启明选拔考试数学部分历年题合集

2023 年 8 月 8 日

写在开头：

整理了一下历年的启明考试真题以供参考，想通过启明考试转专业的同学可以仔细看看，具体的备考策略可参见转专业群群文件《转专业-数学（时间匆忙先写一点）》，祝各位考试顺利!

2022年启明考试数学部分

一.填空题(每题9分)

1.已知 $\beta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 计算 $\left[\beta^{12}\right]$ ($[x]$为x的整数部分).

解: $\beta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根, 故: $x^2=x+1, x^4=(x+1)^2=x^2+2x+1=3x+2$, $x^{12}=(3x+2)^3=27x^3+54x^2+36x+8=27x(x+1)+54(x+1)+36x+8=27x^2+117x+62=27(x+1)+117x+62=144x+89 \Rightarrow \beta^{12}=72\sqrt{5}+161\in(321,322)$, 故: $\left[\beta^{12}\right]=321$.

注释: 考察对偶结构 $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 也是一个重要思想,

分析: 熟知Fibonacci i 数列通项: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,

$$\left(\begin{array}{l} a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, a_1=a_2=1, \text{则特征方程: } x^2=x+1, x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ \text{则 }: a_n=C_1\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ \text{代入初值条件得: } a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \end{array}\right),$$

解: 令 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, 则:

$a_{12}=144=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{12}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12}\right],\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{12}=144\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12},$

注意到: $144\sqrt{5}=\sqrt{103680}\in(321.5,322)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12}\approx(0.618)^{12}\approx\frac{1}{2^{12}}$, 故: $\left[\beta^{12}\right]=321.$

2.已知: $\beta_1=3,\beta_{n+1}=\beta_n^2-3\beta_n+4$, 计算: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_i-1}$

解: $\beta_{n+1}=\beta_n^2-3\beta_n+4\Rightarrow\beta_{n+1}-2=\beta_n^2-3\beta_n+2=(\beta_n-2)(\beta_n-1)$,

则: $\frac{1}{\beta_{n+1}-2}=\frac{1}{(\beta_n-2)(\beta_n-1)}=\frac{1}{\beta_n-2}-\frac{1}{\beta_n-1}$, 即: $\frac{1}{\beta_n-1}=\frac{1}{\beta_n-2}-\frac{1}{\beta_{n+1}-2}$,

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_i-1}=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_{n+1}-2}$,

下证: β_n 单调递增趋于 $+\infty$, 注意到: $\beta_{n+1}-\beta_n=\beta_n^2-4\beta_n+4=(\beta_n-2)^2>0$,

$\Rightarrow\beta_{n+1}-\beta_1=\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i-2)^2>\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_1-2)^2=n$,故: $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=+\infty$, 即: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_i-1}=1$.

3.已知: $a^2+b^2=5$, 求 $2a+3b$ 的最大值,

解:

Solution 1: $2a+3b\le\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}(cauchy)=\sqrt{65}$

Solution 2: $2a+3b=2\sqrt{5}\cos\theta+3\sqrt{5}\sin\theta\le\sqrt{65}$.

4.已知: $\begin{cases}x+\sin x\cos x-1=0\\2\cos y-2y+\pi+4=0\end{cases}$, 求 $\sin(2x-y)$.

解: $\begin{cases}x+\sin x\cos x-1=0\\2\cos y-2y+\pi+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\sin 2x-2=0\\y-\cos y-\frac{\pi}{2}-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\sin 2x-2=0\\y-\frac{\pi}{2}+\sin(y-\frac{\pi}{2})-2=0\end{cases}$,

观察上式易得同构: $2x=y-\frac{\pi}{2}$, 下证仅有此唯一同构

注意到: $h'(x)=(2x+\sin 2x-2=0)'=2+2\cos 2x\ge 0$,$h(x)$单调增

即根是唯一的，因此$2x=y-\frac{\pi}{2}$是唯一解

故: $\sin(2x-y)=-1$. .

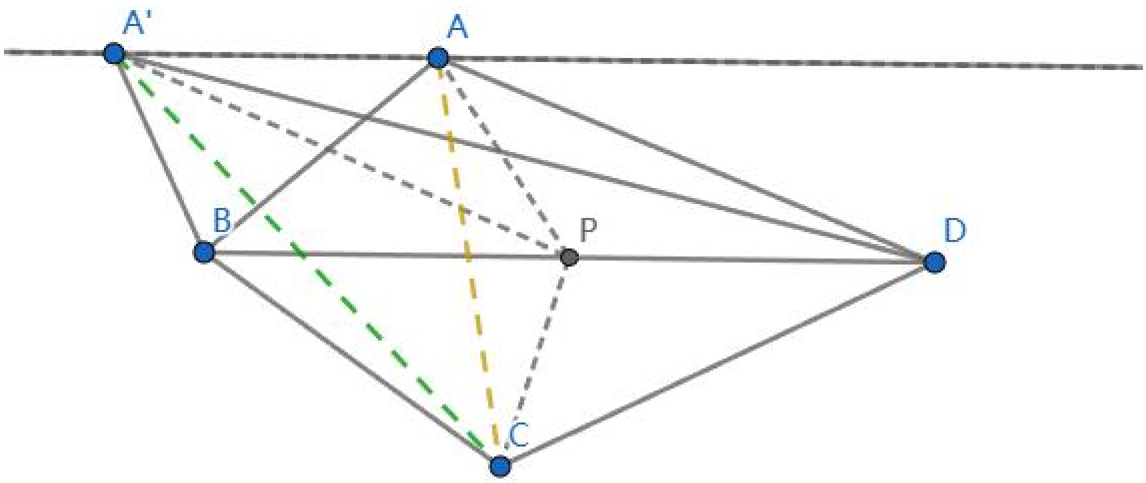
5.已知: $f(1)=2022,\forall n>1,n\in\mathbb{N}$, 有: $\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=n^2f(n)$, 求: $f(2022)$.

解: $\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=n^2f(n)\\\sum\limits_{k=1}^{n+1}f(k)=(n+1)^2f(n+1)\end{cases}\Rightarrow f(n+1)=(n+1)^2f(n+1)-n^2f(n)$,

即: $\left(n^2+2n\right)f(n+1)=n^2f(n)\Rightarrow\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{n}{n+2}$,

故: $f(2022)=f(1)\prod\limits_{k=1}^{2021}\frac{k}{k+2}=2022\cdot\frac{2}{2022\cdot2023}=\frac{2}{2023}$.

6. 定义 $\mathbb{C}$ 为复数集, 集合 $A=\left\{z \mid z^{18}=1, z \in \mathbb{C}\right\}, B=\left\{w \mid w^{48}=1, z \in \mathbb{C}\right\}$,
求: $\operatorname{card}[\{zw \mid z \in A, w \in B\}]$.
解: 由棣莫弗定理: $z=e^{\frac{2k\pi}{18}i}=\cos\frac{2k\pi}{18}+i\sin\frac{2k\pi}{18}, w=e^{\frac{2k'\pi}{48}i}=\cos\frac{2k'\pi}{48}+i\sin\frac{2k'\pi}{48}$,
$zw=e^{\frac{2(8k+3k')}{144}i\pi}$, 注意到 8 与 3 互质, 则根据裴蜀定理, $8k+3k'$ 可以取得任意整数值, $k, k' \in \mathbb{Z}$
$8k+3k' \in \mathbb{Z}$, 且 $8k+3k'$ 可以取到 $[0,143]$ 的任意值, 故: zw 一共有 144 个.
7. 在一个凸四边形 $ABCD$ 中存在点 P, 满足 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S\triangle_{PCD}=S\triangle_{PDA}$, $S_{\triangle ABC}=\alpha S_{\triangle ADC}$, 求: α.
注释: 本题有误, 考察如下情况:BD平分四边形$ABCD$的面积，P为BD中点，注意到A'在过A平行BD的直线上运动时α的值并不确定



8. 三位数中任意两个数字之和都能被第三个数整除, 求这样的三位数的个数
解:
case 1 : 该三位数各位数字相等, 显然有 9 个,
case 2 : 该三位数各位数字不等, 有: $(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)$, 一共 $3A_3^3=18$ 个,
case 3 : 该三位数有且仅有 2 位数相同, 有: $(1,1,2),(2,2,4),(3,3,6),(4,4,8)$, 一共 $4C_3^1=12$ 个, 故这样的三位数有 : $9+18+12=39$ 个.

二.解答题(12分)

请用3种方法证明: $\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 \geq \alpha \cdot \beta \cdot \gamma\left(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{+}\right)$.

解:

法一：

根据基本不等式 $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha \beta}$, 故: $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\eta}{4}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\eta}{2}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\alpha \beta} \sqrt{\gamma \eta}}=\sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta}$,

令 $\eta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, 有: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$, 证毕

法二：

令 $\alpha=x^3, \beta=y^3, \gamma=z^3$, 则:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz \\
&=\frac{1}{3}\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right) \\
&=\frac{1}{3}\left\{\left[(x+y)^3-3x^2y-3xy^2\right]+z^3-3xyz\right\} \\
&=\frac{1}{3}\left\{\left[(x+y)^3+z^3\right]-3x^2y-3xy^2-3xyz\right\} \\
&=\frac{1}{6}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geq 0
\end{aligned}
$$

证毕

法三：

令 $f(x)=\ln x$, 则: $f'(x)=\frac{1}{x}, f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,

故: $f(x)$ 是上凸函数, 根据琴生不等式, $\ln \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \frac{1}{3}(\ln \alpha+\ln \beta+\ln \gamma)$, 证毕

三.解答题(16分)

已知: $f(x)=\beta x-\ln x-1$,

(i)：若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 β 的最小值;

(ii): 求证: $\frac{1}{xe^x}+x+\ln x \geq 1$;

(iii): 若 $\alpha\left(e^{-x}+x^2\right) \geq x-x \ln x$ 恒成立, 求 α 的取值范围

解: (i): $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \beta x-\ln x-1 \geq 0, \Rightarrow \beta \geq \frac{\ln x+1}{x}$,

令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}, g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,

当 $x \in(0,1)$ 时, $g'(x)>0, g(x)$ 单调增, 当 $x \in(1,+\infty)$ 时, $g'(x)<0, g(x)$ 单调减

故 $g_{\max}(x)=g(1)=1$, 即: $\beta \geq g_{\max}(x)=1, \beta$ 的最小值为1.

证明:(ii): 当 $\beta=1$ 时, 有: $\ln x \leq x-1$,

令 $\frac{1}{xe^x}=t$, 则 : $-x-\ln x=\ln t \leq t-1=\frac{1}{xe^x}-1$, 即: $\frac{1}{xe^x}+x+\ln x \geq 1$.

解: (iii): $\alpha\left(e^{-x}+x^2\right) \geq x-x \ln x \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{xe^x}+x\right) \geq 1-\ln x$,

注意到: $\dfrac{1}{xe^x}+x>0$, 即: $\alpha \geq \dfrac{1-\ln x}{\dfrac{1}{xe^x}+x}$,

由(ii) 知: $\dfrac{1-\ln x}{\frac{1}{xe^x}+x} \leq 1$, 且 $xe^x=1$ 时, $\dfrac{1-\ln x}{\dfrac{1}{xe^x}+x}=1$,

故 : $\alpha \geq 1, \alpha$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

2021年启明考试数学部分

1.$x,y,z\in\mathbb{Q},\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z},xyz=$.

Solution:

$\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

$\Rightarrow x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz})=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 由于$x,y,z\in\mathbb{Q}$，因此不妨设：

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{2} \\ 2\sqrt{yz}=\sqrt{3} \\ 2\sqrt{xz}=\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

故：$xyz=\dfrac{3}{4}$

2.$f(x)\geq 0,[f(x+1)]^2+[f(x)]^2=73(x\in\mathbb{R})$.当$x\in[0,1)$时,$f(x)=10-|13x-4|,f(\dfrac{2021}{13})=$

解：$[f(x+1)]^2+[f(x)]^2=73\Rightarrow[f(x+2)]^2+[f(x+1)]^2=73\Rightarrow[f(x+2)]^2=[f(x)]^2$

$\because f(x)\geq 0\therefore f(x+2)=f(x)$

$f(\dfrac{2021}{13})=f(\dfrac{19}{13})$,由$\because [f(\dfrac{19}{13})]^2+[f(\dfrac{6}{13})]^2=73$

解得:$f(\dfrac{2021}{13})=3$

3.$y=\dfrac{4\sin\theta\cos\theta+3}{\sin\theta+\cos\theta}(-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3\pi}{4})$, 则 y 的最小值为

$y=\dfrac{2(1+2\sin\theta\cos\theta)+1}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{2(\sin\theta+\cos\theta)^2+1}{\sin\theta+\cos\theta}=2(\sin\theta+\cos\theta)+\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\geq 2\sqrt{2}$

当且仅当$2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,即$\theta=\dfrac{7\pi}{12}or-\dfrac{\pi}{12}$取"$=$"

4.$\{a_n\}$是等差数列,且$a_3=-13,a_7=3.S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_n$,则$(S_n)_{min}=$

$$\begin{cases} a_1+2d=-13 \\ a_1+6d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-21 \\ d=4 \end{cases}$$

易知$n=6,(S_n)_{min}=-66$

5.$w=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, 则以$w,w^3,w^7,w^9$ 为解的方程为.

解：由棣莫弗定理易知:$w^5=1$，因此以w,w^3,w^7,w^9为解的方程等价于以w,w^2,w^3,w^4为解的方程.

易知：$1,w,w^2,w^3,w^4$是$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$的根. 故以w,w^2,w^3,w^4为解的方程是$x^4+x^3+x^2+x+1=0$

6. A, B是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点，O是原点，OA⊥OB，则$|AB|_{min}=$

解:根据题意不妨设 $A\left(r_1\cos\theta,r_1\sin\theta\right),B\left[r_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),r_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$,

则 $B\left(-r_2\sin\theta,r_2\cos\theta\right)$, $AB^2=r_1^2+r_2^2$, $\frac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1$,

$r_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}, \frac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1, r_2^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}$.

$$\begin{aligned}
\text{故 } r_1^2+r_2^2 &= \frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\right)\left(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta\right)}\\
&= \frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^4+b^4\right)\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)}\\
&= \frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^4+b^4\right)\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2\left(1-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\right)}\\
&= \frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2b^2}=\frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2 2\theta+4a^2b^2}\\
&\geqslant \frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

当且仅当 $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 时等号成立. 因此,线段 AB 长的最小值为 $\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

7.双曲线:$\Gamma\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,过右焦点作一条长度为$4\sqrt{3}$的弦 AB，A,B位于右支上。将双曲线Γ绕其右准线旋转90°，则弦 AB形成的曲面面积为

解：分析易知弦AB扫过的面积为一圆台侧面积的$\frac{1}{4}$. 设A,B两点到右准线$l:x=\frac{4}{3}$的距离分别为r_1,r_2,

由于双曲线离心率$e=\frac{3}{2}$,故$S=\frac{1}{4}\pi(r_1+r_2)|AB|=\frac{1}{4e}\pi|AB|^2=8\pi$

8.三种方法求$x(x+1)(x+2)(x+3)$ 最小值.

法一：不妨设 $y=x+\frac{3}{2}$，则 $x=y-\frac{3}{2}$，代入 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 中得到:

$x(x+1)(x+2)(x+3)$

$=(y-\frac{3}{2})(y-\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})(y+\frac{3}{2})$

$=(y^2-\frac{9}{4})(y^2-\frac{1}{4})$

$=y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}$

$=(y^2-\frac{5}{4})^2-1$

由于 $y^2 \geq 0$，所以 $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$，等号成立当且仅当 $y^2 = \frac{5}{4}$，即 $x=\frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$

法二：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[x(x+1)(x+2)(x+3)]\\&=(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2)\\&=4x^3+18x^2+11x+6\\&=(4x+6)(x^2+3x+1)\end{aligned}$$

令导函数等于 0，解得 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$带入原函数中可得最小值在$x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$取得，结果为$-1$。

法三:

$x(x+1)(x+2)(x+3)$

$=x(x+3)(x+1)(x+2)$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$=(x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1)$

$=(x^2+3x+1)^2-1\geq -1(x^2+3x+1=0,$即$x=\frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$取得)

9.已知$0<a<b$,证$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$.

证明：原式等价于要证：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2a(b-a)}{a^2+b^2}=\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$t=\frac{b}{a}\in(1,+\infty)$，即证:$(1+t^2)\ln t>2t-2$

注意到$\ln t>1-\frac{1}{t}, t\in(1,+\infty)$,即证：$(1+t^2)\ln t>(1+t^2)(1-\frac{1}{t})>2t-2,$

即证：$t^2-3t-\frac{1}{t}+3>0$,而此式求导易证

2019年启明考试数学部分

1.$37, 23, 19, 5.....$以此类推,第五个数为:

解：1

2.今天星期六，则 3^{1998} 天后是星期几

解：注意到$3^{1998} = (27)^{666} = (28-1)^{666} = 1 + \sum_{k=0}^{665} C_{666}^{k}(28)^{666-k}(-1)^{k} = 7N+1$

故为星期天.

3.若x满足$x + x^{-1} = -1$,求$x^{2019} + x^{-2019}$.

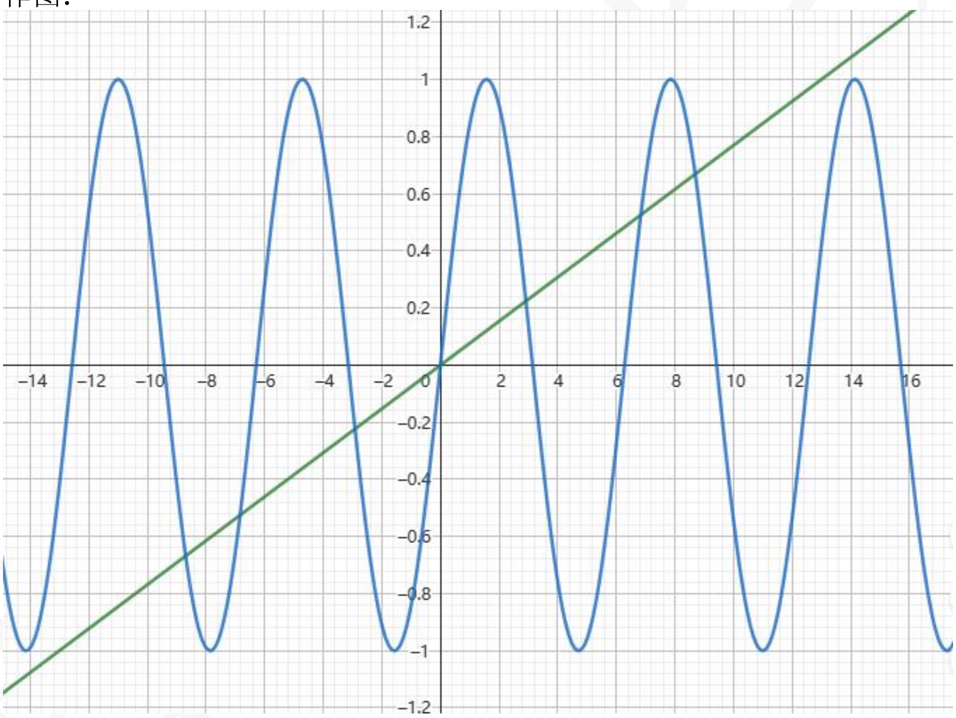
$x + x^{-1} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$,则$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}$(欧拉公式).

由棣莫弗定理易得$x^{2019} = e^{\pm 1046\pi i} = 1$

故 $x^{2019} + x^{-2019} = 2$.

4.求方程$13\sin x = x$的根.

作图：



可以求得的零点为$x = 0$，由于此方程为超越方程，其他6个零点为隐零点.

5.设整数数列 $a_1, a_2, ...a_{10}$ 满足 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$.且$a_{i+1} \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}(i = 1, 2, 3...9)$,求这样的数列有多少个.

不妨设$b_i = a_{i+1} - a_i \in \{1, 2\}$,由$a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$,可得：

$$\begin{cases} 2a_1=\sum\limits_{i=1}^{9} b_i \\ b_7+b_6+b_5=b_4+b_3+b_2 \end{cases}$$
对于$b_7+b_6+b_5=b_4+b_3+b_2$,分析易知等式两端 $1,2$的个数相等，因此b_7,b_6,b_5,b_4,b_3,b_2总的取法共有：$(C_3^0)^2+(C_3^1)^2+(C_3^2)^2+(C_3^3)^2=20$种

注意到$b_7+b_6+b_5+b_4+b_3+b_2$必是偶数，由$\because 2a_1=\sum\limits_{i=1}^{9} b_i$, $2a_1$也为偶数

故$b_1+b_8+b_9$必为偶数，取法有4种

故满足条件的数列共有$4\times 20=80$种

6.求n^3+100能被$n+10$整除的最大整数.

$\dfrac{n^3+100}{n+10}$

$=\dfrac{n^3+1000}{n+10}-\dfrac{900}{n+10}$

$=n^2-10n+100-\dfrac{900}{n+10}$

$\Rightarrow n_{max}=890$

7.x,y,z为非负整数，且$\begin{cases} x+y+z=10 \quad ① \\ x+2y+3z=30② \end{cases}$，求$x+5y+3z$的取值范围

解：$3\times①-②\Rightarrow 2x+y=0$

$\because x,y\in\mathbb{N}^* \therefore x=y=0\Rightarrow z=10$

故$x+5y+3z=30$

8.若$f(x)=(1-x^2)\left(x^2+ax+b\right)$关于$x=-2$对称,求$f(x)_{\max}$.

解：注意到$x=-1,1$为$f(x)$的零点，又$\because x=-2$为其对称轴，因此可得另两个零点为：$x=-3,x=-5$

故$f(x)=(1-x^2)(x+3)(x+5)$

注意到:$f(x)=(1-x)(x+5)(1+x)(x+3)$

$$\begin{aligned} &=(-x^2-4x+5)(x^2+4x+3) \\ &\le (\frac{-x^2-4x+5+x^2+4x+3}{2})^2 \\ &=16(\text{当且仅当}-x^2-4x+5=x^2+4x+3\text{取得}) \end{aligned}$$

9.若α,β满足$\begin{cases} x\sin\beta+y\cos\alpha=\sin\alpha \\ x\sin\alpha+y\cos\beta=\sin\beta \end{cases}$,求$x^2-y^2$.

分析：不要被题设吓到，实际上就是解二元一次方程组

$$\begin{cases} x\sin\beta + y\cos\alpha = \sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\beta = \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} \\ y = \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} \end{cases}$$

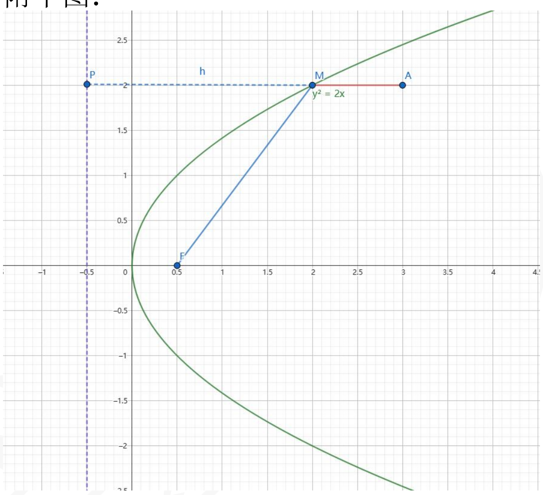
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \frac{2\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta} \\ &= \frac{2\sin(\alpha-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = -\sec(\alpha+\beta) \\ y &= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta} \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

故$x^2 - y^2 = 1$

10.$A(3,2)$是平面上一点，F是抛物线:$y^2 = 2x$上的一点，抛物线上一点M,则$|MF|+|MA|$取最小值的时M的坐标

解：很简单的高中题.由题意得$F(\frac{1}{2},0)$,准线方程为$x = -\frac{1}{2}$,设点M到准线的距离为$d = |PM|$.则由抛物线的定义得$|MA| + |MF| = |MA| + |PM|$ 故当P,A,M三点共线时，$|MF| + |MA|$取得最小值为 $|AP| = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$. 把$y = 2$代入抛物线$y^2 = 2x$得$x = 2$，故点M的坐标是$(2,2)$

附个图：



11.$\forall x, y \in \mathbb{R}$,函数$f(z)$满足$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$且$f(x) \neq 0$,证明:$f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

令$x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y) \Rightarrow 2f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)(*)$

令$x = y \Rightarrow 2f^2(x) = f(2x) + f(0) = f(2x) + 1$,同理$2f^2(y) = f(2y) + 1$

带入$(*)$中得：$f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

12.数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}\le\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$,且$a_{505}=2019$.求$\max a_5$.

分析：一个自然的想法是所有的等号均能取得时a_3取得最大值，此时$\{a_n\}$为$d=4$的等差数列，解得$a_5=19$

令$b_n=a_{n+1}-a_n,a_{n+1}\le\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})\Rightarrow b_n\le b_{n+1}$

$\therefore a_5=a_1+b_1+b_2+b_3+b_4$

$$a_{505}-a_1=\sum_{i=1}^{504}b_i\ge126(b_1+b_2+b_3+b_4)\Rightarrow b_1+b_2+b_3+b_4\le16$$

$\therefore a_3=a_1+b_1+b_2+b_3+b_4\le19$,当$\{a_n\}$为等差数列取“=”

13.$f(a)$是$\mathbb{R}$上的偶函数，函数图像关于$x=1$对称。对任意的 $x,y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$有$f(x+y)=f(x)f(y)$,且$f(1)=\beta>0$.

(1)求$f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{4}\right)$的值.

(2)证明：$f(x)$是周期函数

(3)记$\beta(n)=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\beta(n)$.

解：(1)易得:$f(\frac{1}{2})=\beta^{\frac{1}{2}},f(\frac{1}{4})=\beta^{\frac{1}{4}}$

证明:(2)事实上，由双镜原理周期为2是显然的

$f(2+x)=f(-x)=f(x)\Rightarrow f(x)$是$T=2$的周期函数

解：(3)$\beta(n)=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f(\frac{1}{2n})$

注意到:$f(\frac{1}{2})=f(n\times\frac{1}{2n})=f^n(\frac{1}{2n})\Rightarrow f(\frac{1}{2n})=\beta^{\frac{1}{2n}}$

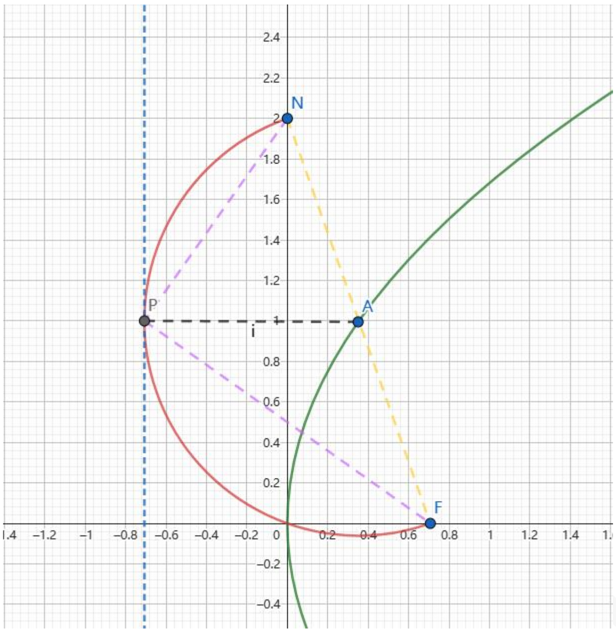
$\therefore\beta(n)=\ln f(\frac{1}{2n})=\frac{\beta}{2n}\to0(n\to\infty)$

2015年启明考试数学部分

一、填空题

1.对抛物线 $y^2=2\sqrt{2}x$, 若设其焦点为 F,y 轴正半轴上一点为 N. 若准线上存在唯一的点 P 使得 $\angle NPF=90°$, 则 N 点的纵坐标为

分析：实际上就是以NF为直径的圆与准线相切，求此时 N点坐标，图如下：



$|AP|=|AN|=|AF|, AP\perp l: x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A$在抛物线上

设$N(0,a)\Rightarrow A(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{a}{2})$带入抛物线方程，解得$a=2$

2. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{255}+\sqrt{256}}=$

解：设$b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{255}+\sqrt{256}}=\sum_{i=1}^{255}b_i=\sqrt{256}-1=15$$

3.若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)$ 存在, 则 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}=$

这道题超纲太多了，涉及到级数知识，仅展示做法

法一：

设$H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Rightarrow H(n)=\gamma+\ln n+o(1)$

考虑部分和: $S_{2n}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=H(2n)-H(n)=\ln 2+o(1)\to\ln 2(n\to\infty)$

$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2(n\to\infty)$

综上：$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}=\ln 2$

法二：注意到：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \Rightarrow \ln 2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4.在边长为 1 的正方形中 (含边界) 取9 个点, 其中必有 3 个点, 它们构成的三角形面积不超过

解:在边长为 1 的正方形内任取3个点，则这3点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{2}$。若我们在一个边长为$\frac{1}{2}$的正方形内任取3点,那么这3点所组成的三角形的最大面积就是这个正方形的面积的一半，即不超过$\frac{1}{8}$。那么我们将一个边长为 1 的正方形分为4个相同的边长为$\frac{1}{2}$的小正方形，任取9个点放到正方形中，必有3个点落在同一个小正方形内。

由上面的分析得知,这3个点所组成的三角形面积不超过$\frac{1}{8}$

5.某人打靶打中 8 环、 9 环、 10 环的概率分别为 $0.15, 0.25, 0.2$, 现他开三枪, 不少于 28 环的概率为

解: case 1:成绩为28环，有以下情况:$\{9,9,10\},\{8,10,10\}$

case 2:成绩为29环，有以下情况:$\{9,10,10\}$

case 3:成绩为30环，有以下情况:$\{10,10,10\}$

$p=\mathbf{C}_3^2 0.25^2\cdot 0.2+\mathbf{C}_3^2 0.2^2\cdot 0.15+\mathbf{C}_3^2 0.2^2\cdot 0.25+0.2^3=0.0935$

二、解答题

6.若对任意实数 x,y, 有 $f\left((x-y)^2\right)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2$, 求 $f(x)$.

解：令$x=y\Rightarrow f(0)=f^2(x)-2xf(x)+x^2=(f(x)-x)^2$

再令$x=0\Rightarrow f(0)=0 or 1$

$\Rightarrow f(x)=x \quad or \quad f(x)=x+1$

7.求所有 a,b, 使 $\left|\sqrt{1-x^2}-ax-b\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 成立, 其中 $x\in[0,1]$.

不妨设$x=\sin\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\left|\sqrt{1-x^2}-ax-b\right|$

$=|\cos\theta-a\sin\theta-b|$

$=|\sqrt{a^2+1}\sin(\theta+\phi)-b|\leq\frac{\sqrt{2}-1}{2}(\tan\phi=-\frac{1}{a})$

$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{2}}{2}+b\leq\sqrt{a^2+1}\sin(\theta+\phi)\leq\frac{\sqrt{2}-1}{2}+b \quad (*)$

$f(\theta):=\sqrt{a^2+1}\sin(\theta+\phi)$

case 1:$a\geq 0$

$[f(\theta)]_{max}=f(\frac{\pi}{2})=\sqrt{a},[f(\theta)]_{min}=f(0)=-1$

注意到此时值域区间长度$l=a+1>\sqrt{2}-1,(*)$必不能恒成立，此种情况舍去

case 2:$a<0$

$[f(\theta)]_{max}=f(\frac{\pi}{2}-\phi)=\sqrt{a^2+1},[f(\theta)]_{min}=\min\{f(\frac{\pi}{2}),f(0)\}=\min\{-a,1\}$
if $a\leq -1,\Rightarrow [f(\theta)]_{min}=1$,区间长度$l=\sqrt{a^2+1}-1\leq\sqrt{2}-1\Rightarrow a\in[-1,1]\Rightarrow a=-1$
$[f(\theta)]_{min}=1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+b\Rightarrow b=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
if $a>-1,\Rightarrow [f(\theta)]_{min}=-a$,此时区间长度$l=\sqrt{a^2+1}+a>\sqrt{2}-1,(*)$必不能恒成立，此种情况舍去
综上所述：$a=-1,b=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
8.若复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $\left|z^3-z+2\right|^2$ 的最小值.
解：
法一：
设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,得$z^3-z+2=\cos 3\theta-\cos\theta+2+i(\sin 3\theta-\sin\theta)$
$$\begin{aligned}|\ z^3-z+2\ |^2&=(\cos 3\theta-\cos\theta+2)^2+(\sin 3\theta-\sin\theta)^2\\&=6-2\left(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta\right)+4\cos 3\theta-4\cos\theta\\&=6-2\cos 2\theta+4\cos 3\theta-4\cos\theta\\&=4\left(4\cos^3\theta-\cos^2\theta-4\cos\theta+2\right)\end{aligned}$$
求导易得当$\cos\theta=\frac{2}{3}$时，$\left(|z^3-z+2\ |^2\right)_{\min}=\frac{8}{27}$.
法二：
$\left|z^3-z+2\right|^2=\left|z^3-z+2z\bar{z}\right|^2=\left|z\left(z^2-1+2\bar{z}\right)\right|^2=\left|z^2-1+2\bar{z}\right|^2$
$=\left(z^2-1+2\bar{z}\right)\left(\bar{z^2}-1+2z\right)=4-2(\mathrm{z}+\bar{z})-\left(z^2+\bar{z}^2\right)+2\left(z^3+\bar{z}^3\right)$
$=4-2(z+\bar{z})-\left[(z+\bar{z})^2-2\right]+2(z+\bar{z})\left[(z+\bar{z})^2-3\right]$
$\xlongequal{\text{let },z+\bar{z}=x\in[-2,2]}2x^3-x^2-8x+6$(用导数易求最值)
9.已知三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个实根.
(1) 若三个实根为 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3,a,b$ 为常数, 求 c 变化时 x_3-x_1 的取值范围;
(2) 若三个实根为 a,b,c, 求 a,b,c.
解：这题有些麻烦，如果缺少一元三次方程的相关概念建议下去了解一下再来看这道题
(1) 设三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个实根分别为 $x_1,x_2,x_3\left(x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\right)$ 由韦达定理, 可得 $x_1+x_2+x_3=-a,x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$, 注意到
$$\frac{1}{2}[2(\frac{x_3-x_1}{2})^2+(x_3-x_1)^2]\leq a^2-3b=\frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\right]\leq[(x_3-x_1)^2]$$
$$\Rightarrow\sqrt{a^2-3b}\leqslant x_3-x_1\leqslant 2\sqrt{\frac{a^2-3b}{3}}$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 或 $x_2=x_3$ 时取到左端”=”, 当且仅当 $x_1+x_3=2x_2$ 时取到右端”=”.
综上所述：x_3-x_1 的取值范围是 $\left[\sqrt{a^2-3b}\leqslant w\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{3}a^2-b}\right]$.
(2) 易知$x^3+ax^2+bx+c=(x-a)(x-b)(x-c)$, 由韦达定理得

$$\begin{cases} a+b+c=-a \\ ab+bc+ca=b \\ abc=-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow c=0 \text{ or } ab=-1$$

.
if $c=0$, $\begin{cases} b=-2a \\ ab=b \end{cases}$, $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.
if $ab=-1$ 时, $\begin{cases} c=-2a-b \\ -1+(a+b)c=b \end{cases}$, 带入原方程,得：

$$b^4+b^3-2b^2+2=0$$

$$\Rightarrow b+1=0 \text{ or } b^3-2b+2=0$$

if $b+1=0$, $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \end{cases}$
if $b^3-2b+2=0$,
由一元三次方程的求根公式得 $b=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}}+1}\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{b} \\ c=\frac{2}{2}-b \end{cases}$

综上(a,b,c) 的值为 $(0,0,0),(1,-2,0),(1,-1,-1)$, $\left(-\frac{1}{k},k,\frac{2}{k}-k\right)$ (其中 $k=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}}+1}$).

2014年启明考试数学部分

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题8分, 共40分)
1.设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 n 重复合函数 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))=$
解：$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$计算得 $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

由此猜想：$f(x)$经过n次复合后结果是 $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，下面用数学归纳法证明：
当 $n=1$ 时,显然成立
当 $n=k(k\in N+)$ 时，$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$成立.
当 $n=k+1$ 时，f_{k+1}为 $f(x)$ 和 $f_k(x)$ 的复合函数
经计算得 $f_{k+1}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$ 与假设相符, 故假设成立
故：$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$
2.设多项式 $p(x)$ 满足 $p\left(x^2+1\right)=(p(x))^2+1$ 和 $p(0)=0$, 则 $p(x)=$
答案很明显$p(x)=x$,证明如下：注意到$p(1)=p(0)^2+1=1, p(2)=p(1)^2+1=2, p(5)=p(2)^2+1=5, \ldots \Rightarrow p(x)=x$有无穷多解
又$\because p(x)$为多项式函数(设为n次),则$p(x)-x$也为多项式函数
但由代数基本定理$p(x)-x=0$最多有n个根$\Rightarrow p(x)-x\equiv 0 \Rightarrow p(x)=x$
3.设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6^k}{\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)\left(3^k-2^k\right)}$, 则极限 $\lim_{n\to\infty} S_n=$
注意到：
$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{6^k}{\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)\left(3^k-2^k\right)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\\
&=2-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\to 2(n\to\infty)
\end{aligned}
$$
4.对 $x>0$, 函数 $f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$ 的最小值为
注意到:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^3+\frac{1}{x^3})^2}{(x+\frac{1}{x})((x+\frac{1}{x})^2+x^2+\frac{1}{x^2}-1)}\\
&= \frac{(x+\frac{1}{x})^2((x+\frac{1}{x})^4-(x^2+\frac{1}{x^2}-1)^2)}{(x+\frac{1}{x})((x+\frac{1}{x})^2+x^2+\frac{1}{x^2}-1)}\\
&= \frac{(x+\frac{1}{x})^2((x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2}-1))((x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2}-1))}{(x+\frac{1}{x})((x+\frac{1}{x})^2+x^2+\frac{1}{x^2}-1)}\\
&= 3(x+\frac{1}{x}) \geq 6(\text{当且仅当}x=1\text{取得“=”})
\end{aligned}
$$

5.假设 20 名学生中的每一名学生可从提供的六门课程中选学一门至六门, 也可以一门都不选. 试判断下列命题是否正确: 存在 5 名学生和两门课程, 使得这 5 名学生都选了这两门课, 或者都没选, 选填“正确”或“否”

解:答案是否定的.不一定会出现这5个学生.假设20个学生都选三门课,而且选法都不完全一样,因为$20=\binom{6}{3}$,所以这是可能的.那么对任何两门课程,恰有4个学生选(他们选的第3门课都不同,4 = 6 - 2门课程中的一门).所以任何两门课程没有5个学生同时选.同样地,对任何两门课程,恰有4个学生没有选取这两门课,而没有5名学生同时不选两门课。

二、(本题共14分)

1.若 a 为正整数而 $\sqrt{a}$ 不为整数, 证明: $\sqrt{a}$ 为无理数.

证明：反证法，设 $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$,从而可进一步设$\sqrt{a}=\frac{p}{q}\quad(p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1)\Rightarrow p^2=aq^2$

$\because a$不是完全平方数$\therefore \exists m\in\mathcal{P}, s.t\quad a \mod m=0, a \mod m^2\neq 0$

$p^2=aq^2\Rightarrow p^2 \mod m=0\Rightarrow p \mod m=0\Rightarrow p^2 \mod m^2=0$

$\Rightarrow aq^2 \mod m^2=0\Rightarrow q^2 \mod m=0\Rightarrow q \mod m=0$

$\therefore q \mod m=0, p \mod m=0$与 $(p,q)=1$矛盾，故$\sqrt{a}$ 为无理数

2.试证：除 $\{0,0,0\}$ 外, 没有其他整数 m,n,p 使得

$$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0.$$

证明：

反证法.假设存在整数 m,n,p，使得 $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$

首先考虑含有 0的情况，这种情况显然是存在矛盾的，不多赘述

下面考虑m,n,p全部不为0的情况:

注意到$n\sqrt{2}$ 和 $p\sqrt{3}$ 也是无理数对于$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$，易得：

$$m=-n\sqrt{2}-p\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2=(n\sqrt{2}+p\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow m^2=2n^2+3p^2+2\sqrt{6}np$$

$\because m\in\mathbb{Z}\therefore m^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2n^2+3p^2+2\sqrt{6}np\in\mathbb{Z}$

但$2\sqrt{6}np$ 是一个无理数。因此，$2n^2+3p^2+2\sqrt{6}np$ 必是一个无理数。矛盾，假设不成立。综上所述，除了 $\{0,0,0\}$ 外，不存在其他整数 m,n,p 使得 $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$.

三、(本题共16分) 设 a,b,c 为三角形三边之长, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r 为内切圆半径, 证明:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$$

证明：设三角形的面积为 S, 则 $S=pr$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$\Rightarrow p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

设 $x=\dfrac{1}{p-a},y=\dfrac{1}{p-b},z=\dfrac{1}{p-c}$,则有：

$$\frac{1}{r^2}=pxyz=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$$

而上式是显然易证的.

四、(本题共 12 分) 证明: 设 m 是任一正整数, 则 $a_m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}$ 不是整数.

证明: 当 $m=1$ 时, $a_1=\dfrac{1}{2}$, 显然不是整数, 结论成立. 下面证明, 当 $m\geqslant 2$ 时, $a_m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^m}$ 也不可能是整数. 设 $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^m}$, 令 $M=2^m$ ，在 S 两边同时乘以 M 得:

$$MS=\frac{M}{2}+\frac{M}{3}+\frac{M}{4}+\ldots+1\quad(*)$$

等式右边的每一项 $\dfrac{M}{k}$ $(k=1,2,3,\ldots,2^m)$ 要么是整数, 要么是一个分母为奇数的不可约分数, 再来考察那些分母为奇数的不可约分数的项. 因为 $m\geqslant 2$, 故在所有的分母当中 (都是奇数) 必定存在一个最大的奇素数, 设它为 p, 这样在分母中去掉 p, 设余下的奇数的最小公倍数为 N, 在$(*)$再同时乘以 N, 得到

$$MNS=\frac{MN}{2}+\frac{MN}{3}+\frac{MN}{4}+\ldots+N$$

等式右边的每一项$\dfrac{MN}{k}(k=1,2,3,\ldots,2^m,k\neq p)$, 仅当$k=p$ 时, $\dfrac{MN}{k}$不是整数, 其他的项都是整数.

所以等式右边最后得到的不是整数, 因此, 等式左边的 MNS 也不是整数, 显然, 若 S 是整数, 那么就与 MNS 不是整数相矛盾! 所以 a_m 不可能是整数. 证毕.

五、(本题共18分) 下图是2013年恒大足球俱乐部策划的主场与首尔 FC足球队的亚冠决赛海报, 左边是恒大队, 右边是首尔队, 该海报的寓意是什么? 要求简单推导海报中两个数学式子的结果. 一个数学式子是 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$ (拉马努金式子), 另一个是 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+1$ (已知欧拉公式 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$).

解: 注意到拉马努金恒等式: $n=\sqrt{1+(n-1)(n+1)}$, 因此:

$$
\begin{aligned}
3 &= \sqrt{1+2\cdot 4} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}}. \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

注意到$e^{i\pi}+1=0$,故结果为:$3:0$

写在最后:

欢迎大家加入2023级学数华科志愿辅导群(855590575),交流数学问题!

如果参考答案有些许纰漏欢迎大家指出