考试日期: 2022-01-03　8:30-11:00

2021 ～2022 学年第 一 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷)

一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题*正确* 的是【 B 】

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+2}{x^n+1}$ 的间断点及类型是【 C 】

A. $x=1$ 是第一类间断点，$x=-1$ 是第二类间断点

B. $x=1$ 是第二类间断点，$x=-1$ 是第一类间断点

C. $x=\pm1$ 均是第一类间断点

D. $x=\pm1$ 均是第二类间断点

分析 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|<1\\ 3/2, & x=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$，$x=-1$ 时函数无定义，$x=\pm1$ 为跳跃间断点.故选 C.

3. 当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是【 C 】

A. $1-e^{\sqrt{x}}$.　B. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　C. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　D. $1-\cos\sqrt{x}$.

分析 $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$；$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$；$\ln(1+x)\sim x,\quad -\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$

$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$；$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$. 故选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题***错误*** 的是【 D 】

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

5. 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})\quad(x>0)$ 的渐近线条数为【　】.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析　$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=+\infty$，曲线无水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)}{t}=0$，曲线无铅直渐近线；

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，曲线有斜渐近线 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

故选 B .

6. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$【 A 】

A. 为正常数.　　　　B. 为负常数.

C. 恒为零.　　　　D. 不为常数.

分析　被积函数是以 2π 为周期的函数，故 $F(x)$ 为常数，且

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\mathrm{d}t>0 .$$

故选 A.

二.　填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上．）

7. 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 对应于 $t=1$ 处的法线方程为 $\underline{y+x-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=0}$.

解　当 $t=1$ 时，$x=\frac{\pi}{4},y=\frac{1}{2}\ln 2$，　$y'|_{t=1}=\dfrac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}|_{t=1}=1$，

所以法线方程为 $y-\frac{1}{2}\ln 2=-1\cdot(x-\frac{\pi}{4})$，也就是 $y+x-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=0$.

8. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<2\pi)$ 的拐点是 $\underline{(\pi,-2)}$.

解　$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x$，$y''=-x\sin x$，令 $y''=0$ 得 $x=0$，$x=\pi$.

根据左右两侧二阶导数符号改变情况，可知 $(\pi,-2)$ 是拐点.

9. 曲线 $y=\ln\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{6})$ 的弧长为 $\underline{\frac{1}{2}\ln 3}$.

解　$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln 3$.

10.　$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{a_n=\frac{(\ln 2)^n}{n!}}$.

解 由 $y=2^x$，则 $y^{(n)}=\ln^n 2\cdot 2^x$， $y^{(n)}(0)=\ln^n 2$，故麦克劳林公式中 x^n 项的系数为

$$a_n=\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

三．基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x-3}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值.

解 当 $x\to 1$ 时，因分母 $x-1\to 0$，故分子 $ax^2+x-3\to 0$， （2 分）

即 $a=2$. （3 分）

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=5\ .$$ （7 分）

12. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解 因 $f(x)$ 为连续函数，故可设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，且

$$f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2a\,,$$ （2 分）

$$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2-xf(2)+2a)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}f(2)+2a\,,$$

解得 $$a=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{3}\ ,$$

从而 $$f(x)=x^2-(x-1)f(2)-\frac{2}{3}.$$ （5 分）

令 $x=2$ $$f(2)=2^2-(2-1)f(2)-\frac{2}{3}\Rightarrow\ f(2)=\frac{5}{3}$$

所以 $$f(x)=x^2-\frac{5}{3}(x-1)-\frac{2}{3}=x^2-\frac{5}{3}x+1.$$ （7 分）

13. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{n+i}$.

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$，（3 分）故 $l=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ （5 分） $=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.（7 分）

14. 计算定积分 $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解法一 令 $x=\sin t$， 则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$， （2 分）

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$ （4 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)\quad=(\frac{1}{5}\cos^5 t-\frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{15}.$$ （7 分）

或由 Wallis 公式计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}.$

解法二　令 $\sqrt{1-x^2}=t$，则 $-x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，（2 分）

$$I=-\int_1^0(1-t^2)t^2\mathrm{d}t$$ （4 分）

$$=\int_0^1(t^2-t^4)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$ （7 分）

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$，求 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0 0\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ （3 分）

$$=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x}=-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$ （5 分）

$$=-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$ （7 分）

16. 求微分方程 $xy'+y-\mathrm{e}^x=0$，$y(2)=1$ 的特解.

解　原方程改写为　$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，

所求通解为　$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(C+\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$ （3 分）

$$=\frac{1}{x}(C+\mathrm{e}^x).$$ （5 分）

或　$(xy)'=\mathrm{e}^x$ 直接得到 $xy=C+\mathrm{e}^x$.

将初始条件 $y(2)=1$ 带入，得 $C=2-\mathrm{e}^2$，特解为 $y=\frac{1}{x}(2-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^x)$ （7 分）

四．综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 已知 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上连续，$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f^{(n)}(0)$ 的值（$n\ge 2$）.

解一　积分方程两边求导得　$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，（2 分）

解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}-x-\dfrac{3}{2}$，又 $f(0)=1$，故 $f(x)=\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{2x}-x-\dfrac{3}{2}$，　　（5 分）

$n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(0)=\dfrac{5}{2}\cdot 2^{n}$.　　（7 分）

解二　$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$　　（2 分）

$f''(x)=2+2f'(x)$，$f'''(x)=2f''(x)$　　（3 分）

$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)(n\geq 2)$　　（5 分）

$f(0)=1$，$f'(0)=2+2=4$，$f''(0)=10$，$f^{(n)}(0)=10\cdot 2^{n-2}=5\cdot 2^{n-1}$　　（7 分）

18. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$y\geq 0$，又该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$，求 a,b,c 使该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

解 由抛物线过原点知 $c=0$，　　（1 分）

且 $\int_0^1(ax^2+bx)dx=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b=\dfrac{1}{3}$，即 $b=\dfrac{2}{3}(1-a)$，　　（3 分）

从而 $\mathrm{V}=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi(\dfrac{1}{5}a^2+\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{3}b^2)=\pi(\dfrac{2}{135}a^2+\dfrac{1}{27}a+\dfrac{4}{27})$　　（5 分）

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi(\dfrac{4}{135}a+\dfrac{1}{27})=0$ 得 $a=-\dfrac{5}{4}$，又 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}=\dfrac{4\pi}{135}>0$，

故当 $a=-\dfrac{5}{4},b=\dfrac{3}{2},c=0$ 时，旋转体体积最小.　　（7 分）

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程. ）

19. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-2021$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内只有两个不同的实根.

证　令 $F(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-2021$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=+\infty$.　　（2 分）

$F'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}\cdot x}$，$F'(\mathrm{e})=0$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$F'(x)>0$；

所以 $F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 内单调下降，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内单调上升，（4 分）$F(\mathrm{e})=-2021<0$，由零点定理知，$F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内分别有唯一的零点，故原方程在 $(0,+\infty)$ 内仅有两个不同的实根，分别在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内.　　（5 分）

20. 设 $f''(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续且 $\left|f''(x)\right|\le M$，$f(1)=0$，证明：$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{3}.$

证法一　将 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 展开为一阶泰勒公式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2，\xi \text{ 介于 } x \text{ 与} 1 \text{之间}\quad（2 分）$$

注意 $f(1)=0$，$\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{2}\int_0^2|f''(\xi)|(x-1)^2\mathrm{d}x\quad（3 分）$$

$$=\frac{M}{2}\int_0^2(x-1)^2\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{M}{3}.\quad（5 分）$$

证法二　记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，将 $F(x)$ 在 $x_0=1$ 展开为二阶泰勒公式

$$F(x)=F(1)+f(1)(x-1)+\frac{f'(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f''(\xi)}{6}(x-1)^3,$$

注意 $f(1)=0$，分别令 $x=0,x=2$，则 $\exists\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,2)$ 使

$$F(0)=F(1)+\frac{f'(1)}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{6}(0-1)^3,$$
$$F(2)=F(1)+\frac{f'(1)}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{6}(2-1)^3,$$

二式相减，得 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}$，由条件 $\left|f''(x)\right|\le M$ 立即得 $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{3}.$

证法三 先证结论：若 f 二次可微，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.\quad(*)$$

（可以用证法一，证法二，以下处理也有其特点）

设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a),G(x)=(x-a)^3$，则

$$F'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\frac{x-a}{2},G'(x)=3(x-a)^2$$

由柯西中值定理 $\exists\eta\in(a,b)$ 使 $\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}$，即

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{f(\eta)-f(\frac{a+\eta}{2})-f'(\frac{a+\eta}{2})\frac{\eta-a}{2}}{3(\eta-a)^2}$$

对分子用泰勒公式知存在$\xi\in(\frac{a+\eta}{2},\eta)\subset(a,b)$，使

$$f(\eta)-f(\frac{a+\eta}{2})-f'(\frac{a+\eta}{2})\frac{\eta-a}{2}=\frac{f''(\xi)}{2}(\frac{\eta-a}{2})^2,$$

故$\dfrac{F(b)}{G(b)}=\dfrac{f''(\xi)}{24}$，即（*）式成立.

利用题设条件$\left|f''(x)\right|\le M$，$f(1)=0$得$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|=\dfrac{|f''(\xi)|}{24}(2-0)^3\le\dfrac{M}{3}$.