2014-1 期中试卷解答

1. 夹逼法：当$n>2$时有：$2=(2^n)^{1/n}\le(1+n^2+2^n)^{1/n}<(2^n+2^n+2^n)^{1/n}=2\sqrt[n]{3}$，两边取极限即得$l=2$

2．分母等价变形后用洛必达法，然后化简，再归于熟知极限计算：

$$l=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\frac{1-(1+x^2)\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}-\cos x\right)=-\frac{1}{6}$$

3. 1^∞ 型，依据$\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$转换：$l=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{1-\cos x}}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}(1+\cos x)}=e^{\frac{2}{3}}$

4. $\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{x+1}\right)'=\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\cdot\frac{2}{(x+1)^2}$， $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\pi}{2}\cdot2=\pi$；

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(3t^2+5t+2)\frac{dt}{dx}=(6t+5)\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{6t^2+11t+5}{t}$。

6. $2x-y-xy'+4yy'=0$，$y'=\left.\frac{-2x+y}{4y-x}\right|_{(1,1)}=-\frac{1}{3}$，切线方程是 $y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$；

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1,y=\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}$ ， $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}$ ， $\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x(x+x^2)}{1+x+x^2}\right)\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=1}$

$\left.\frac{(1+3x^2)(1+x+x^2)-(x+x^3)(2x+1)}{(1+x+x^2)}\right|_{x=1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$。（也可以用$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-y''}{y'^3}$来计算）

8. （1） $y'=f'(x^2)2x$， $y''=2[f''(x^2)2x^2+f'(x^2)]$，

（2） $y'=2f(x)f'(x)$， $y''=2[f'^2(x)+f(x)f''(x)]$；

9. $\ln y=2\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln x-5\ln x-x$， $\frac{1}{y}y'=\frac{2}{1+x}+\frac{1}{2x}-\frac{5}{x}-1$， $x=1$时， $y=\frac{4}{e}$，

所以 $y'(1)=y\left.\left(\frac{2}{1+x}+\frac{1}{2x}-\frac{5}{x}-1\right)\right|_{x=1}=-\frac{18}{e}$ 。

10. $u(x)=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)-[1-2x^2+\frac{(-2x^2)^2}{2!}+o(x^4)]=-\frac{4x^4}{3}+o(x^4)$,主部是$-\frac{4x^4}{3}$.

11. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$（洛必达法）；于是（1）当$a=0$时，

$x=0$ 是第二类间断点；（2）当 $0<a\neq 1$ 时，$x=0$ 是第一类间断点，是跳跃间断点。

12. 依据拉格朗日中值公式，存在介于 $x,\tan x$ 之间的实数 ξ，使得

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(\tan x-x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=f''(0)\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}\lim_{x\to 0}\cos^2 x=\frac{2}{3}\text{。}$$

（其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1$ 是因 ξ 介于 $x,\tan x$ 之间，而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ 用夹逼原则得来）

13. $g'(x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x,\ g'(0)=0$，第二步必须用定义做：

$$g''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(f'(x)\frac{\sin x}{x}\sin x+f(x)\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=2f(0)$$

14. 设梯子顶端到墙角的距离为 $y(t)$，墙角到梯子底端的距离为 $x(t)$。当梯子顶点向墙底滑落时，由题意：$y=\sqrt{13^2-x^2}$，$\frac{dx}{dt}=5$，　$x=12$ 时，$y=5$，$\frac{dy}{dt}=-12$。此时，直角三角形的面积及其导数为 $s=\frac{1}{2}xy,\quad \frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}(x'y+xy')=-\frac{199}{2}$。

15. 即证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]-g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]=0$. 设

$F(x)=[f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(x)]$，则由于 $F(a)=0=F(b)$，由罗尔定理得证。

16. 证：因为 $|f(x)|\le|x|$，所以 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le 1$。于是

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)}{x}\right|$$

$$=\left|\alpha_1\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}+2\alpha_2\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(2x)-\varphi(0)}{2x-0}+\cdots+n\alpha_n\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(nx)-\varphi(0)}{nx-0}\right|$$

$$=\left|\alpha_1\varphi'(0)+2\alpha_2\varphi'(0)+\cdots+n\alpha_n\varphi'(0)\right|=\left|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n\right|\le\lim_{x\to 0}1=1\text{。}$$