第三章　连续性

==================================

## 习题 3.1

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续.

(1)$f(x)=\frac{1}{x^2}$;　(2)$f(x)=\sin\frac{1}{x}$;　(3)$f(x)=\sqrt{x}$;　(4)$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

证明: (3)$\forall\ \varepsilon>0$, 若 $x_0=0$, 则由 $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$ 解得 $x<\varepsilon^2$. 取 $\delta=\varepsilon^2$, 则当 $0\leqslant x<\delta$ 时, 有 $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$. 故 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处连续. 现任取 $x_0>0$, 则对 $x\geqslant 0$, 由不等式 $|f(x)-f(x_0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leqslant\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$ 解得 $|x-x_0|<\varepsilon\sqrt{x_0}$. 于是, 取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ $(x\geqslant 0)$ 时, 成立 $|f(x)-f(x_0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$. 故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

综上所述, $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续.

(4) 由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$ 得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x=x_0\neq 0$ 时, 因为 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 所以不妨考虑 $x=x_0>0$ 的情形.

限制 $|x-x_0|<\dfrac{x_0}{2}$, 则 $\dfrac{x_0}{2}<x<\dfrac{3x_0}{2}$. $\forall\ \varepsilon>0$, 由

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right| &= \left|\frac{x_0\sin x-x\sin x_0}{xx_0}\right|\\ &\leqslant \frac{x_0|\sin x-\sin x_0|+|\sin x_0||x-x_0|}{x_0^2/2}\\ &\leqslant \frac{2(x_0+|\sin x_0|)}{x_0^2}|x-x_0|\\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

解得 $|x-x_0|<\dfrac{x_0^2}{2(x_0+|\sin x_0|)}\varepsilon$. 取

$$\delta=\min\{\frac{x_0}{2},\frac{x_0^2}{2(x_0+|\sin x_0|)}\varepsilon\},$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

综上所述, $f(x)$ 在其定义域上连续.

2. 请指出下列函数的间断点并说明其类型:

(1)$f(x)=[3x]-3[x]$; (2)$f(x)=\mathrm{sgn}|x|$; (3)$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

(4)$f(x)=\dfrac{1+x}{4-x^2}$; (5)$f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$; (6)$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

(7)$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; (8)$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$; (9)$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+3}, & x<-3, \\ x, & -3\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$

解:(1) 依题意知: 当 $k\leqslant x<k+\frac{1}{3}$ 时, $f(x)=0$ ; 当 $k+\frac{1}{3}\leqslant x<k+\frac{2}{3}$ 时, $f(x)=1$ ; 当 $k+\frac{2}{3}\leqslant x<k+1$ 时, $f(x)=1$ ; 所以 $x=\frac{n}{3}(n\in\mathbf{Z})$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 依题意知: $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0). \end{cases}$ 由于 $f(0+0)=f(0-0)=1\neq f(0)$, 所以 $x=0$ 为可去间断点.

(3) 当 $x\neq 0$ 时, $f(x)$ 不连续. 所有的不等于 0 的点为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(4) 依题意知: $f(2+0)=+\infty, f(-2+0)=+\infty$, 所以 $x=\pm 2$ 为第二类间断点.

(5) 依题意知:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (\cos>0) \\ 0 & (\cos=0) \\ -1 & (\cos<0) \end{cases}$$

故

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi) \\ 0 & (x=\frac{\pi}{2}+k\pi) \\ -1 & (\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi) \end{cases} \quad (k\in\mathbf{Z})$$

所以 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

(6) 因为对 $k\in\mathbf{Z}$, $|\sin\pi x-\sin\pi k|\leqslant\pi|x-k|$, 所以 $f(x)$ 在 $x=k$ $(k\in\mathbf{Z})$ 连续. 所有 $x\neq k$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的点为第二类可去间断点. 事实上, $x_0\neq k$ 时, $f(x)$ 在 $x_0$ 处的单侧极限都不存在.

(7) 依题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$, 所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(8) 依题意知: $f(0+0)=\frac{\pi}{2}, f(0-0)=0=-\frac{\pi}{2}$, 所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

(9) 由于 $\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=-\infty$ ,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0\neq f(1)=1,$$

而 $f(x)$ 又在各段区域内连续, 所以 $x=-3$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点, $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

3. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)}{\sin 3x}$; (3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to \alpha}(\frac{\sin x}{\cos\alpha})^{\frac{1}{x-\alpha}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right\}$; (8) $\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\alpha^{x+\beta}+\alpha^{x-\beta}-2\alpha^x}{\beta^2}(\alpha>0)$;

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$; (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

解: (1) 原式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}})^{\cos x}=e$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}=\frac{1}{3}$;

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\frac{a+b}{2}$;

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left((1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right)^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e$;

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$;

(6) 原式

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\alpha}(1+\frac{\sin x-\sin\alpha}{\sin\alpha})^{\frac{\sin\alpha}{\sin x-\sin\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{(x-\alpha)\sin\alpha}}\\
&= \lim_{x\to\alpha}(1+\frac{\sin x-\sin\alpha}{\sin\alpha})^{\frac{\sin\alpha}{\sin x-\sin\alpha}\frac{\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}\sin\alpha}}\\
&= e^{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=e^{\cot\alpha}.
\end{aligned}$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}$ $=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=\frac{2}{1+1}=1$;

(8) 原式 $=\lim\limits_{\beta\to 0}=\alpha^{x-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^{2\beta}-2\alpha^{\beta}+1}{\beta^2}=\lim\limits_{\beta\to 0}\alpha^{x-\beta}\cdot(\dfrac{\alpha^{\beta}-1}{\beta})^2=a^x\ln^2 a$;

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to +\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$;

(10) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2$.

4. 证明: Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\frac{p}{q}(p,q \text{ 为正整数}, \frac{p}{q} \text{ 为既约真分数}),\\ 0, & \text{当 } x=0,1 \text{ 及 } (0,1) \text{ 内无理数};\end{cases}$$

在 $(0,1)$ 内任何无理点都连续, 任何有理点处都不连续.

证明略, 见华东师大或复旦大学《数学分析》教材.

5. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对 $[a,b]$ 上任意两个有理数 $r_1, r_2$ 且 $r_1 < r_2$ 有

$$f(r_1) < f(r_2),$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

证明: 任取 $(a,b)$ 内的两实数 $t_1, t_2$ 且 $t_1 < t_2$, 可取有理数列 $x_n \in U^\circ(t_1, \frac{t_2-t_1}{2}) \cap (a,b)$, $y_n \in U^\circ(t_2, \frac{t_2-t_1}{2}) \cap (a,b)$ 使 $x_n \to t_1, y_n \to t_2 (n \to \infty)$, 则 $x_n < y_n\ (\forall n)$, 从而由已知得到 $f(x_n) < f(y_n)\ (\forall n)$. 由连续性和 Heine 定理, 以及极限的保不等式性质知: $f(t_1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(t_2)$. 当 $t_1, t_2$ 为 $[a,b]$ 的两个端点时, 同理可证 $f(t_1) \leqslant f(t_2)$; 综上知: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

6. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 则函数

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

在 $x_0$ 处连续.

证明: 依题意知, $f^+(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{|f(x)|}{2}, f^-(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{|f(x)|}{2}$. 由 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 所以, $|f^+(x) - f^+(x_0)| \leqslant |\frac{f(x)}{2} - \frac{f(x_0)}{2}| + |\frac{|f(x)|}{2} - \frac{|f(x_0)|}{2}| \leqslant 2|\frac{f(x)}{2} - \frac{f(x_0)}{2}| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 故 $f^+(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 同理可证得 $f^-(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

**注**: 由连续的定义和关系式 $|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leqslant |f(x) - f(y)|$ 易知: $f(x)$ 连续 $\Rightarrow |f(x)|$ 连续. 所以本题也可由连续的加法运算得到结论. 下题同理.

7. 证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在 $[a,b]$ 上连续.

证明: 易知: $F(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}, G(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$. 由 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta (\forall x_0 \in [a,b])$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; 所以, $|F(x) - F(x_0)| = |\dfrac{1}{2}(f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)) + \dfrac{1}{2}(|f(x) - g(x)| - |f(x_0) - g(x_0)|)| < \dfrac{1}{2}\varepsilon + \dfrac{1}{2}|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续; 同理可证 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

8. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

证明：取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists M > a$, 当 $x > M$ 时, 有 $|f(x)| < |A| + 1$. 又因为 $f(x)$ 在 $[a, M]$ 上连续, 因而有界, 即 $\exists A_1$, 使得当 $x \in [a, M]$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant A_1$, 取 $A_2 = \max\{|A| + 1, A_1\}$, 则 $|f(x)| \leqslant A_2\ (x \geqslant a)$, 即 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

9. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且存在最大值或最小值.

证明: 若 $f(x)\equiv A$, 则证完. 若存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 使 $f(x_0)\neq A$. 先设 $f(x_0)>A$, 下面证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且存在最大值. 事实上, 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 知, $\exists X>0$, 当 $|x|>M$ 时, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{f(x_0)-A}{2}$, 即 $\dfrac{A-f(x_0)}{2}f(x)<\dfrac{f(x_0)+A}{2}<f(x_0)$. 又 $f(x)$ 在有限区间 $[-X,X]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上有界且存在最大值 $M$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 注意到 $x_0\in[-X,X]$, 从而 $f(x_0)\leqslant M$. 因此, $M$ 就是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值.

若 $f(x_0)<A$, 类似可证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界且存在最小值.

10. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内取到最小值.

证明: 已知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$, 则对 $f(\frac{a+b}{2})$, $\exists\delta>0$ $(\delta<\frac{a+b}{2})$, 当 $x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 时, 有 $f(x)>f(\frac{a+b}{2})$.

因为 $\frac{a+b}{2}\in[a+\delta,b-\delta]$, 且函数 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上存在最小值, 即存在 $x_0\in[a+\delta,b-\delta]$, $\forall x\in(a,b)$, 有 $f(x)\geqslant f(x_0)$. 故 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内取到最小值.

11. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续, 对任意的 $r\in(a,b)$, 有 $f(r)=0$, 则对任意 $x\in(a,b), f(x)=0$.

证明: 假设存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)\neq0$. 取一有理数列 $\{a_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x_0$, 则由题意得到 $f(a_n)=0$ $(\forall n)$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=0$. 另一方面, 因为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 由 Heine 定理知: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)\neq0$, 矛盾, 故假设不成立. 因此, 对任意 $x\in(a,b)$, $f(x)=0$.

12. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 函数值 $f(x)$ 都是有理数, 且 $f(\frac{1}{2})=2$, 则 $f(x)\equiv2, x\in(-\infty,+\infty)$.

证明: 假设 $f(x)$ 不为常函数, 则 $\exists x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, $x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 于是由 $f(x)$ 的连续性知: $\{f(x)|\ x\in[x_1,x_2]\}$ 必为非单点闭区间. 该闭区间必有无理数, 从而由连续函数介值定理知, $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的函数值可以是无理数, 这与题设相矛盾. 故, $f(x)\equiv2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

13. 证明: 若对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 上有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

且 $f(x)$ 在点 0 连续, 则 $f(x)$ 在 $\in(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)=f(1)x$.

证明: (1) 由题意知: $f(0)=0$. 又 $f(x)$ 在点 0 连续, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(0,\delta)$, 有 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, 即 $|f(x)|<\varepsilon$. 现任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 则对上述 $\delta$,

$\forall x \in U(x_0,\delta)$, 有 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|<\varepsilon$, 因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 由 $x_0$ 的任意性知, $f(x)$ 在 $\in(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(2) 由题意知: 对正整数 $n$, 有 $f(n)=nf(1)$, $f(\frac{1}{n})\cdot n=f(1)$. 又, $0=f(n-n)=f(n)+f(-n)$, 从而有 $f(-n)=-f(n)$. 于是对正整数 $n$ 和整数 $m$, 成立 $f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1)$. 这表明若 $x$ 为有理数, 则 $f(x)=xf(1)$.

若 $x$ 为无理数, 则存在有理数 $x_0$, 使得 $x=x_0+0.x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots$(其中 $x_i\in\{0,1,\cdots,9\}$, $i=0,1,2,3,\cdots$). 取 $a_n=x_0+0.x_1x_2x_3\cdots x_n$, 则 $\{a_n\}$ 是有理数列, 且 $x_n\to x$. 由 $Heine$ 定理知: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_nf(1)=f(1)x$.

综上所述, $f(x)$ 在 $\in(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)=f(1)x$.

14. 证明:

(1) 方程 $\frac{\alpha_1}{x-\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{x-\lambda_2}+\frac{\alpha_3}{x-\lambda_3}=0$ 在 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 内分别各有一根, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0,\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$;

(2) 方程 $x^3+\alpha x+\beta=0(\alpha>0)$ 有且仅有一个实根;

(3) 方程 $x^n=\beta(\beta>0)$ 有且仅有一个正实根, 其中 $n$ 是正整数;

(4) 方程 $x=\alpha\sin x+\beta(\alpha,\beta>0)$ 至少有一个正实根;

(5) 方程 $x^2\cos x=\sin x$ 在 $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ 内至少有一个实根.

证明:(1) 设 $f(x)=\alpha_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+\alpha_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+\alpha_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$. 由于 $f(\lambda_1)>0,f(\lambda_2)<0,f(\lambda_3)>0$, 所以由根的存在性定理知: 原方程在 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 内分别各有一根, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0,\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

(2) 设 $x_1<x_2,f(x)=x^3+\alpha x+\beta$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)[(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\alpha]<0,$$

故 $f(x)$ 为严格单调增函数; 又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 由函数的连续性知: $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

(3) 设 $f(x)=x^n-\beta$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 由于 $f(0)=-\beta<0,f(+\infty)=+\infty$, 所以方程 $f(x)=0$ 至少存在一个正实根; 又因为 $f(x)$ 严格单调增加, 所以方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个正实根.

(4) 设 $f(x)=x-\alpha\sin x-\beta(\alpha,\beta>0)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. $f(0)=-\beta<0$, 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 所以 $f(x)=0$ 至少有一个正实根.

(5) 设 $f(x)=x^2\cos x-\sin x$, 则 $f(x)$ 在 $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续. 由于 $f(\pi)=-\pi^2<0,f(\frac{3\pi}{2})=1>0$, 所以方程 $f(x)=0$ 在 $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ 内至少有一个实根.

15. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$, 则方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一根.

证明: 设 $g(x)=f(x)-f(x+a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 因为 $g(0)=f(0)-f(a)$, $g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$, 所以 $g(0)g(a)=-[f(0)-f(a)]^2\leqslant 0$.

若 $f(0)=f(a)$, 则 $x=0$ 为 $f(x)=f(x+a)$ 的一根; 若 $f(0)\neq f(a)$, 则 $g(0)g(a)<0$, 由根的存在性定理知, 方程 $g(x)=0$ 在 $(0,a)$ 内至少有一根.

综上知: $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一根.

16. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$, 则对任意的正整数 $n$, 存在 $\xi\in[0,1]$ , 使得

$$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi).$$

证明: 令 $h(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$, 则 $h(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上连续, 且

$$0=f(0)-f(1)=h(0)+h(\frac{1}{n})+h(\frac{2}{n})+\cdots+h(1-\frac{1}{n}).$$

若上式右边的项全为 0, 则证完. 若上式右边的项不全为 0, 则必有两项异号, 由根的存在性定理知, 存在 $\xi\in(0,1-\frac{1}{n})$, 使得 $h(\xi)=0$, 即 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$. 证毕.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<c<d<b$, 且 $k=f(c)+f(d)$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $k=2f(\xi)$;

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$, 其中 $m,n$ 为正数.

证明: (1) 令 $h(x)=k-2f(x)$, 则在 $[c,d]$ 用零点定理即得.

(2) 令 $g(x)=mf(c)+nf(d)-(m+n)f(x)$, 则在 $[c,d]$ 用零点定理即得.

18. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n),\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\lambda_1f(1)+\lambda_2f(2)+\cdots+\lambda_nf(n).$$

证明: 记 $u=\lambda_1f(1)+\lambda_2f(2)+\cdots+\lambda_nf(n)$, 且设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $M$, 最小值为 $m$. 则 $(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)m\leqslant u\leqslant(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)M$, 又 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 故 $m\leqslant u\leqslant M$, 由介值定理知: $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=u$, 故得证.

19. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且函数值的集合也是 $[a,b]$, 则存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明: 设 $g(x)=f(x)-x$, 则由题设知: $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\leqslant a,\ f(b)\leqslant b$, 即 $g(a)g(b)\leqslant 0$.

(1) 若 $f(a)=a$ 或 $f(b)=b$, 则证完.

(2) 若 $f(a)>a$ 且 $f(b)<b$, 则 $g(a)g(b)<0$. 由零点定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $g(\eta)=0$, 即 $f(\eta)=\eta$.

综上知: 存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

20. 证明:

(1)$\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续, 但在 $[0,A]$ 上一致连续;

(2)$\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续;
(3)$\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续;
(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上满足 *Lipschitz* 条件, 即对区间 $I$ 上任意 $x,y$, 有 $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$($L$ 是常数), 则 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续;
(5) 设函数 $f(x)$ 在有限开区间 $(\alpha,\beta)$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 上一致连续的充分必要条件是:$f(\alpha+0)$ 与 $f(\beta-0)$ 存在;
(6) 若函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$, 则 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续;
(7) 若函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\beta x-f(x)]=0$($\beta$ 为常数), 则 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续.

证明: (1) 取 $x_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, x_n'=\sqrt{2n\pi}$, 则 $x_n'-x_n\to 0(n\to\infty)$, 但 $f(x_n')-f(x_n)=1\not\to 0(n\to\infty)$, 因而 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

易知 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,A]$ 上连续, 由 Cantor 定理知: $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,A]$ 上一致连续.

(2)$\forall\varepsilon>0$, 对 $x_1,\ x_2\in[1,+\infty)$, 成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}|<|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

所以, 取 $\delta=\varepsilon$ 时, $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 故 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

(3)$\forall\varepsilon>0$, 由不等式 $\ln(1+\alpha)\leqslant\alpha\ (\alpha>-1)$, 和对 $x_1,\ x_2\in[1,+\infty)$, 成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\ln x_1-\ln x_2|=|\ln(1+\frac{x_1-x_2}{x_2})|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{x_2}\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon$$

知: 取 $\delta=\varepsilon$ 时, $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 故 $\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

(4)$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, 则 $\forall x,y\in I$, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|<L\delta<\varepsilon$. 故 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续.

(5) 充分性: 已知 $f(\alpha+0)$ 与 $f(\beta-0)$ 存在, 作辅助函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(\alpha,\beta),\\ f(\alpha+0), & x=\alpha,\\ f(\beta-0), & x=\beta,\end{cases}$$

则函数 $h(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 由 Cantor 定理知, $h(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续, 从而 $h(x)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 内一致连续. 注意到 $x\in(a,b)$ 时 $h(x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 内一致连续.

必要性: 已知 $f(x)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 内一致连续, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

在区间 $(\alpha,\beta)$ 内任取收敛于 $\alpha$ 的点列 $\{x_n\}$, 则由点列的 Cauchy 收敛准则知, 对上述 $\delta$, $\exists N$, $\forall n,\ m>N$, 有 $|x_n-x_m|<\delta$. 因此

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon \qquad (\forall n,m>N),$$

即 $\{f(x_n)\}$ 为基本列, 故收敛. 由 Heine 定理知, $f(\alpha+0)$ 存在.

同理可得 $f(\beta-0)$ 存在. 证毕.

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta$, 所以 $\forall\ \varepsilon>0, \exists X>\alpha$, 当 $x_1,x_2>X$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon.$$

又, $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续, 从而一致连续. 于是, $\exists\delta>0\ (\delta<1)$, $\forall x_1,x_2\in[a,X+1]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现任取 $x',x''\in[\alpha,+\infty)$, 满足 $|x'-x''|<\delta$, 则点 $x',x''$ 只有两种位置关系: (1) $x',x''\in[\alpha,X+1]$; (2)$x',x''\in(X,+\infty)$. 无论何种位置关系, 由前述, 都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 故 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续.

(7) 令 $h(x)=\beta x-f(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$. 由上题知, $h(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续. 注意到函数 $g(x)=\beta x$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续, 得到 $f(x)=\beta x-h(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续. 证毕.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且对任意的 $x\in[\alpha,\beta]$, 存在 $y\in[\alpha,\beta]$ 使得

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明: 存在一点 $\xi\in[\alpha,\beta]$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明: (反证法) 假设对所有的 $x\in[\alpha,\beta]$, 都有 $f(x)\neq0$, 即 $f(x)$ 同号, 不妨设对 $\forall x\in[\alpha,\beta]$, 都有 $0<f(x)\leqslant M$, 则 $M\geqslant f(x)\geqslant 2f(y)\geqslant 2^2f(y_2)\geqslant\cdots\geqslant 2^nf(y_n)$, 即 $0<f(y_n)\leqslant\frac{M}{2^n}$; 令 $n\to\infty$ 得, $f(y_n)\to0$. 由于 $y_n\in[\alpha,\beta]\ (\forall n)$, 即数列 $\{y_n\}$ 有界, 所以有收敛子列, 不妨仍记为 $\{y_n\}$, 令 $y_n\to y_0$, 则 $y_0\in[\alpha,\beta]$, 且 $f(y_0)=0$. 与假设矛盾, 故任意的 $x\in[\alpha,\beta]$, 存在 $y\in[\alpha,\beta]$ 使得 $|f(y)|<\frac{1}{2}|f(x)|$.

22. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 在点 $0,1$ 上连续, 且对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x^2)=f(x)$ 证明: $f(x)$ 为常量函数.

证明: 当 $|x|<1$ 时, $f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n})\to f(0)$, 即 $f(x)=f(0)$; 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=f(x^2)=f(|x|)=\cdots=f(|x|^{\frac{1}{2^n}})\to f(1)$, 即 $f(x)=f(1)$; 又因为 $f(x)$ 在点 1 处连续, 所以 $f(0)=f(1)$. $f(-1)=f((-1)^2)=f(1)$. 故, $f(x)\equiv f(0)=f(1)$, 得证.

23. 证明: 设函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且对任意的 $x\in[\alpha,\beta]$, 有

$$|f(x)-\frac{\alpha+\beta}{2}|\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

则方程 $f(f(x))=x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上至少存在一个解.

证明: 因为对任意的 $x\in[\alpha,\beta]$, 成立 $|f(x)-\dfrac{\alpha+\beta}{2}|\leqslant\dfrac{\beta-\alpha}{2}\Leftrightarrow\ \alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$, 所以对任意的 $x\in[\alpha,\beta]$, 有 $\alpha\leqslant f(f(x))\leqslant\beta$. 对函数 $g(x)=f(f(x))$ 利用第 19 题即得结论. (也可如第 19 题般直接证明, 令 $h(x)=f(f(x))-x$ 即得)

24. 证明: 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, $\{x_n\}\subset[\alpha,\beta]$, 且

$$g(x_n)=f(x_{n+1}),\quad n=1,2,\cdots.$$

则至少存在一点 $\xi\in[\alpha,\beta]$, 使方程 $f(\xi)=g(\xi)$.

证明: 若 $f(x_1)=g(x_1)$, 则证完. 不妨设 $f(x_1)<f(x_2)$. 若存在 $x_{n_0}$, 使得 $f(x_{n_0})>g(x_{n_0})$, 则由零点定理, $\exists x_0$, 使得 $f(x_0)=g(x_0)$. 若不存在如此 $n_0$, 即 $\forall n$, 有 $f(x_n)<g(x_n)$, 则与已知条件 $g(x_n)=f(x_{n+1})$ 联立, 得知数列 $\{f(x_n)\}$ 严格递增且有界, 从而它收敛, 记其极限为 $A$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_{n+1})=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=A.$$

由于 $x_n\in[\alpha,\beta]$ $(\forall n)$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界, 从而有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 记 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$, 则 $\xi\in[\alpha,\beta]$, 且由函数 $f$ 和 $g$ 在点 $\xi$ 连续得到 $f(\xi)=g(\xi)$. 证毕.

## 习题 3.2

1. 设 $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$ 是一个严格的开区间套, 即

$$\alpha_1<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<\cdots<\beta_n<\cdots<\beta_2<\beta_1,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$. 证明存在唯一的一点 $\xi$, 使得

$$\alpha_n<\xi<\beta_n, n=1,2,\cdots.$$

证明: 类似于闭区间套定理的证明. 事实上, $\{\alpha_n\}$ 严格递增且有界, 从而有极限 $\xi$; $\{\beta_n\}$ 严格递减且有界, 也存在极限, 由 $\beta_n-\alpha_n\to0(n\to\infty)$ 得到 $\{\beta_n\}$ 的极限也是 $\xi$. 由两数列的严格单调性得知: $\forall n\in\mathrm{N}_+$, $\alpha_n<\xi<\beta_n$(否则, 若对某 $m$, $\xi=\alpha_m$, 则 $\forall n\geqslant m$, 有 $\alpha_n=\xi$, 与 $\{\alpha_n\}$ 的严格单调性相矛盾. 对 $\xi<\beta_n$ 类似说明).

唯一性: 假设 $\alpha_n<\eta<\beta_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 由迫敛性定理得到 $\eta=\xi$.

2. 证明: 任何有限集都没有聚点.

设 $E$ 为有限集, 假设 $a$ 为 $E$ 的聚点, 则 $\forall\varepsilon>0$, $U^0(z,\varepsilon)\cap E$ 有无穷多个点, 这与 $E$ 为有限集相矛盾.

3. 证明: 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}, 0<x\leqslant 1$, 对任意的 $\alpha\in(0,1]$, 都存在开区间 $\Lambda_\alpha$, 当 $x\in\Lambda_\alpha$ 时, 有

$$|f(x)-f(\alpha)|<\frac{1}{3},$$

则开区间集 $\{\Lambda_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$ 覆盖了 $(0,1]$, 但是没有有限个 $\Lambda_\alpha$ 覆盖 $(0,1]$.

证明: (1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上连续, 于是 $\forall\alpha\in(0,\alpha]$, 对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$, 存在 $\delta_\alpha>0$, $\forall x\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)\subset(0,1]$, 有 $|f(x)-f(\alpha)|<\dfrac{1}{3}$.

设 $\Lambda_\alpha=(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)$, 则开区间集 $\{\Lambda_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$ 覆盖了 $(0,1]$.

(2) 任取 $\{\Lambda_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$ 中的有限个开区间 $\Lambda_{\alpha_k}=(a_k,b_k)$ $(k=1,2,\cdots,m)$. 由题设, $0\notin\Lambda_\alpha$ $(\alpha\in(0,1])$, 取 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 则 $a>0$. 于是 $(0,a]$ 不能被 $\{(a_k,b_k):\ k=1,2,\cdots,m\}$ 覆盖. 故没有有限个 $\Lambda_\alpha$ 覆盖 $(0,1]$.

4. 应用有限覆盖定理证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意的 $x\in[a,b]$, 有 $f(x)>0$, 则存在 $\beta>0$, 对任意 $x\in[a,b], f(x)>\beta$.

证明: 有连续函数的保号性知, $\forall x\in[a,b]$, 存在 $\delta_x>0$, 使得 $\forall y\in U(x,\delta_x)$, 有

$$f(y)>\frac{f(x)}{2}>0.$$

于是得到 $[a,b]$ 的一个开覆盖 $\mathcal{H}=\{U(x,\delta_x):x\in[a,b]\}$, 从而由有限覆盖定理知: 存在一个有限子覆盖 $\mathcal{H}^*=\{U(x_j,\delta_j):j=1,2,\cdots,m\}$. 取

$$\beta=\min\{\frac{f(x_j)}{2}:j=1,2,\cdots,m\},$$

则 $\beta>0$. 因此, $\forall x\in[a,b]$, 存在 $j_0$, 使 $x\in U(x_{j_0},\delta_{j_0})\in\mathcal{H}^*$, $f(x)>\dfrac{f(x_{j_0})}{2}\geqslant\beta>0$.

**注**: 不用有限覆盖定理也可证明本题, 且更简单. 事实上, 由闭区间上连续函数的最值定理, $m=\min f[a,b]>0$(因为存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $m=f(x_0)>0$). 取 $\beta=m/2$ 即可.