==================================

一元分析学习题答案（第一章）

==================================

习题 1.1

1.(1) 解　依题意有

$$\begin{cases} 1 < x-1 < 2 \\ x-1 > 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} -2 < x-1 < -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

解不等式得 $2 < x < 3$ 或 $-1 < x < 0$, 所以不等式的解的区间为 $(2,3) \cup (-1,0)$.

1.(2) 解　依题意有 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$. 不等式的解的区间为 $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}], (k \in \mathbb{Z})$.

1.(3) 解　依题意有 $\frac{x}{1+x} < 0$, 解之得 $-1 < x < 0$, 所以不等式的解的区间为 $(-1,0)$.

2.(1) 证　$\sup E = 1, \inf E = 0$.

(a) 对 $\forall x \in E$, 有 $x \leqslant 1$. 又对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, 在 $(1-\varepsilon, 1)$ 间有无穷多个无理数, 取其一为 x_0, 则 x_0 满足 $x_0 > 1-\varepsilon$, 所以 $\sup E = 1$.

(b) 对 $\forall x \in E$, 有 $x \geqslant 0$. 又, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $(\varepsilon < 1)$, 在 $(0, \varepsilon)$ 间有无穷多个无理数, 取其一为 x_1, 则 $x_1 \in E$ 满足 $0 < x_1 < \varepsilon$, 所以 $\inf E = 0$.

2.(2) 证　$\sup E = 1, \inf E = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(a) 对 $\forall x \in E$, 有 $x \leqslant 1$. 又对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, 由 $1 - \frac{1}{2^n} > 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ 解得 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $x_0 = 1 - \frac{1}{2^N}$ $(N = [\varepsilon^{-1}] + 1)$, 则 $x_0 \in E$ 且 $x_0 > 1 - \varepsilon$. 故 $\sup E = 1$.

(b) 对 $\forall x \in E$, 有 $x \geqslant \frac{1}{2}$. 又对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$, 由 $\frac{1}{2} + \varepsilon > 1 - \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$ 解得 $1 \leqslant n < \log_2^{\frac{2}{1-2\varepsilon}}$. 取满足如此条件的一个 n_1, 则 $x_{n_1} \in E$ 且 $x_{n_1} < 1 - \frac{1}{2^{n_1}}$. 故, $\inf E = \frac{1}{2}$.

2.(3) 证　$\sup E = 1, \inf E = \frac{1}{2}$.

(a) 又对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, 由 $1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ 解得 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $x_0 = 1 - \frac{1}{2^N}$ $(N = [\varepsilon^{-1}] + 1)$, 则 $x_0 \in E$ 且 $x_0 > 1 - \varepsilon$. 故 $\sup E = 1$.

(b) 对 $\forall x \in E$, 有 $x \geqslant \frac{1}{2}$. 又对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$, 由 $\frac{1}{2} + \varepsilon > 1 - \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$ 解得 $1 \leqslant n < \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}$. 取满足如此条件的一个 n_1, 则 $x_{n_1} \in E$ 且 $x_{n_1} < 1 - \frac{1}{1+n_1}$. 故, $\inf E = \frac{1}{2}$.

3. 证　“$\Rightarrow$” 因为 $\inf E = \xi$, 所以对 $\forall x \in E$, 都有 $x \geqslant \xi$. 又已知 $\xi \in E$, 所以 $\min E = \xi$.

“$\Leftarrow$” 因为 $\min E = \xi$, 所以 $\forall x \in E, x \geqslant \xi$ 成立. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $x_0 = \xi$, 则 $x_0 \in E$ 且 $x_0 < \xi + \varepsilon$). 故 $\inf E = \xi \in E$. 命题得证.

4. 证 (1) 设 $\xi_1 = \sup E_1, \xi_2 = \sup E_2$, 则对 $\forall x \in E_1$, 有 $x \leqslant \xi_1$; 对 $\forall y \in E_2$, 有 $y \leqslant \xi_2$. 于是, 对 $\forall z \in E_1 + E_1$, $z = x + y$, 有 $z \leqslant \xi_1 + \xi_2$.

又因为对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in E_1$, 使得 $x_0 > \xi_1 - \frac{\varepsilon}{2}$; 同时 $\exists y_0 \in E_2$, 使得 $y_0 > \xi_2 - \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $z_0 = x_0 + y_0$, 则 $z_0 \in E_1 + E_2$, 且使得 $z_0 > \xi_1 + \xi_2 - \varepsilon$.

综上所述, 由上确界的定义可知, $\sup(E_1 + E_2) = \xi_1 + \xi_2$, 即 $\sup(E_1 + E_2) = \sup E_1 + \sup E_2$.

(2) 设 $\eta_1 = \inf E_1, \eta_2 = \inf E_2$, 则对 $\forall x \in E_1$, 有 $x \geqslant \eta_1$; 对 $\forall y \in E_2$, 有 $y \geqslant \eta_2$. 所以对 $\forall z \in E_1 + E_2$, $z = x + y$, 有 $z \geqslant \eta_1 + \eta_2$.

又因为对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in E_1$, 使得 $x_1 < \eta_1 + \frac{\varepsilon}{2}$; 同时, $\exists y_1 \in E_2$, 使得 $y_1 < \eta_2 + \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $z_1 = x_1 + y_1$, 则 $z_1 \in E_1 + E_2$, 且使得 $z_1 < \eta_1 + \eta_2 + \varepsilon$.

综上所述, 由上确界的定义可知, $\inf(E_1 + E_2) = \eta_1 + \eta_2$, 即 $\inf(E_1 + E_2) = \inf E_1 + \inf E_2$.

习题 1.2

1.(1) 解 $\begin{cases} \cos 2x \geqslant 0 \\ 16 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{4} \\ -4 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$
$\Longrightarrow x \in [-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}] \bigcup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \bigcup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

1.(2) 解 依题意有 $\sin(\frac{\pi}{x}) > 0$, 解之得 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$, 即 $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 并记 $\frac{1}{0} = +\infty$.

1.(3) 解 $x \in \mathbb{R}$.

2. 解 以 C 为原点作数轴, 设宿舍为 D 点, D 点坐标为 x, 往返总路程为 y. 则 $y = x - (-3) + 8 + 5 + |x| = x + |x| + 16$. 所以当 $x \leqslant 0$, 即当 $x + |x| = 0$ 时, 有 $y_{\min} = 16$. 故, 宿舍应该在超市和学校之间能使往返路程最短.

3. 解 $f(g(x)) = \begin{cases} e^{g(x)}, & g(x) < 1, \\ g(x), & g(x) \geqslant 1. \end{cases}$ 让 $g(x) < 1$ 的 x 值的范围是:

$$x < -1(\text{此时 } g(x) = x + 2) \text{ 与 } 0 \leqslant x < \sqrt{2}(\text{此时 } g(x) = x^2 - 1).$$

让 $g(x) \geqslant 1$ 的 x 值的范围是:

$$-1 \leqslant x < 0(\text{此时 } g(x) = x + 2) \text{ 与 } x \geqslant \sqrt{2}(\text{此时 } g(x) = x^2 - 1).$$

故, $f(g(x)) = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1, \\ x + 2, & -1 \leqslant x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leqslant x < \sqrt{2}, \\ x^2 - 1, & x \geqslant \sqrt{2}. \end{cases}$

4. 解 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = f(0) + 2f(0)^2$, 解得 $f(0) = 0$. 令 $x = 0, y = 1$, 则 $f(1) = f(0) + 2f(1)^2$. 因为 $f(1) \neq 0$, 所以解得 $f(1) = \frac{1}{2}$. 所以有 $f(x + 1) =$

$f(x)+2f(1)^2=f(x)+\frac{1}{2}$. 因此

$$f(2010)=f(2009)+\frac{1}{2}=f(2008)+2\cdot\frac{1}{2}=\cdots=\frac{2010}{2}=1005.$$

5. 解　因为 $f(x)=\frac{x}{x-1}$, 所以 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}$. 于是,

$$f(f(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x,\qquad f(\frac{1}{f(x)})=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x.$$

因此 $f(f(f(f(x))))=x$.

6. 解　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=-\dfrac{dy-b}{cy-a}$, 所以 $x=f^{-1}(y)=-\dfrac{dy-b}{cy-a}$.

两个函数相同必须要求它们有相同的定义域, 由此得到 $a=-d$. 经验证, 这也是这两个函数 $x=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 对应法则相同的条件.

7. 解　(1) 因为 $f(1)=2$, 所以 $f(1)=f(\frac{1}{2})^2$. 又因为 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})^2\geqslant 0$, 所以 $f(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$. $f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{8})^2\geqslant 0$, 所以 $f(\frac{1}{4})=\sqrt[4]{2}$.

(2) 因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(1+x)=f(1-x)$. 又 $f(x)$ 为偶函数, $f(x)=f(-x)$, 所以 $f(1-x)=f(x-1)$. 于是,$f(x+1)=f(x-1)$, 即 $f(x)=f(x+2)$, 而的 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

8. 解　$f(1-x)=\frac{1-x+|1-x|}{2}=\begin{cases}0, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$

$f(1+x)=\frac{1+x+|1+x|}{2}=\begin{cases}x+1, & x>-1,\\ 0, & x\leqslant -1.\end{cases}$

所以 $y=\begin{cases}1-x^2, & -1<x<1,\\ 0, & x\leqslant -1, x\geqslant 1.\end{cases}$

9. 证　(1) 令 $y=0$, 则因为 $f(0)=0$, 所以 $|f(x)|=|x|, f^2(x)=x^2$, 于是, 由 $|f(x)-f(y)|^2=|x-y|^2$ 得到 $f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2$. 故,$f(x)f(y)=xy$.

(2) 由 (1) 得 $f^2(x)=x^2$, 所以 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$. 若 $f(x)=x$, $f(y)=-y$, 则 $|f(x)-f(y)|=|x+y|=|x-y|$, 得 $x=0$ 或 $y=0$. 因此, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\equiv x$; 或者 $f(x)\equiv -x$. 故, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

10. 证　对 $\forall x_1\in A$, 则 $f(x_1)=x_1$, 从而有 $f(f(x_1))=f(x_1)=x_1$, 所以 $x_1\in B$. 于是 $A\subseteq B$.

另一方面, 对 $\forall x_2\in B$, 有 $f(f(x_2))=x_2$. 令 $y=f(x_2)$, 则 $f(y)=x_2$. 若 $y>x_2$, 由 $f(x)$ 是单调增加的函数, 得到 $f(y)\geqslant f(x_2)$, 即 $x_2\geqslant y$, 产生矛盾. 同理, 对 $y<x_2$ 也产生矛盾. 因此, $y=x_2$, 即 $f(x_2)=x_2$. 于是, $x_2\in A$, 即 $B\subseteq A$. 综上, 得 $A=B$.

11. 证　$a=b$ 时, 结论成立. 不妨设 $a<b$, 对任意给定的 n, 将区间 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间, 分点依次为

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\cdot\frac{b-a}{n},\ \cdots,\ a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b.$$

于是,

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}\Big\{f\big[a+\frac{k}{n}(b-a)\big]-f\big[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\big]\Big\}\Big|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big|f\big[a+\frac{k}{n}(b-a)\big]-f\big[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\big]\Big|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|b-a|^2}{n^2}\\ &= \frac{|b-a|^2}{n}.\end{aligned}$$

12. 证　因为 $(a^xb^y)(b^xc^y)(c^xa^y)=(abc)^3$, 即 $(abc)^{x+y}=(abc)^3$, 所以 $x+y=3$.

记 $A=\ln a,\ B=\ln b,\ C=\ln c$, 则

$$Ax+By=Bx+Cy=Cx+Ay=A+B+C\neq 0.$$

将 $y=3-x$ 代入上式, 得到 $\left\{\begin{array}{l}Ax+B(3-x)=A+B+C\\ Bx+C(3-x)=A+B+C\end{array}\right.$, 推出 $\left\{\begin{array}{l}(A-B)x=A-2B+C\\ (B-C)x=A+B-2C\end{array}\right.$.

消去 x 并整理, 得到

$$A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=\frac{1}{2}[(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2]=0.$$

故, $A=B=C$, 即 $a=b=c$.

13. 略去.

14. 证　设 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$, 其中 a 为一待定正常数. 由 $f(x+T)=kf(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ 得到 $f(x+T)=ka^x\varphi(x)$. 又, $f(x+T)=a^{x+T}\varphi(x+T)$. 于是

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x). \qquad (eq1)$$

令 $a=k^{1/T}$, 则 $k=a^T$. 由式 $(eq1)$ 得到 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$ $(x\in\mathbb{R})$. 证毕.

15. 略去.

16. 证　(1) $f(x)=\cos x, x\in[0,+\infty)$. $M(x)\equiv 1, m(x)=\left\{\begin{array}{ll}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ -1, & x>\pi.\end{array}\right.$

(2) $f(x)=x^2, x\in[-1,+\infty)$.

$$m(x)=\left\{\begin{array}{ll}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & x>0;\end{array}\right. \qquad M(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & -1\leqslant x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1.\end{array}\right.$$