上 海 交 通 大 学 试 卷 (A卷)

（ 2022 至 2023 学年 第 1 学期 2023 年 1 月 6 日 ）

班级号______________ 学号______________ 姓名__________

课程名称 《数学分析 I》(期终考试) 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

一、判断题(对的打√，错的打 X，每小题 2 分)

1. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

2. 若$F'(x)=G'(x)$，则必有$F(x)=G(x)$.

3. 若$f(x)$非负且$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$f(x)$在区间$[1,\ +\infty)$上有界.

4. 若$f(x)$非负, 且$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛.

5. 有界函数$f(x)$在有限闭区间$[a,\ b]$上只有有限个间断点, 则$f(x)$在$[a,\ b]$上Riemann可积.

二、(每小题 5 分).

1. 求$\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$

2. 求极限$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^4}\left(\int_0^x e^{t^3}dt-x\right)$.

三、 (每小题 10 分)

1. 计算(1). $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}dx$； (2). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

2. 设$\{x_n\}$, $\{y_n\}$是两有界数列, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ $(0<x<+\infty)$. 证明

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

四、（每小题 6 分）

1. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots$，求$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$，并判断级数是否收敛.

2. 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与x 轴围成的封闭图形绕x 轴旋转得的旋转体体积.

3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\sin\frac{n\pi}{4}$ $(\alpha\in R)$ 的敛散性.

4. 设$u_n\neq 0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$的敛散性.

5. 设$f(x)$在$[0,\ 2]$上二阶可导，$f(1)=0$ 且$|f''(x)|\leq M$ $(x\in[0,\ 2])$. 证明

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leq\frac{M}{3}.$$

五、(本题 7 分)

设$f(x)$在R上连续，函数 $\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调递减. 证明：$f(x)\equiv 0$.

六、（每小题 8 分）

1. 讨论反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^q\cos x}{1+x^p}dx$ $(p\geq 0)$的敛散性.

2. 设$f(x)$ 是连续的周期函数，周期为T，证明：$\int_a^{a+nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 并由此计算$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$.

七、（本题 7 分）

1. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续且递增. 证明：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\leq(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$.

2. 设$a_1>1$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$. 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-1}$.