2021 级《微积分 A(下)》课程期末考试试题

(2022 年 6 月 27 日， 用时 150 分钟)

(参考答案)

考试方式 闭卷 日期 2022 年 6 月 27 日 时长 150 分钟

专业班级______ 学号______ 姓名______

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					满分100

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (每空 3 分，共 24 分)

1. 设 $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,0,1)$, 则向量 $\vec{a}\times\vec{b}=$ $(1,0,-1)$.

2. 函数 $f(x,y,z)=xy+e^z$ 在点 (x,y,z) 处的梯度 $\nabla f=$ (y,x,e^z);

   f 在点 $(0,0,0)$ 处关于方向 $\vec{a}=(1,2,2)$ 的方向导数为 $2/3$。

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则

   $S(0)=$ $1/2$, $S(1)=$ $\sin 1$。

4. 函数 $f(x,y)=x^3-y^3$ 在点 $(1,2)$ 处的微分 $\mathrm{d}f|_{(1,2)}=$ $3dx-12dy$.

5. 设 $F(y)=\int_0^y\frac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x$, $y>0$, 则 $F'(y)=$ $\frac{2\ln(1+y^2)}{y}$.

6. 设曲线 L 是上半圆周 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 其中 $a>0$, 则第一型曲线积分

   $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ πa^3.

阅卷人	
得　分	

二、解答题 (每题 8 分，共 56 分)

7. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解：$a_n = n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，收敛半径 $R=1$

而 $x=\pm 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n$ 发散，收敛域 $(-1,1)$.

(3′)

记 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 则

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$ (5′)

8. 设函数项级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$, 求极限 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解：由 $\left|\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\right| \le \frac{|x|^n}{3^n}$ 知当 $|x|\le \delta < 3$ 时 $\sum \frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$

一致收敛 (Weierstrass 判)。

又 $\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上连续，故 $\sum \frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ (4′)

在 $[-\delta,\delta]$ 上连续，于是

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$ (4′)

9. 设 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$. 记 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 求导函数 $f'(x)$ 的 Fourier 系数 a_n', b_n'.

解：因f光滑，f'在$[-\pi,\pi]$上连续，故f'在$[-\pi,\pi]$上可积.

$n=0$, $a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)] = 0$, (2')

$n\geq 1$, $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$

(3') $+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n$,

$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$= -na_n$. (3')

10. 考虑方程

$$F(x,y,z) = xyz^3 + x^2 + y^3 - z = 0.$$

请问在原点附近能否确定隐函数 $z = f(x,y)$? 若能, 求出偏导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,1)}$ 和 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,1)}$; 若不能, 请说明理由.

解：显然 $F(0,0,0)=0$，且F是R^3上的光滑函数.

又 $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = (3xyz^2-1)\Big|_{(0,0,0)} = -1 \neq 0$

由隐函数定理，在$(0,0,0)$附近可确定$z=f(x,y)$，且f光滑，(4')

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz^3+2x}{1-3xyz^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz^3+3y^2}{1-3xyz^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,1)} = 1, \\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,1)} = 3 \end{cases}$$

(4')

11. 计算第一型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0\}$ 为上半球面, $a>0$.

解: Σ 对应的 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leq a^2$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{-x}{z},\quad z_y=-\frac{y}{z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{z} \qquad (4')$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} z\,d\sigma=\iint_{x^2+y^2\leq a^2} z\cdot\frac{a}{z}\,dxdy=\pi a^3 \qquad (4')$$

12. 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是 $2x^2+3y^2+z^2=520$ 的外侧.

解: 易验证

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2\cdots}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\cdots}\right)=0$$

由被积式在 $(0,0,0)$ 奇点, 作封闭曲面 (外侧) $(4')$

$$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2 \quad (\varepsilon\text{充分小})$$

由Gauss公式

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz\cdots}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq\varepsilon^2}dxdydz=4\pi \qquad (4')$$

13. (i) 设 $x>0, y>0, z>0$，求函数 $f(x,y,z)=3\ln x+4\ln y+5\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0)$ 上的极大值;

(ii) 并由此证明不等式: $a^3b^4c^5 \leqslant \frac{3^35^5}{16}\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$, $\forall a,b,c>0$.

(1)

解：作Lagrange函数 $L(x,y,z,\lambda)=3\ln x+4\ln y+5\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$

令 $\nabla L=\vec{0}$，即

$$\begin{cases} L_x=\frac{3}{x}-2\lambda x=0 \\ L_y=\frac{4}{y}-2\lambda y=0 \\ L_z=\frac{5}{z}-2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-6r^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{3}{2}}r \\ y=\sqrt{2}r \\ z=\sqrt{\frac{5}{2}}r \end{cases}$$

故由于f连续且最大值只能在内部，故 $(\sqrt{\frac{3}{2}}r, \sqrt{2}r, \sqrt{\frac{5}{2}}r)$ 是f最大值点，

$f_{max}=\ln\left(4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}r^{12}\right)$ (5')

(2) 由(1)知

$x^3y^4z^5 \le 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6$

令 $x^2=a, y^2=b, z^2=c$ 代入即得

(3')

阅卷人	
得 分	

三、探究题 (每题 10 分, 共 20 分)

14. (i) 计算无穷积分 $I=\int_0^{\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $p>0$, $b>a$;

(ii) 并由此计算 $f(a)=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

解(1) 注意到 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\,dy$,

$I=\int_0^\infty e^{-px}\left(\int_a^b\cos xy\,dy\right)dx$

$=\int_0^\infty\int_a^b e^{-px}\cos xy\,dy\,dx$

由 $|e^{-px}\cos xy|\le e^{-px}$ 且 $\int_0^\infty e^{-px}dx<\infty$

知 $\int_0^\infty e^{-px}\cos xy\,dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

又 $e^{-px}\cos xy$ 在 $[0,\infty)\times[a,b]$ 上连续，故

$I=\int_a^b dy\int_0^\infty e^{-px}\cos xy\,dx$

$=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy$ (6')

$=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$.

(2) 在(1)中令 $b=0$ 得

$F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin ax}{x}=\arctan$

又 $\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx$ 一致收敛 且 e^{-px} 关于x单调一致有界，由Abel判别法知 $\int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin ax}{x}$ 一致收敛

$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx=\lim_{p\to0}F(p)=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(a)$ (4')

15. 设 u 在闭区域 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数.

(i) 将第一型曲面积分 $\iint\limits_{\partial V} u\,\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\sigma$ 转化为第二型曲面积分, 其中 $\vec{n}$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的单位外法向;

(ii) 并由此证明

$$\iint\limits_{\partial V} u\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{V}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{V} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

解：(i) 由 $\vec{n}$ 是外法向量，设 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

则

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma = \iint\limits_{\partial V} u(u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma)d\sigma$$

$$= \iint\limits_{\partial V} uu_x\cos\alpha d\sigma + uu_y\cos\beta d\sigma + uu_z\cos\gamma d\sigma$$

(5')

$$= \iint\limits_{\partial V} uu_x dydz + uu_y dzdx + uu_z dxdy$$

(ii) 由(i)及 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial(uu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(uu_z)}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{V}\left(u_x^2 + uu_{xx} + u_y^2 + uu_{yy} + u_z^2 + uu_{zz}\right)dxdydz$$

(5')

$$= \iiint\limits_{V}|\nabla u|^2 dV + \iiint\limits_{V} u\Delta u\, dV$$

阅卷人	
得　分	

四、附加题（二选一，请在所选题前的方框内画✓；10 分）

16. □ 作如下定义：设集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，如果连续函数 $\gamma:[0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$ 的值域全部落在 D 中：$\gamma([0,1]) \subseteq D$，则称 γ 是 D 中的一条**道路**，且 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 分别称为道路 γ 的起点和终点；如果 D 中的任意两点都可以由一条连续的道路 γ 连接，则称 D 是**道路连通集**。

证明：道路连通具有连续不变性，即：若 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是道路连通集，映射 $f: D \mapsto \mathbb{R}^m$ 连续，则 $f(D)$ 也是道路连通集。

证：设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 连通，$f: D \to \mathbb{R}^m$ 连续，要证 $f(D)$ 连通。

对 $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in f(D)$，$\exists\, x, y \in D$，s.t.

$\tilde{x} = f(x)$，$\tilde{y} = f(y)$

由 D 连通知 $\exists$ 道路 $\gamma: [0,1] \mapsto D \subseteq \mathbb{R}^n$ 使

$\gamma(0) = x$，$\gamma(1) = y$　(2')

作映射

$\tilde{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$，$t \in [0,1]$　(3')

则由 f 和 γ 连续知 $\tilde{\gamma}$ 连续且

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = \tilde{x} \\ \tilde{\gamma}(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = \tilde{y} \\ \tilde{\gamma}([0,1]) = f(\gamma([0,1])) \subset f(D) \end{cases}$$　(5')

$\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ 是 $f(D)$ 中连接 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 的道路，由 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 的任意性知 $f(D)$ 连通

17. □ 设函数 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, 实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 对称正定. 求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega_t} f\left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$

其中椭球体 $\Omega_t=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \leqslant t^2\}$, $t>0$.

解：由A对称正定，则∃正交矩阵B，使

$$B^TAB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},\quad \lambda_i>0,\ i=1,2,3.$$

令 $C=B\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\end{pmatrix}$ 则 $C^TAC=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\end{pmatrix}B^TAB\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

作变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Rightarrow \sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{3}y_i^2$$

且 Ω_t 变为 $\hat{\Omega}_t: y_1^2+y_2^2+y_3^2\le t^2$，且有 $\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}=\det C$ (4′)

于是

$$\iiint\limits_{\Omega_t} f\left(\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j}\right)dx_1dx_2dx_3=\iiint\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2\le t^2} f\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right)\det C\,dy_1dy_2dy_3$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r)\cdot r^2\sin\varphi\det C\,dr$$

$$=4\pi(\det C)\int_0^t f(r)\cdot r^2\,dr=\frac{4\pi}{\sqrt{\det A}}\int_0^t f(r)\cdot r^2\,dr$$ (4′)

$$\text{原式}=\frac{4\pi}{\sqrt{\det A}}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^t f(r)\cdot r^2\,dr=\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\frac{\pi f'(0)}{\sqrt{\det A}}$$ (2′)