微积分（一）期中考试试卷答案和评分标准

【注意】阅卷工作由助教负责，要求一周内完成，将成绩登记到平时成绩记载单和电子表格上。发现解答有误请联系任课老师。

【考试日期】2019-11-17.

一、基本计算（要有过程，每小题6分，共60分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+3\cos^2 n}$.

解 显然 $\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{2\sin^2 n+3\cos^2 n}\le\sqrt[n]{3}$， [其他上界比如$\sqrt[n]{5}$不影响极限计算] （3分）

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$ 及夹逼定理知，原式$=1$. （6分）

2. 当$x\to 1$时，求$u=\sqrt[3]{x^2}-1$关于基本无穷小$x-1$的阶数与主部.

解 $\sqrt[3]{x^2}-1=\left(1+x^2-1\right)^{1/3}-1\sim\dfrac{x^2-1}{3}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{3}\sim\dfrac{2}{3}(x-1)$， （5分）

或 $\sqrt[3]{x^2}-1=\left(1+(x-1)\right)^{2/3}-1\sim\dfrac{2}{3}(x-1)$，或 $\sqrt[3]{x^2}-1=e^{\frac{2}{3}\ln x}-1\sim\dfrac{2}{3}\ln x\sim\dfrac{2}{3}(x-1)$，

故阶数为1，主部为$\dfrac{2(x-1)}{3}$. （6分）

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\ln\cos x}$.

解

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{-\frac{1}{2}x^3}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$ （6分）

或 $l=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=-2\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\}=-\dfrac{2}{3}$，

或用泰勒公式.[此题和下一题方法都很多，按步骤酌情给分]

4. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x-\sin x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$， （4分）

所以 $l=\sqrt{e}$. （6分）

5. 设 $f(x)=x^{\tan x}$. 求 $f'(\frac{\pi}{4})$.

解 利用对数求导法得 $f'(x)=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x})$. （4分）

代入$x=\frac{\pi}{4}$得$f'(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{4}$. （6分）

6. 求曲线$\cos x+\ln(y-x)=y^2$在点$(0,1)$处的切线方程.

解 方程两边对x求导得到

$$-\sin x+\frac{1}{y-x}(y'-1)=2yy'. \quad （4分）$$

代入$x=0,y=1$解得$y'(0)=-1$. 切线方程为$x+y=1$. （6分）

7. 设函数$f(x)$二阶可导，求$y=f(\sin x)$的二阶导数.

解 $y'=f'(\sin x)\cos x$. （2分）

$y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$. （6分）

8. 设 $y=x\ln x$，求$y^{(6)}$.

解法一 根据 Leibniz 法则得到

$y^{(6)}=x(\ln x)^{(6)}+6(\ln x)^{(5)}$ （3分）

$=x\left(\frac{1}{x}\right)^{(5)}+6\left(\frac{1}{x}\right)^{(4)}=\frac{24}{x^5}$ （6分）

解法二 $y^{(6)}=(1+\ln x)^{(5)}=(\frac{1}{x})^{(4)}=\frac{24}{x^5}$. [每一步得2分]

9. 求a,b的值使得函数$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x<0 \\ b-\sin 2x, & x\geq 0 \end{cases}$在点$x=0$连续并且可导.

解 直接得到$f(0^+)=b, f(0^-)=1$.所以$b=1$. （3分）

求导得到$f'_+(0)=-2, f'_-(0)=a$.所以$a=-2$. （6分）

10. 设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=t+\ln t \end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{t+1}{t(2t+2)}=\frac{1}{2t}$. （2分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1/2t)'}{2t+2}=\frac{-1}{4t^2(t+1)}$. （6分）

二、综合题（每小题6分，共30分）

11. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$. 指出 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

解 函数 $f(x)$ 的间断点为 $0,-1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty,\ f((-1)^+)=-\frac{\pi \mathrm{e}}{2},\ f((-1)^-)=\frac{\pi \mathrm{e}}{2}. \qquad (3\text{分})$$

所以 $x=0$ 是第二类间断点. $x=-1$ 是第一类间断点，是跳跃间断点. （6分）

12. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时，方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

证 当 n 为奇数时, 显然 $f(+\infty)=+\infty, f(-\infty)=-\infty$. （2分）

于是存在 x_1,x_2 使得 $f(x_1)>0, f(x_2)<0$. （4分）

函数 $f(x)$ 显然连续. 根据介值定理方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根. （6分）

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，$f(2)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(2+\frac{1}{n})}{f(2)}\right]^n$.

解 $$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{f(2)}=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f(2+\frac{1}{n})}{f(2)}-1\right]=\frac{1}{f(2)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(2+\frac{1}{n})-f(2)}{\dfrac{1}{n}}=\frac{f'(2)}{f(2)}, \qquad (5\text{分})$$

或 $$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{f(2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left|f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right|-\ln|f(2)|}{1/n}=\{\ln|f(x)|\}'_{x=2}=\frac{f'(2)}{f(2)},$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{\frac{f'(2)}{f(2)}}$. （6分）

14. 设一个雪球以 $2\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10cm 的时候半径变化的速率.

解 根据几何关系得到 $V=\dfrac{4\pi r^3}{3}$. （2分）

两边对 t 求导得到 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. （4分）

代入 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=-2$ 以及 $r=10$ 得到 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{200\pi}$ .cm/min. （6分）

即半径以$\dfrac{1}{200\pi}$ cm/min 的速度减小.

15. 写出函数$f(x)=x\cos x$带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式..

解 先写出

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\quad, \qquad (3\text{ 分})$$

进一步得到

$$x\cos x=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5+o(x^6). \qquad (6\text{ 分})$$

[注意系数变化写法;直接法由高阶导计算出所有系数; 以及余项变化为$o(x^5)$都算正确]

三、分析证明（每小题 5 分，共 10 分）.

16. 设数列$\{x_n\}$由递推公式$x_1=\sqrt{6},x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$给出. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求极限值.

证明 显然有$x_2>x_1$, 再根据$x_{n+2}^2-x_{n+1}^2=x_{n+1}-x_n$, 利用数学归纳法知$\{x_n\}$严格单调增加. 另外显然$x_1<3$. 设$x_n<3$, 可推出$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+3}=3$, 再根据数学归纳法知$\{x_n\}$有上界. (4 分)

根据单调有界收敛准则知数列极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 对$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边取极限得到

$l=\sqrt{6+l}$, 解得$l=3$. (5 分)

17. 设$0<a<b$. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b)上可导, 证明存在$\xi\in(a,b)$使得$\xi f'(\xi)-f(\xi)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$.

证 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$和$G(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 且$G'(x)\neq 0$. (2 分)

由柯西中值定理, 存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=-\xi f'(\xi)+f(\xi). \qquad (5\text{ 分})$$

两边变号即得所证.