第4章　插值方法(2)

插值问题

在实际计算中常遇到这样的情况：函数的解析表达式$f(x)$未知，而仅仅知道它在若干个不同点处的函数值；或者函数的解析表达式非常复杂，仅仅给出若干个点处的函数值。

设

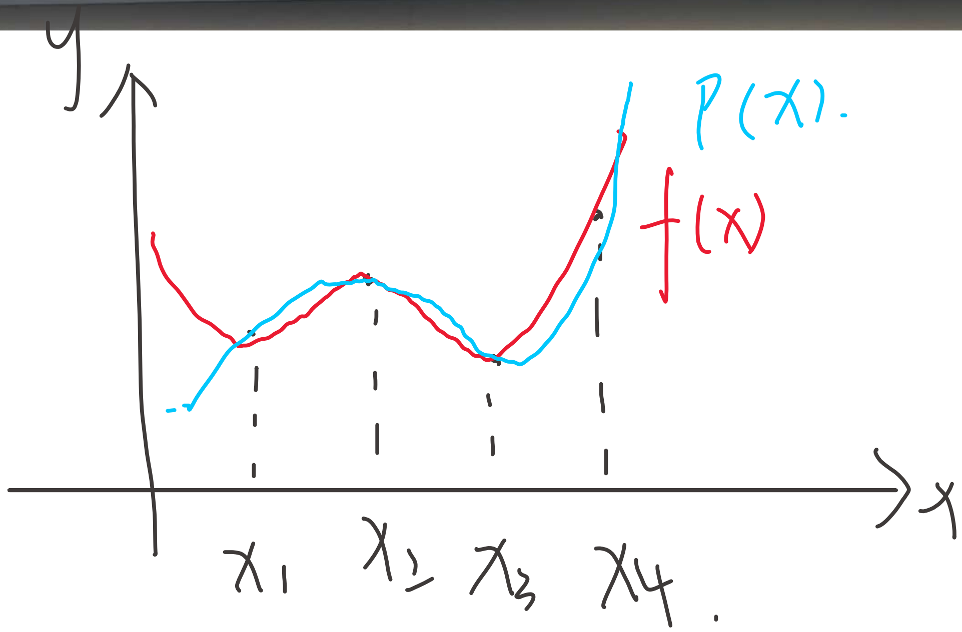
$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

对任意点处 $x \neq x_i$，如何计算$f(x)$的近似值？

从一个简单函数类中求$p(x)$，使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

而在其他$x \neq x_i$的点，$p(x) \approx f(x)$。这类问题称为插值问题。$x_0, x_1, \cdots, x_n$称为插值节点，所在区间$[a, b]$称为插值区间，$p(x)$称为插值函数。



- ## 多项式插值

插值函数类是多种多样的，一般根据问题的特征与研究的要求来选择。最常用到的是**代多项式函数插值**，多项式函数**形式简单**，**便于计算**。

插值函数是 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n \longrightarrow$ 待定系数

由插值条件得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

系数矩阵 （Vandermonde--范德蒙德 行列式）

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

x_0	x_1	x_2	x_n
y_0	y_1	y_2	y_n

$P_n(x_0) = y_0$

$P_n(x_1) = y_1$

$P_n(x_2) = y_2$

$P_n(x_n) = y_n$.

$(n+1)$个方程.

$n+1$个未知数.

$x_i \neq x_j \ (i \neq j) \Rightarrow |D| \neq 0.$

$$D\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

解存在、唯一

	x_0	x_1
	1	3
y	1	2

$P_1(x) = a_0 + a_1 x$

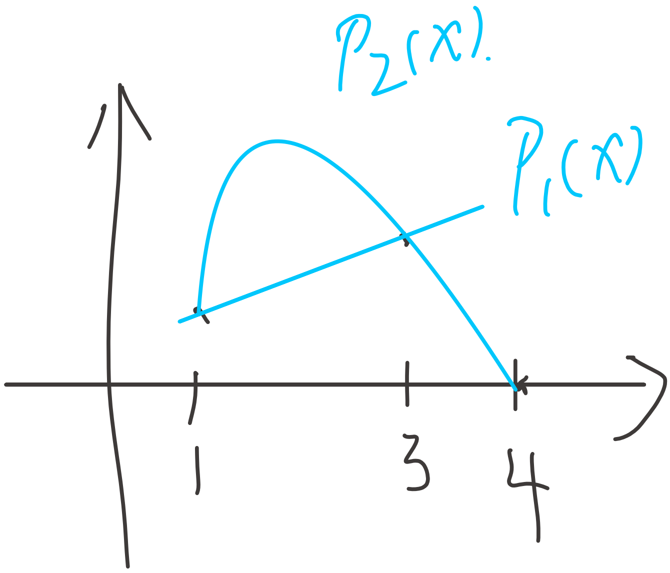
$a_0 + a_1 = 1$

$a_0 + 3a_1 = 2.$

	x_0	x_1	x_2
	1	3	4
y	1	2	0

$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$0 = a_0 + 4a_1 + 16a_2$



x	0	1	2
y	2	0	1
y'	0	2	

$P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$

$P_4'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3.$

$P_4(0) = 2 \quad P_4(1) = 0 \quad P_4(2) = 1 \quad P_4'(0) = 0 \quad P_4'(1) = 2.$

$P_4(x) = 2 - \frac{47}{4} x^2 + \frac{29}{2} x^3 - \frac{17}{4} x^4.$

x	x_0
$f(x)$	y_0
$f'(x)$	y_0'
$\vdots$	
$f^{(n)}(x)$	y_0^{n}

$$y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{y_0^{n}}{n!}(x - x_0)^n$$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	1	0	$\cdots$	0

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_0-x_i)}$$

$L_0(x)$

x	x_0	$\cdots$	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$\cdots$	x_n
	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0

$$P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

$L_i(x)$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{j\neq i \\ i=0}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$ 插值基函数

$L_n(x) = P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x).$

$P_n(x_j) = y_j$

基函数

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (a_0, \cdots a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$P_n(x) = a_0' l_0(x) + a_1' l_1(x) + \cdots + a_n' l_n(x)$

$L_n(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1 + \cdots + l_n(x) y_n$

x	1	3	4
y	1	2	0

$$l_0(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(-2)\times(-3)} = \frac{(x-3)(x-4)}{6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2}$$

$$l_2(x)$$

$$L_2(x) = 1\cdot l_0(x) + 2\,l_1(x) + 0\,l_2(x)$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)}{6} - (x-1)(x-4)$$

$$= -2 + \frac{23}{6}x - \frac{5}{6}x^2.$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

	x_0	x_1
	1.96	2.25
	1.4	1.5

$$l_0 \quad \frac{x-2.25}{-0.29}$$

$$l_1 \quad \frac{x-1.96}{0.29}$$

$$L_1(x) = 1.4\,\frac{x-2.25}{-0.29} + 1.5\,\frac{x-1.96}{0.29}$$

$$\approx 1.4379$$

	x_0	x_1	x_2
	1	2.25	4
	1	1.5	2

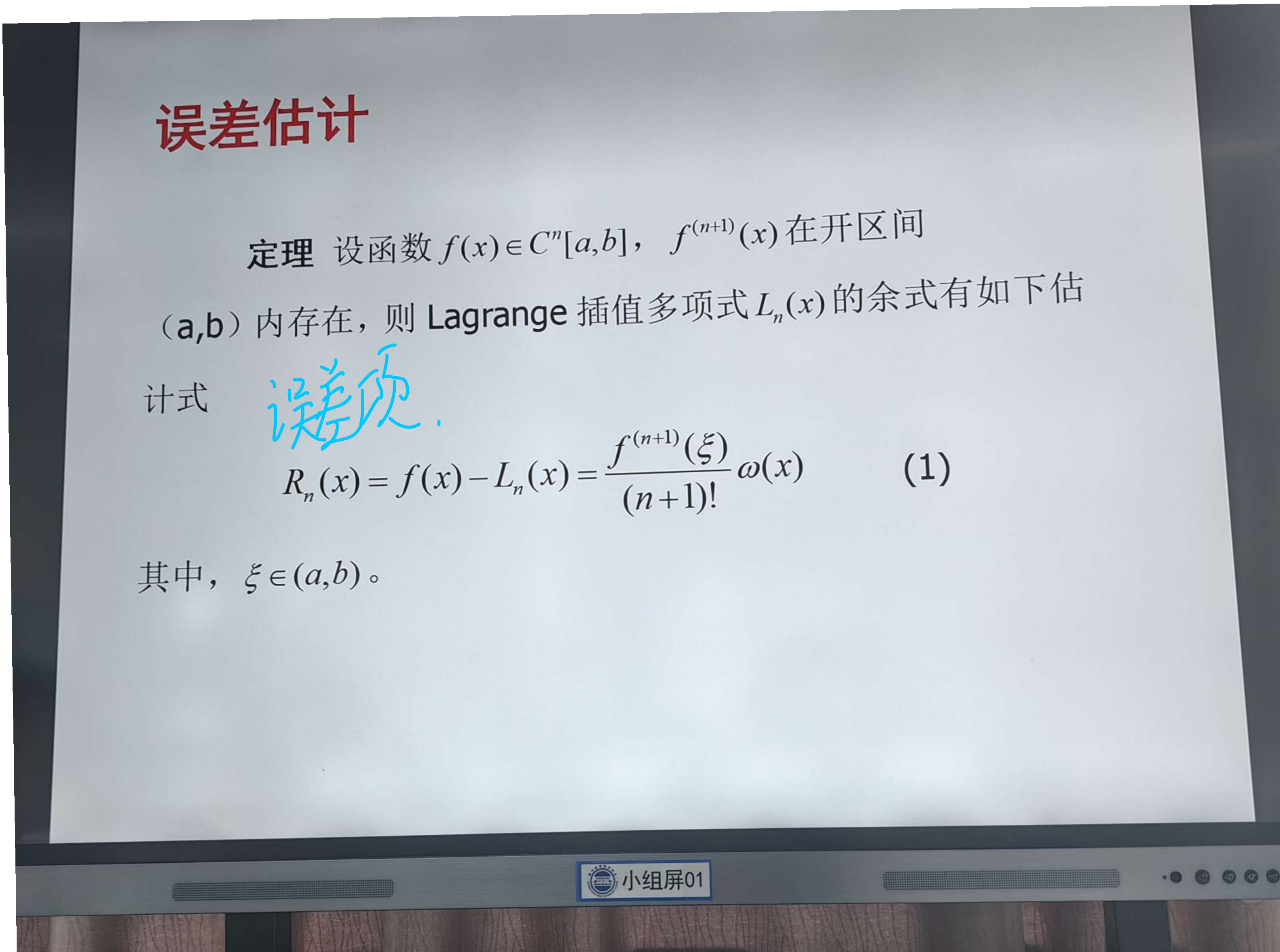
$$l_0(x) = \frac{(x-2.25)(x-4)}{(-3)\times(-1.25)} = \frac{(x-2.25)(x-4)}{3.75}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{-1.75\times 1.25} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2.1875}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2.25)}{3\times 1.75} = \frac{(x-1)(x-2.25)}{5.25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2.25)(x-4)}{3.75} - 1.5\,\frac{(x-1)(x-4)}{2.1875} + 2\,\frac{(x-1)(x-2.25)}{5.25}$$

$$= 1.409523$$



1. Lagrange插值方法回顾

$$L_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \ldots + f(x_n)l_n(x)$$

x	$x_0,$	$x_1,$	$\cdots,$	$x_{j-1},$	$x_j,$	$x_{j+1},$	$\cdots,$	x_n
y	0,	0,	$\cdots,$	0,	1,	0,	$\cdots,$	0

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

误差估计

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

$$w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$w'_{n+1}(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)+(x-x_0)*[\ldots]$$

$$w'_{n+1}(x_0)=(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)=\frac{1}{A}$$

$$l_0(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=A\,w_{n+1}(x)/(x-x_0)$$

$$=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_0)\,w'_{n+1}(x_0)}$$

	$x_0 \cdots\cdots$ x_n

① x_j 为 $x_0 \sim x_n$ 中的一个值点时成立

② x_j 不为 $x_0 \sim x_n$ 中的一个值

$$R_n(x_j) = f(x_j) - L_n(x_j) = 0$$

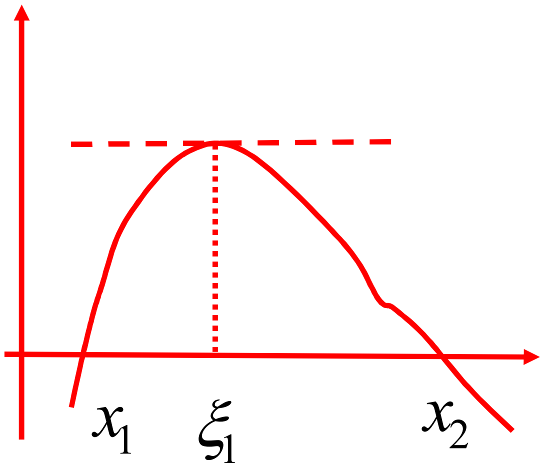
$$j = 0, 1, \ldots n.$$

故 $R_n(x)$ 可表示为

$$R_n(x) = k(x)\,w(x)$$

罗尔定理

$$f(x_1)=f(x_2)=0 \quad (x_1<x_2) \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi_1)=0 \quad (x_1<\xi_1<x_2)$$



$f(x)$两点零点间

$f(x)$的一个根

n阶多项式　　n+1阶多项式

$$F(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)\omega(t)$$

① $F(x)=f(x)-L_n(x)-k(x)\omega(x)$

$=R(x)-k(x)\omega(x)=0$

$t=x_0,x_1,\ldots x_n,x$　　$F(t)=0$

n+2个零点…

② $F(x_j)=f(x_j)-L_n(x_j)-k(x_j)\omega(x_j)=0$

x_0　x_1　x_2　x_3　x_4　x_5　x_6　$\cdots$　x_{n-3}　x_{n-2}　x_{n-1}　x_n　x

$F'(t)=0$　$\xi_0^{(1)}$　$\xi_1^{(1)}$　$\xi_2^{(1)}$　$\xi_3^{(1)}$　$\xi_4^{(1)}$　$\xi_5^{(1)}$　$\cdots$　$\xi_{n-3}^{(1)}$　$\xi_{n-2}^{(1)}$　$\xi_{n-1}^{(1)}$　$\xi_n^{(1)}$

$F''(t)=0$　$\xi_0^{(2)}$　$\xi_1^{(2)}$　$\xi_2^{(2)}$　$\xi_3^{(2)}$　$\xi_4^{(2)}$　$\cdots$　$\xi_{n-3}^{(2)}$　$\xi_{n-2}^{(2)}$　$\xi_{n-1}^{(2)}$

$F^{(n+1)}(t)=0$　ξ

$$F'(t)=f'(t)-\underbrace{L_n'(t)}_{n-1}-k(x)\underbrace{w'(t)}_{n}.$$

$$F^{n+1}(t)=f^{n+1}(t)-0-k(x)w^{n+1}(t).$$

$$w(t)=(t-x_0)\cdots(t-x_n)$$
$$=t^{n+1}+P_n(t)$$

$$F^{n+1}(t)=f^{n+1}(t)-(n+1)!\,k(x)$$

$$f^{n+1}(\xi)-(n+1)!\,k(x)=0$$

$$k(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \qquad \xi\in(a,b)$$

注　若$f(x)\in C^{(n+1)}[a,b]$则

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}\omega(x),\text{其中}M=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|。$$

特别当$n=1$时有

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{8}(b-a)^2,\text{其中}M_2=\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|。$$

例　已知$f(x)=\sin x$　的值如表所示。

$f(x)=\sin x$的值

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

试用四次 Lagrange 多项式计算$\sin\frac{\pi}{12}$的估计值。

$$f(x)=2x^2+x+1$$

求其在 $x_0=-1, x_1=0$ $x_2=1$

作为插值点的插值多项式.

	x_0	x_1	x_2
	-1	0	1
	2	1	4

$$L_0=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1=-x^2+1$$

$$L_2=\frac{x^2+x}{2},$$

$$L(x)=2\cdot\frac{x^2-x}{2}+(-x^2+1)+2(x^2+x)$$

$$=x^2-x-x^2+1+2x^2+2x$$

$$=2x^2+1+x.$$

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\omega(x)=0$$

$$L_2(x)=f(x).$$

$f(x)=x^4$

求其在 $-1, 0, 1, 2$

$$f(x)-L_3(x)=\frac{4!}{4!}w(x)$$

$$=w(x)=(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$L_3(x)=x^4-(x+1)x(x-1)(x-2)$$

$$=x[x^3-(x^2-1)(x-2)]$$

$$=x[x^3-(x^3-2x^2+2-x)]$$

$$=x[x^3-x^3+2x^2+x-2]$$

$$=x(2x^2+x-2)$$

$$=2x^3+x^2-2x.$$

x	0	1	2
y	0	2	14
y'		5	

3.

2.

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$a_0 = 0.$$

$$L_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + 2 l_1(x) + 14 l_2(x)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} =$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$L_2(x) = 2(2x - x^2) + 7(x^2 - x)$$

$$= 5x^2 - 3x.$$

$$Q_3(x) = P_3(x) - L_2(x) = A(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x) = L_2(x) + Ax(x-1)(x-2).$$

$$R_3(x)=f(x)-P_3(x).$$

$$R_3(0)=R_3(1)=R_3(2)=0.$$

$$R_3'(1)=f'(1)-P_3'(1)$$

$$R_3'(1)=0.$$

$$R_3(x)=k(x)x(x-2)(x-1)^2.$$

$$R_3(x)=\frac{f^{4}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-2).$$

余项的一些有趣的应用

- 若 $f(x)$ 本身是一个不超过 n 次多项式，则

$$f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$R_n(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L_n(x) \equiv f(x)$$

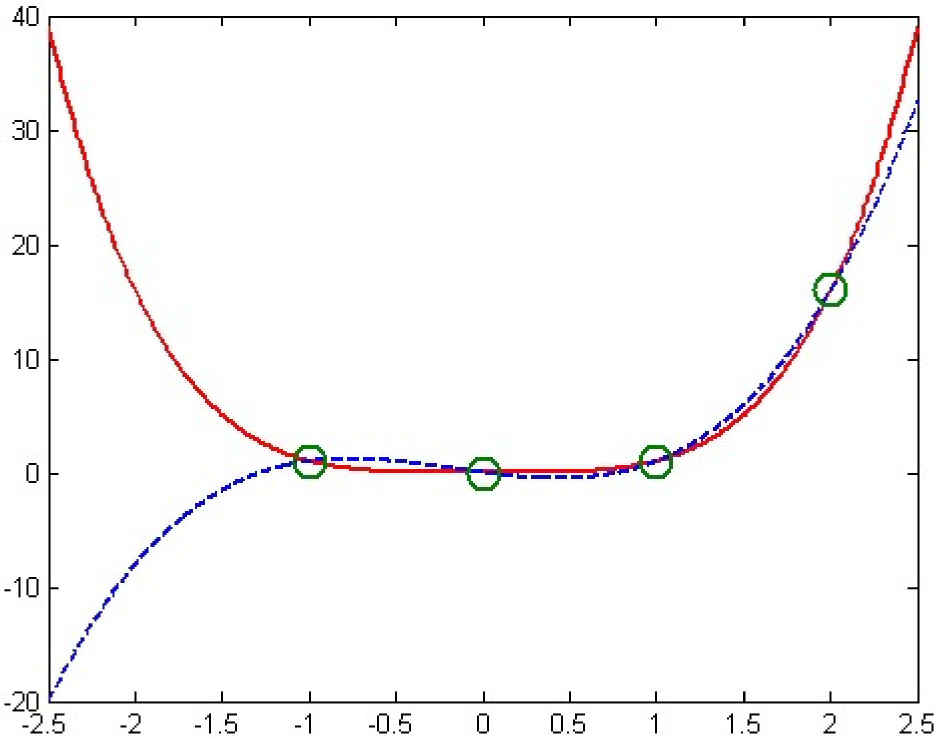
特别当 $f(x) = x^k$ 有

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1,\quad \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \qquad (k=0,1,2\cdots,n)$$

问题：高于 n 阶的多项式情况如何？

$$f(x) = x^4$$

求插值节点为 **-1， 0， 1， 2** 的**三次多项式**



- Langrange插值也有其不足：为了提高精度有时需增加结点，原来的数据不能利用，浪费资源

添加结点后得重新算

Newton插值法

由于Lagrange插值法的缺点，使我们想到*Tarlor*展式计算近似值：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

要想提高精度只要增加项数即可，以前的数据仍然有用，而上式就是求$f(x)$得导数：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

由此引入插商的概念。

差商及其性质

由导数的概念引入：

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_1,x_0]$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f[x_2,x_1]$$

一般地，一阶差商：

$$\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=f[x_i,x_j]$$

$$=f[x_j,x_i]$$

二阶差商是一阶差商的差商

$$\frac{f[x_0,\ x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=f[x_0,x_1,x_2]$$

$$\frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2}$$

一般地，二阶差商：

$$\frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}=f[x_i,x_j,x_k]$$

n阶差商为：

$$\frac{f[x_0,x_1,\ldots x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\ldots,x_n]}{x_0-x_n}=f[x_0,x_1,x_2,\ldots x_{n-1},x_n]$$

性质1　n阶差商$f[x_0, x_1, ..., x_n]$可以表示为

函数值$f(x_j)$　$(j = 0, 1, 2, ..., n)$的线性组合，即

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega_n'(x_j)}$$

其中$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)$

$$\omega_n'(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x - x_n)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right]$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - f(x_1)\left(\frac{1}{x_0 - x_1} - \frac{1}{x_1 - x_2}\right) + \frac{f(x_2)}{x_1 - x_2}\right]$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

差商的性质

性质 2 差商与节点排列顺序无关，即

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

其中，$i_0, i_1, \cdots, i_n$ 是 0，1，…，n 的任意一种排列

性质 3 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次多项式，则 $f[x, x_0]$ 是 x 的 m-1 次多项式；$f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 m-2 次多项式

由差商定义

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f[x,x_0]$$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \qquad (1)$$

$$\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}=f[x,x_0,x_1]$$

$$\Rightarrow f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \qquad (2)$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left[f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]\right]$$

(2)式代入（1）式得：

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1] \quad (3)$$

为了提高精度，增加节点x_2，则

$$\frac{f[x, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} = f[x, x_0, x_1, x_2]$$

得 $f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2] \qquad (4)$

(4)式代入（3）式得:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x, x_0, x_1, x_2]$$

一般的，在节点$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$上有

$$
\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
& + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots x_n] \\
& + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)f[x, x_0, x_1, \ldots x_n] \\
= & N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

其中$N_n(x)$、$R_n(x)$分别为$f(x)$在节点$\{x_i\}_0^n$上的Newton插值公式和余项。

可以验证：

$$N_n(x_0) = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f[x_0, x_1]$$

$$= f(x_0) + (x_1 - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1)$$

$$N_n(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)\{f[x_0, x_1] + (x_2 - x_1) f[x_0, x_1, x_2]\}$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0)\{f[x_0, x_1] + (x_2 - x_1) \frac{f[x_2, x_0] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}\}$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0) f[x_2, x_0]$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0) \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f(x_2)$$

类似地可以证明$N_n(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,2,\ldots n)$

由插值的唯一性知：$N(x)\equiv L_n(x)$,因此他们的余式也相等

即：$\omega(x)f[x,x_0,x_1,\ldots x_n]=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1)!}\omega(x)$

故有差商与导数的关系

$$\boxed{f[x,x_0,x_1,\ldots x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1)!}}$$

其中，ξ介于$x,x_0,x_1,\ldots x_n$的最大值与最小值之间。

Newton插值计算

差商表-1

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		②−①	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$ ①	$\overline{x_3-x_0}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$ ②	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\overline{\quad\cdot\quad}$ x_4-x_1	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}\qquad f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$$

差商表-2

固定x_0.

x_k	$f(x_k)$	一阶插商	二阶插商	三阶插商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_0,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_0,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
…	…	…	……	………
x_n	$f(x_n)$	$f[x_0,x_n]$	$f[x_0,x_1,x_n]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_n]$

$$f[x_0,x_1,x_n] = \frac{f[x_0,x_n]-f[x_0,x_1]}{x_n - x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_n] = \frac{f[x_0,x_1,x_n]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_n - x_2}$$

$$
\begin{aligned}
N_4(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
& +(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
& +(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
= & f(x_0) + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] \\
& +(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3])) \qquad \textbf{(4.2.3)}
\end{aligned}
$$

法②、例题

	x_0	x_1	x_2	x_3
	1	3	4	6
y	1	7	13	61

		$f(x)$	$f[x_0,x_i]$	$f[x_0,x_1,x_i]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_0	1	1			
x_1	3	7	3		
x_2	4	13	4	1	
x_3	6	61	12	3	1

$$N_3(x) = 1 + (x-1)3 + (x-1)(x-3)\cdot 1 + (x-1)(x-3)(x-4)\cdot 1$$

$= x^3 - 7x^2 + 18x - 11.$

法①.

		$f(x_0)$	$f[x_{i-1}, x_i)$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	
x_0	1	1			
x_1	3	7	3		
x_2	4	13	6	$\frac{6-3}{4-1} = 1$	
x_3	6	61.	24	$\frac{24-6}{6-3} = 6$	$\frac{6-1}{6-1} = 1$

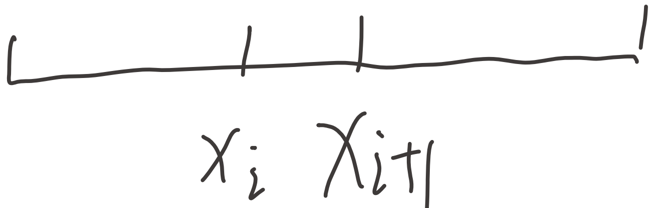
等距节点Newton插值公式

- 在实际应用中，常是等距节点情况，即

$$x_i = a + ih \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

这里h>0为常数，称为步长，这时Newton插值公式就可以简化，为此我们引入差分概念。

定义： 设函数$f(x)$在等距节点$x_i = a + ih$ (i=0,1,2,⋯，n)上值为 $f_i = f(x_i)$，则



(1)称$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ (i=0,1,2,⋯，n)为函数 $f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的一阶向前差分（简称差分）；又称$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$ (k=1,2,⋯,n;i=0,1,⋯,n-k)为函数 $f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的 k 阶向前差分，这里约定$\{x_i\}_0^n$；

(2) 称$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ (i=n,n-1,⋯,1)为函数 $f(x)$在点$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$上的后差分；又称$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$ (k=1,2,⋯,n; i=n-k+1,⋯,2,1)为函数$f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的k阶向后差分，同样约定$\nabla^0 f_i = f_i$。

等距节点Newton插值公式

- 插商与差分的关系

（1）用前插表示N(x)

在等距节点条件下有：

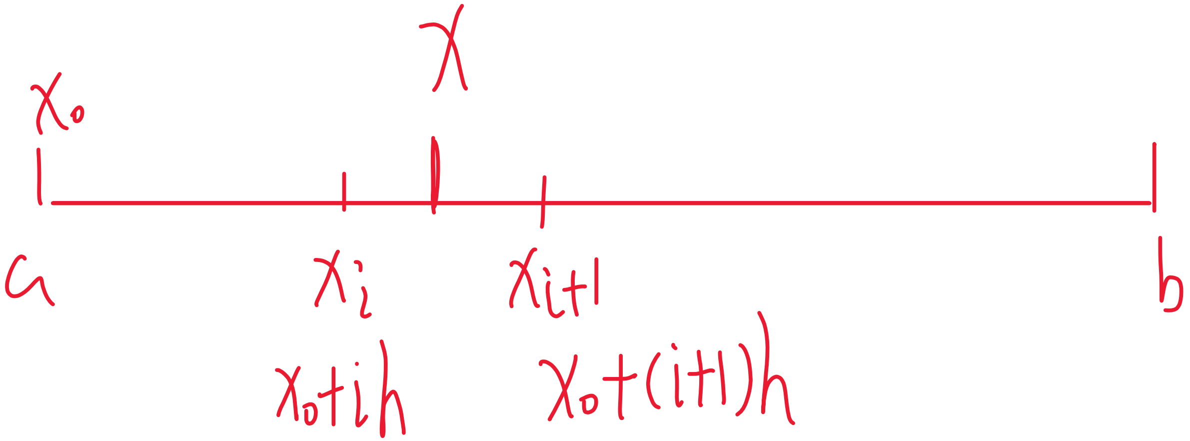
$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f_0$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]) - f[x_0, x_1])}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{h}\Delta f_1 - \frac{1}{h}\Delta f_0}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

一般有

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$



若令$x = x_0 + th$,则$Newton$插值公式和余式具有形式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$

$$= f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n) f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

th $\quad th$ $\quad (t-1)h$ $\quad \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$

$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$

$+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots x_n]$

$th \quad (t-1)h \quad \cdots \quad (t-(n-1))h \quad \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$

（2）用后插表示N(x)

如果将节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$倒排序为：$x_n, x_{n-1}, \ldots x_0$，

则$Newton$插值公式为：

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = & f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] \\
& + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \ldots \\
& + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \ldots x_1, x_0]
\end{aligned}
$$

同样有：

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{h}\nabla f_n$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]}{x_n - x_{n-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{h}\nabla f_n - \frac{1}{h}\nabla f_{n-1}}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\nabla^2 f_n$$

一般有

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f_n$$

若令$x = x_n + sh$(一般取$s < 0$)则

$$N_n(x) = N_n(x_n + sh) = f_n + \frac{s}{1!}\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n$$

$$+ \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}s(s+1)\ldots(s+n)f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_n - nh, x_n)$$

例 题

例：设函数 $y=f(x)$在各节点的取值如下表所示，试计算各阶差分值。

$h=0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1	0.818 731	0.670 320	0.548 812	0.449329	0.367 879

解：列差分表如下

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$

$\Delta f_1 = f_2 - f_1$

x	$f(x)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	**1**					
0.2	**0.818 731**	**-0.181 269** Δf_0				
0.4	**0.670 320**	**-0.148 411** Δf_1	**0.032 585** $\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$		
0.6	**0.548 812**	**-0.121 508**	**0.026 903**	**-0.005 955**	$\Delta^4 f_0$	
0.8	**0.449 329**	**-0.099 483**	**0.022 025**	**-0.004 878**	**0.001 077**	$\Delta^5 f_0$
1.0	**0.367 879**	**-0.018 033**	**0.018 033**	**-0.003 992**	**0.000886**	**-0.000 191**

Hermite插值法

- 节点处的函数值相等--连续性
- 导数值也相等--光滑性

Hermite 插值: $2n+1$ 次多项式 $H_{2n+1}(x)$ 满足

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i), H_{2n+1}^{'}=f^{'}(x_i)$$

则称 $H_{2n+1}(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $\{x_i\}_0^n$ 的 Hermite 插值多项式。

Hermite插值多项式

- 构造$H(x)$

已知x_i，$y_i = f(x_i), f_i' = f'(x_i) \quad (i = 0,1,2,\dots,n)$

希望$H(x)$满足

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i) = f_i' \quad (i = 0,1,2,\dots n)$$

令

$$H(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) y_j + \sum_{j=0}^{n} \beta_j(x) f_j'$$

（1） $\alpha_j(x_i)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

（2） $\alpha_j^{'}(x_i)=0 \qquad i=0,1,2,\ldots n$

（3） $\beta_j(x_i)=0 \qquad i=0,1,2,\ldots n$

（4） $\beta_j^{'}(x_i)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

如何求$\begin{cases}\alpha_j(x)=?\\ \beta_j(x)=?\end{cases}$

$$\alpha_j(x):\quad 0=\alpha_j(x_0)=\alpha_j(x_1)=\ldots=\alpha_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha_j(x_n)$$

$$\alpha'_j(x):\quad 0=\alpha'_j(x_0)=\alpha'_j(x_1)=\ldots=\alpha'_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha'_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha'_j(x_n)$$

而$\alpha_j(x_j)=1,\alpha'_j(x_j)=0$

则$x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$是$\alpha_j(x)$的二重零点。

所以令

$$\alpha_j(x) = C(x)\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_{j-1})^2(x-x_{j+1})^2\ldots(x-x_n)^2}{(x_j-x_0)^2(x_j-x_1)^2\ldots(x_j-x_{j-1})^2(x_j-x_{j+1})^2\ldots(x_j-x_n)^2}$$

$$= C(x)l_j^2(x)$$

由于$H(x)$是$2n+1$次多项式，故$C(x)$为一次多是项式。

令 $C(x) = Ax + B$ 即 $\alpha_j(x) = (Ax+B)l_j^2(x)$

由$\alpha_j(x_j)=1, \alpha'_j(x_j)=0$得：

$$1=(Ax_j+B)l_j^2(x_j)=Ax_j+B$$

$$0=\alpha'_j(x_j)=Al_j^2(x_j)+(Ax_j+B)(2l_j(x_j)l'_j(x_j))$$

即 $A+2(Ax_j+B)l'_j(x_j)=0$

由 $\begin{cases} Ax_j+B=1 \\ A+2(Ax_j+B)l'_j(x_j)=0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} A=-2l'_j(x_j) \\ B=1+2x_jl'_j(x_j) \end{cases}$

故得：

$$\alpha_j(x) = (-2l_j^{'}(x_j)x + 1 + 2x_j l_j^{'}(x_j))l_j^2(x)$$
$$= (1 + 2(x_j - x)l_j^{'}(x_j))l_j^2(x)$$

同理可得$\beta_j(x) = (x - x_j)l_j^2(x)$

由

$$\beta_j(x_0) = \beta_j(x_1) = \ldots = \beta_j(x_{j-1}) = \beta_j(x_{j+1}) = \ldots = \beta_j(x_{j+1}) = 0$$

$$\beta_j^{'}(x_0) = \beta_j^{'}(x_1) = \ldots = \beta_j^{'}(x_{j-1}) = \beta_j^{'}(x_{j+1}) = \ldots = \beta_j^{'}(x_{j+1}) = 0$$

$$\beta_j(x_j) = 0, \beta_j^{'}(x_j) = 1$$

知道 $x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n$是$\beta_j(x)$的二重零点,所以设

$$\beta_j(x) = (Cx + D)l_j^2(x)$$

$$\begin{cases} \beta_j(x_j) = Cx_j + D = 0 \\ \beta_j'(x_j) = Cl_j^2(x_j) + 2(Cx_j + D)l_j(x_j)l_j'(x_j) = 1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} C = 1 \\ D = -x_j \end{cases}$$

所以 $\quad \beta_j(x) = (x + x_j)l_j^2(x)$

Hermite插值余项

$$R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{1}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\omega^2(x)$$

其中，$\xi\in(a,b)$，$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

特 例（ n=1)

对于区间$[x_{j\text{-}1}, x_j]$上求二点三次 *Hermite*

插值多项式 $H_3(x)$满足条件：

$$H_3(x_{j-1}) = f(x_{j-1}) = y_{j-1}, \quad H_3(x_j) = f(x_j) = y_j$$

$$H_3'(x_{j-1}) = f_{j-1}', \quad H_3'(x_j) = f_j'$$

则 : $H_3(x) = \alpha_{j-1}(x) y_{j-1} + \alpha_j(x) y_j + \beta_{j-1}(x) f_{j-1}' + \beta_j(x) f_j'$

$$= ((1 + 2\frac{x - x_{j-1}}{h_j}) y_{j-1} + (x - x_{j-1}) f_{j-1}')(\frac{x - x_j}{h_j})^2$$

$$+ ((1 - 2\frac{x - x_j}{h_j}) y_{j-1} + (x - x_j) f_j')(\frac{x - x_{j-1}}{h_j})^2$$

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$$
$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_{j-1})^2 (x - x_j)^2$$

其中， $h_j = (x_j - x_{j-1}), \xi \in (x_{j-1} - x_j)$

例题

设 $f(x)=\sin x$ ，试用 $f(0)=0$,

$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, $f'(0)=1$， $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 确定二点三次

Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 并计算 $H_3(\frac{\pi}{12})$ 的值。

解：方法一　由二点三次 Hermite 插值公式得：

$$H_3(x)=[[1+2\frac{x-0}{\frac{\pi}{6}}]\times 0+(x-0)\times 1][\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}]^2$$

$$+[[1-2\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}]\times\frac{1}{2}+(x-\frac{\pi}{6})\times\frac{\sqrt{3}}{2}][\frac{x-0}{\frac{\pi}{6}}]^2$$

$$=x(\frac{6}{\pi}x-1)^2+[(\frac{3}{2}-\frac{6}{\pi}x)+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})]\frac{36}{\pi^2}x^2$$

所以有

$$H_3(\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{48}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{96}\pi=0.258768616$$

与真值$\sin\frac{\pi}{12}=0.258819045$相比已有三位有小数字。

方法二：直接用待定系数法求$H_3(x)$。

由 $f(0)=0$，$f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，可有 $y=L_1(x)=\dfrac{3}{\pi}x$，于是可设

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x+x(x-\frac{\pi}{6})(Ax+B)$$

由 $H'_3(0)=f'(0)=1$ 和 $H'_3(\dfrac{\pi}{6})=f'(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\pi}+(-\dfrac{\pi}{6})B=1 \\ (\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{\pi}{6})(A\dfrac{\pi}{6}+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

由此可解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{36}{\pi^{2}}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{6}{\pi}\right)=-0.15988694 \\ B=\dfrac{6}{\pi}\left(\dfrac{3}{\pi}-1\right)=-0.08607801 \end{cases}$$

将A、B代入式$H_3(x)$得

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x-x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)(0.15988694x+0.08607801)$$

由此可解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{36}{\pi^2}(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{6}{\pi})=-0.15988694 \\ B=\dfrac{6}{\pi}(\dfrac{3}{\pi}-1)=-0.08607801 \end{cases}$$

将 A、B 代入式 $H_3(x)$ 得

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x-x(x-\frac{\pi}{6})(0.15988694x+0.08607801)$$

分段低次插值法

- 高次插值中的问题

　　一般地说，适当提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度，但决不可由此得出结论，认为插值多项式的次数越高越好。例如，对于函数 $f(x)=1/\left(1+25x^2\right)\ (-1\le x\le 1)$，作Lagrange插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k = x_i}\right)$$

当 $n=10$ 时，$f(x)$ 与 $L_{10}(x)$ 偏差很大。出现这种现象得原因

(1) 据Lagrange插值余项估计式(4.11)，当插值节点加密，n 增大时，有时 $f^{(n+1)}(x)$ 迅猛，$M_{n+1}=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 可能非常大；特别当插值节点比较分散、插值区间较大时，$\left|\omega_{n+1}(x)\right|$ 也较大。

(2) 当 n 增大时，Lagrange插值多项式次数增大，计算量的增幅也是巨大的，这就加大了计算过程中的舍入误差。

分段线性插值

- 已知$f(x)$在节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值$y_i \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$在每个子区间$[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$上作线性插值函数

$$L_{1i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i \quad (x_{i-1} \le x \le x_i; i = 1,2,\cdots,n)$$

从几何上讲，分段线性插值就是用一条过 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0),(x_1, y_1),\cdots,(x_n, y_n)$ 的折线来近似表示 $f(x)$ 。

显然，分段线性插值函数随区间长 h 的无限缩小而无限接近于$f(x)$。其插值余项为

分段二次插值

- 对于插值节点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 在小区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 内作二次插值

$$L_{2i}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} y_i$$

$$+ \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} y_{i+1}$$

$$(x_{i-1} \le x \le x_{i+1}; i = 1,2,\cdots,n-1)$$

其插值余项为

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \le \frac{M_3}{6} \Delta$$