

# 球类运动中空气阻力的计算和分析

周雨青 叶兆宁 吴宗汉

(东南大学物理系, 南京 210096)

(收稿日期: 2001-08-15)

**摘要** 本文利用 Asai 等人的工作计算了光滑表面球体, 速度介于  $0 \sim 30\text{m/s}$  之间的空气阻力, 发现两种或三种不同运动速度都有相同的空气阻力值的现象, 本文对此做了理论上的解释. 本文并从空气阻力公式的由来、计算空气阻力的意义以及球类运动的若干运动现象(比如“香蕉球”技术等)等做了必要的阐述. 所有这一切都对球类运动更具体的研究有一定的意义.

**关键词** 球类; 空气阻力; 旋转; 曲线; 数据

贝克汉姆的临门一脚任意球堪称世界一绝, 只见他距球门 25m 之处大力抽射, 球呼啸着, 绕过人墙直飞网窝. 这种高超的“香蕉球”技术, 除了绿茵场上的刻苦训练和对足球的超凡悟性之外, 还蕴涵着深刻而复杂的物理内容. 本文首先简要地阐述“香蕉球”飞行原理, 然后就球飞行中的阻力特点做一个较为深入的讨论, 从中可以了解到各类球体在空气中飞行时处理阻力—速度关系的一般方法, 为具体的其它运动计算提供线索.

## 1 “香蕉球”运动原理

考虑如图 1 所示情况. 设球的旋转轴与  $v$  (球运动方向) 方向垂直 (这保证了压力与  $v$  垂直), 球的旋转方向使得球上部空气流速低于下部流速. 由 Bernoulli (伯努利) 原理知, 上部气体压力大于下部气体压力, 这时的气体

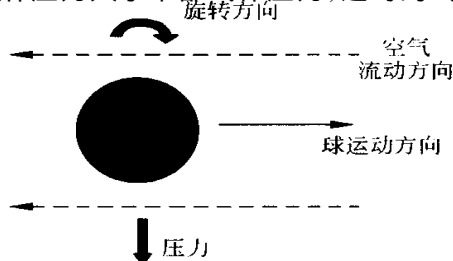


图 1

对球产生一个净向下的压力, 正是这个力使球偏离原运动方向, 产生弧度运动. 见图 2 所示, 在不考虑空气阻力 (运动方向上的) 情况下, 选择好起始速度大小、方向和恰当的旋转方向, 就能使球以圆弧轨迹绕过防守队员, 避开球门员而飞抵网窝. 当然, 这样的技术对运动员来说是需要“百炼成钢”的, 但从物理来说, 其中蕴涵着复杂的物理因素.

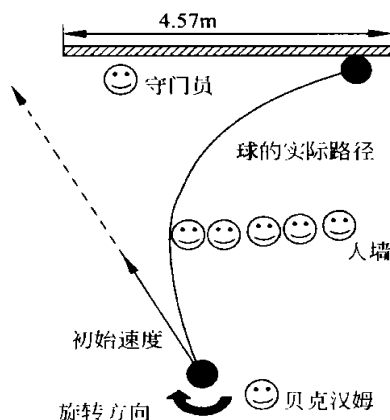


图 2

## 2 飞行中的球体所受空气阻力的理论与数据分析

“香蕉球”由于旋转而出现的压力差称为升力  $F_L$  (lift force), 它与球体运动速度和旋转频率有关. 由下式表达<sup>[2]</sup>

$$F_L = C_L D^3 f v \quad (1)$$

其中  $C_L$  为升力系数;  $\rho$  为空气密度(通常取海平面值  $1.20\text{kgm}^{-3}$ );  $D$  是球的直径(按国际足联组织 FIFA 规定, 球的周长必须介于  $0.68\text{m} \sim 0.70\text{m}$  之间, 则一般取直径为  $0.22\text{m}$ );  $f$  是球旋转频率;  $v$  是球速. 正是  $F_L$  的存在使球作弧线运动. (1) 式中的  $C_L$ 、 $f$  的确定较为复杂, 但一旦确定, 基本不随球体运动过程而变化. 有人 (Carini J P) [13] 做过足球、排球、乒乓球等许多球类运动分析,  $C_L$  取  $1.23$  是较为恰当的, 足球、排球的旋转速度  $f$  取  $10\text{rev/s}$ , 乒乓球高于此. (1) 式中的  $v$  却是一个充满变数、难以确定的量. 首先要说明的是, 由于  $F_L$  垂直于  $v$ , 因此  $F_L$  的存在对  $v$  的数值大小没有影响. 其次因为  $v$  的存在引起空气阻力的出现, 而空气阻力又反过来引起  $v$  的改变, 导致球的飞行轨迹偏离圆弧状, 实际的轨迹取决于速度如何变化. 空气阻力是与物体形状、运动速度、表面特征都有关系的动力学量. 下面就比较详细地讨论一下处理球类物体运动时的空气阻力与速度关系的理论和数据曲线.

#### (1) 空气阻力与速度关系的理论推导

首先考虑平板在空气中运动时所受的压差阻力(后面有说明). 如图 3 所示(考虑空气相对于平板运动) 假定把尚未到达平板的气流称作“状态 1”, 而把已达到平板上的气流称作“状态 2”, 并先假定气流撞在平板上以后其速度全部变为零, 即  $v_2 = 0$  (这是一种极端情况), 则根据 Bernoulli 原理有

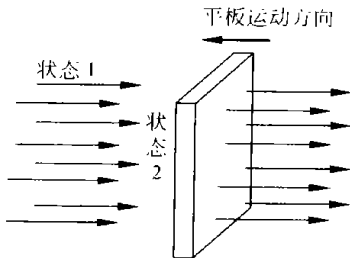


图 3

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$P$  为单位体积的气流压力能, 其中  $v_1 = v$  (亦即平板运动速度),  $v_2 = 0$ , 则  $P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho v^2$ . 若认为平板的背面所受的气压等于前部“状态 1”时的压力  $P_1$ , 那么, 平板两面的压力差乘以平板的面积  $A$  就得到阻力  $F_d$

$$F_d = (P_2 - P_1) A = \frac{1}{2} \rho A v^2 \quad (2)$$

这并不是正确的表达式, 因为, 即使是平板, 也不是所有气体质量在流向平板时完全损失速度, 而更可能是如图 4 所示, 绕过平板向后流动. 显然此时的  $P_2$  要减小, 板后面的  $P_1$  也要变化. 并且气体流过表面时还将出现摩擦阻力(后面有说明), 以及更复杂的其它空气阻力形式. 因此, 较为准确和一般的阻

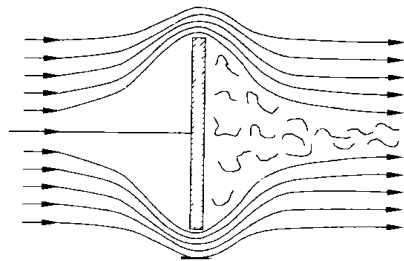


图 4

力表达式应该引进一个阻力系数  $C_d$ , 使其变为

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2 \quad (3)$$

$C_d$  的意义有两点: 第一, 是表示实际阻力与上述平板的极端情况 ((2) 式) 的比较 (值), 即  $F_d / (\frac{1}{2} \rho A v^2)$ . 第二,  $C_d$  是含压差阻力、摩擦阻力及其它阻力的总效应. 即  $C_d = C_{d\text{压}} + C_{d\text{摩}} + C_{d\text{其它}}$  (本文主要考虑前二者). 在具体情况下, 由于物体形状、运动速度大小及物体表面平整度的不同都会使各种具体阻力在总阻力中所占的比分出现很大的不同, 即

$$C_{d\text{压}} / C_d + C_{d\text{摩}} / C_d + \dots = 1$$

(3) 式就是当前理论通用的气体阻力表达式, 其中的  $A$  为运动物体的横截面 (对球体即为  $\frac{1}{4} D^2$ ) 其中的阻力系数  $C_d$  既与形状因素有

关(比如:平板  $C_d = 1$ , 圆球或流线型物体  $C_d < 1$ ), 又与速度因素有关(比如速度在  $0 \sim 30\text{m/s}$  范围内变化时圆球  $C_d$  约有  $0.5 \sim 0.06$  的变化), 因此, 不能从(3)式中泛泛地认为空气阻力正比于  $v^2$ , 需要具体来确定.

(2) 雷诺(Reynolds)数

流体力学中描述气流流动状态(层流、湍流)的临界指标用雷诺数表示, 记作  $R_e$ . 层流或湍流状态的空气粘滞阻力相差甚远, 因此雷诺数  $R_e$  与阻力系数  $C_d$  会有着千丝万缕的联系. 当然这种联系是经验性的数据表达, 很难有理论的数学表达形式.

雷诺数  $R_e$  用气流速度表示的标准形式为<sup>[4]</sup>

$$R_e = vD/\quad (4)$$

其中  $v$  为流速,  $D$  为流束直径, 若为球体在空气中运动, 则  $v$ 、 $D$  分别为球速和球直径;  $\quad$  为空气的粘滞系数.

(3) 球体  $C_d$  与  $R_e$  的关系

Asai<sup>[1]</sup>等人做了各种球体在空气中飞行时的阻力系数的测定实验发现:  $C_d$  与  $R_e$  的关系取决于球体表面平整程度, 与球体直径无关. 实验曲线如图 5 所示. 这张图对求出球体在空气中的阻力随速度变化的关系至关重要, 它告诉我们  $C_d$  如何通过  $R_e = vD/\quad$  与速度发生联系的. 从这张图中可以看到  $C_d$  与球体的表面有很大关系.

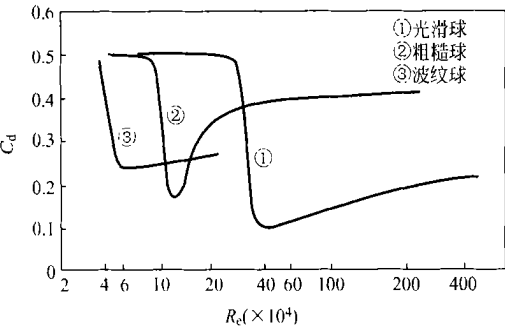


图 5

(4) 球体空气阻力  $F_d$  与速度  $v$  的关系曲线

以足球为例, 可以认为足球为光滑球体,  $C_d - R_e$  曲线取  $\quad$  曲线, 取  $20$  时的空气粘滞

系数  $\quad = 18.2\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ , 空气密度  $\quad = 1.20\text{kgm}^{-3}$ , 取足球直径  $D = 0.22\text{m}$ , 则通过关系式(4)及图 5 中的曲线以及式(3), 可以计算建立下表 1:

表 1

$v(\text{ms}^{-1})$	$R_e(\times 10^4)$	$C_d$	$F_d(\text{N})$
0	0	0	0
2.5	3.63	0.5	0.1
5.0	7.25	0.5	0.3
7.5	10.9	0.5	0.6
10.0	14.5	0.5	1.1
12.5	18.1	0.5	1.8
15.0	21.8	0.5	2.6
17.5	25.4	0.5	3.5
20.0	29.0	0.45	4.1
22.5	32.6	0.4	4.6
25.0	36.3	0.2	2.9
27.5	39.9	0.1	1.7
30.0	43.5	0.06	1.2

由表 1 可以绘制图 6.

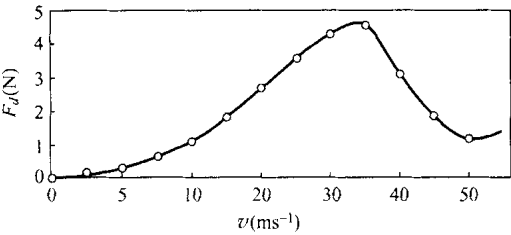


图 6

图 6 曲线清楚地表明了空气阻力如何随速度  $v$  的变化而变化的对应关系. 值得注意的是, 空气阻力与速度的关系出现双值或三值现象(当  $R_e > 60 \times 10^4$  后, 图 6 曲线的末端开始向上翘)即不同的飞行速度却有相同的阻力, 这让我们知道高速比低速更容易维持自己的速度, 比如

$$v_1 > v_2, a_1 = a_2 = a$$

则  $v_1 = v_2 = a t, \quad \text{而} \quad \frac{v_1}{v_1} < \frac{v_2}{v_2}.$

(5) 理论解释

图 6 是图 5 的必然结果, 为此我们对图 5 作一理论解释.

空气对球类运动物体的阻力主要可分为摩擦阻力和压差阻力两种. 摩擦阻力是气流

流过物体两侧时,由于空气的粘性而形成的空气摩擦;压差阻力是运动物体沿运动方向的前后两面所受的压力差,这与物体前、后两面形成的流动有关.这种关系又直接与物体形状和运动速度(层流、还是湍流)有关.这两种阻力在同一速度情况下会因物体形状而有相当大的差异.比如:平板形物体的压差阻力比摩擦阻力大得多;流线型物体摩擦阻力却占主要地位.另外,在形状一定的情况下,两者的竞争又与流速有关,我们以图5中的曲线为例,定性地说说明这条实验曲线的理论结果.

光滑球体在空气中运动,可将球运动的前后部的气流的运动看成“管流”.当运动速度不大时,“管流”为层流状态,层流状的流速线分布见图7.“管”心(球心)速度最大,即为

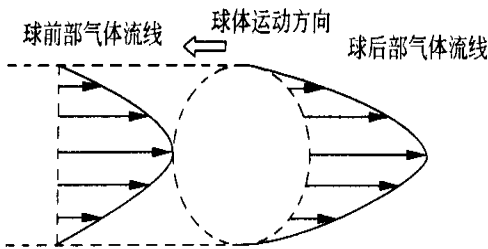


图7

球速,“管”壁(球边缘)速度为零.此时,球体前部气流不会流向后部.这时压差阻力占主要地位.与平板极端压差阻力推导类似,只是球前后部气流呈  $v(y) = v \left( 1 - \frac{y}{a} \right)$  规律变化.其中  $v$  为球速,  $a$  为球半径,  $y$  为距球中心线的距离.此压差阻力可如下计算(见图8)

$$dF = \frac{1}{2} \rho v^2(y) dA$$

$$dA = 2 \sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy$$

(图8的阴影面积)

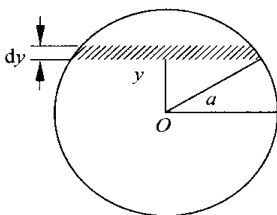


图8

则

$$\begin{aligned} F &= \int_0^a dF = 2 \int_0^a \frac{1}{2} \rho v^2 \left( 1 - \frac{y}{a} \right)^2 \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \rho v^2 4 a^2 \int_0^a \left( 1 - \frac{y}{a} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{y}{a} \right)^2} d\left( \frac{y}{a} \right) \\ &= \frac{15}{48} - \frac{32}{48} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 4 a^2 \right) \\ F &= 0.40 \frac{1}{2} \rho v^2 A \end{aligned}$$

其中  $A = \pi a^2 = \frac{D^2}{4}$  为球截面.与式(3)比较知,  $C_d = 0.4$  为常数,这与图5曲线中水平线段定性一致,但数据上有差异.这是与气流模型过于特殊有关,且没有考虑部分的摩擦阻力所致.

当运动速度增大至湍流状态时,流速线变为图9状态,此时前后气体连通.这时的压差阻力陡然变小,  $C_d$  急剧下降(对应于图5曲线中的陡直线段部分).当湍流状态已经彻底形成后,压差阻力不起主要作用,摩擦阻力随速度的增加而增大,  $C_d$  表示出缓慢上升状.



图9

粗糙球体与光滑球体有类似结果,只是维持层流状的速度范围更小,所以有图5曲线情况.至于波纹球体,因为无层流状可言,所以就没了曲线、的第一段平直线,出现曲线情况.

### 3 球体飞行轨道确定的分析思路

#### (1) 不考虑重力作用

飞行中的球体受如图10所示二力作用,选自然坐标系,有如下动力方程

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} C_d A v^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = C_L D^3 f v \end{cases} \quad (6)$$

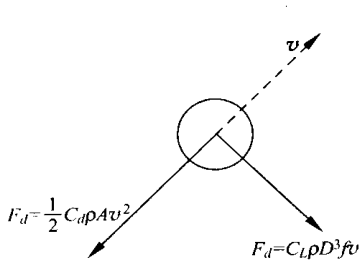


图 10

其中  $R$  为曲线的曲率半径,  $m$  为球体质量,

(5) 式变形为  $\frac{dv}{C_d v^2} = \frac{A}{2m} dt$

选定初始条件  $t = 0, v = v_0$ , 对上式积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{C_d v^2} = \frac{A}{2m} \int_0^t dt$$

根据图 5, 写出计算机积分程序完成上述积分, 即可得  $v = v(t)$  的数值解, 再将其代入 (6) 式, 可得曲率半径

$$R = R(t) = \frac{m}{C_L D^3 f} v(t)$$

的数值解, 由此可得一数值曲线.

(2) 考虑重力作用的抛体运动

实际足球在飞行中受力如图 11 所示的力作用. 因重力作用下的抛体运动是一简单抛物线, 利用运动的独立性原则, 将上述数值曲线与抛物线合成即可得实际轨迹曲线.

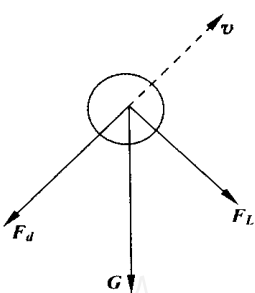


图 11

4 总结

球类飞行的诸多问题主要是阻力问题, 首先利用实验曲线  $C_d - Re$  确定  $C_d$  与速度的关系, 其次利用  $F_d = \frac{1}{2} C_d A^3 v^2$  求出  $F_d$ , 最后用动力学方程求解轨迹.

参 考 文 献

[1] Asai T, Akatsuka T and Haake S. The physics of football. *Phys. World* 1998, **11** (6) :25 ~ 27.  
[2] Gen Iresen. Beckham as physicist? *Physics Education*. 2001, 2.  
[3] Carini. J P 1999. <http://carini.physics.indiana.edu/E105/forces-on-projectiles.html>  
[4] 李翼祺等编. 流体力学基础. 科学出版社, 1983. 120.

(上接 61 页)  $C_V \quad C_V^0 \quad T^3$

4 综上所述

(1) 当我们将德拜模型态密度做适当修正后, 不但保证了德拜模型的优势之处, 同时还对原有的局限性做了一定的修正.

(2) 得到这样的结果不是偶然的, 其原因在于格波并非完美的弹性波. 从  $\omega = \omega_0 + q$  可知当温度较低时  $\omega_0$  很小, 所以  $\omega_0$  项的影响很小, 因此是弹性波形式; 当温度较高时  $\omega_0$  很大,  $\omega_0$  项起主要作用, 这时就不再是弹性波了, 德拜模型不再适用.

(3) 至于修正项的来源, 我们从热容的高温极限中看到, 它体现格波声子间的相互碰撞, 是非简谐效应的结果. 因此我们可以看到本文采用的修正正是考虑了格波的简谐与非简谐两种效应. 而从振动频率的低温近似中我们更加清楚地看到  $\omega_0$  代表了这种声子间的相互碰撞的平均作用效果. 实际上低温情况下, 格波相速度  $v$  很小, 因而这种均匀背景也是极其微弱的.

参 考 文 献

[1] 黄 昆. 固体物理学. 韩汝琦改编. 高等教育出版社, 1988 年.