样卷(答案及评分标准) (闭卷)

考试时间:限时 2:30

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得 分	
评卷人	

一、(20 分，每空 2 分) 填空题

1. ___1___。

2. $\|X\|_1 =$ ___18___，$cond(A)_2 =$ ___5___。

3. $\sum_{j=0}^{2} x_j^2 l_j(\frac{1}{2}) =$ ___1/4___。

4. $A =$ ___2/3___。

5. L= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 4 & 1 \end{pmatrix}$。

6. $x_0 =$ ___3/2___，$A =$ ___1___。

7. ___显式 Euler___公式进行预估，___梯形___公式进行校正。

得 分	
评卷人	

二、(共 20 分)

解：(1)、Jacobi 迭代公式、Gauss-Seidel 迭代公式分别为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{2}{3} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2} \end{cases}$$ ....(4 分)

和 $$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{2}{3} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2} \end{cases},$$ ....(4 分)

或者写成等价形式：Jacobi 迭代公式

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

和 Gauss-Seidel 迭代公式

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

由于系数矩阵为严格占优矩阵，故其 Jacobi 迭代及 Gauss-Seidel 迭代均收敛。

（或者判断迭代矩阵谱半径均小于 1，故收敛） …..（2 分）

(2)、若其 Jacobi 迭代收敛，那么其 Gauss-Seidel 迭代公式一定收敛。

因为，线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 的 Jacobi 迭代公式的迭代矩阵为：

$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}$, Jacobi 迭代公式收敛等价于 $\rho(B_J) = \left| \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}} \right| < 1.$

…………….（4 分）

而其 Gauss-Seidel 迭代公式的迭代矩阵 $B_{GS} = -\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}$,

其谱半径 $\rho(B_{GS}) = \left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1,$ …………….（4 分）

因为 $\rho(B_J) = \left| \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}} \right| < 1$ 则 $\rho(B_{GS}) = \left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1,$

故 Jacobi 迭代收敛则 Gauss-Seidel 迭代公式一定收敛。 ……..……….（2 分）

得　分	
评卷人	

三、(共 10 分)

解：依据变步长梯形法

$$T^{(k)}=\frac{1}{2}T^{(k-1)}+\frac{b-a}{2^k}\sum_{n=1}^{2^{k-1}}f\left(a+\frac{2n-1}{2^k}(b-a)\right),\ k=1,2...$$

其中 b=2, a=-2. ………. （4 分）

则有

$$T^{(0)}=\frac{b-a}{2}\left[f(-2)+f(2)\right]=2(\frac{1}{7}+\frac{1}{7})=\frac{4}{7},$$

$$T^{(1)}=\frac{1}{2}T^{(0)}+\frac{b-a}{2}f(0)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{3}=\frac{20}{21},$$

$$T^{(2)}=\frac{1}{2}T^{(1)}+\frac{b-a}{4}\left[f(-1)+f(1)\right]=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{41}{42}.$$

所得近似值为：$T^{(2)}=\frac{41}{42}\approx 0.98.$ ………. （6 分）

得　分	
评卷人	

四、(共 20 分)

解：1、(1)

$$l_0(x)=\frac{1}{2}x(x-1),l_1(x)=-(x+1)(x-1),l_2(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$$

$$L_2(x)=\frac{1}{2}x(x-1)\times 10-(x+1)(x-1)\times 5+\frac{1}{2}x(x+1)\times 2$$
$$=x^2-4x+5$$

……………………………………………………. （5 分）

(2)设 $H_3(x)=L_2(x)+A(x+1)x(x-1)=x^2-4x+5+A(x^3-x)$，则

$$H_3'(x)=2x-4+A(3x^2-1)$$

由 $f'(1)=H_3'(1)=0$ 得 $-2+2A=0$ 推出 $A=1$. 则

$H_3(x)=x^2-4x+5+(x^3-x)=x^3+x^2-5x+5.$ ………………….（3 分）

余项 $R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x(x-1)^2,\quad \xi\in(-1,1).$ ………………….（2 分）

2、由题意可知：$\varphi_0(x)=1;\varphi_1(x)=x^2$

$$d_0=(f,\varphi_0)=(8,5,1,4,9)(1,1,1,1,1)^T=27,d_1=(f,\varphi_1)=(8,5,1,4,9)(4,1,0,1,4)^T=77,$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=(1,1,1,1,1)(1,1,1,1,1)^T=5,(\varphi_0,\varphi_1)=(1,1,1,1,1)\left(4,1,0,1,4\right)^T=10=(\varphi_1,\varphi_0),$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=(4,1,0,1,4)(4,1,0,1,4)^T=34,d=[d_0,d_1]^T,G=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}$$

法方程为$G\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}=d$， …………………… （6 分）

即$\begin{pmatrix}5 & 10\\10 & 34\end{pmatrix}\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\77\end{bmatrix}$, …………… （2 分）

$$\Rightarrow b=\frac{74}{35}\approx 2.114, a=\frac{23}{14}\approx 1.643.$$

所以$P(x)=\dfrac{23}{14}x^2+\dfrac{74}{35}$. …………………… （2 分）

得　分	
评卷人	

五、(共 15 分)

解：(1)、弦截法一般格式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k),$$

应用到此问题得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_k^2-x_k-1)-(x_{k-1}^2-x_{k-1}-1)}(x_k^2-x_k-1)=\frac{x_k\cdot x_{k-1}+1}{x_k+x_{k-1}-1},$$

故原问题的弦截法公式为：

$$\begin{cases}x_{k+1}=\dfrac{x_k\cdot x_{k-1}+1}{x_k+x_{k-1}-1}, & k=1,2,\cdots,\\ x_0=0,x_1=2.(\text{或其他初值}) & \end{cases}$$

………………………… （3 分）

Newton 迭代法一般公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

应用到此问题得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-x_k-1}{2x_k-1}=\frac{x_k^2+1}{2x_k-1},$$

故原问题的 Newton 迭代法公式为：

$$\begin{cases}x_{k+1}=\dfrac{x_k^2+1}{2x_k-1}, & k=0,1,2,\cdots,\\ x_0=0(\text{或其他初值}). & \end{cases}$$

……………. （3 分）

(2)、令迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$.

$\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可微。 …. （3 分）

对任意的 $x\in[1,+\infty)$， $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}\ge 1,$

即对任意的 $x\in[1,+\infty)$， $\varphi(x)\in[1,+\infty),$ …. （3 分）

又因为 $|\varphi'(x)|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{2}<1,$ …. （3 分）

所以，根据全局收敛性判据，对于任意大于 1 的初值，该 Picard 迭代法是收敛的。

得 分	
评卷人	

六、(共 15 分)

解：(1)、隐式 Euler 法：$y_{n+1}=y_n+hf_{n+1}$.

应用于该方程有计算格式 $y_{n+1}=y_n+h(-2y_{n+1}+x_{n+1})$

可得 $y_{n+1}=\dfrac{y_n+hx_{n+1}}{1+2h}$

因此：$$y(0.2)=y_1=\frac{y_0+hx_1}{1+2h}=\frac{1+0.2*0.2}{1+2*0.2}=\frac{1.04}{1.4}=\frac{26}{35}\approx 0.7428.$$

………………………………………………… （5 分）

(2)、想要线性二步法 p 阶收敛需要满足 $C_0=C_1=\cdots=C_p=0$，$C_{p+1}\neq 0$.

其中 $$\begin{cases} C_0=\sum_{i=0}^{2}\alpha_i\,,C_1=\sum_{i=0}^{2}(i\alpha_i-\beta_i)-\beta_0 \\ C_j=\dfrac{1}{j!}\sum_{i=1}^{2}i^{j-1}(i\alpha_i-j\beta_i),\ j=2,3,\cdots,p+1 \end{cases}$$

将 $\alpha_0=-b,\alpha_1=b-1,\alpha_2=1\neq 0\,,\beta_0=\dfrac{3b+1}{4},\beta_1=0,\beta_2=\dfrac{b+3}{4}$

代入可得：$C_0=0,\ C_1=0,\ C_2=0\ ,C_3=-\dfrac{b+1}{3},$

所以，如果收敛阶为 3 则必须有 $b=-1$，

（以上分析过程直接带系数公式或泰勒展开均可） …………. （8 分）

但此时第一特征多项式 $$\rho(\xi)=\sum_{i=0}^{2}\alpha_i\xi^i=(\xi-1)^2$$

的根为二重根 1,其模为 1 但不是单根，不满足根条件，此时方法不是零稳定的。所以不可能 3 阶收敛。因此，该线性二步法的收敛阶不超过 2 。 ………….
（2 分）