微积分（上）期中试卷 2 解答

一、计算（每小题 5 分，共 60 分）

1. 计算极限 $l = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$.

解 $\because \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < \dfrac{n}{n+1}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, 由夹挤准则得 $l = 1$.

2. 计算极限 $l = \lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

解 $l = \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sqrt{2}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}{\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 $l = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1-x}{(1+x)2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

4. 计算极限 $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{\sin x^2}$.

解法一 （有理化分子）

$l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2x-(1+x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x}+1+x\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x} = -\dfrac{1}{2}$

解法二（洛必达法则之后分子用等价代换）

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}} - 1}{2x\cos x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+2x}}{2x\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{-2x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

5. 设 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$，求 $f'(1)$.

解 $f'(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)(x-1)} = -\dfrac{1}{10100}$

6. 设 $f(x) = \ln\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}}$，求 $f'(0)$.

解 $y'\big|_{x=0} = \left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}\right)\right]'$

$$= \frac{1}{2\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}\right)}\left[1 + \frac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}}\right]\Bigg|_{x=0} = \frac{7}{8}.$$

7. 设 $y = y(x)$ 由 $xe^{f(y)} = x^y \ln 3$ 确定，$f(y)$ 可导，且 $f'(y) \neq \ln x$，求 dy.

解 取对数 $\ln x + f(y) = y\ln x + \ln\ln 3$，

方程两边对 x 求导 $\dfrac{1}{x} + f'(y)y' = y'\ln x + \dfrac{y}{x}$，

解出 $y' = \dfrac{y-1}{x[f'(y) - \ln x]}$，所以 $dy = \dfrac{y-1}{x[f'(y) - \ln x]}dx$.

8. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} y = t^m \\ x = \ln 2t \end{cases}$ 给出，计算 $\dfrac{d^n y}{dx^n}\bigg|_{t=1}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mt^{m-1}}{\dfrac{2}{2t}} = mt^m$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}(mt^m)\dfrac{dt}{dx} = m^2 t^{m-1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}} = m^2 t^m$，

所以 $\left.\dfrac{d^n y}{dx^n}\right|_{t=1} = m^n t^m\Big|_{t=1} = m^n$.

9. 设当 $x \to 0$ 时，$u = \sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{1-x} - 1 \sim cx^k$，求 c,k 的值.

解　利用 Taylor 公式

$$u = \left[1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right]\left(1 - \frac{x}{3} + o(x)\right) - 1 = -\frac{x}{3} + o(x) \sim -\frac{x}{3},$$

故 $c = -\dfrac{1}{3}$，$k = 1$.

10. 设 $g(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ bx, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导，$f(x) = \sin x$。求 b 以及 $\left.\dfrac{d}{dx}f(g(x))\right|_{x=0}$.

解 $g(0) = 0$，$g'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x} - 0}{x} = -\dfrac{\pi}{2} = g'_+(0) = b$，

$$\left.\frac{d}{dx}f(g(x))\right|_{x=0} = f'(g(0))g'(0) = f'(0)g'(0) = b\cos 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

11. 设 $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 + x - 1}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解 因 $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{x+1}$，所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}} + \left.\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right|_{x=0} = n!\left[(-1)^n - 2^n\right].$$

12. 设 $f(x) = \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$，求出其所有间断点，并说明间断点类型.
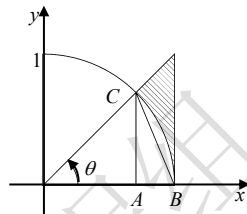
解　$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \\ 不存在, & x = -1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

$f(1^-) = 0$，$f(1^+) = 1$，$\therefore x = 1$是跳跃间断点.

$f(-1^-) = 1$，$f(-1^+) = 0$，$\therefore x = -1$是跳跃间断点.

二、综合证明（每小题 7 分，共 28 分）

13. 如右图所示，在单位圆内，当$\theta \to 0$时，证明三角形ABC的

面积$a(\theta)$与阴影部分的面积$b(\theta)$是同阶无穷小.

解　$a(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$，$b(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan\theta - \dfrac{1}{2}\theta$，显然$\lim\limits_{\theta \to 0}a(\theta) = 0$，$\lim\limits_{\theta \to 0}b(\theta) = 0$，

所以当$\theta \to 0$时，$a(\theta), b(\theta)$是无穷小.

又$\lim\limits_{\theta \to 0}\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to 0}\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\tan\theta - \theta} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\theta \to 0}\dfrac{\theta^3}{\tan\theta - \theta} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\theta \to 0}\dfrac{3\theta^2}{\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1}$

$\qquad\qquad = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{\theta \to 0}\dfrac{\theta^2}{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{3}{2}$

故当$\theta \to 0$时，$a(\theta)$与$b(\theta)$是同阶无穷小.

14. 证明当n充分大时，$\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right) < \dfrac{1}{n^2}$.

分析　即证当n充分大时，$\dfrac{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)}{\dfrac{1}{n^2}} < 1$，如果能证明

$\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)}{\dfrac{1}{n^2}} < 1$，则利用极限的保号性，结论成立.

证明 $l = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{2n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}$,

先求 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}$. 因 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty}\frac{\ln(\sqrt[x]{x}-1)}{x}}$, 而

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{\ln(\sqrt[x]{x}-1)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{\sqrt[x]{x}(1-\ln x)}{(\sqrt[x]{x}-1)x^2} = \lim_{x \to +\infty}\frac{1-\ln x}{x\ln x}$$

（其中 $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt[x]{x} = 1$, $\sqrt[x]{x}-1 = e^{\frac{\ln x}{x}}-1 \sim \dfrac{\ln x}{x}, x \to +\infty$ ）

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}-1}{x} = 0$ ，所以 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}} = 1$, $l = \dfrac{1}{2} < 1$ ，故当 n 充分大时，不等式成立.

15. 若 $\lim\limits_{n \to \infty}x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty}y_n = b$ ，且 $a < b$ ，依据极限定义证明当 n 充分大时：$x_n < y_n$.

证 对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2} > 0$ ，当 n 充分大时，有 $|x_n - a| < \varepsilon_0$ ， $|y_n - b| < \varepsilon_0$ ，所以

$x_n < a + \varepsilon_0 = \dfrac{b+a}{2} = b - \varepsilon_0 < y_n$ ，得证.

16. 设物体 P 沿抛物线 $x = y^2 (y > 0)$ 自原点向右移动，与原点的距离为 r .设其水平速度 $\dfrac{dx}{dt}$ 保持为常量 A ，（1）计算 $\dfrac{dr}{dt}$ （2）随着物体的移动， $\dfrac{dr}{dt}$ 是逐渐变大还是逐渐变小或者忽大忽小；（3）计算 $\dfrac{dr}{dt}$ 的最终极限.

解 （1）由题设 $r = \sqrt{x^2 + x}$ ，所以 $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}A$ ；

（2）因 $\dfrac{d^2 r}{dt^2} = (\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}})'A^2$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{x^2+x} - \frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}}}{(x^2+x)} A^2 = \frac{1}{4} \frac{4(x^2+x)-(2x+1)^2}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} A^2 < 0,$$

故 $\dfrac{dr}{dt}$ 逐渐变小,

（3）最终极限是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} A = A$.

三、（每小题 6 分，共 12 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$，试证存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得：

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}.$$

解 对 $\dfrac{f(x)}{e^x}$ 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理，$\exists \eta \in (a,b)$，

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \quad （1），$$

又 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$，代入（1）式即得所证等式.

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0) = f(1)$，证明存在 $x_0 \in [0,1]$，使得

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{4}\right).$$

证 设 $F(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$，显然 $F(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{3}{4}\right]$ 上连续.

又平均值

$$\frac{F(0) + F\left(\dfrac{1}{4}\right) + F\left(\dfrac{2}{4}\right) + F\left(\dfrac{3}{4}\right)}{4}$$

$$= \frac{f(0) - f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right) - f\left(\dfrac{2}{4}\right) + f\left(\dfrac{2}{4}\right) - f\left(\dfrac{3}{4}\right) + f\left(\dfrac{3}{4}\right) - f(1)}{4} = 0$$

由介值定理，$\exists x_0 \in \left[0, \dfrac{3}{4}\right] \subset [0,1]$，使得 $F(x_0) = 0$，即 $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{1}{4}\right)$.