2021 级《微积分》（A）（上）课程期末考试试题

(2022 年 1 月 3 日， 用时 150 分钟)

专业班级________________ 学号______________________ 姓名________________

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

阅卷人	
得 分	

一、选择题 (**每题** 4 **分，共** 16 **分**)

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 有界数列一定收敛；

B. 有限区间上的连续函数一定一致连续；

C. 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，它的导函数 f' 一定是连续的;

D. 有界数集一定存在上确界。

2. 下列哪个极限不存在 ( )

A.$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

B.$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{D}(x)$，其中 $\mathrm{D}(x)$ 是 Dirichlet 函数

C.$\lim\limits_{x\to 0} |\mathrm{sgn}(x)|$

D. $\lim\limits_{n\to +\infty}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$

3. 当 $x\to 0$ 时，下面哪个函数不是与 $y=x$ 等阶的无穷小 ( )

A. $\sin x$

B. $\arcsin x$

C. $\ln(1+x)$

D. $1-\cos x$

4. 函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，在 x_0 处可导而且 $f(x_0)>0$。下列说法错误的是 (　)

A. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分是 $f'(x_0)$；

B. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

C. 存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得在该邻域内 $f(x)>0$；

D. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)=f(x_0)+o(1)$。

阅卷人	
得　分	

二、填空题 (**每题** 4 **分，共** 20 **分**)

5. 集合 $A=\{(1+\frac{1}{n})^n|n\in\mathbb{N},n>0\}$，那么 $\inf A=$ ______，$\sup A=$ ______。

6. 函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导，而且 $\varphi'(t)\neq 0$。由参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 确定了函数关系 $y=y(x)$。那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______________，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ______________。

7. 函数 $y=2x^3+3x^2-12x+18$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值是 ______，最小值是 ______。

8. 函数 $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$ 图像的垂直渐近线是 ______________，斜渐近线是 ______________。

9. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续，$F(x)=\int_0^x f(x+t)dt$，那么 $F'(x)=$ ______________。

阅卷人	
得 分	

三、计算与解答题 (**每题** 6 **分，共** 36 **分**)

10. 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 10 阶带 Peano 型余项的 Maclaurin 展开。

11. 计算不定积分：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

12. 计算 Euler 积分：

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

其中 m, n 都是正整数。

13. 利用 Riemann 积分求下述极限值：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

14. 计算将圆 $x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 绕 x 轴旋转一周得到环体的体积 V 和表面积 S。

15. 求解下述初值问题：

$$\begin{cases} y'+y=x, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

阅卷人	
得　分	

四、证明题 (16-19 **每题** 7 **分，附加题** 10 **分，共** 38 **分**)

16. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，在 (a,b) 内二阶可导。假设 $f(a) = f(b) = 0, M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) > 0$。证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f''(\xi) \leqslant -\frac{8M}{(b-a)^2}.$$

17. 假设 $a,b \geqslant 0, p,q > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明 Young 不等式：

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

18. 假设 $0 \leqslant a < b$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，单调增加，证明：

$$2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

19. 证明下述广义积分是条件收敛的：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

20.（附加题）

(a) 请陈述通过振幅给出的可积性判定准则；

(b) 函数 f, g 在 $[a, b]$ 上可积，证明：它们的乘积 $f \cdot g$ 也在 $[a, b]$ 上可积。