第一学期试卷

A-1 期中考试试卷

一、基本题(每小题 6 分,共 60 分)

1. 计算数列极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{4n}$.

2. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{x^2}-3^{x^2}}{(2^x-3^x)^2}$.

3. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^3}$.

4. 设 $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$,求 $f'(x)$.

5. 设参数方程 $\begin{cases}x=t+t^2\\ y=te^t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$,求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=h(x^2+y^2)$ 所确定,h 处处可导,且 $h'\neq\frac{1}{2y}$,求 y'.

7. 求函数 $f(x)=\sin\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带 peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

8. 求函数 $f(x)=\frac{x}{1+2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

9. 求曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$的斜渐近线方程.

10. 指出函数 $f(x)=(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}$ 的间断点与类型.

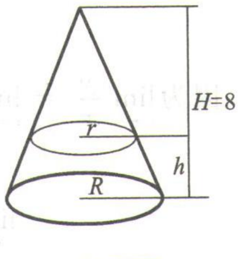
二、综合题(每小题 7 分,共 28 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,$f(0)\neq0$,且对一切 x,y 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$,证明 $f(x)$ 处处连续.

12. 讨论方程 $\ln x-\frac{x}{e}+1=0$ 有几个实根?并给出证明.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,且 $f(2)\neq0$. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right]^x$.

14. 如图所示,圆锥形容器的高为 8 m,底半径为 $R=2\sqrt{2}$ m,向其中注水. 设当水深 $h=6$ m时,水面上升的速度为 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi}$ m/min,求此时水的体积的变化率 $\frac{dV}{dt}$.



14 题图

三、证明题(每小题 6 分,共 12 分)

15. 证明不等式:当 $0<x<1$ 时,$\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

16. 设 $0<x_1<x_2$,证明 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=(\ln\xi-1)(x_1-x_2)$,其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

B-1 期中考试试卷

一、基本计算(每小题 6 分,共 60 分)

1. 计算数列极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}(1+n^2+2^n)^{1/n}$.

2. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

3. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$,其中 $f'(x)=\arcsin x^2$,求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

5. 设参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$确定了函数 $y=y(x)$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 计算曲线 $x^2-xy+2y^2=2$ 在点(1,1)处的切线方程.

7. 设 $x=g(y)$ 是函数 $y=\ln x+\arctan x$ 的反函数,求 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 处的导数$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 和$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

8. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,计算下列函数的导数 y' 以及 y'':
   (1)$y=f(x^2)$;(2)$y=(f(x))^2$.

9. 设函数 $y=\dfrac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5\mathrm{e}^x}$,使用对数求导法求 $y'|_{x=1}$.

10. 求无穷小量 $u(x)=\cos2x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x^2}}(x\to0)$ 的主部.

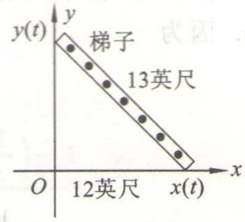
二、综合题(每小题 7 分,共 28 分)

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$,问 $a(a\geqslant0)$ 为何值时,$x=0$ 是 $f(0)$ 的间断点,并指出该间断点的类型.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. $f'(0)=0$,$f''(0)=2$. 求 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$.

13. 设 $f'(x)$ 处处连续,$g(x)=f(x)\sin^2x$,求 $g''(0)$.

14. 如图所示,一个 13 英尺长的梯子斜靠在墙边上,当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时,梯子底端沿地面移动的速度是 5 英尺 / 秒,问当梯子底端的地面长度为 12 英尺时,直角三角形的面积的变化率是多少?



14 题图

三、证明题(每小题 6 分,共 12 分)

15. 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

16. 设函数 $f(x)=\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数,$\varphi(0)=0$,$\varphi'(0)=1$,已知对一切实数 x,有 $|f(x)|\leqslant|x|$,试证:$|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\leqslant1$.

C-1 期中考试试卷

一、基本计算(每小题 5 分,共 60 分)

1. 计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\dfrac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

2. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 计算函数极限 $l=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{1-x}-ax-b\right)=0$,求常数 a 与 b 的值.

5. 求当 $x\to 0$ 时,无穷小 $u(x)=\arcsin x-x$ 的主部与阶数.

6. 设函数 $y=\ln\sqrt{\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}}$,求 $y'(1)$.

7. 设函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$,求$\dfrac{dy}{dx}$,$\dfrac{dy}{d(\cot x)}$.

8. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^3$,$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,求 $\varphi'(y)\big|_{y=1}$.

9. 设函数 $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$,求 $y^{(10)}(x)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$所确定,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. 求函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(1-x)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点,并判断其类型.

12. 一架巡逻直升机在距地面 3 km 的高度以 120 km/h 匀速地沿一条水平笔直的高速公路向前飞行,飞行员观察到迎面驶来一辆汽车.设汽车行进的速度为匀速,当直升机与汽车间的距离为 5 km 时通过雷达测出此距离以 160 km/h 的速率减少,试求汽车行进的速度.

二、综合题(每小题 6 分,共 30 分)

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,求 $f'(x)$,并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=\sin(x+y)$ 确定,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

15. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(0)=0$,$f''(0)$ 存在,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

16. 设 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,在 $x=1$ 处可导,在 $x=0$ 附近满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6,f(6))$处的切线方程.

17. 设 $x_1=2$,$x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}}\ (n>1)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

三、证明题(每小题 5 分,共 10 分)

18. 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$,证明:

(1) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$;(2) 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$,使 $f''(\eta)=0$.

19. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有二阶导数,且有正常数 a,b,使得 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$.证明:对任意 $c\in(0,1)$,有 $|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

第二学期试卷

A-2 期中考试试卷

1. 求与平面 $\pi: 2x+3y+6z+1=0$ 平行，且与三个坐标面所构成的四面体体积为1的平面方程.
2. 已知 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$，$\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，试求 $\angle BAC$ 平分线上的单位向量.
3. 设动点 $P(x,y,z)$ 到点 $P_0(1,1,2)$ 的距离是它到平面 $x=3$ 的距离的 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，求其轨迹方程.
4. 设函数 $z=f(x+y,xy)$，其中 f 有连续的二阶偏导数. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
5. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z+x+y-\mathrm{e}^{z+x+y}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$.
6. 设方程组 $\begin{cases} az+f(y-x,z+y)=0 \\ by+g(y+z,z-x)=0 \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$，其中 f,g 有连续的偏导数. 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.
7. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+x\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.
8. 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4-y^2}\,\mathrm{d}x$.
9. 计算 $I=\iint\limits_D |x+y-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$.
10. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.
11. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.
12. 求抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的体积最小，并求出这个最小体积.
13. 设函数 $f(x,y)=|x-y|$，讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的 (1) 连续性，(2) 偏导数存在性，(3) 可微性，(4) 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{1,1\}$ 的方向导数的存在性. 对存在情形计算出结果.

B-2 期中考试试卷

1. 设 a 是以点 $A(1,0,0)$，$B(1,1,1)$，$C(0,2,3)$ 为顶点的三角形的面积，求其值.

2. 设 S 是曲线 $L:\begin{cases} z=-x^2+1 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转面，求其上与直线 $x=y=z$ 垂直的切平面方程.

3. 求函数 $u=xy^2z^3$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}u$.

4. 设函数 $u=xy^2$ 在点 $P(1,1)$ 处沿着单位矢量 $\boldsymbol{n}=\{a,b\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 比沿着其他任何方向的方向导数都要大，求出此矢量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

5. 设 $z=f(x,u)$，$x=t^2$，$u=\sin t$，其中 f 具有连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

6. 设 $z=f(x,u)$，$u=x^2y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 设 $z=f(u)$，$u=x^2y$，其中 f 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 设函数 $w=x^2+y^2+z^2$，且 $z^3-xz(y+1)+x^3=2$. 试以 x,y 为自变量，求在点 $P(1,-1,1)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

9. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 具有连续偏导数，且 $F'_1(2,2)=a$，$F'_2(2,2)=b$，$a+b\neq 0$. 求在点 $P(1,1,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}z$ 和偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

10. 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 在点 $P(1,1,\sqrt{2})$ 处的切线方程.

11. 计算逐次积分 $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{y^3}\,\mathrm{d}y$ 的值.

12. 计算 $I=\displaystyle\iint_D(\mathrm{e}^x y+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 围成.

13. 计算 $I=\displaystyle\iint_D|x+y-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x=0$，$x=2$ 和 $y=0$，$y=2$ 围成.

14. 讨论函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在原点 $(0,0)$ 是否连续？两个偏导数是否存在？是否可微？沿着哪些方向存在方向导数？（对存在情形写出结果.）

15. 求函数 $u=xz+yz$ 在区域 $D:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

B-2 期中考试试卷解答

1. $\overrightarrow{AB}=\{0,1,1\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1,2,3\}$，$a=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 旋转面 $z=1-x^2-y^2$，由 $\{1,1,1\}\parallel\{2x,2y,1\}$ 得到切点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，所求方程为 $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$.

C-2 期中考试试卷

1. 四面体的三条棱从点 $O(0,0,0)$ 连至点 $A(2,3,1)$,$B(1,2,2)$,$C(3,-1,4)$,求其体积.

2. 求直线 $L_1:\begin{cases}x-y+z+1=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x+y+z=0$ 上的投影直线 L 的方程.

3. 求点 $P(1,-2,3)$ 关于平面 $\pi:x+4y+z-14=0$ 的对称点.

4. 求极限 $l=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

5. 设 $z=y\varphi(x^2-y^2)$,其中 φ 可导,求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $u=f(x,y,z)$ 具有连续偏导函数,$z=z(x,y)$ 是由方程 $xe^x-ye^y-ze^z=0$ 所确定的二元函数,求 du.

7. 设 $\boldsymbol{n}$ 是函数 $w=x^2+2y^2-2z^2$ 在 $P_0(1,1,1)$ 处的梯度矢量,求函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

8. 设 S 是曲线 $L:\begin{cases}x^2+4y^2=1\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴的旋转面,求 S 上与平面 $x-2y+\dfrac{1}{2}z=0$ 平行的切平面方程.

9. 计算逐次积分 $I=\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2\sin\dfrac{x}{y}dy$.

10. 计算二重积分 $\iint\limits_D(y+\sqrt{x^2+y^2})dxdy$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2x$.

11. 设函数 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$,其中 f 具有三阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$,$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}$.

12. 设方程组 $\begin{cases}F(y-x,y-z)=0\\G(xy,z)=0\end{cases}$ 确定了隐函数 $x=x(y)$,$z=z(y)$,求 $\dfrac{dz}{dy}$.

13. 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴与短半轴的长度.

14. 计算 $I=\iint\limits_D|x-y|dxdy$,其中 D 是矩形区域:$-2\leqslant x\leqslant 1$,$-1\leqslant y\leqslant 1$.

15. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,讨论 $f(x,y)$ 在原点$(0,0)$处的(1)连续性,(2)偏导数存在性,(3)可微性,(4)沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}(\alpha\neq0,\pi)$ 的方向导数的存在性,对存在情形计算出结果.