2021 ～2022 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程期中试题解答

一．基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3})^{\frac{1}{n}}\ (a,b,c>0)$.

解　令 $A=\max\{a,b,c\}$，

则 $\dfrac{1}{3}A^n\le\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}\le A^n$，$\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}A\le\left(\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\le A$，　（3 分）

由夹逼准则知，原式$=A=\max\{a,b,c\}$.　（6 分）

2. 求当 $x\to0^+$ 时，无穷小量 $\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}$ 的主部与阶数.

解 $f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}=(\sqrt{1+x\sqrt{x}}-1)-(\mathrm{e}^{2x}-1)(x\to0^+)$

$=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x)-(2x+o(x))$.　（3 分）

$=-2x+o(x)\sim-2x(x\to0^+)$

故主部为$-2x$，阶数是 1.　（6 分）

3. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{3+\cos x}{4}\right)^x-1\right]$.

解　$l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{3+\cos x}{4}}-1}{x^3}$　（2 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\dfrac{3+\cos x}{4}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{3+\cos x}{4}-1}{x^2}$　（4 分）

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{8}$.　（6 分）

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$，求 a,b .

解 要使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$ 成立，必须

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}-a-\dfrac{b}{x})=0$，从而得

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{2}$，　（3 分）

$$\boldsymbol{b}=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-\sqrt{2}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x\left[\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)=\sqrt{2}.\qquad（6 分）$$

5. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 $l=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}$.　（2 分）

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x-1}\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x-1}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$　（4 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-1-x}{2x}=-\frac{1}{2},\quad l=e^{-\frac{1}{2}}.\qquad（6 分）$$

6. 确定 $f(x)=e^{\frac{|x|}{\tan x}}$ 的间断点及其类型.

解 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

（1）$x=0$ 是跳跃间断点（或者说是第一类）. 因为

$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{|x|}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\tan x}}=e,\quad \lim_{x\to0^-}e^{\frac{|x|}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{\tan x}}=e^{-1},\qquad（2 分）$$

（2）$x=k\pi,k=\pm1,\pm2,\ldots$ 是第二类间断点. 因为这些点的右极限

$$\lim_{x\to k\pi^+}e^{\frac{|x|}{\tan x}}\quad 是无穷大;\qquad（4 分）$$

（3）$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\ldots$，是可去间断点（或者说是第一类）. 因为

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}e^{\frac{|x|}{\tan x}}=1.\qquad（6 分）$$

7. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$,　（3 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}=\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^3},\qquad（5 分）$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{8}.$$

（6 分）

8. 设 $y = x^{x^x}$，求 y'.

解 因 $(x^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln x})' = x^x(1+\ln x)$，（2 分）

又　$\ln y = x^x \ln x$，（3 分）

所以 $\frac{1}{y}y' = (x^x)'\ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}$

即　$y' = x^{x^x} x^x(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x)$.（6 分）

9. 求 $y = x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

解　取 $v(x) = x^2$，它的三阶以上的导数为零，（1 分）

$$u^{(k)}(x) = [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\ k = 1,2,\cdots,$$（3 分）

用莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$：

$$y^{(n)} = x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

所以　$y^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^n n!}{n-2}$（$n>2$）。（6 分）

而　$y'(0) = y''(0) = 0$.

10. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}$.

解： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4} = -\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}$；

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)} = \frac{-\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}\mathrm{d}x}{-\sin x\mathrm{d}x} = = \frac{x + 2\cot x}{x^3}$$（3 分）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)} = \frac{-\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}\mathrm{d}x}{3x^2\mathrm{d}x} = -\frac{x\sin x + 2\cos x}{3x^5}.$$（6 分）

二. 综合题（每小题 6 分，共 30 分）

11. 设 $x=\varphi(y)$ 是 $f(x)=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $\varphi'(\frac{\pi}{4})$.

解 当 $x=1$ 时，$y=f(1)=\frac{\pi}{4}$，　　　　（2 分）

$f'(x)=(\ln x+\arctan x)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}$　　　　（4 分）

得 $f'(1)=\frac{3}{2}$，故 $\varphi'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$　　　　（6 分）

12．设曲线 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}+\ln\frac{y}{x+1}=2$ 确定，求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

解 原方程变为　$\mathrm{e}^{xy}+\ln y-\ln(x+1)=2$，

对 x 求导：$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+\frac{y'}{y}-\frac{1}{x+1}=0$，　　　　（3 分）

将 $x=0, y=\mathrm{e}$ 代入，得 $\mathrm{e}+\frac{y'(0)}{\mathrm{e}}=1$，故 $y'(0)=\mathrm{e}(1-\mathrm{e})$.

切线方程为 $y=\mathrm{e}(1-\mathrm{e})x+\mathrm{e}$　　　　（6 分）

13. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f\left(0\right)=0$，$f'(0)=2$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}-2\frac{f\left(x^3\right)-f\left(0\right)}{x^3}\right]$　　　　（3 分）

$=f'\left(0\right)-2f'\left(0\right)=-f'\left(0\right)$

$=-2$.　　　　（6 分）

14. 有一长度为 5m 的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板离开墙角而滑动. 当梯子下端离开墙角 3m 时，已知梯子的下端离开墙角滑动速率为 2.2m/s, 问此时梯子的上端向下滑的速率为多少？

解 设梯子上端离墙角距离为 s(m), 下端离开墙角的距离为 x （m），有

$$s=\sqrt{5^2-x^2}\,,\qquad（2 分）$$

于是 $\frac{ds}{dt}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\frac{dx}{dt}$　　　　（4 分）

当 $x=3m$，$\frac{dx}{dt}=2.2(m/s)$ 时，$\frac{ds}{dt}=-\frac{3}{\sqrt{25-3^2}}\cdot 2.2=-1.65(\mathrm{m/s})$

即梯子上端下滑的速率为 1.65（m/s）　　　　（6 分）

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \qquad\quad , x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解 因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$ ，

且 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$, 所以

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$ （3 分）

当 $x\neq 0$ 时，初等函数 $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$ 有定义，所以连续 ；

而 $\lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. （6 分）

三. 证明题（每小题 5 分，共 10 分）

16. 设 $x_1>0$ ，$x_{n+1}=3+\dfrac{4}{x_n}(n=1,2,\cdots)$ ，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

证 由题设知 $n>1$ 时，$x_n>3$；$n>2$ 时，$x_n<3+\dfrac{4}{3}$，即 $\{x_n\}$ 有界. （1 分）

由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{4}{x_n}-\dfrac{4}{x_{n-1}}=\dfrac{4(x_{n-1}-x_n)}{x_nx_{n-1}}$ 知不能确定 $\{x_n\}$ 的单调性 ，但由

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{4}{x_n}-\frac{4}{x_{n-2}}=\frac{4(x_{n-2}-x_n)}{x_nx_{n-2}}=\frac{16(x_{n-1}-x_{n-3})}{x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}}$$

知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 分别单调. （3 分）

由单调有界原理知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均收敛 ，设其极限分别为 l_1 与 l_2，

在 $x_{2k+1}=3+\dfrac{4}{x_{2k}}$， $x_{2k}=3+\dfrac{4}{x_{2k-1}}$ 两边取极限，得 $l_1=3+\dfrac{4}{l_2}$ 以及 $l_2=3+\dfrac{4}{l_1}$，

解此方程组得 $l_1=l_2=4$ ，因此数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$. （5 分）

另证 常数 $l=4$ 满足 $l=3+\dfrac{4}{l}$，下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$0\le|x_{n+1}-l|=|(3+\frac{4}{x_n})-4|=\frac{|x_n-4|}{x_n}\le\frac{1}{3}|x_n-4| \quad （n>1 \text{时}，x_n>3）$$

$$\le\cdots\le\frac{1}{3^{n-1}}|x_2-4|,$$

由迫敛性知 $|x_n-l|$ 收敛到零，故 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$c\in(0,1)$. 证明：$\exists \xi,\eta\in[0,1]$，使得

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi).$$

证　构造函数 $F(x)=x^2 f(1)+(c^2-1)f(x)$，　　（1 分）

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理，$\exists \eta\in(0,1)$，使得

$$F(1)-F(0)=F'(\eta),$$

即

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=(1-c^2)f(0)+c^2 f(1),\qquad（3 分）$$

因 $(1-c^2)f(0)+c^2 f(1)$ 是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的加权平均值，由介值定理知，$\exists \xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=(1-c^2)f(0)+c^2 f(1)$，故 $\exists \xi,\eta\in[0,1]$，使得

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi).\qquad（5 分）$$