2021 ～ 2022 学年第一学期

《微积分（一）》（上）期中考试参考答案 (启明学院用)

考试日期: 2021-11-21　　　　　　　　　**考试时间:** 8:30-10:30AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 且 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=$ __a__.

2. $\sup\{r\in Q:r^2<2\}=$ __$\sqrt{2}$__.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=$ __e__.

4. 设 $y=\arcsin\left(\ln u(x)-v^2(x)\right)$，$u(x),v(x)$ 可微，

则 $dy=$ __$\dfrac{u'(x)-2u'(x)v(x)v'(x)}{u(x)\sqrt{1-(\ln u(x)-v^2(x))^2}}$ dx__.

5. 设 $ye^{xy}-x+1=0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ __0__.

得　分	
评卷人	

二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当 $n\to\infty$，如下收敛的是__C__.

A. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

B. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

C. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$

D. $\sin n(\pi+1)$

2. 下列叙述错误的是 __C__.

解答内容不得超过装订线

A. 单调函数的间断点都是第一类间断点

B. $o(x^2)=O(\sin x)(x\to 0)$

C. 有界数列必有收敛子列，且都收敛到同一个极限

D. $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续

3. 设函数$f(x)=\sqrt{1+x}\ \tan x$在$x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为$ax+bx^2+cx^3$，则___D___.

A. $a=1,b=2,c=\frac{5}{24}$

B. $a=1,b=2,c=-\frac{5}{24}$

C. $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{5}{24}$

D. $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{5}{24}$

得　分	
评卷人	

三. 计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{n}{n^2+\frac{1}{n}}\right)$.

解：由夹挤原理:

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1/2}+\ldots+\frac{1}{n^2+1/n}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+1/n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1/n)}=\frac{1}{2},$$

所以原式极限为 1/2.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：设$u=\frac{sinx}{x}$，$v=\frac{1}{x^2}$

计算$\lim\limits_{x\to 0}(u-1)v=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

则$\lim\limits_{x\to 0}u^v=e^{-\frac{1}{6}}$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\ge 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解：当$x<0$时，$f^{'}(x)=-sinx$；

当$x>0$时，$f^{'}(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

当$x=0$时，

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{cosx}{x}$不存在. 显然，$f'(0)$不存在.

$$\therefore f^{'}(x)=\begin{cases}-sinx, & x<0\\ \frac{2x}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

4. 设 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{asint}{a(1-cost)}=\frac{sint}{1-cost}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{t}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{cost(1-cost)-(sint)^2}{(1-cost)^2}}{a(1-cost)}=-\frac{1}{a(1-cost)^2}$

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

得　分	
评卷人	

1. 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

(1)在 $x=0$ 处连续；

(2)在 $x=0$ 处可导；

(3)在 $x=0$ 处导函数连续.

解：(1)因为 $0\le\left|x^n\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|^n$，而当 $n>0$ 时，$\lim\limits_{n\to 0}|x|^n=0$。

由夹挤原理

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n sin\frac{1}{x}=0=f(0)$.

即当 $n>0$ 时，$f(x)$在点$x=0$处连续。

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}sin\frac{1}{x}$

当且仅当 $n>1$ 时，上述极限存在，

即当 $n>1$ 时，$f(x)$在$x=0$处可导，且$f^{'}(0)=0$.

(3)$\because f^{'}(x)=\begin{cases}nx^{n-1}sin\frac{1}{x}-x^{n-2}cos\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(n>1)$

由上式可知：

当 $n>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f^{'}(0)$，即$f'(x)$在$x=0$处连续.

2. 已知函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有连续的导函数，且导函数在端点的单侧极限 $f'(a+)$ 与 $f'(b-)$ 都存在且有限，请论证函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一致连续性.

证明：令

$$F(x)=\begin{cases} f^{'}(a+), x=a. \\ f^{'}(x), a<x<b. \\ f^{'}(b-), x=b. \end{cases}$$

因为

$$\lim_{x\to a^+} F(x)=\lim_{x\to a^+} f^{'}(x)=f^{'}(a+)=F(a)$$
$$\lim_{x\to b^-} F(x)=\lim_{x\to b^-} f^{'}(x)=f^{'}(b-)=F(b)$$

所以 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，从而有界。因此 $F(x)$ 在 (a,b) 也有界，所以 $f^{'}(x)$ 在开区间 (a,b) 有界。所以对任意 $x\in(a,b)$，存在常数 $M>0$，使得 $\left|f^{'}(x)\right|\le M$ 。

对任意的 $\varepsilon>0$，任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，由拉格朗日公式，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，当 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ 时，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f^{'}(\xi)\right|\left|x_1-x_2\right|\le M\left|x_1-x_2\right|\le M\delta<\varepsilon$$

因此函数 $f(x)$ 在上 (a,b) 一致连续。

五. 证明题（每题 8 分，共 24 分）

得　分	
评卷人	

1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且在端点的单侧极限发散至 $+\infty$，即 $f(a+)=+\infty$ 与 $f(b-)=+\infty$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上有最小值.

证明：因为 $f(a+)=+\infty$ 和 $f(b-)=+\infty$，所以存在常数 M 足够大，使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 和 $\mathrm{x}\in(b-\delta,b)$ 时，$f(x)\ge M>0$ 成立。

因为 $f(x)$ 在 $\left[a+\delta，b-\delta\right]$ 连续，所以有最小值 N，即 $\forall x\in\left[a+\delta，b-\delta\right]$，$f(x)\le N$ 。

因此 $f(x)$ 在 (a,b) 有最小值 N 。

2.设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$, 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)}=\dfrac{1}{A^2}$.

证 因有为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$, 由极限的定义及保号性，

$\exists\delta>0, x: 0<|x-x_0|<\delta$时, $\dfrac{|\mathrm{A}|}{2}<|f(x)|<\dfrac{3|\mathrm{A}|}{2}$且$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{f(x^2)}-\frac{1}{A^2}\right|=\frac{|f(x)-A\|f(x)+A|}{A^2 f(x^2)}\leq\frac{5\varepsilon}{|A|^3}.$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)}=\dfrac{1}{A^2}$.

解答内容不得超过装订线

3.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0$. 在$(0,1)$中$f(x)$可导且 $|f'(x)|\leq f(x)$. 证明：$f(x)\equiv 0$.

证法 1：令$F(x)=e^{-2x}f^2(x)$，则$F^{'}(x)=2e^{-2x}f(x)[f^{'}(x)-f(x)]\leq 0$。因此$F(x)$在$(0,1)$单调递减，所以$F(x)=e^{-2x}f^2(x)\leq F(0)=0$，所以$f(x)\equiv 0$在$(0,1)$恒为$0$。再根据$f(x)$在$x=1$处的连续性可知，$f(x)\equiv 0$在$\left[0,1\right]$。

证法 2：当$x\in(0,\dfrac{1}{2}]$时，则拉格朗日中值定理知，$\exists\xi_1\in(0,x)$，有$f(x)-f(0)=f^{'}(\xi_1)x$，

$\left|f(x)\right|=\left|f^{'}(\xi_1)x\right|<\dfrac{1}{2}f(\xi_1)$。同理有$\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得$\left|f(\xi_1)\right|<\dfrac{1}{2}f(\xi_2)$。从而有

$\left|f(x)\right|<\dfrac{1}{2}f(\xi_1)<\dfrac{1}{2^2}f(\xi_2)<\cdots\dfrac{1}{2^n}f(\xi_n)<\cdots$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}f(\xi_n)=0$，所以$f(x)\equiv 0, x\in(0,\dfrac{1}{2}]$。

同理可证$f(x)\equiv 0, x\in[\dfrac{1}{2},1)$，即$f(x)\equiv 0, x\in[0,1)$。再根据$f(x)$在$x=1$处的连续性可知，$f(x)\equiv 0$在$\left[0,1\right]$。