正交化约

- 一个矩阵 $\mathbf{A}$ 可以通过高斯消去法的初等行操作被化简为行阶梯形。
- 高斯消去法并不是唯一的矩阵化简方法。
- 初等反射器 $\mathbf{R}_k$ 可以实现相同的目的，这种方法称为 **Householder 化简**。其步骤如下：
- 对于 $\mathbf{A}_{m\times n} = [\mathbf{A}_{*1}|\mathbf{A}_{*2}|\cdots|\mathbf{A}_{*n}]$，使用 $\mathbf{x} = \mathbf{A}_{*1}$ 构造初等反射器

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^*}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \quad \text{其中} \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}_{*1} \pm \mu\|\mathbf{A}_{*1}\|\mathbf{e}_1,$$

- 使得 $\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*1} = \mp\mu\|\mathbf{A}_{*1}\|\mathbf{e}_1 = (t_{11}, 0, \cdots, 0)^T$。
- 将 $\mathbf{R}_1$ 应用于 $\mathbf{A}$ 得到

$$\mathbf{R}_1\mathbf{A} = [\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*1}|\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*2}|\cdots|\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*n}] = \begin{pmatrix} t_{11} & \mathbf{t}_1^T \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

  其中 $\mathbf{A}_2$ 是 $m-1\times n-1$ 的矩阵。