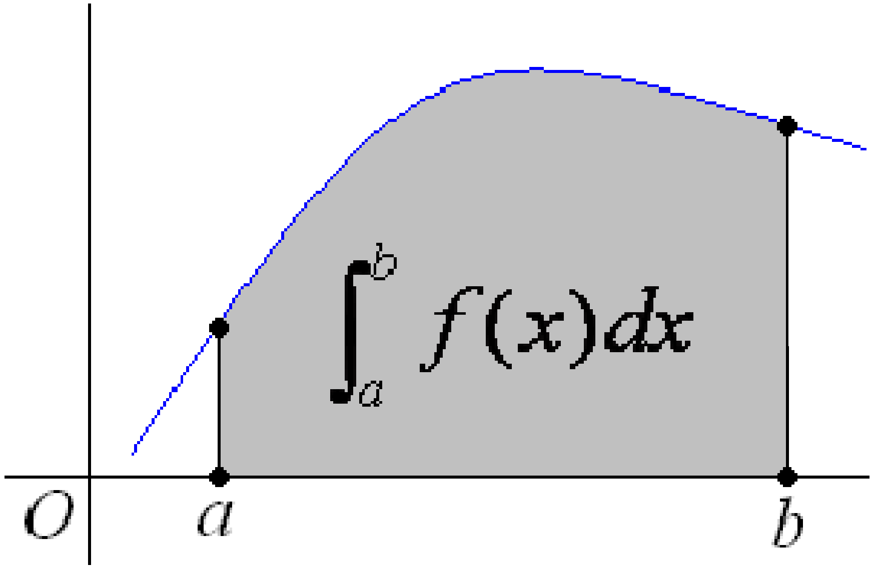
第5章　数值积分

求函数$f(x)$在区间［a，b］上的定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$



定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k$$

Newton-Leibniz公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

近似计算公式

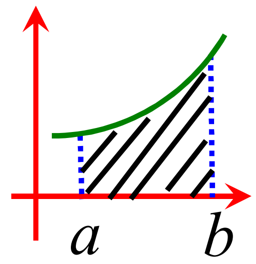
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k$$

数值积分的必要性：

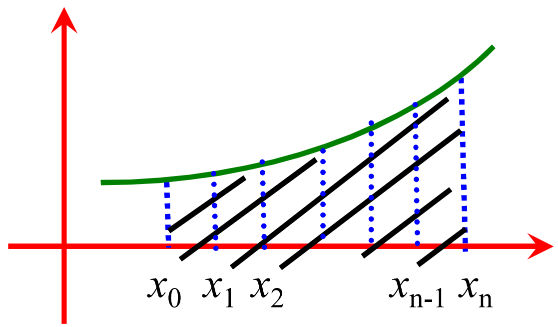
- $f(x)$的原函数不能用初等函数表示
- $f(x)$及其原函数的表达式很复杂
- $f(x)$是以表格形式给出

两类数值积分

- 单个公式 $I \approx ?$



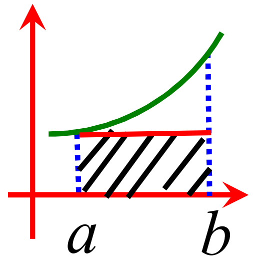
- 复化公式$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i \approx ?$



单个公式

1. 矩形公式

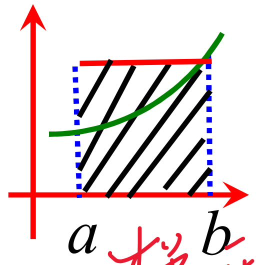
x	a
f	$f(a)$



左矩形

$$I \approx (b-a)f(a)$$

x	b
f	$f(b)$

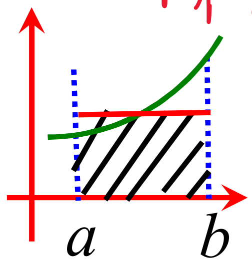


右矩形

$$I \approx (b-a)f(b)$$

梯形. $I \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

x	$(b+a)/2$
f	$f((b+a)/2)$

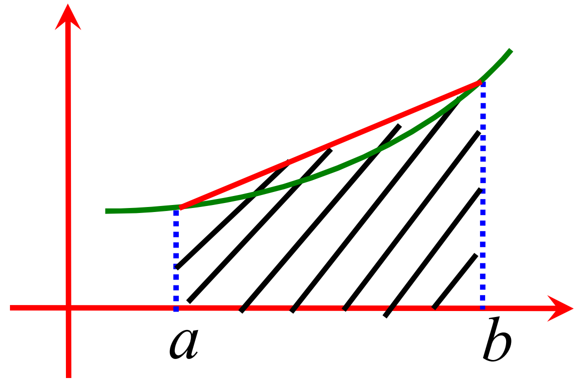


$$I \approx (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

单个公式

2. 梯形公式

x	a	b
f	$f(a)$	$f(b)$

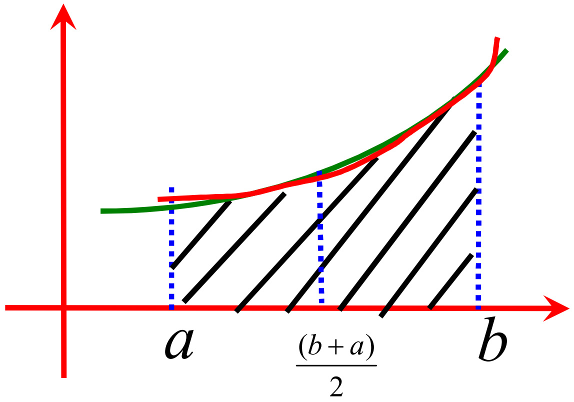


$$I \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

单个公式

3. Simpson公式

x	a	$(b+a)/2$	b
f	$f(a)$	$f((b+a)/2)$	$f(b)$



$$I \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

机械求积公式

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

$$I_n \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f_k$$

对节点x_k处的值进行加权平均

x_k -- 积分节点；A_k -- 求积系数

A_k 仅与节点值及区间［a, b］有关，而与被积函数 $f(x)$无关

$$R_n(f) = I(f) - I_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

代数精度 （名称与测试函数类型有关）.

- 如果求积公式对于任何次数不高于m的多项式都精确成立，而对某个$m+1$次多项式不能精确成立，则称求积公式具有m次代数精度。

当 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ldots\ x^m$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$ 精确成立

$$\int_a^b x^{m+1}dx\neq\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^{m+1}$$

几个常用的求积公式的代数精度

左矩形, $I_0 = (b-a)f(a)$

1. 梯形公式的代数精度

$I = \int_a^b f(x)dx$

当$f(x) = x$时

$f(x)=1$ 时 $I = b-a$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$I_0 = b-a$

$$T[f] = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \int_a^b f(x)dx$$

$I_0 = I$

当$f(x) = x^2$时

$f(x) = x$ 时

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

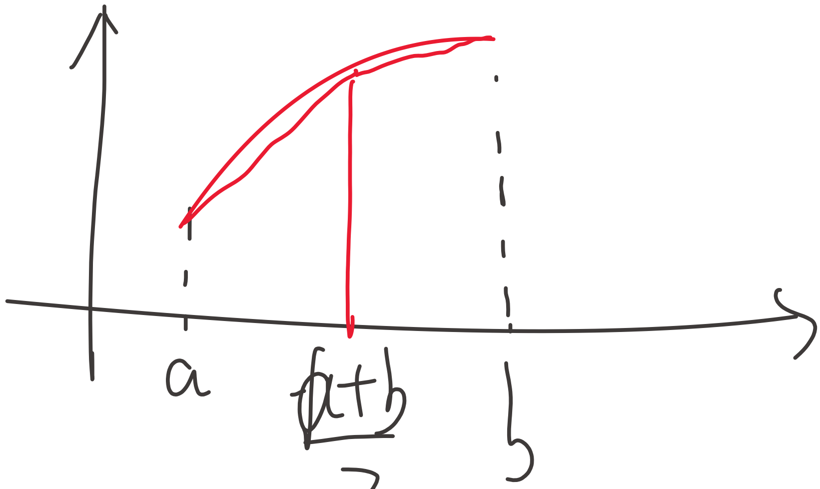
$I = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

$$T[f] = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{b-a}{2}(a^2+b^2) \neq \int_a^b f(x)dx$$

$I_0 = (b-a)a$

$m=1.$

$m=0$



$$\frac{a+b}{2} = c$$

$$\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(f(a)+f(c)\right) + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(f(c)+f(b)\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(f(a)+2f(c)+f(b)\right)$$

$f(x)=1 \quad I = b-a.$

$\qquad I_2 = b-a.$

$f(x) = x \quad I = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

$$I_2 = \frac{b-a}{4}(a+b+a+b)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$f(x) = x^2 \qquad I = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$

$$I_2 = \frac{b-a}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{(a+b)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab)\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3b^2}{2} + ab\right)$$

$I_2 \neq I \qquad m = 1$

2. Simpson–公式的代数精度

当 $f(x) = x$ 时

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$S[f] = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{b+a}{2}) + f(b))$$

$$= \frac{b-a}{6}(a + 4\frac{a+b}{2} + b) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

所以 $\int_a^b f(x)dx = S[f]$ 成立

当 $f(x)=x^2$ 时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^2+4(\frac{a+b}{2})^2+b^2)$$

$$=\frac{b-a}{6}(2a^2+4ab+2b^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

即 $\int_a^b f(x)dx=S[f]$ 精确成立

当 $f(x)=x^3$时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^3 dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^3+4(\frac{a+b}{2})^3+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^3+\frac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}\frac{3}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

即 $\int_a^b f(x)dx=S[f]$精确成立

$I_n = A_0 f_0 + A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n$

构造n阶代数精度的待定系数法

$$f(x)=1: \quad \int_a^b dx = (b-a) = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$x: \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

$$x^2: \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + \ldots + A_n x_n^2$$

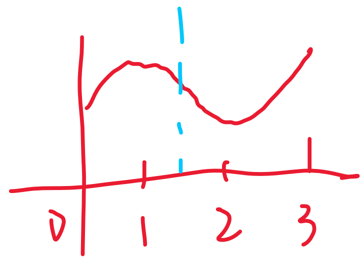
$$\ldots x^n: \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \ldots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/(n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{1\le j \le i \le n} (x_i - x_j) \Leftarrow$$

确定一个3次代数精度积分公式.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) + A_3 f(3)$$



$f(x)=1$

$$3 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3.$$

$f(x)=x$ $\quad \frac{3^2}{2} = A_1 + 2A_2 + 3A_3$

$f(x)=x^2$

$$\frac{27}{3} = A_1 + 4A_2 + 9A_3$$

$f(x)=x^3$ $\quad \frac{81}{4} = A_0 \cdot 0 + A_1 + 8A_2 + 27A_3$

由对称性得 $\begin{cases} A_0 = A_3 \\ A_1 = A_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3A_1 + 3A_3 = \frac{9}{2} \\ 5A_1 + 9A_3 = 9 \\ 9A_1 + 27A_3 = \frac{81}{4} \end{cases}$$

$A_3 = \frac{3}{8}$ $\quad A_1 = \frac{9}{8}$

c, x_i 是待定的未知量，确定 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = c[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)]$ 使得代数精度尽量高。

取 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 使得公式准确成立

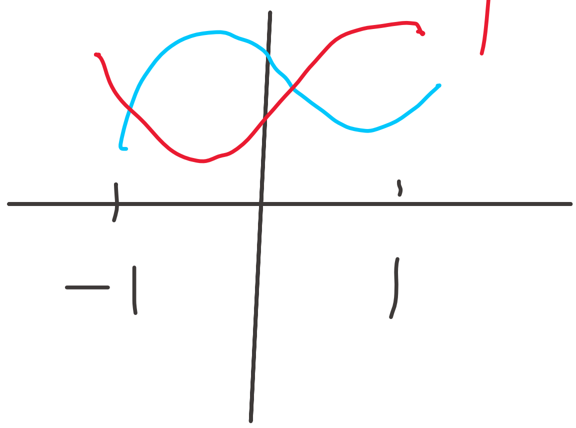
$f(x)=1 \quad 3c=2$

$f(x)=x \quad c[x_0+x_1+x_2]=0$

$f(x)=x^2 \quad c[x_0^2+x_1^2+x_2^2]=\frac{2}{3}$

$f(x)=x^3 \quad c(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=0$

$c=\frac{2}{3}$ 　设 $-1 \le x_0 < x_1 < x_2 \le 1$



$x_0+x_1+x_2=0$

$x_0^2+x_1^2+x_2^2=1$

$x_0^3+x_1^3+x_2^3=0$

$$\begin{cases} x_0=-x_2 \\ x_1=0 \end{cases}$$

$2x_0^2=1$

$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)=x^4$

$$\frac{2}{3}(x_0^4+x_1^4+x_2^4)\neq\frac{2}{5}$$

求A_0,A_1,A_2使$\int_a^b f(x)dx=A_0f(a)+A_1f(c)+A_2f(b)$

使代数精度尽量高.

$f(x)=1,x,x^2$

$$A_0+A_1+A_2=b-a$$

$$A_0a+A_1c+A_2b=b^2-a^2$$

$$A_0a^2+A_1c^2+A_2b^2=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

对称性 $A_0=A_2$

$$\begin{cases}2A_0+A_1=b-a.\\(a+b)A_0+A_1c=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\\(a^2+b^2)A_0+A_1c^2=\frac{1}{3}(b^3-a^3).\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = b - a \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}(b-a) \end{cases} \checkmark$$

$$A_1 = b - a - 2A_0$$

$$(a^2+b^2)A_0 + (b-a-2A_0)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$A_0 = \frac{1}{6}(b-a)$$

$$A_1 = \frac{4}{6}(b-a),$$

- 多项式插值

插值函数类是多种多样的，一般根据问题的特征与研究的要求来选择。最常用到的是代多项式函数插值，多项式函数形式简单，便于计算。

插值函数是 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n \longrightarrow$ 待定系数

由插值条件得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

系数矩阵 (Vandermonde--范德蒙德 行列式)

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

插值方法

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)\right) dx + R$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b l_k(x)\,dx\right)}_{A_k} \cdot f(x_k)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (a < \xi < b)$$

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)} \cdot \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)}dx$$

$$R_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \qquad (a < \xi < b)$$

x	$x_0=a$
f	$f(a)$

$$L_0(x)=f(x_0)=f(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_0(x)\,dx = f(a)(b-a) \text{ — 左矩形}$$

x	$x_0=b$
f	$f(b)$

$$= f(b)(b-a) \text{ — 右矩形}$$

x	$x_0=a$	$x_1=b$
f	$f(a)$	$f(b)$

$$L_1(x)=f(a)l_0(x)+f(b)l_1(x)$$

$$= f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

$$A_0=\int_a^b l_0(x)\,dx=\frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{b^2-a^2}{2}-b(b-a)\right]$$

$$= -\frac{a+b}{2} + b = \frac{b-a}{2}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2}$$

	$x_0 = a$	$x_1 = c$	$x_2 = b$

$$l_0(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}$$

$$A_0 = \int_a^b l_0(x)\,dx = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{4(b-a)}{6} \qquad A_2 = \frac{b-a}{6}.$$

Newton Cotes积分公式(等距节点)

$[a,b]$区间等分n等分，取$h=\dfrac{b-a}{n}, x_j = a+kh$

$(j=0,1,2\ldots,n)$

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

$$= (b-a)\sum_{j=0}^{n} C_j^{(n)} f_j + R[f]$$

Cotes系数

$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$

$= \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$

$A_j = \int_a^b l_j(x)dx.$

$\bar{A}_j = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_j(x)dx.$

$$=(b-a)\sum_{j=0}^{n}\overline{A_j}\, f(x_j)$$

$$C_j^{(n)}=\frac{1}{b-a}\int_a^b l_j(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}dx$$

$x=a+th$

$x_i=a+ih$, $C_j^{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{a+th-(a+ih)}{a+jh-(a+ih)}dx$

$x_j=a+jh$

$$=\frac{1}{nh}\int_0^n\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{t-i}{j-i}h\,dt$$

$$=\frac{1}{n}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{j-i}\int_0^n\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(t-i)dt$$

$$=\frac{(-1)^{n-j}}{nj!(n-j)!}\int_0^n\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(t-i)dt.$$

$$C_j^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_j(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}dx$$

$$x = a + th$$

$$C_j^{(n)} = C_{n-j}^{(n)}$$

$$C_j^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}dx = \frac{1}{nh}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{t-i}{j-i}hdt$$

$$= \frac{1}{n}\boxed{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{j-i}}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(t-i)dt$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-(j-1))\cdot(j-(j+1))(j-(j+2))\cdots(j-n)}\right]$$

$$j!$$

$$(-1)^{n-j}\,(-1)(-2)\cdots(j-n)$$

$$=(-1)^{n-j}(n-j)!$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

$$C_{n-j}^{n} = \frac{(-1)^{j}}{n!(n-j)!\,j!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-j}}{nj!(n-j)!}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(t-i)dt$$

$$\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-j}}^{n}(t-i)dt.$$

当$n=1$时，仅有两个节点：

$$C_0^{(1)}=\frac{(-1)^{1-0}}{1\times 0!\times(1-0)!}\int_0^1(t-1)dt=\frac{-1}{1}\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)}=\frac{(-1)^{1-1}}{1\times 1!\times(1-1)!}\int_0^1(t-0)dt=\frac{1}{1}\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

当 $n = 2$时

$$C_0^{(2)} = \frac{(-1)^{2-0}}{2\times 0!\times(2-0)!}\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 [(t-2)^2 + (t-2)]\,dt$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{3}(t-2)^3 + \frac{1}{2}(t-2)^2]\Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

同理可得 $C_1^{(2)} = \frac{4}{6}$， $C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$

- 以此类推得Cotes系数表:

n	$C_k^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}\{1,1\}$
2	$\frac{1}{6}\{1,4,1\}$
3	$\frac{1}{8}\{1,3,3,1\}$
4	$\frac{1}{90}\{7,32,12,32,7\}$
5	$\frac{1}{288}\{19,75,50,50,75,19\}$
6	$\frac{1}{840}\{41,216,27,272,27,216,41\}$
7	$\frac{1}{17280}\{751,3577,1323,2989,2989,1323,3577,751\}$
8	$\frac{1}{28350}\{989,5888,-928,10496,-4540,10496,-928,5888,989\}$

常用的几个积分公式

- 梯形公式(n=1)

因为$C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2}$,则$\int_a^b f(x)dx = T[f] + R_T[f]$。

且 $$T[f] = (b-a)[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)]$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$R_T[f] = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

- Simpson公式(n=2)

因为$C_0^{(2)}=\frac{1}{6}, C_1^{(2)}=\frac{4}{6}, C_2^{(2)}=\frac{1}{6}$

所以$\int_a^b f(x)dx = S[f]+R_S[f]$

且 $S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

$$R_S[f]=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi) \quad \xi\in(a,b)$$

- Newton 公式(n=3)

因为$C_0^{(3)}=\frac{1}{8}, C_1^{(3)}=\frac{3}{8}, C_2^{(3)}=\frac{3}{8}$，$C_3^{(3)}=\frac{1}{8}$

所以$\int_a^b f(x)dx = N[f]+R_N[f]$

且$N[f]=\frac{b-a}{8}(f(a)+3f(a+h)+3f(a+2h)+f(b))$

其中$h=\frac{b-a}{3}$。

- Cotes公式(n=4)

因为$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},C_1^{(4)}=\frac{32}{90},C_2^{(4)}=\frac{12}{90}$，$C_3^{(4)}=\frac{32}{90},C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$

所以$\int_a^b f(x)dx=C[f]+R_C[f]$

且 $C[f]=\frac{b-a}{90}(7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)$

$+32f(a+2h)+7f(b))$

其中$h=\frac{b-a}{4}$。

例

计算$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 。

解：由$Newton\text{-}Leibniz$公式得

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2=0.69314718$$

由梯形公式 $I=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{1})=0.\underline{7}5$;

由$Simpson$公式$I=\frac{1}{6}(\frac{1}{1}+4\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2})=0.\underline{69}44$;

由$Newton$公式$I=\frac{1}{8}(1+3\frac{1}{\frac{4}{3}}+3\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2})=0.\underline{693}75$

由$Cotes$公式得$I=0.\underline{6931}75$

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx. \quad f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

① 中矩形

$$I_0 = f\left(\frac{0.5}{2}\right)\times 0.5 = 0.5\times f(0.25)$$
$$= 0.5\times 0.7761$$
$$= 0.388057$$

② $I_1 = (b-a)[C_0' f(x_0) + C_1' f(x_1)]$

$$= \frac{0.5}{2}[f(0)+f(0.5)] = 0.25[1+0.59628]$$
$$= 0.39907$$

③ $I_2 = \frac{b-a}{6}[f(0)+4f(0.25)+f(0.5)]$

$$= 0.391723,$$

④ $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\times \ln\left(\frac{3\times(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{10}}\right) = 0.39168$

⑤ Newton $f(0)\ f(\frac{1}{6})\ f(\frac{1}{3})\ f(0.5)$

0

$f(0.5) = 0.596285$

$f(\frac{1}{6}) = 0.84548 \quad f(\frac{1}{3}) = 0.71151.$

$$I_3 = \frac{0.5}{8}\left[1 + 3\times 0.84548 + 3\times 0.71151 + 0.596285\right].$$

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$$

$a=0,\ b=1$

$$I_4 = \frac{b-a}{90}\left(7f(0) + 32f(0.25) + 12f(0.5) + 32f(0.75) + 7f(1)\right]$$

$$= 0.310261\ldots$$

$$R_n[f] = \frac{h^{n+3}\cdot f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_0^n (t-\frac{n}{2})(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

$h=\frac{1}{4} \quad n=4 \quad f=\sin x^2$

$$\int_0^4 (t-2)(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\,dt$$

$$|R| \le 1.122\times 10^{-3}.$$

Newton-Cotes公式截断误差及代数精度

代数精度 $f(x)=1, x, x^2 \cdots x^m$ 拉格朗日的$R(x)$积分跟(2)

$Newton-Cotes$公式的截断误差为 $f(x)=1 \cdots x^n, x^{n+1}$ S, $n=2\to 3$

t^2

$$R_n[f]=\begin{cases}\dfrac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n \cancel{\left(t-\frac{n}{2}\right)}(t-1)(t-2)\ldots(t-n)dt & (n\text{为偶数}) \\ \dfrac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^n t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)dt & (n\text{为奇即数})\end{cases}$$

$f(x)=1, x \cdots x^n$ N, $n=3\to 3$

其中，$h=\dfrac{b-a}{n}, \eta\in[a,b]$

令$n=4$得$Cotes$求积公式的截断误差

$$R_C[f]=-\frac{(b-a)^7}{483840}f^{(6)}(\eta)\quad \eta\in[a,b]$$

定理：当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式具有 $n+1$ 次代数精度。

证明　只需证明当 $f(x)=x^{n+1}$ 时，余式 $R[f]=0$。

注意到此时 $f^{n+1}(\xi)=(n+1)!$ 则

$$R[f]=\int_a^b \omega(x)dx = h^{n+2}\int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt$$

因为n为偶数，所以令$n=2m, u=t-m$

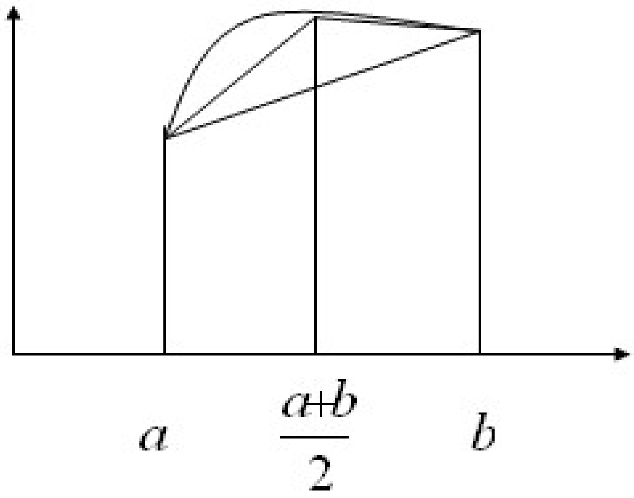
则　$R[f]=h^{2m+2}\int_{-m}^{m} u(u^2-1)\dots(u^2-m^2)du=0$

复化求积公式

- 将区间[a,b]适当分割成若干个字区间，对每个子区间使用求积公式，构成所谓的复化求积公式，这是提高积分精度的一个常用的方法。

定步长复化求积公式

1.复化梯形求积公式



$$T(h)=\frac{a-b}{2}(f(a)+f(b))$$

$$T(\frac{h}{2})=\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(a)+f(\frac{a+b}{2}))$$

$$+\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

- 一般地将[a,b]区间n等分，则

$$h=\frac{b-a}{n}, x_j = a + jh \quad (j = 0,1,2,\ldots n)$$

对每个子区间$[x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1,2,\ldots n)$

使用T公式有

$$S_j = \frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

- 所以

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} S_j + R_T[f,h]$$

而 $\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$

$$= \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots$$

$$+ f(x_{n-1}) + f(b) + f(b) - f(b))$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j))$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(a + jh)) = T_n(h)$$

或 $= \frac{h}{2}(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh))$

梯形为一等分

x_{j-1} x_j

$$R_j=\frac{h^3 f''}{2!}\int_0^1 t(t-1)\,dt=\frac{h^3}{2!}f''(\eta)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$R_T[f,h]=-\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)\qquad \xi_j\in(x_{j-1},x_j)$$

若$f(x)$是$[a,b]$区间上的二阶连续函数

则必存在一点$\xi\in$（a,b）使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$$

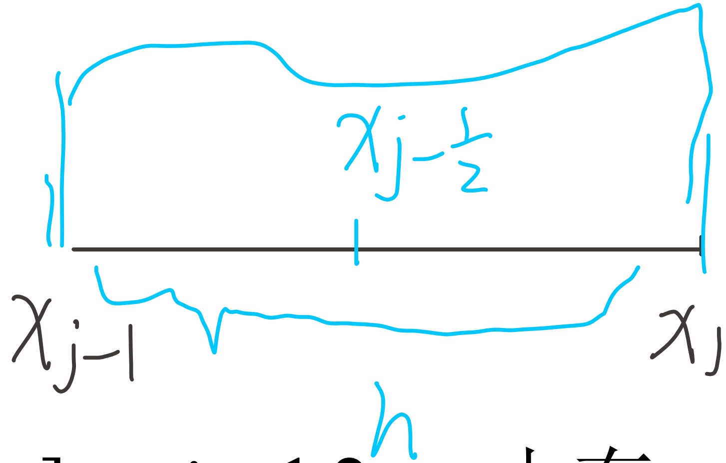
$$|f''(\xi)|_{max}=M$$

$$故R_T[f,h]=-\frac{h^3}{12}nf''(\xi)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

$$|R_T|<\varepsilon$$

$$=\left|-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right|M<\varepsilon$$

2. 复化Simpson公式



在每个子区间$[x_{j-1}, x_j]$　$j=1,2,\ldots n$上有

$$S_j = \frac{h}{6}\left(f(x_{j-1}) + 4f(x_{j-\frac{1}{2}}) + f(x_j)\right)$$

则$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} S_j + R_S[f,h]$

而 $\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(f(x_{j-1}) + 4f(x_{j-\frac{1}{2}}) + f(x_j)\right)$

$$= \frac{h}{6}\Big(f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + f_1$$

$$+ f_1 + 4f_{\frac{3}{2}} + f_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad .$$

$$+ f_{n-1} + 4f_{n-\frac{1}{2}} + f_n + f_n - f_n$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a) - f(b)}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right) + \sum_{j=1}^{n} f(a+jh)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2} + \left(\sum_{j=1}^{n} f(a+jh) + 2f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right)\right)$$

$$= S_n(h)$$

$$R_S[f,h] = -\frac{h^5}{2880}\sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i) \qquad \xi_i \in (x_{j-1}, x_j)$$

$$= -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

$$R_j = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}}{4!}\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)\,dt.$$

$$= \frac{h^5 f^{(4)}}{2^5 \cdot 4!} \times \left(-\frac{4}{15}\right) =$$

$$-\frac{4}{15}$$ ✓

例 题

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

如果用复化梯形公式和用复化Simpson

公式计算,要使得截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

试问划分数n至少取多少？

解：由截断误差有

$$R_T[f,h]=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)=-\frac{\frac{\pi}{2}-0}{12}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\right)^2(\sin''\xi)$$

即 $$\left|R_T[f,h]\right|=\left|\frac{\pi}{24}\frac{\pi}{2n}\sin\xi\right|\le\left|\frac{\pi^2}{48n}\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

解得 $n>254$

由

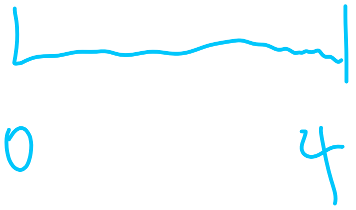
$$R_S[f,h] = -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2880}(h)^4(\sin^{(4)}\xi)$$

即 $\left|R_S[f,h]\right| = \left|\frac{\pi}{2880\times 2} h^4 \sin\xi\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解得 $\quad h < 0.31$, 故 $n > \dfrac{\frac{\pi}{2}}{0.31} \approx 5.1$, 取 $n = 6$。

$f(x) = x^4$ $\quad I = \int_0^4 f(x)\,dx = \frac{4^5}{5} = 204.8$

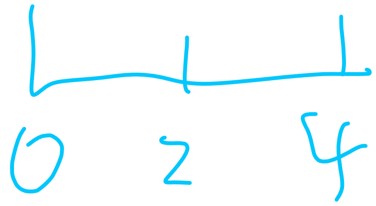
$h=4$



$T_1 = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$

$= 2 \times (0+4^4) = 512$

$h=2$

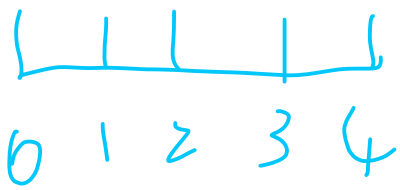


h为上一步的步长.

$T_2 = \frac{1}{2}(T_1 + h f(2))$

$= \frac{1}{2}(512 + 4\cdot 2^4) = 288$

$h=1$



$T_4 = \frac{1}{2}(T_2 + h(f(1)+f(3)))$

$= \frac{1}{2}(288 + 2\times(1^4+3^4))$

$= 226$

$T_8 = \frac{1}{2}(226 + 1\times(0.5^4 + 1.5^4 + 2.5^4$
$+ 3.5^4)) = 210.125$

$T_1 \quad T_2 \quad T_4 \quad T_8 \quad T_{16} \quad T_{32}$

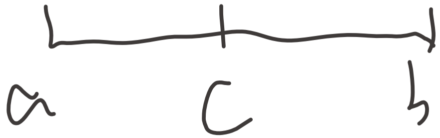
$T_k \quad T_{2k}$

$$T^*_{2k} = T_k + w(T_{2k} - T_k).$$

$$T_0 = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

变步长求积公式

$$T_1 = \frac{b-a}{4}(f(a)+f(b)+2f(c))$$



定步长复化求积公式的一个明显缺点是：事先很难估计分划数 n 使结果达到预期精度。由于适当加密分点，精度会有所改善，为此采用自动加密分点的方法，并利用事后估计来控制加密次数，以判断是否达到预期精度，从而停止计算。

首先我们讨论变步长梯形求积公式。

T^2

变步长梯形求积公式

设区间$\left[a,b\right]$划分为 n 等分，即步长$h=\dfrac{b-a}{n}$，

计算$T_n\left(h\right)$：然后将区间$\left[a,b\right]$分点加密一倍，即步长

缩小一半为$\dfrac{h}{2}$，再计算出$T_{2n}(\dfrac{h}{2})$。如果

$$\left|T_{2n}(\frac{h}{2})-T_n(h)\right|\leq\varepsilon$$

则取 S=$T_{2n}(\frac{h}{2})$ 作为定积分的近似值。已知 $T_n(h)$，如何计算 $T_{2n}(\frac{h}{2})$ 且计算量小？

$T_n(h) = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(k)]$

$T_{2n}(\frac{h}{2}) = \frac{\frac{h}{2}}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

$+2\sum_{k=1}^{n} f(k-\frac{1}{2})$

x_{j-1} $x_{j-\frac{1}{2}}$ x_j

$= \frac{1}{2}T_n(h) + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} f(k-\frac{1}{2})$

因为 $$S_j = \frac{\frac{h}{2}}{2}(f_{j-1} + 2f_{j-\frac{1}{2}} + f_j)$$

所以 $$T_{2n} = \sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{4}\{\sum_{j=1}^{n}(f_{j-1} + f_j) + 2\sum_{j=1}^{n} f_{j-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(f_{j-1} + f_j) + h\sum_{j=1}^{n} f_{j-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \frac{1}{2}(T_n(h) + H_n(h))$$

其中 $H_n(h) = h\sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h)$

变步长Simpson求积公式

由复化$Simpson$公式

$$S_n(h)=\frac{h}{3}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2}+\left(\sum_{j=1}^{n} f(a+jh)+2f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right)\right.$$

$$=\frac{1}{3}\left\{h\left[\frac{f(a)-f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n} f(a+jh)\right]+2h\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(T_n(h)+2H_n(h))$$

所以$S_{2n}(\frac{h}{2})=\frac{1}{3}(T_{2n}(\frac{h}{2})+2H_{2n}(\frac{h}{2}))$

程序实现的基本思想：

$$T_n(h) \Rightarrow H_n(h) \Rightarrow S_n(h)$$

$$\Rightarrow T_{2n}(\frac{h}{2}) \Rightarrow H_{2n}(\frac{h}{2}) \Rightarrow S_{2n}(\frac{h}{2})$$

当 $\left|S_{2n}(\frac{h}{2}) - S_n(h)\right| < \varepsilon$时，取 $S_{2n}(\frac{h}{2})$为定积分的近似值，否则　将分点加密一倍，重复上述过程。

复化 $Simpson$ 公式与复化梯形公式有如下关系

$$S_n(h) = \frac{4T_{2n}(\frac{h}{2}) - T_n(h)}{4-1}$$

同理也可以推出复化 $Cotes$ 公式

$$C_n(h) = \frac{4^2 S_{2n}(\frac{h}{2}) - S_n(h)}{4^2-1}$$

例题

计算 $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

(1)用$Simpson$公式；

(2)用$n=5$的复化$Simpson$计算，并估计误差；

(3)用变步长$Simpson$公式计算，使其误差小于10^{-5}。

（1）　$I=\frac{1}{6}(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1))$

$$=\frac{1}{6}(1+4\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2})=\frac{25}{36}\approx 0.69444$$

(2) $\because h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{5}=0.2$

则节点 $x_i=0+ih \quad (i=0,1,2,3,4,5)$

所以有：

$$
\begin{aligned}
I = S_5(h) &= \frac{1}{6}\frac{1}{5}\Big[\Big(\frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1}\Big) + 2\times\Big(\frac{1}{1+0.2} \\
&\quad + \frac{1}{1+0.4} + \frac{1}{1+0.6} + \frac{1}{1+0.8} + \frac{1}{1+1}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{30}\Big(\frac{1}{2} + 2\times\Big(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{2}\Big)\Big) \\
&\approx 0.69315
\end{aligned}
$$

因为 $\left|f^{(4)}(x)\right| = \dfrac{24}{\left|1+x\right|^5} \le 24 \qquad x \in [0,1]$

所以 $R_S[f,h] \le \dfrac{h^4}{2880} \times 24 = \dfrac{(0.2)^4}{120}$

$= 1.3333 \times 10^{-5}$