============================

第四章一元微分学习题解答

============================

习题 4.1

4.1.1

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ xe^x, & x>0. \end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-0}{x-0}=0$, 所以 $f'_-(0)=0$; 又, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$, 所以 $f'_+(0)=1$. 于是 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

2. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant \alpha, \\ ax+b, & x>\alpha. \end{cases}$$

问当 a, b 为何值时, 函数 $f(x)$ 在 α 处可导.

解: 首先, 由可导必连续的结论得到 $a\alpha+b=\alpha^2$. 其次, 因 $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{ax+b-\alpha^2}{x-\alpha}=f'_+(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^-}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha^-}\dfrac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha^-}(x+\alpha)=2\alpha=f'_-(\alpha)$; 若函数 $f(x)$ 在 α 处可导, 则有 $f'_+(\alpha)=f'_-(\alpha)$. 因此可解得 $a=2\alpha, b=-\alpha^2$, 此时函数 $f(x)$ 在 α 处可导.

3. 求两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 在交点处的 (两条切线) 交角.

解: 由 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 可解得两条抛物线的交点分别为 (-1,1) 和 (1,1). 再由对称性可知在两个交点处两条切线的交角相等, 故只需求在一个交点处的交角即可. 在 $(-1,1)$ 点两条切线的斜率分别为 -2,2. 设 θ_1,θ_2 分别为两条切线与 x 轴正向的夹角, 则有 $\tan\theta_1=-2, \tan\theta_2=2$. 所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{4}{3}$, 从而 $\theta_1-\theta_2=\arctan\dfrac{4}{3}$ 为两条切线的交角, 即为所求.

4. 设 $S_1(r)=\pi r^2$, $C_1(r)=2\pi r$, $V_1(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, $S_2(r)=4\pi r^2$, 则 $S_1'(r)=C_1(r)$, $V_1'(r)=S_2(r)$. 这两个事实分别说明了什么.

解: $S_1'(r)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\pi(r+h)^2-\pi r^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2\pi r+\pi h)=2\pi r$, 所以 $S_1'(r)=C_1(r)$. $V_1'(r)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4}{3}\pi(3r^2+3rh+h^2)=\pi r^2$, 所以 $V_1'(r)=S_2(r)$.

由 $S_1'(r)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S_1(r+h)-S_1(r)}{h}$ 知, 当 $|h|$ 充分小时, 有

$$S_1'(r)=2\pi r\approx\frac{S_1(r+h)-S_1(r)}{h}.$$

视 r 为圆的半径时, $S_1(r)$ 就是该圆的面积, $C_1(r)=2\pi r$ 为周长,

$S_1(r+h)-S_1(r)$ 是半径为 r 宽为 $h(h>0;\ h<0$ 时, 交换两项, 宽为 $-h)$ 的圆环的面积, $\dfrac{S_1(r+h)-S_1(r)}{h}$ 是此圆环面积关于 h 的平均变化率. 当 $h\to 0$ 时, 这个变化率的极限恰是半径为 r 的圆的周长. 说明, 当半径为 r 时, 圆的面积的变化率 (增加或减少的速率), 恰是半径为 r 的圆的周长.

$V_1(r)$ 是半径为 r 的球的体积, 类似可说明, 当半径为 r 时, 球的体积的变化率 (增加或减少的速率), 恰是半径为 r 的球的面积.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，且对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 若 $f'(0)=1$, 求 $f(x)$.

解: 由 $f(0)=f(0)+f(0)=2f(0)$, 可得 $f(0)=0$. 因

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)=1,\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x+c$. 又因 $f(0)=0$, 故 $c=0$. 即 $f(x)=x$ 为所求.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，且对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 若 $f'(0)=1$, 证明: 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f'(x)=f(x)$.

证明: 由 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 及 $f'(0)=1$ 可得 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x)$, 得证.

7. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $f(\alpha)=f(\beta)=0, f_+'(\alpha)f_-'(\beta)>0$, 则在 (α,β) 内存在一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

证明: 由 $f_+'(\alpha)f_-'(\beta)>0$ 可得 $f_+'(\alpha)>0, f_-'(\beta)>0$ 或 $f_+'(\alpha)<0, f_-'(\beta)<0$. 当 $f_+'(\alpha)>0, f_-'(\beta)>0$ 时, 由导数的定义可知 $f_+'(\alpha)=\lim\limits_{h_1\to 0^+}\dfrac{f(\alpha+h_1)-f(\alpha)}{h_1}>0$, $f_-'(\beta)=\lim\limits_{h_2\to 0^-}\dfrac{f(\beta+h_2)-f(\beta)}{h_2}>0$. 取定绝对值足够小的 h_1,h_2, 则由上式可知 $f(\alpha+h_1)>0, f(\beta+h_2)<0$. 又因 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $[\alpha+h_1,\beta+h_2]\subset[\alpha,\beta]$, 所以 $f(x)$ 在 $[\alpha+h_1,\beta+h_2]$ 上连续. 根据连续函数的根的存在性定理可知 $\exists\xi\in$

$(\alpha+h_1,\beta+h_2)\subset(\alpha,\beta)$ 使得 $f(\xi)=0$. 同理可证 $f'_+(\alpha)<0, f'_-(\beta)<0$ 的情况, 故在 (α,β) 内存在一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

4.1.2

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^{2010}-2010x+2010$;

(2) $y=\sqrt{5x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(3) $y=(1+x^3)(3+x^2)$;

(4) $y=x^{2010}(1+x^2)(3x-2)$;

(5) $y=\dfrac{1+x^3}{\sqrt{2-x^2}}$;

(6) $y=x\tan x-\cot x$;

(7) $y=\dfrac{\sin x}{1-\sin x+\cos x}$;

(8) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-2\ln x}$;

(9) $y=\dfrac{e^x}{1+3\log_3 x}$;

(10) $y=\arcsin x(1+\tan x-\cos x)$;

(11) $y=2^x\sqrt{x}\arctan x$;

(12) $y=\dfrac{\arccos x}{x}+\dfrac{x}{\arcsin x}$.

解: (1) $y'=2010x^{2009}-2010$;

(2) $y'=[(5x)^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}]'=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(3) $y'=5x^4+9x^2+2x$;

(4) $y'=[x^{2010}(1+x^2)(3x-2)]'=2010x^{2009}(1+x^2)(3x-2)+x^{2010}(9x^2-4x+3)$;

(5) $y'=[\dfrac{1+x^3}{\sqrt{2-x^2}}]'=\dfrac{-2x^4+6x^2+x}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(6) $y'=[x\tan x-\cot x]'=(x\tan x)'-(\cot x)'=x\sec^2 x+\tan x+\csc^2 x$;

(7) $y'=[\dfrac{\sin x}{1-\sin x+\cos x}]'=\dfrac{1+\cos x}{(1-\sin x+\cos x)^2}$;

(8) $y'=[\dfrac{1+\ln x}{1-2\ln x}]'=\dfrac{3}{x(1-2\ln x)^2}$;

(9) $y'=[\dfrac{e^x}{1+3\log_3 x}]'=\dfrac{e^x}{1+3\log_3 x}(1-\dfrac{3}{x(1+3\log_3 x)\ln 3})$;

(10) $y'=[\arcsin x(1+\tan x-\cos x]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2(1+\tan x-\cos x)^2}}[x(1+\tan x-\cos x)]'=\dfrac{1+\tan x-\cos x+x(\sec^2 x+\sin x)}{\sqrt{1-x^2(1+\tan x-\cos x)^2}}$; (此题应是 $\arcsin x$ 与 $1+\tan x-\cos x$ 相乘)

(11) $y' = [2^x\sqrt{x}\arctan x]' = 2^x \ln 2\sqrt{x}\arctan x + 2^x \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x + 2^x\sqrt{x}\dfrac{1}{1+x^2}$;

(12) $y' = [\dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{x}{\arcsin x}]' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\arccos x}{x^2} + \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y = \sqrt{x^4 + \sqrt{x} + 5}$;

(2) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(3) $y = \arctan \sqrt[5]{(1+x^2)(3+x)}$;

(4) $y = \sin \dfrac{1+x^5}{5+x}$;

(5) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}}$;

(6) $y = \arctan(\sin x)$;

(7) $y = \dfrac{1}{3}\ln \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}} - 3\arctan\sqrt{(4x-5)(5x-4)}$;

(8) $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{x}+x^2}{1-\sqrt{x}+x^2} + x^{\ln x}$;

(9) $y = e^{x^x} + \arccos\sqrt{\dfrac{x^5-1}{x^5+1}}$;

(10) $y = (\sin x^2)^{\cos x}$;

(11) $y = (x^2 + 2x + 1)^{\arcsin x}$;

(12) $y = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}$;

(13) $y = (x^4 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(14) $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$.

解:(1) $y' = [\sqrt{x^4 + \sqrt{x} + 5}]' = \dfrac{1}{2}(x^4 + \sqrt{x} + 5)^{-\frac{1}{2}}(x^4 + \sqrt{x} + 5)' = \dfrac{4x^3 + 1/(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x^4 + \sqrt{x} + 5}}$;

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \left[\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right]' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})\right); \end{aligned}$$

(3) $y' = [\arctan \sqrt[5]{(1+x^2)(3+x)}]' = \dfrac{(3x^2 + 6x + 1)(3 + x + 3x^2 + x^3)^{-\frac{4}{5}}}{5(1 + (3 + x + 3x^2 + x^3)^{\frac{2}{5}})}$;

(4) $y' = [\sin \dfrac{1+x^5}{5+x}]' = (\dfrac{1+x^5}{5+x})' \cos \dfrac{1+x^5}{5+x} = \dfrac{25x^4 + 4x^5 - 1}{(x+5)^2} \cos \dfrac{1+x^5}{5+x}$;

(5) $y' = [\ln \sqrt{\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}}]' = (\sqrt{\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}})' \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin 2x}{1-\cos^4 x}$;

(6) $y' = [\arctan(\sin x)]' = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$;

(7) $y'=\dfrac{1}{3(x+3)}-\dfrac{x^2-2x}{2(x^3-3x^2+2)}-\dfrac{3(40x-41)}{2(1+(4x-5)(5x-4))\sqrt{(4x-5)(5x-4)}}$;

(8) $y'=[\ln(1+\sqrt{x}-x^2)-\ln(1-\sqrt{x}+x^2)+x^{\ln x}]'=\dfrac{1/\sqrt{x}-4x}{x^4+2x^2\sqrt{x}-x+1}+2x^{(-1+\ln x)}\ln x$;

(9) 令 $u=e^{x^x}$, 则 $u'=u(x^x)'=ux^x(1+\ln x)$. 又因 $(\arccos\sqrt{\dfrac{x^5-1}{x^5+1}})'=-\dfrac{5x^4}{\sqrt{2(x^5-1)}(x^5+1)}$, 所以 $y'=e^{x^x}x^x(1+\ln x)-\dfrac{5x^4}{\sqrt{2(x^5-1)}(x^5+1)}$;

(10) 因为 $\ln y=\cos x\ln\sin x^2$, 对两边求导可得 $\dfrac{y'}{y}=2x\cos x\cot x^2-\sin x\ln\sin x^2$, 所以 $y'=(\sin x^2)^{\cos x}[2x\cos x\cot x^2-\sin x\ln\sin x^2]$;

(11) 因为 $\ln y=2\arcsin x\ln(x+1)$, 对两边求导可得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2\arcsin x}{1+x}$, 所以 $y'=(x^2+2x+1)^{\arcsin x}[\dfrac{2\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2\arcsin x}{1+x}]$;

(12) 因为 $\ln y=\beta_1\ln(x-\alpha_1)+\beta_2\ln(x-\alpha_2)+\cdots+\beta_n\ln(x-\alpha_n)$, 对两边求导可得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\beta_1}{x-\alpha_1}+\cdots+\dfrac{\beta_n}{x-\alpha_n}$, 所以 $y'=(\dfrac{\beta_1}{x-\alpha_1}+\cdots+\dfrac{\beta_n}{x-\alpha_n})(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}$;

(13) 因为 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(x^4+\cos x)$, 对两边求导可得 $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{\ln(x^4+\cos x)}{x^2}+\dfrac{4x^3-\sin x}{x(x^4+\cos x)}$, 所以 $y'=[\dfrac{4x^3-\sin x}{x(x^4+\cos x)}-\dfrac{\ln(x^4+\cos x)}{x^2}](x^4+\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(14) 因为 $\ln y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{8}\ln\sin x$, 所以 $y'=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{\cot x}{8})$.

3. 讨论下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ \frac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$

解: (1) 由 $(1-x^2)\geqslant 0$ 可解得函数的定义域为 $x\in[-1,1]$. 当 $x\in(-1,0)$ 时, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 当 $x\in(0,1)$ 时, $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 进而可由单侧导数定义求得 $y'_+(0)=-1, y'_-(0)=1$, 不相等, 所以在 $x=0$ 处不可导. 当 $x=-1$ 时, 右导数 $y'_+(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $x=1$ 时, 左导数 $y'_-(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) 当 $|x|>1$ 时, $f'(x)=0$; 当 $|x|<1$ 时, $f'(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}$; 当 $x=1$

时, $f'_+(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{-x^2}-e^{-1}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-1}{e(x-1)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{x^2(1+(1-x^2)+o(1-x^2))-1}{e(x-1)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{1}{e}\Big[\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x^2(x^2-1)}{x-1}-x^2\cdot\frac{o(1-x^2)}{1-x^2}\cdot(1+x)\Big]\\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $f'_-(1)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=0$; 当 $x=-1$ 时, 同理可得 $f'_+(-1)=0=f'_-(-1)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导且 $f'(-1)=0$. 综上所述 $f'(x)=\begin{cases}2x(1-x^2)e^{-x^2}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

4. 证明下列结论成立:

(1) 可导的偶函数的导函数是奇函数; 可导的奇函数的导函数是偶函数, 并对这个事实给以几何说明;

(2) 可导的周期函数的导函数是周期函数;

(3) 曲线 $y=x^2+x+1$ 上三点 $(0,y_1)$,$(-1,y_2)$,$(-\frac{1}{2},y_3)$ 的法线交于一点.

证明: (1) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 则有 $f(x)=f(-x)$, 所以 $f'(x)=f'(-x)(-x)'=-f'(-x)$, 故可导的偶函数的导函数为奇函数. 几何解释: 偶函数在两个对称点处的切线关于 y 轴对称. 当 $f(x)$ 为奇函数时, 则有 $f(x)=-f(-x)$, 所以 $f'(x)=-f'(-x)(-x)'=f'(-x)$, 故可导的奇函数的导函数为偶函数. 几何解释: 奇函数在两个对称点处的切线平行.

(2) 设 $f(x)$ 为周期函数, 不妨设周期为 T, 则有 $f(x)=f(x+T)$. 因为 $f'(x)=f'(x+T)$, 所以可导的周期函数的导函数是周期函数.

(3) 由 $y=x^2+x+1$ 可得 $y_1=1$, $y_2=1$, $y_3=3/4$, $y'=2x+1$. 则 $y'(0)=1, y'(-1)=-1, y'(-\frac{1}{2})=0$, 所以过三点 $(0,y_1)$,$(-1,y_2)$,$(-\frac{1}{2},y_3)$ 的法线分别为 $y=1-x, y=x+2, x=-\frac{1}{2}$. 联立这三个方程得到唯一解 $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$, 即三法线交于点 $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. 得证.

5. 设 $f(x)=\alpha_1\sin x+\alpha_2\sin 2x+\cdots+\alpha_n\sin nx$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数, 且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 证明: $|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\leqslant 1$.

证明: 本题与 P_{43} 第 5 题重复, 答案略.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 (正值) 函数，且对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 若 $f'(0)=1$, 求 $f(x)$.

解: 由 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 可得 $f(0)=f^2(0)$, 即 $f(0)=1$ 或 $f(0)=0$(舍去, 因将导出 $f(x)\equiv 0$, 与 $f'(0)=1$ 矛盾). 因 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x)$, 所以 $f'(x)=f(x)$, 即 $(\ln f(x))'=1$, 于是 $f(x)=ce^x$. 又因 $f(0)=1$, 所以 $c=1$, 即 $f(x)=e^x$.

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的 (正值) 函数，且对任何 $x,y\in(0,+\infty)$, 都有 $f(xy)=f(x)f(y)$. 若 $f'(1)=n(>0)$, 求 $f(x)$.

解: 由对任何 $x,y\in(0,+\infty)$, 都有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 可得 $f(1)=f^2(1)$, 知 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$. 若 $f(1)=0$ 则 $f(x)=f(x)f(1)=0$, 此时 $f'(x)=0$ 与 $f'(1)=n(>0)$ 矛盾, 所以 $f(1)=1$. 此时 $f(x)=f(\sqrt{x}\sqrt{x})=f^2(\sqrt{x})>0$, 这是因为若存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$, 则 $f(x)=f(x_0\dfrac{x}{x_0})=f(x_0)f(\dfrac{x}{x_0})\equiv 0$ 矛盾. 又因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x(1+\frac{h}{x}))-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(1+\frac{h}{x})-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)[f(1+\frac{h}{x})-1]}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{x\frac{h}{x}}=\dfrac{nf(x)}{x}$, 所以 $f'(x)=\dfrac{nf(x)}{x}$. 解得 $f(x)=cx^n$. 而 $f(1)=1$, 故 $f(x)=x^n$.

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，且对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$. 若 $f'(0)=e$, 求 $f(x)$.

解: 由 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$ 可得 $f(0)=2f(0)$ 即 $f(0)=0$, 以及 $\dfrac{f(x+y)}{e^{x+y}}=\dfrac{f(x)}{e^x}+\dfrac{f(y)}{e^y}$. 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$, 则 $g(x+y)=g(x)+g(y)$ 且 $g(0)=0$. 因为 $g'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{f(h)}{e^h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=e$, 所以 $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=e$. 故 $g(x)=ex+c$, 而 $g(0)=0$, 所以 $c=0, g(x)=ex$. 于是可求得 $f(x)=xe^{x+1}$.

4.1.3

1. 在下列方程中求隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $x^2+y^2+\arcsin y=0$; (2) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=1$; (3) $x^y=y^x$;

(4) $\sin(xy)=x$; (5) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (6) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=1$.

解:(1) $y'=-\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{2y\sqrt{1-y^2}+1}$; (2) $y'=-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; (3) $y'=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$;

(4) $y'=\dfrac{1}{x\cos xy}-\dfrac{y}{x}$; (5) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; (6) $y'=\dfrac{y\sqrt{y}-2y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-2x\sqrt{y}}$.

2. 证明: 抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任意点的切线在两个坐标轴上的截距的和等于 a.

证明: 设 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线上的任意一点, 则 $y_0=x_0+a-2\sqrt{ax_0}$. 方程两端对求导可得 $y'=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, 所以 $y'(x_0)=1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}$. 则在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$y-y_0=(1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}})(x-x_0)$. 进一步可化为 $\frac{y}{y_0+\sqrt{ax_0}-x_0}+\frac{x}{\frac{\sqrt{x_0}(y_0+\sqrt{ax_0}-x_0)}{\sqrt{a}-\sqrt{x_0}}}=1$.
所以该切线在轴上的截距之和为 $y_0+\sqrt{ax_0}-x_0+\frac{\sqrt{x_0}(y_0+\sqrt{ax_0}-x_0)}{\sqrt{a}-\sqrt{x_0}}=a$ 即证.

3. 求垂直于直线 $2x+4y-3=0$, 并与双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 相切的直线方程.

解: 设切点为 (x_0,y_0), 则由 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 得 $y'(x_0)=\frac{7x_0}{2y_0}$. 又因 $\frac{7x_0}{2y_0}\cdot(-\frac{1}{2})=-1$, 所以可得 $7x_0-4y_0=0$, 将此式与 $\frac{x_0^2}{2}-\frac{y_0^2}{7}=1$ 联立得到 $x_0=-4,y_0=-7$ 或 $x_0=4,y_0=7$ 从而所求直线的斜率为 -2，所以切线方程为 $2x-y+1=0$ 或 $2x-y-1=0$.

4. 求下列参数方程的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^{-t}\sin t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arcsin t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

解:(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^{-t}(-\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{1}{e^{2t}}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t)}{3a\cos^2 t\sin t)}=-\frac{b}{a}\tan t$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$.

5. 证明: 曳物线

$$\begin{cases} x &= a(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t), \\ y &= a\sin t, \quad a>0, \quad 0<t<\pi \end{cases}$$

上任意点 (x,y) 的切线，由切点到 x 轴之间的切线段的长是定数.

证明: 由题可得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\tan t$. 设某一切点为 $(x(t_0),y(t_0))$ 且 $\frac{dy(t_0)}{dx(t_0)}=k_0$, 则该点的切线为 $y-y(t_0)=k_0(x-x(t_0))$. 再设 l_1 为切线在 x 轴上的截距，则 $l_1=x(t_0)-\frac{y(t_0)}{k_0}$. 所以切点到 x 轴之间的切线段的长为 $\sqrt{y^2(t_0)+(x(t_0)-l_1)^2}=\sqrt{y^2(t_0)+\frac{y^2(t_0)}{k_0^2}}=a$ 为定数即证.

6. 证明: 星形线

$$\begin{cases} x &= a\cos^3\varphi, \\ y &= a\sin^3\varphi, \end{cases} \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

上任意点 (不在坐标轴上) 的切线被 x 轴与 y 轴所截的线段之长是定数.

证明: 设 (x_0, y_0) 为星形线上的任意一点，此时 $\varphi = \varphi_0$. 由于此点不在坐标轴上, 所以 $x_0 y_0 \neq 0$, 即 $\sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \neq 0$. 又因 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = -\tan\varphi$, 所以可得在 (x_0, y_0) 处的切线为 $y - a\sin^3\varphi_0 = -\tan\varphi_0(x - a\cos^3\varphi_0)$. 设切线与 x 轴和 y 轴的截距分别为 l_1, l_2, 则 $l_1 = a\cos\varphi_0, l_2 = a\sin\varphi_0$. 故星形线上任意一点的切线被 x 轴与 y 轴所截的线段之长为 $\sqrt{l_1^2 + l_2^2} = a$ 是定数即证.

4.1.4

1. 求下列函数的高阶导数:

(1) $y = \ln(1+x)$, 求 y'';

(2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(n)}$;

(3) $y = e^{ax}\sin bx$, 求 $y^{(n)}$;

(4) $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求 y'';

(5) $\sqrt{x^2+y^2} = \exp\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 y'';

(6) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $y''(0)$;

(7) $\begin{cases} x &= \alpha\cos^3 t, \\ y &= \beta\sin^3 t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(8) $\begin{cases} x &= \alpha(t - \sin t), \\ y &= \alpha(1-\cos t), \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解:(1) $y'' = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

(2) $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}k!}{x^{k+1}} - \frac{\ln x}{x}$;

(3) 应用莱布尼茨公式可得 $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k e^{ax} \sin(bx + \frac{k\pi}{2})$;

(4) $y'' = \dfrac{6}{(x-2y)^3}$;

(5) $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$;

(6) 因 $y'' = \dfrac{-3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, 所以 $y''(0) = 0$;

(7) 因为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\beta\tan t}{\alpha}$, 所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx}) \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\beta}{3\alpha^2\cos^4 t\sin t}$;

(8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx}) \cdot \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{\alpha(1-\cos t)^2}$.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases}$ 的高阶导数.

解: $\because f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases}$ $\quad \therefore f'(x)=\begin{cases} 2x, & x \geqslant 0, \\ -2x, & x<0. \end{cases}$

又 $f''(x)=\begin{cases} 2, & x>0, \\ \text{不存在}, & x=0, \\ -2, & x<0, \end{cases}$ 所以 $f^{(n)}(x)=\begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \text{不存在}, & x=0, \end{cases}$ $(n>2)$.

3. 多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 称为勒让德 (*Legendre*) 多项式, 求 $P_n(1)$ 与 $P_n(-1)$.

解: $\because P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n]=\dfrac{1}{2^n n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}[A_n^k(x-1)^{n-k}(x+1)^k A_n^{n-k}]$ $\therefore P_n(1)=\dfrac{1}{2^n n!}\dbinom{n}{n}n!2^n=1, P_n(-1)=\dfrac{1}{2^n n!}\dbinom{n}{0}A_n^0(-2)^n A_n^n=(-1)^n$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x \leqslant x_0$ 有定义, 且存在二阶导数, 问 α,β,γ 取何值时, 函数 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x \leqslant x_0, \\ \alpha(x-x_0)^2+\beta(x-x_0)+\gamma, & x>x_0 \end{cases}$ 存在二阶导数.

解: 由题意可知要使 $F(x)$ 存在二阶导数, 只需要验证在 $x=x_0$ 处存在二阶导数即可. 显然 $\gamma=f(x_0)$. 因 $F'(x)=\begin{cases} f'(x), & x \leqslant x_0, \\ 2\alpha(x-x_0)+\beta, & x>x_0 \end{cases}$, 所以 $\beta=f'(x_0)$. 又因为 $F''(x)=\begin{cases} f''(x), & x<x_0, \\ 2\alpha, & x>x_0 \end{cases}$, 且 $F''_+(x_0)=2\alpha, F''_-(x_0)=f''(x_0)$, 所以 $\alpha=\dfrac{f''(x_0)}{2}$. 即 $\alpha=\dfrac{f''(x_0)}{2}$, $\beta=f'(x_0)$, $\gamma=f(x_0)$ 为所求, 其中 x_0 处为右导数.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x \geqslant 0, \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma, & x<0 \end{cases}$, 问 α,β,γ 取何值时, 函数 $f(x)$ 处处具有一阶连续的导数, 但在 $x=0$ 处不存在二阶导数.

解: 由题意可知要使 $f(x)$ 处处具有一阶连续的导数但在 $x=0$ 处不存在二阶导数, 则只需要验证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数存在情况. 因为 $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & x>0, \\ 2\alpha x+\beta, & x<0 \end{cases}$, 所以 $\beta=1,\gamma=0$. 此时 $f(x)$ 处处具有一阶连续的导数. 又因 $f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0, \\ 2\alpha, & x<0 \end{cases}$, 此时若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不存在二阶导数，则 $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$. 故 $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}, \beta=1, \gamma=0$ 为所求.

6. 设 $y=\arcsin x$, 证明: $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$.

证明: 因 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $y''=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{xy'}{1-x^2}$. 即 $y''(1-x^2)=xy'$, 对此方程两边关于 x 求 n 次导数可得: $y^{(n+2)}(1-x^2)-2\binom{n}{1}xy^{(n+1)}-2\binom{n}{2}y^{(n)}=y^{(n+1)}x+\binom{n}{1}y^{(n)}$, 经化简可得 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$.

7. 设函数 $f(x)$ 是 n 次多项式, 证明: α 是方程 $f(x)=0$ 的 $k(\leqslant n)$ 重根的充分必要条件是 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$, 而 $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

证明: 必要性　若 $f(x)$ 为 n 次多项式, α 是 $f(x)=0$ 的 $k(\leqslant n)$ 重根，则 $f(x)=(x-\alpha)^kP(x)$, 其中 $P(\alpha)\neq 0$. 因为 $f'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}P(x)+(x-\alpha)^kP'(x)=(x-\alpha)^{k-1}[kP(x)+(x-\alpha)P'(x)]$, 而 $kP(\alpha)+(\alpha-\alpha)P'(\alpha)=kP(\alpha)\neq 0$, 所以 $x=\alpha$ 为 $f'(x)=0$ 的 $k-1$ 重根，再由归纳法可得 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$, 而 $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

充分性　假设 α 为 $f(x)=0$ 的 $m(\leqslant k)$ 重根, 则由必要性证明可知,α 为 $f'(x)=0$ 的 $m-1$ 重根, 为 $f^{(k-1)}(x)=0$ 的 $m-k+1$ 重根, 但 α 不是 $f^{(k)}(x)=0$ 的根. 因此 $m-k+1=1$, 即 $m=k$. 于是证得 α 是 $f(x)=0$ 的 $k(\leqslant n)$ 重根.

8. 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$, 在 $x=0$ 处存在任意阶导数, 且 $f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots$.

证明: 当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, 可知 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 连续. 根据导函数极限定理可求得 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, 继续下去可得 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}(\dfrac{1}{x})$. 此导函数在 $x\neq 0$ 连续, 其中 $P_{3n}(\dfrac{1}{x})$ 表示 $\dfrac{1}{x}$ 的 $3k$ 次多项式. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在任意阶导数, 且 $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0$.

习题 4.2

1. 求下列函数的微分:

(1) $y=x\ln(1+x)-x$;

(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

(3) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\sin ax\sin bx$;

(5) $y=(1+x^2)^{2010}$;

(6) $y=e^x\tan x^2$.

解:(1) $dy=(x\ln(1+x)-x)'dx=[\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x}]dx$;

(2) $dy=(\dfrac{x}{1+x^2})'dx=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$;

(3) $dy=(\arcsin\sqrt{1-x^2})'dx=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}dx$;

(4) $dy = (\sin ax \sin bx)' dx = (a \cos ax \sin bx + b \sin ax \cos bx) dx$;

(5) $dy = 4020x(1+x^2)^{2009} dx$;

(6) $dy = e^x(\tan x^2 + 2x \sec^2 x^2) dx$.

2. 计算下列各数的近似值:

(1) $\sqrt[3]{1.02}$; (2) $\sin 29°$; (3) $\lg 11$; (4) $\sqrt{37}$.

解: (1) 取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1, \Delta x = 0.02$, 则 $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$, 所以 $\sqrt[3]{1.02} \approx 1 + 0.02 \cdot \frac{1}{3} \approx 1.067$;

(2) 取 $f(x) = \sin x$, $x_0 = 30°, \Delta x = -1°$, 则 $f'(x) = \cos x$, 所以 $\sin 29° \approx \sin 30° - \cos 30° \cdot 1° \approx 0.4985$;

(3) 取 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 10, \Delta x = 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$, 所以 $\lg 11 \approx \lg 10 + f'(10)\Delta x \approx 1.033$;

(4) 取 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 36, \Delta x = 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 所以 $\sqrt{37} \approx \sqrt{36} + 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{36}} \approx 6.083$.

3. 求下列函数的二阶微分:

(1) $y = e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}$;

(2) $y = \arctan \frac{e^{-x} + e^x}{2}$;

(3) $y = \frac{1+x^2}{(1+x)^2}$.

解: (1) 因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}), y'' = \frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$, 所以 $d^2y = y''dx^2 = (\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}))dx^2$;

(2) 因为 $y' = \frac{2(e^x - e^{-x})}{6 + e^{-2x} + e^{2x}}, y'' = \frac{2(e^{-x} + e^x)(10 - e^{-2x} - e^{2x})}{(6 + e^{-2x} + e^{2x})^2}$, 所以 $d^2y = y''dx^2 = \frac{2(e^{-x} + e^x)(10 - e^{-2x} - e^{2x})}{(6 + e^{-2x} + e^{2x})^2} dx^2$.

(3) 因为 $y' = \frac{2(x^2-1)}{(1+x)^4}, y'' = \frac{4(2-x)}{(1+x)^4}$, 所以 $d^2y = y''dx^2 = \frac{4(2-x)}{(1+x)^4} dx^2$.

习题 4.3

4.3.1

1. 证明下列不等式:

(1) $\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$, $0 < \alpha < \beta$; (2) $|\sin \alpha - \sin \beta| \leqslant |\alpha - \beta|$;

(3) $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;　　(4) $0 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < 1$, $x > 0$.

证明：(1) 令函数 $f(x) = \ln x$ ，对 $\ln x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $\ln\beta - \ln\alpha = \dfrac{1}{\gamma}(\beta - \alpha), \gamma \in (\alpha, \beta)$ ，即 $\dfrac{\beta-\alpha}{\beta} < \ln\dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}$.

(2) 令函数 $f(x) = \sin x$ ，对 $\sin x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $|\sin\alpha - \sin\beta| = |\cos\gamma||\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \beta|, \gamma \in (\alpha, \beta)$，即 $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$.

(3) 令函数 $f(y) = \ln y$ ，对 $\ln y$ 在 $[x, x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $\ln(x+1) - \ln x = \dfrac{1}{\xi}, \xi \in (x, x+1)$ ，即 $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

(4) 令函数 $f(y) = \ln y$ ，对 $\ln y$ 在 $[1, 1+x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有 $\ln(1+x) - \ln 1 = \dfrac{x}{\xi}, \xi \in (1, 1+x)$ ，即 $0 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < 1$.

2. 证明：方程 $x^3 - 3x + 2010 = 0$ 在 $(0,1)$ 没有两个不同的实根.

证明：假设方程 $x^3 - 3x + 2010 = 0$ 在 $(0,1)$ 内有两个不同实根 $\xi, \eta, \xi \neq \eta$. 令 $f(x) = x^3 - 3x + 2010$ 存在, 则 $f(\xi) = f(\eta) = 0$. 不妨设 $\xi < \eta$，又 $f(x)$ 在 $[\xi, \eta]$ 上连续，在 (ξ, η) 内可导，所以存在 $\alpha \in (\xi, \eta)$ 使得 $f'(\alpha) = 0$，即 $3\alpha^2 - 3 = 0, \alpha = \pm 1$ 与 $\alpha \in (0,1)$ 矛盾，所以假设不成立.

3. 设 $a_1 - \dfrac{a_2}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明：方程

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \ldots + a_n \cos(2n-1)x = 0$$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有一个实根.

证明：令 $F(x) = a_1 \sin x + \dfrac{a_2}{3}\sin 3x + \ldots + \dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$, 则 $F(0) = F(\dfrac{\pi}{2}) = 0$. 由罗尔中值定理知，存在 $\xi \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ 使得 $F'(\xi) = a_1\cos\xi + a_2\cos 3\xi + \ldots + a_n\cos(2n-1)\xi = 0$. 命题得证.

4. 设 $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$, 证明：方程

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

在 $(0,1)$ 至少有一个实根.

证明：令 $F(x) = a_0 x + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 则 $F(0) = F(1) = 0$. 由罗尔中值定理知，存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = 0$. 命题得证.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负, 存在三阶导数，且方程 $f(x) = 0$ 有两个相异实根, 则方程 $f^{'''}(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证明：设 $\alpha, \beta \in (a,b), f(\alpha) = f(\beta) = 0 (\alpha < \beta)$. 又 $f(x)$ 存在三阶导数，所以 $f'(x)$, $f^{''}(x)$ 均在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，且在 (α, β) 内可导，由罗尔中值定理知，存在 $\sigma \in (\alpha, \beta) \subset (a,b)$ 使得 $f'(\sigma) = 0$. 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负, 所以区间 (a,b) 内异于 α, β 的其他值对应的函数值大于 0，所以 α, β 为极小值点, 所以 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$,

再由罗尔中值定理存在 $\xi \in (\alpha, \sigma), \eta \in (\sigma, \beta)$ 使得 $f''(\xi) = 0$, $f''(\eta) = 0$. 再一次由罗尔中值定理存在 $\theta \in (\xi, \eta)$, 使得 $f'''(\theta) = 0$, 即证得方程 $f'''(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个根.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内至少有一个根.

证明：令 $t = a - \dfrac{a^2}{x}$, 则 $x = a$ 时 $t = 0$, $x \to +\infty$ 时 $t \to a$, 且 $x = \dfrac{a^2}{a-t}$. 记 $h(t) = f(\frac{a^2}{a-t}) = f(x)$, 并定义 $h(0) = f(a+0)$, $h(a) = f(+\infty)$, 则函数 $h(t)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 并且 $h(0) = h(a)$. 由 Rolle 定理知, 存在 $\tau \in (0, a)$, 使得 $h'(\tau) = 0$. 由于 $h'(t) = f'(x) \cdot \dfrac{a^2}{(a-t)^2}$, 代 $t = \tau$ 入上式, 记 $\xi = \dfrac{a^2}{a-\tau}$, 则 $\xi \in (a, +\infty)$ 且 $f'(\xi) \cdot \dfrac{a^2}{(a-\tau)^2} = 0$. 注意到 $\tau \in (0, a)$, 有 $\dfrac{a^2}{(a-\tau)^2} \neq 0$, 从而得到 $f'(\xi) = 0$. 得证.

7. 证明：若 $a > 0$, 则方程

$$x^3 + x = \frac{a^2}{2 \arctan a}$$

在 $(0, a)$ 内至少有一个根.

证明：令函数 $f(x) = x^3 + x - \dfrac{a^2}{2 \arctan a}$，因为 $f(0) < 0$,

$$f(a) = \frac{a}{2 \arctan a}(2a^2 \arctan a + 2 \arctan a - a).$$

令 $g(x) = 2x^2 \arctan x + 2 \arctan x - x$, 则

$$g'(x) = 4x \arctan x + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} - 1 = 4x \arctan x + 1 > 0, \quad x \in (0, a).$$

于是, $g(x) > 0$ $(x \in (0, a])$, 特别地, $g(a) > 0$, 从而 $f(a) > 0$. 由介值性定理得，$f(x) = 0$ 在 $(0, a)$ 内至少有一个根. 证毕.

8. 证明：设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上存在二阶导数. 若 $f(1) = 0$, 则方程

$$f''(x) + 2f'(x) \cot x = f(x)$$

在 $(0, \pi)$ 内至少有一个根.

证明：因为 $f''(x) + 2f'(x) \cot x = f(x)$ 等价于 $(f'(x) \sin x + f(x) \cos x)' = 0$ 等价于 $(f(x) \sin x)'' = 0$, 所以令函数 $F(x) = f(x) \sin x$. 于是, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上存在

二阶导数, 且 $F(0)=F(1)=F(\pi)$. 由 Rolle 定理，存在 $\eta_1\in(0,1)$ 和 $\eta_2\in(1,\pi)$, 使得 $F'(\eta_1)=0$, $F'(\eta_2)=0$. 再在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上用 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$, 使得 $F''(\xi)=0$. 证毕.

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $a\geqslant 0$, 则在 (a,b) 内存在三点 x_1,x_2,x_3, 使得

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

证明：令函数 $g(x)=x^2$, 因为 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 (a,b) 内任一点 $g(x)\neq 0$. 由 Cauchy 中值定理, 存在 $x_2\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_2)}{g'(x_2)}$. 由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(x_1)(b-a)$, 代入上式并整理，得 $f'(x_1)=(b+a)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}$. 令函数 $h(x)=x^3$, 则 f, h 两函数在 $[a,b]$ 上用 Cauchy 中值定理可知, 存在 $x_3\in(a,b)$, 使得 $f'(x_1)=(b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上可微，且 $f(0)=0,f(1)=1$, 则在 $(0,1)$ 内存在两点 ξ,η, 使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

证明：对 $(0,1)$ 内任一点 θ, 则存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使 $f(\theta)-f(0)=f'(\xi)\theta, f(1)-f(\theta)=f'(\eta)(1-\theta)$ 从而 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=\dfrac{1-\theta}{f(1)-f(\theta)}+\dfrac{\theta}{f(\theta)-f(0)}=\dfrac{f(\theta)+\theta-2\theta f(\theta)}{f(\theta)-f^2(\theta)}$. 当取 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}$ 时 (由连续函数介值性知其可行), 上式为 $\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

11. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导, 则在 (a,b) 内存在二点 ξ,η, 使得

$$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$$

证明：令函数 $g(x)=x,h(x)=\frac{1}{x},f(x),g(x),h(x)$ 均在 $[a,b](a>0)$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0,h'(x)\neq 0$ 由柯西中值定理，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\dfrac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}=\dfrac{f'(\eta)}{h'(\eta)}$, 由上两式整理得 $f'(\xi)=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

12. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，则在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi).$$

证明：令 $F(x)=f(x)f(1-x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 上可导. 又 $F(0)=F(1)$ 所以存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，故可得出 $f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)$.

13. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $a<c<b$, 则在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(a)}{(a-c)(a-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{f^{''}(\xi)}{2}.$$

证明：令 $(c-b)f(a)+(b-a)f(c)-(c-a)f(b)-\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)k=0$, 即证 $k=f^{''}(\xi)$. 令 $F(x)=(c-b)f(x)+(b-x)f(c)-(c-x)f(b)-\frac{1}{2}(x-b)(b-c)(c-x)k$, 则 $F(a)=F(b)=F(c)=0$. 于是, 由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 又 $F'(x)=(c-b)f'(x)-f(c)+f(b)-\frac{1}{2}k(b-c)(c-x)+\frac{1}{2}k(x-b)(b-c), F^{''}(x)=(c-b)f^{''}(x)+\frac{1}{2}k(b-c)+\frac{1}{2}k(b-c)=(c-b)f^{''}(x)+k(b-c)$. 对 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $F^{''}(\xi)=0$, 故 $k=f^{''}(\xi)$.

注: 本题可用“待定常数法”来做. 事实上, 将上式左端简单变形, 令 $\lambda=\dfrac{f(c)-f(a)-\frac{(c-a)(f(b)-f(a))}{b-a}}{(c-a)(c-b)}$, 作函数

$$G(t)=f(t)-\lambda(t-a)(t-b)-f(a)-\frac{(t-a)(f(b)-f(a))}{b-a}.$$

14. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$, 又 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$ 的正数，证明：在 $(0,1)$ 内存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$, 使得

$$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\ldots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1.$$

证明：令 $y_0=0,y_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, 则 $0=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n=1$. 取 $t_0=0,t_n=1$. 在 $[0,1]$ 上对 $f(x)$ 应用介值定理，可以求得一点 $t_1\in(0,1)$，使得 $f(t_1)=y_1$; 再在 $[t_1,1]$ 上对应用介值定理, 又可求得一点 $x_2\in(t_,1)$, 使得 $f(t_2)=y_2$, 如此下去, 可以求出 $t_3<t_4<\ldots<t_{n-1}<1$ 使得 $f(x_i)=y_i.(i=3,4,\ldots,n-1)$, 总之, 我们有 $f(x_i)=y_i(i=1,2,\ldots,n)$. 在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 存在 $x_i\in(t_{i-1},t_i)$, 使得 $\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(x_i)}=t_i-t_{i-1}$，即 $\frac{\alpha_i}{f'(x_i)}=t_i-t_{i-1}$. 所以 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\ldots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$.

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=0,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明: 令 $F(x)=f'(x)+f(x)$, 则 $e^xF(x)=(e^xf(x))'$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=0$ 知, $\forall\,\varepsilon>0, \exists x_0>0, \forall x>x_0$, 有 $|F(x)|<\varepsilon/2$. 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$\frac{e^xf(x)-e^{x_0}f(x_0)}{e^x-e^{x_0}}=\frac{e^\xi F(\xi)}{e^\xi}=F(\xi).$$

于是,

$$f(x)=\frac{F(\xi)(e^x-e^{x_0})}{e^x}+\frac{e^{x_0}f(x_0)}{e^x}.$$

存在 $X>x_0, \forall x>X$, 有 $\left|\dfrac{e^{x_0}f(x_0)}{e^x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是, $\forall x>X$, 成立

$$|f(x)|\leqslant|F(\xi)|+\left|\frac{e^{x_0}f(x_0)}{e^x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

16. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$, 且对任意 $x\in[0,1]$ 有

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)|,$$

则 $f(x)=0, x\in[0,1]$.

证明：$\forall\;\varepsilon>0$, 设 $|f(x)|$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上的最大值为 M，且在 x_0 点取到，即 $|f(x_0)|=M$. 由拉格朗日中值定理知，$M=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi)x_0|\leqslant|f(\xi)|x_0\leqslant M(1-\varepsilon)$. 由此知，$M=0$, 即在 $[0,1-\epsilon]$ 上 $f\equiv0$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性及 $|f(x)|$ 的连续性知, 在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv0$.

17. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$, 且存在常数 $0\leqslant L<1$, 使得对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|f'(x)|\leqslant L,$$

则方程 $f(x)=x$ 有根.

证明略. 压缩映像原理.

4.3.2

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x}$; (3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin2x}{\ln\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$; (5) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$; (6) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x^2})$;

(7) $\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{x^\beta-\beta^x}{x^x-\beta^\beta}$; (8) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$; (9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sec x)^2-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^2}{(\cos x)^2(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{(\cos x)^2}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\arctan x}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\cos 2x}{\cos x}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin x}{\sin 2x}=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^2}{(\cos\frac{\pi x}{2})^2\frac{\pi}{2}}=\dfrac{8}{\pi^2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\pi x}=\dfrac{8}{\pi^3}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\cos\pi x}=\dfrac{8}{\pi^3}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\sin x\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=0.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2-x^2}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(\cos x^2-1)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2-1}{2x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{4x^2}=0.$

(7) $\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{x^\beta-\beta^x}{x^x-\beta^\beta}=\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{e^{\beta\ln x}-e^{x\ln\beta}}{e^{x\ln x}-e^{\beta\ln\beta}}=\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{\beta^x(e^{\beta\ln x-x\ln\beta}-1)}{\beta^\beta(e^{x\ln x-\beta\ln\beta}-1)}=\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{\beta\ln x-x\ln\beta}{x\ln x-\beta\ln\beta}=\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{\frac{\beta}{x}-\ln\beta}{1+\ln x}=\dfrac{1-\ln\beta}{1+\ln\beta}.$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x+c^x}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$

另解: 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{3}}=\sqrt[3]{abc}.$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e\cdot(\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}e\cdot\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}e\cdot\dfrac{-x}{2x(1+x)}=-\dfrac{e}{2}.$

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\frac{x}{x^2+1}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}}=e^{-1}.$

2. 证明：若函数 $\varphi(x)$ 在点 x 存在二阶导数，则

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(x+\tau)+\varphi(x-\tau)-2\varphi(x)}{\tau^2}=\varphi''(x).$$

证明：

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(x+\tau)+\varphi(x-\tau)-2\varphi(x)}{\tau^2}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi'(x+\tau)-\varphi'(x-\tau)}{2\tau}\\ =\ &\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{\varphi'(x+\tau)-\varphi'(x)}{\tau}+\frac{\varphi'(x-\tau)-\varphi'(x)}{-\tau}\right)=\varphi''(x).\end{aligned}$$

3. 设 u, v, w 有连续二阶导数，计算极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(x+h) & v(x+h) & w(x+h) \\ u(x+2h) & v(x+2h) & w(x+2h) \end{vmatrix}$$

解；由行列式性质得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(x+h) & v(x+h) & w(x+h) \\ u(x+2h) & v(x+2h) & w(x+h) \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ \frac{u(x+h)-u(x)}{h} & \frac{v(x+h)-v(x)}{h} & \frac{w(x+h)-w(x)}{h} \\ \frac{u(x+2h)-2u(x+h)+u(x)}{h^2} & \frac{v(x+2h)-2v(x+h)+v(x)}{h^2} & \frac{w(x+2h)-2w(x+h)+w(x)}{h^2} \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(x+h) & v'(x+h) & w'(x+h) \\ \frac{u'(x+2h)-u'(x+h)}{h} & \frac{v'(x+2h)-v'(x+h)}{h} & \frac{w'(x+2h)-w'(x+h)}{h} \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(x+h) & v'(x+h) & w'(x+h) \\ 2u''(x+2h)-u''(x+h) & 2v''(x+2h)-v''(x+h) & 2w''(x+2h)-w''(x+h) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \\ u^{''}(x) & v^{''}(x) & w^{''}(x) \end{vmatrix}.$$

4. 问 α 与 β 取何值时，有极限

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{\alpha}{x^2}+\beta)=0.$$

解; 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\alpha x+\beta x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x+\alpha+3\beta x^2}{3x^2}=0$. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}(3\cos 3x+\alpha+3\beta x^2)=0$, 得 $\alpha=-3$. 又, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-9\sin 3x+6\beta x}{6x}=0$, 故得 $\beta-\dfrac{9}{2}=0$, 即 $\beta=\dfrac{9}{2}$.

5. 问 δ 取何值时，有极限

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{x+\delta}{x-\delta})^x=4.$$

解；由 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x+\delta}{x-\delta})^x=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{2\delta}{x-\delta})^x=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{2\delta}{x-\delta})^{\frac{x-\delta}{2\delta}\cdot\frac{2x\delta}{x-\delta}}=e^{2\delta}$, 得 $e^{2\delta}=4\Rightarrow\delta=\ln 2$.

另解: 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+\delta}{x-\delta})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x+\delta}{x-\delta}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\delta x}{x-\delta}} = e^{2\delta}$, 得 $e^{2\delta}=4\Rightarrow\delta=\ln 2$.

6. 设

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

其中 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=2010$, 求 $F'(0)$.

解；因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}=1005$, 所以 $F'(0)=1005$.

7. 讨论

$$F(x)=\begin{cases}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-1/2}, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解；记 $h(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\cdot\big(\dfrac{1}{1+x}-1\big)=-\dfrac{1}{2}$. 因 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=e^{\lim\limits_{x\to0^+}h(x)}=e^{-1/2}$, 得到 $F(0+0)=e^{-1/2}$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=e^{-1/2}$, 得到 $F(0-0)=e^{-1/2}=F(0+0)=F(0)$. 故, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在, 证明：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{f(x)}=1$.

证明：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{f(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{f(x)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}}=e^{f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=1$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=B$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$.

证明: 因 $[e^xf(x)]'=e^x(f(x)+f'(x))$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=B$

4.3.3

1. 求下列函数在指定点的泰勒公式 (展开到指定的 n 次)：

(1) $f(x)=\sin x$, 在 $x=\frac{\pi}{4}, n=6$;

(2) $f(x)=e^{\sin x}$, 在 $x=0, n=4$;

(3) $f(x)=\sqrt{3+\sin x}$, 在 $x=0, n=3$;

(4) $f(x)=x^5-x^2+2x-1$, 在 $x=-1, n=6$;

(5) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 在 $x=0, n=3$;

(6) $f(x)=\tan x$, 在 $x=0, b=5$;

(7) $F(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}, & x\neq0\\ 1, & x=0.\end{cases}$, 在 $x=0, n=4$;

(8) $G(x)=\begin{cases}\ln\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$，在 $x=0, n=5$.

答案略

2. 利用函数的泰勒公式求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x^2)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\csc x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))$.

解: (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}.$

(2) 因为 $\ln(1+\sin x^2)=\sin x^2-\dfrac{\sin^2 x^2}{2}+o(x^4)=x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$,

$$6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)=6\Big(\frac{1}{3}(1-\cos x)+\frac{1}{2}\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(1-\cos x)^2+o(x^4)\Big)=2(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

所以

$$\ln(1+\sin x^2)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)=x^2-\frac{x^4}{2}-2(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)=-\frac{x^4}{4}+o(x^4).$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x^2)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}=-\dfrac{1}{4}.$

(3) 因为 $\sin x-x=-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\csc x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+o(x^3)}{6x^2}=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))=\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o(\dfrac{1}{x^2})))=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{2}+o(1))=\dfrac{1}{2}.$

3. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$.

证明：因为 $e=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}, 0<\theta_n<1, e=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}}, 0<\theta_{n+1}<1$. 两式相减，得 $e^{\theta_n}=1+\dfrac{1}{n+2}e^{\theta_{n+1}}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\theta_n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}e^{\theta_{n+1}}=1$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$. 又 $2\pi en!=2\pi n!(1+1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n})=2\pi n!(1+1+\ldots+\dfrac{1}{n!})+\dfrac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}2\pi e^{\theta_n}=2\pi.$

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在二阶导数，且 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$, 则在 (α,β) 内存在一点 ξ, 使得

$$|f^{''}(\xi)|\geqslant\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

证明；函数 $f(x)$ 在 α,β 处 $Taylor$ 展开，得

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=f(\alpha)+f'(\alpha)(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)+\frac{f^{''}(\xi_1)}{2!}(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)^2,\quad \xi_1\in(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}),$$
$$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=f(\beta)+f'(\beta)(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta)+\frac{f^{''}(\xi_2)}{2!}(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta)^2,\quad \xi_2\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta).$$

于是,

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=\frac{1}{2}\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}|f^{''}(\xi_1)-f^{''}(\xi_2)|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\frac{|f^{''}(\xi_1)|+|f^{''}(\xi_2)|}{2},$$

取 ξ 满足 $|f^{''}(\xi)|=\max\{|f^{''}(\xi_1)|,\ |f^{''}(\xi_2)|\}$, 则得到 $|f^{''}(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(\beta-\alpha)^2}|f(\beta)-f(\alpha)|$.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$, $\min\{f(x): x\in[0,1]\}=-1$, 则在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使

$$f^{''}(\xi)\geqslant 8.$$

证明；令 $f(x_0)=\min\{f(x):x\in[0,1]\}=-1$，而 $f(0)=f(1)=0$，故 x_0 是 $(0,1)$ 内的极小值点，故 $f'(x_0)=0$. 将 $f(0),f(1)$ 在 $x=x_0$ 处 $Taylor$ 展开, 有

$$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f^{''}(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2,\quad \xi_1\in(0,x_0),$$
$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f^{''}(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,\quad \xi_2\in(x_0,1).$$

当 $x_0\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，$f^{''}(\xi_1)=\dfrac{2}{x_0^2}\geqslant 8\geqslant\dfrac{2}{(1-x_0)^2}=f^{''}(\xi_2)$. 当 $x_0\in[\frac{1}{2},1)$ 时，$f^{''}(\xi_1)=\dfrac{2}{x_0^2}\leqslant 8\leqslant\dfrac{2}{(1-x_0)^2}=f^{''}(\xi_2)$. 当 $f^{''}(\xi_1)\geqslant f^{''}(\xi_2)$ 时，令 $\xi=\xi_1$; 当 $f^{''}(\xi_1)\leqslant f^{''}(\xi_2)$ 时，令 $\xi=\xi_2$. 从而 $f^{''}(\xi)\geqslant 8$.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在二阶导数，设

$$\Lambda_k=\sup\{f^{(k)}(x)|:x\in(\alpha,+\infty)\},\quad k=0,1,2,\quad f^{(0)}(x)=f(x),$$

则 $\qquad \Lambda_1^2\leqslant 4\Lambda_0\Lambda_2.$

证明：对 $h>0$, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f^{''}(\xi)}{2}h^2$, ξ介于x与$x+h$之间. 于是,

$$|f'(x)|h\leqslant|f(x+h)|+|f(x)|+h^2\frac{|f^{''}(\xi)|}{2}\leqslant 2\Lambda_0+h^2\frac{\Lambda_2}{2}.$$

从而 $|f'(x)| \leqslant \frac{2\Lambda_0}{h} + \frac{h}{2}\Lambda_2$. 故 $\Lambda_1 \leqslant \min\{\frac{2\Lambda_0}{h} + \frac{h}{2}\Lambda_2\} = 2\sqrt{\Lambda_0\Lambda_2}$, 即 $\Lambda_1^2 \leqslant 4\Lambda_0\Lambda_2$.

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在二阶导数，设

$$\Lambda_k = \sup\{f^{(k)}(x)| : x \in (\alpha,+\infty)\}, \quad k = 0,1,2, \quad f^{(0)}(x) = f(x),$$

则 $\Lambda_1^2 \leqslant 2\Lambda_0\Lambda_2$.

证明：对 $h > 0$, 将 $f(x \pm h)$ 在 x 处 $Taylor$ 展开, 得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, \qquad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,$$

其中 ξ_1, ξ_2依次介于x与$x \pm h$之间. 两式相减，得

$$2|f'(x)|h \leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + h^2\frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \leqslant 2\Lambda_0 + h^2\Lambda_2.$$

从而 $|f'(x)| \leqslant \frac{\Lambda_0}{h} + \frac{h}{2}\Lambda_2$. 故 $\Lambda_1 \leqslant \min\{\frac{\Lambda_0}{h} + \frac{h}{2}\Lambda_2\} = 2\sqrt{\frac{\Lambda_0\Lambda_2}{2}}$, 即 $\Lambda_1^2 \leqslant 2\Lambda_0\Lambda_2$.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在任意阶导数，则对任意自然数 n 和任意 α, 有

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{d^n}{dx^n}[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}] = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n+1}.$$

证明：由 Leibniz 公式, 有

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}] &= \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}}[f(x) - f(\alpha)] + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-\alpha)^{n-k+1}} \\
&= \frac{-n!}{(\alpha-x)^{n+1}}[f(x) - f(\alpha)] + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(-1)^{n-k+1}(\alpha-x)^{n-k+1}} \\
&= \frac{n!}{(\alpha-x)^{n+1}}[f(\alpha) - f(x)] + \frac{-n!}{(\alpha-x)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\alpha-x)^k.
\end{aligned}$$

将 $f(\alpha)$ 在 x 处进行 $Taylor$ 展开, 得

$$f(\alpha) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\alpha-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(\alpha-x)^{n+1},$$

其中 ξ_n 介于 x 与 α 之间. 于是,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\alpha-x)^k = f(\alpha) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(\alpha-x)^{n+1}.$$

因此, 有

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^n}{dx^n}[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}] \\
= \quad & \frac{n!}{(\alpha-x)^{n+1}}[f(\alpha)-f(x)]+\frac{-n!}{(\alpha-x)^{n+1}}\Big(f(\alpha)-f(x)-\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(\alpha-x)^{n+1}\Big) \\
= \quad & \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{n+1}.
\end{aligned}
$$

当 $x\to\alpha$ 时, 有 $\xi_n\to\alpha$, 已知 $f^{n+1}(x)$ 连续, 得到

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}]=\lim_{x\to\alpha}\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n+1}.$$

9. 证明：若函数 $f^{(n+1)}(x)$ 在 α 的邻域内连续，

$$f(\alpha+\tau)=f(\alpha)+\tau f'(\alpha)+\ldots+\frac{\tau^n}{n!}f^{(n)}(\alpha+\theta\tau), 0<\theta<1$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{\tau\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证明；$f(x+h)$ 在点 α 的 $n+1$ 阶 Taylor 公式

$$f(\alpha+\tau)=f(\alpha)+\tau f'(\alpha)+\ldots+\frac{\tau^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\alpha+\theta_1\tau), \quad 0<\theta_1<1$$

与已知的 n 阶 Taylor 公式相减, 得到

$$[f^{(n)}(\alpha+\theta\tau)-f^{(n)}(\alpha)]\cdot\frac{\tau^n}{n!}=\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\alpha+\theta_1\tau).$$

对上式左边用 Lagrange 中值定理, 存在介于 α 与 $\alpha+\theta\tau$ 之间的 ξ, 使得

$$f^{(n+1)}(\xi)\cdot\theta\tau\cdot\frac{\tau^n}{n!}=\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\alpha+\theta_1\tau)\Rightarrow\ \theta=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\alpha+\theta_1\tau)}{f^{(n+1)}(\xi)}.$$

令 $\tau\to 0$, 得到 $\lim\limits_{\tau\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

4.3.4

1. 讨论下列函数的单调区间:

(1) $f(x)=x^3-3x+1$;

(2) $f(x)=2x^2-\ln x$;

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

(4) $f(x)=(x+2)^4(x-1)^3$;

(5) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;

(6) $f(x)=e^{-x}\sin x$.

解：(1) 因为 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，单调增区间 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; 单调减区间 $[-1,1]$

(2) 为 $f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$, 单调增区间 $[-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},+\infty)$; 单调减区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2}]$.

(3) 因为 $f'(x)=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$ 单调增区间 $[-1,1]$; 单调减区间 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$.

(4) 因为 $f'(x)=(x+2)^3(x-1)^2(7x+2)$ 单调增区间 $(-\infty,-2),(-\frac{2}{7},+\infty)$; 单调减区间 $[-2,-\frac{2}{7}]$.

(5) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$, $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, 单调增区间 $[0,1]$; 单调减区间 $(1,2]$.

(6) 因为 $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$ 单调增区间 $(\frac{5}{4}\pi+2k\pi,\frac{9}{4}\pi+2k\pi)$; 单调减区间 $[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi]$.

2. 证明下列不等式：(1) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x,x\in(0,+\infty)$;

(2) $x-\dfrac{x^3}{3}<\tan x,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$;

(3) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2(1+x)},x\in(0,+\infty)$;

(4) $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x},x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$;

(5) $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

证明：(1) 令 $f(x)=x-\sin x$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f'(x)=1-\cos x>0$ $(x>0)$, 故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格增函数. 于是, 对 $x>0$, 有 $f(x)>f(0)=0$, 即 $x>\sin x$. 令 $g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $g(0)=0$, $g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$, $g'(0)=0$, $g''(x)=x-\sin x>0$ $(x>0)$. 于是 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增, 推出 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增. 因此, 对 $x>0$, 有 $g(x)>g(0)$, 即 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$. 故 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$.

(2) 令 $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}-\tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上连续, $f(0)=0$, 且对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 有 $f'(x)=\dfrac{-x^2(\cos x)^2-(\sin x)^2}{(\cos x)^2}<0$. 因此, $f(x)$C 是严格减函数, 对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 有 $f(x)<f(0)=0$, 即 $x-\dfrac{x^3}{3}<\tan x$.

(3) 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f(0)=0$, 且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$, $f''(x)=1-\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ $(x>0)$. 推知 $f'(x)>f'(0)=$

0 $(x>0)$, 即 $f(x)$ 在 $x>0$ 上严格单增. 所以对 $x>0$, 有 $f(x)>f(0)=0$, 即 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$. 设 $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$g(0)=0$, 且 $g'(x)=\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}>0$ $(x>0)$. 所以 $g(x)$ 在 $x>0$ 上严格单增，从而对 $x>0$, 有 $g(x)>g(0)=0$, 即 $\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}$. 故 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}$ $(x>0)$.

(4) 设 $f(x)=\tan x\sin x-x^2$, 则 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上连续, $f(0)=0$, 且对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 有 $f'(x)=\tan x\sec x+\sin x-2x$, $f'(0)=0$, $f''(x)=\sec^3 x+\sin x\sec^2 x+\cos x-2>\frac{1}{\cos x}+\cos x-2>0$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$. 所以 $f'(x)>0$ $(x\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$, $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上严格递增，从而对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 有 $f(x)>f(0)=0$, $\tan x\sin x>x^2$, 即 $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$.

(5) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$ $(x\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$. 所以，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上严格减. 又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以对 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 有 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$, 即 $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

3. 求下列函数的极值：

(1)$f(x)=2010x^4-x^3$;

(2)$f(x)=x-\sin x$;

(3)$f(x)=\frac{2x}{2+x^2}$;

(4)$f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\sin x^2$;

(5)$f(x)=xe^{-x}$;

(6)$f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$.

解：(1)$f'(x)=8040x^3-3x^2$, 由 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=0$, $\dfrac{1}{2680}:=x_0$. 由于当 $x<x_0$ 时有 $f'(x)<0$; 当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$, 所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点. 极小值 $f(x_0)=\dfrac{1}{4(2680)^3}$.

(2) 由 $f'(x)=1-\cos x=0$ 得驻点 $x_k=2k\pi$ $(k\in\mathrm{Z})$. 又, $f''(x)=\sin x$, $f''(x_k)=0$, $f'''(x_k)=\cos x_k=1\neq0$, 所以 $f(x)$ 无极值.

(3) 由 $f'(x)=\dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$ 得驻点 $x=\pm\sqrt{2}$. 又 $f''(x)=-\dfrac{4(-x^4+4x^2+12)}{(x^2+2)^4}$, $f''(\sqrt{2})<0$, $f''(-\sqrt{2})>0$, 故 $f(x)$ 的极大值为 $f(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 极小值为 $f(-\sqrt{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}=0$

(5) 由 $f'(x)=e^{-x}(1-x)=0$ 得驻点 $x=1$. 又 $f''(x)=e^{-x}(x-2)$, $f''(1)=-e^{-1}<0$, 所以，$f(x)$ 的极大值为 $f(1)=e^{-1}$.

(6) 由 $f'(x)=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=0$ 得两驻点 $x=e^2$, 1. 又 $f''(x)=\dfrac{2x-6x\ln x+2x(\ln x)^2}{x^6}$, $f''(1)=2>0$, $f''(e^2)=-\dfrac{2}{e^6}<0$, 所以，$f(x)$ 极大值为 $f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$, 极小值为 $f(1)=0$.

4. 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值：

(1)$f(x)=3^x, x\in[-1,4]$;

(2)$f(x)=2\tan x-\sin^2 x,\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$;

(3)$f(x)=x\ln x,\ x\in(0,e]$;

(4)$f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x,\ x\in[0,\dfrac{3\pi}{4}]$.

解；(1 当 $x\in[-1,4]$ 时，$f'(x)=3^x\ln 3>0$, 所以 $f(x)$ 在 [-1,4] 上严格单调增. 故 $f_{\max}(4)=81$, $f_{\min}(-1)=\dfrac{1}{3}$.

(2) 因为当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, $f'(x)=\dfrac{2}{(\cos x)^2}-\sin 2x=\dfrac{4-\sin 2x-\sin 2x\cos 2x}{1+\cos 2x}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上严格单调增. 又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=+\infty$, 故 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上无最大值，最小值为 0.

(3) 由 $f'(x)=\ln x+1=0$, 得唯一驻点 $x=e^{-1}$. 当 $x\in(e^{-1},e)$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调增; 当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调减. 又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$, $f(e)=e$, $f(e^{-1})=-e^{-1}$, 故 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最大值为 e，最小值为 $-e^{-1}$.

(4) 由 $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x\sin(x-\dfrac{\pi}{4})=0$, 得两驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$. 计算得到 $f(0)=1$, $f(x_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x_2)=1$, $f(\dfrac{3\pi}{4})=0$. 故 $f(x)$ 在 $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$ 上的最大值为 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=1$，最小值为 0.

5. 问 $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ 取何值时? 函数 $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\delta x+\gamma$ 在 $x=-1$ 有极大值 8，在 $x=2$ 有最小值 -19.

解：由 $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\delta$ 和 $f(-1)=8$, $f(2)=-19$, $f'(-1)=0$, $f'(2)=0$, 得到

$$\begin{cases}-\alpha+\beta-\delta+\gamma=8,\\ 8\alpha+4\beta+2\delta+\gamma=-19,\\ 3\alpha-2\beta+\delta=0,\\ 12\alpha+4\beta+\delta=0.\end{cases}$$

解得: $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\delta=-12$, $\gamma=1$.

6. 设函数 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^x, f'(x_0)=0$，问 x_0 是否为 $f(x)$ 的极值点.

解：当 $x_0\neq 0$ 时，x_0 为极小值点. 事实上, 由条件知，$x_0f''(x_0)=1-e^{x_0}$. 由于当 $x_0<0$ 时, $1-e^{x_0}>0$; 当 $x_0>0$ 时, $1-e^{x_0}<0$, 故 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{x_0}}{x_0}<0$, 即 x_0 为极大值点.

当 $x = 0$ 时，若 $f^{''}(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $x = 0$ 仍为极大值点. 其实, $f^{''}(0) = \lim_{x\to 0} f^{''}(x) = \lim_{x\to 0}(\frac{1-e^x}{x} - 3[f'(x)]^2) = -1 < 0$, 故之.

7. 求最小整数 α，使得

$$5x^2 + \alpha x^{-5} \geqslant 24 \quad (x > 0).$$

解；令 $f(x) = 24x^5 - 5x^7$，则由 $\alpha \geqslant f(x)$ 可知, 考虑 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最大值即可. 由 $f'(x) = 120x^4 - 35x^6 = 0$ 得到 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的唯一驻点 $x_0 = 2\sqrt{\frac{6}{7}}$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$, $f(x)$ 严格单调增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$, $f(x)$ 严格单调减. 又 $f(0) = 0$, $f(+\infty) = -\infty$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上最大值为 $f(x_0) = \frac{55296}{343}\sqrt{\frac{6}{7}} \approx 149.25$，因此, 所求最小整数 $\alpha = 150$.

8. 求最小整数 α，使得

$$(1 + x^{-1})^{x+\alpha} > e \quad (x > 0).$$

解: 令 $h(x) = (x + \alpha)\ln(1 + x^{-1}) - 1$, 则 $h(+\infty) = 0$, $h'(+\infty) = 0$, 且

$$h''(x) = \frac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{x^2(x+1)^2}.$$

当 $\alpha < 1/2$ 时, 对充分大的 x, $h''(x) < 0$. 由 $h'(+\infty) = 0$ 知 $h'(x) > 0$; 再由 $F(+\infty) = 0$ 知 $h(x) < 0$. 故 α 不满足题设不等式要求.

当 $\alpha \geqslant 1/2$ 时, $\forall x > 0$, $h''(x) > 0$. 由 $h'(+\infty) = 0$ 知 $h'(x) < 0$; 再由 $F(+\infty) = 0$ 知 $h(x) > 0$. 故 α 满足题设不等式要求.

因此, 满足题设要求的数为 $1/2$, 所求最小整数为 1.

9. 设函数 $f(x)$ 满足

$$f^{''}(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0,$$

其中 $g(x)$ 为任一函数. 证明：若 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [x_1, x_2]$.

证明: 由 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，知 $f(x)$ 存在最大值 M 和最小值 m. 于是存在 ξ, $\eta \in [x_1, x_2]$ 使 $M = f(\xi)$ 和 $m = f(\eta)$. 下面证明 $M = m = 0$, 从而 $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$.

事实上, 假设 $M \neq 0$, 则 $\xi \in (x_1, x_2)$, $M = f(\xi) > 0$, ξ 为 $f(x)$ 的极大值点, 且 $f'(\xi) = 0$. 但由题设，$f^{''}(\xi) + f'(\xi)g(\xi) - f(\xi) = 0$, 即 $f^{''}(\xi) = f(\xi) > 0$. 于是 $f(\xi)$ 为极小值，矛盾. 故 $M = 0$. 同理, $m = 0$. 得证.

10. 构造一整数系数多项式 $\alpha x^2 - \beta x + \delta$, 在 $(0, 1)$ 内有两个相异的根，并给出满足此条件 α 的最小正整数.

解：设 x_1，x_2 为 $f(x)=\alpha x^2-\beta x+\delta$ 在 $(0,1)$ 内的两个不同的根，则 $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$，$f(0)f(1)=\alpha(-x_1)(-x_2)\alpha(1-x_1)(1-x_2)=\alpha^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)>0$. 又 $f(0)f(1)=\delta(\alpha-\beta+\delta)$ 为整数, 故 $f(0)f(1)$ 为正整数，$f(0)f(1)\geqslant 1$. 即 $1\leqslant\alpha^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)\leqslant\frac{1}{16}\alpha^2$, 得 $\alpha^2\geqslant 16$, $\alpha\geqslant 4$. 故满足条件的最小正整数 α 为 4.

11. 设函数 $f(x)$ 在 (α,β) 内存在二阶导数，且存在 $\xi\in(\alpha,\beta)$，使 $f''(\xi)>0$，证明：存在 $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证明：令 $F(x)=f(x)-xf'(\xi)$, 则 $F'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0$, $F''(\xi)=f''(\xi)>0$. 由 $F''(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi}\frac{F'(x)}{x-\xi}>0$ 可知, $\exists\,\delta>0$, 使得 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset(\alpha,\beta)$, 且当 $\xi-\delta<x<\xi$ 时, $F'(x)<0$; 当 $\xi<x<\xi+\delta$ 时, $F'(x)>0$. 因此, $x=\xi$ 为 $F(x)$ 的极小值点.

由 $F(x)$ 的严格单调性, 有 $f(\xi)<\min\{F(\xi-\delta),F(\xi+\delta)\}:=m$. 于是, 任取 $\eta\in(F(\xi),m)$, 由连续函数介值定理知, 存在 x_1，x_2, 满足 $\alpha<x_1<\xi<x_2<\beta$, 使得 $F(x_1)=F(x_2)=\eta$. 如此 x_1，x_2 即为所求. 事实上由 $0=\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-f'(\xi)$ 即得.

4.3.5

1. 讨论下列函数的凸（凹）性和拐点:

(1) $f(x)=\arctan x$;

(2) $f(x)=e^{-x^2}$;

(3) $f(x)=x\arctan\frac{1}{x}$;

(4) $f(x)=2x^2-3x+1$;

(5) $f(x)=\ln(x^2+1)$;

(6) $f(x)=e^{-x}\sin x$.

解：(1) 由于 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x)^2}$, 令 $f''(x)=0$, 得解 $x=0$. 于是，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是凸函数，在 $(0,+\infty)$ 内是凹函数. 点 $(0,0)$ 为函数的拐点.

(2) 由于 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$, 令 $f''(x)=0$, 得解 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 内是凸函数，在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内是凹函数. 点 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},f(\frac{-\sqrt{2}}{2})),(\frac{\sqrt{2}}{2},f(\frac{\sqrt{2}}{2}))$ 为函数的拐点.

(3) 由于 $f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}, f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x^2)^2}<0$, 所以，函数 $f(x)$ 为凹函数.

(4) 由于 $f'(x)=4x-3, f''(x)=4>0$, 所以，函数 $f(x)$ 为凸函数.

(5) 由于 $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 令 $f''(x)=0$, 得解 $x=\pm1$. 于是，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内是凹函数，在 $(-1,1)$ 内是凸函数. 点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 为函数的拐点.

(6) 由于 $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$, $f''(x)=-2e^{-x}\cos x$, 令 $f''(x)=0$, 得解 $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 其中 $k\in\mathrm{Z}$. 于是，函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$ 内是凹函数，在 $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ 内是凸函数. 点 $(\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,f(\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi))$ 为函数的拐点.

2. 问 α,β 为何值时，点 $(2,3)$ 为曲线 $y=\alpha x^3+\beta x^2$ 的拐点.

解；由于 $y'=3\alpha x^2+2\beta x$, $y''=6x\alpha+2\beta$, 令 $y''=0$, 得 $6x\alpha+2\beta=0$. 将 $(2,3)$ 代入，得 $\alpha=-\dfrac{3}{16}$, $\beta=\dfrac{9}{8}$. 故当 $(\alpha,\beta)=(-\dfrac{3}{16},\dfrac{9}{8})$ 时，点 $(2,3)$ 为曲线 $y=\alpha x^3+\beta x^2$ 的拐点.

3. 证明下列不等式：

(1) $(\dfrac{\alpha+\beta}{2})^n\leqslant\dfrac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n),\alpha,\beta>0,n>1$;

(2) $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^\alpha+e^\beta),\alpha,\beta\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $(\alpha+\beta)\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta,\alpha,\beta>0$;

(4) $2\arctan(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\geqslant\arctan\alpha+\arctan\beta,\alpha,\beta>0$.

证明：(1) 取 $f(x)=x^n$，其中 $x>0,n>1$. 则 $f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$. 所以，函数 $f(x)$ 是凸函数. 取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\leqslant\dfrac{1}{2}f(\alpha)+\dfrac{1}{2}f(\beta)$, 即 $(\dfrac{\alpha+\beta}{2})^n\leqslant\dfrac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)$.

(2) 取 $f(x)=e^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 则 $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x>0$. 所以，函数 $f(x)$ 是凸函数. 取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\alpha,x_2=\beta$, 则有 $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\leqslant\dfrac{1}{2}f(\alpha)+\dfrac{1}{2}f(\beta)$, 即 $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(e^\alpha+e^\beta)$.

(3) 取 $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$, 则 $f'(x)=1+\ln x$, $f''=\dfrac{1}{x}>0$. 所以，函数 $f(x)$ 是凸函数. 取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, 则有 $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\leqslant\dfrac{1}{2}f(\alpha)+\dfrac{1}{2}f(\beta)$, 即 $(\alpha+\beta)\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta$.

(4) 取 $f(x)=\arctan x$, $x\in(0,+\infty)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$. 所以，函数 $f(x)$ 是凹函数. 取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, 则有 $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\geqslant\dfrac{1}{2}f(\alpha)+$

$\frac{1}{2}f(\beta)$, 即 $2\arctan(\frac{\alpha+\beta}{2}) \geqslant \arctan\alpha + \arctan\beta$.

4. 证明：若函数 $f(x)$ 为区间 Λ 上凸函数的充分必要条件是：对于 Λ 上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，总有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

证明：由注记 4.3.18, 函数 $f(x)$ 为区间 Λ 上凸函数的充分必要条件是：对于 Λ 上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，总有

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

而

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 0 & x_2-x_1 & f(x_2)-f(x_1) \\ 0 & x_3-x_1 & f(x_3)-f(x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1)) - (x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \\ &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\Big(\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Big), \end{aligned}$$

由此可得证结论.

5. 证明 Hölder 不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k \leqslant (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} \beta_k^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\alpha_k, \beta_k > 0 (k = 1, 2, \ldots, n), p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证明：Jensen 不等式：若 $f(x)$ 为凸函数，则 $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$, 其中 $\lambda_k \in (0,1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ 且 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. 令 $f(x) = x^p$, 则 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的凸函数. 令

$$\lambda_k = \frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^q}, \qquad x_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k^{q-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, 且有

$$f(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k)=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j^q}\frac{\alpha_k}{\beta_k^{q-1}}\Big)^p=\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\beta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_j^q}\Big)^p=\frac{(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k)^p}{(\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j^q)^p},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j^q}(\frac{\alpha_k}{\beta_k^{q-1}})^p=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_j^q}.$$

所以，由 $f(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$, 得到

$$(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k)^p\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^q)^{p-1}.$$

两边同时开 p 次方, 并注意到 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{p-1}{p}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^q)^{\frac{p-1}{p}}=(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^q)^{\frac{1}{q}}.$$

证毕.

注: 可利用 Young 不等式 $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$ $(a,b\geqslant 0,p^{-1}+q^{-1}=1,p>1)$ 来做. 事实上, 在 Young 不等式中, 取

$$a=\alpha_k/(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p)^{\frac{1}{p}},\qquad b=\beta_k/(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^q)^{\frac{1}{q}},$$

再求和并整理即得. 另外, 由 Hölder 不等式可容易得到 Minkowskii 不等式:

$$(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^p)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\alpha_k,\beta_k\geqslant 0(k=1,2,\ldots,n),p>1$.

4.3.6

1. 求下列曲线的渐近线:

(1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$;

(3) $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$;

(4) $f(x)=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$.

解：(1) 因为 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, 所以 $f(x)$ 有垂直渐近线 $x=-3$ 和 $x=1$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 所以 $k=1$. 由于

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x)=-2,$$

所以，$b=-2$. 于是有斜渐近线 $y=x-2$.

(2) 首先, 曲线有垂直渐近线 $x=0$. 其次, 因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+2x-1}{x}-x)=2,$$

所以曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=x+2$.

(3) 渐近线为 $y=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}x$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\dfrac{1}{x})=1$, 即 $k=1$, 并且

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(x\ln(e+\frac{1}{x})-x)=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{xe})=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2x})=\frac{1}{e},$$

所以, 曲线有斜渐近线 $y=x+e^{-1}$.

2. 讨论下列函数的形态，并作出其图像：

(1) $f(x)=e^{-x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2}{1(x+1)^2}$;

(3) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解；(1) $f'(x)=-2xe^{-x^2}, f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$ 拐点为 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 当 $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$f(x)$ 为增函数，凹函数. 当 $x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 时，$f(x)$ 为增函数，凹函数. 当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$f(x)$ 为减函数，凹函数. 当 $x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 为减函数，凸函数.

(2) $f'(x)=\dfrac{x(1-x)}{2(x+1)^2}$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 递增. 当 $x(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$ 且 $x\neq-1$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 递减. $f''(x)=\frac{1-3x}{(x+1)^3}$, 当 $x\in(-\infty,\frac{1}{3}), f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 为凸函数. 当 $x\in(\frac{1}{3},+\infty)$ 时，$f(x)$ 为凹函数. 垂直渐近线为 $x=-1$.

(3) 定义域为 $(-1,1)$. $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$ 当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 递增. $f''(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$. 当 $x\in(-1,0)$ 时，$f''(x)<0, f(x)$ 为凹函数. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f''(x)>0, f(x)$ 为凸函数.

(4) $f'(x)=\dfrac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ 当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{3})\bigcup(1,+\infty)$ 且 $x\neq -1$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 为增函数. 当 $x\in(-\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 为减函数.

$$f''(x)=\frac{8x}{(x^2-1)\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$$

当 $x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$ 时，$f''(x)<0, f(x)$ 为凹函数. 当 $x\in(-1,0)\bigcup(1,+\infty)$ 时，$f''(x)>0, f(x)$ 为凸函数.

图像略.