-x_2|$

$f(x)$ 一致连续，$\left|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}\right)'\right|\leqslant\frac{1}{9^n}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n+x}\right)'$ 一致收敛

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导

(2) 证：$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3^n+x}dx$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(\ln(x+3^n)-\ln 3^n)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{3^n}\right)$

x 取子列 3^n 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\ln 2$ 发散

故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

2.

证：$f'(t)=2e^{-t}\int_0^t e^{-x^2}dx$，令 $x=ty$

$f'(t)=2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2y^2}dy$

$g'(t)=\int_0^1\left(\frac{e^{-(1+x^2)t}}{1+x^2}\right)'dx=-2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx$

$f'(t)+g'(t)=2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2y^2}dy-2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx$

$=0$

因为 $f'(t)+g'(t)=0$

故 $f(t)+g(t)$ 为常数

课程名称：数学分析2 学号：1131190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

三、解:

1) 不可以

令 $f(x)=\begin{cases}1 & x=[x] \quad (\text{整数}) \\ 0 & x\neq[x] \quad (\text{非整})\end{cases}$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx=0$ 收敛

但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 不成立

2) ① f(x)单调

$\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛，f(x)在 $[a,+\infty)$ 上有界

有界单调则必有极限

设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=T\neq 0$

则 $\exists N>0$，使 $a'>N$，$|f(x)-T|<\varepsilon$

$\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

② $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-f(a)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=T\neq 0$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，矛盾

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

课程名称：数学分析2 学号：1131190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

4. 解：(1) $h = 75 - x^2 - y^2 + xy$

$\text{grad}\, h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} h(x,y)\vec{j}$

$\frac{\partial h}{\partial x} = -2x+y, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -2y+x$

$|\text{grad}\, h(x,y)| = \sqrt{(-2x+y)^2+(-2y+x)^2}$

$M(x_0, y_0)$ 处方向导数最大

$g(x_0,y_0) = |\text{grad}(x,y)|_{(x_0,y_0)}$

$g(x_0,y_0) = \sqrt{(y-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$

$= \sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$

(2) $L = 5x_0^2+5y_0^2-\lambda(x^2+y^2-xy-75)$

$$\begin{cases} L_x = 10x-8y-2\lambda x-\lambda y = 0 \\ L_y = 10y-8x-2\lambda y-\lambda x = 0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-xy-75 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 5\sqrt{3} \\ y_3 = 5\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -5\sqrt{3} \\ y_4 = -5\sqrt{3} \end{cases}$

分别代入 $g^2(x,y)$

$g_1^2 = 450, \quad g_2^2 = 450, \quad g_3^2 = 150, \quad g_4^2 = 150$

故 $M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$ 可为起点，

课程名称：数学分析2 学号：1181190111 姓名：唐川淇 班级：信计1901

1.解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin x f'(\cos x-\cos y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin y f'(\cos x-\cos y)$

$\csc x\frac{\partial z}{\partial x}+\csc y\frac{\partial z}{\partial y}$

$=-f'-1+f'$

$=-1$

2.解：$\int_0^1 x(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots)dx$

$=\int_0^1 xe^{x^2}dx$

$=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$

$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}$

3.解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(a\sqrt{|x|}+2x^2+y^2+b)\frac{\tan xy^2}{x^2+y^4}$

$\leqslant(a\sqrt{|x|}+2x^2+y^2+b)\left|\frac{\tan xy^2}{2|xy^2|}\right|$

$\leqslant\frac{1}{2}(a\sqrt{x}+2x^2+y^2+b)$

令 $x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

原式 $=\lim\limits_{\rho\to0}(a\sqrt{\rho\cos\theta}+\rho^2+\rho^2\cos\theta+b)=0$

故 $b=0$，a 为任意常数