期中考试试卷答案和评分标准

【注意】阅卷工作由助教负责，要求一周内完成，将成绩登记到平时成绩记载单和电子表格上。发现解答有误请联系任课老师。

一、基本计算（每小题 6 分，共 60 分）

1. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+10}{3n-2}$（$n>1$），求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 1： 当$n>22$时，$0<x_{n+1}<\dfrac{x_n}{2}<\cdots<\dfrac{1}{2^{n-22}}x_{22}$，（3 分）

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-22}}x_{22}=0$，所以由夹挤原理知：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.（6 分）

解 2： 当$n>6$时，$0<x_{n+1}<x_n<\cdots<x_6$，（2 分）

从而由单调有界原理知：数列$\{x_n\}$的极限存在，设为$l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，

对$x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+10}{3n-2}$两边取极限，得到$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.（6 分）

2、计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ （$a,b,c>0$ 是常数)

解 1（等价无穷小） $l=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}[\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1]}$（2 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}[\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}]}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}.$$（6 分）

解 2(罗比达)：$l=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}[\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1]}$（2 分）

$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln a\cdot a^x+\ln b\cdot b^x+\ln c\cdot c^x}{3}$$

$$=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$$（6 分）

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{(\cos x+1)\ln(1+x)}$

解 1：（等价无穷小和无穷小量性质）

$$l=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}$$（2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$ （6 分）

（用到无穷小量乘以有界量仍为无穷小量）;

解 2：（无穷小比较的概念）

因为 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=0$，所以 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=o(x^{\frac{3}{2}})$， （3 分）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+o(x^{\frac{3}{2}})}{2x}=\frac{3}{2}$$ （6 分）

解 3：(无穷小等价)

因为 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin(3x)}=0$，所以 $\sin(3x)+x^2\sin\dfrac{1}{x}\sim 3x,(x\to 0)$； （3 分）

而分母 $(\cos x+1)\ln(1+x)\sim 2x,(x\to 0)$，所以 $l=\dfrac{3}{2}$. （6 分）

4. 已知 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值。

解 1：由 $0=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+(2-b)x+1+b}{x-1}$， （3 分）

得 $a=0$，$2-b=0$，所以 $a=0,b=2$ （6 分）

解 2：由已知得到，$a=0$，（因为 $a\neq 0$，已知条件中的极限不存在;）（3 分）

当 $a=0$ 时，$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=2=b$. 所以 $a=0,b=2$ （6 分）

解 3：$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+1}{(x-1)x^2}=a=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x^2}=0$， （3 分）

所以 $b=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$，所以 $a=0,b=2$（6 分）.

5. 求极限 $l=\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

解$\because \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$ （2 分） 又 $\because \lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$（4 分）

所以利用左右极限得到：$l=1$ （6 分）

6、 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{x(x-1)|x-2|}$ 的间断点，并判断间断点的类型。

解：间断点为 $x=0,1,2$， （2 分）

因 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为无穷间断点（或第二类间断点）

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x|x-2|}=-1$，所以 $x=1$ 为可去间断点；

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(2-x)}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $x=2$ 为跳跃间断点； （6 分）

7、 设函数 $y=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}\sqrt{e^x+1}}$ $(x>-1)$，求微分 $dy\big|_{x=0}$。

解 $y'=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}\sqrt{e^x+1}}[\dfrac{1}{2}(x-\ln(x+1))+\dfrac{1}{4}\ln(e^x+1))]'$

$=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}\sqrt{e^x+1}}(1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{e^x}{e^x+1})$ （3 分）

$dy\big|_{x=0}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{8}dx$. （6 分）

8、 设函数 $v=f(u)$ 有反函数 $u=\varphi(v)$，满足 $f(0)=0$，且 $\varphi(v)$ 是可导的，在 $v=0$ 的某个邻域中有 $\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$，求复合函数 $y=f(2x+x^2)$ 在 $x=0$ 的导数。

解： $y'(0)=f'(x+x^2)(2+2x)\big|_{x=0}$ （2 分）

$$=2f'(0)=\frac{2}{\varphi'(0)}=\frac{2}{1/2}=4.$$ （6 分）

9、设 $y=\ln(2x^2-3x+1)$，求 $y^{(10)}(0)$.

解：因 $y=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$， （1 分）

所以 $y^{(10)}(x)=\dfrac{(-1)^9 9!}{(x-1)^{10}}+\dfrac{2\cdot 2^9(-1)^9 9!}{(2x-1)^{10}}$（或 $=\dfrac{-9!}{(x-1)^{10}}-\dfrac{2^{10}9!}{(2x-1)^{10}}$）（4 分）

所以 $y^{(10)}(0)=-9!(2^{10}+1)$ （6 分）

10、 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 确定，求在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时的导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1;$ （3 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(-\tan t)'}{-3\cos^2 t\sin t}=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$，所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. （6 分）

二、综合题（每小题 6 分，共 30 分）

11．设函数 $f(x)$ 在点 a 处连续，$F(x)=(e^x-e^a)f(x)$ ，计算导数 $F'(a)$。

解： $F'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(e^x-e^a)f(x)}{x-a}$ (2 分)

$F'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^a(e^{x-a}-1)f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^a(x-a)f(x)}{x-a}$ 或者 $=(e^x)'|_{x=a}f(a)=e^af(a)$ （6 分）

注意，不使用定义计算，用乘积求导公式，会出现导数 $f'(x)$，为 0 分

12．求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性。

解：因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$，（2 分）

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ （4 分）

当 $x \neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$ 为初等函数，所以连续；而

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。（6 分）

13．设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导，且 $f(1+x)-3f(1-x)\sim 3x^2\ (x\to 0)$。求 $f(1), f'(1), f''(1)$ 的值。

解：由题意知; $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+x)-3f(1-x)]=-2f(1)=0$, 所以 $f(1)=0$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x}=4f'(1)=0,\ \text{所以}\ f'(1)=0；\qquad（2 分）$$

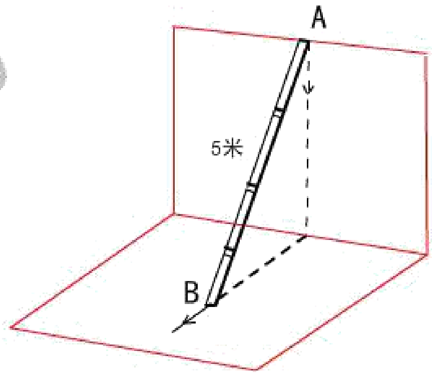
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)+3f'(1-x)}{2x}\ （洛必达）（4 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(1+x)-f'(1)}{2x}\right]+3\left[\frac{f'(1-x)-f(1)}{2x}\right]=-f''(1)=3\ （二阶导数定义）$$

所以 $f''(1)=-3$.

（6 分）

14. 求无穷小量 $u(x)=\arcsin x-\arctan x\ (x\to 0)$ 的主部与阶数。



解 1：要成立

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{cx^r}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\frac{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}{crx^{r-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{crx^{r-1}}\qquad（3 分）$$

必须有 $r=3$，$c=\dfrac{1}{2}$，因此，所求主部是 $\dfrac{1}{2}x^3$，阶数为3（6 分）.

[用其他方法，比如换元或者泰勒公式，参照此给分]

15．如图，一根长为 5 米的竹竿斜靠着墙，地面与墙面垂直，竹竿在地面的投影也与墙面垂直。设墙面和地面是光滑的，使得竹竿顶端 A 沿着墙壁竖直往下滑动，同时，底端 B 沿着其投影线向外滑动。如果在底端 B 距离墙根为 3 米时， 点 B 的速度为 4 米/秒，问此时顶端 A 下滑的速度为多少？

解：设 $x(t)$ 为 t 时刻竹竿底端据墙根的水平距离，竹竿顶端距墙根的垂直距离为 $y(t)$，则

$x^2(t)+y^2(t)=25$ （2 分）

两边求导，得 $x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}=0$，

由题设取 $x=3m, y=4m$ 时，$\dfrac{dx}{dt}=4m/s$ km/h，故此时 $\dfrac{dy}{dt}=-3m/s$，

于是竹竿顶端下滑速度为$3m/s$. （6 分）

[典型错误] 将顶端距离墙根的距离设为：$y(t)=\sqrt{5^2-(5-4t)^2}$

三、分析证明（每小题 5 分，共 10 分）

16. 由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域上连续？认为可以请证明，认为不行请举反例。

解： 不能。 （2 分）

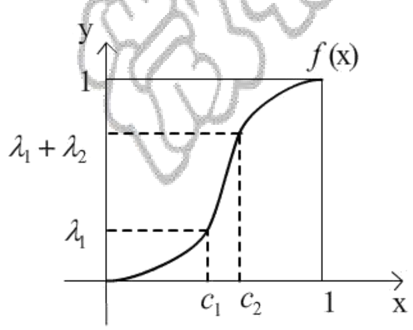
反例： $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$，这里的$Q$表示有理数； （4 分）【反例不唯一的，正确时，证明可以从简】

由于 $0\le\left|\dfrac{f(x)-0}{x-0}\right|\le|x|$，所以由夹逼定理知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=0$，即在原点可导；

而在非零点x_0，因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，所以不连续，于是该函数不能在原点的某个邻域内连续 （5 分）

17. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$。设正实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，满足$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。证明：存在三个不相等的实数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=1$。

证明： 根据介值定理，对于$0<\lambda_1<1$，存在一个实数$0<c_1<1$，使得$f(c_1)=\lambda_1$，然后对于$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，存在一个实数$c_2\in(c_1,1)$或使得$f(c_2)=\lambda_1+\lambda_2$。 （2 分）



在区间$[0,c_1],[c_1,c_2],[c_2,1]$对函数$f(x)$依次使用拉格朗日微分中值定理，则至少存在 $\xi_1\in(0,c_1),\xi_2\in(c_1,c_2),\xi_3\in(c_2,1)$， 成立：

$$\frac{f(c_1)-f(0)}{c_1-0}=\frac{\lambda_1}{c_1}=f'(\xi_1),\quad \frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=\frac{\lambda_2}{c_2-c_1}=f'(\xi_2),$$

$$\frac{f(1)-f(c_2)}{1-c_2}=\frac{1-(\lambda_1+\lambda_2)}{1-c_2}=\frac{\lambda_3}{1-c_2}=f'(\xi_3),$$

于是 $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=c_1+c_2-c_1+1-c_2=1$ 结论成立。 （5 分）