行列式

- 多年来，有各种不同的方法来定义行列式。
- 我们将选择效率而非优雅，并继续采用经典的处理方法。
- 排列 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是对数列 $(1,2,\cdots,n)$ 的任何重新排列。
- 例如，集合

$$\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$$

  包含了 $(1,2,3)$ 的六个不同排列。
- 一般来说，数列 $(1,2,\cdots,n)$ 有 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 1$ 个不同的排列。
- 给定一个排列，考虑通过一系列成对交换将其还原到自然顺序的问题。
- 例如，$(1,4,3,2)$ 可以通过**一次**交换 2 和 4，或者**三次**相邻的交换恢复到自然顺序。

$$(1,4,3,2) \quad\rightarrow\quad (1,2,3,4)$$

  或

$$\begin{array}{ccc}(1,4,3,2) & \rightarrow & (1,4,2,3)\\ (1,4,2,3) & \rightarrow & (1,2,4,3)\\ (1,2,4,3) & \rightarrow & (1,2,3,4)\end{array}$$

- 这里重要的是 1 和 3 都是奇数。(莫名其妙的一句话，说交换的次数是奇数不要引起歧义)
- 尝试使用偶数次交换将 $(1,4,3,2)$ 恢复到自然顺序，你会发现这是不可能的。
- **排列的奇偶性是唯一的**——即，如果一个排列 p 可以通过偶数（或奇数）次交换恢复到自然顺序，那么其他任何能将 p 恢复到自然顺序的交换序列也必须是偶数（或奇数）次。
- 因此，**排列 p 的符号定义为数值**

$$\sigma(p)=\begin{cases}+1 & \text{如果 } p\text{可以通过偶数次交换恢复到自然顺序，}\\ -1 & \text{如果 } p\text{可以通过奇数次交换恢复到自然顺序。}\end{cases}$$

行列式的定义

对于一个 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$，矩阵 A 的行列式定义为标量

$$\det(A)=\sum_p \sigma(p)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中，和是对 $(1,2,\ldots,n)$ 的 $n!$ 个排列 $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ 进行的。

- 矩阵 A 的行列式可以表示为 $\det(A)$ 或 $|A|$。
- 注意：非方阵的行列式是未定义的。
- 例如，当矩阵 A 是 2×2 时，有两个排列 $(1,2)$ 和 $(2,1)$，即 $\{(1,2),(2,1)\}$，因此 $\det(A)$ 包含两个项：

$$\sigma(1,2)a_{11}a_{22} \quad \text{和} \quad \sigma(2,1)a_{12}a_{21}.$$

  由于 $\sigma(1,2)=+1$ 且 $\sigma(2,1)=-1$，我们得到熟悉的公式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三角形行列式

三角矩阵的行列式是其对角线元素的乘积。换句话说，

$$\begin{vmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn}\end{vmatrix}=t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}.$$

notes::根据定义，当取T11时，t2只能选t22（t21的1已经给t11了），以此类推只有主对角线上的可以取，不然就会取到0让乘积等于0，最后累乘且交换次数为0取+1

转置不改变行列式

- 对于所有 $n \times n$ 矩阵，$\det(A^T) = \det(A)$。

行操作的影响

设 B 是通过对 $A_{n\times n}$ 进行以下三种基本行操作之一得到的矩阵：

- 类型 I：交换第 i 行和第 j 行。
- 类型 II：将第 i 行乘以 $\alpha \neq 0$。
- 类型 III：将第 i 行的 α 倍加到第 j 行。

行列式 $\det(B)$ 的值如下：

- 对于类型 I 操作，$\det(B) = -\det(A)$。
- 对于类型 II 操作，$\det(B) = \alpha \det(A)$。
- 对于类型 III 操作，$\det(B) = \det(A)$。

现在可以评估与三种基本操作中的任何一种相关的基本矩阵的行列式。

- 设 E、F 和 G 分别为类型 I、II 和 III 的基本矩阵。
- $\det(I) = 1, \det(E) = -1, \det(F) = \alpha$ 且 $\det(G) = 1$。

$$\begin{aligned}\det(EA) &= -\det(A) = \det(E)\det(A)\\ \det(FA) &= \alpha\det(A) = \det(F)\det(A)\\ \det(GA) &= \det(A) = \det(G)\det(A).\end{aligned}$$

- 换句话说，当 P 是类型 I、II 或 III 的基本矩阵时，$\det(PA) = \det(P)\det(A)$。将这个结论扩展到任意数量的基本矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 时，可以写为

$$\det(P_1P_2\cdots P_kA) = \det(P_1)\det(P_2)\cdots\det(P_k)\det(A).$$

可逆性与行列式

- 矩阵 $A_{n\times n}$ 如果且仅当 $\det(A) \neq 0$ 时是非奇异的；
- 等价地，$A_{n\times n}$ 如果且仅当 $\det(A) = 0$ 时是奇异的。

- 可能很容易认为 $\det(A)$ 是衡量矩阵 A 距离奇异有多近的指标，但实际上并不一定如此。
- 小行列式值 $\not\Leftrightarrow$ 接近奇异。
- 矩阵 $A_{m\times n}$ 的一个子行列式（或简单地称为小行列式）定义为 A 的任何 $k \times k$ 子矩阵的行列式。例如，

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -3 \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} = -6$$

是 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ 的 2×2 小行列式。(想说明什么。。。。。)
- 矩阵 A 的单个元素可以视为 1×1 小行列式，而 $\det(A)$ 本身被认为是 A 的 3×3 小行列式。

$\operatorname{rank}(A)$ 是矩阵 A 的最大非零小行列式的（形状size）大小。

问题：使用行列式计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩。

解答：显然，存在非零的 1×1 和 2×2 小行列式，因此 $\operatorname{rank}(A) \geq 2$。为了判断秩是否为 3，我们需要查看是否存在非零的 3×3 小行列式。总共有四个 3×3 小行列式，它们是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由于所有 3×3 小行列式都为零，我们可以得出结论：$\operatorname{rank}(A) = 2$。

乘积规则

- 对于所有 $n \times n$ 矩阵，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$。
- 如果 A 和 D 是方阵，则

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

- 乘积规则提供了一种计算行列式的实用方法。
- 行列式的定义纯粹是代数性的，但它有一个具体的几何解释。
- 在 $\mathbb{R}^m$ 中，一个具有平行对面且相邻边由来自线性无关集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 的向量定义的实体称为 n 维平行多面体。
- 一个二维平行多面体是一个平行四边形，而一个三维平行多面体是一个斜长方体。
- 当 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 具有线性无关的列时，由 A 的列生成的 n 维平行多面体的体积为

$$V_n = \left[\det(A^T A)\right]^{1/2}.$$

  特别地，如果 A 是方阵，则 $V_n = |\det(A)|$。？？？ 又不知道在说些什么东西了
- 对于每个非奇异矩阵 A，存在一个置换矩阵 P，使得 $PA = LU$，其中 L 是具有对角线上为 1 的下三角矩阵，U 是具有对角线上为主元的上三角矩阵。
  - 乘积规则保证 $\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U)$。

计算行列式

如果 $PA_{n \times n} = LU$ 是通过行交换得到的 LU 分解（使用部分主元化以保证数值稳定性），则

$$\det(A) = \sigma u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

其中 u_{ii} 是主元，σ 是置换的符号，即

$$\sigma = \begin{cases} +1, & \text{如果使用了偶数次行交换;} \\ -1, & \text{如果使用了奇数次行交换.} \end{cases}$$

如果出现无法消除的零主元（因为主元下的所有元素为零），则 A 是奇异的，且 $\det(A) = 0$。

- 有时需要计算一个行列式的导数，其中的元素是可微函数。

行列式的导数

如果 $A_{n \times n} = [a_{ij}(t)]$ 的元素是关于 t 的可微函数，那么

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \det(D_1) + \det(D_2) + \cdots + \det(D_n),$$

其中 D_i 与 A 相同，只是第 i 行的元素被它们的导数替代，即：

$$[D_i]_{i*} = \begin{cases} A_{k*} & \text{如果 } i \neq k, \\ \frac{dA_{k*}}{dt} & \text{如果 } i = k. \end{cases}$$

- 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$ 的行列式的导数 $\frac{d(\det(A))}{dt}$。

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = (e^t + e^{-t})(\cos t + \sin t).$$

证明：这直接从行列式的定义得出，写为

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = \sum_p \sigma(p) \frac{d}{dt}(a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n})$$

$$= \sum_p \sigma(p) \left(a'_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} + a_{1p_1} a'_{2p_2} \cdots a_{np_n} + \cdots + a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a'_{np_n}\right)$$

$$= \sum_p \sigma(p) a'_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} + \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a'_{2p_2} \cdots a_{np_n} + \cdots + \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a'_{np_n}$$

$$= \det(D_1) + \det(D_2) + \cdots + \det(D_n).$$

行列式的附加性质

- 本节的目的是介绍一些行列式的附加性质，这些性质在后续的推导中将会有用。

分块行列式

如果 A 和 D 是方阵，则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A)\det(D - CA^{-1}B) & \text{当 } A^{-1} \text{ 存在时}, \\ \det(D)\det(A - BD^{-1}C) & \text{当 } D^{-1} \text{ 存在时}. \end{cases}$$

矩阵 $D - CA^{-1}B$ 和 $A - BD^{-1}C$ 分别称为 A 和 D 的 **Schur补**。

证明：如果 A^{-1} 存在，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

- 由于乘积的行列式等于行列式的乘积，因此很自然地会问，类似的结果是否对和成立。换句话说，是否 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$？**几乎从不！**
- 尽管如此，仍然可以对某些类型的和的行列式作出一些说明。

秩一更新

如果 $A_{n\times n}$ 是非奇异矩阵，并且 c 和 d 是 $n \times 1$ 列向量，则

- $\det(I + cd^T) = 1 + d^T c$,
  $\det(A + cd^T) = \det(A)\left(1 + d^T A^{-1} c\right)$。

- 证明通过应用乘积规则得出：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ d^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + cd^T & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -d^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 + d^T c \end{pmatrix}$$

- 写作 $A + cd^T = A(I + A^{-1}cd^T)$。

问题：对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i \neq 0$，求 $\det(A)$。

解答：将 A 表示为一个秩一更新矩阵 $A = D + ee^T$，其中 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 且 $e^T = (1\ 1\ \dots\ 1)$。

$$\det(D + ee^T) = \det(D)\left(1 + e^T D^{-1} e\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right).$$

克拉默法则

在非奇异系统 $A_{n\times n}x = b$ 中，第 i 个未知量为

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

其中 $A_i = \begin{bmatrix} A_{*1} & \dots & A_{*,i-1} & b & A_{*,i+1} & \dots & A_{*n} \end{bmatrix}$。也就是说，矩阵 A_i 与 A 相同，除了第 i 列被 b 替换。

证明：因为 $A_i = A + (b - A_{*i})e_i^T$，其中 e_i 是第 i 个单位向量，

$$\begin{aligned} \det(A_i) &= \det(A)\left(1 + e_i^T A^{-1}(b - A_{*i})\right) = \det(A)\left(1 + e_i^T(x - e_i)\right) \\ &= \det(A)(1 + x_i - 1) = \det(A)x_i. \end{aligned}$$

因此 $x_i = \det(A_i)/\det(A)$，因为 A 是非奇异矩阵，确保 $\det(A) \neq 0$。

问题：确定 t 的值，使得在下列方程中 $x_3(t)$ 最小化：

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1/t \\ 0 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \\ 1/t^2 \end{pmatrix}.$$

解答：只需求解一个分量，因此解整个系统是多余的。使用克拉默法则得到

$$x_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 1/t \\ 1 & t^2 & 1/t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & 0 & 1/t \\ 0 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^3 \end{vmatrix}} = \frac{1 - t - t^2}{-1} = t^2 + t - 1,$$

并设

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = 0.$$

- 回忆一下，矩阵 A 的小行列式只是 A 的子矩阵的行列式。
- 现在我们可以看到，对于 $n \times n$ 矩阵，$n - 1 \times n - 1$ 的小行列式具有特别的意义。

代数余子式

与 $A_{n\times n}$ 的 (i,j) 位置相关的代数余子式定义为

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是通过删除 A 的第 i 行和第 j 列得到的 $n-1\times n-1$ 小行列式。代数余子式矩阵记作 $\hat{A}$。

问题：对于 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$，计算代数余子式 $\hat{A}_{21}$ 和 $\hat{A}_{13}$。

解答：

$$\hat{A}_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-19) = 19$$

和

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (+1)(18) = 18.$$

整个代数余子式矩阵为

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -54 & -18 & 20 \\ 19 & -7 & -6 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 方阵 A 的代数余子式自然地出现在 $\det(A)$ 的展开式中。例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\hat{A}_{11} + a_{12}\hat{A}_{12} + a_{13}\hat{A}_{13}.$$

- 这个展开式被称为关于第一行的 $\det(A)$ 的代数余子式展开。它也可以写为关于其他任何一行或一列的形式。

代数余子式展开

- $\det(A) = a_{i1}\hat{A}_{i1} + a_{i2}\hat{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\hat{A}_{in}$ （关于第 i 行）。
- $\det(A) = a_{1j}\hat{A}_{1j} + a_{2j}\hat{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\hat{A}_{nj}$ （关于第 j 列）。

问题：使用代数余子式展开来计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的行列式 $\det(A)$。

解答：为了减少计算量，可以在包含最多零的行或列上展开 $\det(A)$。对于这个例子，第一行的展开最为高效，因为

$$\det(A) = a_{11}\hat{A}_{11} + a_{12}\hat{A}_{12} + a_{13}\hat{A}_{13} + a_{14}\hat{A}_{14} = a_{14}\hat{A}_{14} = (2)(-1)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

现在可以对这个剩下的 3×3 行列式继续展开，可以在第一列或第三行上展开。使用第一列展开得到

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (7)(+1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (3)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -91 + 57 = -34,$$

因此

$$\det(A) = (2)(-1)(-34) = 68.$$

你可以尝试使用不同的行或列展开，结果将是相同的。

- 在前面的例子中，我们利用了零元素在便捷位置的事实。
- 然而，对于一个没有零元素的通用 $A_{n\times n}$ 矩阵，不难验证，通过连续应用代数余子式展开需要

  $$n!\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

  次乘法来计算 $\det(A)$。
- 即使对于中等大小的 n，这个数值也过大，使得代数余子式展开在计算上不实用。
- 然而，代数余子式在某些理论推导中依然有用，例如以下关于 A^{-1} 的行列式公式。

关于 A^{-1} 的行列式公式

$A_{n\times n}$ 的伴随矩阵定义为 $\text{adj}(A) = \hat{A}^T$，即代数余子式矩阵的转置——一些旧的文献中称之为伴随矩阵。如果 A 是非奇异的，那么

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}^T}{\det(A)} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}.$$

证明：$[A^{-1}]_{ij}$ 是 $Ax = e_j$ 的解中的第 i 个分量，其中 e_j 是第 j 个单位向量。根据克拉默法则，有

$$[A^{-1}]_{ij} = x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

其中 A_i 与 A 相同，除了第 i 列被 e_j 替换。第 i 列的代数余子式展开表示

$$\det(A_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \hat{A}_{ji}.$$

问题：对于 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，确定 A^{-1} 的通用公式。

解答：

$$\text{adj}(A) = A^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

且 $\det(A) = ad - bc$，因此

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

? 打错了吧 $\text{adj}(A) = \hat{A}^T$