2020 ～2021 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设数列$\{x_n\}$收敛，则【 D 】.

A. 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B. 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

C. 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n{}^2)=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　D. 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$【 C 】.

A. 1　　B. e　　C. e^{a-b}　　D. e^{b-a}

3.设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0\end{cases}$，其中$f'(0)=1$，$f(0)=0$，则$x=0$是$F(x)$的【 B 】.

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 无穷型间断点　　D. 跳跃型间断点

4. 函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$【 B 】.

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

5. 设$f(x)$具有一阶连续导数，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的

【A 】.

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

6. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则【 B 】.

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值　　B. $f(0)$是$f(x)$的极小值

C. $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点　　D. $f'(0)$是$f'(x)$的极值

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=$_______.

解：因 $x\neq 0$ 时有 $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$，由此当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$，

当 $x<0$ 时，$1-x>x\left[\dfrac{1}{x}\right]\ge 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

8. 设 $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$， 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)}=$______________ .

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)}=\dfrac{-\dfrac{x\sin x+2\cos x}{x^3}dx}{-\sin x dx}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\cot x}{x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=$_________ .

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-e^x}{2x}=-1$

10. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_____________.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1, \lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}=2$,故 $y=x+2$.

三. **基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）**

11. 设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=cx^3$，在 $x\to 0$ 时，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，求常数 a,b,c 的值.

解：代入 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，得到

$x+a\ln(1+x)+bx\sin x=(1+a)x+(b-\dfrac{a}{2})x^2+\dfrac{a}{3}x^3+o(x^3)\sim cx^3$，

可得：$\begin{cases}1+a=0, \\ b-\dfrac{a}{2}=0, \\ \dfrac{a}{3c}=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=-1, \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性.

解：$x\neq 0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}+x\cdot\dfrac{-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^4}}=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$；

$x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}-0}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，

又 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4})=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$，

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

13. 设 $\begin{cases}x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，$t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解：$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y=t\cos t\mathrm{d}t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos t\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\cos t}=\sec t$，

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

14. 设 $y=\dfrac{x^2}{2-x}$，计算 $y^{(50)}(0)$.

解：方法一 $y=-x-2+\dfrac{4}{2-x}$

$y^{(50)}(0)=(-x-2+\dfrac{4}{2-x})^{(50)}=(-1)^{50}\left.\dfrac{4\times 50!}{(2-x)^{51}}\right|_{x=0}$

$y^{(50)}(0)=\dfrac{50!}{2^{49}}$

方法二

$$y^{(50)}(0)=\left[x^2(\frac{1}{2-x})^{(50)}+50(2x)(\frac{1}{2-x})^{(49)}+\frac{50\times 49}{2}2(\frac{1}{2-x})^{(48)}\right]_{x=0}$$

$$=\left[x^2\frac{50!}{(2-x)^{51}}-50(2x)\frac{49!}{(2-x)^{50}}+\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cdot\frac{48!}{(2-x)^{49}}\right]_{x=0}$$

$y^{(50)}(0)=\dfrac{50!}{2^{49}}$

15. 设 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=x\ln x$ 的反函数，计算 $\varphi(y)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

解：由反函数求导公式，得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{\ln x+1}$,

从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{1}{\ln x+1})\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{-1}{x(\ln x+1)^3}$,

故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{x=e}=\dfrac{-1}{8e}$.

16. 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解：$f'(x)=3x^2-6x-9$.

令 $f'(x)=0$ 得到区间 $(-2,2)$ 内驻点为 $x=-1$.

直接计算得 $f(-2)=3, f(2)=-17, f(-1)=10$.

故 $\max=10, \min=-17$.

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 如果以每秒 50 cm^3 的匀速给一个气球充气, 假设气球内气压保持常值且形状始终为球形, 问当气球的半径为 5 cm 时, 半径增加的速率是多少?

解: 设 t 时刻气球的半径为 r, 体积为 V, 显然 V 和 r 都是 t 的函数, 且

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

将上式两边对 t 求导得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt},$$

将$\dfrac{dV}{dt}=50$, $r=5$代入上式解得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{50}{4\pi\cdot 5^2}=\frac{1}{2\pi}\approx 0.159.$$

故当气球半径为$5\,cm$时, 半径的增加速率为每秒$0.159\ cm$。

18. 设在$(-\infty,+\infty)$内$f''(x)>0$，$f(0)<0$，讨论$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x\neq 0)$的单调性.

解: $F'(x)=\dfrac{x\,f'(x)-f(x)}{x^2}$.

设$G(x)=x\,f'(x)-f(x)$（$x\in(-\infty,+\infty$），则$G'(x)=xf''(x)$，因$f''(x)>0$，

所以，当$x<0$时，$G'(x)<0$，$G(x)>G(0)>0$，$F'(x)>0$；

当$x>0$时，$G'(x)>0$，$G(x)>G(0)>0$，$F'(x)>0$.

故$F(x)$在$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$上均单调递增.

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设$x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ （n个根式，$a>0$），证明$\{x_n\}$收敛，并求出极限值.

证： $x_1=\sqrt{a}$，$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，因此$x_2=\sqrt{a+x_1}>\sqrt{a}=x_1$，

假设$x_k>x_{k-1}$，则$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}>\sqrt{a+x_{k-1}}=x_k$，

因此$\{x_n\}$是单调增的. 从而只需证明$\{x_n\}$有上界.

因$x_1=\sqrt{a}<a+1$；$x_2=\sqrt{a+x_1}<\sqrt{2a+1}<\sqrt{a^2+2a+1}=a+1$；

假设 $x_k<a+1$，则$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{2a+1}<\sqrt{a^2+2a+1}=a+1$，

因此$\{x_n\}$有上界，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，由

$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$有$l=\sqrt{a+l}$，解得$l=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$

（由$x_n>0$且$\{x_n\}$单调增舍去负根）.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数， $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$.

证明:存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$.

证： 若 $M=0$, 则 $f(x)\equiv 0$ ，结论自明. （1 分）

设 $M>0$ ，在 $(0,2)$ 内某点 c 有 $|f(c)|=M$ ， (2 分）

若 $c\leq 1$ ，由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(0,c)$ ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{f(c)}{c}, \text{ 从而} |f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{c}=\frac{M}{c}\geq M, \qquad (4\text{ 分})$$

若 $c>1$ ，同理存在 $\xi\in(c,2)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-f(c)}{2-c}, \text{ 从而} |f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{2-c}=\frac{M}{2-c}>M . \qquad (5\text{ 分})$$