2021 ～2022 学年第 一 学期

《 微积分（一)》课程期中卷参考解答

一. 基本计算题(每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求微分方程 $y''+9y=x\cos 3x$ 对应的齐次方程的通解，并写出非齐次方程的待定特解形式.

解 特征方程为 $\lambda^2+9=0$，特征根为 $\lambda=\pm 3i$，

则齐次方程通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$；

非齐次项 $f(x)=x\cos 3x$，$\xi\pm\eta i=\pm 3i$ 是特征复根，

故方程的待定特解形式为 $y^*=(ax+b)x\cos 3x+(cx+d)x\sin 3x$.

2. 设二阶线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=x$，$y_2=x+2e^x$，

$y_3=x+(2+3x)e^x$，求其通解.

解 由条件知 $y_2-y_1=2e^x$，$y_3-y_2=3xe^x$ 为对应的齐次方程的解.

对应的齐次方程的通解为： $\overline{y}=C_1e^x+C_2xe^x$，

原方程的通解为：$y=(C_1+C_2x)e^x+x$.

3. 已知两直线 $L_1:\begin{cases}x-3y+z=0,\\2x-4y+z=-1\end{cases}$ 和 $L_2: x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，求 L_1 与 L_2 之间的距离 d.

解 1 L_1 的方向矢量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}$，$L_2$ 的方向矢量 $\boldsymbol{s}_2=\{1,3,4\}$，

得 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-2,-2,2\}\,//\{1,1,-1\}$，

取 L_1 上的点 $P(-1,0,1)$ 和法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,-1\}$，得到平面方程为 $(x+1)+y-(z-1)=0$，即

$$x+y-z+2=0.$$

取 L_2 上的点 $Q(0,-1,2)$，则 Q 到 $x+y-z+2=0$ 的距离为

$$d=\frac{|-1-2+2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

解 2 L_1 的方向矢量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,-3,1\}\times\{2,-4,1\}=\{1,1,2\}$，点 $P(-1,0,1)$；

L_2 的方向矢量 $\boldsymbol{s}_2=\{1,3,4\}$，点 $Q(0,-1,2)$. 因

$$\overrightarrow{PQ}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以 L_1 与 L_2 异面. 由异面直线的距离公式，得

所求距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4. 设由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，F 有连续偏导且 $F_2'-F_3'\neq 0$，求 $\mathrm{d}z$.

解 **（直接法）** 将方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 对 x,y 分别求偏导，得

$$F_1'-F_2'\frac{\partial z}{\partial x}+F_3'\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,\qquad -F_1'+F_2'\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_3'\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'};$

由此得 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}dx+\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}dy$.

（求全微分法） 将方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 求全微分

$$F_1'\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+F_2'\cdot(\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)+F_3'\cdot(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)=0,$$

解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}x+\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}y$.

5. 求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ (x-1)^2+y^2=1\end{cases}$ 在点 $P(1,1,\sqrt{2})$ 处的法平面方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$，$G(x,y,z)=(x-1)^2+y^2-1$，

则两个曲面的法矢量分别为：

$\boldsymbol{n}_F=\{x,y,z\}_P=\{1,1,\sqrt{2}\}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n}_G=\{x-1,y,0\}_P=\{0,1,0\}$，

切矢量 $\vec{T}=\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G\big|_P=\{-\sqrt{2},0,1\}$，

法平面方程 $-\sqrt{2}(x-1)+0\cdot(y-1)+(z-\sqrt{2})=0$ 即 $z=\sqrt{2}x$

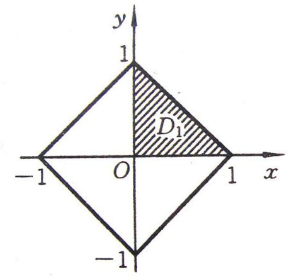
6. 求椭圆曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4 \end{cases}$上距离原点最近的点.

解 设拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

解方程组$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$ 得驻点$M_1(1,1,2)$，$M_2(-2,-2,8)$

比较后可知点$M_1(1,1,2)$为距离原点最近的点.

7. 计算$I=\iint\limits_D (x^2y^2+x\sin(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为$|x|+|y|\le 1$.



解 由于D关于y轴对称，$x\sin(x^2+y^2)$是x的奇函数，所以

$\iint\limits_D x\sin(x^2+y^2)dxdy=0$；

又D关于坐标轴对称，x^2y^2 既是x的偶函数，又是y的偶函数，所以

$I=4\iint\limits_{D_1} x^2y^2dxdy$（ D_1是D中第一象限部分）

$=4\int_0^1 x^2\,dx\int_0^{1-x} y^2\,dy$

$=\dfrac{1}{45}$.

8. 设平面区域D由直线$y=x$, 圆弧$y=1+\sqrt{1-x^2}$ 及y轴所围成，计算$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$.

解 用极坐标变换. $D:\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$， $0\le r\le 2\sin\theta$，

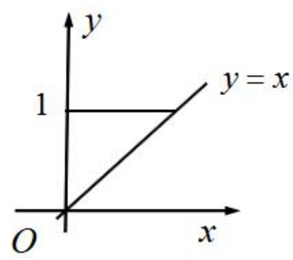
$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin^5\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d(\sin\theta)$$

$$=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\right]=\frac{7}{12}$$

9. 求二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

解 按所给积分次序困难，交换积分次序.

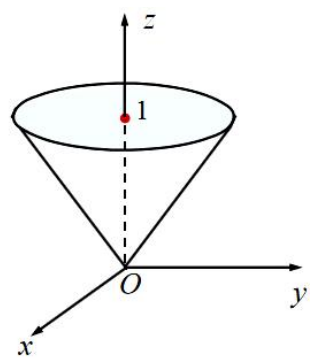


$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

10. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

解 利用球面坐标



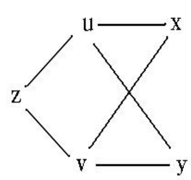
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{1/\cos\varphi}\frac{1}{\rho}\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\sin\phi\cdot\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi=(\sqrt{2}-1)\pi.$$

二. 综合题(每小题 8 分，共 40 分)

11. 设变换 $\begin{cases}u=x-2\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为以 u,v 为自变量的方程，求新方程形式.

解 z 是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的复合函数：



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{-1}{\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{-2}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

所以变换后的方程为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

12. 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处

（1） 连续性；（2）偏导数是否存在；（3）是否可微.

解（1）因为 $0\le f(x,y)=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\le\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2） 因为 $f(x,0)=0$，所以 $f_x(0,0)=0$；同理 $f_y(0,0)=0$；

（3）因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}$，

当取 $\Delta y=\Delta x\to 0$ 时，上式 $=\frac{1}{4}\neq 0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

13. 求常数 a,b,c 的值，使函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 x 轴正向的方向导数取得最大值 64.

解 $f_x'(x,y,z)=ay^2+3cx^2z^2, f_y'(x,y,z)=2axy+bz, f_z'(x,y,z)=by+2cx^3z$，

梯度 $gradf(1,2,-1)=(4a+3c,4a-b,2b-2c)$

设 $\vec{l}=(1,0,0)$，则 $\cos\alpha=1,\cos\beta=0,\cos\gamma=0$，

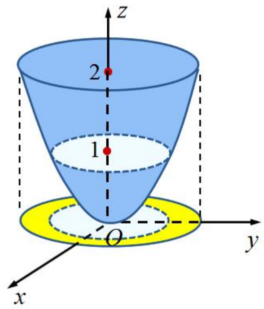
故 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2,-1)}=f_x'(1,2,-1)\cos\alpha+f_y'(1,2,-1)\cos\beta+f_z'(1,2,-1)\cos\gamma=4a+3c$，

方向导数沿梯度的方向达到最大值，且其最大值为梯度的模，据题意有

$$\begin{cases} 4a+3c=64 \\ 4a-b=0 \\ 2b-2c=0 \end{cases},$$

故 $a=4, b=c=16$ 。

14. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的区域.



解 1 旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，

采用截面法，积分区域 Ω 与平面 $Z=z$ 的截面的面积为 $2\pi z$，

故 $\mathrm{I}=\int_1^2 z\,dz \iint\limits_{D(z)} dxdy=\int_1^2 z\pi\cdot 2zdz$

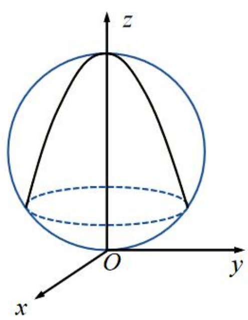
$$=\frac{14}{3}\pi$$

解 2 旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，

采用投影法，$\mathrm{I}=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}} rdr\int_1^2 zdz+\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\sqrt{2}}^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 zdz$

$$=\frac{14}{3}\pi$$

15. 曲面 $x^2+y^2+z=4$，将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4z$ 分为两部分，求这两部分的体积比.



解 设球体两部分的体积分别为 V_1，V_2，

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=4z \end{cases}$ 得交线 $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ z=1 \end{cases}$

$$V_1=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} rdr\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{4-r^2} dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(2-r^2+\sqrt{4-r^2})rdr=\frac{37}{6}\pi$$

$$V_2=\frac{32}{3}\pi-V_1=\frac{27}{6}\pi$$

故$V_1:V_2=37:27$