# 华中科技大学 2022～2023 学年第一学期

## “微积分（一）” 期中考试[redacted](A 卷)

考试方式[redacted] -13 [redacted]钟

专业班级[redacted]

| 题号 | 一 | 二 | [redacted] | |
|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | |

| 分 数 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

一、 基本计算题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 求极限 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解答内容不得超过装订线

3. 求当$x \to 0$时，无穷小量$x - \arctan x$的主部与阶数.

4. 设$b = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + a\cos x - 2}{\tan x}$为常数，求$a, b$.

5. 设函数$f(x) = \dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，求$f(x)$的间断点并判断类型.

断

间

6. 设 $y(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}(x\neq 0,x\neq \pm 1)$，求 $y'(x)$.

7. 设二阶可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^{y}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{x=0}$

解答内容不得超过装订线

8. 设 $y=(1+x^{2})^{\sin x}$，求 $dy$.

9. 已知 $f(x)=x^3\ln(1+x)$，求 $f^{(10)}(0)$.

10. 求曲线 $r=1-\cos\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

| 分　数 | |
| --- | --- |
| 评卷人 | |

二、综合题（每小题 6 分，共 30 分）

11. 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性.

12．设 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f(1)=2, f'(1)=-4$，求 $y=g(1+x^2)$ 在 $x=1$ 的导数.

13．设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处二阶可导，且 $f'\left(1\right)=0$，$f''(1)=0$，$y=f^2(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}$.

14．设函数 $g(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，函数 $f(x)$ 可导，求 $F(x)=f(g(x))$ 的导数.

15. 将水以 $4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率注入一个圆锥形容器中，容器顶朝下倒立，它的高度为 8 米，底半径为 4 米，当容器内的水深达 5 米时，水面升高的速率是多少？

| 分　数 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

三、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

16. 设 $x_n > 0$，$x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n} < 4 (n = 1, 2, \cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)| \le M$, $f(x)$ 在 $(0,b)$ 上取得最大值，

试证：$|f'(0)| + |f'(b)| \le Mb$.