6.Solution :

(1)以D点为原点，以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$为$x,y,z$轴正方向，建立空间直角坐标系$D-xyz$

设$PD=DC=1\Rightarrow\overrightarrow{FE}=\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\},\overrightarrow{DC}=\{0,1,0\}$

$\because\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$

$\therefore FE\perp DC$

(2)设$G(a,0,c)\Rightarrow\overrightarrow{GF}=\{\frac{1}{2}-a,\frac{1}{2},\frac{1}{2}-c\}$

$\overrightarrow{PC}=0,1,-1,\overrightarrow{CB}=1,0,0$

设$\mathbf{n}=\{x,y,z\}$为面PCB的一个法向量

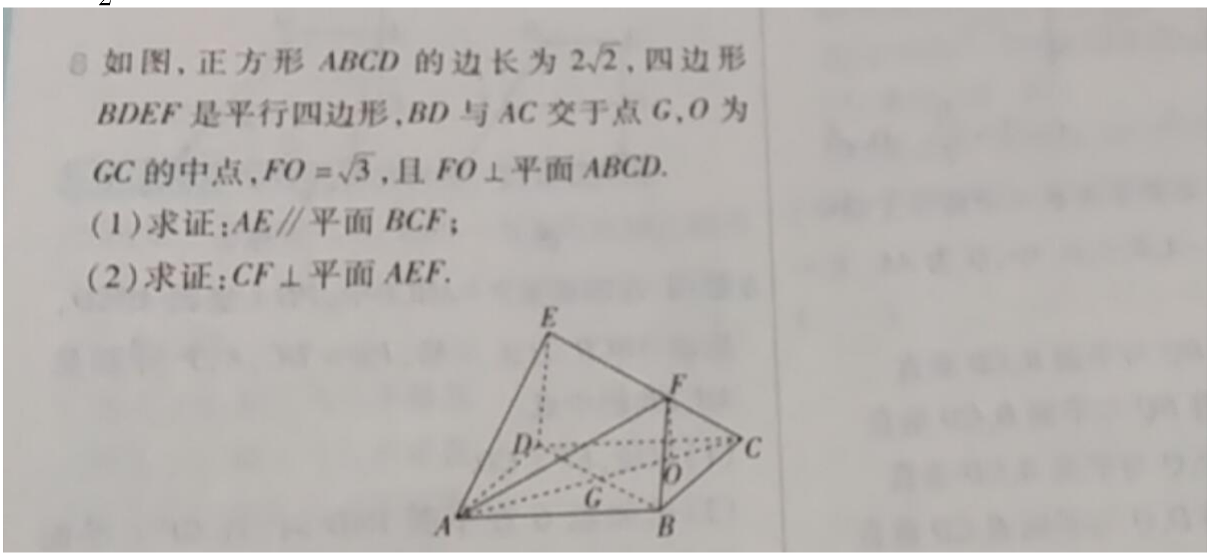
$$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\mathbf{n}=0\\\overrightarrow{CB}\cdot\mathbf{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-z=0\\x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 令$y=1$,得$\mathbf{n}=\{0,1,1\}$

$\because GF\perp$ 面$PCB\therefore GF//\mathbf{n}\Rightarrow\overrightarrow{GF}=\lambda\mathbf{n}$

$$\begin{cases}...\\...\end{cases}$$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2},c=0$


8 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，四边形 $BDEF$ 是平行四边形，BD 与 AC 交于点 G，O 为 GC 的中点，$FO=\sqrt{3}$，且 $FO\perp$ 平面 $ABCD$.

(1)求证：$AE//$平面 BCF；

(2)求证：$CF\perp$平面 AEF.

8.Solution

(1)

易知:$DE//BF,AD//BC$

$\because DE\not\subseteq BFC,BF\subset BFC,AD\not\subseteq BFC,BC\subset BFC$

$\therefore AD,DE//BFC$

$$\because \begin{cases} AD, DE//BFC \\ AD, DE \not\subseteq BFC \\ AD \cap DE = D \end{cases} \Rightarrow ADE//BFC$$

$\because AE \subset ADE \therefore AE//ADE$ (2)取BC中点为M,以O点为原点，以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OF}$为$x,y,z$轴正方向，建立空间直角坐标系$O-xyz$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\{-3,0,\sqrt{3}\},\overrightarrow{EF}=\{0,4,0\},\overrightarrow{CF}=\{1,0,\sqrt{3}\}$

设$\mathbf{n}=\{x,y,z\}$为面AEF的一个法向量

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF}\cdot\mathbf{n}=0 \\ \overrightarrow{EF}\cdot\mathbf{n}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+\sqrt{3}z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 令$z=\sqrt{3}$,得$\mathbf{n}=\{1,0,\sqrt{3}\}$

$\because \overrightarrow{CF}=\mathbf{n}$

$\therefore CF\perp AEF$

9.Solution

证明 : (1) $\because DE\perp AB, BE\perp DE$

又 $\because BE\perp A_1D, DE\cap A_1D=D$

$\therefore BE\perp$平面A_1DE

$\because A_1E\subset$ 平面A_1DEﬁ

$\therefore A_1E\perp BE$

又$A_1E\perp DE, BE\cap DE=E$

$\therefore A_1E\perp$平面$BCDE$

(2) $\because A_1E\perp$平面$BCDE$，$BE\perp DE$

$\therefore$以E为坐标原点，分别以$\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}$所在方向为$x,y,z$轴正方向，建立空间直角坐标系$E-xyz$

则$B\,(1,0,0)$, $D(0:,\sqrt{3},\ 0)$, $A_1(0,0,1)\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0)$

设平面A_1BD的法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+z=0 \\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 取$y=1$,得$\overrightarrow{n}=(\sqrt{3}\ ,\ 1\ ,\ \sqrt{3})$.

假设在线段BD上存在一点P，使得平面$A_1EP\perp$平面A_1BD.

设$P(a,b,0), BP=\lambda BD(0\le\lambda<1)$，则:

$(a-1,b,0)=\lambda(-1\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ 0)\Rightarrow a=1-\lambda, b=\sqrt{3}\lambda\Rightarrow P(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$

$\therefore EA_1=(0,0,1), EF=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$.设平面$A,EP$的法向量$m=(x_1,y_1,z_1)$，

$\begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EA_1} = z_1 = 0 \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EP} = (1-\lambda)x_1 + \sqrt{3}\lambda y_1 = 0 \end{cases}$

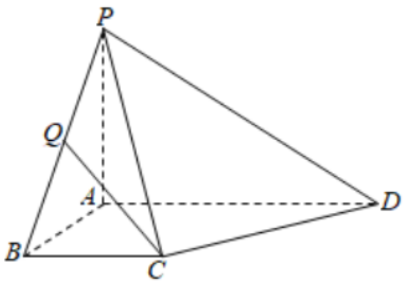
$\Rightarrow$取 $x_1 = \sqrt{3}\lambda$, 得$\overrightarrow{m} = (\sqrt{3}\lambda, \lambda - 1, 0)$

$\because$ 平面$A_1EP \perp$平面A_1BD , 得 $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = 3\lambda + \lambda - 1 = 0$，解得$\lambda = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$在线段BD上存在点P，使得平面$A_1EP \perp$平面A_1BD, 且$\dfrac{BP}{BD} = \dfrac{1}{4}$.

P16T6:

【题目】如图，在四棱锥$P-ABCD$中，已知$PA\perp$平面$ABCD$，且四边形$ABCD$为直角梯形，$\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$，$PA = AD = 2$，$AB = BC = 1$.



(1)求平面PAB与平面PCD夹角的余弦值；

(2)定义：两条异面直线之间的距离是指其中一条直线上任意一点到另一条直线距离的最小值；利用此定义求异面直线PB与CD之间的距离.

Solution:

(1)

$\because AP \perp$平面$ABCD$，$AB \perp AD$

$\therefore$以A为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$所在方向为$x, y, z$轴正方向，建立空间直角坐标系$A-xyz$

$\therefore \overrightarrow{PD} = \{0, 2, -2\}, \overrightarrow{CD} = \{-1, 1, 0\}$

易知$\overrightarrow{AD} = \{0, 2, 0\}$为面 APB的一个法向量(你要写证明过程)

设 $\overrightarrow{n} = \{x, y, z\}$为面$PCD$的一个法向量

$\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 令$x = 1$, 得$\mathbf{n} = \{1, 1, 1\}$

$\cos\theta = \cos < \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{n} >= \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

因为$\overrightarrow{BP} = (-1,0,2)$, 设$\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BP} = (\lambda,0,2\lambda)$,

又$\overrightarrow{CD} = (-1,1,0)$, 则$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = \left(-\lambda,-1,2\lambda\right)$,

所以$d = \sqrt{\overrightarrow{CQ}^2 - (\frac{\overrightarrow{CQ} \bullet \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|})^2} = \sqrt{\frac{9}{2}\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}(\lambda + \frac{1}{9})^2 + \frac{4}{9}} \geq \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$,

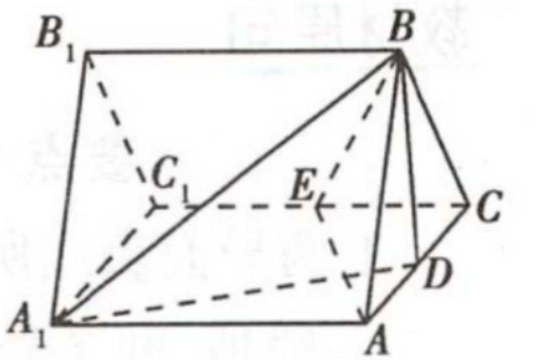
所以异面直线PB与CD之间的距离$\frac{2}{3}$.

P16T7:

【题目】如图，三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$的所有棱长都是2，$AA_1 \perp$平面ABC，D，E分别是AC，CC_1的中点.

(1)求证：平面$BAE \perp$平面A_1BD；

(2)在线段B_1B上是否存在点M，使点M到平面A_1BD的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$？请说明理由.



Solution:

取 A_1C_1 的中点 0 连接 B_1O, OD ,易得 OA_1, OD, OB_1 两两垂直.以O为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB_1}$所在方向为$x, y, z$轴正方向，建立空间直角坐标系$O - xyz$

(1) 证明: 易知 $\overrightarrow{A_1D} = (-1,2,0), \overrightarrow{A_1B} = (-1,\ 2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BA} = (1,0,-\sqrt{3}), \overrightarrow{BE} = (-1,-1,$
$-\sqrt{3})$.

设 $\boldsymbol{n}_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 A_1BD 和平面 BAE 的法向量,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1D} \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{A_1B} \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -x_1 + 2y_1 = 0, \\ -x_1 + 2y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$

令 $y_1=1$, 则 $x_1=2, z_1=0$,

$\therefore \boldsymbol{n}_1=(2,1,0)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量.

由 $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\end{array}\right.$ 得 $\left\{\begin{array}{l}x_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ -x_2-y_2-\sqrt{3}z_2=0,\end{array}\right.$

令 $z_2=1$, 则 $x_2=\sqrt{3}, y_2=-2\sqrt{3}$,

$\therefore \boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},-2\sqrt{3},1)$ 是平面 BAE 的一个法向量,

$\therefore \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_1=0, \therefore$ 平面 $BAE\perp$ 平面 A_1BD.

(2) 假设在线段 B_1B (含端点) 上存在点 M, 使点 M 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

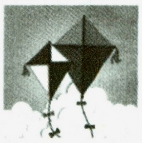
设 $M(0,a,\sqrt{3})(0\leqslant a\leqslant 2)$, 则 $\overrightarrow{BM}=(0,a-2,0)$,

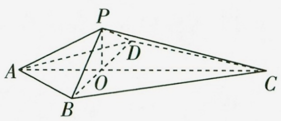
由 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\cdot n_1\right|}{|n_1|}=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{5}}$ 得 $a=4$ (舍去) 或 $a=0$,

故在线段 B_1B 上存在点 M, 即点 M 与点 B_1 重合时, 点 M 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

P16T7:

8 如图,某种风筝的骨架模型是四棱锥 $P-ABCD$,其中 $AC\perp BD$,且 AC,BD 交于点 O,$OA=OB=OD=4$,$OC=8$,$PO\perp$平面 $ABCD$.





(1)求证:$PD\perp AC$;

(2)试验表明,当 $PO=\frac{1}{2}OA$时,风筝表现最好,求此时直线 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值.

Solution:

8 (1) 因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD, AC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO\perp AC$.

又 $AC\perp BD, PO\cap BD=O, PO\subset$ 平面 $POD, BD\subset$ 平面 POD,

所以 $AC\perp$ 平面 POD, 又 $PD\subset$ 平面 POD,

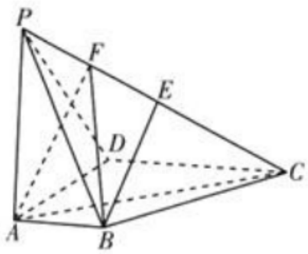
所以 $PD\perp AC$.

(2) 如图, 以 O 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $B(4,0,0)$, $C(0,8,0)$, $D(-4,0,0)$, $P(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{PB}=(4,0,-2),\overrightarrow{PC}=(0,8,-2),\overrightarrow{PD}=(-4,0,\ -2)$.
设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$ 为平面 PBC 的法向量,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}4a-2c=0\\ 8b-2c=0\end{cases}$,
取 $c=4$, 则 $\boldsymbol{m}=(2,1,4)$ 是平面 PBC 的一个法向量.
设直线 PD 与平面 PBC 所成角为 θ,
则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PD}\cdot m|}{|\overrightarrow{PD}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{16}{\sqrt{20}\times\sqrt{21}}=\dfrac{8\sqrt{105}}{105}$.
P18T14:

【题目】如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AB\parallel DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点．



（1）求证：$BE\perp DC$；

（2）若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF\perp AC$，求平面 FAB 与平面 ABP 夹角的余弦值．

Solution:

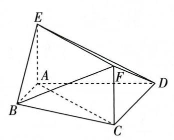
(1)

(2)

P20T8:

(1)求证:平面 ABE//平面 CDF;

(2)设平面 $BEF\cap$ 平面 $CDF=l$,再从①$AB\perp AD$,②$AE\perp$ 平面 $ABCD$,③平面 $AED\perp$ 平面 $ABCD$ 这三个条件中选择两个作为已知,使二面角 $B-l-C$ 的大小确定,并求此二面角的余弦值.



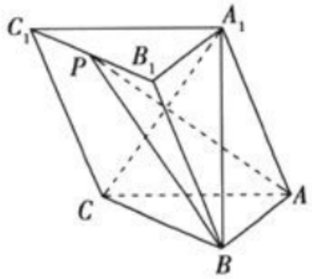
Solution:

(1)

(2)

P20T9:

【题目】如图，在三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，顶点A_1在底面ABC上的射影恰为点B，且$AB=AC=A_1B=2$．



（1）证明：平面$A_1AC\perp$平面A_1AB；

（2）求AA_1与BC所成角的大小；

（3）若点P为B_1C_1的中点，求平面PAB与平面ABA_1夹角的余弦值．

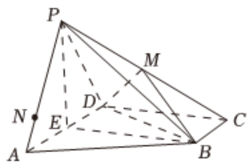
Solution:

(1)

(2)

P20T10:

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AD\parallel BC, \angle ADC=90^{\circ}$，平面$PAD\perp$底面$ABCD$，$E$为$AD$的中点，$M$是棱$PC$的中点，$PA=PD=2$，$BC=\dfrac{1}{2}AD=1$，$CD=\sqrt{3}$.



(1)求证：$PE\parallel$平面BMD；

(2)求直线PB与平面BMD所成角的余弦值；

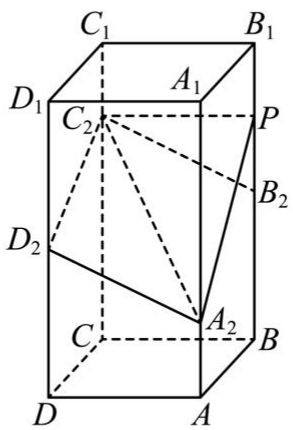
(3)线段PA上是否存在一点N使得平面BMN与平面BMD所成角的余弦值为$\dfrac{3}{2\sqrt{46}}$，若存在，求出线段PN的长度；若不存在，请说明理由.

Solution:

(1)

(2)

1．（2023·全国·新课标Ⅰ卷）如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2, AA_1=4$．点A_2, B_2, C_2, D_2分别在棱AA_1, BB_1, CC_1, DD_1上，$AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$．



(1)证明：$B_2C_2\,/\!/\,A_2D_2$；

(2)点P在棱BB_1上，当二面角$P-A_2C_2-D_2$为150°时，求B_2P．

Solution:

(1) 以 C 为坐标原点, CD, CB, CC_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $C(0,0,0), C_2(0,0,3), B_2(0,2,2), D_2(2,0,2), A_2(2,2,1)$,

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1), \overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$,

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2}//\overrightarrow{A_2D_2}$,

又 B_2C_2, A_2D_2 不在同一条直线上,

$\therefore B_2C_2//A_2D_2$.

(2) 设 $P(0,2,\lambda)(0\le\lambda\le 4)$,

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2), \overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-\lambda), \overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$,

设平面 PA_2C_2 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC_2}=-2y+(3-\lambda)z=0\end{cases}$,

令 $z=2$, 得 $y=3-\lambda, x=\lambda-1$,

$\therefore \vec{n}=(\lambda-1,3-\lambda,2)$,

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量 $\vec{m}=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2a-2b+2c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{D_2C_2}=-2a+c=0\end{cases}$,

令 $a=1$, 得 $b=1, c=2, \therefore \vec{m}=(1,1,2)$,

$\therefore |\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{4+(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2}}=|\cos 150^\circ|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

化简可得, $\lambda^2-4\lambda+3=0$,

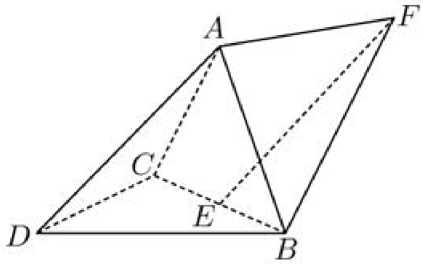
解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$,

$\therefore P(0,2,1)$ 或 $P(0,2,3)$,

$\therefore B_2P=1$.

2.(20203 全国·统考新课标 II 卷)如图,三棱锥 $A-BCD$ 中, $DA=DB=DC$, $BD\perp CD$, $\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$,

E 为 BC 的中点.



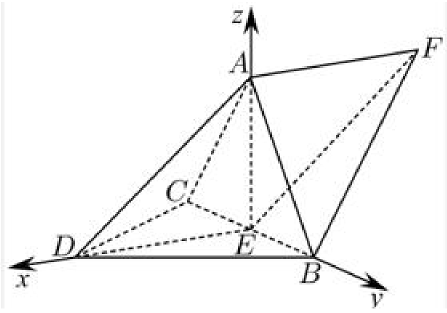
(1)证明: $BC\perp DA$;

(2)点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$, 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

Solution:

(1) 连接 AE, DE, 因为 E 为 BC 中点, $DB=DC$, 所以 $DE\perp BC$ (1),

因为 $DA=DB=DC, \angle ADB=\angle ADC=60^{\circ}$,
所以 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 均为等边三角形,
$\therefore AC=AB$, 从而 $AE \perp BC$ (2),
由(1) (2), $AE \cap DE=E, AE, DE \subset$ 平面 ADE,
所以, $BC \perp$ 平面 ADE, 而 $AD \subset$ 平面 ADE, 所以 $BC \perp DA$.
(2) 不妨设 $DA=DB=DC=2, \because BD \perp CD, \therefore BC=2\sqrt{2}, DE=AE=\sqrt{2}$.
$\therefore AE^{2}+DE^{2}=4=AD^{2}, \therefore AE \perp DE$, 又 $\because AE \perp BC, DE \cap BC=E, DE, BC \subset$ 平面 $BCD \therefore AE \perp$ 平面 BCD. 以点 E 为原点, ED, EB, EA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示:



设 $D(\sqrt{2}, 0,0), A(0,0, \sqrt{2}), B(0, \sqrt{2}, 0), E(0,0,0)$,
设平面 DAB 与平面 ABF 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{n_2}=(x_2, y_2, z_2)$,
二面角 $D-AB-F$ 平面角为 θ, 而 $\overrightarrow{AB}=(0, \sqrt{2},-\sqrt{2})$,
因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 所以 $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 即有 $\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{2}, 0,0)$,

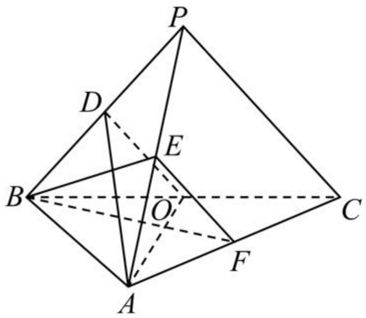
$$\therefore \begin{cases}-\sqrt{2} x_1+\sqrt{2} z_1=0 \\ \sqrt{2} y_1-\sqrt{2} z_1=0\end{cases},$$

取 $x_1=1$, 所以 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$;

$$\begin{cases}\sqrt{2} y_2-\sqrt{2} z_2=0 \\ -\sqrt{2} x_2=0\end{cases}$$
, 取 $y_2=1$, 所以 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$,

所以, $|\cos \theta|=\dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 从而 $\sin \theta=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
所以二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.（2023·全国·统考高考乙卷）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC的中点分别为D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点F在AC上，$BF\perp AO$.



(1)证明：$EF//$平面ADO；

(2)证明：平面$ADO\perp$平面BEF；

(3)求二面角$D-AO-C$的正弦值.

Solution:

(1) 连接 DE,OF, 设 $AF=tAC$,

则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

$\because BF\perp AO$,

则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=[(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}]\cdot\left(-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=(t-1)\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{2}t\overrightarrow{BC^2}=4(t-1)+4t=0$,

解得 $t=\frac{1}{2}$, 则 F 为 AC 的中点,

由 D,E,O,F 分别为 PB,PA,BC,AC 的中点,

于是 $DE//AB,DE=\frac{1}{2}AB,OF//AB,OF=\frac{1}{2}AB$, 即 $DE//OF,DE=OF$,

则四边形 $ODEF$ 为平行四边形, $EF//DO,EF=DO$,

又 $EF\not\subset$ 平面 $ADO,DO\subset$ 平面 ADO,

所以 $EF//$ 平面 ADO.

（2）法一：由（1）可知 $EF//OD$,

则 $AO=\sqrt{6},DO=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 得 $AD=\sqrt{5}DO=\frac{\sqrt{30}}{2}$,

因此 $OD^2+AO^2=AD^2=\frac{15}{2}$, 则 $OD\perp AO$, 有 $EF\perp AO$,

又 $AO\perp BF,BF\cap EF=F,BF,EF\subset$ 平面 BEF，

则有 $AO\perp$ 平面 BEF,

又 $AO\subset$ 平面 ADO,

所以平面 $ADO\perp$ 平面 BEF.

法二: 因为 $AB\perp BC$, 过点 A 作 z 轴 $\perp$ 平面 BAC, 建立如图所示的空间直角坐标系,

$\therefore A(2,0,0),,B(0,0,0),C(0,2\sqrt{2},0)$,

在 $\triangle BDA$ 中, $\cos\angle PBA=\dfrac{DB^2+AB^2-DA^2}{2DB\cdot AB}=\dfrac{\frac{3}{2}+4-\frac{15}{2}}{2\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

在 $\triangle PBA$ 中, $PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cos\angle PBA=6+4-2\sqrt{6}\times2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=14$,

设 $P(x,y,z)$, 所以由 $\begin{cases}PA=\sqrt{14}\\PB=\sqrt{6}\\PC=\sqrt{6}\end{cases}$ 可得: $\begin{cases}(x-2)^2+y^2+z^2=14\\x^2+y^2+z^2=6\\x^2+(y-2\sqrt{2})^2+z^2=6\end{cases}$,

可得： $x=-1,y=\sqrt{2},z=\sqrt{3}$, 所以 $P(-1,\sqrt{2},\sqrt{3})$,

则 $D\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F(1,\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{AO}=(-2,\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设平面 ADO 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AO}=0\\\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$, 得 $\begin{cases}-2x_1+\sqrt{2}y_1=0\\-\dfrac{5}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$,

令 $x_1=1$, 则 $y_1=\sqrt{2},z_1=\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BF}=(1,\sqrt{2},0)$

设平面 BEF 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$, 得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\x_2+\sqrt{2}y_2=0\end{cases}$,

令 $x_2=2$, 则 $y_2=-\sqrt{2},z_2=0$, 所以 $\overrightarrow{n_2}=(2,-\sqrt{2},0)$,

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times1+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+0=0$,

所以平面 $ADO\perp$ 平面 BEF;

(3) 法-：过点 O 作 $OH//BF$ 交 AC 于点 H, 设 $AD\cap BE=G$, 由 $AO\perp BF$, 得 $HO\perp AO$, 且 $FH=\frac{1}{3}AH$,

又由 (2) 知, $OD\perp AO$, 则 $\angle DOH$ 为二面角 $D-AO-C$ 的平面角,

因为 D,E 分别为 PB,PA 的中点,

因此 G 为 $\triangle PAB$ 的重心，即有 $DG=\dfrac{1}{3}AD,GE=\dfrac{1}{3}BE$,

又 $FH=\frac{1}{3}AH$, 即有 $DH=\dfrac{3}{2}GF$, $\cos\angle ABD=\dfrac{4+\frac{3}{2}-\frac{15}{2}}{2\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{4+6-PA^2}{2\times2\times\sqrt{6}}$, 解得 $PA=\sqrt{14}$,

同理得 $BE=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 于是 $BE^2+EF^2=BF^2=3$, 即有 $BE\perp EF$,

则 $GF^2=\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\dfrac{5}{3}$,从而 $GF=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, $DH=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$,

在 $\triangle DOH$ 中, $OH=\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{3}}{2}, OD=\frac{\sqrt{6}}{2}, DH=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

于是 $\cos\angle DOH=\frac{\frac{6}{4}+\frac{3}{4}-\frac{15}{4}}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\angle DOH=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

法二: 平面 ADO 的法向量为 $\vec{n}_1=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$, 平面 ACO 的法向量为 $\bar{n}_3=(0,0,1)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\rangle=\frac{n_1\cdot n_3}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_3}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\rangle\in[0,\pi]$,所以 $\sin\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\rangle}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,台

故二面角$D-AO-C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

这是一个涉及到数学分析和微积分的问题。我们可以用以下的方式解答这个问题。

首先，我们注意到这个极限的形式很像一个定积分的定义。让我们先看看$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$，这其实是二项分布的概率密度函数的连续版本，即Beta分布。

Beta分布的概率密度函数为 $f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$，其中 $B(\alpha,\beta)$ 是Beta函数，定义为 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$。

因此，我们可以将 $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ 看作是一个Beta分布的密度函数，其中 $\alpha=k+1$，$\beta=n-k+1$。注意，由于我们在计算的是密度函数乘以 $f(x)$ 的积分，而不是密度函数本身的积分，所以我们不需要关心分母中的 $B(\alpha,\beta)$。

这样一来，我们可以将原来的极限改写为

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}X\sim\mathrm{Beta}(k+1,n-k+1)[f(X)],$$

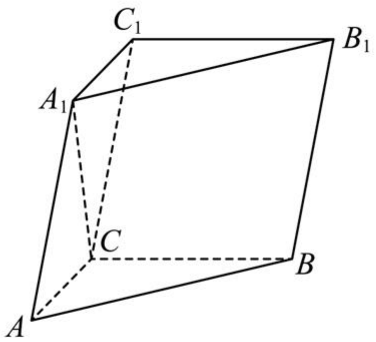
其中 $\mathbb{E}X\sim\mathrm{Beta}(k+1,n-k+1)[f(X)]$ 是指按照 $\mathrm{Beta}(k+1,n-k+1)$ 分布的概率密度函数对 $f(x)$ 取期望值。

当 $n\to\infty$ 时，由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，根据大数法则，上述极限可以转化为 $f(x)$ 的积分：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{X\sim\mathrm{Beta}(k+1,n-k+1)}[f(X)]=\int_0^1 f(x)dx.$$

这就是我们所求的极限

4．（2023·全国·统考高考甲卷）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90°, AA_1=2$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1．

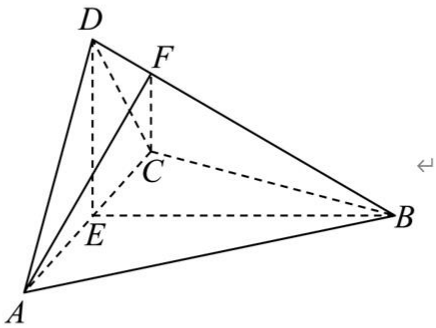


(1)证明：$A_1C=AC$；

(2)已知 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值．

Solution:

5．（2022·全国·统考高考乙卷）如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD, AD=CD, \angle ADB=\angle BDC$，$E$ 为 AC 的中点．



(1)证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD；

(2)设 $AB=BD=2, \angle ACB=60°$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值．

Solution: