Here Are The All Points

谢悦晋　提高2201班

2023 年 11 月 15 日

目录

Chapter 1　复数与复变函数

这一章的考点实际比较少，只能出一些小题.下面是个人认为比较重要的概念：

1. 主辐角(辐角主值) 对于给定复数$z \neq 0$，设α有满足:

$$\alpha \in \mathrm{Arg} z, \alpha \in (-\pi, \pi]$$

则α为辐角主值，且有：

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots.$$

2. 三角表示和指数表示

$$z = |z| e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

3. De Moivre公式

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

4. 复数方根

设z是给定的复数，n 是正整数，求所有满足$w^n = z$ 的复数w,称为把复数z开n 次方，记作 $w = \sqrt[n]{z}$或 $w = z^{1/n}$. **复数z的n次方根一般是多值的**,公式如下：(也可用复平面单位根分解)

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} \Rightarrow w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

5. 无穷大和无穷远点，复平面和扩充复平面

6. 复变函数极限存在，连续⇔实部虚部极限存在，连续

Chapter 2　解析函数

这一章会考构造解析函数的大题，对于常见的初等解析函数也会考小题，知识点如下

1. 导数与微分这部分与实值函数一致，不多赘述

2. 解析与解析函数

$f(z)$ 在 z_0 解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在 $U(z_0,\delta)$ 可导

$f(z)$ 在区域 D 内的每一点解析$\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 D 内解析，称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数

点解析$\Rightarrow$点可导，区间解析$\Leftrightarrow$区间可导

3. 点可导的充要条件

函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点 $z=x+iy$ 处可导 $\Leftrightarrow$
$u(x,y)$ 和$v(x,y)$ 在点(x,y) 处可微，且满足C-R方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

4. **区域解析的充要条件**

函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析
$\Leftrightarrow u(x,y)$ 和 $v(x,y)$在区域 D 内可微，且满足$C-R$方程。

5. 解析函数的调和性

若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D 内解析，则 $u(x,y),v(u,y)$ 在区域 D 内满足Laplace方程:(调和函数定义)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

共轭调和函数： $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，且满足C-R方程：则称v是u的共轭调和函数。(不要弄反了)

6. **构造调和函数**

已知实部 u, 求虚部 v(或者已知虚部 v, 求实部 u),使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

解决方法：**必须首先检验u,v是否为调和函数**，然后利用解析函数满足C-R方程的性质，根据偏积分或全微分法解决

7. 常见初等函数及其公式

- **指数函数**
  对于复数 $z=x+iy$,称$w=\mathbf{e}^x(\cos y+i\sin y)$ 为指数函数, 记为$w=\exp z$ 或$w=e^z$.
  性质：单值，除无穷远点处处连续，处处解析，以2kπi为周期

- 对数函数

  满足方程 $\mathbf{e}^w = z$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数，记作 $w = \mathrm{Ln}z.$，计算公式：

  $$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}z} = e^u e^{iv} \Rightarrow \begin{cases} u = \ln|z| \\ v = \arg z + 2k\pi i \end{cases} \Rightarrow = w = \mathrm{Ln}z = u + iv = \ln|z| + \arg z + 2k\pi i$$

  主值：$w = \ln z = \ln|z| + \arg z$，分支：任意固定的一个k，即为分支

- 幂函数

  函数$w = z^\alpha$**规定**为 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}z}$($\alpha$为复常数，$z \neq 0$) 称为复变量 z的幂函数。还**规定**：当a为正实数，且 $z = 0$ 时，$z^\alpha = 0$.(**不要将这种“规定”方式反过来作用于指数函数**)

- 三角函数

  $$\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz})$$

  性质：周期性、可导性、奇偶性、零点、三角公式以及求导法则与实函数一致，**有界性不成立**

- 反三角函数如果$\cos w = z$,则称w为复变量z的反余弦函数记为$w = \mathrm{Arc}\cos \mathrm{z}$..计算方式如下：

  $$z = \cos w = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}) \Rightarrow (\mathrm{e}^{iw})^2 - 2z\mathrm{e}^{iw} + 1 = 0,$$

- 双曲函数与反双曲函数(不做要求，了解即可)

Chapter 3 复变函数的积分

1. 复积分的性质与计算

   比较重要的性质是这个：

   $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \leq \max_{z\in c} |f(z)|L$$

   注意积分中值定理在复积分中并不成立

   复积分的计算：化为第二类曲线积分或定积分计算，后面还会使用计算原函数，柯西积分公式，导数公式以及留数计算

   一个重要的结论：

   $$I = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

2. 柯西积分定理

设函数$f(z)$在单连通域D内解析, Γ为D内的任意一条简单闭曲线, 则有$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$

闭路变形原理: $\partial_D = C_1 + C_2^-$，$f(z)$在D内解析，则有:

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$$

复合闭路原理：$\partial_D = C_0 + C_1^- + C_2^- + ... + C_n^-$, 函数$f(z)$在D内解析，在$\overline{D} = D + C$上连续，则有

$$\oint_{\partial_D} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$$

路径无关性：设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析， C_1, C_2为D内的任意两条从z_0 到z_1的简单曲线，则有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

原函数与Newton-Leibniz公式：与实函数相同

3. 柯西积分公式

如果函数 $f(z)$在简单闭曲线C所围成区域 D 内解析，在$\overline{D} = D + C$上连续，$z_0 \in D$,则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

应用：$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$.

4. 平均值公式

如果函数 $f(z)$在 $|z - z_0| < R$ 内解析，在$|z - z_0| \le R$上连续，则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

5. 最大模原理(压轴证明或许会考)

如果函数 $f(z)$在D 内解析，且不为常数，则在D内$|f(z)|$没有最大值。

推论：

- 在区域D内解析的函数，如果其模在D内达到最大值，则此函数必恒为常数。
- 若$f(z)$在有界区域D内解析，在$\overline{D}$上连续，则$|f(z)|$在D的边界上必能达到最大值。

6. 高阶导数公式

如果函数 $f(z)$在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$的各阶导数均在D 上解析，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

7. 柯西不等式(压轴证明题或许会考)

设函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析，且 $|f(z)|\leq M$,则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!M}{R^n},\ (\mathrm{n}=1,2,\cdots).$$

8. 刘维尔定理(压轴证明题或许会考)

设函数$f(z)$在全平面上解析且有界,则$f(z)$为一常数

Chapter 4 解析函数的级数表示

Chapter 5 留数及其应用

Chapter 6 共形映射

Chapter 7 傅里叶变换

Chapter 8 拉普拉斯变换