期末试题 (1) (150 分钟内完成)

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}=$

2. 微分方程 $y''-y'=x-2$ 的通解为

3. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)$, 则 $\iint_{\Sigma}\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\right)dS=$

4. 设 D 是以 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形区域, 则 $\iint_D x^2e^{y^2}dxdy=$

5. 函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极小值为

6. 曲线 $xy=4$ 在点 $(2,2)$ 处的曲率为 , 曲率半径为

二. 计算题(每小题 7 分, 共 35 分)

7. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数（需指明收敛域）.

8. 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y^2}$. (若极限存在, 求出其值；否则，请阐明理由)

9. 设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围的区域. 计算积分 $\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$.

10. 已知 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi)$. (1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并求其和函数；(2)利用 Parseval 等式求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

11. 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=4, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线和法平面方程.

三. 解答题(每小题 7 分, 共 21 分)

12. 讨论函数 $F(\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin x dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上的连续性.

13. 利用 $\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}=2\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x},\quad(0<a<1)$, 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}dx$ (提示: 计算中可能用到 $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$ 和 $d(\cot x)=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.)

14. 设一个向量与 Oxy, Oyz, Ozx 三坐标面的夹角为 φ,θ,ω, 求 $\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega$ 的值.

四. 证明题（共 20 分）

15. (7 分) 设函数 $f(x,y)$ 在 R^2 上存在连续偏导数， $\vec{a}_1$ 和 $\vec{a}_2$ 是 R^2 上两个线性无关的单位向量. 若 $\frac{\partial f}{\partial a_1}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial a_1}(x,y)=0$. 证明：在 R^2 上 $f(x,y)$ 为常值函数.

16. （7 分）设不含原点的区域 Ω 有分片光滑封闭曲面 Σ 所围成， $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量, $\vec{r}=\{x,y,z\}, r=|\vec{r}|$. 证明:

$$\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

17. (6 分) 设 L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1, f(t)$ 是 R 上恒为正值的连续函数. 证明: $\int_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$.

期末试题（2）(150分钟内完成)

一、填空题 (每空 4 分, 共 28 分)

1. 用 Beta 函数表示积分 $\int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} dx =$

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\ln x)^n$ 的收敛域与和函数分别是　和

3、曲面 $z = 2x^2 + y^2 - xy$ 在点 $(1,1,2)$ 处的法线方程为

4、函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 的 Fourier 级数是

5、设 $\left(x^{2015} + 4xy^3\right) \mathrm{d}x + \left(ax^2y^2 - 2y^{2066}\right) \mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 则 $a =$

6、设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\int_L (x-y)^2 ds =$

7、设 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = y \end{cases}$ 从轴正向看为顺时针，则 $\oint_L y^2 dx + xydy + xzdz =$

二. 判断题 (每小题 2 分, 共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“✓”, 在错误说法的括号中画”x”.

8. 若级数收敛, 则其重排后的级数也必收敛, 其和不变.

9. 若函数 $f(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都在区域 $[a,+\infty) \times [c,d]$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x,y) dx = \int_a^{+\infty} f_y(x,y) dx$.

10. 若向量函数 $\vec{F}$ 在区域 Ω 上有二阶连续偏导数, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

11. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

三、证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

12. 用定义证明 $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(x + y^2\right) = 1$.

13. 设 Ω 为上半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 (z \geq 0)$, 函数 f 在 Ω 上连续. 证明:

$$\iiint_{\Omega} f(z) dxdydz = \pi \int_0^1 f(z) \left(1 - z^2\right) dz$$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

14. 求函数 $f(x) = x + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 的 Maclaurin 展开式.

$\left(\text{已知 } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, x \in (-1,1)\right)$.

15. 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, 计算 $\iint_D (x+y) \operatorname{sgn}(x-y) dxdy$.

16. 求密度均匀 $(\mu = 1)$ 的半球面 $\Sigma : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 对于 z 轴的转动惯量.

17. 计算 $I = \int_L \left(e^x \sin y - 2(x+y)\right) \mathrm{d}x + \left(e^x \cos y - x\right) \mathrm{d}y, L$ 是从原点 $O(0,0)$ 沿折线 $y = |x-1| - 1$ 至点 $A(2,0)$ 的折线段.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 24 分)

18. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 对于 x 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

19. 已知函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$. 设 $u=x, v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, \varphi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$. 证明: 对函数 $\varphi=\varphi(u,v)$, 成立 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$.

20. 设 Ω 为空间二维单连通区域, 三元向量函数 $\vec{F}\in C^1(\Omega)$. 证明: 对 Ω 内任一闭曲面 Σ 都有 $\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0$ 的充分必要条件是在 Ω 内恒有 $\nabla\cdot\vec{F}=0$, 其中 $\vec{n}$ 为 Σ 的单位法向量.

期末试题 (3) (150 分钟内完成)

一、填空题 (每空 4 分, 共 28 分)

1、设 $\vec{F}=\{\sin x\cos y, \sin y\cos z, \sin z\cos x\}$, 则 $\operatorname{rot}\vec{F}=$

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln x+\frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域是

3、曲线 $\vec{r}(t)=\{1-\sin t, 1-\cos t, t\}$ 的曲率 $\boldsymbol{K}=$

4、函数 $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le h,\\ 0, h<x\le\pi\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上的正弦级数是

5、交换积分次序后, $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=$

6、函数 $f(x,y)=x^2+y^2+8x$ 在 $D: x^2+y^2\le 16$ 上的最大值是, 最小值是

7、直线 $L: x=2t, y=1, z=t$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程是

二、判断题 (每小题 2 分, 共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“✓”, 在错误说法的栝号中画“×”。

8. 若级数发散, 则对其任意加括号后所得级数也必发散.

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

10. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 它关于 xoy 坐标面对称, 所以第二型曲面积分 $\iint_S z^{2017}dxdy=0$

11. 若在点 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f(x,y)$ 的两个偏导函数连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在.

三、解答题 (每小题 6 分, 共 12 分)

12. 计算 $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与平面 $x+z=2$ 的交线, 从 z 轴正向看去为逆时针方向.

13. 设 $D=\left\{(x,y)\mid\left(x^2+y^2\right)^2\le 2\left(x^2-y^2\right)\right\}$, 求 $\iint_D(x+y)^2dxdy$.

四、计算题（每小题 7 分, 共 28 分)

14. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{(2n)!!} x^n$ 的收敛域及和函数.

15. 设 L 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y$ 的交线, 计算曲线积分 $\int_L z^2 ds$, 并将结果用 B 函数表示.

16. 设 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分的外侧, 试计算第二型曲面积分 $I=\iint_S (y-z)xdydz+(x-y)zdxdy$.

17. 计算 $I=\int_L \frac{(y-1)dx-xdy}{x^2+(y-1)^2}$, 其中 L 是椭圆 $x^2+2y^2=4$, 沿逆时针方向.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 24 分)

18. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \arctan \frac{x}{n}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内一致收敛.

19. 设曲面 S 方程由 $F(x,y,z)=0$ 确定, 其中 $F(x,y,z)$ 具有连续的偏导数, 且 $F_z' \neq 0$, 又 S 可一对一地投影到 xOy 面的区域 D, 证明: S 的面积 $A=\iint_D \frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F_z'|} dxdy$.

20. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域 $N((x_0,y_0))$ 内具有二阶连续偏导数, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点取得极大值, 证明: $f_{xx}(x_0,y_0)+f_{yy}(x_0,y_0) \leq 0$.