2013-1 期中试卷解答

1. 解法 1：$x_n = x_{n-1}\dfrac{2n-1}{4n} = \dfrac{x_{n-1}}{2}\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < x_{n-1}$，以及 $x_n > 0$，所以数列 x_n 单调减且有下界。从而 $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，由通项公式得 $l = \dfrac{l}{2}$，$\therefore l = 0$

解法 2：由于 $0 < {x_n}^2 < \left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{12}\cdots\dfrac{2n-1}{4n}\right)\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{12}{7}\cdots\dfrac{4n}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$，

因 $\dfrac{1}{2n+1}\to 0$，由夹挤原理，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

解法 3：$0 < \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{12}\cdots(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n}) < \dfrac{1}{2^n}$，因 $\dfrac{1}{2^n}\to 0$，由夹挤原理，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2. 解法 1　基于等价替换 [3 分]和极限非零的因式极限可以单算，得

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}[(\frac{2}{3})^{x^2}-1]}{(3^x)^2[(\frac{2}{3})^x-1]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{[(\frac{2}{3})^{x^2}-1]}{[(\frac{2}{3})^x-1]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\frac{2}{3}}{x^2\ln^2\frac{2}{3}} = \frac{1}{\ln 2-\ln 3}\text{。}$$

解法 2：基于罗比达法则极限非零的因式极限可以单算，得

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{2x(2^{x^2}\ln 2-3^{x^2}\ln 3)}{2(2^x-3^x)(2^x\ln 2-3^x\ln 3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-3^x}\lim_{x\to 0}\frac{(2^{x^2}\ln 2-3^{x^2}\ln 3)}{(2^x\ln 2-3^x\ln 3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x\ln 2-3^x\ln 3} = \frac{1}{\ln 2-\ln 3}$$

3. 解　$l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，　因为 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$，故　$l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$

4. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t(1+t)}{1+2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}[\dfrac{e^t(1+t)}{1+2t}]\cdot\dfrac{dt}{dx} = \{\dfrac{e^t(1+t)}{(1+2t)}+\dfrac{e^t[(1+2t)-2(1+t)]}{(1+2t)^2}\}\cdot\dfrac{1}{1+2t} = \dfrac{te^t(3+2t)}{(1+2t)^3}$

6. 方程两边对 x 求导：　$y' = h'(x^2+y^2)(2x+2yy')$，$y' = \dfrac{2xh'(x^2+y^2)}{1-2yh'(x^2+y^2)}$　。

7. 解法 1　直接法求展开式：$f(0)=0$，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}\cos\ln(1+x)$，$f'(0)=1$，

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\cos\ln(1+x)-\dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\ln(1+x)$，$f''(0)=-1$，

类似地求得 $f'''(0)=1$，套用台劳公式得：$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$。

解法 2 间接法求展开式：利用已知的泰勒展开式：因为

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ 所以

$$\sin\ln(1+x)=[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)]-\frac{1}{6}[x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)]^3+o(x^3)=x-\frac{x^2}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)。$$

8. 解法 1 基于台劳公式中系数与导数的关系。因为

$$\frac{x}{1+2x}=x[\sum_{k=0}^{n}(-2x)^k+o(x^n)]=\sum_{k=0}^{n}(-2x)^k x+o(x^{n+1}),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的台劳公式的第 n 项系数为 $a_n=(-2)^{n-1}$，于是 $f^{(n)}(0)=n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$。

解法 2 基于莱布尼兹规则和已知 n 阶导数公式求。

$$\left(\frac{1}{1+2x}\right)^{(n)}\bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^n2^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\bigg|_{x=0}=(-1)^n2^n n!\ ,\ f^{(n)}(0)=x(\frac{1}{1+2x})^{(n)}\bigg|_{x=0}+n(\frac{1}{1+2x})^{(n-1)}\bigg|_{x=0}$$

于是 $f^{(n)}(0)=n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$。

解法 3 基于函数化简和已知 n 阶导数公式求。 因为 $f(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{1+2x})$，

$$f^{(n)}(0)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1+2x})^{(n)}\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n2^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\bigg|_{x=0}=(-1)^{n-1}2^{n-1}n!$$

9. 斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$。因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x})-1]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}\text{（令}\frac{1}{x}=t\text{）}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{e+t}=\frac{1}{e}\text{ 。}$$

10. 间断点是 $x=1$，$x=0$。$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$，$x=1$ 是跳跃间断点。

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$，$x=0$ 是第二类间断点。

11. 取 $x=y=0$，$f(0)=[f(0)]^2$，$\because f(0)\neq0$，$\therefore f(0)=1$

由于 $f(x)$ 在原点连续，所以 $\lim\limits_{h\to0}(f(h)-1)=0$. $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))$

$$=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0+x_0)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)f(x_0)-f(x_0)]$$

$=f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)-1]=\ f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}(f(h)-1)=0\ \ \therefore f(x)$ 处处连续.

12. 解　设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$，$x>0$，由于 $f(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e^2}<0$，$f(e)=1>0$，$f(e^3)=4-e^2<0$

【两头会出现负值的论据也可以用下式替代：$f(0^+)=-\infty, f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{ex}{e^{x/e}}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex}{e^{x/e}}=-\infty$】

故方程在区间 $(0,e)$ 和区间 $(e,+\infty)$ 内均有实根。 又 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$ 在区间 $(0,e),(e,+\infty)$ 上依次为正，负。于是 $f(x)$ 在区间 $(0,e),(e,+\infty)$ 上依次为严格增，严格减。故所论方程恰好有两个根。

13. 解法 1：依据 1^∞ 未定型 u^v 变化法：$\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$，有

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}-1)}=e^{\frac{1}{f(2)}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{x})-f(2)}{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}$$

解法 2：依据通用未定型 u^v 变化法：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$，有原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{f(2+\frac{1}{x})}{f(2)}}$

因为 $$\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)}{f(2)})=\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}x\left[f(2+\frac{1}{x})-f(2)\right]$$

$$=\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{x})-f(2)}{\frac{1}{x}}=\frac{f'(2)}{f(2)}$$ 故，原式 $=e^{\frac{f'(2)}{f(2)}}$。

14. 依题意有 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{8-h}{8}$，$r=\dfrac{R}{8}(8-h)$，$V=\dfrac{8}{3}\pi R^2-\dfrac{8-h}{3}\pi r^2=\dfrac{8}{3}\pi R^2-\dfrac{(8-h)^3}{3}\pi\dfrac{R^2}{64}$

$\dfrac{dV}{dt}=\pi\dfrac{R^2}{64}(8-h)^2\dfrac{dh}{dt}$，代入条件得 $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{h=6,\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi}}=2m^3/\min$

15. 不等式 $\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$ 可以有不同的等价形式。例如 $e^{2x}(1-x)<1+x$，$1-x<(1+x)e^{-2x}$

或者取对数　$2x<\ln(1+x)-\ln(1-x)$

解法 1：所论问题等价于　$2x<\ln(1+x)-\ln(1-x)$，设 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x$，

则　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{2}{1-x^2}-2>0$，$0<x<1$

于是当 $0<x<1$ 时，由单调性判别法得 $f(x)>f(0)=0$

解法 2：所论问题等价于　$e^{2x}(1-x)<1+x$，设 $f(x)=1+x-e^{2x}(1-x)$，则 $f'(x)=1+e^{2x}(2x-1)$，

$f''(x)=4xe^{2x}>0$，于是当$0<x<1$时，连续使用单调性判别法得 $f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)>f(0)=0$

16. 目标关系变形后等同于 $\dfrac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}$，于是取$f(x)=\dfrac{\ln x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$，在区间$[x_1,x_2]$上应用柯西定理，便有 $\dfrac{\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\dfrac{1-\ln\xi}{\xi^2}(-\xi^2)=\ln\xi-1$，$\xi$在$x_1$与$x_2$之间。化简即得。