期中考试试卷答案和评分标准

【注意】阅卷工作由助教负责，要求一周内完成，将成绩登记到平时成绩记载单和电子表格上。发现解答有误请联系任课老师。

一、基本计算（每小题 6 分，共 60 分）

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$，$x_{n+1}=\sin x_n$（$n>1$），求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $0<x_2=\sin x_1<\dfrac{\pi}{2}$，设 $0<x_k<\dfrac{\pi}{2}$，则 $0<x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\dfrac{\pi}{2}$，所以数列单调递减有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. （3 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$，对于 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边关于 $n\to+\infty$ 取极限，则有

$$l=\sin l$$

解得 $l=0$. （6 分）

2. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

解 利用 $\cos(n\pi+\theta)=(-1)^n\cos\theta$，有

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=(-1)^n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right),$$ （3 分）

所以原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cos\left(\dfrac{\pi}{1+\sqrt{1+n^{-1}}}\right)=0$. （6 分）

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{(\cos x-1)\ln(1+x)}$.

解 1（分子分母求无穷小主部）

$$x\cos x-\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\ ,$$ （2 分）

$$(\cos x-1)\ln(1+x)\sim-\frac{x^3}{2},x\to0,$$ （4 分）

所以原式 $=\dfrac{2}{3}$. （6 分）

解 2（洛必达、等价无穷小）

因为 $(\cos x-1)\ln(1+x)\sim-\dfrac{x^3}{2},x\to0$， （2 分）

所以 $l=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}$ （4 分）

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2}{3}$ （6 分）

4. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值.

解 由于分母趋于零，所以分子也趋于零.（因 $\lim\limits_{x\to1}ax^3+2x+1=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}\cdot(x-1)=0$）

$0=\lim\limits_{x\to1}\left(ax^3+2x+1\right)=a+3$，

得 $a=-3$， （3 分）

从而 $b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x^3+2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(-9x^2+2)=-7$. （6 分）

5. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}-\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]$.

解 注意到 $x\to1^-$ 时，$e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty$，$\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\to-1$，

而 $x\to1^+$ 时，$e^{\frac{x}{1-x}}\to0$，$\dfrac{|\sin(x-1)|}{x-1}\to1$， （4 分）

$$\lim_{x\to1^-}\left[\frac{2}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}-\frac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]=0-(-1)=1$$

$$\lim_{x\to1^+}\left[\frac{2}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}-\frac{|\sin(x-1)|}{x-1}\right]=2-1=1,$$

所以 $l=1$. （6 分）

6. 指出函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{\tan x}$ 的间断点，并确定间断点的类型.

解 间断点为 $x=k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}$， $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ （2 分）

因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点， （4 分）

$\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=\infty, (k=\pm1,\pm2,\cdots)$，所以 $x=k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\cdots$ 为无穷间断点；

$\lim\limits_{x\to k\pi+\pi/2} f(x)=0$，所以 $x=k\pi+\pi/2,\ k=\pm1,\pm2,\cdots$ 为可去间断点. （6 分）

7. 设函数 $y=(2+x)^{\sin x}+\dfrac{1}{x+1}\quad (x>-2)$，求微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

解 记 $u=(2+x)^{\sin x},\ v=\dfrac{1}{x+1}$ ，

$$\mathrm{d}u=(2+x)^{\sin x}\{\sin x\ln(2+x)\}'dx=(2+x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(2+x)+\frac{\sin x}{2+x}\right]\mathrm{d}x\,,$$ （3 分）

$$\mathrm{d}v=-\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

将上面两式相加，并代值得 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$. （6 分）

8. 设函数 $v=f(u)$ 有反函数 $u=\varphi(v)$，满足 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，且 $\varphi(v)$ 是可导的，在 $v=0$ 的某个邻域中有 $\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$，求复合函数 $y=f^2(x)$ 在 $x=0$ 的导数.

解 $y'(0)=2f(x)f'(x)\big|_{x=0}$ （2 分）

$$=2f(0)f'(0)=\frac{2f(0)}{\varphi'(\pi/2)}=3\pi\,.$$ （6 分）

9. 设 $y=(x-1)\ln x$，求 $y^{(10)}(1)$.

解 因 $y'=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$， 有 （2 分）

$$y^{(10)}=(\ln x)^{(9)}-\left(\frac{1}{x}\right)^{(9)},$$

$$y^{(10)}=\frac{(-1)^8 8!}{x^9}-\frac{(-1)^9 9!}{x^{10}},$$

所以 $y^{(10)}(1)=8!+9!=10\cdot 8!$. （6 分）

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ 确定，求在 $t=0$ 时的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=0$;（3 分）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)'}{\cos t-t\sin t}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}，所以 \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=2\ .$$（6 分）

二、综合题（每小题 6 分，共 30 分）

11．设函数 $f(x)$ 在原点附近有界，$F(x)=f(x)\cdot\sin(x^2)$，计算导数 $F'(0)$.

解 $F'(0)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x^2)-0}{x}$ (2 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}xf(x)=0.$$（6 分）

注意，不使用定义计算，用乘积求导公式，会出现导数 $f'(x)$，为 0 分

12．求函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，（2 分）

所以 $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}, & x\neq 0; \\ 1/2, & x=0. \end{cases}$（4 分）

在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，$f'(x)$ 为初等函数，所以连续；又

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上所述，$f'(x)$ 处处连续.（6 分）

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域中有界，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，其中 n 为正整数．求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域中有界，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin x=0$， （2 分）

那么 $x\to 0$, $\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{f(x)\sin x}{n}$， $e^{3x}-1\sim 3x$， （4 分）

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{3nx}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3n}=2,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=6n$. （6 分）

14. 求无穷小量 $u(x)=x-\arctan x\ (x\to 0)$ 的主部与阶数.

解 要成立 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{cx^r}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{x^2}{crx^{r-1}}$ （3 分）

必须有 $r=3$，$c=\dfrac{1}{3}$，因此，所求主部是 $\dfrac{1}{3}x^3$，阶数为 3. （6 分）

[用其他方法，比如换元或者泰勒公式，参照此给分]

15. 一个长方体的铁皮盒子，其对角线的长度随着长宽高的变化而连续变化. 当长宽高分别是 3m、4m、5m 时，如果此时对角线长度增加的速率为 $5\sqrt{2}$ m/s，长宽增加的速率分别为 8m/s 和 9m/s, 问此时高是在增加还是在减少？ 增加或减少的速率为多少？

解 设 t 时刻长方体的长宽高及对角线分别为 $x(t),y(t),z(t),s(t)$，则

$$s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\quad ,$$ （2 分）

两边关于变量 t 求导，得 $s(t)s'(t)=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)$， （4 分）

由题设取 $x=3\text{m}$, $y=4\text{m}$，$z=5\text{m}$，$s=5\sqrt{2}\text{m}$，$x'(t)=8\text{m/s}$，$y'(t)=9\text{m/s}, s'(t)=5\sqrt{2}\text{m/s}$ 代入上式，

求得 $z'(t)=-2\text{m/s}$，说明此时长方体的高在减少，减少的速率为 2m/s . （6 分）

三、分析证明（每小题 5 分，共 10 分）

16. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ （这里的 Q 表示有理数）在 $x=0$ 可导，但函数本身除零点外处处不连续.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2D(x)}{x}=0$，即在原点可导，且 $f'(0)=0$. （3 分）

考虑非零点a，若$a\in Q$，取点列$\{x_n, x_n\in R\setminus Q\}$使$x_n\to a$，那么

$$f(x_n)=0，\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq f(a)=a^2，$$

即在点 $a\in Q$处不连续.

类似可证当$a\in R\setminus Q$，函数也不连续．所以函数除零点外处处不连续.（5 分）

17. 设$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内一阶可导，且$f(0)=0,\ f(1)=3,\ f(3)=1$，证明至少存在一点$\xi\in(0,3)$，使得$f'(\xi)=0$.

证明 由于函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，利用介值定理，有至少存在一点$\eta\in(0,1)$，使得

$$f(\eta)=1.$$

（3 分）

再在区间$[\eta,3]$上，$f(x)$满足罗尔定理的三个条件，所以至少存在在一点$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

（5 分）