练习三

1. Solution：

对于方程：$X''(x)+\lambda X(x)=0$，其特征方程为$a^2+\lambda=0$

Case 1：$\lambda>0$，$a=\pm\sqrt{\lambda}i$

通解：$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

由初始条件可得：

$$\begin{cases}B=0\\ A\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l-B\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2,X_n=A_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

Case 2：$\lambda\leq 0$，此时无非平凡解

2. Solution：

Step 1. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$

Step 2. 得到两个分离变量ODE

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$$

Step 3. 求解ODE

对于$X''(x)+\lambda X(x)=0$，$X(0)=0,X'(l)=0$，$\lambda\leq 0$无非平凡解

当$\lambda>0$，非平凡解如下：

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2,X_n=A_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

对于$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$，带入$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$，其通解如下：

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}+D_n\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\quad(n=1,2,\cdots)$$

此时通解为：

$$u(x,t)=\left[a_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}+b_n\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

Step 4. 叠加级数解

根据解的叠加性，级数解如下：

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}+b_n\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

Step 5. 利用初值条件定傅里叶系数

$$
\begin{cases}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 3\sin\frac{3\pi x}{2l} + 6\sin\frac{5\pi x}{2l} \\
\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(2n+1)a\pi}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a_1 = 3, a_2 = 6, a_n = 0(n \neq 1,2, n \in \mathbb{N}) \\
b_n = 0(n \in \mathbb{N})
\end{cases}
$$

故最后方程的解为:

$$
\Rightarrow u(x,t) = 3\cos\frac{3\pi at}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l} + 6\cos\frac{5\pi at}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l}
$$

3. Solution:

Step 1. 设$u(x,t) = X(x)T(t)$ 带入原方程可得:

$$
X(x)T''(t) = X''(x)T(t) + 2X(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 2 = -\lambda
$$

Step 2. 得到两个分离变量ODE

$$
\begin{cases}
X''(x) + (\lambda+2)X(x) = 0 \\
T''(t) + \lambda T(t) = 0
\end{cases}
$$

Step 3. 求解ODE

对于$X''(x) + (\lambda+2)X(x) = 0$，$X(0) = 0, X'(1) = 0$，$\lambda \leq -2$ 无非平凡解

当 $\lambda > -2$，通解：$X(x) = A\sin\sqrt{\lambda+2}x + B\cos\sqrt{\lambda+2}x$

由初始条件可得:

$$
\begin{cases}
B = 0 \\
A\sqrt{\lambda+2}\sin\sqrt{\lambda+2} + B\sqrt{\lambda+2}\cos\sqrt{\lambda+2} = 0
\end{cases}
\Rightarrow \sqrt{\lambda+2} = n\pi
$$

$$
\Rightarrow \lambda_n = (n\pi)^2 - 2, X_n = A_n \sin n\pi x
$$

对于 $T''(t) + \lambda T(t) = 0$，带入$\lambda_n = (n\pi)^2 - 2$，其通解如下:

$$
T_n(t) = C_n \cos t\sqrt{(n\pi)^2 - 2} + D_n \sin t\sqrt{(n\pi)^2 - 2} \quad (n = 1,2,\cdots)
$$

此时通解为:

$$
u(x,t) = \left(a_n \cos t\sqrt{(n\pi)^2 - 2} + b_n \sin t\sqrt{(n\pi)^2 - 2}\right)\sin n\pi x \quad (n = 1,2,\cdots)
$$

Step 4. 叠加级数解

根据解的叠加性，级数解如下:

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos t\sqrt{(n\pi)^2 - 2} + b_n \sin t\sqrt{(n\pi)^2 - 2}\right)\sin n\pi x
$$

Step 5. 利用初值条件定傅里叶系数

$$
\begin{cases}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{(n\pi)^2 - 2}\sin n\pi x = \sqrt{\pi^2 - 2}\sin \pi x.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a_n = 0(n \in \mathbb{N}^*) \\
b_1 = 1, b_n = 0(n \neq 1, n \in \mathbb{N})
\end{cases}
$$

故最后方程的解为：

$$\Rightarrow u(x,t)=\sin t\sqrt{(n\pi)^2-2}\sin \pi x$$

练习四

1. Solution：

Step 1. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$ 带入原方程可得：

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)\Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Step 2. 得到两个分离变量ODE

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T'(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$$

Step 3. 求解ODE

对于$X''(x)+\lambda X(x)=0$，$\lambda\le 0$ 无非平凡解

当 $\lambda>0$，通解：$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

由初始条件可得：

$$\begin{cases}B=0\\ A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}\Rightarrow \sqrt{\lambda}l=n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,X_n=A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

对于 $T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$，带入$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，其通解如下：

$$T_n(t)=B_n\exp\left(-(\frac{na\pi}{l}\right)^2t)\quad (n=1,2,\cdots)$$

此时通解为：

$$u(x,t)=a_n\exp\left(-(\frac{na\pi}{l}\right)^2t)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad (n=1,2,\cdots)$$

Step 4. 叠加级数解

根据解的叠加性，级数解如下：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left(-(\frac{na\pi}{l}\right)^2t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Step 5. 利用初值条件定傅里叶系数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=x(l-x)\Rightarrow a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)$$

故最后方程的解为：

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

2. Solution：

对于方程：$X''(x)+\lambda X(x)=0$，其特征方程为$a^2+\lambda=0$

Case 1：$\lambda>0$，$a=\pm\sqrt{\lambda}i$

通解：$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

由初始条件可得：

$$\begin{cases}A\sqrt{\lambda}=0\\A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2,X_n=B_n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

Case 2：$\lambda\le 0$，此时无非平凡解

3. Solution：

Step 1. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$ 带入原方程可得：

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t)\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Step 2. 得到两个分离变量ODE

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\T'(t)+\lambda T(t)=0\end{cases}$$

Step 3. 求解ODE

对于$X''(x)+\lambda X(x)=0$，$\lambda\le 0$ 无非平凡解

当 $\lambda>0$，通解：$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

由初始条件可得：

$$\begin{cases}A\sin2\sqrt{\lambda}+B\cos2\sqrt{\lambda}\\A\sqrt{\lambda}=0\end{cases}\Rightarrow2\sqrt{\lambda}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]^2,X_n=A_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}$$

对于 $T'(t)+\lambda T(t)=0$，带入$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]^2$，其通解如下：

$$T_n(t)=B_n\exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]^2t\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

此时通解为：

$$u(x,t)=a_n\exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]^2t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

Step 4. 叠加级数解

根据解的叠加性，级数解如下：

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]^2 t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}$$

Step 5. 利用初值条件定傅里叶系数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}=4\cos\frac{5\pi x}{4}\Rightarrow a_2=4,a_n=0(n\in\mathbb{N},n\neq 2)$$

故最后方程的解为：

$$\Rightarrow u(x,t)=4\exp\left(-\left(\frac{5\pi a}{4}\right)^2 t\right)\sin\frac{5\pi x}{4}$$