华中科技大学 2019～2020 学年第一学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设 $0 < a_n < 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$，则以下数列中无界的是【 C 】.

A. $\left\{ a_n^2 \right\}$　　B. $\left\{ \dfrac{1}{a_n} \right\}$　　C. $\left\{ \tan\dfrac{\pi a_n}{2} \right\}$　　D. $\left\{ \ln a_n \right\}$

2. 已知 $f(2)=3, f'(2)=5$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(2+h)-9}{h}=$【 A 】.

A. 30　　B. 10　　C. 6　　D. 0

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，则以下说法中***错误*** 的是【 B 】.

A. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界　　B. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有连续的导数

C. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上连续　　D. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上可积

4. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 一共有【 D 】条渐近线.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)<0$，则以下不等式中一定成立的是【 B 】.

A. $f(1)+f(3)>2f(2)$　　B. $f(1)+f(3)<2f(2)$

C. $f(1)+f(2)>2f(3)$　　D. $f(1)+f(2)<2f(3)$

6. 微分方程 $y'-\dfrac{y}{2x}=0$ 满足初值条件 $y(1)=2$ 的特解为【 A 】.

A. $2\sqrt{x}$　　B. $1+\sqrt{x}$　　C. $1+x$　　D. $\sqrt{x+3}$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}(1^3+2^3+\cdots+n^3)=$______.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\dfrac{1}{4}$ 或 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

8. 设函数 $y=x^2-x$. 在 $x=2, \Delta x=0.01$ 时，微分 $\mathrm{d}y=$________ .

解 $\mathrm{d}y=y'(2)\Delta x=0.03$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\sqrt{3+t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=$______.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x\sqrt{3+\sin^4 x}}{2x}=\sqrt{3}$.

10. 曲线 $y=1-x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为________.

解 $S=\int_{-1}^{1}(1-x^4)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{5}$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 已知当 $x\to 0$, $u=\mathrm{e}^{3x}-ax^2-(1+bx)\cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a,b 的值.

解 $\mathrm{e}^{3x}=1+3x+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x^3+o(x^3),\quad \cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$,

所以 $u=(3-b)x+(5-a)x^2+\dfrac{9+b}{2}x^3+o(x^3)\sim cx^3$.

必然有 $a=5,b=3$.

12. 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9$.

令 $f'(x)=0$, 得到函数在开区间 $(-2,2)$ 内的驻点为 $x=-1$.

直接计算有 $f(-2)=3, f(2)=-17, f(-1)=10$.

故在区间 $[-2,2]$ 上函数的最大值为 10 、最小值为 -17 .

13. 求不定积分 $I=\int\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\mathrm{e}^x$,

$$I=\int\frac{u^4}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int(u^2-1+\frac{1}{u^2+1})\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u^3}{3}-u+\arctan u+C=\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^x+C .$$

14. 求定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $I = x\tan x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx$

$= \frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

或 $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛求其值.

解法一 令 $x = \tan t$，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc t \mathrm{d}t$$

$$= \ln|\csc t - \cot t|\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(\sqrt{2}-1) - \lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1-\cos t}{\sin t} = +\infty$$

原反常积分发散.

解法二 令 $x = 1/t$，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \ln(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_1^{+\infty} = +\infty \ .$$

原反常积分发散.

解法三 $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x}, x \to 0$，积分 $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 发散.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2) = 0, y'(2) = 1$ 的特解.

解 令 $y' = p(y)$，原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}.$$

分离变量以后积分得

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2\cos^2 y} + C_1.$$

代入初始条件得 $C_1 = 0$. 注意到当 $y = 0, p = 1$，故 $p = \dfrac{1}{\cos y}$，亦即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}.$$

再次分离变量积分得到 $x = \sin y + C_2$，代入初始条件得 $C_2 = 2$.

所求解为 $x = \sin y + 2$ 或 $y = \arcsin(x - 2)$.

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ 1, x = 0 \end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 的连续性(需说明理由）.

解 当 $x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ 时, $f'(x) = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

又
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

又有

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

从而成立 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$. 所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

18. 求曲线 $y = \sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1 \le x \le 4$ 弧段的长度.

解
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

故曲线长度为 $s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{10}{3}.$$

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 n 为正整数. 求方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 所有的实根. 证明你的结论.

解 显然方程有实根 $x=0$.

设 $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-1$. 因 t^{2n-1} 为严格单增函数,

$$f'(x)=2n((x+1)^{2n-1}-x^{2n-1})>0.$$

所以 $f(x)$ 为严格单增函数，因此原方程只有唯一实根 $x=0$.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数.证明:

$$f(x)\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x,\ x\in[a,b].$$

证 根据积分中值定理,$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

则 $$\left|f(x)\right|=\left|f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\le\left|f(\xi)\right|+\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x.$$