

科学计算引论作业(二)

谢悦晋 U202210333

Sept 22nd, 2023

2.3 设 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一阶连续可微, 方程 $x = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内有一根 x^* , 且

$$|\varphi'(x) - 3| < 1, \quad \forall x \in [a, b],$$

试构造一个局部收敛于 x^* 的迭代公式

解: $f(x) = \varphi(x) - x$, 事实上由题目条件可知 $1 < \varphi'(x) - 1 = f'(x) < 3$

修改迭代方程: $x = x - \lambda f(x) = \phi(x)$

确定 λ 取值范围: $|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow \lambda \in (0, \frac{2}{3})$

取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 迭代函数 $\phi(x) = x - \frac{1}{2}f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\varphi(x)$

2.5 已知方程 $x + \sin x - 1 = 0$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 附近有唯一根, 试选择常数 a 使得迭代格式

$$x_{k+1} = \frac{ax_k - \sin x_k + 1}{1 + a}$$

在求解其方程时能快速收敛, 并用该迭代格式求其方程的根, 要求精确到 10^{-8} .

解: 设迭代函数 $\varphi(x) = \frac{ax - \sin x + 1}{1 + a}$

$|\varphi'(x)| = \left| \frac{a - \cos x}{1 + a} \right| < 1 \Rightarrow a > \frac{\cos x - 1}{2} \Rightarrow a > 0$

取 $a = 1$, 带入迭代函数: $\varphi(x) = \frac{x - \sin x + 1}{2}$, 迭代过程如下:

```

1 def f(x):
2     return 0.5*x - 0.5*math.sin(x) + 0.5
3
4
5 a = 0.5
6 while(True):
7     temp = a
8     print(a)
9     a = f(a)
10    if math.fabs(temp - a) < 10e-8:
11        print(a)
12        break

```

在 2023.09.22 16:23:18 于 3ms内执行

```

0.5
0.5102872306978985
0.5109296624710453
0.5109706344242322
0.5109732508875731
0.5109734179885077
0.5109734286604979

```

2.6 应用Newton迭代法求解方程 $x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正根要求精确到 10^{-8} .

解：从图像可知：最小正根在 $x = 1.25$ 附近

令 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x$, $f'(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$, 则迭代公式如下：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

代码及计算结果如下：

```

1 def f(x):
2     return 2*math.sin(x + math.pi / 3) - x
3
4 def f_(x):
5     return 2*math.cos(x + math.pi / 3) - 1
6
7
8 a = 1.5
9 while(True):
10    temp = a
11    print(a)
12    a = a - f(a)/f_(a)
13    if math.fabs(temp - a) < 10e-8:
14        print(a)
15        break

```

在 2023.09.22 16:22:22 于 2ms内执行

```

1.5
1.3569860027364886
1.3520508434053087
1.3520442115120765
1.3520442115000575

```