样卷 (闭卷)

院(系)__________ 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试时可以用科学计算器 **考试时间:** 2 小时 30 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得 分	
评卷人	

一、(20 分,每空 2 分)填空题 $=0.6\times10^{0}$ $<0.05=0.5\times10^{-1}$

1. 已知某观测数据 0.61809 的绝对误差为 0.006,则该观测数据有__1__位有效数字。 0.61309

2. 设 $X=(-2,5,-3,8)$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$,则 $\|X\|_1=$__18__, $cond(A)_2=$__25__。

3. 设 $x_j=j\ (j=0,1,2)$ 为互异插值节点, $l_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数,则

$$\sum_{j=0}^{2} x_j^2 l_j(\frac{1}{2})=$$ __0.25__。

4. 已知求积公式 $\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(1)+Af(\frac{3}{2})+\frac{1}{6}f(2)$ 至少具有零次代数精度, 则 $A=$__$\frac{2}{3}$__。 0

5. 对矩阵 $A=\begin{bmatrix}9 & -6 & 3\\ -6 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 42\end{bmatrix}$ 进行 LU 分解, 则其中单位下三角矩阵

L=__$\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{2}{3} & 1 & \\ \frac{1}{3} & 4 & 1\end{bmatrix}$__。

6. Gauss 求积公式 $\int_1^2 f(x)dx \approx Af(x_0)$ 中的 $x_0=$______, $A=$______。

7. 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 方法使用__________公式进行预估,__________公式进行校正。

得　分	
评卷人	

二、(共 15 分)

(1) 对于线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$，

分别写出求解该方程的 Jacobi 迭代及 Gauss-Seidel 迭代公式，并判断其敛散性。

(2) 对于一般的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

若其 Jacobi 迭代收敛，那么其 Gauss-Seidel 迭代公式是否一定收敛？为什么？

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_2^{k} \\ x_2^{k+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_1^{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_2^{k} \\ x_2^{k+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_{\cancel{k}}^{k+1} \end{cases}$$

(2)

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

三、(共 10 分) 应用变步长梯形法计算定积分

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

的近似值，步长 h 从 4 逐步二分减小到 1 为止，计算过程中保留小数点后 2 位即可。

得 分	
评卷人	

四、(共 20 分) 1. (10 分) 已知函数表：

x	-1	0	1
$f(x)$	10	5	2

(1) 试求过这 3 点的 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$；

$f'(x)$ 0

(2) 若还已知条件 $f'(1)=0$，求其三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出余项表达式。

2. (10 分) 已知如下测量数据：

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	8	5	1	4	9

求 $f(x)$的最小二乘拟合多项式 $p(x)=ax^2+b$（其中 a,b 为拟合系数）。

(第四题答案请填写在第 4 页)

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

五、(**共 20 分**)试解答下列问题：

(1) 分别写出数值求解 $f(x)=x^2-x-1=0$ 在 $[0,2]$ 之间的根的弦截法和 Newton 迭代法的具体计算公式；

(2) 任取初值 $x_0 \geq 1$，求 $x^2=2$ 的根 $\sqrt{2}$ 的 Picard 迭代法：

$x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{1}{x_k}$（$k=0,1,2,\ldots$）是否收敛到 $\sqrt{2}$？为什么？

得　分	
评卷人	

六、(共 15 分)　(1)写出用隐式 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) + x, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的公式，并取步长 $h = 0.2$，计算一步得到 $y(0.2)$ 的近似值；

(2) 证明求解 $y' = f(x, y)$ 的线性二步法

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - by_n = \frac{h}{4}[(b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n]$$

的收敛阶不超过 2 阶(其中 b 为实系数)。

得　分	
评卷人	

六、(共 15 分)　(1)写出用隐式 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) + x, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的公式，并取步长 $h = 0.2$，计算一步得到 $y(0.2)$ 的近似值；

(2) 证明求解 $y' = f(x,y)$ 的线性二步法

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - by_n = \frac{h}{4}[(b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n]$$

的收敛阶不超过 2 阶(其中 b 为实系数)。