

样卷 (闭卷)

院(系)_____专业班级_____学号_____姓名_____

考试时可以用科学计算器

考试时间: 2 小时 30 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得 分	
评卷人	

一、(20 分, 每空 2 分) 填空题

1. 已知某观测数据 0.61809 的绝对误差为 0.006, 则该观测数据有_____位有效数字。

2. 设 $X = (-2, 5, -3, 8)$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, 则 $\|X\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $\text{cond}(A)_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 设 $x_j = j$ ($j = 0, 1, 2$) 为互异插值节点, $l_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数, 则

$$\sum_{j=0}^2 x_j^2 l_j\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

4. 已知求积公式 $\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(1) + Af\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{6}f(2)$ 至少具有零次代数精度, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 对矩阵 $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 42 \end{bmatrix}$ 进行 LU 分解, 则其中单位下三角矩阵

$L = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. Gauss 求积公式 $\int_1^2 f(x)dx \approx Af(x_0)$ 中的 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$, $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 方法使用_____公式进行预估, _____公式进行校正。

得 分	
评卷人	

二、(共 15 分)

(1) 对于线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases},$$

分别写出求解该方程的 Jacobi 迭代及 Gauss-Seidel 迭代公式，并判断其敛散性。

(2) 对于一般的线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

若其 Jacobi 迭代收敛，那么其 Gauss-Seidel 迭代公式是否一定收敛？为什么？

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

三、(共 10 分) 应用变步长梯形法计算定积分

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+3} dx$$

的近似值，步长 h 从 4 逐步二分减小到 1 为止，计算过程中保留小数点后 2 位即可。

得 分	
评卷人	

四、(共 20 分) 1. (10 分) 已知函数表：

x	-1	0	1
$f(x)$	10	5	2

(1) 试求过这 3 点的 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$ ；

(2) 若还已知条件 $f'(1) = 0$ ，求其三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ ，并写出余项表达式。

2. (10 分) 已知如下测量数据：

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	8	5	1	4	9

求 $f(x)$ 的最小二乘拟合多项式 $p(x) = ax^2 + b$ (其中 a, b 为拟合系数)。

(第四题答案请填写在第 4 页)

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

五、(共 20 分)试解答下列问题:

(1) 分别写出数值求解 $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ 在 $[0, 2]$ 之间的根的弦截法和 Newton 迭代法的具体计算公式;

(2) 任取初值 $x_0 \geq 1$, 求 $x^2 = 2$ 的根 $\sqrt{2}$ 的 Picard 迭代法:

$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 是否收敛到 $\sqrt{2}$? 为什么?

得 分	
评卷人	

六、(共 15 分) (1)写出用隐式 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) + x, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的公式，并取步长 $h = 0.2$ ，计算一步得到 $y(0.2)$ 的近似值；

(2) 证明求解 $y' = f(x, y)$ 的线性二步法

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - by_n = \frac{h}{4}[(b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n]$$

的收敛阶不超过 2 阶(其中 b 为实系数)。