一元微分学: 思考题与训练题

思考题

1. 已知函数φ, ψ分别在点x_0的某空心左邻域、某空心右邻域内可导, 函数$f(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x\le x_0\\ \psi(x),\ x>x_0\end{cases}$. 问: 是否必有$f'_-(x_0)=\varphi'(x_0-0)$与$f'_+(x_0)=\varphi'(x_0+0)$? 注意记号的含义. 考察函数$f(x)=\begin{cases}e^{\sqrt[3]{x}}\sin x, & x<0\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, & 0\le x<1\end{cases}$在$x=0$处的可导性.

2. 微分中值定理的条件是必要的吗? 考察函数$f(x)=\begin{cases}x^2,\ |x|<1\\ 0,\ \ -2\le x\le -1\\ 1,\ \ 1\le x\le 2\end{cases}$.

3. 在Rolle中值定理中, 让$f'(\xi)=0$的ξ能否有无穷多个? 考察函数

$$g(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

4. 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在, 是否推知极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$必存在且两极限相等?

5. Taylor公式的不同类型余项分别有什么作用?

6. 若$f'(a)>0$, 能否得到函数$f(x)$在点a的某个邻域内单调增加? 设

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

考察该函数在点$x=0$的情形.

7. 若函数$f(x)$在点x_0取极大值, 是否可断定在点x_0的充分小邻域内, 函数在点x_0左侧上升, 右侧下降? 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\ne 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

在点$x=0$的情形.

8. 下列陈述能否为凸函数的定义? 设函数$f(x)$在区间I上连续, $\forall x_1,\ x_2\in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

9. 总结凸函数的等价定义.

10. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可微, $c\in(0,1)$. 证明: $\exists\xi,\ \eta\in(0,1)$, 使得$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi)$.

11. 设函数$f(x)$可导, 曲线$y=f(x)$上存在三点$(x_i,f(x_i))$ $(i=1,2,3)$共线, 其中$0<x_1<x_2<x_3$. 证明: $\exists\xi,\ \eta\in(x_1,x_3)$, 使得$\xi f'(\eta)-f(\xi)=\eta f'(\eta)-f(\eta)$.

提示: 设三点在直线$y=kx+b$上, 令$F(x)=\dfrac{f(x)-b}{x}$, 则$F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)$.

12. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可微, $f(0)=0$, $f(1)=1/2$. 证明: $\exists\xi,\ \eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$, 使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

提示: 令$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$, 并分别在$[0,\frac{1}{2}]$与$[\frac{1}{2},1]$上用Lagrange中值定理.

13. 设函数$f(x),g(x)$在区间$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且$f(0)=g(0)=f(1)=0$, $g'(x)\neq0$. 证明: $\exists\xi,\ \eta\in(0,1)$, $\xi<\eta$, 使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=0$.

14. 设函数$f(x)$, $g(x)$在(a,b)内可微, $g(x)\neq0$, 且$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\equiv0, x\in(a,b)$. 证明: 存在常数$k$, 使得$f(x)=kg(x)$ $(x\in(a,b))$.

15. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且$f(1)=0$. 证明: 存在$\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi<\eta$, 使得$(\xi-1)f'(\eta)+\xi f'(\xi)=0$.

提示: 化两个点的存在问题为一个点的存在问题. 事实上, 上式变形为$f'(\eta)=-\frac{\xi}{\xi-1}f'(\xi)$. 在$[\xi,1]$用Lagrange中值定理, 存在$\eta\in(\xi,1)$, 使得$f'(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi-1}$. 于是, 由$f(1)=0$和$f'(\eta)$的两等式得到$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. 因此, 可先令$F(x)=xf(x)$, F在$[0,1]$上用Rolle定理.

16. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, $a>0$. 证明: 存在$\xi,\eta\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=\frac{\eta^2f'(\eta)}{ab}$.

17. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内二阶可导. 证明: 对每个$x\in(a,b)$, 存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(a)}{(a-x)(a-b)}+\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-x)}=\frac{f''(\xi)}{2}.$$

提示: 将上式左端简单变形, 令$\lambda=\dfrac{f(x)-f(a)-\frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{b-a}}{(x-a)(x-b)}$, 作函数

$$G(t)=f(t)-\lambda(t-a)(t-b)-f(a)-\frac{(t-a)(f(b)-f(a))}{b-a}.$$

18. 设$f(x)$在$[a,b]$上三阶可导, $f(a)=f'(a)=f(b)=0$. 证明: 对每个$x\in(a,b)$, 存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

19. 设f可微, 证明$f(x)$的任二零点间必有$f(x)+f'(x)$的零点.

20. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$. 证明：(1) 存在一个$\xi\in(1/2,1)$使得$f(\xi)=\xi$; (2)存在一个$\eta\in(0,\xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$. (对(2)提示: 令$h(x)=e^{-x}[f(x)-x]$)

以下21-23涉及Taylor公式.

21. 证明下列结论:

(1) 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\dfrac{a+b}{2})+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$.

(2) 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

提示: 对$F(x)=\int_a^x f(t)dt$用上题或直接证明.

(3) 设$f(a)=f(b)=0$, 则存在$\xi\in(a,b)$, 使得$|f'(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right|$.

(4) 在$f(\frac{a+b}{2})=0$条件下证明上题的结论.

22. 证明下列结论:

(1) 设$M=\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)>\max\{f(a),f(b)\}$, 则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f''(\xi)\leq-(b-a)^{-2}[\sqrt[3]{M-f(a)}+\sqrt[3]{M-f(b)}\ ]^3.$$

(2) 设$M=\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)>\max\{f(a),f(b)\}$, 则存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

本题结论已含于上题. 这里给出利用凸函数的直接证明. 若$f''(x)\geq0$ $(x\in(a,b))$, 则$f(x)$是凸函数. 于是, $\forall x\in(a,b)$有

$$f(x)\leq\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\leq\max\{f(a),f(b)\},$$

此与已知条件相矛盾.

(3) 设f三阶可导, 且$f(-1)=f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=1$, 则存在$\xi\in(-1,1)$, 使得$f'''(\xi)=3$.

提示: 在$x=0$展开$f(\pm1)$.

(4) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内二阶可导, 且对$x\in(a,b)$, $|f''(x)|\geq 1$. 证明: 在曲线$y=f(x)$ ($x\in[a,b]$)上存在三个点, 它们构成的三角形的面积$\geq (b-a)^3/16$.

提示: 由向量知识，构造面积函数$S(x)=\dfrac{1}{2}[(x-a)(f(b)-f(a))-(b-a)(f(x)-f(a))]$.

(5) 设f有四阶连续导数, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$, θ与x, h无关, 则$f(x)$是次数≤ 3的多项式.

23. 完成下列证明:

(1) 设$f(x)$定义在长度不小于2的一个区间上, 且$|f(x)|\leq 1$, $|f''(x)|\leq 1$. 证明: $|f'(x)|\leq 2$.

(2) 设C为常数, 函数f满足$f(x)\to C$, $f'''(x)\to 0$ $(x\to\infty)$, 求证: $f'(x)\to 0$, $f''(x)\to 0$ $(x\to\infty)$.

(3) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷可微且满足

(a) $\exists M>0$使得$|f^{(k)}(x)|\leq M$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $k=0,1,2,\ldots$

(b) $f(2^{-n})=0$, $n=1,2,\ldots$

证明在$(-\infty,+\infty)$上$f(x)\equiv 0$.

提示: a)推知$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$; 用数学归纳法证明$\forall k\in\mathbf{N}$, $f^{(k)}(0)=0$. 由连续性, $f(0)=0$. 设$f'(0)=\ldots=f^{(k-1)}(0)=0$, 若$f^{(k)}(0)\neq 0$, 令$f(x)=x^k\varphi(x)$, 则$\varphi(0)=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\neq 0$, 此表明$f(x)$在$x=0$的某邻域内除$x=0$外无其它零点, 与条件(b)相矛盾.

(4) 证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right]$收敛.

(5) 证明: 对每个正整数n, 成立$1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}>\frac{e^n}{2}$.

(6) 设$f(x,y)$在全平面上有连续偏导数且$f(0,0)=0$, 又设当$x^2+y^2\le 5$时有$|\nabla f|\le 1$. 证明$f(1,2)\le\sqrt{5}$.

(7) 设$f(x)$在$(0,1)$内二阶可微, 且当$x\to 1^-$时, $f(x)=o(1)$, $f''(x)=O((1-x)^{-2})$. 证明$f'(x)=o((1-x)^{-1})\,(x\to 1^-)$.

提示: 由题设, 存在$\eta>0$, 使在$(1-\eta,1)$内有$|(1-x)^2f''(x)|<C$(C为常数). 取$\delta\in(0,1/2)$及$x\in(1-\eta,1)$, 令$t=x+\delta(1-x)$, 在x处展开$f(t)$后可得到

$$(1-x)f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{\delta}-\frac{\delta}{2}\left(\frac{1-x}{1-\xi}\right)^2 f''(\xi)(1-\xi)^2,\ x<\xi<t.$$

(8) 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可微, 且$f(0)=f(1)$, $f(x)\in[0,1]$, $|f''(x)|\le 1$, $x\in[0,1]$. 证明方程$x=f(x)$在$[0,1]$上有唯一解.

提示: 在x处分别Taylor展开$f(0)$, $f(1)$, 可得到$|f'(x)|\le 1/2$. 由中值定理和压缩映像原理即得结论.

(9) 设$x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n\in\mathrm{N}_+$. 证明$x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

提示: 首先验证$\{x_n\}$严格递减, 且以0为极限; 其次, $\sin^2 x=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$; 最后用Stolz定理考虑极限$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$.

(10) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi$.

24. 若$f(x)$为区间$[-a,a]$上的凸函数, 试证: $h(x)=f(x)+f(-x)$在$[0,a]$上单增, 其中$a>0$.

25. 证明: f为开区间I上的凸函数的充分必要条件是对每个$c\in I$, 存在a, 使得在区间I上成立不等式$f(x)\ge a(x-c)+f(c)$.

26. 设函数$y=y(x)$由方程$x^3+3x^2y-2y^3=2$确定, 求$y(x)$的极值. (答案: $y(0)=-1$为极大值, $y(-2)=1$为极小值)

训练题

1. 设$f(x)=e^{x^2}$, 能确定一个开区间(a,b)和一个恒不为零的函数$g(x)$, 使得$(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$成立吗?

2. 找出所有的可微函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, 对于这样的函数, 存在一个正数$a$, 使得对所有的$x>0$, 有

$$f'(\frac{a}{x})=\frac{x}{f(x)}.$$

提示: 先证明$g(x)=f(x)f(a/x)$为常值函数b, 再由此得到$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{a}{bx}$.

3. 设$a<b<c$, $f(x)$在$[a,c]$上连续, 在(a,b)内可微且$f'(x)$在(a,b)严格单增. 证明:

$$(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b).$$

4. 求$\displaystyle\int_0^y\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\,dx$在$0\le y\le 1$上的极大值. (答案:1/3)

5. 证明: 当$0<x<a$时(a为实常数), 多项式

$$(a-x)^6-3a(a-x)^5+\frac{5}{2}a^2(a-x)^4-\frac{1}{2}a^4(a-x)^2<0.$$

提示: 令$x=a(1-y)$.

6. 设$f(x)$是$[-1,1]$上的实值函数, 且$f'(0)$存在. 又a_n, b_n是两个以零为极限的数列, 满足$-1<a_n<0<b_n<1$. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0)$.

提示: $I_n:=\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\dfrac{f(b_n)-f(0)}{b_n}\cdot\dfrac{b_n}{b_n-a_n}+\dfrac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\cdot\dfrac{-a_n}{b_n-a_n}:=I_n^{(1)}\cdot\dfrac{b_n}{b_n-a_n}+I_n^{(2)}\cdot\dfrac{-a_n}{b_n-a_n}$, 于是, $I_n^{(2)}\le I_n\le I_n^{(1)}$或$I_n^{(1)}\le I_n\le I_n^{(2)}$, 再用追敛性定理.

7. 设$f\in C^1[a,b]$, 且当$x\in[a,b]$时, 不成立连等式$f(x)=f'(x)=0$. 求证: 存在$g\in C^1[a,b]$, 使当$x\in[a,b]$时, 恒成立$fg'-f'g>0$.

提示: (1) 记$A=\{x|f(x)=0\}$, 则往证A为有限集(反证, 用极限点知识); (2) 存在多项式h, 满足$f'(x)h(x)=-1$ ($\forall x\in A$); 令$g_c(x)=xf(x)+ch(x)$, 则对充分小的正数c, 函数g_c合适要求.

8. 设$p(x)$是三次多项式, 则对于$e^{p(x)}$关于任意点的幂级数展开将没有三个连续的零系数. 提示: 反证, 推出$e^{p(x)}$为多项式, 矛盾.

9. 设$f(x)$是连续可微函数. 证明: 若$f'^2+f^3 \to 0\ (x \to +\infty)$, 则$f(x)$和$f'(x) \to 0\ (x \to +\infty)$.

   提示: (1) 若对于趋于$+\infty$的数列$\{x_n\}$有$f'(x_n) = 0$, 则$f(x_n) \to 0$, 结论为真(用到连续性和极值); (2) 其余情形, 存在x_0使得当$x > x_0$时, 有$f' \neq 0$, 即$f' > 0$和$f' < 0$两种情形.

10. 设f二次可微, 且$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$, 其中$g$为非负函数. 证明: $|f(x)|$有界.

11. 证明在$(-\infty, +\infty)$内不存在连续可微函数$f(x)$, 使$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$.

    提示: $x = 1$既是$f(f(x))$的唯一不动点, 也是$f(x)$的不动点. 令$g(x) = f(f(x))$, 若f连续可微, 则$g'(1) = [f'(1)]^2 \geq 0$与题设相矛盾(由题设, $g'(1) = -1$).

12. 若$f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可微, 且$f'(a^+)$存在(有限或无限), 则$f'_+(a)$存在(有限或无限), 且$f'_+(a) = f'(a^+)$.

    讨论: 1) 当$f'_+(a)$存在时, $f'(a^+)$是否一定存在?

    2) 若将连续改在(a, b)内, 结论是否仍然成立?

    提示: 对两个问题, 分别考虑函数$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$和$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

13. 设$f(x)$在$[a, b]$上二次可微, 且对任意的$x \in [a, b]$, $f(x)$与$f''(x)$同号或同时为零. 又设$f(x)$在$[a, b]$的任何子区间内不恒为零, 证明: $f(x) = 0$在(a, b)内若有根则必唯一.

    提示: 反证.

14. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$有二阶导数且满足$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$, 其中$g(x)$为某一函数. 证明: 当$f(x)$在两点为零时, $f(x)$在此两点间的区间上恒为零.

15. 证明$\sin x + \tan x > 2x\ (0 < x < \pi/2)$.

16. 设n为正整数, $0 < x < 1$. 证明: $x^n(1 - x) < (ne)^{-1}$.

17. 比较$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$与$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$的大小, 其中$n>8$.

提示: 考察函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

18. 设$a,b\geq 1$, 证明: $ab\leq e^{a-1}+b\ln b$.

提示: 利用Young不等式, 陈纪修上册p294第10题, 其中令$f(x)=e^x-1$.

19. 设n是正整数, 证明:

$$(1+\frac{1}{2n+1})(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{1}{n})^n.$$

提示: 对左边不等式, 考虑函数

$$f(x)=\ln\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)+x\ln(1+\frac{1}{x})-1,$$

对右边不等式, 考虑函数

$$g(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)+x\ln(1+\frac{1}{x})-1.$$

20. 设$0<x_i<\pi\ (i=1,2,\cdots,n)$, $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 证明: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leq\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

21. 设对每个正整数n, 令

$$P_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad q_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad h_n=\frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}.$$

证明: $h_1<h_2<\cdots<h_n<\cdots$.

提示: $h_n=2(n+1)^{n+1}n^{-n}(2n+1)^{-1}$, 所以令$g(x)=\ln 2+(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-\ln(2x+1)$.

22. 设n为大于1的正整数, 证明

$$\frac{3n+1}{2n+1}<(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2<2.$$

23. Bellman不等式(也称为Gronwall不等式): 设$f(t)$与$g(t)$为$[t_0,t_1]$上的连续函数, 若

$$|f(t)| \le M + k\int_{t_0}^{t} |f(\tau)g(\tau)|d\tau, \quad t\in[t_0,t_1],$$

其中M, k为非负常数, 则

$$|f(t)| \le M\exp\left(k\int_{t_0}^{t} |f(\tau)g(\tau)|d\tau\right), \quad t\in[t_0,t_1],$$

提示: 令$h(t)=M+k\int_{t_0}^{t}|f(\tau)g(\tau)|d\tau$, 则$h'(t)\le kh(t)|g(t)|$, 因此

$$(h'(t)-kh(t)|g(t)|)\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}|g(\tau)|d\tau\right)\le 0,$$

即$\frac{d}{dt}\left(h(t)\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}|g(\tau)|d\tau\right)\right)\le 0$. 将上式在$[t_0,t]$上积分即得.

24. 设函数$f(x)$满足$f(1)=1$, 且对$x\ge 1$有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 且极限值小于$1+\dfrac{\pi}{4}$.

25. 求$\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k^2$.

提示: 考察$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, 求两次导数.

26. 设在$[0,a]$上, $|f''(x)|\le M$, 且f在$(0,a)$内取到最大值, 证明$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

提示: $\exists c\in(0,a)$使$f'(c)=0$. 在$[0,c]$与$[c,a]$上对$f'(x)$分别用中值定理.

27. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的三阶导数, 证明: 存在点a使得

$$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\ge 0.$$

28. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的三阶导数, 并且对所有的x, $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$为正值. 若对所有的$x$, $f'''(x)\le f(x)$, 则对所有的x有$f'(x)<2f(x)$.

29. 设$f(x)$在$[a,b]$上可微, $f(a)=0$, 并设存在正常数A使得$|f'(x)|\leq A|f(x)|$在$[a,b]$上成立, 其中b可有限也可无限, $b=+\infty$时, $[a,b]=[a,+\infty)$. 证明$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$.

30. 设f, g均在$[a,b)$上可微, $f(a)=0$, $\lambda\neq 0$, 且有

$$|f(x)g(x)+\lambda f'(x)|\leq|f(x)|,\quad \forall x\in(a,b),$$

证明$[a,b)$上$f(x)\equiv 0$.

提示: 只须在任意闭子区间$[a,b_1]\subset[a,b)$上证明$f(x)\equiv 0$. 可设$|g(x)|\leq \mu<\infty$, 于是$|f'(x)|\leq\frac{1+\mu}{|\lambda|}|f(x)|$, 归于上题.

31. 设$f(x)$在$[a,b]$可导, $f'(x)$在$[a,b]$单减且恒有$|f'(x)|\geq m>0$. 证明:

$$\Big|\int_a^b\cos f(x)dx\Big|\leq 2/m,\qquad (m\ \textit{is a constant}).$$

提示: 由题设和Darboux定理, $f'(x)$不变号, 不妨设$f'(x)>0$, $A=f(a)$, $B=f(b)$, 则反函数$x=\varphi(t)$的导数$\varphi'(t)$在$[A,B]$上连续(为什么?), 于是$\int_a^b\cos f(x)dx=\int_A^B\varphi'(t)\cos tdt=\varphi'(B)\int_\xi^B\cos tdt$.

32. 比较$\sqrt{2}$, $\sqrt[e]{e}$, $\sqrt[3]{3}$的大小. 提示: 令$f(x)=x^{1/x}$.

33. 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上二次可微, 且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明: 存在$\xi\in(a,+\infty)$使得$f''(\xi)=0$.

提示: 反证. 若结论不真, 则$f''(x)$不变号, 不妨设$f''(x)<0$. 由推广的Rolle定理, $\exists c\in(1,+\infty)$使得$f'(c)=0$. 对$c_1>c$有$f'(c_1)<f'(c)=0$. 过$(c_1,f(c_1))$作$y=f(x)$的切线$Y(x)=f(c_1)+f'(c_1)(x-c_1)$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty}Y(x)=-\infty$. 又$f(x)<Y(x)$(因为$f$上凸), 推知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 与已知矛盾.

34. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界且二次可微. 证明: 存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f''(\xi)=0$.

提示: 反证. 若结论不真, 则$f''(x)$不变号, 不妨设$f''(x)>0$. 若有c使$f'(c)\neq 0$, 则由Taylor公式, 得到$f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c)$. 若$f'(c)>0$, 则$f(+\infty)=+\infty$; 若$f'(c)<0$, 则有$f(-\infty)=+\infty$. 这与f有界相矛盾. 于是$\forall x$, $f'(x)=0$, 这与$f''(x)>0$相矛盾.

35. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导, $f'_+(a) = f'_-(b) = 0$, $f(a) < f(b)$, 证明: 存在$\xi \in (a,b)$, 使得
$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$
提示: 作函数$g(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ $(a < t \le b)$, $g(a) = 0$, 则$g(t)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导. 因$g(a) = 0$, $g(b) > 0$, $g'_-(b) < 0$, 所以$g(t)$在(a,b)内某点ξ达到最大值, 从而$g'(\xi) = 0$.

36. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$上三阶可导, 且$f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$. 证明: 对任意的$x \in (0,1)$, 存在$\xi \in (0,1)$使得$f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!} f'''(\xi)$.

提示: $\forall x \in (0,1)$, 作函数$g:\ (0,1) \to (-\infty,+\infty)$, 使
$$g(t) = f(t) + 1 - t^2 - \frac{f(x) + 1 - x^2}{x^2(x-1)} t^2(t-1), \quad t \in (0,1).$$

37. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数, 且$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |e^{-x^2} f'(x)| < +\infty$. 证明
$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)} |xe^{-x^2} f(x)| < +\infty.$$
提示: $|f'(x)| \le Me^{x^2}$, M为正常数. 对$x \ge 0$, 有
$$|xe^{-x^2}(f(x) - f(0))| = \left| xe^{-x^2} \int_0^x f'(t)dt \right| \le Mxe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \le M',$$
其中M'为常数. 这里用到$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{1}{2}$.

对$x < 0$, 可得类似结论. 注意到$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2} f(0) = 0$, 容易得出所证.