2022 级《微积分》(A)(上)课程期末考试试题

(2023 年 2 月 15 日， 用时 150 分钟)

专业班级________________ 学号______________________ 姓名__________________

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (每题 4 分，共 20 分)

1. 设 $E=\{\frac{2023n^2}{n^2+6}|n=1,2,\ldots\}$, 则 $\sup E=$ 2023, $\inf E=$ 289.

2. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin t dt$, 则 $F'(x)=$ $2x\sin x^2$.

3. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+1)\cos x dx=$ 2.

4. 曲线 $y=xe^{1/x^2}$ 渐近线为 $x=0$ 和 $y=x$.

5. 微分方程 $y'+2xy=e^{-x^2}$ 的通解为 $y=(x+C)e^{-x^2}$. C为任意常数.

阅卷人	
得 分	

二、判断题 (每题 2 分，共 10 分) (正确者后面括号打√，否则打×)

6. 若已知数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$ 且 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. (×)

7. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. (×)

8. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$. (X)

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数. (√)

10. 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 绝对收敛. (X)

阅卷人	
得 分	

三、**计算题 (每题 8 分，共 40 分)**

11. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\ln(1+x)-\sin x}{1-\cos x}$.

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\ln(1+x)-\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}$$

$$= 1$$

12. 计算 $\int e^{\sqrt{x}}dx$, 这里 $x \geqslant 0$.

解: 设 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt = 2\int t de^t = 2\left(te^t-\int e^t dt\right)$$

$$= 2(te^t-e^t)+C$$

$$= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$$ 这里 C 为任意常数.

13. 计算 $f(x)=\frac{x-2}{2x^2+x-1}$ 的 5 阶带 Peano 余项的 Maclaurin 展开.

解: $f(x)=\frac{x-2}{2x^2+x-1}=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+(2x)^2+\cdots+(2x)^5+o(x^5)$$
$$=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5+o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+o(x^5)$$

$\therefore\ f(x)=2+x+5x^2+7x^3+17x^4+31x^5+o(x^5)$

14. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}$.

解: 设 $x_n=\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$. 则

$$\ln x_n=\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

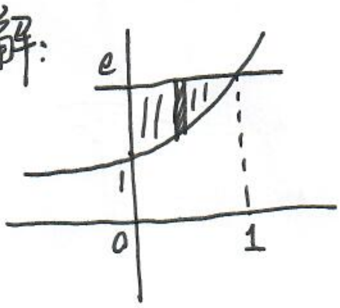
$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$

$$\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d\ln(1+x)=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$
$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-(x-\ln|1+x|)\Big|_0^1$$
$$=\ln 2-(1-\ln 2)$$
$$=2\ln 2-1$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

15. 求曲线 $y=e^x$ 与 y 轴及直线 $y=e$ 所围成图形绕直线 $y=e$ 旋转一周所得旋转体体积.

解:



$$V=\int_0^1 \pi(e-e^x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-2\cdot e\cdot e^x+e^2\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1-2e\cdot e^x\Big|_0^1+e^2\cdot 1\right)$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}(e^2-1)-2e(e-1)+e^2\right]$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2}\right)$$

阅卷人	
得 分	

四、证明题 (每题 10 分，共 30 分)

16. 设 $x_n=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 其中 n 为正整数. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明: 由 $\sin x$ 在 $x=0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式知

$$\sin\pi = x_n+\frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \qquad 这里\ \xi\in(0,\pi)$$

$$\therefore\ 0\le|x_n|=|\sin\pi-x_n|=\left|\frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\right|\le\frac{1}{(2n)!}\le\frac{1}{2n}$$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=0$$

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

证明: $\because f(a)=0 \quad \therefore f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$

由 Cauchy-Schwarz 知 当 $x \geqslant a$ 时, 成立

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \leq \int_a^x [f'(t)]^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dt$$

$$\leq \int_a^b [f'(t)]^2 dt \cdot (x-a)$$

$$\therefore \int_a^b f^2(x)dx \leq \int_a^b \left\{\int_a^b [f'(t)]^2 dt \cdot (x-a)\right\} dx$$

$$= \int_a^b [f'(t)]^2 dt \cdot \int_a^b (x-a)\,dx$$

$$= \int_a^b [f'(t)]^2 dt \cdot \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限. 设 a,b 为正实数, 证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

收敛，并求其值.

证明: 设 $r>0$, 则 $\displaystyle\int_r^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_r^1 \frac{f(ax)}{x}dx - \int_r^1 \frac{f(bx)}{x}dx$

$$= \int_{ar}^{a} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{br}^{b} \frac{f(t)}{t}dt = \int_{ar}^{br} \frac{f(t)}{t}dt + \int_{br}^{a} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{br}^{b} \frac{f(t)}{t}dt$$

$$= \int_{ar}^{br} \frac{f(t)}{t}dt + \int_{b}^{a} \frac{f(t)}{t}dt$$

由积分第一中值定理可知 $\displaystyle\int_{ar}^{br} \frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\int_{ar}^{br} \frac{1}{t}dt = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$, 这里 $\xi\in[ar,br]$ (或 $\xi\in[br,ar]$)

当 $r\to0^+$ 时, $\xi\to0^+$, 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性可知

$$\lim_{r\to0^+}\int_r^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} + \int_b^a \frac{f(t)}{t}dt \quad ①$$

$\therefore$ 广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ 收敛

设 $R>0$, 则 $\displaystyle\int_1^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_a^b \frac{f(t)}{t}dt + \int_{bR}^{aR} \frac{f(t)}{t}dt$

$$= \int_a^b \frac{f(t)}{t}dt + f(\eta)\cdot\ln\frac{a}{b}$$

这里 ~~$\eta\in[bR,aR]$~~ $\eta\in[aR,bR]$ (或 $\eta\in[bR,aR]$)

当 $R\to+\infty$ 时, $\eta\to+\infty$

$$\therefore \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_a^b \frac{f(t)}{t}dt + f(+\infty)\ln\frac{a}{b} \quad ②$$

$\therefore$ 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ 收敛.

由①.②可知 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ 收敛, 其值为 $[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$.

阅卷人	
得 分	

五、附加题 (10 **分**)

19. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得

$$\int_a^b |g(x)-f(x)|dx<\varepsilon.$$

证明: 设 $I=\int_a^b f(x)dx$，由定积分定义可知，$\forall \varepsilon>0$，可以找到 $[a,b]$ 的一个分割

P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得 $\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 成立

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{8} \quad ① \quad 这里\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 设

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad i=1,2,\cdots,n$$

由下确界的定义可知 $\exists y_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得

$$f(y_i)-\frac{\varepsilon}{8(b-a)}<m_i\le f(y_i)$$

$$\therefore \quad \left(\sum_{i=1}^n f(y_i)\Delta x_i\right)-\frac{\varepsilon}{8}<\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\le \sum_{i=1}^n f(y_i)\Delta x_i \quad ②$$

由 ①.② 可知

$$I-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i<I+\frac{\varepsilon}{4}$$

同理

$$I-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i<I+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\therefore \quad 0 \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

设

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x-x_0) + f(x_0) & x \in [x_0, x_1) \\[2ex] \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x-x_1) + f(x_1) & x \in [x_1, x_2) \\[2ex] \cdots\cdots & \\[2ex] \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x-x_{i-1}) + f(x_{i-1}) & x \in [x_{i-1}, x_i) \\[2ex] \cdots\cdots & \\[2ex] \dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x-x_{n-1}) + f(x_{n-1}) & x \in [x_{n-1}, x_n) \\[2ex] f(x_n) & x = x_n \end{cases}$$

则对于 $1 \le i \le n$, $g(x)$在$[x_{i-1}, x_i)$上为连续函数 且

$$\lim_{x \to x_i^-} g(x) = f(x_i) = g(x_i) = \lim_{x \to x_i^+} g(x)$$

$\therefore$ $g(x)$为$[a,b]$上连续函数.

$$\int_a^b |g(x) - f(x)| dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x)| dx \qquad ③$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x)| dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}) \right] - f(x) \right| dx$$

$$\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_i) \right| dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_{i-1}) - f(x)| dx$$

$$\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_{i-1}) - f(x)|\, dx$$

$$\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i)\, dx$$

$$= 2(M_i - m_i)\Delta x_i \qquad ④$$

由③、④、(*)可知

$$\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx \le 2\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon$$