实验题目二.

2017180026 徐思辉

一、理论基础

考虑两点边值问题 $\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu=f & a<x<b. \\ u(a)=0,\ u(b)=0. \end{cases}$

构造等价变分问题 $\frac{1}{2}(Lu,u)-f(u)$，即 $J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u)$

对求解区域进行离散，求近似解：

从Ritz方法出发：找到 u_n^*，使 $J(u_n^*)$ 达到最小，使 $u_n^*=\sum c_i^*\varphi_i(x)$.

$J(u_n)=\frac{1}{2}a(u_n,u_n)-(f,u_n)=\frac{1}{2}a(\sum c_i\varphi_i,\sum c_j\varphi_j)-(f,\sum c_j\varphi_j)$ 由多元函数极值必要条件，$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j}=0$，则有 $\sum_{i=1}^{n}a(\varphi_i,\varphi_j)c_i=(f,\varphi_j)$. 解出 c_i 即可.

从Galerkin方法出发：离散问题 $u_n^*\in V_n$, s.t. $a(u_n^*,v_n)=(f,v_n)$, $v_n\in V(\varphi)$.

而 φ_i 是 V_n 的一组基，则有 $a(u_n,\varphi_j)=(f,\varphi_j)$. ∴ 有 $u_n^*=\sum\varphi_i c_i^*$ 是问题的解.

即 $\sum_{i=1}^{n}a(\varphi_i,\varphi_j)c_j=(f,\varphi_j)$. 同理解得 c_i 即可.

二、算法结构：见文档.

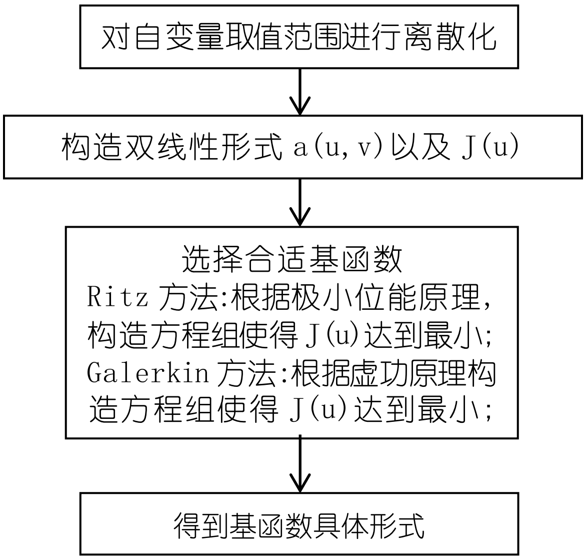
三、程序代码：见文档.

四、结果分析：

图表见文档，两种方法理论基础较为复杂，计算量较大，需要计算大量积分，但精确度较好，且求得方程组后，由线性方程组理论成熟，会使计算方便.

算法结构

$$
\text{考虑微分方程:}\begin{cases} \dfrac{-d(p\dfrac{du}{dx})}{dx} + qu = f, a < x < b \\ u(a) = 0, u'(b) = 0 \text{ or 其他条件} \end{cases}
$$



代码

1.计算 $a(\varphi_i, \varphi_j)$

```
%基函数是 sin(i*pi*x)
%计算 a(φi, φj)
function result_integral_a = Ritz_Galerkin_integral_a(i,j)
syms x
fail = sin(i*pi*x)*sin(j*pi*x) + i*pi*cos(i*pi*x)*j*pi*cos(j*pi*x);
result_integral_a = int(fail,x,0,1);
end
```

2.计算 $a(f, \varphi_j)$

```
%基函数是 sin(i*pi*x),f = x^2
%注题初边值条件非齐次,构造 u0(x) = x
function result_integral_f = Ritz_Galerkin_integral_f(i)
syms x
u = x^2*sin(i*pi*x);%(f,ϕi)
w = x*sin(i*pi*x) + i*pi*cos(i*pi*x);%a(u(0),ϕi)
result_integral_f = int(u,x,0,1) - ( int(w,x,0,1) );%
end
```

3. 主程序

```
function result = Ritz_Galerkin(n)
%主程序
```

```
%推导可得 a(u,v) = uv+u'v'
%f(x) = x^2
for i = 1:n
    for j = 1:i
        a(i,j) = Ritz_Galerkin_integral_a(i,j);
        a(j,i) = a(i,j);
    end
end
for i = 1:n
    f(i) =  Ritz_Galerkin_integral_f(i);
end
c = a\f';%解出c
syms x
result = 0;
for i = 1:n
    result = result + c(i)*sin(i*pi*x);%输出表达式
end
result = result + x;
end
```

结果

取 n=2 时，得到的 n 次近似$u_n(x)$:

```
>> result = Ritz_Galerkin(2)

result =

x - (8*sin(pi*x))/(pi^3*(pi^2 + 1))
```

取 n=3 时，得到的 n 次近似$u_n(x)$:

```
>> result = Ritz_Galerkin(3)

result =

x - (8*sin(pi*x))/(pi^3*(pi^2 + 1)) - (8*sin(3*pi*x))/(27*pi^3*(9*pi^2 + 1))
```

选取 n=2,3 时，得到的 n 次近似$u_n(x)$来计算u_i，如下表(x 取 0:0.1:1)：

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
n=2	0	0.092665	0.186048	0.280796	0.377425	0.476263	0.577425	0.680796	0.786048	0.892665	1
n=3	0	0.092579	0.185947	0.280763	0.377487	0.476369	0.577487	0.680763	0.785947	0.892579	1
真解	0	0.092569	0.185948	0.280771	0.377487	0.476362	0.577487	0.680771	0.785948	0.892569	1

作出 n=2,3 以及真解的图像: