

2023 年科学计算引论 (计算方法) 试题回忆版本

2024 年 1 月 13 日

一、填空题 (共 20 分, 每题 4 分)

1. $\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$ 分别是 π 的近似值, 有几位有效数字
2. $e^{-x^3} + 2\sin(\frac{1}{2}\pi x) - 1.5 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上若需要满足 $\varepsilon < 1 \times 10^{-5}$, 则至少需迭代多少次, $[-1, 0]$ 上是否能用二分法求根?
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, f[0, 1] =, f[-1, 0, 1, 2] =$
4. 给出求 $\sqrt[3]{a}$ 的 Newton 迭代公式, 用其计算 $\sqrt[3]{4}$ 的近似值 $\varepsilon < 0.001$
5. 给出下列求积公式的代数精度

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}f(-0.5) + f(0) + \frac{1}{2}f(0.5)$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$$

二、给定函数 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

- (1) 证明 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有零点
- (2) 确定下列迭代各式在 $x_0 = 0.5$ 处是否收敛

(a)

$$x_{k+1} = 2x_k^3 - 2x_k^2 - 1$$

(b)

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(2x_k^3 - x_k - 1)}$$

- (3) 用 Newton 迭代求其根, 初值选取 $x_0 = 0.5, \varepsilon < 0.001$

三、给定下列插值节点及函数值:

x_i	-1	0	1	3
y_i	-30	-12	-8	30

- (1) 计算 Lagrange 插值多项式 $L_3(x)$
- (2) 计算 Newton 插值多项式 $N_3(x)$
- (3) 计算 $L_3(2), N_3(2), L_3(0.5), N_3(0.5)$

四、给定求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

- (1) 确定 A_0, x_0, A_1, x_1 , 使其有最高的代数精度, 并给出求积公式的代数精度
- (2) 用上述求积公式计算下列积分

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

五、用 Romberg 求积公式计算下列积分, $\varepsilon < 0.001$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

六、用 Gauss-Seidel 迭代法计算下列方程组, 并使两次迭代之间的最大误差 $\varepsilon < 0.001$

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 20 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

七、给定初值问题如下

$$\begin{cases} u' = -u + \frac{t}{2}, t \in [0, 1] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

- (1) 利用显式 Euler 格式以及中点矩形格式, 构造一个显式预估-校正格式
- (2) 用上述显式预估-校正格式解上述初值问题