2022-2023 学年第 1 学期

《 线性代数 》期末考试卷

注意事项：

1. 共七道大题；

2. 考试作答时间：08:00-10:00；

3. 提交试卷格式为 PDF 文件，命名方式为【班级+学号+姓名】;

4. 请提前在每张答题纸上页眉居中写明【班级-学号-姓名】等信息，并按照【x/y】 的格式写上页码号，所有题目要标注题号，并确保按照先后顺序排列，未作答题目也要标注题号及签名，并写上【此题无解答】，不允许遗漏题目；

5. 在答题纸上不需要抄题，但要写清题号。

6. 考前在答题白纸上书写以下文字：
“本人已知悉并将遵守《线上考试诚信承诺书》相关要求。”

一、判断题（本题共 5×2 =10 分）

1．若 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

（　　）

2. 如果两个向量组的秩相等，那么这两个向量组等价. （　　）

3. 如果齐次线性方程组有基础解系，那么它有无穷多个基础解系.（　　）

4. 若方阵 A,B 相似，则 A,B 有相同的特征值和特征向量. （　　）

5. 若 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则 AB 也是正定矩阵. （　　）

二、单项选择题（本题共 7×3 =21 分）

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是　　（　）.

A．$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$；　　　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$；

C．$\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-3\alpha_2$；　　　　D. $\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3$.

2．设 $\alpha_1=(1,1,0,0),\ \alpha_2=(0,0,1,1),\ \alpha_3=(1,0,1,0),\ \alpha_4=(1,1,1,1)$，

则它的极大无关组为（　　）.

A. α_1,α_2；　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；　C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

3．设 A 为 3 阶方阵，其特征值为$1,2,-3$，与之对应的特征向量依次为

P_1,P_2,P_3，设$P=(P_3,P_2,P_1)$，则$P^{-1}AP=$（　　）.

A. $\begin{bmatrix}-3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$；　B. $\begin{bmatrix}-3&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$；C. $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$；D. $\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-3\end{bmatrix}$.

4. 若向量组$(a+1,2,-6)$，$(1,a,-3)$，$(1,1,a-4)$线性无关, 则a取值（　）

A．0;　　B．不等于 0;　　C．1;　　D．不等于 1.

5. 设A为$m\times n$矩阵，则当$R(A)<$（　　）时，方程组$AX=0$有非零解.

A. n；　　B. -1；　　C. m；　　D. 0.

6. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，且 $R(A)=n$，则二次型 $X^T(A^TA)X$ 是（　　）.

A．不定二次型;　B．半正定二次型; C．正定二次型;　D．负定二次型.

7. 若方程组 AX=0 只有零解, 则 $AX=\beta$, 其中$\beta\neq0$　　　　（　　）.

A．必有无穷多解;　　　　B．必有唯一解;

C．必定没有解;　　　　D．A、B、C 都不对.

三、填空题（本题共 7×3=21 分）

1. 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 可以____________ .

2. 写出线性方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的解空间的一组基___, ____, _____.

3. 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的两个非零矩阵，则 A 的列向量组必是线性______.

4. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 1，2，3，则 $(A^*)^{-1}$ 的特征值为 _，_，_.

5. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $AX=0$ 的通解为________________.

6. 二次型 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{x}_3^2+2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$ 所对应的矩阵 A 的迹 tr(A) 为__________ .

7. 若 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵，则 $A+B$ 是__________矩阵.

四、（本题共 10 分，每小题 5 分）

1. 讨论向量组 $\alpha_1=(2,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,-1)$，$\alpha_3=(-2,3,0)$ 的线性相关性.

2. 设 A 为 n 阶方阵，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求 $|A-E|$.

五、（本题 12 分）当 λ 取何值时，下面的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3, \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

（1）方程组有唯一解（不必求出唯一解）;

（2）方程组无解;

（3）方程组有无穷多解，并求出其通解（用解向量形式表示）.

六、（本题 13 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+ax_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，通过正交变换将二次型化成标准型 $f=6y_3^2$.

(1) 写出此二次型对应的矩阵 A;

(2) 确定 a 的值;

(3) 求一个正交变换 $X=QY$，将二次型化为标准型 $f=6y_3^2$.

七、（本题共 13 分）

1．**（7 分）**设 γ_0 是非齐次方程组 $AX=b,(b\neq 0)$ 的一个解向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明 γ_0，$\gamma_0+\alpha_1,\gamma_0+\alpha_2,\cdots,\gamma_0+\alpha_{n-r}$ 线性无关.

2.（**6 分**）设 A 是 n 阶实反对称阵 $A^T=-A$，E 为 n 阶单位阵，$X\in R^n$.

证明:（1）$X^TAX=0$;　　（2）$|E-A|\neq 0$.