考试日期: 2023-2-15　8:30-11:00

# 2022 ～2023 学年第 一 学期

# 《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷)

## 一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1.若 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是与 $\Delta x$【 C 】的无穷小 .

A.高阶　　　　B.低阶　　　　C.同阶　　　　D.等价

分析： 由微分的定义 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\Delta x$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，故选 C .

2.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分条件是【 D 】

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在　　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to \infty}xf(\dfrac{1}{x})$ 存在

分析：A、C 不对.

如 $f(x)=|x|$，则 $f'(0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{2x}=0$ 存在，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{3}}=0，\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}(-x^{\frac{2}{3}})=0，$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt[3]{x}}=0 \text{ 存在.}$$

B 不对. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\overset{t=x^2}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=f'_+(0)$ 存在.

D 对. 因 $\lim\limits_{x\to \infty}xf(\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to \infty}f(\dfrac{1}{x})=0$，

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，因而 $f(0)=0$，于是

$\lim\limits_{x\to \infty}xf(\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$， 故 $f'(0)$ 存在, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

3.下列关于数列的描述中，正确的是【 D 】

A. 若 $\lim\limits_{n\to \infty}x_ny_n=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to \infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to \infty}y_n=0$

B. 若$\{x_n y_n\}$有界，则必有$\{x_n\}$有界或$\{y_n\}$有界

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

D. 若有区间 I 内的数列$x_n$，使$|f(x_n)|$无界，则$f(x)$在区间 I 上无界

分析：A，B 不对，如$x_n=\begin{cases}n,n为偶数\\0,n为奇数\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}0,n为偶数\\n,n为奇数\end{cases}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=0$，从而$\{x_n y_n\}$有界，

但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n$均不存在，$\{x_n\},\{y_n\}$均无界

C 不对，如$x_n=n+\dfrac{1}{n},y_n=n-\dfrac{1}{n}$，，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$ ，

但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, 显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

D 对. 根据函数无界定义可得.

4. 设$f(x)$在区间$(a,+\infty)$内可导, 且$f'(x)>0$, 若$f(a)=0$，则在区间$(a,+\infty)$内有【 C 】

A. $f(x)\geq 0$　　B. $f(x)>0$　　C. 不能确定$f(x)$的符号　　D. $f(x)$单调趋向于$+\infty$

分析：$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(a,+\infty)$内严格单调递增，因为$x=a$不包含在严格单调的区间$(a,+\infty)$内，所以不能得出$f(x)>0$和$f(x)\geq 0$. 由单调递增也不能得出$f(x)$单调趋向于$+\infty$，因而 A,B,D 都不对，正确答案为 C.

5. 已知$f(x)$在$x=0$处连续, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, 则下列结论成立的是【 C 】

A. $f'(0)$存在, 且$f'(0)\neq 0$　　　　B. $f'(0)$不存在

C. $f(x)$在$x=0$处取得极小值　　　　D. $f(x)$在$x=0$处取得极大值

分析：因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(x)=0$，

从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{x}=0$，即$f'(0)=0$，故排除 A、B.

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1>0$得$f(x)>0=f(0),x\in\mathring{N}(0,\delta)$，故$f(x)$在$x=0$处取得极小值，选 C.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\dfrac{1^2}{n^2})(1+\dfrac{2^2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n^2}{n^2})}$ 等于 【 C 】

A. $\int_1^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　B. $2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　D. $2\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$

分析：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1^2}{n^2})(1+\frac{2^2}{n^2})\cdots(1+\frac{n^2}{n^2})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k^2}{n^2})=\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

所以正确答案为 C

## 二.　填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $(1+x)^{x^2}-1$ 的阶数是$\underline{3}$.

解：　当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{x^2}-1=\mathrm{e}^{x^2\ln(1+x)}-1\sim x^2\ln(1+x)\sim x^3$，所以阶数是 $3$.

8. 曲线 $\cot(x+y+\frac{\pi}{4})=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为$\underline{y=-\frac{2}{3}x}$.

解：方程两边关于 $x$ 求导得　$-\csc^2(x+y+\frac{\pi}{4})\cdot(1+y')=y'\mathrm{e}^y$，

将 $x=0,y=0$ 代入得　$y'(0)=-\frac{2}{3}$，则在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=-\frac{2}{3}x$.

9. 若 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\underline{0}$.

解：由 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^{-x}$ 知 $f(t)$ 的原函数为 $t\mathrm{e}^{-t}$，

$$\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x\overset{t=\ln x}{=}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=0.$$

10. 曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=\underline{\ln(1+\sqrt{2})}$.

解：　$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

## 三．基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11．求曲线 $C:y=x\arctan x\quad(x>0)$ 的渐近线.

解：曲线 $y=x\arctan x$ 无垂直渐近线.　（1 分）

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\qquad（3\text{ 分}）$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1,\qquad（5\text{ 分}）$$

所以曲线 $C:y=x\arctan x\quad(x>0)$ 仅有斜渐近线　$y=\frac{\pi}{2}x-1$.　（7 分）

12. 设 $f(x)$ 在点 $a$ 的邻域内可导, 且 $f(a)=f'(a)=1$ , 求 $l=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}\right)$

解法一:　$l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$　（1 分）

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{(x-a)(f(\xi)+f(x))}$ （$\xi$ 介于 $a$ 与 $x$ 之间）　（5 分）

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\dfrac{1}{f(\xi)+f(x)}=\dfrac{f'(a)}{2f(a)}=\dfrac{1}{2}$　（7 分）

解法二:　$l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}+f(x)}$ ,

因 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ , 故 $l=\dfrac{f'(a)}{2f(a)}=\dfrac{1}{2}$　（7 分）

注 这题不能两次使用洛必达法则, 因为 $f'(x)$ 没有连续性这一条件!

解法三:　记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ , 则 $F(a)=0, F'(a)=F''(a)=1$ ,

$F(x)=(x-a)+\dfrac{1}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)$ , $F(x)\sim x-a\quad(x\to a)$　（4 分）

$l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)-(x-a)}{(x-a)F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)-(x-a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)}{(x-a)^2}=\dfrac{1}{2}$ .　（7 分）

13. 求 $I=\int\dfrac{1}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x$ , $n$ 为正整数.

解法一:　$I=\int\dfrac{(x^n+1)-x^n}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^{n-1}}{x^n+1}\right)\mathrm{d}x$　（2 分）

$$=\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+1|+C\ .$$ （7 分）

解法二： 令 $t=x^n$，则 $\mathrm{d}t=nx^{n-1}\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{nt}\mathrm{d}t$ . （2 分）

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C\ .$$ （7 分）

14. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x+y^4}$ 的通解.

解：方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2x}{y}=y^3$. （2 分）

由一阶线性非齐次微分方程的通解公式得

$$x=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{2}{y})\mathrm{d}y}\left(C+\int y^3\cdot\mathrm{e}^{\int(-\frac{2}{y})\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right)$$ （5 分）

$$=y^2\left(C+\int y^3\cdot\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$=y^2\left(C+\frac{1}{2}y^2\right)$$ （7 分）

15. 设 $f(x)=\int_x^1\sin t^2\mathrm{d}t$，计算 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解： $f(1)=0, f'(x)=-\sin x^2$ （2 分）

$$I=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\sin x^2\mathrm{d}x$$ （5 分）

$$=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$$ （7 分）

16. 求 $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的极值.

解：$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$，令 $F'(x)=0$ 得 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的唯一驻点， （2 分）

$F''(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)$， $F''(0)=1>0$，

所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 的极小值点. （4 分）

$$F(0)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\cos t|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-1-(\mathrm{e}^{-t}\sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t)=-1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-F(0),$$

所以 $F(0)=-\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ 为 $F(x)$ 的极小值，无极大值.　　（7 分）

## 四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程. ）

17. 已知函数 $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{x^2}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$，讨论方程 $f(x)=0$ 的实根个数.

解：$f'(x)=\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{1+x^2}=(1-2x)\sqrt{1+x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.　　（2 分）

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 严格单调增，$f(x)=0$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 至多只有一个实根，

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 严格单调减，$f(x)=0$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 至多只有一个实根.　　（4 分）

又 $f(-1)=\int_{1}^{-1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=-2\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t<0$，

$$f(0)=\int_{1}^{0}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t^2})\mathrm{d}t>0,$$

因而在 $(-1,0)$ 内有唯一实根，　　（6 分）

$$f(1)=\int_{1}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{1}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t=0,$$

故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 及 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 各有唯一的一个实根，从而 $f(x)=0$ 有两个实根.　　（7 分）

18. 设 $f(x)$ 满足 $\int_{0}^{x}f(t-x)\mathrm{d}t=-\dfrac{x^3}{3}-x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴所围成的图形绕 $y$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解：令 $u=x-t$，则 $\int_{0}^{x}f(t-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{x}f(-u)\mathrm{d}u$，　　（2 分）

则方程两边关于 $x$ 求导得　$f(-x)=-x^2-2x$

因而　$f(x)=-x^2+2x$　　（4 分）

所求旋转体体积$V_y = 2\pi\int_0^2 x(-x^2+2x)\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 (-x^3+2x^2)\mathrm{d}x$ （6 分）

$$= 2\pi(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$ （7 分）

## 五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程. ）

19. 设$f(x),g(x)$在$[0,1]$上连续，且$g(x)\ge 0, f(x)>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

证： $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，则$f(x)$在$[0,1]$上有最大值$M$ 和最小值 $m$. （1 分）

因$f(x)>0$，所以$M\ge m>0$. 又$g(x)\ge 0$，故由定积分的比较性质得

$$\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{m}\mathrm{d}x \le \int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x \le \int_0^1 g(x)\sqrt[n]{M}\mathrm{d}x,$$

即
$$\sqrt[n]{m}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x \le \sqrt[n]{M}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$ （3 分）

因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，由夹挤准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ （5 分）

20. 设$f(x)$在$\left[0,2\right]$上二阶可导，且$f'(0)=f'(2)=0$，试证：存在$\xi\in(0,2)$，使

$$|f''(\xi)| \ge |f(2)-f(0)|.$$

证： 注意条件$f'(0)=f'(2)=0$，将$f(x)$在$x_0=0$和$x_0=2$分别展开成一阶泰勒公式：

$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)x^2$， $\xi_1$介于$x$与$0$之间 ①

$f(x)=f(2)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x-2)^2$，$\xi_2$介于$x$与$2$之间 ② （3 分）

②式减去①式得

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-2)^2,$$

令$x=1$得

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2),$$

（ 4 分）

从而有

$$|f(2)-f(0)| \le \frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|) \le \max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$$

取 $|f''(\xi)| = \max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$ 得证.　　（5 分）