华中科技大学 2022～2023 学年第二学期

“ 微积分（一） ”考试试卷(A 卷)

考试方式： 闭卷　**考试日期: 2023.06.19**　**考试时长: 150** 分钟

一、单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.)

1. 在空间直角坐标系中，方程 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 表示【　　】.

A. 半球面　　B. 柱面　　C. 锥面　　D. 单叶双曲面

2. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处有 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，则必有【　　】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}} f(x,y)$ 存在

B. $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

C. $\lim\limits_{x\to1} f(x,1)$ 及 $\lim\limits_{y\to1} f(1,y)$ 都存在

D. $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数存在

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$【　　】.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的驻点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的空间区域，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为柱坐标系下的累次积分，下列结果正确的是【　　】.

A. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

C. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

D. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$

5. 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge0,R>0)$，$abc\ne0$，则 $\iint\limits_{S}(ax+by+cz)\mathrm{d}S=$【　　】.

A. $c\pi R^2$　　B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$　　C. $c\pi R^3$　　D. $(a+b+c)\pi R^2$

6. 下列命题中，正确的是【　　】.

A. 若$a_n \le b_n \le c_n$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

B. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$同敛散

D. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$收敛

二、填空题（每小题4分，4个小题共16分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 设曲线$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 则$\oint_{\Gamma} (x^2+2y^2+3z)\mathrm{d}s =$ ____________.

8. $z = x+3y+\ln(1+x^2+y^2)$在点$(0,0,0)$的切平面方程为____________.

9. 设$u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$div(\mathbf{grad}u)|_{(1,-2,2)} =$ ____________.

10. 设$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$，将$f(x)$展开成以$2\pi$为周期的傅里叶级数，则$f(x)$的傅里叶级数的和函数在$x = -3\pi$处的值为____________.

三、基本计算题（每小题7分，6个小题共42分，必须写出主要计算过程.）

11. 求过点$P(2,1,3)$且与$L_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$垂直的平面方程，并求该平面与$L_1$的交点.

12. 设$z = \mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{y}{x}$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(2,\pi)}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(2,\pi)}$.

13. 求曲面$z = xy$包含在圆柱面$x^2+y^2=1$内那部分面积S.

14. 求$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由$\begin{cases} y^2+\dfrac{z^2}{2}=1 \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体..

15. 设S是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$，取上侧，求$I=\iint\limits_{S}\dfrac{(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

16. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$的收敛域与和函数$S(x)$.

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程. ）

17. 设L是xoy面上任意的光滑曲线，$f(x)$具有二阶连续的导数，且$f(0)=4, f'(0)=3$，若曲线积分$\int_L(-xe^x+f''(x))y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$与路径无关，求$f(x)$.

18. 求$f(x,y)=x^2-y^2+2$在椭圆域$D=\left\{(x,y)\middle|4x^2+y^2\le 4\right\}$上的最大值和最小值.

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程. ）

19. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}A^2$.

20. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}$，其中$u_n>0$，$\{a_n\}$有上界，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.