位运算
(Bitwise operations)

本节内容

1. 位运算符
2. 算数移位与逻辑移位
3. 位运算的应用

什么是位运算

程序中的所有数在计算机内存中都是以二进制的形式储存的。位运算说穿了，就是直接对整数在内存中的二进制位进行操作。比如，and运算本来是一个逻辑运算符，但整数与整数之间也可以进行and运算。举个例子，6的二进制是110，11的二进制是1011，那么6 and 11的结果就是2，它是二进制对应位进行逻辑运算的结果（0表示False，1表示True，空位都当0处理）：

```
110 AND 1011 --> 0010(b) --> 2(d)
```

由于位运算直接对内存数据进行操作，不需要转成十进制，因此处理速度非常快。当然有人会说，这个快了有什么用，计算6 and 11没有什么实际意义啊。本文就将告诉你，位运算到底可以干什么，有些什么经典应用，以及如何用位运算优化你的程序。

符号	描述	运算规则
&	与	两个位都为1时，结果才为1
|	或	两个位都为0时，结果才为0
^	异或	两个位相同为0，相异为1
~	取反	0变1，1变0
<<	左移	各二进位全部左移若干位，高位丢弃，低位补0
>>	右移	各二进位全部右移若干位，对无符号数，高位补0，有符号数，各编译器处理方法不一样，有的补符号位（算术右移），有的补0（逻辑右移）

XOR – 异或

> 异或：相同为0，不同为1。也可用「不进位加法」来理解。

异或操作的一些特点：

```
x ^ 0 = x
x ^ 1s = ~x // 1s = ~0
x ^ (~x) = 1s
x ^ x = 0 // interesting and important!
a ^ b = c => a ^ c = b, b ^ c = a // swap
a ^ b ^ c = a ^ (b ^ c) = (a ^ b) ^ c // associative
```

1. 将 `x` 最右边的 `n` 位清零 – `x & (~0 << n)`
2. 获取 `x` 的第 `n` 位值(0或者1) – `(x >> n) & 1`
3. 获取 `x` 的第 `n` 位的幂值 – `x & (1 << (n - 1))`
4. 仅将第 `n` 位置为 `1` – `x | (1 << n)`
5. 仅将第 `n` 位置为 `0` – `x & (~(1 << n))`
6. 将 `x` 最高位至第 `n` 位(含)清零 – `x & ((1 << n) - 1)`
7. 将第 `n` 位至第0位(含)清零 – `x & (~((1 << (n + 1)) - 1))`

要点

X & 1 == 1 or == 0
X = X & (X-1) 清零最低位的1

X & -X => 得到最低位的1
X & ~X => 0

预习（上课考察）

https://leetcode.com/problems/number-of-1-bits/

https://leetcode.com/problems/power-of-two/

https://leetcode.com/problems/reverse-bits/

https://leetcode.com/problems/n-queens-ii/description/

实战

https://leetcode.com/problems/n-queens-ii/description/

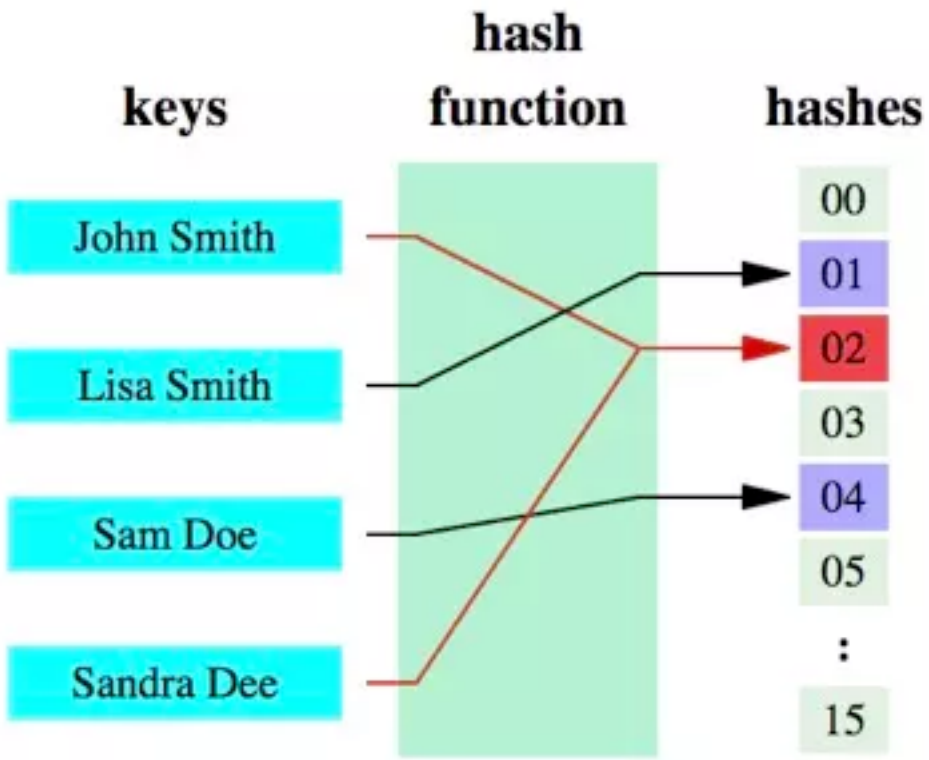
```python
def totalNQueens(self, n):
    if n < 1: return []
    self.count = 0
    self.DFS(n, 0, 0, 0, 0)
    return self.count

def DFS(self, n, row, cols, pie, na):
    # recursion terminator
    if row >= n:
        self.count += 1
        return

    bits = (~(cols | pie | na)) & ((1 << n) - 1)  # 得到当前所有的空位

    while bits:
        p = bits & -bits  # 取到最低位的1
        self.DFS(n, row + 1, cols | p, (pie | p) << 1, (na | p) >> 1)
        bits = bits & (bits - 1) # 去掉最低位的1
```

LeetCode 338： https://leetcode.com/problems/counting-bits/description/

```cpp
vector<int> countBits(int num) {
    vector<int> bits(num+1, 0);
    for (int i = 1; i <= num; i++) {
      bits[i] += bits[i & (i - 1)] + 1;
    }
    return bits;
}
```

Bloom Filter (布隆过滤器)

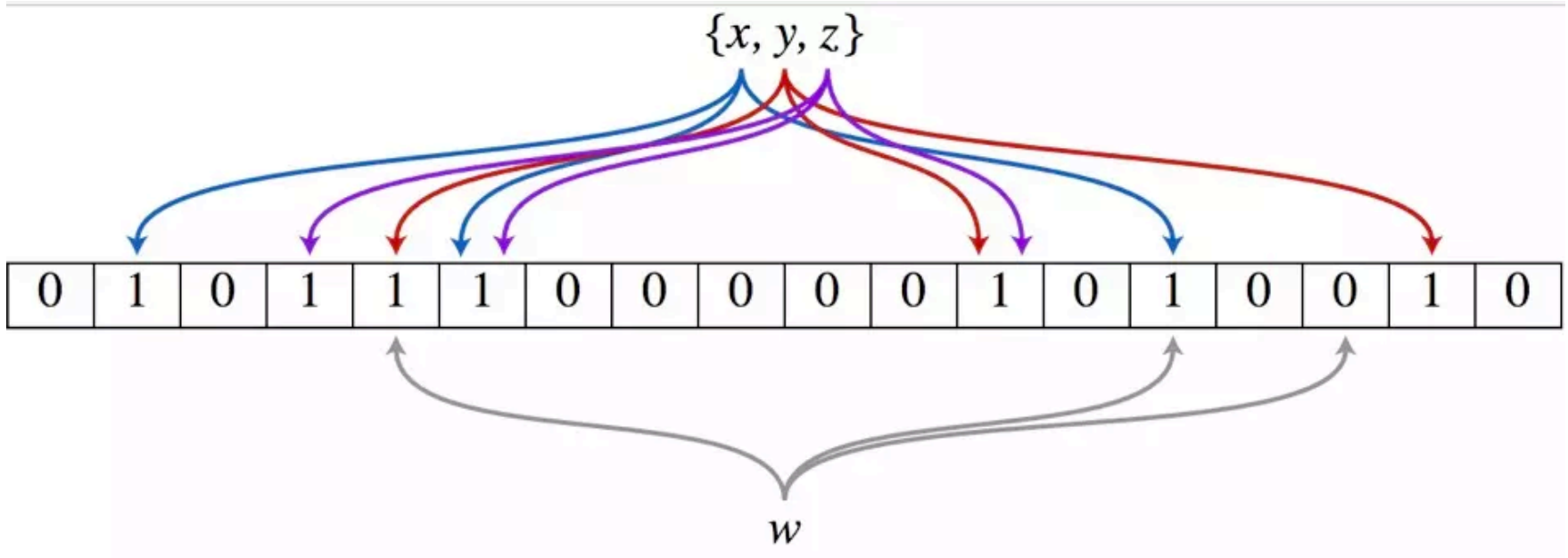
哈希函数

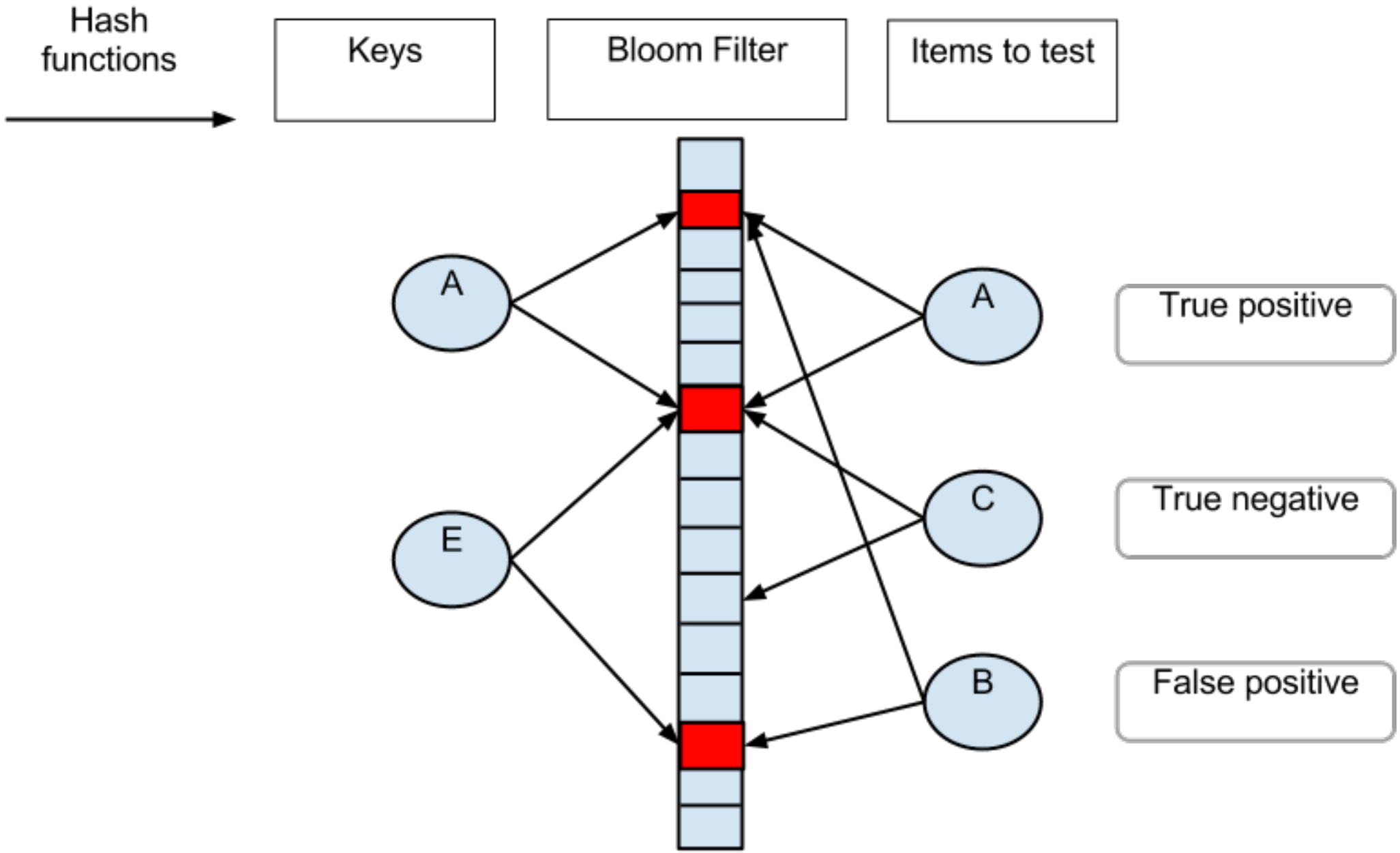

keys
hash function
hashes
John Smith
Lisa Smith
Sam Doe
Sandra Dee
00
01
02
03
04
05
:
15

Bloom Filter vs HashTable

一个很长的二进制向量和一系列随机映射函数。布隆过滤器可以用于检索一个元素是否在一个集合中。

它的优点是空间效率和查询时间都远远超过一般的算法，缺点是有一定的误识别率和删除困难。


{x, y, z}
0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0
w


Hash functions
Keys
Bloom Filter
Items to test
A
E
A
C
B
True positive
True negative
False positive

案例

1. 比特币网络

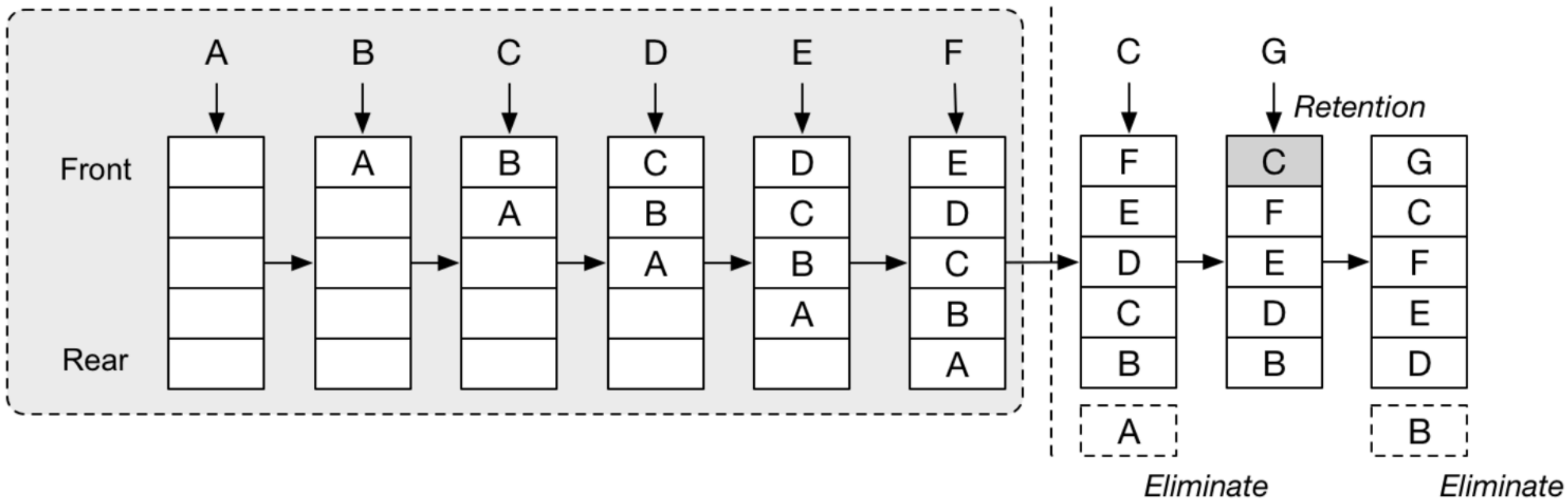
2. 分布式系统（Map-Reduce） — Hadoop、search engine

```python
from bitarray import bitarray
import mmh3

class BloomFilter:
    def __init__(self, size, hash_num):
        self.size = size
        self.hash_num = hash_num
        self.bit_array = bitarray(size)
        self.bit_array.setall(0)

    def add(self, s):
        for seed in range(self.hash_num):
            result = mmh3.hash(s, seed) % self.size
            self.bit_array[result] = 1

    def lookup(self, s):
        for seed in range(self.hash_num):
            result = mmh3.hash(s, seed) % self.size
            if self.bit_array[result] == 0:
                return "Nope"
        return "Probably"

bf = BloomFilter(500000, 7)
bf.add("dantezhao")
print (bf.lookup("dantezhao"))
print (bf.lookup("yyj"))
```

LRU Cache

LRU Cache

- Least recently used
- Hash Table + Double LinkedList
- O(1) get and O(1) set


A
B
C
D
E
F
Front
Rear
A
B
A
C
B
A
D
C
B
A
E
D
C
B
A
C
G
Retention
F
E
D
C
B
C
F
E
D
B
G
C
F
E
D
A
B
Eliminate
Eliminate

LFU cache

- LFU - least frequently used
- LRU - least recently used
- etc： https://en.wikipedia.org/wiki/Cache_replacement_policies

LeetCode 习题

- https://leetcode.com/problems/lru-cache/#/

```python
class LRUCache(object):

    def __init__(self, capacity):
        self.dic = collections.OrderedDict()
        self.remain = capacity

    def get(self, key):
        if key not in self.dic:
            return -1
        v = self.dic.pop(key)
        self.dic[key] = v   # set key as the newest one
        return v

    def put(self, key, value):
        if key in self.dic:
            self.dic.pop(key)
        else:
            if self.remain > 0:
                self.remain -= 1
            else:  # self.dic is full
                self.dic.popitem(last=False)
        self.dic[key] = value
```

Disjoint Set

并查集

适用场景

- 组团、配对问题
- Group or not ?

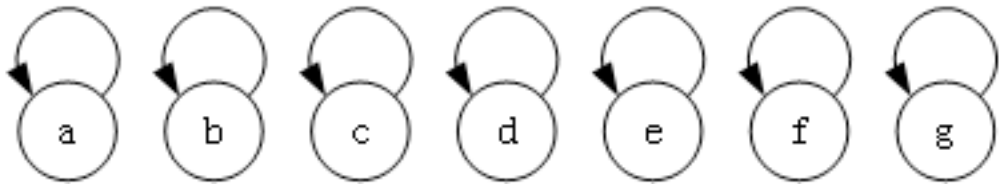
常见题目

- https://leetcode.com/problems/friend-circles/#/description
- https://leetcode.com/problems/surrounded-regions/#/description

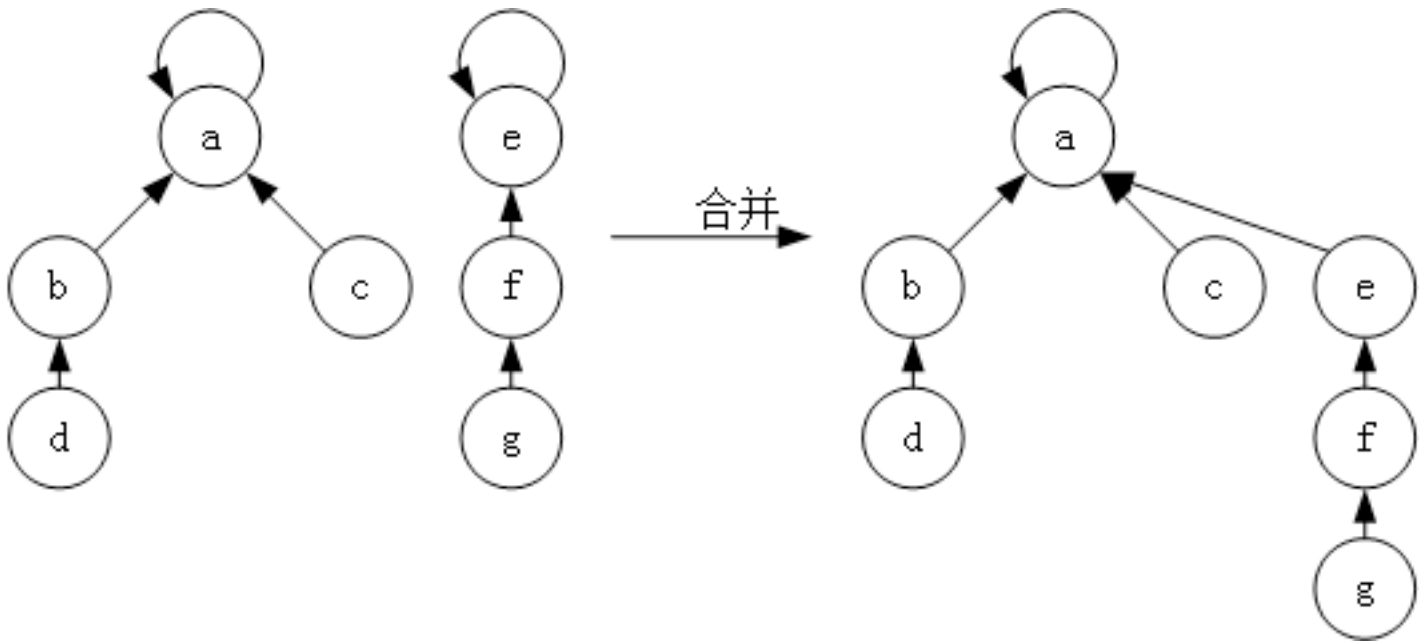
基本操作

- makeSet(s)：建立一个新的并查集，其中包含 s 个单元素集合。
- unionSet(x, y)：把元素 x 和元素 y 所在的集合合并，要求 x 和 y 所在的集合不相交，如果相交则不合并。
- find(x)：找到元素 x 所在的集合的代表，该操作也可以用于判断两个元素是否位于同一个集合，只要将它们各自的代表比较一下就可以了。

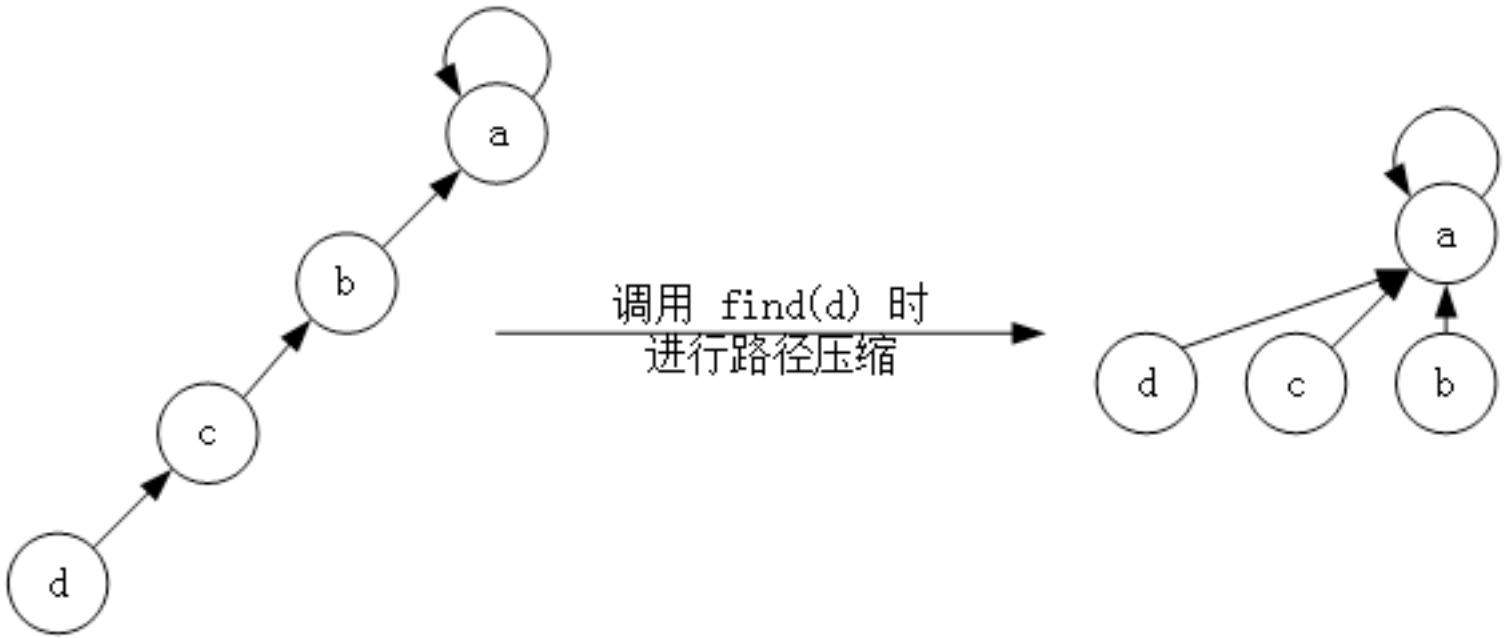
初始化



查询、合并



路径压缩



实战题目

- https://leetcode.com/problems/number-of-islands/
- https://leetcode.com/problems/surrounded-regions/

THANKS!