



华中科技大学 2021~2022 学年第二学期

“线性代数”期末考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2022.05.14 考试时长: 150 分钟

院(系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

分 数	
评卷人	

一、 判断题, 正确的涂“√”, 错误的涂“×”(每题 2 分, 共 16 分)

- () 1. 若 A, B 是可逆矩阵, 则 $A + B, A - B$ 中至少有一个是可逆矩阵.
- () 2. 若矩阵 A 可逆, 则 A 的伴随矩阵 A^* 也可逆, 且 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
- () 3. 若矩阵 A 是上三角矩阵, 且可逆. 则 A^{-1} 也是上三角矩阵.
- () 4. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 也线性无关.
- () 5. 若 A 是实对称矩阵, 且 $A^2 = 0$. 则 $A = 0$.
- () 6. 若 A, B 是同阶可逆矩阵, 则 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- () 7. 若 A 是 $m \times n$ 型实矩阵. 则对任意 $b \in \mathbb{R}^m$, 线性方程组 $A^T A X = A^T b$ 一定有解.
- () 8. 若 A 是实对称矩阵, 则 $A^2 - A + I$ 是正定矩阵.

分 数	
评卷人	

二、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 3 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 则矩阵 $(-\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2)$ 的行列式为 _____.
2. 设 A, B 均为三阶方阵, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $AB = A + B$. 则 $B =$ _____.
3. 设 a, b, c 互不相同, 则方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$ 的解 $x_1 =$ _____.

4. 设 A 是3阶方阵, 且 $|I - A| = |2I - A| = |3I - A| = 0$. 则 $|4I - A| =$ _____.

5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定二次型, 则 t 的取值范围为_____.

分 数	
评卷人	

三、(10 分) 计算下面行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} a-x & b & c & d \\ a & b-x & c & d \\ a & b & c-x & d \\ a & b & c & d-x \end{vmatrix}.$$

分 数	
评卷人	

四、(10 分) 设有向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

- (1) 求向量组的秩, 并讨论其线性相关性;
- (2) 求向量组的一个极大线性无关组;
- (3) 把其余向量表示成为该极大线性无关组的线性组合.

分 数	
评卷人	

五、(12 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ 与线性方程组

$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_1 + (b^2 - b)x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 同解. 求 a, b, c 的值, 并写出方程组的通解.

分 数	
评卷人	

六、(12 分)

设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $X = CY$ 下的标准型为 $y_1^2 + 4y_2^2$ ，求 a, b 的值及正交矩阵 C 。

分 数	
评卷人	

七、(10 分) 注：公管医、公管类、英商、国商、传播专业学生做 A 题，其他专业学生做 B 题。如其他专业学生做 A 题，按 60% 计分。

- A.** (1) 设 A 为实对称方阵. 证明: A 是正定矩阵当且仅当存在实可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$.
 (2) 设 A, B 均为正定矩阵. 证明: ABA 也是正定矩阵.
- B.** (1) 设 A 为奇数阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$. 证明: $|I - A| = 0$.
 (2) 若 A, B 均为奇数阶正交矩阵, 且 $|A| = |B|$. 证明: $|A - B| = 0$.

解
答
内
容
不
得
超
过
装
订
线

分 数	
评卷人	

八、(10 分) 注：公管医、公管类、英商、国商、传播专业学生做 A 题，其他专业学生做 B 题。如其他专业学生做 A 题，按 60% 计分。

A. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 λ 是 AB 的特征值. 证明： λ 一定也是 BA 的特征值.

B. 证明：任何 n 阶方阵都相似于一个上三角矩阵.