

启明学院2018-2019学年第二学期

《微积分下》期末A卷

2023 年 6 月 11 日

一、填空题 (每空 4 分, 共 28 分)

1、微分方程 $y'' + 2y' + 8y = 0$ 的通解为

2、设 $z = z(x, y)$ 是由 $f(x + z, yz) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 具有连续且不为零的一阶偏导数,

3、函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在点 $(1, -1)$ 处沿方向 $\vec{l} = \{1, 1\}$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1, -1)} = 2\sqrt{2}$.

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 展开式的和函数, 则 $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$, $S(\pi) = \frac{e^{\pi}-1}{2}$.

7、设 $du = (y+2xz)dx + (x+z^2)dy + (x^2+2yz)dz$, 则 $u(x, y, z) = \underline{u = xy + x^2z + y^2z + C}$.

二、判断题 (每小题 2 分, 共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“小”, 在错误说法的括号中画“×”.

8. 若无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也必收敛.

9. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不连续, 则偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 处必定不存在.

10. 设 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$, S_1 是 S 在第一卦限部分, 则 $\iint_{S_1} xy^2z^3 dS = 4 \iint_{S_1} xy^2z^3 dS$.

11. 设 $|u_n(x)| \leq v_n(x) (n \in N_+, x \in [a, b])$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

三、解答题 (每小题 6 分, 共 12 分)

12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 的收敛性, 是绝对收敛还是条件收敛?

解: $\tan(\sqrt{n^2+1}\pi) = \tan(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi) = \tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 而 $\left\{ \tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \right\}$ 是单调减且趋于 0 的数列, 所以原级数收敛. 又 $\tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{2n} (n \rightarrow \infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \tan(\sqrt{n^2+1}\pi)|$ 发散, 故原级数条件收敛.

13. 讨论含参变量积分 $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dy$ 关于 x 在 $[\delta, +\infty) (\delta > 0)$ 上的一致收敛

性.

解: 当 $x \in [\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$) 时, 有 $\left| \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{\pi}{2x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2\delta^2+y^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\delta^2+y^2} dy$ 收敛, 所以, 有由 M 判别法知 $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dy$ 关于 x 在 $[\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$) 是一致收敛.

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

14. $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 $D: |x| + |y| \leq 1$.

解: 设 D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $D_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$. 由对称性及轮换性, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy = 8 \iint_{D_Q} x^2 dx dy \\ &= 8 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy = 8 \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

15. # 计算曲面积分 $I = \iint_S x^2 y dz dx + (x + y^2 z) dx dy$, 其中 S 为下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧. 解: 补充 $S_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 取下侧: 则 S 与 S_1 围成下半单位球体 Ω .

由高斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_S x^2 y dz dx + (1 + y^2 z) dd y \\ &= \iint_{S_1+S_2} x^2 y dz dx + (1 + y^2 z) dd y - \iint_{S_1} x^2 y dz dx + (1 + y^2 z) dd y \\ &= - \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz - (-1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r \sin \varphi)^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \pi \cdot 1^2 \quad (\text{球坐标}) \\ &= -\frac{4\pi}{15} + \pi = \frac{11\pi}{15} \end{aligned}$$

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有连续的导函数, 曲线积分 $\int_L f^2(x) \sin y dx + (f(x)-x) \cos y dy$ 与路径无关, 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$ 及 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} f^2(x) \sin y dx + (f(x)-x) \cos y dy$.

解: 由曲线积分 $\int_L f^2(x) \sin y dx + (f(x)-x) \cos y dy$ 与路径无关, 得

$$\frac{\partial[(f(x)-x) \cos y]}{\partial x} = (f'(x)-1) \cos y = \frac{\partial[f^2(x) \sin y]}{\partial y} = f^2(x) \cos y,$$

得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + f^2(x). \\ \frac{df(x)}{1+f^2(x)} dx, \quad \int \frac{df(x)}{1+f^2(x)} &= \int dx, \\ \arctan f(x) &= x + C, \arctan f(x) = x + C, f(x) = \tan(x + C). \end{aligned}$$

由 $f(0) = 0$, 得 $C = 0$, 所以 $f(x) = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} f^2(x) \sin y \, dx + (f(x) - x) \cos y \, dy \\ &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \tan^2 x \sin y \, dx + (\tan x - x) \cos y \, dy \\ &= \int_0^1 0 \, dx + \int_0^1 (\tan 1 - 1) \cos y \, dy = (\tan 1 - 1) \sin 1. \end{aligned}$$

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解: 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n}$, 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)} x^{2n+2} / \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n} \right| = x^2$$

当 $\rho = x^2 < 1$ 即 $|x| < 1$ 时, 原级数收敛; 当 $\rho = x^2 > 1$ 即 $|x| > 1$ 时, 原级数发散, 故收敛域 $R = 1$.

又 $|x| = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ 收敛, 所以收敛域为 $[-1, 1]$.

设和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n}, x \in [-1, 1]$.

当 $x = 0$ 时, $s(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^x t^{2n} \, dt = \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{2n} \, dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \ln(1+t^2) \, dt = \ln(1+x^2) - 2 + \frac{2}{x} \arctan x. \\ s(x) &= \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \ln(1+x^2) - 2 + \frac{2}{x} \arctan x, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

五、证明题 (每小题 6 分, 共 24 分)

18. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{e^x + n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 令 $u_n(x) = (-1)^{n-1}, v_n(x) = \frac{1}{e^x + n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和 $U_n(x)$ 满足 $|U_n(x)| = |\sum_{k=1}^n u_k(x)| = |\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}| \leq 1$, 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上一致有界. 又对任意固定的 $x \in (-\infty, +\infty), v_n(x)$ 关于 n 单调降, 且

$$v_n(x) = \frac{1}{e^x + n} \Rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故由 Dirichlet 判别法知, 原级数一致收敛.

注: 用余项准则证明也可.

19. 证明: 由 $z = a, z = b, y = f(z)$ (f 为连续的正值函数) 以及 z 轴所围成的平面图形绕 z 轴旋转一周所成的立体对 z 轴的转动惯量 (密度为 $\mu = 1$) 为 $I_z = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(z) dz$.

证: 曲线 $y = f(z) (a \leq z \leq b)$ 绕 z 旋转一周所成的曲面方程为 $x^2 + y^2 = f^2(z)$, 题中的立体即为该曲面与平面 $z = a, z = b$ 所围的空间区域 (影转体), 记为 Ω . 其对 z 轴的转动惯量 (密度为 $\mu = 1$) 为 $I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$. (3 分) $\forall z \in [a, b]$, 过点 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 它在 Ω 内的截面为圆

$$D_z : x^2 + y^2 \leq f^2(z), z \in [a, b]$$

来用先的后一法计算, 可得

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_a^b dz \iint_{D_z} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(z)} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(z) dz. \end{aligned}$$

20. 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 可微, 在 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 证明: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处也可微.

证: 令 $\varphi(t) = f(t\Delta x, t\Delta y), (\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$. 由题设条件, $t \neq 0$ 时, $\varphi(t)$ 可导. 且 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = \frac{\partial f(\xi\Delta x, \xi\Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(\xi\Delta x, \xi\Delta y)}{\partial y} \Delta y$$

再由条件得

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

即 $\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\rho), \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$. 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处也可微.

21. 设连续函数列 $\{f_n(x, y)\}$ 在有界闭区域 D 上一致收敛于 $f(x, y)$, 证明:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D f_n(x, y) dx dy.$$

证: 因 $\{f_n(x, y)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x, y)$, 故由定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $(x, y) \in D$, 有 $|f_n(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$. 于是

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_D f_n(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y) - f_n(x, y)| dx dy \leq \varepsilon \iint_D dx dy \leq \varepsilon S_D,$$

其中 S_D 为存界闭区域 D 的面积. 故

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D f_n(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$