第五章课后习题参考答案

5.1 第二型曲线积分

(A)

5.1.1 方法是一致的,掌握(5.1.5)及注5.1.2

(1) $-\dfrac{14}{15}$;

(2) $-2\pi a^2$;

(3)(本题有误,x^2后应有$\mathrm{d}y$) -2 ;

(4) $-\dfrac{1}{2}$;

(5) $\dfrac{4}{3}$;

(6) $\dfrac{25}{2}$;

(7) $-\pi a^2$;

(8) L 的参数方程为: $x=a\cos^2\theta, y=a\sin\theta\cos\theta, z=a\sin\theta, \theta\in[0,\pi]$(球坐标变换易得),

于是有:

$$\oint_L y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-2a^2\sin^3\theta\cos^3\theta+a^3sin^2\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+a^2\cos^5\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}a^3.$$

5.1.2 $\dfrac{1}{2n+1}$.

5.1.3 -4.

5.1.4

证: $I(a)=\displaystyle\int_0^\pi\left[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x\right]\mathrm{d}x=\pi-4a+\frac{2}{3}a^3$,

$$I'(a)=4-2a^2=0,$$

解得

$$a=\sqrt{2}\text{ (负值省去)},$$

所以 $y=\sqrt{2}\sin x$ 即为所要求的曲线.

5.1.5

由于 $Q_x=\dfrac{x^2-y^2-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=P_y, L$ 为闭曲线, 可用Green公式计算(直接计算法省略)。

设 L 围成区域为 D, 则 (1)I $=\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\oint_L(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\iint_D(-2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi$;

(2)(3)(4) 结果皆为 -2π.

5.1.6

(1) 曲线上任意一点 (x,y) 处得切向量 $\vec{T}=(1,1)$, 单位切向量为 $\vec{\tau}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 故

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_L(P+Q)\mathrm{d}s.$$

(2) $L: y=x^2, x=x, \vec{T}=(1,2x), \vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{\vec{T}\mid}=\frac{(1,2x)}{\sqrt{1+4x^2}}$

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L(P,Q)\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}s=\int_L\left(\frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\mathrm{d}s$$

(3) $L: x^2+y^2=a^2(y\geq 0), x: a\to 0$

$$\vec{T}=-\big(1,y'(x)\big)=-\left(1,-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right),\quad \vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}=\left(-\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},\frac{x}{a}\right)$$

所以 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L(P,Q)\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}s=\int_L\left(-\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}P+\frac{x}{a}Q\right)\mathrm{d}s.$

5.1.7 切向量 $\vec{T}=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)=\big(1,2t,3t^2\big)=(1,2x,3y)$,

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{\vec{T}}=\frac{(1,2x,3y)}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}$$

所以, $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_L(P,Q,R)\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}s=\int_L\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\,\mathrm{d}s.$

5.1.8

(1) $\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)$;

(2) 0 .

5.1.9

(1) $\pi b\left(\frac{a^2}{2}+1\right)$;

(2) $ab+\frac{1}{2}b^2$.

(B)

5.1.1

椪:

$$\begin{aligned}\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|&=\left|\int_L\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s\right|\leq\int_L\left|P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s\\&=\int_L\sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s\leq\int_L M\,\mathrm{d}s=Ms\end{aligned}$$

5.1.2

对于 I_r, 有:

$$M=\max_{x^2+y^2=r^2}\sqrt{P^2+Q^2}=\max_{x^2+y^2=r^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}}=\frac{4}{r^3},$$

所以 $0\le I_r\le\frac{4}{r^3}2\pi r=\frac{8\pi}{r^2},\Rightarrow\lim\limits_{r\to+\infty}I_r=0.$

5.1.3

设 L 的参数方程为: $L:x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$, 则 Γ 的参数方程为:

$$L:x=x(t),y=y(t),z=\varphi(x(t),y(t)),t\in[\alpha,\beta],$$

(1) 直接计算得

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y\\=&\int_\alpha^\beta\left[P(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t)))x'(t)+Q\left(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t))y'(t)\right)\right]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\oint_L P(x,y,\varphi(x,y))\mathrm{d}x+Q(x,y,\varphi(x,y))\mathrm{d}y\\=&\int_\alpha^\beta\left[P(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t)))x'(t)+Q\left(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t))y'(t)\right)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以原等式成立.

(2) 同 (1), 两边直接计算即可.

5.1.4 提示: 由 L 的方程消去z得其在 xoy 面上的投影曲线(椭圆): $\dfrac{\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=1,$

将 L 化为参数方程: $x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta),y=\frac{b}{\sqrt{2}},z=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)(\theta:0\to\pi)$, 再直接计算.

习题 **5.2** (A) 5.2.1

(1) 0 ;

(2) -12 ;

(3) 0 ;

(4) $\frac{3\pi}{2}$;

(5) $\frac{\pi}{2}ma^2$;

(6) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)$;

(7) $3+3(\pi-1)e^\pi+\frac{2}{3}\pi^3-\sin 2+2\cos 2$;

(8) $\frac{211}{4}+\sin 3-4\cos 3$.

5.2.2

(1) $\frac{3\pi ab}{8}$;

(2) $\frac{a^2}{6}$;

(3) $\frac{3a^2}{2}$;

(4) a^2

(5) 令 $y=tx$, 将曲线化为参数方程:

$$L: x=\frac{1+t^2}{1+t^3}, y=\frac{t\left(1+t^2\right)}{1+t^3}, 0\leq t<+\infty,$$

曲线在第一象限内的起点为 $(1,0)$, 终点为 $(0,1)$. 在曲线上有

$$x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^3\right)^2}\,\mathrm{d}t, 0\leq t<+\infty$$

在两坐标轴上, 均有 $x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=0$, 于是

$$S_D=\frac{1}{2}\oint_D x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^3\right)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$$

5.2.3 $\frac{\pi}{2}$

5.2.4

(1) -14 ;

(2) $\sqrt{13}-1$.

5.2.5

(1) $I=0$;

(2) $I=2\pi$;

(3) $0<a<1$ 时 $I=0; a>1$ 时 $I=-2\pi$;

(4) 同(3).

5.2.6 $\frac{e-1}{2}$.

5.2.7 原式 $=2S$, 其中 S 为 L 所围区域的面积.

5.2.9 由于 $X\,\mathrm{d}Y-Y\,\mathrm{d}X=(ad-bc)(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$, 故 $I=\frac{1}{2\pi}\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 其中

$$P(x,y)=\frac{-(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},\quad Q(x,y)=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}$$

经计算得: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{(ad-bc)\left[\left(a^2+c^2\right)x^2-\left(b^2+d^2\right)y^2\right]}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}$;
因为 $ad-bc\neq 0$, 故只有原点 $O(0,0)$ 使 $X^2+Y^2=0$. 取闭曲线 $l:(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2(r>0,r$ 允分小), 由Green公式得:

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2\pi}\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\oint_i P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_1 -(ad-bc)y\,\mathrm{d}x+(ad-bc)x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_l -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad(D\text{ 为l所围区域 })
\end{aligned}$$

再令: $u=ax+by,v=cx+\mathrm{d}y$, 即作变换

$$T:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$$

所以

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1/\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\frac{1}{ad-bc}$$

即得:

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint_{u^2+v^2=r^2}\frac{1}{|ad-bc|}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{\operatorname{sgn}(ad-bc)}{\pi r^2}\iint_{u^2+r^2=r^2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\operatorname{sgn}(ad-bc).$$

5.2.10 -4.

5.2.12

证明: (1)

$$\begin{aligned}
\text{左}&=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\
\text{右}&=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;
\end{aligned}$$

因为 $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$ 关于 $y=x$ 对称(具有轮换性), 所以:左 $=$ 右.
(2) 提示: 化为定积分, 再对被积函数作Taylor展开.
5.2.13 (1) $\dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\dfrac{1}{3}y^3+C$;
(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3y-x}{2\sqrt{2}x}+C$;

(3) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2x^2}{r^4},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2y^2}{r^4};$$

即, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0$ 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0\right]\equiv 0$.

故在任何不含原点的单联通区域中, $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 都是某函数 $u(x,y)$ 的全微分, 且对上半平面上的点 $(x,y)(y>0)$, 可取

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+C=\int_0^x P(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^y Q(x,y)\mathrm{d}y+C\\
&=\int_0^x\frac{\partial^{n+n+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x-\int_1^y\left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0}\mathrm{d}y+C\\
&=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{n-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0}\\
&-\left[\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0}+\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0,y=1}+C\\
&=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)-\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\frac{1}{r}\right]_{x=0}+C_1\\
&=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n\partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right)+C_1\\
&=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)\right)+C_1\\
&=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)+C_1
\end{aligned}$$

其中 $C_1=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0,y=1}+C$ 是常数. 同理, 对下半平面的点 $(x,y)(y<0)$, 有

$$u(x,y)=\int_{(0,-1)}^{(x,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\frac{\partial^{n+n}}{\partial x^n\partial y^{mi}}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)+C_2,$$

其中 $C_2=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0,y=1}+C'$.

5.2.14

(1) $\frac{1}{3}x^3-xy+2\cos y=C$;

(2) $x+\sin(xy)=C$;

(3) $xe^y+\frac{y}{x}=C$.

5.2.15

(1) $\lambda=\frac{1}{y^2}, \frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=C$.

(2) $\lambda=-\frac{1}{x^4}, e^x+\frac{y^2}{x^2}=C$.

5.2.16 $f(x)f\left(2\cos x+x^2-2\right.$.

5.2.17 $u=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

5.2.18

(1) $f(x)=5e^{x-1}-2(x+1)$;

(2) 0 .

5.2.19f $f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$.

5.2.20

(1) (略)

(2) $\varphi(x)=-x^2$;

(3) 0 .

5.2.21 2π. (B) 5.2.1 提示: 利用 $\vec{n}\,\mathrm{d}s=(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)$ 推出 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(u_{xx}+u_{yy}\right)dxdy$.

5.2.2 提示: 利用上题.

5.2.3

取 ε 任意小, 作圆周 $l: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 使其在 L 所围成区域内部. 记 L 与 l 围成的区域为 D_1, l 的内部区域为 D_s, l 取顺时针方向. 由

$$P=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}, Q=\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$$

易知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0$$

记原式左边为 I, 则

$$\begin{aligned}
I&=\oint_L+\oint_i+\oint_i=\oint_{L+i}-\oint_i=\iint_{D_i}\left(Q_x-P_y\right)\mathrm{d}\sigma-\oint_i\\
&=-\oint_i=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_i(xv-yu)\mathrm{d}x+(xu+yv)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xu+yv)-\frac{\partial}{\partial y}(xv-yu)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_s}2u(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}u(\xi,\eta)\cdot\iint_{D_s}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{2}{\varepsilon^2}u(\xi,\eta)\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi u(\xi,\eta);
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 由 u 的联系性知:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\pi u(\xi, \eta) = 2\pi u(0,0).$$

5.2.4

设 D 为半圆域: $y_0 \leq y \leq y_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}$, 由 Green公式得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{x_0-R}^{x_0+R} P(x,y)dx$$

再由积分中值定理, 得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y_0} \right)\bigg|_{(\xi,j)} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = P\left(\bar{\xi}, y_0\right) \cdot 2R, \quad \forall R > 0.$$

其中, $(\xi, \eta) \in D, \bar{\xi} \in [x_0 - R, x_0 + R]$. 令 $R \to 0^+$, 即 $P(x_0, y_0) = 0$, 再由 (x_0, y_0) 的任意性, 得 $P(x,y) \equiv 0$. 从而

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = 0.$$

由于 D 是任意的半圆, 易知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

5.2.5

提示: 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \varepsilon^2$ 在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 内部, 利用Green公式将原式转化为求椭圆域 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leq \varepsilon^2$ 的面积. 可利用(B)4.2.2题的结论.

习题 5.3

(A)

5.3.1 0.

5.3.2 $\dfrac{\pi+1}{6}$.

5.3.3 $-\dfrac{2}{15}\pi R^5$

5.3.4 $\dfrac{1}{2}\pi R^3$(合一投影法).

5.3 5 π.

5.3.6 $\pi r^2 R$

5.3.7 $\dfrac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3$.

5.3.8 $-\dfrac{1}{2}\pi R^3$.

5.3.9 $\dfrac{1}{2}$.

5.3.10 $abc \cdot \left[\dfrac{f(a) - f(0)}{a} + \dfrac{g(b) - g(0)}{b} + \dfrac{h(c) - h(0)}{c} \right]$.

5.3.11 $\dfrac{4\pi}{3}(ab+bc+ac)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$.

(注：椭球面积公式：$S=\dfrac{4\pi}{3}(ab+bc+ac)$)

5.3.12 $\dfrac{1}{2}$.

(B)

5.3.1 $4\pi\tan 1$.

5.3.2 提示: 化为第一型曲面积分.

习题 5.4

(A)

5.4.1 (1) $\operatorname{div}\vec{F}=y+2yz+3xz^2$;

(2) $\operatorname{div}\vec{F}=6xyz$;

(3) $\operatorname{div}\vec{F}=0$.

5.4.2

(1) $\operatorname{rot}\vec{F}=\overrightarrow{0}$;

(2) $\operatorname{rot}\vec{F}=-2(z,x,y)$;

(3) $\operatorname{rot}\vec{F}=(z\cos(yz),xy,-y\sin(xy)-xz)$.

5.4.3 $\nabla f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\vec{r},\quad \nabla\cdot(f(r)\vec{r})=3f(r)+rf'(r),\quad \nabla\times((f(r)\vec{r})=\overrightarrow{0}$.

5.4.5

(1) $\dfrac{1}{2}$;

(2) $\dfrac{12}{5}\pi R^5$;

(3) $-\left(\dfrac{R}{4}+\dfrac{2}{3}\right)\pi R^3$;

(4) $\left(\dfrac{h}{4}-1\right)\pi h^3$;

(5) $\dfrac{12}{7}\pi$;

(6) $\dfrac{32}{3}\pi$.

5.4.6$-\dfrac{128}{5}\pi$.

5.4.7 0 .

5.4.8 有误，改为证明：$V=\dfrac{1}{3}\oiint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$

5.4.9 $-\dfrac{\pi h^4}{2}$.

5.4.10 由Gauss公式，结论是显然的.

5.4.11 2π.

5.4.12 πR^2.

5.4.13

(1) 0 ;

(2) 4π;

解: 依题意知 $P=\frac{x}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}, Q=\frac{y}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}, R=\frac{z}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}$;

易知, 当 $(x, y, z) \neq(0,0,0)$ 时, $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$. 取球面 S_{ϵ} :

$x^{2}+y^{2}+z^{2}=\varepsilon^{2}(\varepsilon>0$), 方向取内侧, S_{1} 与 S_{2} 围成立体 Ω, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \oiint_{S} \frac{x \mathrm{d} x \mathrm{dy}+y \mathrm{d} z \mathrm{d} x+z \mathrm{d} x \mathrm{dy}}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{3/2}}=\oiint_{S}+\oiint_{S_{e}}-\oiint_{S_{\varepsilon}} \\
&=\oiint_{S+S_{e}}-\oiint_{S_{\varepsilon}}=\iiint_{\Omega} 0 \mathrm{d} V-\frac{1}{\varepsilon^{3}} \oiint_{S_{\varepsilon}} x \mathrm{d} x \mathrm{d} y+y \mathrm{d} z \mathrm{d} x+z \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\
&=\frac{1}{\varepsilon^{3}} \iiint_{x^{2}+y^{2}+z^{2} \leq z^{2}} 3 \,\mathrm{d} V=\frac{3}{\varepsilon^{3}} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^{3}=4 \pi .
\end{aligned}
$$

(3) 2π;

(4) 2π.

5.4.14 $-\frac{4\sqrt{6}\pi}{15}$

5.4.15

(1) $u=-\frac{1}{3}\left(x^{3}+y^{3}+z^{3}\right)-2 x y z+C$;

(2) $u=x\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)+C$.

5.4.16

(1) $\sin 1+e-\frac{1}{2}$;

(2) $\frac{1}{2} \int_{x_{0}^{2}+y_{0}^{2}+z_{0}^{2}}^{x_{1}^{2}+y_{1}^{2}+z_{1}^{2}} f(\sqrt{t}) d t$.

5.4.17 0.

5.4.18 $\frac{1}{3} h^{3}$.

5.4.19

n (1) $\frac{3}{2}$;

(2) $2S$.

5.4.20 $-2\pi a(a+h)$

5.4.21 $-\frac{9}{2} a^{2}$

5.4.22 $2\pi r^{2} R$

5.4.23 $\frac{\pi}{2} f^{\prime}(0)$.

5.4.24 $\frac{\pi}{6}$(提示：$\iint_\Sigma \nabla f\cdot\{x,y,z\}\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\nabla f\cdot\{x,y,z\}\,\mathrm{d}S$).

(B)

5.4.1 1 .

5.4.2 由三重积分的球坐标变换公式, 得

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x,y,z,t)\mathrm{d}V &= \int_0^t \mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(t\sin\varphi\cos\theta,t\sin\varphi\sin\theta,t\cos\varphi)t^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &=\int_0^t\left(\oiint_S f(x,y,z,t)\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t,\qquad (\text{教材中公式}(4.5.11))\\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V f(x,y,z,t)\mathrm{d}V &= \oiint_S f(x,y,z,t)\mathrm{d}S+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial t}\oiint_S f(x,y,z,t)\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t\\ &=\oiint_S f(x,y,z,t)\mathrm{d}S+\int_0^t\left[\oiint_S \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t\\ &=\oiint_S f(x,y,z,t)\mathrm{d}S+\iiint_V\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

5.4.3

证: 先设 S 不包围点 (x,y,z), 且设 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r},\bar{n})&=\cos(\vec{r},x)\cos\alpha,\cos(\vec{r},y)\cos\beta+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma\\ &=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\theta-z}{r}\cos\gamma,\end{aligned}$$

由Stockes公式有

$$\iint_S\cos(\vec{r},\bar{n})\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\theta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$\begin{aligned}&=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta\\ &=\iiint_V\frac{2}{r}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

故 $\iiint_V\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\bar{n})\mathrm{d}S$.

再设 S 包围点 (x,y,z), 这时不能直接应用Guass公式. 作以点 (x,y,z) 为球心, 半径为 ε (ε 充分小)的闭球 V_ε, 其边界为球面 S_ε, 则对 $V-V_\varepsilon$ 应用Gauss 公式, 有

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \cos(\vec{r},\bar{n})\mathrm{d}S + \iint_{S_2}\cos(\vec{r},\bar{n})\mathrm{d}S\\
=&\iiint_{V-V_x}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}S\\
=&2\iiint_{V-V_\alpha}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

在 S_E 上, $\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反, 故 $\cos(\vec{r},\bar{n})=-1$; 于是,

$$\iint_{S_e}\cos(\vec{r},\bar{n})\mathrm{d}S=-4\pi\varepsilon^2,\text{ 令 }\varepsilon\to0^+\text{即得原等式.}$$

5.4.4

证: (1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iint_S \nabla u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_V \nabla\cdot\nabla u\,\mathrm{d}V=\iiint_V \Delta u\,\mathrm{d}V$

(2) 将教材例5.4.6中Green第一公式中的 u,v 对换, 再两式相减.

5.4 .5

解设曲线 $C:\begin{cases}x^2+4y^2=1,\\ z=0\end{cases}$, 曲面 $S:x^2+4y^2+z^2=1(z\ge0),E$ 是 S 所围成的区域. 则由Stokes公式与题设,有

$$\int_C G(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_C\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=0;$$

另一方面, 注意到在 C 上, $x^2+4y^2=1$, 得到

$$\int_C G(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_C(-y,x)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_E 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2|E|\ne0,$$

矛盾, 因而 $\vec{F}$ 不存在.

5.4.6

解: 设 Ω 是 S 和平面 $S_1:z=z_0\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2\right)$ 围成的立体, D 为 V 在 O_{xy} 面上的投影区域: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2$, 则

$$
\begin{aligned}
0&=\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oiint_{S+S_1}-\oiint_{S_1}\\
&=\iiint_V(P_x+Q_y+R_z)\,\mathrm{d}V+\iint_D R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=(P_x+Q_y+R_z)|_{(\xi,n,\theta)}\cdot\frac{2\pi a^3}{3}+\pi a^2\cdot R(\xi_1,\eta_1,z_0)\,,\quad(\xi,\eta,\theta)\in V,(\xi_1,\eta_1)\in D.
\end{aligned}
$$

两边除以 a^2, 且令 $a\to0$ 得, $R(x_0,y_0,z_0)=0$; 类似地得 $(P_x+Q_y)|_{(x_0,y_0,z_0)}=0$; 由

x_0, y_0, z_0 的任意性知, $R(x,y,z)=0, P_x+Q_y\equiv 0$.
习题 5.5

(A)

5.5.1
$x^2+y^2=kz^2,\quad x^2+y^2=2z^2.$
5.5.2
证明: $\mathbf{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x,y,z)=(P,Q,R)$, 其向量线方程为 $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$, 即

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

解得向量线的方程为:

$$\begin{cases} x=C_1 y \\ y=C_2 z \end{cases}$$

5.5.3 $\operatorname{div}\vec{F}=0, \operatorname{rot}\vec{F}=(-2yz,-2xz,0)$.
5.5.4 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, \operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)=0$.
5.5.5
解: (1) $\Phi=\iiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}=0$. 补充平面: $S_1: z=0, x^2+y^2\le a^2$, 取下侧, $S_2: z=h, x^2+y^2\le a^2$, 取上侧. S 和 $S_1\Delta S_2$ 围成立体 V, 则由Gauss公式及对称性

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}=\iiint_V\\&=\iiint_V 6xyz\,dxdydz-0-\iint_{x^2+y^2\le a^2}xyh^2dxdy=0.\end{aligned}$$

(2) $\Phi=\iiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}=\iiint_V 6xyzdV=0$.
5.5.6 $a=2, b=-1, c=-2$.
5.5 .7
解: L 的参数方程为 $L: x=\cos t, y=\sin t, z=0, t\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}\Gamma&=\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint(x-z)dx+\left(x^3+yz\right)dy-3xy^2dz\\&=\int_0^{2\pi}\left[(\cos t)d(\cos t)+\left(\cos^3 t\right)d(\sin t)+0\right]=\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

5.5 .8

解：因为

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2zx & z^2 - 2xy \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

所以 $\vec{F}$ 是有势场, 其势函数为

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left[\left(x^2 - 2yz\right) dx + \left(y^2 - 2zx\right) dy + \left(z^2 - 2xy\right) dz\right] \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left[\frac{1}{3} d\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 2d(xyz)\right] \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\left[\frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 2xyz\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 2xyz. \end{aligned}$$

5.5.9 $u = xyz(x+y+z) + C$.

(B)

5.5.1

解: 设 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为曲面 S 的单位外法向量, 则 $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$.

1^o : 当原点 $(0,0,0)$ 在 S 的外部时, 由Guass公式得:

$$\begin{aligned} &\oiint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^3}\,\mathrm{d}S \\ &= \iiint_V \left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\right] \mathrm{d}V \\ &= \iiint_V \mathrm{d}V = 0; \end{aligned}$$

2^o : 当原点 $(0,0,0)$ 在 S 的内部时, 作小球面 $S_\varepsilon : r = \varepsilon, S_\varepsilon$ 围成区域 V_ε (ε 充分小); 取内侧, 在 S 和 S_ε 之间的区域 $V - V_\delta$ 上用Guass公式得:

$$\begin{aligned} \oiint_S &= \oiint_{S+S_\varepsilon} - \oiint_{S_e} = \iiint_{V-V_e} - \oiint_{S_\varepsilon} = 0 - \frac{1}{\varepsilon^3} \oiint_{S_k} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{V_k} 3\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi \end{aligned}$$

3^o : 当原点 $(0,0,0)$ 在曲面 S 上时, 则 $\oiint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为无界函数的曲面积分 (广义曲面积分), 且 $|\vec{F}\cdot\vec{n}| \le \dfrac{1}{r^2}$; 若曲面 S 在点 $(0,0,0)$ 是光滑的, 由类似于无界函数的二重积分的讨论可知, 广义积分 $\oiint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}$ 收敛. 取 S_ε 为以 $(0,0,0)$ 为球心, 半径为 ε 的球面; S_1 表示从 S 上不被 S_ε 所包围的部分, S_2 表示 S_ε 上含在 S 内的那部分, 则

$$\oiint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \lim_{\delta\to 0^+}\iint_{S_1}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}, \iint_{S_1+S_2}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \text{ (由(1)可得)},$$

其中 S_1 取外侧, S_2 取内侧.
因为曲面 S 在点 $(0,0,0)$ 是光滑的, 在点 $(0,0,0)$ 有切平面, 所以 S 在点 $(0,0,0)$ 的附近可用切平面近似代替, 即 S_2 可看作 S_ε 的半个球面, 故

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\iint_{S_1}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(-\iint_{S_2}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{-\vec{r}}{r}\,\mathrm{d}S\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\iint_{S_2}\frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}S\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi.\end{aligned}$$

5.5 .1
证: (1) $\oiint_S \dfrac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint_S \nabla u\cdot\vec{n}dS = \iiint_\Omega \nabla^2 u dv = \iiint_\Omega 0 dv = 0.$
(2)

$$\begin{aligned}\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS &= \iint_S u\nabla u\cdot\vec{n}dS = \iiint_\Omega \nabla(u\nabla u)dv\\ &= \iiint_\Omega\left(\nabla u\cdot\nabla u + \nabla^2 u\right)dv = \iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla u dv\end{aligned}$$