2.4 逻辑函数的卡诺图化简

2.4.1 代数法化简的主要困难

1、逻辑代数与普通代数的公式易混淆；

2、代数法化简技巧性强，依赖于经验（**配项法**）；

3、代数法化简得到的逻辑表达式是否最简，判断困难。

$$F = B\overline{C} + \overline{B}C + B\overline{D} + \overline{B}D$$

卡诺图法可以比较简便、直观地得到最简的逻辑表达式

2.4.1 卡诺图

卡诺图：将n变量的全部最小项都用小方块表示，并使**所有**最小项与其**所有**的**逻辑相邻最小项**在几何位置上也相邻地排列起来，所得到的图形为n变量的卡诺图。

逻辑相邻最小项：两个最小项只有一个变量互为反变量。n变量最小项的逻辑相邻最小项有n个。

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$ 与 $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻。

m_6	m_7

2.4.1 卡诺图

两变量卡诺图

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

2.4.1 逻辑函数的卡诺图表示

根据最小项逻辑表达式画卡诺图

方法：逻辑函数包含有哪几个最小项，就在卡诺图相对应的方格内填1，其余各方格填0。

例如：逻辑函数 $F(A,B,C)=\sum m(3,5,6,7)$ ，可在3变量卡诺图对应的m_3，m_5，m_6，m_7方格内填1，其余方格填0。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

2.4.1 逻辑函数的卡诺图表示

逻辑函数真值表

	A B C	L
m_0	0 0 0	0
m_1	0 0 1	1
m_2	0 1 0	0
m_3	0 1 1	1
m_4	1 0 0	1
m_5	1 0 1	1
m_6	1 1 0	0
m_7	1 1 1	1

逻辑函数式最小项表达式

$$L = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

$$= m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7$$

逻辑函数的卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

此外，逻辑函数还有逻辑图、波形图、HDL语言等表示形式。

2.4.1 逻辑函数的卡诺图表示

例 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$$
$$(A+\bar{B}+\bar{C}+D)(A+B+C+D)$$

解　1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\bar{L}=ABCD+AB\bar{C}D+A\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$=\sum m(15,\ 13,\ 10,\ 6,\ 0)$$

2. 填写卡诺图

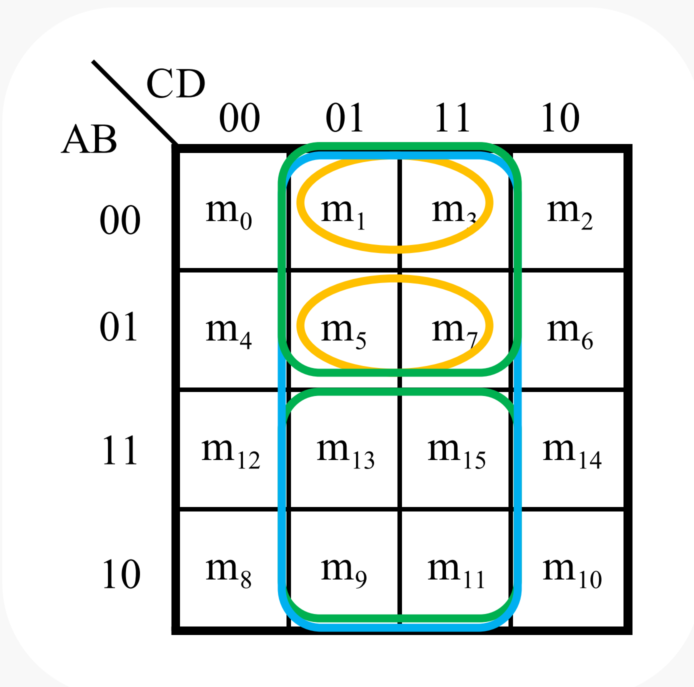
L: AB \ CD	00	01	11	10
00	0	**1**	**1**	**1**
01	**1**	**1**	**1**	0
11	**1**	0	0	**1**
10	**1**	**1**	**1**	0

反之，是不是可以利用卡诺图求得逻辑函数的**或与式？**

2.4.2 逻辑函数的卡诺图化简

1、用卡诺图化简逻辑函数卡诺图化简的依据

（卡诺图的基本特点：逻辑相邻最小项排列在一起）



$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD = \bar{A}\bar{B}D$$

$$\bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD = \bar{A}BD$$

$$\bar{A}\bar{B}D + \bar{A}BD = \bar{A}D$$

$$A\bar{B}D + ABD = AD$$

$$\bar{A}D + AD = D$$

2、化简的步骤

(1) 将逻辑函数转换为最小项表达式；

(2) 按最小项表达式填卡诺图，凡式中包含了的最小项，其对应方格填1，其余方格填0；

(3) 合并最小项，即将相邻的1方格圈成一组(包围圈)，每一组含2^n个方格，对应每个包围圈写成一个新的乘积项；

(4) 将所有包围圈对应的乘积项相加。

2.4.2 逻辑函数的卡诺图化简

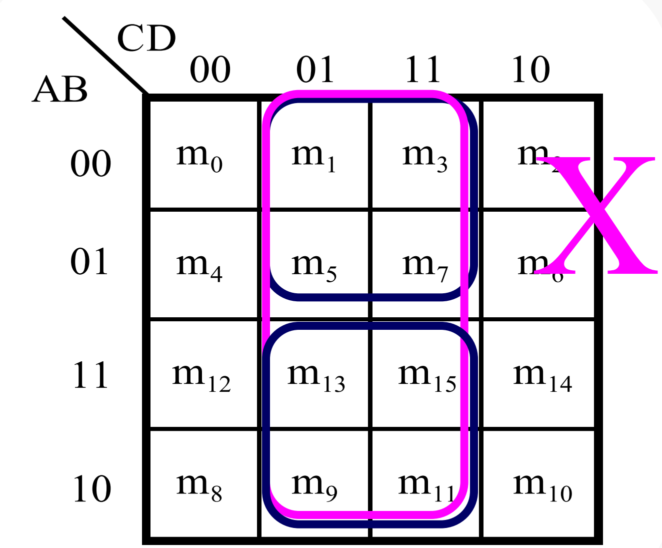
3、画包围圈时应遵循的原则

1. 包围圈内的方格数一定是2^n个，且包围圈必须呈矩形。

2. 循环相邻特性包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻。

3. 同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有原有包围圈未曾包围的方格。

4. 一个包围圈的方格数要尽可能多，包围圈的数目要可能少。

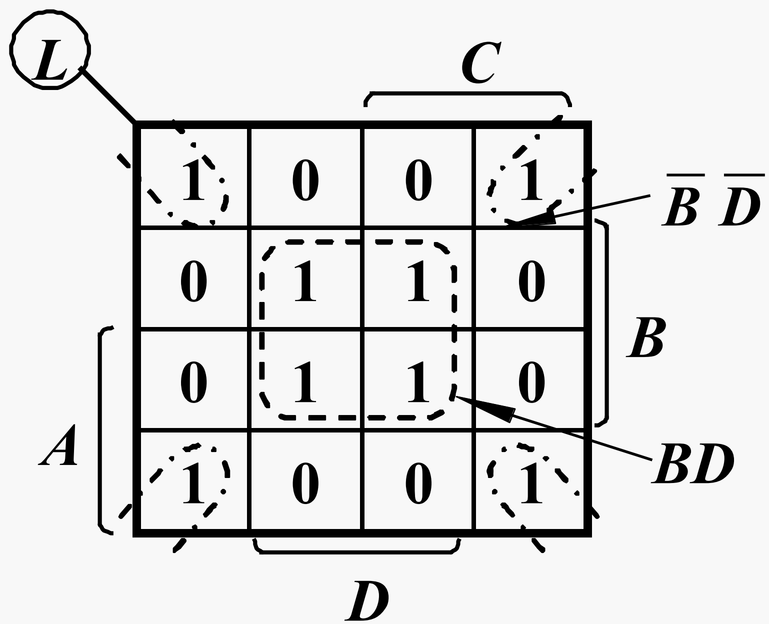


例：用卡诺图法化简逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

解：（1）由L 画出卡诺图。

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

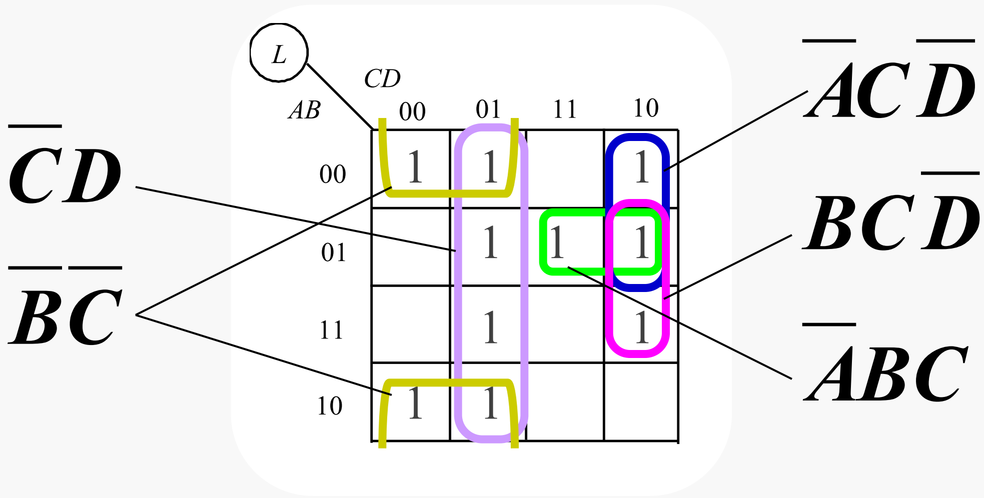


$$L=BD+\overline{B}\,\overline{D}$$

2.4.2 逻辑函数的卡诺图化简

例 用卡诺图化简

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,13,14)$$



$$L=\overline{C}D+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}C\overline{D}+BC\overline{D}$$

2.4.2 逻辑函数的卡诺图化简

例 用卡诺图化简

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim 3,5\sim 7,8\sim 11,13\sim 15)$$

$\overline{B}$

L: AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

D

C

$$L=D+C+\overline{B}$$

圈0

L: AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

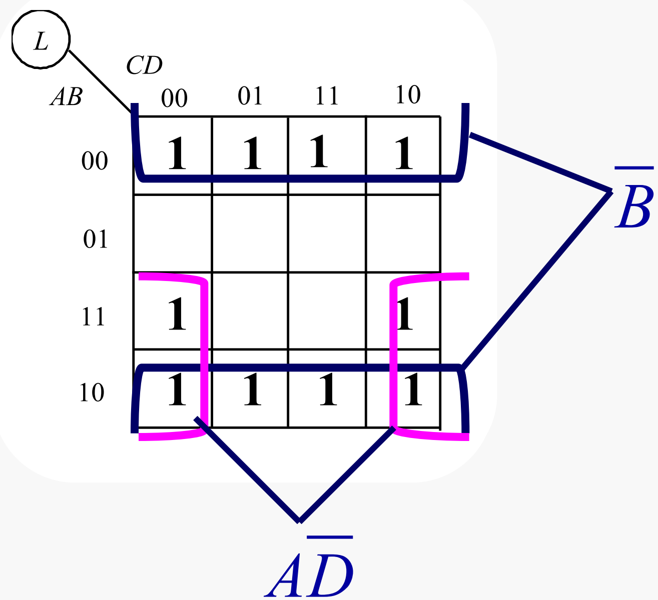
$$\overline{L}=B\overline{C}\,\overline{D}$$

$$L=D+C+\overline{B}$$

2.4.2 逻辑函数的卡诺图化简

例 将逻辑函数 $L=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}+ABC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C$ 化简为最简与或表达式。

$$L=\bar{B}+A\bar{D}$$



例：用卡诺图法化简下面的两个逻辑函数

$$F = B\overline{C} + \overline{B}C + B\overline{D} + \overline{B}D$$

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1		
11		1	1	
10	1	1	1	1

2.4.3 含无关项的逻辑函数及其化简

无关项：在真值表内对应于变量的某些取值下，函数的值可以是**任意的**，或者这些变量的取值根本**不会出现**，这些变量取值所对应的最小项称为无关项。

如：A=1表示电机正转；B =1表示电机反转；C =1表示电机停转。显然ABC不可能等于000、011、101、110、111。

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+ABC=0$$

如：1010、1011、1100、1101、1110、1111等6种码字均不属于8421BCD码。

2.4.3 含无关项的逻辑函数及其化简

卡诺图化简时无关项的处理方法：

（1）填函数的卡诺图时在无关项对应的方格内填符号 **“×”** ，逻辑函数式中用 **“Φ” 或 “d”** 表示无关项。

（2）化简时可根据需要，**可视为 “1” 或 “0”** ，使函数化到最简。

2.4.3 含无关项的逻辑函数及其化简

例 要求设计一个逻辑电路，能够判断8421BCD码所表示的十进制数是奇数还是偶数。当十进制数为奇数时，电路输出为1；当十进制数为偶数时，电路输出为0。

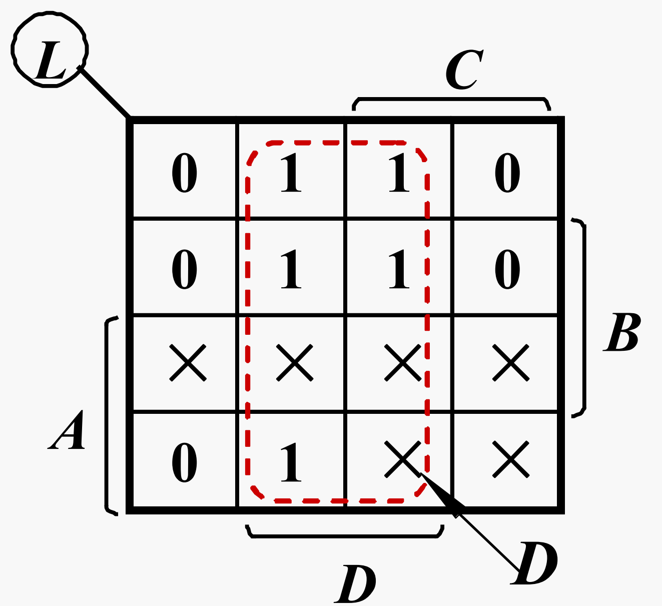
解:

(1)列出真值表

(2)画出卡诺图

(3) 卡诺图化简

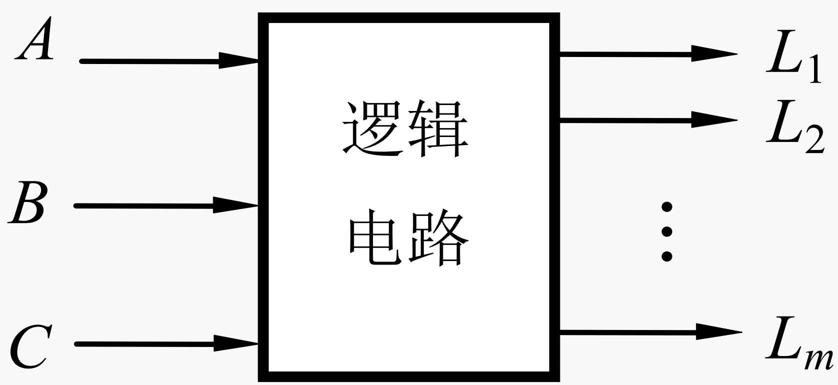
$$L = D$$



ABCD	L
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	1
1010	×
1011	×
1100	×
1101	×
1110	×
1111	×

2.4.4 多输出逻辑函数的化简

- 含有两个或者两个以上的输出端。
- 化简时，**不能单纯地追求各个单一函数的最简**，而是应该统一考虑，尽可能地共享那些公共乘积项，从而**降低整体电路的总成本**。



2.4.4 多输出逻辑函数的化简

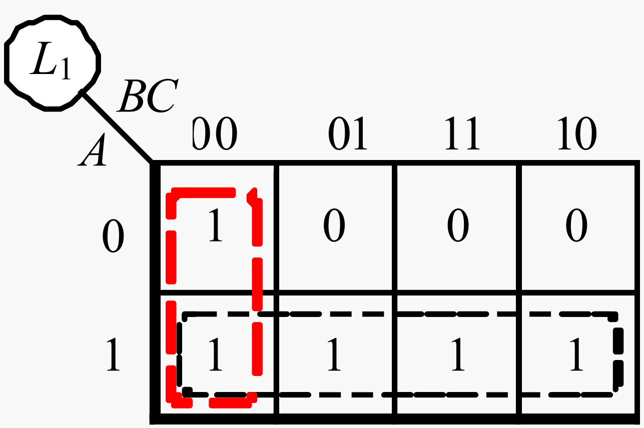
例 化简下列多输出逻辑函数，画出逻辑图，并与各函数单独化简的结果进行对比。

$$L_1(A,B,C)=\sum m(0,4,5,6,7)$$

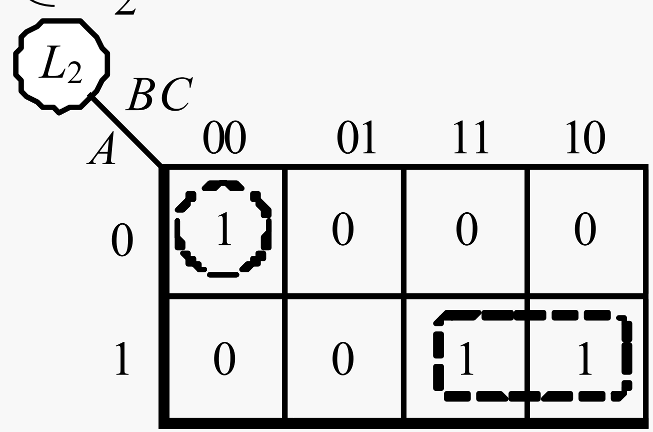
$$L_2(A,B,C)=\sum m(0,6,7)$$

解：各自单独化简，不考虑共享乘积项

$$\begin{cases} L_1 = A+\overline{B}\,\overline{C} \\ L_2 = AB+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \end{cases}$$



(a)



(b)

2.4.4 多输出逻辑函数的化简

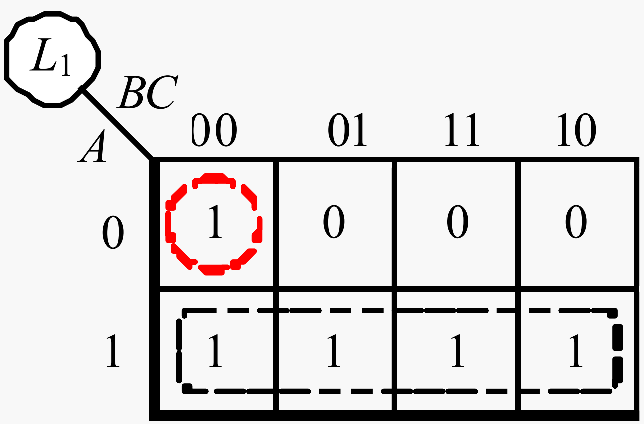
例 化简下列多输出逻辑函数，画出逻辑图，并与各函数单独化简的结果进行对比。

$$L_1(A,B,C)=\sum m(0,4,5,6,7)$$

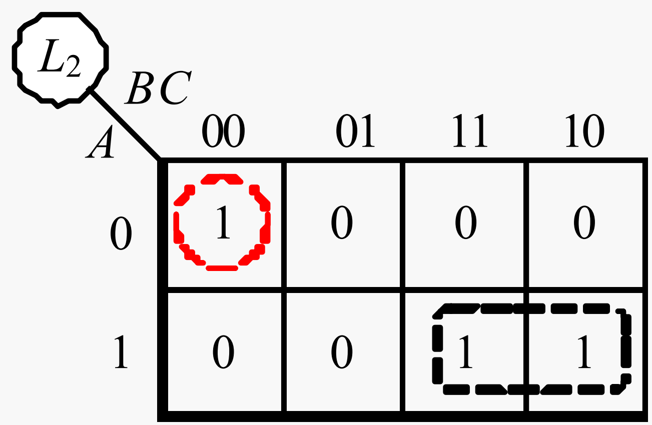
$$L_2(A,B,C)=\sum m(0,6,7)$$

解：考虑共享乘积项

$$\begin{cases} L_1 = A+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \\ L_2 = AB+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \end{cases}$$



（a）



（b）

2.4.4 多输出逻辑函数的化简

画出逻辑图

$$\begin{cases} L_1 = A + \overline{B}\,\overline{C} \\ L_2 = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 = A + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \\ L_2 = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \end{cases}$$