

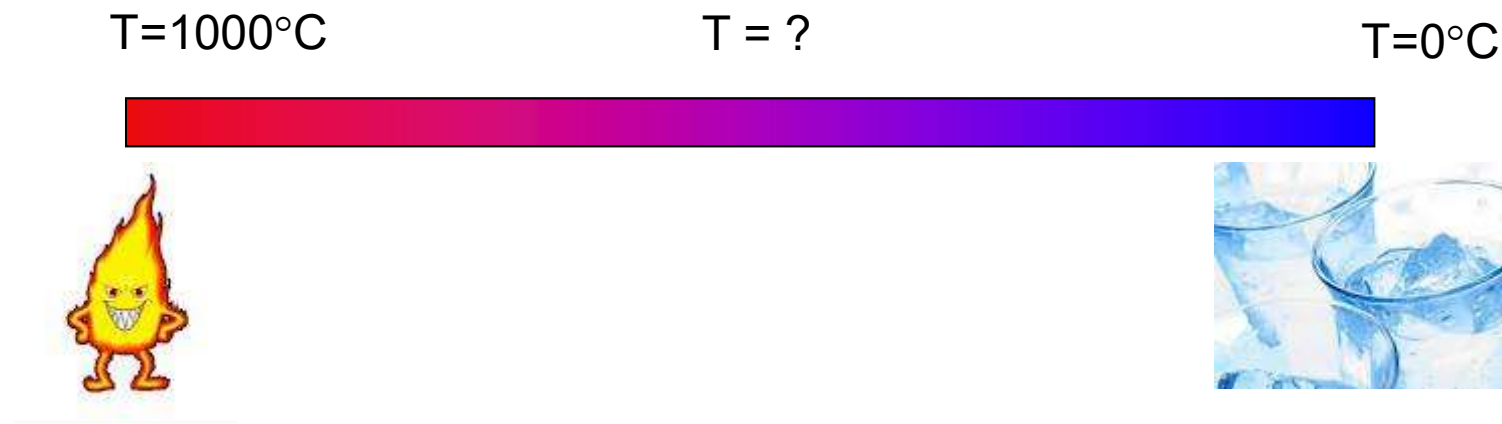
线性但个数多

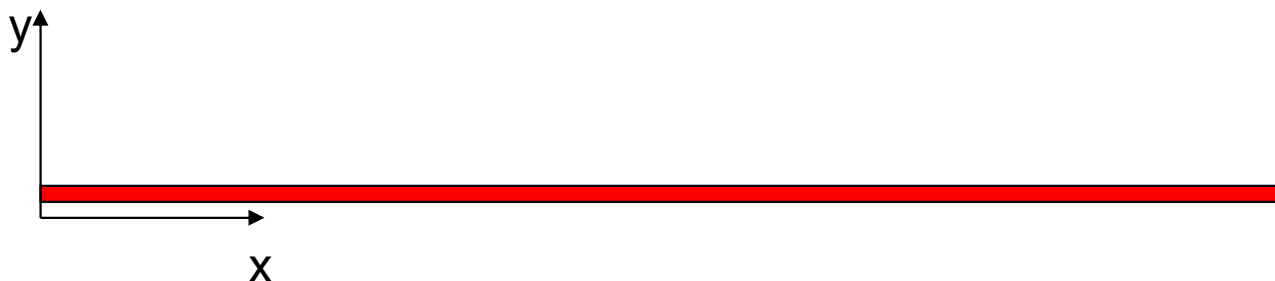
第三章 线性方程组的数值解法

(1) 直接法

1. 线性代数方程组

- 例1



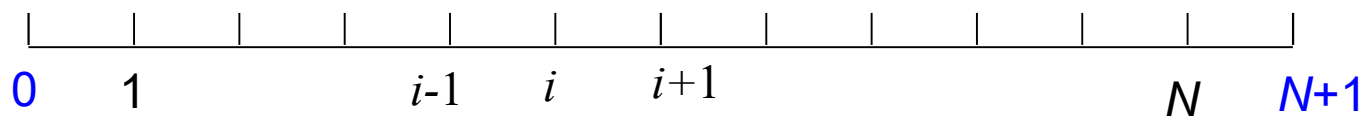


数学模型：傅里叶定律

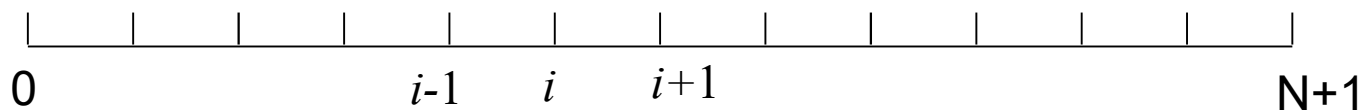
$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \qquad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

k 为常数

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad T(x=0) = 1000 \qquad T(x=1) = 0$$



$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{x=i\Delta x} \Rightarrow \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad i=1, 2, \dots, N$$



$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{x=i\Delta x} \Rightarrow \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$-2T_1 + T_2 = -T_0$$

$$T_1 - 2T_2 + T_3 = 0$$

$$T_2 - 2T_3 + T_4 = 0$$

...

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0$$

...

$$T_{N-2} - 2T_{N-1} + T_N = 0$$

$$T_{N-1} - 2T_N = -T_{N+1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -T_{N+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

n 阶线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

A为非奇异矩阵, 这时方程有唯一解

$$Ax=b$$

直接法

利用一系列递推公式
计算**有限步**能直接得
到方程组的**精确解**
(不考虑舍入误差)

迭代法

用一**极限过程**去逼近精
确解的方法，按一定法
则逐步求出**近似解**

2. 解线性方程组的直接方法

2.1 Cramer方法

如果线性方程组的系数行列式不为零，即 $\det(A) \neq 0$ ，则该方程组有唯一解。由克莱姆 (Cramer) 法则，其解为

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

这种方法需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式并作 n 次除法，而每个 n 阶行列式计算需作 $(n-1) \times n!$ 次乘法，计算量十分惊人。如 $n = 30$ ，需 2.38×10^{35} 次乘法。可见其在理论上是绝对正确，但在 n 较大时，在实际计算中确实不可行的。

2.2 Gauss 消去法

n 阶线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

转化为等价的（同解）的三角形方程组。

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = g_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = g_2 \\ \cdots \\ b_{nn}x_n = g_n \end{cases}$$

2+2+3

1

1 2 3

1+4+9

Gauss 消去法计算过程

统一记号: $a_{ij} \rightarrow a_{ij}^{(1)}, b_i \rightarrow b_i^{(1)}$

原方程 $A^{(1)}X = b^{(1)}: A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}], b^{(1)} = (b_1^{(1)}, \dots, b_n^{(1)})^T$

若 $a_{11}^{(1)} \neq 0$:

(第二行) - (第一行) $\times a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \rightarrow$ (新第二行)

(第三行) - (第一行) $\times a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \rightarrow$ (新第三行)

.....

(第 n 行) - (第一行) $\times a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \rightarrow$ (新第 n 行)

相当于第 i 个方程 - 第一个方程 \times 数 \rightarrow 新的第 i 方程——
同解！第一方程不动！

Gauss 消去法计算过程

上述消元过程除第一个方程不变以外,第**2 - n** 个方程全消去了变量 x_1 , 而系数和常数项全得到新值:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(2)} x_2 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

左乘一个矩阵

Gauss 消去法计算过程 (续1)

得到新同解方程组: $A^{(2)}x = b^{(2)}$

$$\text{其中 } A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\text{这里 } a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} \quad m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$$

Gauss 消去法计算过程 (续2)

第二步消元： 若 $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ，对除第一行第一列外的子阵作上计算：

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)} \quad m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \cdot m_{i2} \quad i, j = 3, 4, \dots, n$$

Gauss 消去法计算过程 (续3)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)} = b_3^{(3)} \\ \vdots \\ a_{n3}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)} = b_n^{(3)} \end{array} \right.$$

若 $a_{33}^{(3)} \neq 0$, 则此消去过程可依次进行下去。

Gauss 消去法计算过程 (续4)

第 $n-1$ 步消去过程后, 得到等价三角方程组。

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

Gauss 消去法计算过程 (续5)

系数矩阵与常数项:

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

计算出 $A^{(n)}$, $b^{(n)}$ 的过程称消去过程。

消去过程算法

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} \cdots a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & 0 & a_{ij}^{(k+1)} \cdots & b_j^{(k+1)} \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \quad k+1 \leq i, j \leq n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} (a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)})$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} (a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}) \quad k+1 \leq i, j \leq n$$

$$a_{ik}^{(k)} = 0 \quad k+1 \leq i \leq n \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

回代过程算法

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{1i}^{(1)}x_i + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{ii}^{(i)}x_i + \cdots + \cdots + a_{in}^{(i)}x_n = b_i^{(i)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)}x_j) / a_{ii}^{(i)}$$

回代过程
 $i = n-1, n-2, \dots, 1$

例题分析

例 1：用消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 4x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

解：用增广矩阵表示求解过程

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

② - ① $\frac{2}{1}$

$$(-2) \times r_1 + r_3 \rightarrow r_3, \quad r_2 + r_3 \rightarrow r_3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20$$

$$-2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = -7$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 4 \\ & 2 & 20 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 2 & 20 \\ -2 & 8 & -7 & -7 \end{array} \right]$$

$$(2) - (1) \frac{4}{2} \quad (3) - (1) \frac{-2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 3 \end{array} \right]$$

$$(3) - (2) \frac{9}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Gauss消去法乘/除法计算量

消去第一列的 $n-1$ 个系数要计算

$n*(n-1)$ 个乘法。

..... 二 ... $n-2$ $(n-1)*(n-2)$

总计 $\sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{n}{3}(n^2 - 1)$

除法 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ 回代总计算量 $\frac{n(n+1)}{2}$

总乘除法共 $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{1}{3}n$ ($n=30$, 为9890)

高斯主元素消去法

每次都得比

在高斯法消元过程中可能出现 $a_{kk}^{(k)} = 0$ 的情况，这时消去法将无法进行；即使主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 但很小，用其作除数，也会导致其他元素数量级的严重增长和舍入误差的扩散。

为避免此种情况的发生，可通过交换方程的次序，选取绝对值大的元素作主元。基于这种想法导出了主元素法。

$m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ 时避免 m_{ik} 很小，从而只要取

$$a_{kk}^{(k)} = \max \{a_{ij}^{(k)}, i, j = k, k+1, \dots, n\}$$

称主元素Gauss消去法；

或 $a_{kk}^{(k)} = \max \{a_{ik}^{(k)}, i = k, k+1, \dots, n\}$

称列主元Gauss消去法。

例题分析

例3：方程组
$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$$

四位有效数字精确解为 $x^* = (-0.4904, -0.05104, 0.3675)^T$

解：（1）高斯消去法

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{22}=-2000]{m_{21}=-1000}$$

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 4001 & 6006 & 2003 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=1.997} \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 0 & 5.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = (-0.400, -0.09989, 0.4000)^T$$

例题分析（续）

(2) 交换行，避免绝对值小的主元作除数。（列主元素法）

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{22}=-0.0005]{m_{21}=0.5000}$$

$$\begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.712 & 1.801 & 0.500 \\ 0 & 2.001 & 3.003 & 1.002 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=0.6300}$$

$$\begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.712 & 1.801 & 0.500 \\ 0 & 0 & 1.868 & 0.687 \end{bmatrix}$$

$$x = (-0.4900, -0.05113, 0.3678)^T$$

2.3 LU 分解方法

Gauss消去法的矩阵表示

每一步消去过程相当于左乘初等变换矩阵 L_k

记: $A^{(2)} = L_1 A^{(1)}$, $b^{(2)} = L_1 b^{(1)}$

其中

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} & & \\ & \dots & \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_1 \\ \hline -m_{21} \times \textcircled{1} + \textcircled{2}, \\ -m_{31} \times \textcircled{1} + \textcircled{3} \end{array}$$

Gauss 消去法的矩阵表示

记: $A^{(3)} = L_2 A^{(2)}$, $b^{(3)} = L_2 b^{(2)}$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & \\ & \dots & \dots & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \\ i = 3, 4, \dots, n$$

~~$m_{32} \times (2) \rightarrow (3)$~~

$$A^{(3)} = L_2 L_1 A^{(1)} \quad , \quad b^{(3)} = L_2 L_1 b^{(1)}$$

Gauss 消去法计算过程

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & \cdots & -m_{i+1,i} & 1 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & & -m_{ni} & & 1 \end{pmatrix} \quad L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \\ 0 & & m_{i+1,i} & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & m_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

i列 i列

$$A^{(n)} = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A^{(1)}$$

$$b^{(n)} = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 b^{(1)}$$

Handwritten notes:

$$A_n = \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{array} \right]$$

= U

LU形式

$$A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = LA^{(n)} = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & m_{22} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & m_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

例题分析

例2：对于例1，由增广矩阵表示消元过程有

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \dots, n)$$

$\Rightarrow m_{21} = 0, m_{31} = 2, m_{32} = -1$, 故有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = LU.$$

$$A^{(n)} = L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A^{(1)}$$

$$A = A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = L A^{(n)} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

LU 分解

设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵，若 \mathbf{A} 的顺序主子式 A_i 均不为零，则矩阵存在唯一的LU(Doolittle 杜利特尔)分解。

由 *Gauss* 消去法加上列主元（或全主元）有 LU 分解：

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

直接计算 A 的 LU 分解(例)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{pmatrix}$$

直接计算 A 的 LU 分解(例) (续)

$$\left[\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{array} \right]$$

u1 行 $u_{11} = a_{11}, u_{12} = a_{12}, u_{13} = a_{13}, u_{14} = a_{14}; u_{1j} = a_{1j}$

l 1 列 $l_{21} = a_{21}/u_{11}, l_{31} = a_{31}/u_{11}, l_{41} = a_{41}/u_{11}; l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$

u2 行 $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}, u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14};$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}, \quad j=2, \dots, n$$

l 2 列 $l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22}, l_{42} = (a_{42} - l_{41}u_{12})/u_{22};$

$$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}u_{12})/u_{22} \quad i=3, \dots, n.$$

一般计算公式

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, \dots, n$$

对 $k = 2, 3, \dots, n$ 计算

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, \quad j = k, \dots, n$$

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk}, \quad i = k+1, \dots, n$$

计算量与 Gauss 消去法同.

LU 分解求解线性方程组

$$AX = b \rightarrow LY = b, UX = Y$$

$$LY = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

$$l_{21}y_1 + y_2 = b_2$$

$$UX = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

$$u_{mn} x_n = y_n$$

LU 分解求解线性方程组 (续1)

1, 解 Y: $y_1 = b_1$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

2, 解 X: $x_n = y_n / u_{nn}$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) / u_{ii},$$

$$i = n-1, \dots, 1$$

LU 分解求解线性方程组 (续2)

例：用LU分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

解：用分解计算公式得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = LU.$$

求解 $Ly = (14, 18, 20)^T \Rightarrow y = (14, -10, -72)^T,$

$$Ux = (14, -10, -72)^T \Rightarrow x = (1, 2, 3)^T.$$

LU 分解求解线性方程组 (续2)

例：用LU分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

解：用分解计算公式得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = LU.$$

求解 $Ly = (14, 18, 20)^T \Rightarrow y = (14, -10, -72)^T,$

$$Ux = (14, -10, -72)^T \Rightarrow x = (1, 2, 3)^T.$$