



华中科技大学 2020~2021 学年第一学期

“微积分 (一)” 期中考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2020.11.28 考试时长: 150 分钟

院 (系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

一、单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上。)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则【 】.

A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \text{【 】}.$

A. 1

B. e

C. e^{a-b}

D. e^{b-a}

3. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f'(0) = 1, f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的【 】.

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 无穷型间断点

D. 跳跃型间断点

4. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \text{【 】}.$

A. $-2f'(0)$

B. $-f'(0)$

C. $f'(0)$

D. 0

5. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的【 】.

A. 充分必要条件

B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

6. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则【 】.

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极值

二、填空题 (每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上。)

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $y = \frac{\cos x}{x^2}$, 则 $\frac{dy}{d(\cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程。)

11. 设 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = cx^3$, 在 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 求常数 a, b, c 的值.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 的连续性.

13. 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 设 $y = \frac{x^2}{2-x}$, 计算 $y^{(50)}(0)$.

15. 设 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = x \ln x$ 的反函数, 计算 $\varphi(y)$ 在 $x = e$ 处的二阶导数 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

16. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

四、应用题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程。)

17. 如果以每秒 50 cm^3 的匀速给一个气球充气, 假设气球内气压保持常值且形状始终为球形, 问当气球的半径为 5 cm 时, 半径增加的速率是多少?

18. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$, $f(0) < 0$, 讨论 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ($x \neq 0$) 的单调性.

五、综合题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程。)

19. 设 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$ (n 个根式, $a > 0$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in (0, 2)} \{f(x)\}$.

证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.