

# 启明选拔考试数学部分历年题合集

2023 年 9 月 6 日

写在开头:

整理了一下历年的启明考试真题以供参考,想通过启明考试转专业的同学可以仔细看看,具体的备考策略可参见转专业群文件《转专业-数学(时间匆忙先写一点)》,祝各位考试顺利!

## 2023年启明考试数学部分

一.填空题(每题9分)

1.若  $\alpha, \beta$  为正整数且  $\alpha^2 + \beta^2 = 3025$  则  $\alpha + \beta =$

注意到  $3025 = 55^2 = (5 \times 11)^2$ , 由勾股定理显然可知一种情况  $\alpha = 3 \times 11, \beta = 4 \times 11$ , 故  $\alpha + \beta = 77$ .

2.  $f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$ . 则  $f(-1) =$

$$\text{注意到} \begin{cases} f(-1) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -1 & (1) \\ f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{2} & (2) \\ f(\sqrt[3]{2})f(-1) = 2 & (3) \end{cases} \quad (1) + (3) - (2) \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{4}$$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi}$  的值为

$$\begin{aligned} \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi} &= \sin^2(\sqrt{n^2 + n} - n)\pi = \sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \pi \\ &= \sin^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \pi \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

4.  $\beta$  为锐角. 则  $\left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right)$  最小值为

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right) = \frac{\sin \beta \cos \beta + \sin \beta + \cos \beta + 1}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin \beta + \cos \beta + 1}{\sin \beta \cos \beta} + 1$$

令  $t = \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{2} \sin(\beta + \frac{\pi}{4}) \in (1, \sqrt{2}]$ , 则  $\sin \beta \cos \beta = \frac{t^2 - 1}{2}$

原式  $= 1 + \frac{1+t}{t^2-1} = 1 + \frac{2}{t-1} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$  取等号.

5.  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{p} = 1$  与  $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{p} = 1 (m, n, p > 0)$  有公共焦点  $F_1, F_2$  共交点为  $Q$ . 则  $S_{\triangle QF_1F_2} =$   
由题意得  $m - n = 2p$ ,  $m + n = 2(m - p)$ .

$$\begin{cases} \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{p} = 1, \\ \frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{p} = 1, \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{2mn}{m+n}, y = \pm \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{m+n}}$$

$$\therefore |F_1F_2| = 2\sqrt{m-p} = 2\sqrt{n+p},$$

$$\therefore S_{\triangle QF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{m-p} \times \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{m+n}} = p.$$

6. 设  $\varepsilon$  为 1 的 7 次方根  $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^4} + \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^6} =$

对于方程  $x^7 = 1 \Rightarrow (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ ,  $\varepsilon$  为其一个根

$\varepsilon = 1$ , 易得原式  $= \frac{3}{2}$

$$\varepsilon \neq 1 \Rightarrow \varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^4} + \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^6} &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^5}{1+\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^4}{1+\varepsilon} = 2 \frac{\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} \\ &= -2 \frac{\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} = -2 \frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} = -2 \end{aligned}$$

7. 三棱柱侧棱垂直底面且所有棱长为  $\beta$ , 则外接球表面积为

$$\text{这道题很简单, 画个图很容易得到: } R^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}\beta)^2 + (\frac{1}{2}\beta)^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{6}\beta$$

$$\text{故 } S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi\beta^2$$

8. 甲组 5 名男同学、3 名女同学, 乙组 6 名男同学、2 名女同学, 从甲、乙两组各选 2 名, 则 4 人中恰好有一女的选法有

分两种情况:

case 1: 这名女生来自甲组, 共  $C_3^1 C_5^1 C_6^2 = 225$  种

case 2: 这名女生来自乙组, 共  $C_2^1 C_6^1 C_5^2 = 120$  种

故总的选法有 345 种

二. 解答题 (本题 12 分)

设数列  $\{\beta_n\}$  满足  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_{n+1} - \beta_n = 3 \times 2^{n-1}$  记  $\alpha_n = n\beta_n$  求  $\{\alpha_n\}$  前  $n$  项和

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) + \beta_1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \Rightarrow \alpha_n = 3n \cdot 2^{n-1} - n$$

$$\text{由错位相减法易求得 } T_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 3(n-1)2^n - \frac{n(n+1)}{2} + 3$$

三.解答题(本题16分)

已知  $f(x) = \ln(x+1) + \frac{\beta}{x+2}$

(i) 若  $x > 0, f(x) > 1$  恒成立, 求  $\beta$  取值范围.(6分)

$$\ln(x+1) + \frac{\beta}{x+2} > 1 \Rightarrow \beta > (x+2)[1 - \ln(x+1)]$$

令  $h(x) = (x+2)[1 - \ln(x+1)], x \in (0, +\infty)$

$$h'(x) = -[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}] < 0 \Rightarrow h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调减}$$

$$\text{故 } \beta \geq h(0) = 2$$

(ii) 求证  $\ln(2024) > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4045} + \frac{1}{4047}$ .(10分)

$$\text{由(i)知: } \ln(x+1) > 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}, x > 0$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{k} \text{ 得到 } \ln(\frac{k+1}{k}) > \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k} + 2} = \frac{1}{2k+1}, x > 0$$

$$\text{故 } \ln(2024) = \sum_{k=1}^{2023} \ln(\frac{k+1}{k}) > \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{2k+1}$$

## 2022年启明考试数学部分

一.填空题(每题9分)

1. 已知  $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , 计算  $[\beta^{12}]$  ( $[x]$  为  $x$  的整数部分).

解:  $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  是方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的根, 故:  $x^2 = x + 1, x^4 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 3x + 2, x^{12} = (3x+2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = 27x(x+1) + 54(x+1) + 36x + 8 = 27x^2 + 117x + 62 = 27(x+1) + 117x + 62 = 144x + 89 \Rightarrow \beta^{12} = 72\sqrt{5} + 161 \in (321, 322)$ , 故:  $[\beta^{12}] = 321$ .

注释: 考察对偶结构  $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  也是一个重要思想,

分析: 熟知Fibonacci  $i$  数列通项:  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ ,

$$\left( \begin{array}{l} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1, \text{ 则特征方程: } x^2 = x + 1, x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ \text{则: } a_n = C_1 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ \text{代入初值条件得: } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \end{array} \right),$$

解: 令  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ , 则:

$$a_{12} = 144 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{12} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \right], \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{12} = 144\sqrt{5} + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12},$$

注意到:  $144\sqrt{5} = \sqrt{103680} \in (321.5, 322)$ ,  $\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \approx (0.618)^{12} \approx \frac{1}{2^{12}}$ , 故:  $[\beta^{12}] = 321$ .

2. 已知:  $\beta_1 = 3, \beta_{n+1} = \beta_n^2 - 3\beta_n + 4$ , 计算:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1}$

解:  $\beta_{n+1} = \beta_n^2 - 3\beta_n + 4 \Rightarrow \beta_{n+1} - 2 = \beta_n^2 - 3\beta_n + 2 = (\beta_n - 2)(\beta_n - 1)$ ,

则:  $\frac{1}{\beta_{n+1} - 2} = \frac{1}{(\beta_n - 2)(\beta_n - 1)} = \frac{1}{\beta_n - 2} - \frac{1}{\beta_n - 1}$ , 即:  $\frac{1}{\beta_n - 1} = \frac{1}{\beta_n - 2} - \frac{1}{\beta_{n+1} - 2}$ ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_{n+1} - 2},$$

下证:  $\beta_n$  单调递增趋于  $+\infty$ , 注意到:  $\beta_{n+1} - \beta_n = \beta_n^2 - 4\beta_n + 4 = (\beta_n - 2)^2 > 0$ ,

$\Rightarrow \beta_{n+1} - \beta_1 = \sum_{i=1}^n (\beta_i - 2)^2 > \sum_{i=1}^n (\beta_1 - 2)^2 = n$ , 故:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$ , 即:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1} = 1$ .

3. 已知:  $a^2 + b^2 = 5$ , 求  $2a + 3b$  的最大值,

解:

$$\text{Solution 1: } 2a + 3b \leq \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} (\text{cauchy}) = \sqrt{65}$$

$$\text{Solution 2: } 2a + 3b = 2\sqrt{5} \cos \theta + 3\sqrt{5} \sin \theta \leq \sqrt{65}.$$

4. 已知:  $\begin{cases} x + \sin x \cos x - 1 = 0 \\ 2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0 \end{cases}$ , 求  $\sin(2x - y)$ .

$$\text{解: } \begin{cases} x + \sin x \cos x - 1 = 0 \\ 2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sin 2x - 2 = 0 \\ y - \cos y - \frac{\pi}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sin 2x - 2 = 0 \\ y - \frac{\pi}{2} + \sin(y - \frac{\pi}{2}) - 2 = 0 \end{cases},$$

观察上式易得同构:  $2x = y - \frac{\pi}{2}$ , 下证仅有此唯一同构

注意到:  $h'(x) = (2x + \sin 2x - 2 = 0)' = 2 + 2 \cos 2x \geq 0, h(x)$  单调增

即根是唯一的, 因此  $2x = y - \frac{\pi}{2}$  是唯一解

故:  $\sin(2x - y) = -1$ .

5. 已知:  $f(1) = 2022, \forall n > 1, n \in \mathbb{N}$ , 有:  $\sum_{k=1}^n f(k) = n^2 f(n)$ , 求:  $f(2022)$ .

$$\text{解: } \begin{cases} \sum_{k=1}^n f(k) = n^2 f(n) \\ \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = (n+1)^2 f(n+1) \end{cases} \Rightarrow f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1) - n^2 f(n),$$

$$\text{即: } (n^2 + 2n) f(n+1) = n^2 f(n) \Rightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n}{n+2},$$

故:  $f(2022) = f(1) \prod_{k=1}^{2021} \frac{k}{k+2} = 2022 \cdot \frac{2}{2022 \cdot 2023} = \frac{2}{2023}$ .

6. 定义  $\mathbb{C}$  为复数集, 集合  $A = \{z \mid z^{18} = 1, z \in \mathbb{C}\}$ ,  $B = \{w \mid w^{48} = 1, z \in \mathbb{C}\}$ ,

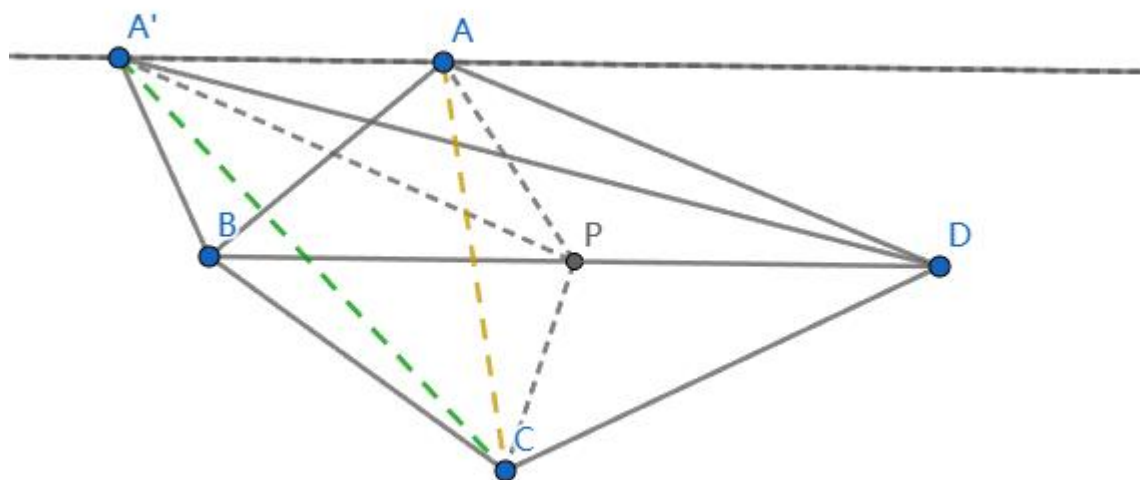
求:  $\text{card}[\{zw \mid z \in A, w \in B\}]$ .

解: 由棣莫弗定理:  $z = e^{\frac{2k\pi}{18}i} = \cos \frac{2k\pi}{18} + i \sin \frac{2k\pi}{18}$ ,  $w = e^{\frac{2k'\pi}{48}i} = \cos \frac{2k'\pi}{48} + i \sin \frac{2k'\pi}{48}$ ,  
 $zw = e^{\frac{2(8k+3k')}{144}i\pi}$ , 注意到 8 与 3 互质, 则根据裴蜀定理,  $8k + 3k'$  可以取得任意整数值,  
 $k, k' \in \mathbb{Z}$

$8k + 3k' \in \mathbb{Z}$ , 且  $8k + 3k'$  可以取到  $[0, 143]$  的任意值, 故:  $zw$  一共有 144 个.

7. 在一个凸四边形  $ABCD$  中存在点  $P$ , 满足  $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PDA}$ ,  
 $S_{\triangle ABC} = \alpha S_{\triangle ADC}$ , 求:  $\alpha$ .

注释: 本题有误, 考察如下情况:  $BD$  平分四边形  $ABCD$  的面积,  $P$  为  $BD$  中点, 注意到  $A'$  在过  $A$  平行  $BD$  的直线上运动时  $\alpha$  的值并不确定



8. 三位数中任意两个数字之和都能被第三个数整除, 求这样的三位数的个数

解:

case 1: 该三位数各位数字相等, 显然有 9 个,

case 2: 该三位数各位数字不等, 有:  $(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)$ , 一共  $3A_3^3 = 18$  个,

case 3: 该三位数有且仅有 2 位数相同, 有:  $(1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6), (4, 4, 8)$ , 一共  $4C_3^1 = 12$  个, 故这样的三位数有:  $9 + 18 + 12 = 39$  个.

## 二.解答题(12分)

请用3种方法证明:  $\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 \geq \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ ).

解:

法一:

根据基本不等式  $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$ , 故:  $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\eta}{4} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma+\eta}{2}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\gamma\eta}} = \sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta}$ ,

令  $\eta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ , 有:  $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$ , 证毕

法二:

令  $\alpha = x^3, \beta = y^3, \gamma = z^3$ , 则:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ &= \frac{1}{3} \{ [(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2] + z^3 - 3xyz \} \\ &= \frac{1}{3} \{ [(x+y)^3 + z^3] - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz \} \\ &= \frac{1}{6} (x+y+z) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

证毕

法三:

令  $f(x) = \ln x$ , 则:  $f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ,

故:  $f(x)$  是上凸函数, 根据琴生不等式,  $\ln \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \frac{1}{3}(\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma)$ , 证毕

## 三.解答题(16分)

已知:  $f(x) = \beta x - \ln x - 1$ ,

(i): 若  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $\beta$  的最小值;

(ii): 求证:  $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1$ ;

(iii): 若  $\alpha(e^{-x} + x^2) \geq x - x \ln x$  恒成立, 求  $\alpha$  的取值范围

解: (i):  $f(x)$  的定义域是  $(0, +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0 \Rightarrow \beta x - \ln x - 1 \geq 0, \Rightarrow \beta \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ ,

令  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ,

当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) > 0, g(x)$  单调增, 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0, g(x)$  单调减

故  $g_{\max}(x) = g(1) = 1$ , 即:  $\beta \geq g_{\max}(x) = 1, \beta$  的最小值为1.

证明:(ii): 当  $\beta = 1$  时, 有:  $\ln x \leq x - 1$ ,

令  $\frac{1}{xe^x} = t$ , 则:  $-x - \ln x = \ln t \leq t - 1 = \frac{1}{xe^x} - 1$ , 即:  $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1$ .

解: (iii):  $\alpha(e^{-x} + x^2) \geq x - x \ln x \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{xe^x} + x\right) \geq 1 - \ln x$ ,

注意到:  $\frac{1}{xe^x} + x > 0$ , 即:  $\alpha \geq \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x}$ ,

由(ii) 知:  $\frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x} \leq 1$ , 且  $xe^x = 1$  时,  $\frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x} = 1$ ,

故:  $\alpha \geq 1$ ,  $\alpha$  的取值范围是  $[1, +\infty)$ .

## 2021年启明考试数学部分

1.  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ,  $xyz =$ .

解:

$$\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

$\Rightarrow x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}) = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$  由于  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ , 因此不妨设:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{2} \\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

故:  $xyz = \frac{3}{4}$

2.  $f(x) \geq 0$ ,  $f^2(x+1) + f^2(x) = 73$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). 当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = 10 - |13x - 4|$ ,  $f(\frac{2021}{13}) =$

解:  $f^2(x+1) + f^2(x) = 73 \Rightarrow f^2(x+2) + f^2(x+1) = 73 \Rightarrow f^2(x+2) = f^2(x)$

$\because f(x) \geq 0 \therefore f(x+2) = f(x)$

$$f(\frac{2021}{13}) = f(\frac{19}{13}), \text{又} \because f^2(\frac{19}{13}) + f^2(\frac{6}{13}) = 73$$

解得:  $f(\frac{2021}{13}) = 3$

3.  $y = \frac{4 \sin \theta \cos \theta + 3}{\sin \theta + \cos \theta}$  ( $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ ), 则  $y$  的最小值为

$$y = \frac{2(1 + 2 \sin \theta \cos \theta) + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2(\sin \theta + \cos \theta)^2 + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = 2(\sin \theta + \cos \theta) + \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \geq 2\sqrt{2}$$

当且仅当  $2(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ , 即  $\theta = \frac{7\pi}{12}$  or  $-\frac{\pi}{12}$  取"

4.  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_3 = -13$ ,  $a_7 = 3$ .  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 则  $(S_n)_{\min} =$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = -13 \\ a_1 + 6d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -21 \\ d = 4 \end{cases}$$

易知  $n = 6, (S_n)_{\min} = -66$

5.  $w = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ , 则以  $w, w^3, w^7, w^9$  为解的方程为.

解: 由棣莫弗定理易知:  $w^5 = -1$ , 因此以  $w, w^3, w^7, w^9$  为解的方程等价于以  $w, -w^2, w^3, -w^4$  为解的方程.

易知:  $-1, w, -w^2, w^3, -w^4$  是  $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$  的根.

故以  $w, w^2, w^3, w^4$  为解的方程是  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

6. A, B 是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上两点, O 是原点,  $OA \perp OB$ , 则  $|AB|_{\min} =$

解: 根据题意不妨设  $A(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta), B\left[r_2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), r_2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ ,

则  $B(-r_2 \sin \theta, r_2 \cos \theta), AB^2 = r_1^2 + r_2^2, \frac{r_1^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1,$

$r_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}, \frac{r_2^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{r_2^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1, r_2^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}.$

$$\begin{aligned} \text{故 } r_1^2 + r_2^2 &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2 (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2} = \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\theta + 4a^2 b^2} \\ &\geq \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

当且仅当  $\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$  时等号成立. 因此, 线段 AB 长的最小值为  $\frac{2ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}.$

7. 双曲线:  $\Gamma \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ , 过右焦点作一条长度为  $4\sqrt{3}$  的弦 AB, A, B 位于右支上. 将双曲线  $\Gamma$  绕其右准线旋转  $90^\circ$ , 则弦 AB 形成的曲面面积为

解: 分析易知弦 AB 扫过的面积为一圆台侧面积的  $\frac{1}{4}$ . 设 A, B 两点到右准线  $l: x = \frac{4}{3}$  的距离分别为  $r_1, r_2$ ,

由于双曲线离心率  $e = \frac{3}{2}$ , 故  $S = \frac{1}{4} \pi (r_1 + r_2) |AB| = \frac{1}{4e} \pi |AB|^2 = 8\pi$

8. 三种方法求  $x(x+1)(x+2)(x+3)$  最小值.

法一: 不妨设  $y = x + \frac{3}{2}$ , 则  $x = y - \frac{3}{2}$ , 代入  $x(x+1)(x+2)(x+3)$  中得到:



$$\begin{aligned}
& x(x+1)(x+2)(x+3) \\
&= (y - \frac{3}{2})(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})(y + \frac{3}{2}) \\
&= (y^2 - \frac{9}{4})(y^2 - \frac{1}{4}) \\
&= y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} \\
&= (y^2 - \frac{5}{4})^2 - 1
\end{aligned}$$

由于  $y^2 \geq 0$ , 所以  $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$ , 等号成立当且仅当  $y^2 = \frac{5}{4}$ , 即

$$x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$$

法二:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}[x(x+1)(x+2)(x+3)] \\
&= (x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) \\
&= 4x^3 + 18x^2 + 11x + 6 \\
&= (4x+6)(x^2+3x+1)
\end{aligned}$$

令导函数等于 0, 解得  $x = -\frac{3}{2}$  或  $x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$  带入原函数中可得最小值在  $x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$  取得, 结果为 -1。

法三:

$$\begin{aligned}
& x(x+1)(x+2)(x+3) \\
&= x(x+3)(x+1)(x+2) \\
&= (x^2+3x)(x^2+3x+2) \\
&= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) \\
&= (x^2+3x+1)^2 - 1 \geq -1 (x^2+3x+1=0, \text{即 } x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2} \text{ 取得})
\end{aligned}$$

9. 已知  $0 < a < b$ , 证  $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}$ .

证明: 原式等价于要证:  $\ln \frac{b}{a} > \frac{2a(b-a)}{a^2+b^2} = \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$t = \frac{b}{a} \in (1, +\infty)$ , 即证:  $(1+t^2)\ln t > 2t-2$

注意到  $\ln t > 1 - \frac{1}{t}, t \in (1, +\infty)$ , 即证:  $(1+t^2)\ln t > (1+t^2)(1 - \frac{1}{t}) > 2t-2$ ,

即证:  $t^2 - 3t - \frac{1}{t} + 3 > 0$ , 而此式求导易证

## 2019年启明考试数学部分

1. 37, 23, 19, 5.....以此类推,第五个数为:

解: 1

2. 今天星期六, 则  $3^{1998}$  天后是星期几

解: 注意到  $3^{1998} = (27)^{666} = (28 - 1)^{666} = 1 + \sum_{k=0}^{665} C_{666}^k (28)^{666-k} (-1)^k = 7N + 1$

故为星期天.

3. 若  $x$  满足  $x + x^{-1} = -1$ , 求  $x^{2019} + x^{-2019}$ .

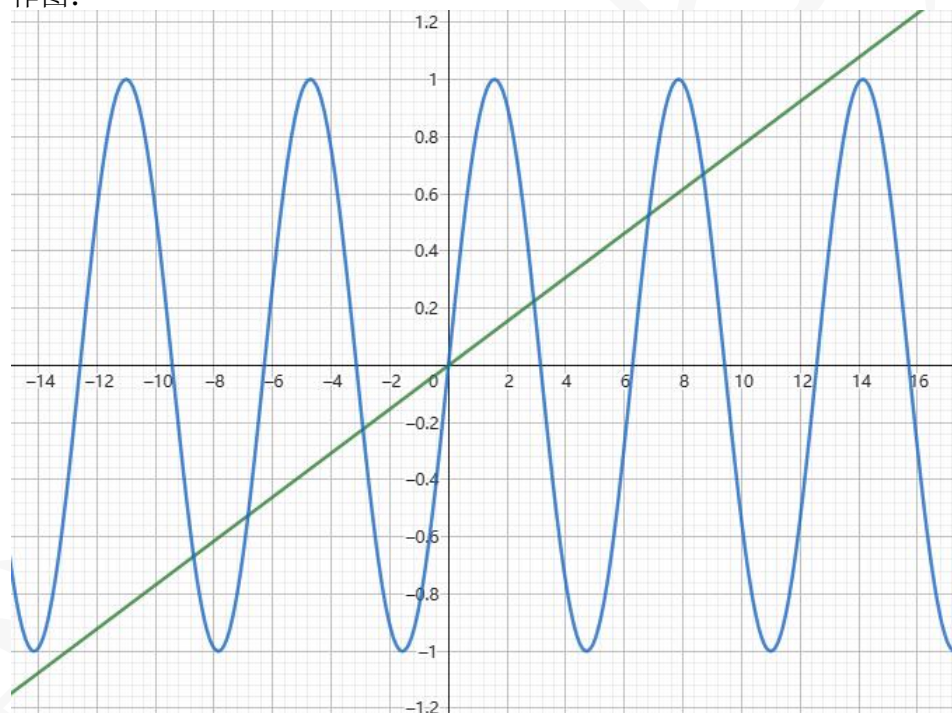
$x + x^{-1} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ , 则  $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}$  (欧拉公式).

由棣莫弗定理易得  $x^{2019} = e^{\pm 1046\pi i} = 1$

故  $x^{2019} + x^{-2019} = 2$ .

4. 求方程  $13\sin x = x$  的根.

作图:



可以求得零点为  $x = 0$ , 由于此方程为超越方程, 其他6个零点为隐零点.

5. 设整数数列  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  满足  $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$ . 且  $a_{i+1} \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ ), 求这样的数列有多少个.

不妨设  $b_i = a_{i+1} - a_i \in \{1, 2\}$ , 由  $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$ , 可得:

$$\begin{cases} 2a_1 = \sum_{i=1}^9 b_i \\ b_7 + b_6 + b_5 = b_4 + b_3 + b_2 \end{cases}$$

对于  $b_7 + b_6 + b_5 = b_4 + b_3 + b_2$ , 分析易知等式两端 1, 2 的个数相等, 因此  $b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2$  总的取法共有:  $(C_3^0)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^3)^2 = 20$  种

注意到  $b_7 + b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2$  必是偶数, 由  $\therefore 2a_1 = \sum_{i=1}^9 b_i$ ,  $2a_1$  也为偶数

故  $b_1 + b_8 + b_9$  必为偶数, 取法有 4 种

故满足条件的数列共有  $4 \times 20 = 80$  种

6. 求  $n^3 + 100$  能被  $n + 10$  整除的最大整数.

$$\begin{aligned} & \frac{n^3 + 100}{n + 10} \\ &= \frac{n^3 + 1000}{n + 10} - \frac{900}{n + 10} \\ &= n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n + 10} \\ &\Rightarrow n_{\max} = 890 \end{aligned}$$

7.  $x, y, z$  为非负整数, 且  $\begin{cases} x + y + z = 10 & \text{①} \\ x + 2y + 3z = 30 & \text{②} \end{cases}$ , 求  $x + 5y + 3z$  的取值范围

解:  $3 \times \text{①} - \text{②} \Rightarrow 2x + y = 0$

$\therefore x, y \in \mathbb{N}^* \therefore x = y = 0 \Rightarrow z = 10$

故  $x + 5y + 3z = 30$

8. 若  $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$  关于  $x = -2$  对称, 求  $f(x)_{\max}$ .

解: 注意到  $x = -1, 1$  为  $f(x)$  的零点, 又  $\therefore x = -2$  为其对称轴, 因此可得另两个零点为:

$x = -3, x = -5$

故  $f(x) = (1 - x^2)(x + 3)(x + 5)$

$$\begin{aligned} \text{注意到: } f(x) &= (1 - x)(x + 5)(1 + x)(x + 3) \\ &= (-x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 3) \\ &\leq \left( \frac{-x^2 - 4x + 5 + x^2 + 4x + 3}{2} \right)^2 \\ &= 16 (\text{当且仅当 } -x^2 - 4x + 5 = x^2 + 4x + 3 \text{ 取得}) \end{aligned}$$

9. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\begin{cases} x \sin \beta + y \cos \alpha = \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \beta = \sin \beta \end{cases}$ , 求  $x^2 - y^2$ .

分析: 不要被题设吓到, 实际上就是解二元一次方程组

$$\begin{cases} x \sin \beta + y \cos \alpha = \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \beta = \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} \\ y = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} \end{cases}$$

$$x = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

$$= \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = -\sec(\alpha + \beta)$$

$$y = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

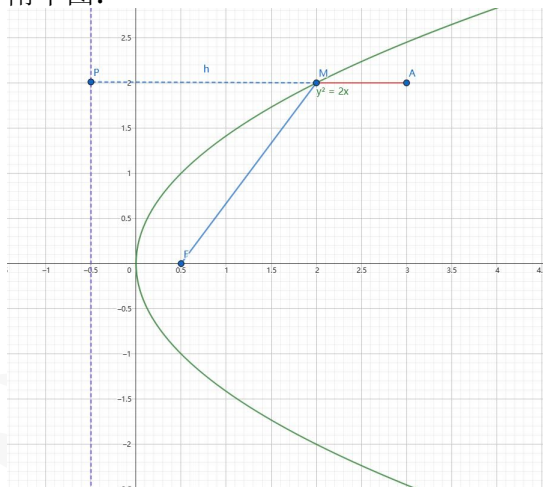
$$= \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

故  $x^2 - y^2 = 1$

10.  $A(3, 2)$  是平面上一点,  $F$  是抛物线:  $y^2 = 2x$  上的一点, 抛物线上一点  $M$ , 则  $|MF| + |MA|$  取最小值的时  $M$  的坐标

解: 很简单的高中题. 由题意得  $F(\frac{1}{2}, 0)$ , 准线方程为  $x = -\frac{1}{2}$ , 设点  $M$  到准线的距离为  $d = |PM|$ . 则由抛物线的定义得  $|MA| + |MF| = |MA| + |PM|$  故当  $P, A, M$  三点共线时,  $|MF| + |MA|$  取得最小值为  $|AP| = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$ . 把  $y = 2$  代入抛物线  $y^2 = 2x$  得  $x = 2$ , 故点  $M$  的坐标是  $(2, 2)$

附个图:



11.  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(z)$  满足  $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$  且  $f(x) \neq 0$ , 证明:  $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

令  $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y) \Rightarrow 2f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y) (*)$

令  $x = y \Rightarrow 2f^2(x) = f(2x) + f(0) = f(2x) + 1$ , 同理  $2f^2(y) = f(2y) + 1$

带入  $(*)$  中得:  $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

12. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3, a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ , 且  $a_{505} = 2019$ . 求  $\max a_5$ .

分析: 一个自然的想法是所有的等号均能取得时  $a_3$  取得最大值, 此时  $\{a_n\}$  为  $d = 4$  的等差数列, 解得  $a_5 = 19$

$$\text{令 } b_n = a_{n+1} - a_n, a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) \Rightarrow b_n \leq b_{n+1}$$

$$\therefore a_5 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$a_{505} - a_1 = \sum_{i=1}^{504} b_i \geq 126(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 16$$

$$\therefore a_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 19, \text{ 当 } \{a_n\} \text{ 为等差数列取 “=”}$$

13.  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 函数图像关于  $x = 1$  对称。对任意的  $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  有  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , 且  $f(1) = \beta > 0$ .

(1) 求  $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$  的值.

(2) 证明:  $f(x)$  是周期函数

(3) 记  $\beta(n) = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \beta(n)$ .

$$\text{解: (1) 易得: } f\left(\frac{1}{2}\right) = \beta^{\frac{1}{2}}, f\left(\frac{1}{4}\right) = \beta^{\frac{1}{4}}$$

证明: (2) 事实上, 由双镜原理周期为 2 是显然的

$$f(2+x) = f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ 是 } T = 2 \text{ 的周期函数}$$

$$\text{解: (3) } \beta(n) = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\text{注意到: } f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n \times \frac{1}{2n}\right) = f^n\left(\frac{1}{2n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2n}\right) = \beta^{\frac{1}{2n}}$$

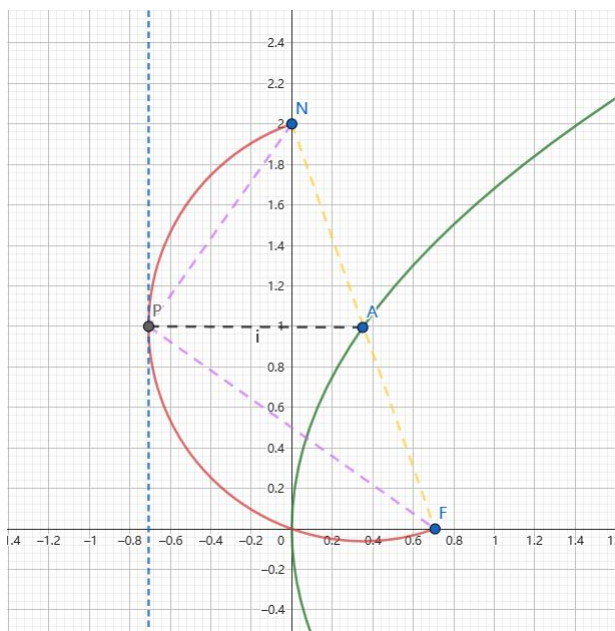
$$\therefore \beta(n) = \ln f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{\beta}{2n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

## 2015年启明考试数学部分

### 一、填空题

1. 对抛物线  $y^2 = 2\sqrt{2}x$ , 若设其焦点为  $F$ ,  $y$  轴正半轴上一点为  $N$ . 若准线上存在唯一的点  $P$  使得  $\angle NPF = 90^\circ$ , 则  $N$  点的纵坐标为

分析: 实际上就是以  $NF$  为直径的圆与准线相切, 求此时  $N$  点坐标, 图如下:



$|AP| = |AN| = |AF|, AP \perp l : x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A$ 在抛物线上

设  $N(0, a) \Rightarrow A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2})$  带入抛物线方程, 解得  $a = 2$

$$2. \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{255} + \sqrt{256}} =$$

解: 设  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{255} + \sqrt{256}} = \sum_{i=1}^{255} b_i = \sqrt{256} - 1 = 15$$

$$3. \text{若已知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \text{ 存在, 则 } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} =$$

这道题超纲太多了, 涉及到级数知识, 仅展示做法

法一:

$$\text{设 } H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \Rightarrow H(n) = \gamma + \ln n + o(1)$$

$$\text{考虑部分和: } S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H(2n) - H(n) =$$

$$\ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty)$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{综上: } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2$$

法二：注意到： $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4.在边长为 1 的正方形中 (含边界) 取9 个点, 其中必有 3 个点, 它们构成的三角形面积不超过

解:在边长为 1 的正方形内任取3个点, 则这3点组成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{2}$ 。若我们在一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形内任取3点,那么这3点所组成的三角形的最大面积就是这个正方形的面积的一半, 即不超过 $\frac{1}{8}$ 。那么我们将一个边长为 1 的正方形分为4个相同的边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形, 任取9个点放到正方形中, 必有3个点落在同一个小正方形内。

由上面的分析得知,这3个点所组成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$

5.某人打靶打中 8 环、9 环、10 环的概率分别为 0.15,0.25,0.2, 现他开三枪, 不少于 28 环的概率为

解: case 1:成绩为28环, 有以下情况: $\{9, 9, 10\}, \{8, 10, 10\}$

case 2:成绩为29环, 有以下情况: $\{9, 10, 10\}$

case 3:成绩为30环, 有以下情况: $\{10, 10, 10\}$

$$p = C_3^2 0.25^2 \cdot 0.2 + C_3^2 0.2^2 \cdot 0.15 + C_3^2 0.2^2 \cdot 0.25 + 0.2^3 = 0.0935$$

二、解答题

6.若对任意实数  $x, y$ , 有  $f((x-y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$ , 求  $f(x)$ .

解: 令  $x = y \Rightarrow f(0) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2$

再令  $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ or } 1$

$\Rightarrow f(x) = x \text{ or } f(x) = x + 1$

7.求所有  $a, b$ , 使  $|\sqrt{1-x^2} - ax - b| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  成立, 其中  $x \in [0, 1]$ .

不妨设  $x = \sin \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$|\sqrt{1-x^2} - ax - b|$$

$$= |\cos \theta - a \sin \theta - b|$$

$$= |\sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi) - b| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} (\tan \phi = -\frac{1}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{2}}{2} + b \leq \sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi) \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} + b \quad (*)$$

$$f(\theta) := \sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi)$$

case 1:  $a \geq 0$

$$[f(\theta)]_{\max} = f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{a}, [f(\theta)]_{\min} = f(0) = -1$$

注意到此时值域区间长度  $l = a + 1 > \sqrt{2} - 1$ , (\*) 必不能恒成立, 此种情况舍去

case 2:  $a < 0$

$[f(\theta)]_{\max} = f(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sqrt{a^2 + 1}$ ,  $[f(\theta)]_{\min} = \min\{f(\frac{\pi}{2}), f(0)\} = \min\{-a, 1\}$   
 if  $a \leq -1$ ,  $\Rightarrow [f(\theta)]_{\min} = 1$ , 区间长度  $l = \sqrt{a^2 + 1} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a \in [-1, 1] \Rightarrow a = -1$   
 $[f(\theta)]_{\min} = 1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$   
 if  $a > -1$ ,  $\Rightarrow [f(\theta)]_{\min} = -a$ , 此时区间长度  $l = \sqrt{a^2 + 1} + a > \sqrt{2} - 1$ , (\*) 必不能恒成立,  
 此种情况舍去

综上所述:  $a = -1, b = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

8. 若复数  $z$  满足  $|z| = 1$ , 求  $|z^3 - z + 2|^2$  的最小值.

解:

法一:

设  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , 得  $z^3 - z + 2 = \cos 3\theta - \cos \theta + 2 + i(\sin 3\theta - \sin \theta)$

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= (\cos 3\theta - \cos \theta + 2)^2 + (\sin 3\theta - \sin \theta)^2 \\
 &= 6 - 2(\cos 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin \theta) + 4\cos 3\theta - 4\cos \theta \\
 &= 6 - 2\cos 2\theta + 4\cos 3\theta - 4\cos \theta \\
 &= 4(4\cos^3 \theta - \cos^2 \theta - 4\cos \theta + 2)
 \end{aligned}$$

求导易得当  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  时,  $(|z^3 - z + 2|^2)_{\min} = \frac{8}{27}$ .

法二:

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= |z^3 - z + 2z\bar{z}|^2 = |z(z^2 - 1 + 2\bar{z})|^2 = |z^2 - 1 + 2\bar{z}|^2 \\
 &= (z^2 - 1 + 2\bar{z})(\bar{z}^2 - 1 + 2z) = 4 - 2(z + \bar{z}) - (z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \\
 &= 4 - 2(z + \bar{z}) - [(z + \bar{z})^2 - 2] + 2(z + \bar{z})[(z + \bar{z})^2 - 3]
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{let } z+\bar{z}=x \in [-2, 2]} 2x^3 - x^2 - 8x + 6 \text{ (用导数易求最值)}$$

9. 已知三次方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  有三个实根.

(1) 若三个实根为  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ,  $a, b$  为常数, 求  $c$  变化时  $x_3 - x_1$  的取值范围;

(2) 若三个实根为  $a, b, c$ , 求  $a, b, c$ .

解: 这题有些麻烦, 如果缺少一元三次方程的相关概念建议下去了解一下再来看这道题

(1) 设三次方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三个实根分别为  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ) 由韦达定理, 可得  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ ,  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$ , 注意到

$$\frac{1}{2}[2(\frac{x_3 - x_1}{2})^2 + (x_3 - x_1)^2] \leq a^2 - 3b = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2] \leq [(x_3 - x_1)^2]$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 3b} \leq x_3 - x_1 \leq 2\sqrt{\frac{a^2 - 3b}{3}}$$



当且仅当  $x_1 = x_2$  或  $x_2 = x_3$  时取到左端“=”, 当且仅当  $x_1 + x_3 = 2x_2$  时取到右端“=”.

综上所述:  $x_3 - x_1$  的取值范围是  $\left[ \sqrt{a^2 - 3b} \leq w \leq 2\sqrt{\frac{1}{3}a^2 - b} \right]$ .

(2) 易知  $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - a)(x - b)(x - c)$ , 由韦达定理得

$$\begin{cases} a + b + c = -a \\ ab + bc + ca = b \\ abc = -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ or } ab = -1$$

$$\text{if } c = 0, \begin{cases} b = -2a \\ ab = b \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

$$\text{if } ab = -1 \text{ 时, } \begin{cases} c = -2a - b \\ -1 + (a + b)c = b \end{cases}, \text{ 代入原方程, 得:}$$

$$b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow b + 1 = 0 \text{ or } b^3 - 2b + 2 = 0$$

$$\text{if } b + 1 = 0, \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{if } b^3 - 2b + 2 = 0,$$

$$\text{由一元三次方程的求根公式得 } b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} + 1} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{b} \\ c = \frac{2}{2} - b \end{cases}$$

$$\text{综上}(a, b, c) \text{ 的值为 } (0, 0, 0), (1, -2, 0), (1, -1, -1), \left(-\frac{1}{k}, k, \frac{2}{k} - k\right) \text{ (其中 } k = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} + 1}).$$

## 2014年启明考试数学部分

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题8分, 共40分)

1. 设  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 则  $n$  重复合函数  $f_n(x) = f(f(\cdots f(x)\cdots)) =$

解:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  计算得  $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}, f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

由此猜想:  $f(x)$  经过  $n$  次复合后结果是  $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ , 下面用数学归纳法证明:

当  $n=1$  时, 显然成立

当  $n=k(k \in \mathbb{N}^+)$  时,  $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$  成立.

当  $n=k+1$  时,  $f_{k+1}$  为  $f(x)$  和  $f_k(x)$  的复合函数

经计算得  $f_{k+1} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$  与假设相符, 故假设成立

故:  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

2. 设多项式  $p(x)$  满足  $p(x^2+1) = (p(x))^2+1$  和  $p(0)=0$ , 则  $p(x) =$

答案很明显  $p(x) = x$ , 证明如下: 注意到  $p(1) = p(0)^2+1 = 1, p(2) = p(1)^2+1 = 2, p(5) = p(2)^2+1 = 5, \dots \Rightarrow p(x) = x$  有无穷多解

又:  $p(x)$  为多项式函数 (设为  $n$  次), 则  $p(x) - x$  也为多项式函数

但由代数基本定理  $p(x) - x = 0$  最多有  $n$  个根  $\Rightarrow p(x) - x \equiv 0 \Rightarrow p(x) = x$

3. 设  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

注意到:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

4. 对  $x > 0$ , 函数  $f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$  的最小值为

注意到:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^3 + \frac{1}{x^3})^2}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= \frac{(x + \frac{1}{x})^2((x + \frac{1}{x})^4 - (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)^2)}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= \frac{(x + \frac{1}{x})^2((x + \frac{1}{x})^2 - (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1))((x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1))}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= 3(x + \frac{1}{x}) \geq 6 \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 取得“=”)}
\end{aligned}$$

5. 假设 20 名学生中的每一名学生可从提供的六门课程中选学一门至六门, 也可以一门都不选. 试判断下列命题是否正确: 存在 5 名学生和两门课程, 使得这 5 名学生都选了这两门课, 或者都没选, 选填“正确”或“否”

解: 答案是否定的. 不一定会出现这 5 个学生. 假设 20 个学生都选三门课, 而且选法都不完全一样, 因为  $20 = \binom{6}{3}$ , 所以这是可能的. 那么对任何两门课程, 恰有 4 个学生选 (他们选的第 3 门课都不同,  $4 = 6 - 2$  门课程中的一门). 所以任何两门课程没有 5 个学生同时选. 同样地, 对任何两门课程, 恰有 4 个学生没有选取这两门课, 而没有 5 名学生同时不选两门课.

二、(本题共 14 分)

1. 若  $a$  为正整数而  $\sqrt{a}$  不为整数, 证明:  $\sqrt{a}$  为无理数.

证明: 反证法, 设  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ , 从而可进一步设  $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$ )  $\Rightarrow p^2 = aq^2$

$\because a$  不是完全平方数.  $\therefore \exists m \in \mathbb{P}, s.t. a \bmod m = 0, a \bmod m^2 \neq 0$

$p^2 = aq^2 \Rightarrow p^2 \bmod m = 0 \Rightarrow p \bmod m = 0 \Rightarrow p^2 \bmod m^2 = 0$

$\Rightarrow aq^2 \bmod m^2 = 0 \Rightarrow q^2 \bmod m = 0 \Rightarrow q \bmod m = 0$

$\therefore q \bmod m = 0, p \bmod m = 0$  与  $(p, q) = 1$  矛盾, 故  $\sqrt{a}$  为无理数

2. 试证: 除  $\{0, 0, 0\}$  外, 没有其他整数  $m, n, p$  使得

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0.$$

证明:

反证法. 假设存在整数  $m, n, p$ , 使得  $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$

首先考虑含有 0 的情况, 这种情况显然是存在矛盾的, 不多赘述

下面考虑  $m, n, p$  全部不为 0 的情况:

注意到  $n\sqrt{2}$  和  $p\sqrt{3}$  也是无理数对于  $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$ , 易得:

$$m = -n\sqrt{2} - p\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = (n\sqrt{2} + p\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np$$

$\because m \in \mathbb{Z} \therefore m^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np \in \mathbb{Z}$

但  $2\sqrt{6}np$  是一个无理数。因此,  $2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np$  必是一个无理数。矛盾, 假设不成立。综上所述, 除了  $\{0, 0, 0\}$  外, 不存在其他整数  $m, n, p$  使得  $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$ 。

三、(本题共16分) 设  $a, b, c$  为三角形三边之长,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $r$  为内切圆半径, 证明:

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

证明: 设三角形的面积为  $S$ , 则  $S = pr$ ,  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,

$$\Rightarrow p^2 r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

设  $x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$ , 则有:

$$\frac{1}{r^2} = pxyz = xyz \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

而上式是显然易证的。

四、(本题共 12 分) 证明: 设  $m$  是任一正整数, 则  $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^m}$  不是整数。

证明: 当  $m = 1$  时,  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 显然不是整数, 结论成立。下面证明, 当  $m \geq 2$  时,  $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$  也不可能是整数。设  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$ , 令  $M = 2^m$ , 在  $S$  两边同时乘以  $M$  得:

$$MS = \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \frac{M}{4} + \dots + 1 \quad (*)$$

等式右边的每一项  $\frac{M}{k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 2^m$ ) 要么是整数, 要么是一个分母为奇数的不可约分数, 再来考察那些分母为奇数的不可约分数的项。因为  $m \geq 2$ , 故在所有的分母当中 (都是奇数) 必定存在一个最大的奇素数, 设它为  $p$ , 这样在分母中去掉  $p$ , 设余下的奇数的最小公倍数为  $N$ , 在(\*)再同时乘以  $N$ , 得到

$$MNS = \frac{MN}{2} + \frac{MN}{3} + \frac{MN}{4} + \dots + N$$

等式右边的每一项  $\frac{MN}{k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 2^m, k \neq p$ ), 仅当  $k = p$  时,  $\frac{MN}{k}$  不是整数, 其他的项都是整数。

所以等式右边最后得到的不是整数, 因此, 等式左边的  $MNS$  也不是整数, 显然, 若  $S$  是整数, 那么就与  $MNS$  不是整数相矛盾! 所以  $a_m$  不可能是整数. 证毕.

五、(本题共18分) 下图是2013年恒大足球俱乐部策划的主场与首尔 FC 足球队亚冠决赛海报, 左边是恒大队, 右边是首尔队, 该海报的寓意是什么? 要求简单推导海报中两个数学式子的结果. 一个数学式子是  $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}$  (拉马努金式子), 另一个是  $e^{\pi i} + 1$  (已知欧拉公式  $e^{\pi i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ).

解: 注意到拉马努金恒等式:  $n = \sqrt{1 + (n-1)(n+1)}$ , 因此:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{1+2 \cdot 4} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \cdot 6}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

注意到  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , 故结果为: 3 : 0



写在最后:

欢迎大家加入2023级学数华科志愿辅导群(855590575),交流数学问题!  
如果参考答案有些许纰漏欢迎大家指出