2015-1 期中试卷解答

1. 设 $x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，由于 $\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2+n+n}<x_n<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$，

而$\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2+n+n}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}\to\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2+n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}\to\dfrac{1}{2}$（$n\to\infty$）故原极限$=\dfrac{1}{2}$。

2. $l=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})=\exp\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1)$

$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{n}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}=\exp\frac{1}{n}(1+2+\cdots n)=e^{\frac{n+1}{2}}$$

3. 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{1/x^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(\frac{1}{t}\sin t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2}$（由$\ln(1+u)\sim u$）

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}$$

4. 由$0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+a)x^2+(1-a+b)x+1-b}{1-x}$ 推得$1+a=0$，$1-a+b=0$，所以$a=-1$，$b=-2$

5. 从 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-x}{cx^r}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{crx^{r-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{crx^{r-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}}$

推得 $r=3$，$c=\dfrac{1}{6}$，因此，$u(x)=\arcsin x-x$ 的主部是$\dfrac{1}{6}x^3$，阶数为3 .

6. $y=\dfrac{1}{2}[\ln\dfrac{2}{\pi}+\ln\arctan\dfrac{1}{x}]$，所以$y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})$，$y'(1)=-\dfrac{1}{\pi}$.

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；$\dfrac{dy}{d(\cot x)}=\dfrac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx}{-\frac{1}{\sin^2 x}dx}=\dfrac{\sin^3 x-x\sin^2 x\cos x}{x^2}$.

8. 因$x=0$时，$y=1$，所以，$\varphi'(y)\big|_{y=1}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2^x}\ln\frac{1}{2}+3x^2\big|_{x=0}}=\dfrac{1}{\ln\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\ln 2}$

9. 因 $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{2x-1}$，所以

$$y^{(10)}(x)=\frac{(-1)^{10}10!}{(x-1)^{11}}-\frac{2\cdot2^{10}(-1)^{10}10!}{(2x-1)^{11}}\quad（或\ =\frac{10!}{(x-1)^{11}}-\frac{2^{11}10!}{(2x-1)^{11}}）$$

10. 公式法 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$ ，链导法 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

11. 间断点为 $x=0$， $x=\pm 1$ 。因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\sin(1-x)}{-x(x^2-1)}=\sin 1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sin(1-x)}{x(x^2-1)}=-\sin 1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点 ；

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sin(1-x)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)}{(x-1)(x+1)}=-2$，所以 $x=1$ 为可去间断点 ；

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\sin(1-x)}{|x|(x-1)(x+1)}=\infty$，所以 $x=-1$ 为无穷间断点（或第二类间断点）

12. 设 $x(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的水平距离，设 $y(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的距离，则

$$x^2(t)+h^2=y^2(t)$$

其中 $h=3\,\text{km}$. 两边求导，得 $2x\dfrac{dx}{dt}=2y\dfrac{dy}{dt}$ ，由题设知，在 $t=t_0$ 时，$y(t_0)=5\,\text{km}$，$\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}=-160\ \text{km/h}$，故 $x(t_0)=4\,\text{km}$，$\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}\cdot\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}=-200\ \text{km/h}$，于是汽车的速度为 $200-120=80\ \text{km/h}$.

13. 因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ ，所以

$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 当 $x\neq 0$ 时，初等函数 $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 有定义，所以连续 ；而 $\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

14. 方程 $y=\sin(x+y)$ 两边对 x 求导，得 $y'=\cos(x+y)(1+y')$，解得 $y'=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

在方程 $y'=\cos(x+y)(1+y')$ 两边再对 x 求导： $y''=-\sin(x+y)(1+y')^2+\cos(x+y)y''$

解得 $y''=\dfrac{-\sin(x+y)(1+y')^2}{1-\cos(x+y)}=\dfrac{-\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}$

15. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^3}\cdot f'(\xi)$， ξ 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间） $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{x}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ ， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0)$

由夹挤准则可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=1$ ，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\dfrac{1}{2}f''(0)$。

--------------注意 单纯用洛必达法则会很复杂，以下解法可以求出结果但是不严格。-------------------------

由泰勒公式，$f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$，于是 $f(\ln(1+x))=f(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)\ln^2(1+x)+o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\dfrac{1}{2}f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(1+x)}{x^3}$ ---------此处将余项抵消不严格。

$=\dfrac{1}{2}f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\dfrac{x+\ln(1+x)}{x}$ （洛必达法则） $=\dfrac{1}{2}f''(0)$

16. 因 $f(x)$ 周期为 5，故点 $(6,f(6))$ 处的切线等同于点 $(1,f(1))$ 处的切线. $f(6)=f(1)$，$f'(6)=f'(1)$ 。

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而连续。在等式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两边取 $x\to 0$ 的极限，

得 $f(1)=0$ ，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}[8+\frac{o(x)}{x}]=8$$

另一方面，依据导数定义

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{x}-3\lim_{x\to 0}\cdot\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\lim_{x\to 0}\cdot\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)\ ,$$

从而 $f'(1)=2$，故所求切线方程为 $y-0=2(x-6)$ 即 $2x-y-12=0$.

注意 1，如果对 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两边求导得 $f'(1)=2$，则有概念错误，不给此段分。

注意 2，如果用洛必达求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}$ 得 $f'(1)=2$，也会条件不足，不给此段分。

17. 显然 $2\le x_n<3$ ；由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}-x_n}{x_nx_{n-1}}$ 知 $\{x_n\}$ 不单调 ，但由

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-2}}=\frac{x_{n-2}-x_n}{x_nx_{n-2}}=\frac{x_{n-1}-x_{n-3}}{x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}}$$

知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶 $\{x_{2k}\}$ 分别单调 ，且简单计算可得 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{5}{2}$，$x_3=\dfrac{12}{5}$，$x_4=\dfrac{29}{12}$，$\cdots$

从而，得到偶子列$\{x_{2k}\}$单调增；奇子列$\{x_{2k-1}\}$单调减。由单调有界原理知奇子列$\{x_{2k-1}\}$与偶$\{x_{2k}\}$均收敛 ，

设其极限分别为l_1与l_2，在$x_{2k+1}=2+\dfrac{1}{x_{2k}}$，$x_{2k}=2+\dfrac{1}{x_{2k-1}}$两边取极限，得$l_1=2+\dfrac{1}{l_2}$以及$l_2=2+\dfrac{1}{l_1}$，

解此方程组得$l_1=l_2=1+\sqrt{2}$ ，因此数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$ 。

18.（1）假设$\forall x\in(a,b),f(x)\neq 0$，不妨设$f(x)>0$，则有

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geq 0;\quad f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leq 0$$

与$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$矛盾，故 至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$ 。

（2）因$f(x)$在$[a,\xi]$及$[\xi,b]$上分别满足罗尔定理条件，故$\exists\eta_1,\eta_2$，使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0,\quad a<\eta_1<\xi<\eta_2<b,$$

而$f'(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上满足罗尔定理条件，所以$\exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使$f''(\eta)=0$.

19. 由泰勒公式，$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2,\quad 0<\xi_1<c<1$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\quad 0<c<\xi_2<1$$

两式相减$f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$，所以

$$f'(c)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2+f''(\xi_1)c^2]$$

由$|f(x)|\leq a$，$|f''(x)|\leq b$，得 $|f'(c)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$

因在$[0,1]$ $(1-c)^2+c^2=2c^2-2c+1\leq 1$，所以$|f'(c)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}$.