

科学计算引论作业(五)

谢悦晋 U202210333

Oct 22nd, 2023

4.2 给定 $f(x) = \sinh x$ 及插值节点 $x_0 = 0.40, x_1 = 0.55, x_2 = 0.70, x_3 = 0.85, x_4 = 1.00$, 试构造 4 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.596)$ 的逼近值, 并指出其绝对误差。

解:

注意到插值点实际上是等间距的, 故可以应用等距节点时的 Newton 插值公式, 差分表如下: 由差商表易得 Newton 插值多项式:

表 1: 4.2 差分表

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.40	0.410752				
0.55	0.578151	0.167399			
0.70	0.758583	0.180432	0.013033		
0.85	0.956115	0.197532	0.017100	0.004067	
1.00	1.175201	0.219085	0.021553	0.004453	0.000385

$$\begin{aligned} N_4(x) = N_4(x_0 + 0.15t) &= 0.410752 + 0.167399t + \frac{0.013033}{2!}t(t-1) + \frac{0.004067}{3!}t(t-1)(t-2) \\ &\quad + \frac{0.000385}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3) \end{aligned}$$

计算结果如下:

$$N_4(0.596) = N_4(0.4 + 0.15\frac{98}{75}) = 0.6319171542, |f(0.596) - N_4(0.596)| = 3.523342521072337 \times 10^{-7}$$