时间序列分析

CH3&CH4

姓 名: 唐 川 淇
学 号: 1131190111
班 级: 信计 1901

江南大学
理学院

2022 年 5 月 2 日

1 CH3 习题

1.1 已知 AR(1) 模型为:$x_t = 0.7x_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t WN(0,1)$, 求 $E(x_t), Var(x_t), \rho_2$ 和 ϕ_{22}

解:

$$\begin{aligned}
&E(x_t) = 0.7 * E(x_{t-1}) + E(t) \\
&(1-0.7)E(x_t) = 0 \\
&(1-0.7B)x_t = \varepsilon_t \\
&x_t = (1-0.7B)^{-1}\varepsilon_t = (1+0.7B+0.7^2B^2+\cdots)\varepsilon_t \\
&Var(x_t) = \frac{1}{1-0.49}\delta_\varepsilon^2 = 1.9608\delta_\varepsilon^2 \\
&\rho_2 = \phi_1^2\rho_0 = 0.49 \\
&\phi_{22} = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

1.2 已知某 AR(2) 模型为: $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon, \varepsilon WN(0, \delta_\varepsilon^2)$, 且 $\rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.3$,求 ϕ_1 ϕ_2 的值

解:

对于 AR(2) 模型:

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_{-1} = \phi_1 + \phi_2\rho_1 = 0.5 \\ \rho_2 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_0 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 = 0.5 \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{解得:} \begin{cases} \phi_1 = 7/15 \\ \phi_2 = 1/15 \end{cases} \tag{3}$$

1.3 已知 MA(2) 模型为:$x_t = \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-2}.\varepsilon_t WN(0, \delta_\varepsilon^2)$,求 $E(x_t)$,$Var(x_t)$,及 $\rho_k(k \geq 1)$

解:

$$\begin{aligned}
&E(x_t) = 0 \\
&Var(x_t) = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\delta_\varepsilon^2 = 1.65\delta_\varepsilon^2 \\
&\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{-0.98}{1.65} = -0.5939 \\
&\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{0.4}{1.65} = 0.2424 \\
&\rho_k = 0, k \geq 3
\end{aligned} \tag{4}$$

1.4 验证下列模型的平稳性和可逆性，其中 $\{\epsilon_r\}$ 为白噪声序列

1.4.1 $x_t = 0.5x_{t-1} + 1.2x_{t-2} + \epsilon_t$

已知 $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = 1.2$

$|\phi_2 = 1.2| > 1$，该模型不平稳，用 filter 命令拟合该模型

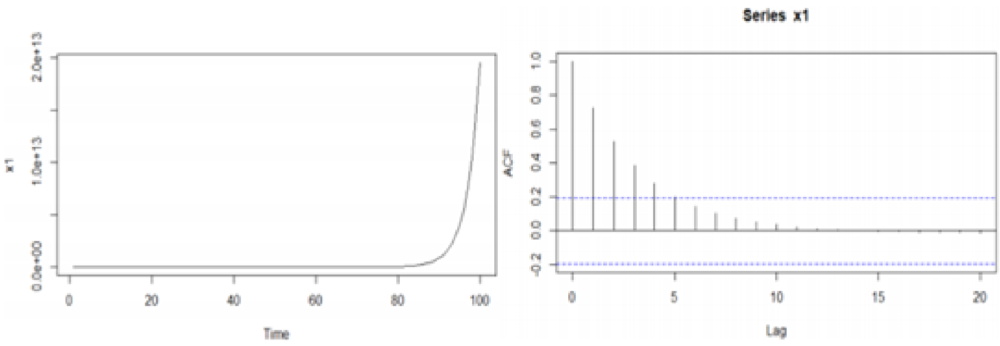

图 1: 计算过程

1.4.2 $x_t = 1.1x_{t-1} - 0.3x_{t-2} + \epsilon_t$

已知 $\phi_1 = 1.1$，$\phi_2 = -0.3$

$|\phi_2| < 1$

$\phi_1 + \phi_2 = -0.13 + 1.1 = 0.8 < 1$

$\phi_2 - \phi_1 = -0.3 - 1.1 = -1.4 < 1$

该模型平稳

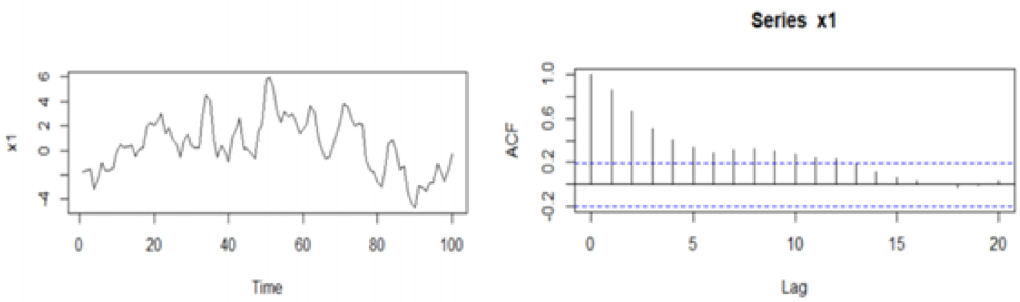

图 2: 计算过程

1.4.3 $x_t = \epsilon_t - 0.9\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2}$

已知 $\theta_1 = 0.9$，$\theta_2 = -0.3$

$|\theta_2| = 0.3 < 1$

$\theta_2 + \theta_1 = -0.3 + 0.9 = 0.6 < 1$

$\theta_2 - \theta_1 = -0.3 - 0.9 = -1.2 < 1$

$q = 2$

综上：该模型平稳可逆，可以用 arima，sim 函数拟合

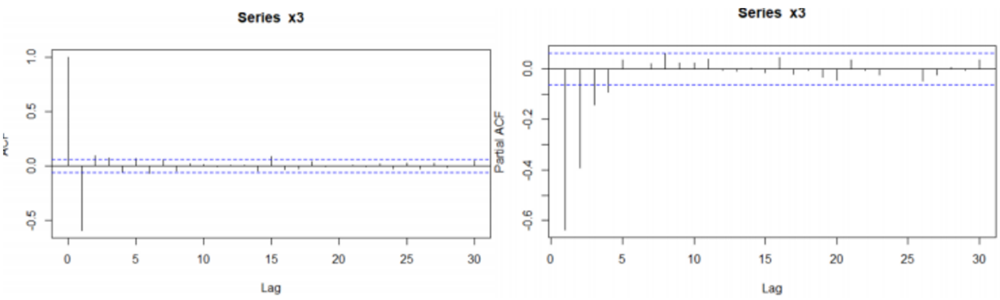

图 3: 计算过程

1.4.4 $x_t = \epsilon_t + 1.3\epsilon_{t-1} - 0.4\epsilon_{t-2}$

已知 $\theta_1 = -1.3$，$\theta_2 = 0.4$

$|\theta_2| = 0.4 < 1$

$\theta_2 + \theta_1 = -0.9 < 1$

$\theta_2 - \theta_1 = -1.7 > 1$

$q = 2$

综上：该模型为平稳不可逆模型

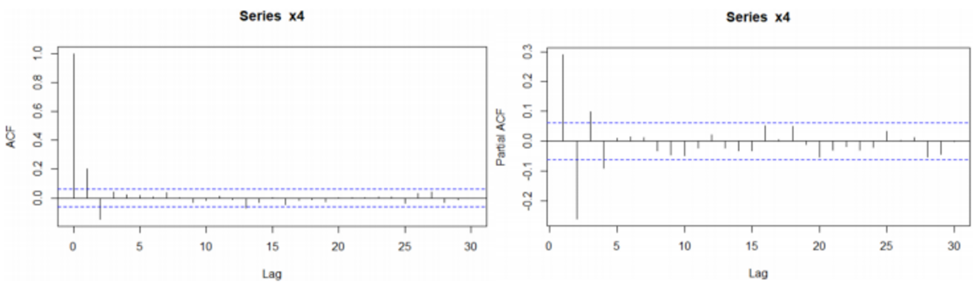

图 4: 计算过程

1.4.5 $x_t = 0.7x_t + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$

化简 $(1-0.7B)x_t = (1-0.6B)\epsilon_t$

$|\phi_1| = 0.7 < 1$

$|\theta_1| = 0.6 < 1$

综上：该 ARMA(1,1) 模型平稳可逆模型

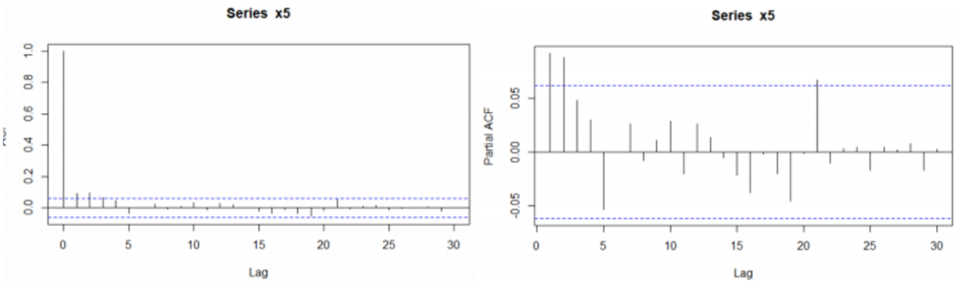

图 5: 计算过程

1.4.6 $x_t = -0.8x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \epsilon_t - 1.1\epsilon_{t-1}$

平稳性：

$\phi_1 = -0.8.\phi_2 = -0.5$

$\phi_2 - \phi_1 = 1.3 > 1$

该 ARMA(2,1) 模型不平稳

可逆性：

$\theta_1 = 1.1$

$|\theta_1| = 1.1 > 1$

该 ARMA(2,1) 模型不可逆

综上：该模型不平稳、不可逆

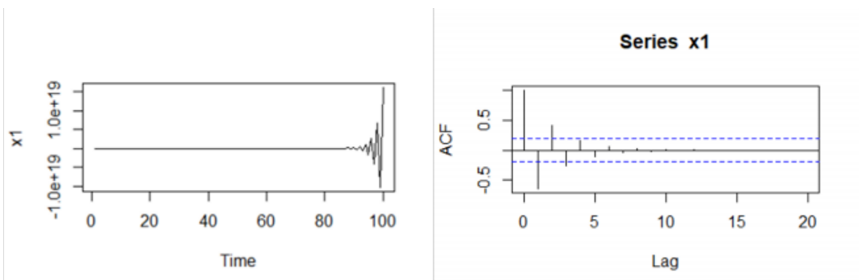

图 6: 计算过程

1.5　1915-2004 年澳大利亚每年与枪支有关的凶杀案死亡率（每 10 万人）如表 3-5 所示。

(1)

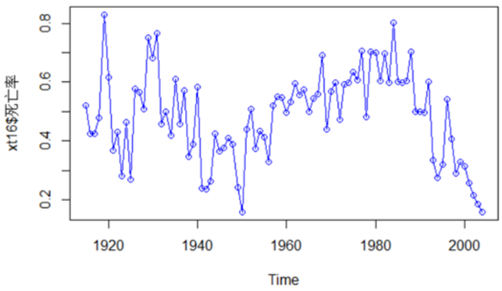

图 7:

由图可知，序列的前 30 年每月平均水位围绕在 82 附近波动，具备平稳特征，中间 30 年围绕在 80.5 附近波动，具备平稳特征，后 35 年围绕在 80 附近波动，具备平稳特征，总体来看不具备平稳特征。

(2)

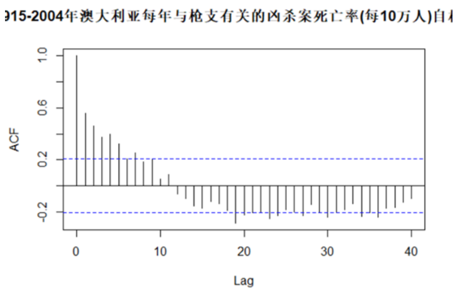

图 8:

该序列的自相关系数快速衰减为 0 值附近，且呈现出拖尾特征。

(3)

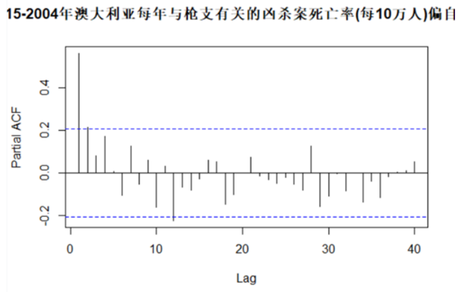

图 9:

该序列偏自相关系数延迟 1 阶，显著不为 0，之后显著为 0，展现出序列的截尾性。

2 CH4 习题

2.1

对于 AR(1) 模型：$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$，根据 t 个历史观察值数据：$\cdots 10.1, 9.6$，已求出 $\hat{\mu} = 10$，$\hat{\phi}_1 = 0.3$，$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = 9$，

2.1.1 求 x_{t+3} 的 0.95 的置信区间

解：

$x_t = 7 + 0.3x_{t-1} + \epsilon_t$

计算预测值：

$\hat{x}_{t+1} = 7 + 0.3x_t = 9.88$

$\hat{x}_{t+2} = 7 + 0.3\hat{x}_{t+1} = 9.964$

$\hat{x}_{t+3} = 7 + 0.3\hat{x}_{t+2} = 9.9892$

计算预测方差：

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 \\ G_1 &= \phi_1 G_0 = 0.3 \\ G_2 &= \phi_1 G_1 + \phi_2 G_0 = 0.09 \\ Var[e_t(1)] &= G_0^2 \delta_\epsilon^2 = 9 \\ Var[e_t(2)] &= (G_0^2 + G_1^2)\delta_\epsilon^2 = 9.81 \\ Var[e_t(3)] &= (G_0^2 + G_1^2 + G_2^2)\delta_\epsilon^2 = 9.8829 \end{aligned} \tag{5}$$

计算 95% 置信区间：
$(\hat{x}_t(3)-1.96\times\sqrt{Var[e_t(3)]}, \hat{x}_t(3)+1.96\times\sqrt{Var[e_t(3)]}) = (3.8275, 16.1509)$

2.1.2 假定新获得观察数据 $x_{t+1} = 10.5$，用更新数据求 x_{t+3} 的 0.95 置信区间。

计算预测值：
$x_{t+1} = 10.5$
$\hat{x}_{t+2} = 7 + 0.3x_{t+1} = 10.15$
$\hat{x}_{t+3} = 7 + 0.3\hat{x}_{t+2} = 10.045$
计算预测方差：

$$
\begin{aligned}
G_0 &= 1 \\
G_1 &= \phi_1 G_0 = 0.3 \\
Var[e_t(1)] &= G_0^2\delta_\epsilon^2 = 9 \\
Var[e_t(2)] &= (G_0^2 + G_1^2)\delta_\epsilon^2 = 9.81
\end{aligned} \tag{6}
$$

计算 95% 置信区间：
$(\hat{x}_t(3)-1.96\times\sqrt{Var[e_t(2)]}, \hat{x}_t(3)+1.96\times\sqrt{Var[e_t(2)]}) = (3.906, 16.1839)$

2.2 1971 年 9 月-1993 年 6 月澳大利亚季度常住人口变动（单位：千人）情况如下表。

2.2.1 判断该序列的平稳性和纯随机性

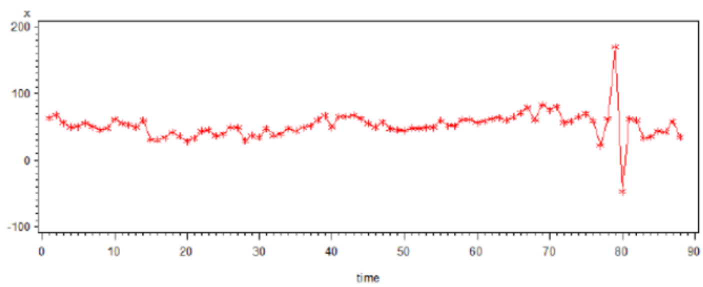

图 10:

除了小部分的异常数据外，该时序图显示澳大利亚极度常住人口变动一般在 60 附件随机波动，没有明显的趋势或周期，基本可以视为平稳序列。
该序列均值为 52.195455，方差为 20.64119，样本容量为 88。

Lag	Covariance	Correlation	-1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
0	426.059	1.00000	|********************
1	-40.718988	-.09557	. **| .
2	27.404425	0.06432	. |* .
3	147.350	0.34584	. |*******
4	87.200324	0.20467	. |****.
5	44.773914	0.10509	. |** .
6	29.529849	0.06931	. |* .
7	12.967519	0.03044	. |* .
8	95.373950	0.22385	. |****.

"." marks two standard errors

图 11:

样本自相关图延迟 3 阶之后，自相关系数都落入 2 倍标准差范围之内，而且自相关系数向零谁建的速度非常快，可以认为该序列平稳。

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	17.82	6	0.0067	-0.095	0.064	0.346	0.205	0.105	

图 12:

由上表可知在延迟阶数为 6 阶时，LB 检验统计量的 P 值很小，所以可以判定该序列属于非白噪声序列。

2.2.2 选择适当模型拟合该序列的发展

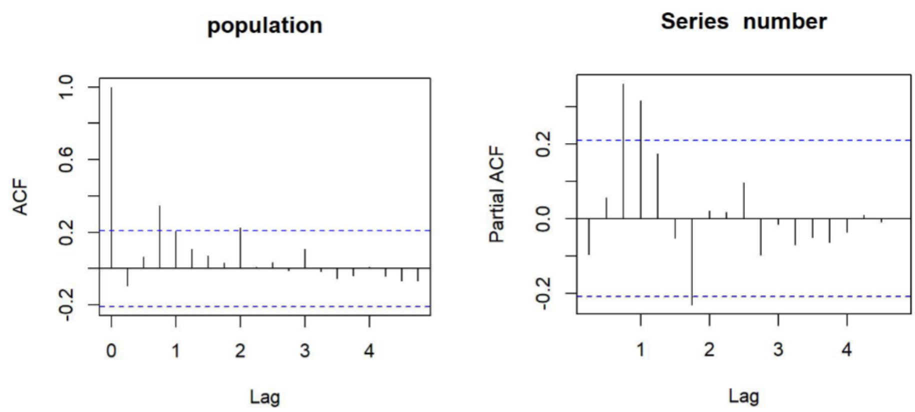

图 13:

自相关系数和偏自相关系数都拖尾，拟合 ARMA(4,1) 模型（该模型有部分系数不能显著非零）。所以最好是拟合疏系数 ARMA((3,4),1) 模型.

```
Call:
arima(x = x, order = c(4, 0, 1), transform.pars = F, fixed = c(0, 0, NA, NA,
    NA, NA))

Coefficients:
      ar1  ar2     ar3     ar4      ma1  intercept
        0    0  0.3881  0.2602  -0.2491    52.2154
s.e.    0    0  0.0926  0.0918   0.0924     3.8429

sigma^2 estimated as 323.5:  log likelihood = -379.62,  aic = 769.24
```

图 14:

2.2.3 绘制该序列的拟合图以及未来 5 年的预测图

拟合效果如下：

```
> forecast(fit,h=5)
   Point Forecast    Lo 80    Hi 80     Lo 95    Hi 95
89       47.73788 24.68701 70.78875 12.484616 82.99114
90       52.13986 28.38472 75.89499 15.809509 88.47020
91       46.91052 23.15538 70.66565 10.580170 83.24086
92       45.84243 20.45866 71.22619  7.021308 84.66354
93       51.02112 25.35902 76.68321 11.774334 90.26790
```

图 15: