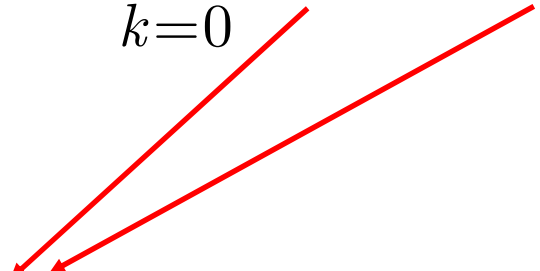


# Gauss求积公式

求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$



自由变量  
 $2n + 2$ 个自由度,  
 $2n + 1$ 次代数精度

可以看出，待定参数  $A_k, x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 共  $2n + 2$  个，

如果令  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$  使求积公式(5.1)

精确成立，即  $R[f] = 0$ ，从理论上讲，建立了求

$A_k, x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 的  $2n + 2$  个代数方程组

$$\sum_{k=0}^n A_k x_k^j = \frac{1}{j+1} (b^{j+1} - a^{j+1}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

解得  $A_k, x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ , 则求积公式将有  $2n+1$

次代数精度

例 试决定参数  $A_0, A_1, x_0, x_1$  , 使求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

具有 3 次代数精度。

解 令  $f(x)=1, x, x^2, x^3$  , 代入求积公式得

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_0 + A_1 = 2 & (1) \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 & (2) \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3} & (3) \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 & (4) \end{array} \right.$$

由式(1)及式(2)可解得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{2 x_1}{x_1 - x_0} \\ A_1 = \frac{-2 x_0}{x_1 - x_0} \end{array} \right. \quad (5)$$

由式(3)及式(4)可解得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{2 x_1}{3 x_0^2 (x_1 - x_0)} \\ A_1 = \frac{-2 x_0}{3 x_1^2 (x_1 - x_0)} \end{array} \right. \quad (6)$$

再由式(5)和(6)可得

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, A_0 = 1, A_1 = 1$$

于是有求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

为具有 3 次代数精度的求积公式。

例 试决定参数  $A_0, A_1, A_2, x_0, x_1, x_2$  , 使求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

具有 5 次代数精度。

解 令  $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$  , 代入求积公式得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \\ A_0 x_0^4 + A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 = \frac{2}{5} \\ A_0 x_0^5 + A_1 x_1^5 + A_2 x_2^5 = 0 \end{array} \right.$$

$$A_0 = A_2 = 5/9, \quad A_1 = 8/9$$

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}},$$



与下面多项式的关系

$$V = \{ P_k(x) \mid k=0, 1, \dots \}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$(P_m(x), P_n(x)) = \int_a^b P_m(x) P_n(x) dx,$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{48}(693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 15)$$

.....



定义 如果插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

对任何  $2n+1$  次代数多项式都能精确成立，即有  $2n+1$  次代数精度，则称积分公式为 Gauss 型求积公式，而  $x_k (k=0,1,\dots,n)$  称为 Gauss 点，其中  $\rho(x) \geq 0$  为权函数。

# 正交多项式

定义 设  $n$  次多项式

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

其中,  $a_n \neq 0$ , 如果对于区间  $[a, b]$  上非负权函数  $\rho(x)$ , 多项式  $P_m(x)$  与  $P_n(x)$  满足

$$\langle P_m(x), P_n(x) \rangle \triangleq \int_a^b \rho(x) P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ c_n, & m = n \end{cases}$$

则称多项式系  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$  在区间  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  正交,  $P_n(x)$  称为正交多项式。

$$\text{令 } P_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{c_n}} P_n(x), \text{ 则}$$

$$(P_m^*(x), P_n^*(x)) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

此时，称  $P_m^*(x)$  为区间  $[a,b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  的  $n$  次规范化正交多项式。

$$\text{令 } \tilde{P}_n(x) = \frac{1}{a_n} P_n(x), \text{ 则 } \tilde{P}_n(x) \text{ 为首项系数为 } 1 \text{ 的 } n \text{ 次正交多项式。}$$

# 几个常用的正交多项式

## 1. Legendre 多项式

在区间 $[-1,1]$ 上，带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式系 $\{P_n(x)\}(n=0,1,2,3,\dots)$ 称为 Legendre 多项式，它的一般形式为

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1 + 2x^2)$$
  
$$= \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{d}{dx} [x^2 - 1]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{d}{dx^2} [(x^2 - 1)^2] = \frac{1}{8} [2(x^2 - 1) \cdot 2x] \\ = \frac{1}{2} [x(x^2 - 1)]'$$

# Legendre 多项式的性质

性质 1 正交性

$$(P_m(x), P_n(x)) = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases}$$

性质 2 奇偶性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

即  $n$  为奇数时,  $P_n(x)$  为奇函数,  $n$  为偶数时,  $P_n(x)$  为偶函数。

性质 3 三项递推关系

$$\begin{cases} P_0(x)=1, & P_1(x)=x \\ P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{3}{2}x \cdot P_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x) \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

## 2. Chebyshev 多项式

在区间  $[-1,1]$  上，带权  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的正交多项式系

$\{T_n(x)\} (n = 0, 1, 2, \dots)$  称为 Chebyshev 多项式，它的一般形式为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos \arccos x = x$$

前几项具体是

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

....

性质 1 正交性

$$(T_m(x), T_n(x)) = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \neq 0) \end{cases}$$

性质 2 三项递推关系

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

性质 3  $T_n(x)$  在  $(-1, 1)$  内有  $n$  个互异零点

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

性质 4 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

即  $n$  为奇数时,  $T_n(x)$  为奇函数,  $n$  为偶数时,  $T_n(x)$  为偶函数。



### 3. Hermite 多项式

在区间  $(-\infty, +\infty)$  上带权  $\rho(x) = e^{-x^2}$  的正交多项式系

$\{H_n(x)\} (n=0,1,2,\dots)$  称为 Hermite 多项式, 它的一般形式为

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_1(x) &= -e^{x^2} e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

前几项具体是

$$H_0(x) = 1$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

Hermite 多项式三项递推关系是

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, & H_1(x) = 2x \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Hermite 多项式正交关系是

$$(H_m(x), H_n(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2^n n! \sqrt{n} & (m = n) \end{cases}$$

# Gauss-Legendre 求积公式

对区间为  $[-1,1]$  上带权  $\rho(x)=1$  的  $n$  次多项式  $P_n(x)$  的零点

$x_k (k=1, \dots, n)$  为节点, 所建立的 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R[f]$$

称为 Gauss-Legendre 公式。

→  $L_n(x)$  的根

其中, 系数

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{[(1+n)P_{n+1}(x_k)]^2}$$

$$A_k = \int_{-1}^1 l_k(x) l_k(x) dx$$

余式

$$R[f] = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [-1,1]$$

有  $2n+1$  代数精度,

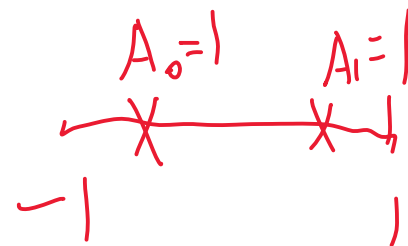
具体前 2 个 Gauss-Legendre 求积公式是：

(1) 两点公式：

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$

其代数精度为 3；

$n=1$   
 $2n+1=3$



(2) 三点公式：

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$$

具有 5 次代数精度。

$2n+1=5$

$$\int_1^2 f(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 g(t) dt .$$

对于任意区间 $[a,b]$ 上的 Gauss-Legendre 求积公式, 可

令  $x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}t$ , 则  $t \in [-1,1]$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k\right) \end{aligned}$$

例 试用 Gauss-Legendre 求积公式，计算定积分

$$I = \int_4^2 \frac{1}{x} dx$$

解 令  $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$ ，则  $\frac{t+3}{2} = x \quad \dots \quad g(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + g(\frac{\sqrt{3}}{3})$   
 $t = 2x - 3 \quad I = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+3} dt$

(1)  $n+1=3$  时

三点  $I \approx I_3 = \frac{5}{9} \left( \frac{1}{0.7745966692+3} + \frac{1}{-0.7745966692+3} \right) + \frac{8}{9} \frac{1}{0+3}$   
 $= 0.693121693$

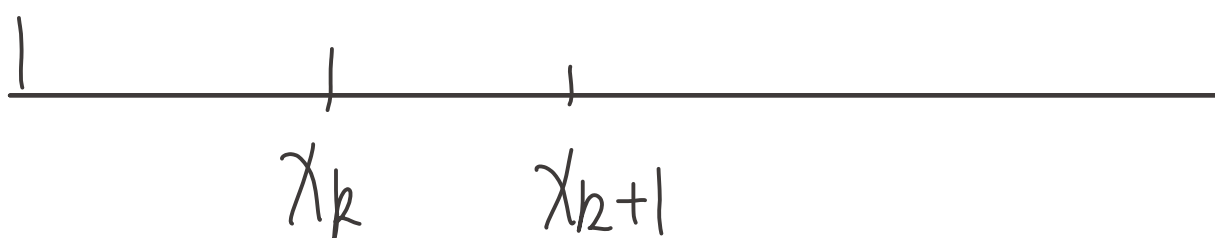
(2)  $n+1=5$  时，可得  $I \approx I_5 = 0.69314757$ 。

五点 与真值  $I = \ln(2) = 0.69314718$  相比，Gauss-Legendre 求积公式有较高精度。

与复化梯形公式，复化 Simpson 公式类似，我们也可以构造复化 Gauss-Legendre 求积公式。如果将区间  $[a, b]$  分成  $n$  等分，则  $h = \frac{b-a}{n}$ ， $x_k = a + kh$   $k = (0, 1, 2, \dots, n)$  对每个子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  用 2 点 Gauss-Legendre 求积公式有

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \left[ f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{x_{k+1} - x_k}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f\left(x_{k+1/2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_{k+1/2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

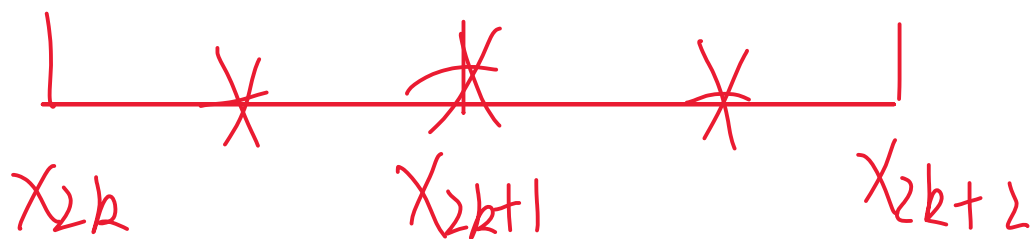


$\frac{f}{2}$

类似做法，如果将区间  $[a, b]$  分成 2 等分， $h = \frac{b-a}{2n}$ ，

$x_k = a + kh, (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ ，对每个子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  用 3 点 Gauss-Legendre 求积公式有

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{9} \sum_{k=0}^{n-1} \{5[f(x_{2k+1} - \sqrt{\frac{3}{5}}h) + f(x_{2k+1} + \sqrt{\frac{3}{5}}h)] + 8f(x_{2k+1})\}$$





# Gauss-Chebyshev 求积公式

在区间  $[-1,1]$  上, 以  $n+1$  次 Chebyshev 多项式  $T_{n+1}(x)$  的零点

$x_k (k=0,1,\dots, n)$  为节点, 权函数  $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R[f]$$

称为 Gauss- Chebyshev 求积公式。

其中,  $A_k = \frac{\pi}{n+1} \quad (k=0,1,2,\dots,n)$

余项:  $R[f] = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+1)!} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [-1,1]$

于是有 Gauss- Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) + R[f]$$

二点 Gauss- Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left[ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$2n+1=3 \\ n=1$$

三点 Gauss- Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3} \left[ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$

$$2n+1=3 \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left( \frac{\sqrt{1-t^2}}{t+3} \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{t+3} dt = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}+3} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+3} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{3\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3\sqrt{2}+1} \right] = 0.7840 \end{aligned}$$

二点 Gauss- Chebyshëv 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left[ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

三点 Gauss- Chebyshëv 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3} \left[ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$