

## 启明学院高等数学A(下)期末试题

期末试题 (1) (150 分钟内完成)

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n} =$

2. 微分方程  $y'' - y' = x - 2$  的通解为

3. 设  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (r > 0)$ , 则  $\iint_{\Sigma} \left( x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \right) dS =$

4. 设  $D$  是以  $(0,0), (1,1), (0,1)$  为顶点的三角形区域, 则  $\iint_D x^2 e^{y^2} dx dy =$

5. 函数  $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$  的极小值为

6. 曲线  $xy = 4$  在点  $(2,2)$  处的曲率为, 曲率半径为

二. 计算题(每小题 7 分, 共 35 分)

7. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$  的和函数 (需指明收敛域).

8. 求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y^2}$ . (若极限存在, 求出其值; 否则, 请阐明理由)

9. 设  $\Omega$  为平面曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周形成的曲面与平面  $z = 8$  所围的区域.

计算积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ .

10. 已知  $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi)$ . (1) 求  $f(x)$  的 Fourier 级数, 并求其和函数; (2) 利用 Parseval 等式求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  的和.

11. 求曲线  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 4, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  在点  $(1,1,-2)$  处的切线和法平面方程.

三. 解答题(每小题 7 分, 共 21 分)

12. 讨论函数  $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx$  在  $(0, +\infty)$  上的连续性.

13. 利用  $\frac{1}{\sin x} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} = 2 \int_0^a \frac{dy}{1-y^2 \sin^2 x}, \quad (0 < a < 1)$ , 计算积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} dx$

(提示: 计算中可能用到  $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$  和  $d(\cot x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ .)

14. 设一个向量与  $Oxy, Oyz, Ozx$  三坐标面的夹角为  $\varphi, \theta, \omega$ , 求  $\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta + \cos^2 \omega$  的值.

四. 证明题 (共 20 分)

15. (7 分) 设函数  $f(x, y)$  在  $R^2$  上存在连续偏导数,  $\vec{a}_1$  和  $\vec{a}_2$  是  $R^2$  上两个线性无关的单位向量. 若  $\frac{\partial f}{\partial a_1}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial a_2}(x, y) = 0$ . 证明: 在  $R^2$  上  $f(x, y)$  为常值函数.

16. (7 分) 设不含原点的区域  $\Omega$  有分片光滑封闭曲面  $\Sigma$  所围成,  $\vec{n}$  为曲面  $\Sigma$  的单位外法向量,  $\vec{r} = \{x, y, z\}, r = |\vec{r}|$ . 证明:

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS$$

17. (6 分) 设  $L$  是逆时针方向的圆周  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ ,  $f(t)$  是  $R$  上恒为正值的连续函数. 证明:  $\int_L x f(y) dy - \frac{y}{f(x)} dx \geq 2\pi$ .

期末试题(2)(150分钟内完成)

一、填空题(每空4分,共28分)

1. 用 Beta 函数表示积分  $\int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} dx =$

2. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\ln x)^n$  的收敛域与和函数分别是 和

3. 曲面  $z = 2x^2 + y^2 - xy$  在点  $(1, 1, 2)$  处的法线方程为

4. 函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  的 Fourier 级数是

5. 设  $(x^{2015} + 4xy^3) dx + (ax^2y^2 - 2y^{2066}) dy$  在整个  $xOy$  面内是某一函数  $u(x, y)$  的全微分, 则  $a =$

6. 设  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = 1$ , 则  $\int_L (x-y)^2 ds =$

7. 设  $L$  为曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = y \end{cases}$  从轴正向看为顺时针, 则  $\oint_L y^2 dx + xy dy + xz dz =$

二. 判断题(每小题2分,共8分). 请在正确说法相应的括号中画“√”, 在错误说法的括号中画“×”.

8. 若级数收敛, 则其重排后的级数也必收敛, 其和不变.

9. 若函数  $f(x, y)$  和  $f_y(x, y)$  都在区域  $[a, +\infty) \times [c, d]$  上连续, 且  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上一致收敛, 则  $\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$ .

10. 若向量函数  $\vec{F}$  在区域  $\Omega$  上有二阶连续偏导数, 则  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ .

11. 若  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  沿任意方向的方向导数都存在, 则  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微.

三、证明题(每小题6分,共12分)

12. 用定义证明  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x+y^2) = 1$ .

13. 设  $\Omega$  为上半球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 (z \geq 0)$ , 函数  $f$  在  $\Omega$  上连续. 证明:

$$\iiint_{\Omega} f(z) dx dy dz = \pi \int_0^1 f(z) (1-z^2) dz$$

四、计算题(每小题7分,共28分)

14. 求函数  $f(x) = x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  的 Maclaurin 展开式.

$\left( \text{已知 } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, x \in (-1, 1) \right).$

15. 设  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , 计算  $\iint_D (x+y) \operatorname{sgn}(x-y) dx dy$ .

16. 求密度均匀 ( $\mu = 1$ ) 的半球面  $\Sigma: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  对于  $z$  轴的转动惯量.

17. 计算  $I = \int_L (e^x \sin y - 2(x+y)) dx + (e^x \cos y - x) dy$ ,  $L$  是从原点  $O(0,0)$  沿折线  $y = |x-1| - 1$  至点  $A(2,0)$  的折线段.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 24 分)

18. 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  对于  $x$  在  $(0, 2\pi)$  内闭一致收敛.

19. 已知函数  $z = z(x, y)$  满足  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ . 设  $u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \varphi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ . 证明:

对函数  $\varphi = \varphi(u, v)$ , 成立  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ .

20. 设  $\Omega$  为空间二维单连通区域, 三元向量函数  $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ . 证明: 对  $\Omega$  内任一闭曲面  $\Sigma$  都有  $\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$  的充分必要条件是在  $\Omega$  内恒有  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , 其中  $\vec{n}$  为  $\Sigma$  的单位法向量.

期末试题 (3) (150 分钟内完成)

一、填空题 (每空 4 分, 共 28 分)

1、设  $\vec{F} = \{\sin x \cos y, \sin y \cos z, \sin z \cos x\}$ , 则  $\text{rot } \vec{F} =$

2、级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln x + \frac{1}{n}\right)^n$  的收敛域是

3、曲线  $\vec{r}(t) = \{1 - \sin t, 1 - \cos t, t\}$  的曲率  $K =$

4、函数  $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq h, \\ 0, h < x \leq \pi \end{cases}$  在  $[0, \pi]$  上的正弦级数是

5、交换积分次序后,  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 f(x, y) dy =$

6、函数  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8x$  在  $D: x^2 + y^2 \leq 16$  上的最大值是, 最小值是

7、直线  $L: x = 2t, y = 1, z = t$  绕  $z$  轴旋转一周所得的曲面方程是

二、判断题 (每小题 2 分, 共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“√”, 在错误说法的括号中画“×”。

8. 若级数发散, 则对其任意加括号后所得级数也必发散.

9. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

10. 设  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧, 它关于  $xy$  坐标面对称, 所以第二型曲面积分  $\iint_S z^{2017} dx dy = 0$

11. 若在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内  $f(x, y)$  的两个偏导函数连续, 则  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  沿任意方向的方向导数都存在.

三、解答题 (每小题 6 分, 共 12 分)

12. 计算  $I = \oint_L y dx + z dy + x dz$ , 其中  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  与平面  $x + z = 2$  的交线, 从  $z$  轴正向看去为逆时针方向.

13. 设  $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^2 - y^2)\}$ , 求  $\iint_D (x + y)^2 dx dy$ .

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

14. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{(2n)!!} x^n$  的收敛域及和函数.

15. 设  $L$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $z = y$  的交线, 计算曲线积分  $\int_L z^2 ds$ , 并将结果用 B 函数表示.

16. 设  $S$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$  介于平面  $z = 0$  和  $z = 1$  之间部分的外侧, 试计算第二型曲面积分  $I = \iint_S (y - z) x dy dz + (x - y) z dx dy$ .

17. 计算  $I = \int_L \frac{(y-1)dx - xdy}{x^2 + (y-1)^2}$ , 其中  $L$  是椭圆  $x^2 + 2y^2 = 4$ , 沿逆时针方向.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 24 分)

18. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \arctan \frac{x}{n}$  在  $(-\infty, \infty)$  内一致收敛.

19. 设曲面  $S$  方程由  $F(x, y, z) = 0$  确定, 其中  $F(x, y, z)$  具有连续的偏导数, 且  $F'_z \neq 0$ , 又

$S$  可一对一地投影到  $xOy$  面的区域  $D$ , 证明:  $S$  的面积  $A = \iint_D \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}{|F'_z|} dx dy$ .

20. 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域  $N((x_0, y_0))$  内具有二阶连续偏导数, 且  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  点取得极大值, 证明:  $f_{xx}(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$ .