第二章　极限

2.1 数列极限

1. 按 ε 定义证明下列极限：

（1）证明：由 $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$，$\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，$\forall n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$

(2) 证明：令 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $h_n > 0$, 而且

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

于是 $h_n^2 \leqslant \dfrac{2}{n}$, 即 $h_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{n}}$, $\forall\varepsilon > 0$,要使$h_n < \varepsilon$,只须取$\sqrt{\dfrac{2}{n}} < \varepsilon$,即$n > \dfrac{2}{\varepsilon^2}$,令$N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1$ 当 $n > N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

(3) 证明：由 $\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

(4) 证明：由

$$\left|\frac{5n^2}{7n - n^2} - (-5)\right| = \left|\frac{5n}{7-n} + 5\right| = \frac{35}{|7-n|} = \frac{35}{n-7} = \frac{35}{\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 7} \leqslant \frac{70}{n}\,(n \geqslant 14)$$

$\forall\varepsilon > 0$, 令 $N = 14 + \left[\dfrac{70}{\varepsilon}\right]$,则当$n > N$时,有$\left|\dfrac{5n^2}{7n - n^2} - (-5)\right| < \varepsilon.$

(5) 证明：由 $2^{\frac{1}{2010}} > 1$，令 $b = 2^{\frac{1}{2010}}$，则 $b > 1$，从而

$$\frac{n^{2010}}{2^n} = \left[\frac{n}{\left(2^{\frac{1}{2010}}\right)^n}\right]^{2010} = \left[\frac{n}{b^n}\right]^{2010}.$$

令 $b = 1 + h\,(h > 0)$, 则

$$b^n = (1+h)^n = C_n^0 + C_n^1\,h + \cdots + C_n^n\,h^n \geqslant C_n^2\,h^2$$

$$\frac{n}{b^n} < \frac{n}{C_n^2\,h^2} = \frac{2}{(n-1)\,h^2}$$

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon h^2}\right]+1$，则 $\left|\dfrac{n}{b^n}-0\right|<\varepsilon^{\frac{1}{2010}}$，那么

$$\left|\frac{n^{2010}}{2^n}-0\right|=\left|\left[\frac{n}{b^n}\right]^{2010}\right|<\varepsilon,$$

即证.

(6) 证明：

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1,\cdots$

(7) 证明：当 n 是偶数时，$\left|\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n}}{n}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{n}}<\varepsilon$，取 $N_1=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$

当 n 是奇数时，$\left|1-\dfrac{1}{10^n}-1\right|=\left|-\dfrac{1}{10^n}\right|=\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$ 即可.

(8) 证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0,\forall n>N,|a_n-a|<\varepsilon$, 当 $n>N_1$，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{1}{n}\left[(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)\right]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\left(|a_1-a|+\cdots+|a_n-a|\right)<\frac{N_1M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon<\frac{N_1M}{n}+\varepsilon$$

其中 $M=\max\left\{|a_1-a|,\cdots,|a_n-a|\right\}$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_1M}{n}=0$，对上述 ε，$\exists N_2>0,\forall n>N_2,\left|\dfrac{N_1M}{n}-0\right|<\varepsilon$

取 $N=\max\left\{N_1,N_2\right\},\forall n>N$, 有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$

2. 求下列数列的极限：

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3.$

(2) 因为 $1<\sqrt[n]{n\lg n}<\sqrt[n]{n^2}\to1,(n\to\infty)$，由迫敛性得，原式 $=1$.

(3) 如上题 (5)，原式 $=0$.

(4) 令 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$, 则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} - (\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}})$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2n+1}{2^n}\right) = 3$

(5) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n}} = 0$（由下题 16）.

(6)

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$.

(7) 因为当 $n > 2$ 时,

$$n! < \sum_{k=1}^{n} k! = 1! + 2! + \cdots + n! < (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!$$

$$< (n-1)(n-2)! + (n-1)! + n! = 2(n-1)! + n!$$

故, $1 < \frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n} p! < 1 + \frac{2}{n} \to 1$，由迫敛性得，原式 =1.

另解：由 Stolz 定理：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = 1$.

(8) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1} - 1\right) = 0$，又 $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leqslant 1$, 所以，原式 =0.（无穷小量与有界量之积）

(9) 因为 $3^n < n^3 + 3^n < n^3 \cdot 3^n + 3^n \cdot n^3 = 2n^3 \cdot 3^n$,

$$3 < \sqrt[n]{n^3 + 3^n} < 3\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3 \to 3,$$

故, 原式 = 3.

(10) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$.

(11) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^2 = e^2$.

(12) 因为 $0 < a < 1$, 所以 $a - 1 < 0$, 于是 $(1+n)^{a-1} < n^{a-1}$,

$$(1+n)^a = (1+n)(1+n)^{a-1} < (1+n)n^{a-1} = n^a + n^{a-1},$$

因而 $0<(1+n)^a-n^a<n^{a-1}$, 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{a-1}=0$, 由迫敛性得，原式 =0.

(13) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1}}=e^2$

(14) 因为 $na_n-1<[na_n]\leqslant na_n$, 所以 $a_n-\frac{1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\leqslant a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}a_n=a,\text{由迫敛性得，原式}=a$$

(15) 因为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\text{原式}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

由迫敛性得，原式 =1.

(16) 由 1 (8) , 如果 $a>0$, 原式 $=a$, 若 $a=0$, 由不等式：

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

同样由 1 (8)，根据迫敛性得，原式 =0（当 $a=0$ 时也成立）.

(17) 由 3 (6)，令

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=a,$$

则

$$\begin{aligned}
b_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln(2n)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2
\end{aligned}$$

$$b_n\to\ln 2(n\to\infty).$$

(18) 因为

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= b_n\to\ln 2\,(n\to\infty)
\end{aligned}$$

且 $a_{2n+1}=a_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln n2\,(n\to\infty)$, 这样 $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n+1}\}$ 都收敛于同一极限，故原式 =ln2.

3. 证明下列数列收敛：

(1) 因为 $a_1=\sqrt{2}>1$，故 $a_2=\sqrt{2a_1}>\sqrt{2\cdot 1}=\sqrt{2}=a_1$,
设 $a_k>a_{k-1}$, 则

$$a_{k+1}-a_k=\sqrt{2a_k}-\sqrt{2a_{k-1}}=\frac{2\left(a_k-a_{k-1}\right)}{\sqrt{2a_k}+\sqrt{2a_{k-1}}}>0,$$

即 $a_{k+1}>a_k$，由归纳法知, 所给数列单调递增.

又因为 $a_1=\sqrt{2}<2$，$a_2=\sqrt{2a_1}<\sqrt{2\cdot 2}=2$, 设 $a_k<2$ 成立，则 $a_{k+1}=\sqrt{2a_k}<2$, 由归纳法知，$a_n<2\,(n=1,2,3\cdots)$, 所以 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故由单调有界原理，数列收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由 $a_n^2=2a_{n-1}$ 两端取极限得 $A^2=2A$，得 A=2（0 舍去）.

(2) 根据

$$b_{n+1}=b_n\left(2-b_n\right)=2b_n-b_n^2=1-\left(b_n^2-2b_n+1\right)=1-\left(b_n-1\right)^2$$

由 $0<b_1<1$，和数学归纳法, 有 $0<b_n<1\,(\forall n\in N^+)$,

由 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2-b_n>1$，得 $b_{n+1}>b_n$, 故序列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界，故由单调有界原理，数列收敛.

(3) $\forall\varepsilon>0,\forall m,n\in N^+$，要使

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|<\varepsilon$$

由于

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^m}\\&=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{m-n}}\right)<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$, 根据柯西收敛准则，数列收敛.

(4) $d_1=1,d_2=2,\,d_{n+1}=\alpha d_n+(1-\alpha)d_{n-1}$,

$$|d_{n+1}-d_n|=(1-\alpha)^{n-1}|d_2-d_1|=(1-\alpha)^{n-1},$$

由教材例 2.1.14 知，$\{d_n\}$ 收敛.

（5）显然 $e_n > 0$ 即 $\{e_n\}$ 有下界，又利用 $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$,

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e_n + \frac{\sigma}{e_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{e_n} \cdot \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{e_n}} = \sqrt{\sigma}$$
$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e_n + \frac{\sigma}{e_n}\right) = \frac{e_n}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{e_n^2}\right) \leqslant \frac{e_n}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma}\right) = e_n$$

即 $\{e_n\}$ 单调递减，由单调有界原理，数列收敛.

（6）由不等式：$\dfrac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k}$,

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

在上式中取 k 从 1 到 n，并相加得

$$0 < y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

又由于

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0,$$

故数列 $\{y_n\}$ 单调递增有上界，因此收敛.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = y_n + \ln\frac{n+1}{n},$$

故，$\{x_n\}$收敛.

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 存在，则由

$$\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$，再由 $\sin(2n) = 2\sin n \cdot \cos n$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n = 0$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = 0.$$

但 $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n + \sin^2 n) = 0$ 矛盾.

另证 记 $I = [\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi]$, 则 $\forall x \in I$, $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 由于区间 I 的长度 $\pi/2 > 1$, 所以存在正整数 $n'_k \in I$ 而 $\sin n'_k \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又, 在区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 中选出正整数 $n_k^{''}$, 则 $\sin n_k^{''} \leqslant 0$.

于是, 我们得到两个子列 $\{\sin n_k'\}$ 和 $\{\sin n_k^{''}\}$. 若它们中有一个发散, 则数列 $\{\sin n\}$ 发散; 若它们均收敛, 则极限不可能相等, 由归并原则, $\{\sin n\}$ 发散.

5. 证明：

(1) 显然 $\forall n, x_n \leqslant y_n$,

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n y_n} - x_n = \sqrt{x_n}\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right) \geqslant 0,$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}\left(x_n + y_n\right) - y_n = \frac{1}{2}\left(x_n - y_n\right) \leqslant 0,$$

因此 $a \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant b$, 从而 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，$\{y_n\}$ 单调递减有下界, 由单调有界原理，数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛.

(2)

$$x_1 > y_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + y_n\right) \geqslant \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \leqslant \sqrt{x_n y_n}$$

即 $n \geqslant 2$ 时，$x_n \geqslant y_n$, 由

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(y_n - x_n\right) \leqslant 0, y_{n+1} - y_n = \frac{y_n\left(x_n - y_n\right)}{x_n + y_n} \geqslant 0,$$

得 $n \geqslant 2$ 时，

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \frac{a+b}{2},$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，$\{y_n\}$ 单调递增有上界, 由单调有界原理，数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛.

6. 证明：因为对一切 n, 有 $A_n \leqslant M$，所以 $\{A_n\}$ 为有上界的数列. 又由于 $A_{n+1} - A_n = |a_{n+1} - a_n| \geqslant 0$，则 $\{A_n\}$ 单调递增，由单调有界原理，$\{A_n\}$ 收敛.

因为 $\forall m, n \in N$，有

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &= A_m - A_n = |A_m - A_n| \end{aligned}$$

由于 $\{A_n\}$ 收敛，由柯西收敛准则，则 $\{a_n\}$ 收敛.

7. 容易证明,

$$y_1 \geqslant y_3 \geqslant \cdots \geqslant y_{2n-1} \geqslant \cdots \geqslant 0, y_2 \leqslant y_4 \leqslant \cdots \leqslant y_{2n} \leqslant \cdots \leqslant \frac{x}{2},$$

即奇数列与偶数列皆为单调有界数列, 但单调性相反. 由单调有界原理，奇数列与偶数列极限都存在. 令

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = a, \lim_{n\to\infty} y_{2n} = b,$$

则由 $y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$ 及 $y_{2n-1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-2}^2}{2}$, 两边取极限可得

$$b = \frac{x}{2} - \frac{a^2}{2} \text{及} a = \frac{x}{2} - \frac{b^2}{2},$$

$\therefore (a-b)(1-\frac{a+b}{2}) = 0$. 因为 $a+b \leqslant x \leqslant 1$, 所以 $a=b$, 原数列收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1.$$

2.2 函数极限

(1) $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\sqrt{x} - 3\right| = \left|\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\right| < \frac{1}{3}\cdot|x-9| < \varepsilon$,
取 $\delta = 3\varepsilon > 0$, 则 $\forall x: 0 < |x-9| < \delta$, 有 $|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$.

(2) $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$,
取 $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 则 $\forall|x| > M > 0$, 有 $\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

(3) $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$,
取 $\delta = \varepsilon > 0$, 则 $\forall 0 < x < \delta$, 有 $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

(4) $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\frac{x^2+1}{x^2-x-1} - 1\right| = \left|\frac{x+2}{x^2-x-1}\right| < \left|\frac{2x}{x^2}\right| = \frac{2}{x} < \varepsilon, (x > 2)$,
取 $M = \frac{2}{\varepsilon} + 2 > 0$, 则 $\forall x > M > 0$, 有 $\left|\frac{x^2+1}{x^2-x-1} - 1\right| < \varepsilon$.

(5) $\forall\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, 要使 $\left|2^{\frac{1}{x}} - 0\right| = 2^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$,
取 $\delta = -\frac{\ln 2}{\ln\varepsilon} > 0$, 则 $\forall -\delta < x < 0$, 有 $\left|2^{\frac{1}{x}} - 0\right| < \varepsilon$.

(6) 对 $\forall 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, 解不等式 $\left|\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{\pi}{2} + \arctan x < \varepsilon$,
得 $x < -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, 取 $M \geqslant \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$, 于是

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M \geqslant \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right), \forall x < -M \Rightarrow \left|\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| < \varepsilon.$$

2. 计算下列极限：

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}}=0.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^{2000}\left(7-\frac{3}{x}\right)^{10}}{\left(9+\frac{1}{x}\right)^{2010}}=\frac{2^{2000}\cdot 7^{10}}{9^{2010}}.$

(3)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{\tau\to 0}\frac{(x+\tau-x)\left[(x+\tau)^2+(x+\tau)x+x^2\right]}{\tau}\\
&= \lim_{\tau\to 0}[(x+\tau)^2+(x+\tau)x+x^2]=3x^2
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{1-x^3}
$$

$$
=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1
$$

(5)

$$
\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)}{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1\right)}=\frac{n}{m}
$$

(6)

$$
\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{x}}{x}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}=-1.
$$

(7) 因为 $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$，当 $x>0$ 时，有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$,
当 $x<0$ 时，有 $1-x>x\left[\dfrac{1}{x}\right]\geqslant 1$, 由迫敛性得知，原式 =1.

(8) 因为 $\dfrac{b}{x}-1<\left[\dfrac{b}{x}\right]\leqslant\dfrac{b}{x}$，由于 $a>0,b>0,x\to 0^+$, 故 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]\leqslant\dfrac{b}{a}$,
由迫敛性得知, 原式 $=\dfrac{b}{a}$.

(9)

$$
x\to 0^+,a>0,\left[\frac{x}{a}\right]=0,\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}=0.
$$

(10) 因为 $x-1<[x]\leqslant x$, 若 $x>0$, 则 $1-\dfrac{1}{x}<[x]\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，当 $x\to+\infty$ 时，由迫敛性原则, 原式 =1，同理可证 $x\to-\infty$ 时极限也是 1，所以原式 =1.

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^n}=1.$

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{9}{x^2}}=0.$

(13) 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

(14) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{4}{x}}{\dfrac{4}{x}}\cdot4=4.$

(15) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(16) 令 $\arctan x=t$, 则 $x=\tan t, x\to0\Leftrightarrow t\to0$,
原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right]=1$

(17) 因为

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2x-\sin^2\tau}{x-\tau}&=\frac{(\sin x+\sin\tau)(\sin x-\sin\tau)}{x-\tau}\\&=\frac{2\cos\frac{x+\tau}{2}\cdot\sin\frac{x-\tau}{2}}{x-\tau}(\sin x+\sin\tau)\\&=\cos\frac{x+\tau}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-\tau}{2}}{\frac{x-\tau}{2}}\cdot(\sin x+\sin\tau),\end{aligned}$$

所以，原式 $=\cos\tau(\sin\tau+\sin\tau)=\sin2\tau.$

(18) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\cdot\ln(1+\frac{4}{5x-1})}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{5x-1}\cdot(3x-1)}=e^{\dfrac{12}{5}}.$

(19) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$

(20) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}a^x\ln a=\ln a$

(21) 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}$

(22) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}a^x\ln a=a^a\ln a$

(23) 原式 $=\lim\limits_{x\to a} ax^{a-1}=a^a$

3. 已知下列极限，求出 α 与 β :

(1) $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x}=1$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1$

(2) $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\alpha}+\beta}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\alpha}+\beta}{(x-1)(x+1)}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\alpha}+\beta}{(x-1)}=2$,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\alpha}+\beta}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+\alpha-\beta^2}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}-\beta}$$

故 $\alpha-\beta^2=-1, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}-\beta}=2$, 得 $\alpha=-\frac{15}{16}, \beta=-\frac{1}{4}$.

4. 证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot2=2$,

由函数极限的局部有界性知, $\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$ 在无穷大邻域内有界.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$,

由函数极限的局部有界性知, $\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$ 在 $U_+^0(0)$ 内有界.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$,

由函数极限的局部有界性知, $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 在正无穷大邻域内有界.

(4) 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-(1+nx)}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{x^n+C_n^{n-1}x^{n-1}+\cdots+C_n^2x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to0}\left(x^{n-1}+C_n^{n-1}x^{n-2}+\cdots+C_n^2x\right)=0\end{aligned}$$

(5)

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{x}=\lim_{x\to0}x\sin x=0$$

(6)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{n(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}{n}=1$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

(9) 设 $f_1(x)=o(h(x)), f_2(x)=o(h(x))$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{h(x)}=0, \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{h(x)}=0$

于是 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)\pm f_2(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{h(x)}\pm\frac{f_2(x)}{h(x)}=0$

(10) 设 $f_1(x)=o(h_1(x)), f_2(x)=o(h_2(x))$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{h_1(x)}=0, \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{h_2(x)}=0$

于是 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{h_1(x)\cdot h_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{h_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{h_2(x)}=0$

(11) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{1+h(x)}-1+h(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{1+h(x)}=0, h(x)\to 0(x\to x_0).$

5. 证明：用 $|x|\,(x\neq 0)$ 除 $|f(x)|$ 可得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1,$$

于是

$$-1\leqslant a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\leqslant 1,$$

当 $x\to 0$ 时，由极限不等式有 $-1\leqslant a_1+2a_2+\cdots+na_n\leqslant 1$，即证.

6. 证明：若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒为 a，假设 ξ 是区间 $(0,+\infty)$ 中的一数，且 $f(\xi)\neq 0$, 则 $f(\xi)=f(2\xi)=\cdots=f\left(2^N\xi\right)\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\xi=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a, \forall\varepsilon>0, \exists M>0, \forall x>M$, 有 $a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\xi=+\infty$, 故 $\exists N>0$, 使 $2^N\xi>M$,

所以 $a-\varepsilon<f\left(2^N\xi\right)<a+\varepsilon$, 由 ε 的任意性，有 $f(\xi)=f\left(2^N\xi\right)=a$, 矛盾，所以 $f(x)\equiv a, x\in(0,+\infty)$.

7. 证明：设 $x_0\in(0,1)$, 令 $x_n=x_0^{2^n}\,(n=1,2\cdots)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,

由归结原则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(1)$,,

由 $f\left(x^2\right)=f(x)$，得 $f(x_n)=f\left(x_0^{2^n}\right)=f\left(x_0^{2^{n-1}}\right)=\cdots=f(x_0)$,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(1).$$

按照同样的方法，由 $x_0\in(1,+\infty)$，也推出 $f(x_0)=f(1)$，

因此 $f(x)\equiv f(1), x\in(0,+\infty)$.

8. 证明：因为 $f(a-0)<f(a+0)$，

设 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=B$，则 $A<B$.

取 $\varepsilon=\frac{B-A}{2}$，$\exists\delta_1>0$, 当 $-\delta_1<x-a<0$，有 $f(x)<A+\varepsilon=\frac{A+B}{2}$,

$\exists\delta_2>0$, 当 $0<y-a<\delta_2$ 时，有 $\frac{A+B}{2}=B-\varepsilon<f(y)$,

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $a-\delta<x<a<y<a+\delta$ 时，有

$$f(x)<\frac{A+B}{2}<f(y).$$

9. 证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$.

设正整数 $n_0\in(a,+\infty)$, $|f|$, 在区间 $[n_0,n_0+1]$ 内有上界 M，限制 $x>n_0+1$，则有，

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \left\{\frac{[f(x)-f(x-1)]+\cdots+[f(x-([x]-n_0))-f(x-([x]-n_0)-1)]}{[x]-n_0}\right.\\ &\quad\left.+\frac{f(x-([x]-n_0))}{[x]-n_0}\right\}\cdot\frac{[x]-n_0}{x},\end{aligned}$$

由 $0\leqslant x-[x]\leqslant 1$，得 $n_0\leqslant x-([x]-n_0)<n_0+1$, 于是

$$|f(x-([x]-n_0))|\leqslant M, \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-([x]-n_0))}{[x]-n_0}=0.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]-n_0}{x}=1$，由结论当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,

有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.