《概率论与数理统计》期末考试卷（A）参考答案

一、填空题〖每小题 5 分，共计 25 分〗

1、设 A,B,C 是三个随机事件，则事件 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表达的涵义是 三随机事件中至少有一个不发生 。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1/3)$，$Y\sim N(0,2/3)$，则 $E\left[\left|X-Y\right|\right]=$ ____ $\sqrt{2/\pi}$ ____。

3、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），则 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 服从的分布为 ____ $\chi^2(n)$ ____。

4、已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,\cdots,x_n$ 来自总体 X 的样本（$n>1$），其样本均值和样本方差分别记为 $\overline{x}$ 和 s^2。μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的右侧置信区间是 $\left(-\infty,\overline{x}+t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$；相应的所用枢轴量为 $t=\frac{x-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$（注：指明分布）。

5、概率的定义主要有 统计学定义和公理化定义两种定义法 ；在本课程学习中主要采用 公理化定义 。

二、 **〖计 10 分〗设有甲、乙、丙三人三人比赛，规定：每局两人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直到有一人连胜两局为止，此人即为冠军。假设每局比赛双方取胜的概率都是 0.5，且局与局之间的胜负结果是相互独立的。现甲、乙两人率先比赛，试求各人获得冠军的概率。**

解：记甲、乙、丙在第 i 局获胜的事件分别为 A_i、B_i 和 C_i，有条件知：

$$P(A_i)=P(A_i)=P(A_i)=0.5，\ i=1,2,......$$

现甲、乙两人率先比赛，可分为甲先胜和乙先胜两种情形。若甲先胜，且甲获得冠军，则相应的事件为：

$$A_1A_2，\ A_1C_2B_3A_4A_5，\ A_1C_2B_3A_4C_5B_6A_7A_8，\ ......$$

且这些事件是互不相容的，由局与局之间的胜负结果是相互独立的条件知甲获得冠军的概率为

$$P(A_1A_2)+P(A_1C_2B_3A_4A_5)+P(A_1C_2B_3A_4C_5B_6A_7A_8)+...$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}0.5^{3k-1}=\frac{0.25}{1-0.5^3}=\frac{2}{7}。$$

若乙先胜，且甲获得冠军，则相应的事件为：

$$B_1C_2A_3A_4，\ B_1C_2A_3B_4C_5A_6A_7，\ B_1C_2A_3B_4C_5A_6B_7C_8A_9A_{10}，\ ......$$

类似地，可得甲获得冠军的概率为

$$P(B_1C_2A_3A_4)+P(B_1C_2A_3B_4C_5A_6A_7)+P(B_1C_2A_3B_4C_5A_6B_7C_8A_9A_{10})+\dots$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}0.5^{3k+1}=\frac{0.5^4}{1-0.5^3}=\frac{1}{14}\text{。}$$

从而，甲获得冠军的概率为$\frac{2}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$。

进一步，有对称性可知：乙获得冠军的概率也为$\frac{5}{14}$。因此，丙获得冠军的概率为$1-\frac{5}{14}\times 2=\frac{2}{7}$。

三、〖计 14 分〗设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数是

$$p(x,y)=\begin{cases}k\cdot x\cdot(1-y), & 0<x^2<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中k为常数，且$k>0$，试求：

（1）常数k；

（2）判别随机变量X与Y是否相互独立；

（3）设$Z=X+Y$，求Z的概率密度函数$p_Z(z)$。

解：(1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=k\int_0^1 xdx\int_{x^2}^{x}(1-y)dy=\frac{k}{24}$得：$k=24$。

（2）$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}24x(1-y)dy=12x^2(x^3-3x+2), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}}24x(1-y)dx=12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\text{。}$$

因$p_X(x)\cdot p_Y(y)\neq p(x,y)$，则随机变量$X$与$Y$是不独立的。

（3）由 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-y)dx$

$$=\begin{cases}\int_{z/2}^{(\sqrt{1+4z}-1)/2}24x(1+x-z)dx \\ =2-6z-15z^2+2z^3+(10z-2)\sqrt{1+4z}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\text{。}$$

四、〖11 分〗设$X\sim Exp(\lambda^{-1})$，$x_1,\cdots,x_n$来自总体X的样本（$n>1$），试求

参数λ的最大似然估计量，并判断它是否是相合估计和无偏估计。

解：由$X \sim Exp(\lambda^{-1})$，可得似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^{-1}\exp(-x_i/\lambda)=\lambda^{-n}\exp(-\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i)$$

即$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=-n\ln\lambda-\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i$。由

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得$\hat{\lambda}=\overline{x}$，此即为参数$\lambda$的最大似然估计。由于

$$E\left(\hat{\lambda}\right)=E\left(\overline{x}\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{\lambda^{-1}}=\lambda$$

因此，$\hat{\lambda}=\overline{x}$是参数$\lambda$的无偏估计。

又因为$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\lambda}\right)=\lambda$，且$\lim_{n\to\infty}Var\left(\hat{\lambda}\right)=\lim_{n\to\infty}Var\left(\overline{x}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^2}{n}=0$，因此$\hat{\lambda}=\overline{x}$也是参数$\lambda$的相合估计。

五、〖计 10 分〗已知机器 A 和 B 都生产同一型号的钢管，记它们生产的钢管内径分别为 X 和 Y。现从机器 A 和 B 生产的钢管中随机抽出 19 根和 13 根进行检测， 测得它们的样本方差分别为$s_1^2=0.34$和$s_2^2=0.29$。假设 X 和 Y是相互独立，且都服从正态分布。试问是否能认为两台机器生产的钢管内径的稳定程度（即方差）无显著差异? (取$\alpha=0.1$)

解：1) 提出假设 H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$， H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$；

2) 构造检验统计量：$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$

3)对于显著水平$\alpha=0.1$，双侧检验的拒绝域为 $F\le F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$或$F\ge F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$，此处 $m=19,n=13$，$F_{0.95}(18,12)=2.57,F_{0.05}(18,12)=1/2.34$，由题意得拒绝域为 $W=\{F\le 0.4274或F\ge 2.57\}$

4)由样本值$s_1^2=0.34$和$s_2^2=0.29$。算得$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0.34}{0.29}=1.172$ ；

5) 未落入拒绝域，所以接受H_0 ，认为两台机器生产的钢管内径的稳定程度（即方差）无显著差异。

六、〖计 15 分〗某工厂在分析产量与成本关系时，选取 10 个生产小时作样本，测得数据如下：

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 777, \sum_{i=1}^{10} y_i = 1629, \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 70903,$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 267723, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 131124。$$

假定成本 y 与产量 x 间具有近似线性关系，试求：（1） y 对 x 的线性回归方程；（2）对建立的回归方程进行显著性检验（$\alpha = 0.05$）；（3）当 $x = 80.5$，计算 y 的预测区间（$\alpha = 0.05$）。

解：（1） $l_{xx} = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\overline{x}^2 = 70903 - 10 \times (\frac{777}{10})^2 \approx 10530.1$，

$l_{xy} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\overline{xy} = 131124 - 10 \times (\frac{777}{10}) \times (\frac{1629}{10}) \approx 4550.7$，

$l_{yy} = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\overline{y}^2 = 267723 - 10 \times (\frac{1629}{10})^2 \approx 2358.9$

$\widehat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \approx \frac{4550.7}{10530.1} \approx 0.4322$，

$\widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x} \approx 162.9 - 0.4322 \times 77.7 = 129.32$

则 y 关于 x 的回归直线方程为： $\hat{y} = 129.32 + 0.4322x$。

（2）对回归方程显著性检验，经计算有：

$S_T = l_{yy} = 2358.9$ $\qquad$ $f_T = 9$

$S_R = \widehat{\beta}_1^2 l_{xx} = 0.4322^2 \times 10530.1 = 1966.99 \quad f_R = 1$

$S_e = S_T - S_R = 2358.9 - 1966.99 = 391.91 \quad f_e = 8$

对回归方程进行显著性检验（$\alpha = 0.05$）

(2)由题意得拒绝域为 $F \geq F_{1-\alpha}(1,8)$，查表 $F_{0.95}(1,8) = 5.32$。由样本值

$F = \frac{S_R}{S_e/8} = \frac{1966.99}{391.91/8}$=40.152，因为， $F \geq F_{1-\alpha}(1,8)$，落入拒绝域

因此，在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下建立的回归方程是显著的。

（3）当 $x = 80.5$ 时，$\widehat{y}_0 = 164.11$，在 $\alpha = 0.05$ 时，$t_{0.975}(8) = 2.3060$，

$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{391.91}{8}} = 6.99$，则

$$\delta = 6.99 \times 2.3060 \times \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(80.5 - 77.7)^2}{10530.1}} = 16.91$$

从而 y_0 的概率为 0.95 的预测区间 $164.11 \pm 16.91 = (147.2, 181.02)$。

七、〖计 10 分〗设随机变量 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$，证明：当 $\alpha \to +\infty$ 时，随机变量

$Y_\alpha=(\lambda X-\alpha)\big/\sqrt{\alpha}$ **依分布收敛于标准正态变量，即**

$$\lim_{\alpha\to+\infty}P(Y_\alpha\le y)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}dt$$

其中随机变量 X **的特征函数为** $\varphi_X(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha}$ **。**

证明：由 $\varphi_X(t)=(1-it/\lambda)^{-\alpha}$，则由特征函数的性质知 $Y_\alpha=(\lambda X-\alpha)\big/\sqrt{\alpha}$ 的特征函数为：$\varphi_{Y_\alpha}(t)=e^{-i\sqrt{\alpha}t}\left(1-it\big/\sqrt{\alpha}\right)^{-\alpha}$。从而

$$\ln\varphi_{Y_\alpha}(t)=-i\sqrt{\alpha}t-\alpha\ln\left(1-it\big/\sqrt{\alpha}\right)=-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

因此，$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi_{Y_\alpha}(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$。由于 $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ 是标准正态分布的特征函数，故由特征函数的唯一性定理知：结论成立。

八、**〖计 5 分〗东汉末年，曹操和袁绍之间爆发了著名的官渡之战。战争初期，曹操实力远弱于袁绍，节节后撤。在无法继续后撤的地方，即官渡，曹操据险坚守，陷入苦战，危在旦夕。但在此时，袁绍的谋士许攸深夜投奔曹操。曹操听从许攸的计谋，绕道前往乌巢，烧了袁绍的军粮。事件的结果：袁绍军心大乱，曹操以弱胜强。面对这一结果：有人说许攸的叛变是随机事件；也有人说许攸的叛变是必然事件——其必然性是由袁绍的用人特点和许攸的性格特点共同决定的。**

在科学研究中，你该如何认定一件事是随机事件？

答：要仅紧扣以下两点展开说明：（1）随机事件是随机试验中样本空间的子集；（2）它要具有随机性特点，即在试验之前，其发生与否不能准确预知，但在大量重复试验中具有某种统计规律。具体回答这里略去。