期中考试复习专题讲座

一、期中考试常考知识点

二、常考知识点例题选讲

一、期中考试常考知识点

一）数列极限

1、利用单调有界准则或奇偶子数列与数列的关系判断数列极限存在并求极限

（2015 年）设$x_1=2, x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}}(n>1)$, 证明 :$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其值

（2016）设$x_1>0, x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+10}{3n-2}(n>1)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2、利用夹逼准则求数列极限

1）（2009）$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

2）（2009）利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 及夹挤准则证明：

数列 $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$ 的极限为 $\ln 2$

3）（2010）$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$

4）（2009）（1）设 n 为正整数，证明：$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

（2）利用上述不等式研究数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

(不要求计算极限)

5)(2012) $I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

6)(2012) $I=\lim_{n\to\infty}(1+n^2+2^n)^{\frac{1}{n}}$

7)(2012) $I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

7)(2016)设$x_1>0$, $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{n+10}{3n-2}(n>1)$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$

8）（2013年）$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{4n}$

9）（2011年）$I=\lim_{n\to\infty}\frac{2011^n}{n!}$

3、数列收敛的定义、数列的性质（有界、比较性质）

1)(2011)分别叙述数列有界和收敛（以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 为例)

的定义，并证明：收敛数列是有界数列

2)(2012)证明：当 n 充分大时，$\sqrt[n]{1+n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)<\frac{1}{n^2}$

二、函数极限、连续及相关问题

1、求幂指函数的极限问题

1)(2015) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ 2)(2014) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

3)(2012) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^{x}-1}}$ 4)(2011) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

5)(2010) $I=\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ 6)(2009) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$

7)(2016) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ($a,b,c>0$是常数)

2、利用无穷小量的等价、洛必达法则、常见的极限公式、运算法则求极限

1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{x^2}$

2) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$

3) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x}-e^{e^{\sin x}}}{x-\sin x}$

4) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

5) $I=\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

6) $I=\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{\sin x^2}$

7) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-3^{x^2}}{(2^x-3^x)^2}$

8) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$

9) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$

10) $I=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\ln(x\sin\dfrac{1}{x})$

11) (2016) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(\cos x+1)\ln(1+x)}$

3、利用极限的概念及性质求极限相关问题

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{1-x}-ax-b\right)=0$,求常数$a,b$的值　（2016）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$,求常数$a,b$的值

4、无穷小量的主部和阶及同阶无穷小相关的求解问题

1）求$x\to0$时,无穷小$u(x)=\arcsin x-x$的主部及阶数

2）求无穷小量$u(x)=\cos 2x-\frac{1}{e^{2x^2}}(x\to0)$的主部及阶数

3）设当$x\to0$时,$u(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1-x}-1$与$cx^k$等价，求$c,k$的值

4）设当$x\to0$时,$u(x)=\sqrt[4]{1-b\arctan x^2}$与$v=\ln\cos x$等价，求$b$的值

5）设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x\ln(1+x^2)}=2$,求$c,k$使得$x\to0$时$f(x)$与$cx^k$等价

6）(2016)求$x\to0$时,无穷小$u(x)=\arcsin x-\arctan x$的主部及阶数

5、分段函数或其导数在分段点处的连续性、可导性、可微性和函数单侧极限等问题

1)设$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，讨论导函数$f'(x)$在点$x=0$处的连续性

2)设$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arccot} x^2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，(1)讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性;2)求$f''(0)$

3)确定自然数n的范围，使$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$的导函数$f'(x)$在$x=0$处的连续

4)设$g(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ bx, & x\geq 0 \end{cases}$在$x=0$处可导，$f(x)=\sin x$，求$b$以及$\dfrac{df(g(x))}{dx}\Big|_{x=0}$

5)求函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$的导函数$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性

6)(2016))求函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$的导函数$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性

(2016) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

7)(2016))由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域上连续？

认为可以请证明，不可以举反例说明

6、求函数间断点及间断点类型的相关问题

1）设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$,问$a$为何值时，$x=0$是$f(0)$的间断点,并指出该间断点的类型

2）求$f(x)=\dfrac{x\sin(1-x)}{|x|(x^2-1)}$的间断点,并判断其类型 3）指出$f(x)=(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}$的间断点与类型

4）设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$,求出其所有间断点，并说明间断点的类型

5）设$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$,指出其间断点，并说明间断点的类型

6）设函数$f(x)=\dfrac{|x|}{\tan x}$,指出其间断点，并说明间断点的类型

7）设函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|(x-\pi)}$,求出其所有间断点，并说明间断点的类型

8）（2016）指出函数$f(x)=\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}$的间断点，并判断间断点的类型

7、利用导数定义、无穷小量等价等求函数或数列极限

1）设曲线$y = f(x)$在原点与$y=\sin x$相切，求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+f(\frac{1}{n}))^n$

2）设曲线$y = f(x)$在原点与$y=\arctan 2x$相切，求$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n})$

3）设$f(x)$在$x=2$处可导，$f(2)\neq 0$，$f'(2)$为已知，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}\right]^x$

8、利用函数连续性的定义证明函数连续性的问题

1、(2013)设$f(x)$在$x=0$连续，$f(0)\neq 0$，且对一切x, y有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明$f(x)$处处连续

9、介值定理或零点定理判断方程根的问题

1)(2009)若a, b, c为正数，讨论方程$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}=0$的根的个数

2)(2013)方程$\ln x-\dfrac{x}{e}+1=0$有几个实根？给出你的论证。

三、导数及导数相关问题

1、求函数及复合函数在某一点的导数或微分及高阶导数

1）（2014）已知$y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right),\ f'(x)=\arcsin x^2$，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

4）（2015）设$y=\ln\sqrt{\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}}$，求$y'(1)$

2）（2014）设$y=\dfrac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5e^x}$，使用对数求导法计算导数$y'|_{x=1}$

3）（2014）设$f'(x)$处处连续，$g(x)=f(x)\sin^2 x$，求$g''(0)$

6）（2012）设$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$，求$f'($

5）（2013）求$f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)$

7）（2012）设$f(x)=\ln\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$，求$f'(0)$

8）（2009）设$y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right),\ f'(x)=\arctan x^2$，求$y'(0)$

10）（2009）求$y=x\ln(1+x)$在$x=0$点的5阶导数$y^{(5)}(0)$

9）（2009）设函数$y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$，求$y'(0)$

11）（2010）设函数$y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{\arcsin x}}{1+e^{\arcsin x}}}$，求$y'(0)$

12）（2011）设函数$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，求$dy(1)$

13）（2016）设$v=f(u)$有反函数$u=\varphi(v)$，满足$f(0)=0$，且$\varphi(v)$是可导的，在$v=0$的某个邻域中有$\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$，求复合函数$y=f(2x+x^2)$在$x=0$的导数

14）（2012）设$f(x)=\dfrac{3x}{2x^2+x-1}$，求$f^{(n)}(0)$

2、求函数及复合函数的导数及高阶导数和微分问题

1)(2009)设函数$y=\ln(\sec x+\tan x)$,求y''

2)(2009)设$y=(1+\sin^2 x)^x$,求dy

3)(2010)设函数$y=f(\sin^2 x)$,其中f具有二阶导数,求y'及y''

4)(2010)设函数$x=y^y$,求微分dy

5)(2011)设$f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+5x+2}$,求$f^{(n)}(x)(n>1)$

6)(2014)设$f(x)$二阶可导,计算以下函数的导数y'和y''

(1) $y=f(x^2)$ (2) $y=(f(x))^2$

7)(2015)设函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$,求$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{d(\cot x)}$

8)(2015)设$y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$,求$y^{(10)}(x)$

9)(2016)设$y=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}\sqrt{e^x+1}}(x>-1)$,求微分$dy|_{x=0}$

10)(2016)设$y=\ln(2x^2-3x+1)$,求$y^{(10)}(0)$

3、求参数方程所确定的函数的导数及高阶导数问题

1）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\ln\sin t \\ y=\ln\cos t \end{cases}(0<t<\dfrac{\pi}{2})$确定,求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

2）(2010）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=arcantt \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$确定,求$\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}$

3）(2011）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}(0<t<\dfrac{\pi}{2})$确定,求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}$

4）(2012）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\ln 2t \\ y=t^m \end{cases}$给出,计算$\dfrac{d^ny}{dx^n}|_{t=1}$

5）(2013）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=t+t^2 \\ y=te^t \end{cases}$给出,计算$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

6）(2014）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$给出,计算$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

7）(2015）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$给出,计算$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

8）(2016）设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$确定,求$\dfrac{dy}{dx}|_{\frac{\pi}{4}},\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}$

4、求方程所确定的隐函数的导数或微分问题

1）（2009）设函数$y=y(x)$由方程$e^{xy}+\tan\frac{x}{y}=y$确定,求$y'(0)$

2）（2010）设函数$x=y^{y}$,求微分dy

3）（2010）设函数$y=y(x)$由方程$e^{y}+6xy+x^{2}=1$确定,求$y''(0)$

4）（2011）设函数$y=y(x)$由方程$x^{2}-xy+y^{2}=1$确定,求y', y''

5）（2012）设函数$y=y(x)$由方程$xe^{f(y)}=x^{y}\ln 3$确定, $f(y)$可导,且$f'(y)\neq \ln x$,求dy

6）（2013）设函数$y=y(x)$由方程$y=g(x^{2}+y^{2})$确定, $g(x)$处处可导,且$g'(x)\neq\frac{1}{2y}$,求y'

7）（2014）计算曲线$x^{2}-xy+2y^{2}=2$在点(1,1)处的切线方程

8）（2015）设函数$y=y(x)$由方程$y=\sin(x+y)$确定,求y''

5、求函数的反函数的导数问题

1）（2009）求函数$y=e^{x}+x^{3}$的反函数的一阶导数$\frac{dx}{dy}$和二阶导数$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$

2）（2010）函数$y=f(x)$的反函数为$x=\varphi(y)$, 且$f(1)=2$, $f'(1)=2$, $f''(1)=4$, 求$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}|_{y=2}$

3）（2011）设函数$y=f(x)$的反函数为$x=\varphi(y)$均存在三阶导数, 且$y'\neq 0$, 请推导出反函数的求导公式

$\frac{dx}{dy}, \frac{d^{2}x}{dy^{2}}$和$\frac{d^{3}x}{dy^{3}}$

4）（2014）设$x=g(y)$是$y=\ln x+\arctan x$的反函数, 求$y=\frac{\pi}{4}$处的导数$\frac{dx}{dy}, \frac{d^{2}x}{dy^{2}}$

5）（2015）函数$f(x)=\frac{1}{2^{x}}-x^{3}$, $x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数, 求$\varphi'(y)|_{y=1}$

6、利用导数的定义求函数的导数或其他相关问题

1)(2009)设函数$f(x)$对一切x,y满足$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,且$f'(0)=1$,求$f'(x)$

2)(2010)设$f(x)$在$x=0$处可导,且$g(x)=f(x)(1+|\tan x|)$,证明:

$g(x)$在点$x=0$处可导的充要条件是$f(0)=0$

3)(2011)设函数$\varphi(x)$在$x=1$处连续,且任给自然数n,有$\varphi(\frac{n}{n+1})=\sqrt[n]{n}$。

(1)求$\varphi(1)$;　　(2)设$f(x)=(x-1)\varphi(x)$,求$f'(1)$

4)(2014)设$f(x)=\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)$,其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是常数,

$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$,已知对一切实数$x$,有$|f(x)|\le|x|$,试证:$\left|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n\right|\le$

5)(2016)设$f(x)$在$x=a$处连续,$F(x)=(e^x-e^a)f(x)$,求$F'(a)$

6)(2016)设$f(x)$在$x=1$处二阶可导,且当$x\to0$时,$f(1+x)-3f(1-x)$与$3x^2$等价,

求$f(1)$,$f'(1)$,$f''(1)$

7、函数相关变化率问题

(2013)设圆锥形容器的高为$8\,m$，底半径为$R=2\sqrt{2}\,m$，今向其中注水。设当水深$h=6\,m$时，水面上升的改变率为$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{4}{\pi}\,m/\min$，求此时水的体积的改变率$\dfrac{dV}{dt}$

(2015)一架巡逻直升机在距地面$3\,km$的高度以$120\ km/h$的匀速沿一条水平笔直的高速公路向前飞行，飞行员观察到迎面驶来一辆汽车。设汽车行进的速度为匀速，当直升机与汽车间的距离为$5\,km$时通过雷达测出此距离以$160\ km/h$的速率减少，试求汽车行进的速度

(2014)一个13英尺长的梯子斜靠在墙边上，从墙角到梯子底端的地面长度为12英尺，当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时，梯子底端沿地面移动的速度是5英尺/秒，问由梯子、墙面和地面所围成的直角三角形的面积的变化率是多少？

(2016)一根长为5米的竹竿斜靠着墙，地面与墙面垂直，竹竿在地面的投影也与墙面垂直。设墙面和地面是光滑的，使得竹竿顶端A沿着墙壁竖直往下滑动，同时，底端B沿着其投影线向外滑动。如果在底端B距离墙根为3米时，点B的速度为4米/秒，问此时顶端A下滑的速度为多少？

四、微分中值定理及相关问题

1、有关拉格朗日中值定理求极限或推论求函数或证明函数等式问题

1)(2009)由拉格朗日中值定理知 $\sqrt{1+x}-1=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x\theta}}\cdot x(0<\theta<1)$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

2)(2010)设函数 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f'(x)=\lambda f(x)$, $f(0)=1$, 证明：$f(x)=e^{\lambda x}$

3)(2011)证明：当 $x\geq 1$ 时，有 $\arctan x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$

4)(2011)如果记 $\xi=\theta x, 0<\theta<1$, 则拉格朗日中值公式 $f(x)-f(0)=xf'(\xi)$ 可以写作：

$f(x)-f(0)=xf'(\theta x), 0<\theta<1$, θ 的大小通常与 x 相关。（1）若 $f''(0)\neq 0$, 试证：

$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$; (2)设 $f(x)=\arctan x$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

5)(2016)设 $f(x)$ 满足 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在, 求 $\lim\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

6)(2014)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$, 求 $\lim\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$

2、利用介值定理或微分中值定理证明有关中值的等式问题

1)(2009)设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导, $f(0)=0$, $f(x)$在$(0,1)$内非零。证明:

至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

2)(2010)设$n>1$为正整数,函数$f(x)$在$[0,n]$上连续,且$f(0)=f(n)$,证明:

存在$\alpha\in[0,n-1]$,使$f(\alpha)=f(\alpha+1)$

3)(2010)设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, $f(a)=0$,证明:对正整数n,

至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=\dfrac{(b-\xi)f'(\xi)}{n}$

4)(2011)设$f(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内可微, $f(0)f(2)>0$ $f(0)f(1)<0$,,证明:

至少存在一点$\xi\in(0,2)$,使$f'(\xi)=f(\xi)$

5)(2012)设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且$f'(x)\neq 0$,试证存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$$

2、利用介值定理或微分中值定理证明有关中值的等式问题

6）(2012）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$，证明存在$x_0\in[0,1]$，使得$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{4})$

7）(2013）设$0<x_1<x_2$，证明：$x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=(\ln\xi-1)(x_1-x_2)$，其中$\xi$在$x_1$与$x_2$之间

8）(2014）设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

（9）(2015）设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：

（1）至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$;

（2）至少存在一点$\eta\in(a,b)$，使$f''(\eta)=0$;

（10）(2016）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$。设正整数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。证明：存在三个不相等的实数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$

二、常考知识点例题选讲

解：$\because \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2((\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) + n\pi)$

$$= [(-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+n} - n)]^2 = [\sin\frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n}\pi]^2$$

$$= \sin^2\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}\pi = \sin^2\frac{1}{\sqrt{1+1/n} + 1}\pi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{1}{\sqrt{1+1/n} + 1}\pi = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$$

2)(2016)设$x_1>0,\ x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+10}{3n-2}(n>1)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解法一：（夹逼准则）

当$n>22$时,$0<x_{n+1}<\dfrac{1}{2}x_n<\dfrac{1}{2^2}x_{n-1}<\cdots<\dfrac{1}{2^{n-21}}x_{22}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-21}}x_{22}=0$ $\therefore$由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

解法二：（单调有界准则）

当$n>6$时,$0<x_{n+1}<x_n<\cdots<x_6$ 故当$n>6$时，数列$\{x_n\}$单调递减有下界0

由单调有界准则知：数列$\{x_n\}$极限存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对$x_{n+1}=\dfrac{n+10}{3n-2}x_n$两边取极限得

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+10}{3n-2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,即$a=\dfrac{1}{3}a$ $\therefore a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

3）（2015 年）设$x_1=2, x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}}(n>1)$, 证明 :$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其值

解 :$\because x_1=2, x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}}(n>1) \therefore 2\le x_n<3$

又$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}-x_n}{x_n x_{n-1}}$，故$\{x_n\}$不单调

又由$x_{n+1}-x_{n-1}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-2}}=\dfrac{x_{n-2}-x_n}{x_n x_{n-2}}=\dfrac{x_{n-1}-x_{n-3}}{x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}$ 知奇子数列$\{x_{2k-1}\}$与偶子数列$\{x_{2k}\}$分别单调

由$x_1=2, x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}}$得$x_2=\dfrac{5}{2}, x_3=\dfrac{12}{5}, x_4=\dfrac{29}{12},\cdots$ 知偶子数列$\{x_{2k}\}$单调增，奇子数列$\{x_{2k-1}\}$单调减

由单调有界准则得：奇子数列$\{x_{2k-1}\}$与偶子数列$\{x_{2k}\}$均收敛

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1}=l_1, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k}=l_2$,则在$x_{2k+1}=2+\dfrac{1}{x_{2k}}, x_{2k}=2+\dfrac{1}{x_{2k-1}}$两边取极限得

$l_1=2+\dfrac{1}{l_2}, l_2=2+\dfrac{1}{l_1}$,解得$l_1=l_2=1+\sqrt{2}$

因此数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1+\sqrt{2}$

4)求函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$的导函数$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$　　$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$

$\therefore\ f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},\ \ x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$为初等函数，所以连续

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$不存在,所以$f'(x)$在$x=0$处不连续

5)(2014) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解： $I=\lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{\frac{x^2}{2}}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2(\tan x-x)}{x^3}\right.$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2(\sec^2 x-1)}{3x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2(\tan^2 x)}{3x^2}\right)=e^{\frac{2}{3}}$$

6） $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$

解： $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)}{x^3}\lim_{x\to 0}e^{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

7）（2016 ）设$v = f(u)$有反函数$u = \varphi(v)$, 满足$f(0) = 0$, 且$\varphi(v)$是可导的, 在$v = 0$的某个邻域中有$\varphi'(v) = \dfrac{1}{2 + \sin v}$,求复合函数$y = f(2x + x^2)$在$x = 0$的导数

解：$y' = f'(2x + x^2) \cdot (2 + 2x)$

$$y'(0) = f'(0) \cdot (2 + 0) = 2f'(0)$$

$\because v = f(u)$的反函数为$u = \varphi(v)$, $f(0) = 0$, 且$\varphi'(v) = \dfrac{1}{2 + \sin v}$

$$\therefore f'(u) = \frac{1}{\varphi'(v)} = 2 + \sin v$$

从而$f'(0) = \dfrac{1}{\varphi'(0)} = 2 + \sin 0 = 2$

故$y'(0) = 2f'(0) = 4$

8）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x\ln(1+x^2)}=2$，求 c, k 使得 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 cx^k 等价

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x)}{\sin x}}{x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^4}$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x\ln(1+x^2)}=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^4}=2$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{4x^4}=1$

因而 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $4x^4$ 等价

故 $c=4, k=4$

9）（2016 ）指出函数$f(x)=\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}$的间断点，并判断间断点的类型

解：函数$f(x)$的间断点为$x=2, x=0, x=1$

$$\because \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}=\infty$$ $\therefore x=0$是$f(x)$的第二类间断点中的无穷间断点

$$\because \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{|x-2|x(x-1)}=-1$$

$\therefore x=1$是$f(x)$的第一类间断点中的可去间断点

$$\because \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x-1)}{|x-2|x(x-1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)x(x-1)}=\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{|x-2|x(x-1)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-1)}{|x-2|x(x-1)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)x(x-1)}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore x=2$是$f(x)$的第一类间断点中的跳跃间断点

(10)(2016)设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$。设正整数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。证明：存在三个不相等的实数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$

证明：$\because$ $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，$0<\lambda_1<1$，

由介值定理得$\exists\eta_1\in(0,1)$，使得$f(\eta_1)=\lambda_1$

又$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，$\exists\eta_2\in(\eta_1,1)$，使得$f(\eta_2)=\lambda_1+\lambda_2$

$f(x)$在$[0,\eta_1]$，$[\eta_1,\eta_2]$，$[\eta_2,1]$上分别应用拉格朗日中值定理知：

$\exists\xi_1\in(0,\eta_1)$，使得$f(\eta_1)-f(0)=f'(\xi_1)\eta_1$，即 $\lambda_1=f'(\xi_1)\eta_1$

$\exists\xi_2\in(\eta_1,\eta_2)$，使得$f(\eta_2)-f(\eta_1)=f'(\xi_2)(\eta_2-\eta_1)$，即$\lambda_2=f'(\xi_2)(\eta_2-\eta_1)$

$\exists\xi_3\in(\eta_2,1)$，使得$f(1)-f(\eta_2)=f'(\xi_3)(1-\eta_2)$，即$\lambda_3=f'(\xi_3)(1-\eta_2)$

$$\therefore\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=\eta_1+(\eta_2-\eta_1)+(1-\eta_2)=1$$

证毕

11）设$f(x)$满足$f'(0)=0$，$f''(0)$存在，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=f''(0)\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

思考：此题能否用洛必达法则做？

12）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，$f(1)=f(0)=0$，

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$

解：$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，$f(1)=f(0)=0$，

由$Rolle$ 定理得$\exists\eta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)=0$

令$F(x)=(x-1)^2f'(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，

且$F(1)=0$，$F(\eta)=(\eta-1)f'(\eta)=0$

由$Rolle$ 定理得$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$

而$F'(x)=2(x-1)f'(x)+(x-1)^2f''(x)$

$\therefore 2(\xi-1)f'(\xi)+(\xi-1)^2f''(\xi)=0$

即$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$

应用罗尔定理，关键要构造函数，常见的几种类型：

要证明的结论	构造函数F(x)
$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$	$F(x)=x\,f(x)$
$n\,f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$	$F(x)=x^{n}f(x)$
$n\,f(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0.$	$F(x)=(x-b)^{n}f(x)$
$-n\,f(\xi)+(b-\xi)f'(\xi)=0.$	$F(x)=(b-x)^{n}f(x)$
$n\,f'(\xi)+(\xi-b)f''(\xi)=0.$	$F(x)=(x-b)^{n}f'(x)$
$f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)=0.$	$F(x)=f(x)g(x)$
$2f'(\xi)f(1-\xi)-f'(1-\xi)f(\xi)=0.$	$F(x)=f^{2}(x)f(1-x)$
$f(\xi)f''(\xi)+[f'(\xi)]^{2}=0.$	$F(x)=f(x)f'(x)$
$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0.$	$F(x)=f(x)/x$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0.$	$F(x)=f(x)/g(x)$

思考：$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$　　$F(x)=(x-1)^{2}f'(x)$

$$f'(\xi)+f(\xi)=0. \qquad F(x)=e^{x}f(x)$$

$$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0. \qquad F(x)=e^{g(x)}f(x)$$

$$f'(\xi)-(\xi-1)^{2}f''(\xi)=0. \qquad F(x)=e^{\frac{1}{x-1}}f(x)$$

$$kf'(\xi)+f(\xi)=0. \qquad F(x)=e^{\frac{1}{k}x}f(x)$$

$$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0. \qquad F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$$

$$\xi f'(\xi)+(1-\xi)f(\xi)=0. \qquad F(x)=xe^{-x}f(x)$$

13）设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数, $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明：

（1）方程$f(x)=0$在$(0,1)$内至少存在一个根；

（2)方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少存在两个不同的实根

证明:(1) $\because$ $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导 $\therefore$ $f(x)$在$[0,1]$上连续

又$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 由极限的保号性知$\forall x\in(0,\delta)$, 有又$\dfrac{f(x)}{x}<0$, 从而$f(x)<0$,

即存在$x_0\in(0,\delta)$, 使得$f(x_0)<0$, 又$f(1)>0$, 且$f(x)$在$[x_0,1]$上连续

由零点定理知：至少存在一个$\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$, 使得$f(\xi)=0$

故方程$f(x)=0$在$(0,1)$内至少存在一个根

（2）由$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$及$f(x)$在$[0,1]$上可导可得$f(0)=0$

又由(1)得$f(\xi)=0$，且有题意得$f(x)$在$[0,\xi]$上可导，

由罗尔定理得存在$\eta\in(0,\xi)$，使得$f'(\eta)=0$

令$F(x)=f(x)f'(x)$，则$F(x)$在$[0,\eta]$，$[\eta,\xi]$上可导

且有$F(0)=f(0)f'(0)=0$，$F(\eta)=f(\eta)f'(\eta)=0$，$F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$

由罗尔定理得存在$\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\xi)$，使得$F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$，

又$F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$，

因而有$f(\xi_1)f''(\xi_1)+[f'(\xi_1)]^2=0$，$f(\xi_{,2})f''(\xi_2)+[f'(\xi_2)]^2=0$

即方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在(0,1)内至少存在两个不同的实根

设$f(x)$有二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=0,\ f''(0)=6$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$