启明学院2018-2019学年第二学期

《微积分下》期末A卷

2023 年 9 月 4 日

$\mathbf{I}_t=\sigma(\mathbf{X}_t\mathbf{W}_{xi}+\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{W}_{hi}+\mathbf{b}_i),\mathbf{F}_t=\sigma(\mathbf{X}_t\mathbf{W}_{xf}+\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{W}_{hf}+\mathbf{b}_f),\mathbf{O}_t=\sigma(\mathbf{X}_t\mathbf{W}_{xo}+\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{W}_{ho}+\mathbf{b}_o),\tilde{\mathbf{C}}_t=\tan$

一、填空题 (每空 4 分, 共 28 分)

1、微分方程 $y''+2y'+8y=0$ 的通解为

2、设 $z=z(x,y)$ 是由 $f(x+z,yz)=0$ 所确定的函数, 其中 f 具有连续且不为零的一阶偏导数,

3、函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在点 $(1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{1,1\}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,-1)}=2\sqrt{2}$.

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 且 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\leq x<0,\\ e^x,0\leq x<\pi\end{cases}$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 展开式的和函数, 则 $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underline{e^{\frac{\pi}{2}}}, S(\pi)=\underline{\frac{e^\pi-1}{2}}$.

7、设 $\mathrm{d}u=(y+2xz)\mathrm{d}x+\left(x+z^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+2yz\right)\mathrm{d}z$, 则 $u(x,y,z)=\underline{u=xy+x^2z+y^2z+C}$.

二、判断题 (每小题 2 分, 共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“小”, 在错误说法的括号中画“×”.

8. 若无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也必收敛.

9. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续, 则偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处必定不存在.

10. 设 $S:x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0), S_1$ 是 S 在第一卦限部分, 则 $\iint_S xy^2z^3\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}xy^2z^3\,\mathrm{d}S$.

11. 设 $|u_n(x)|\leq v_n(x)\,(n\in N_+,x\in[a,b])$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

三、解答题 (每小题 6 分, 共 12 分)

12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)$ 的攻散性, 是绝对收攻还是条件收敛?

解: $\tan\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)=\tan\left(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi\right)=\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 而 $\left\{\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 是单

调减且趋于 0 的数列, 所以原级数收敛. 又 $\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{2n}(n\to\infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\tan\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)\right|$ 发散, 故原级数条件收敛.

13. 讨论含参变量积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上的一致收敛性.

解: 当 $x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 时, 有 $\left|\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\pi}{2x^2+y^2} \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{\delta^2+y^2}$, 而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\delta^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 收敛, 所以, 有由 M 判别法知 $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 是一致收敛.

四、计算题（每小题 7 分, 共 28 分)

14. $I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D:|x|+|y|\le 1$.

解: 设 D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$. 由对称性及轮换性, 得

$$
\begin{aligned}
I&=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}=8\iint_{D_Q}x^2\mathrm{dxdy}\\
&=8\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=8\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

15. #计算曲面积分 $I=\iint_S x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(x+y^2z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧. 解: 补充 $S_1: z=0\left(x^2+y^2\le 1\right)$, 取下侧: 则 S 与 S_1 国成下半单位球体 Ω.

由商斯公式, 得

$$
\begin{aligned}
I&=\iint_S x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(1+y^2z\right)\mathrm{d}dy\\
&=\iint_{5+5}x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(1+y^2z\right)\mathrm{d}d\,\mathrm{d}y-\iint_5 x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(1+y^2z\right)\mathrm{d}d\,\mathrm{d}y\\
&=-\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(-1)\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r\sin\varphi)^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}+\pi\cdot 1^2\ (\text{球坐标})\\
&=-\frac{4\pi}{15}+\pi=\frac{11\pi}{15}
\end{aligned}
$$

16. 设 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内有连续的导函数, 曲线积分 $\int_L f^2(x)\sin y\,\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$ 及 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f^2(x)\sin y\,\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\,\mathrm{d}y$.

解: 由曲线积分 $\int_t f^2(x)\sin y\,\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 得

$$
\frac{\partial[(f(x)-x)\cos y]}{\partial x}=\left(f'(x)-1\right)\cos y=\frac{\partial\left[f^2(x)\sin y\right]}{\hat{y}}=f^2(x)\cos y,
$$

得

$$f'(x)=1+f^2(x).$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{df(x)}{1+f^2(x)}=\int dx,$$

$$\arctan f(x)=x+C,\arctan f(x)=x+C,f(x)=\tan(x+C).$$

由 $f(0)=0$, 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\tan x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}I&=\int_{(0.0)}^{(1.1)}f^2(x)\sin y\,\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\,\mathrm{d}y\\&=\int_{(0.0)}^{(1.1)}\tan^2 x\sin y\,\mathrm{d}x+(\tan x-x)\cos y\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1(\tan 1-1)\cos y\,\mathrm{d}y=(\tan 1-1)\sin 1.\end{aligned}$$

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$ 的收玫域与和函数.

解: 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$, 则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)}x^{2n+2}/\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}\right|=x^2$$

当 $\rho=x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时, 原级数收绕: 当 $\rho=x^2>1$ 即 $|x|>1$ 时, 原统数发散, 故收敛平 $R=1$.

又 $|x|=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ 收敛, 所以收敛城为 $[-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$, 即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n},x\in[-1,1]$.

当 $x=0$ 时, $s(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&s(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{2n}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{x}\int_0^x\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t=\ln\left(1+x^2\right)-2+\frac{2}{x}\arctan x.\\&s(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \ln\left(1+x^2\right)-2+\frac{2}{x}\arctan x, & x\in[-1,0)\cup(0,1].\end{cases}\end{aligned}$$

五、证明题（每小题 6 分, 共 24 分）

18. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{e^x+n}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上一致收玫.

证: 令 $u_n(x)=(-1)^{n-1}, v_n(x)=\frac{1}{e^x+n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和 $U_n(x)$ 满足 $|U_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\right| \leq 1$, 在 $x \in(-\infty,+\infty)$ 上一致有界. 又对任意固定的 $x \in(-\infty,+\infty), v_n(x)$ 关于 n 单调昽, 且

$$v_n(x)=\frac{1}{e^x+n} \rightrightarrows 0(n \rightarrow \infty)$$

故由 Dirichlet 判别法知, 原级数一致收敛.

注: 用余项准则证明也可.

19. 证明: 由 $z=a, z=b, y=f(z)$ (f 为连续的正值函数) 以及 z 轴所围成的平面图形绕 z 轴旋转一周所成的立体对 z 轴的转动惯量 (密度为 $\mu=1$) 为 $I_z=\frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(z) \mathrm{d} z$.

证: 曲线 $y=f(z)(a \leq z \leq b)$ 绕 z 旋转一周所成的曲面方程为 $x^2+y^2=f^2(z)$, 题中的立体即为该曲面与平面 $z=a, z=b$ 所围的空间区域 (髟转体), 记为 Ω. 其对 z 轴的转动惯量 (密度为 $\mu=1$) 为 $I_z=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y \mathrm{~d} z$. (3 分) $\forall z \in[a, b]$, 过点 $(0,0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 它在 Ω 内的截面为圆

$$D_z: x^2+y^2 \leq f^2(z), z \in[a, b]$$

来用先的后一法计算, 可得

$$\begin{aligned}
I_z & =\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y \mathrm{~d} z=\int_a^b \mathrm{~d} z \iint_{D_x}\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y \\
& =\int_a^b \mathrm{~d} z \iint_{D_t} r^2 \cdot r \mathrm{~d} r \mathrm{~d} \theta=\int_a^b \mathrm{~d} z \int_0^{2 \pi} \mathrm{d} \theta \int_0^{f(z)} r^3 \mathrm{~d} r=\frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(z) \mathrm{d} z .
\end{aligned}$$

20. 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$ 可微, 在 $(0,0)$ 处连续, 且 $\lim _{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial x}=\lim _{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial y}=0$. 证明: $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处也可微.

证: 令 $\varphi(t)=f(t \Delta x, t \Delta y),(\Delta x, \Delta y) \neq(0,0)$. 由腿设条件, $t \neq 0$ 时, $\varphi(t)$ 可导. 且 $\exists \xi \in(0,1)$, 使得

$$f(\Delta x, \Delta y)-f(0,0)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi^{\prime}(\xi)=\frac{\partial f(\xi \Delta r, \xi \Delta y)}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial f(\xi \Delta x, \xi \Delta y)}{\partial y} \Delta y$$

再由条件得

$$\lim _{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)-f(0,0)-0 \Delta x-0 \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0 .$$

即 $\Delta z=f(\Delta x, \Delta y)-f(0,0)=0 \Delta x+0 \Delta y+o(\rho), \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \rightarrow 0$. 故 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处也可微.

21. 设连续函数列 $\left\{f_n(x, y)\right\}$ 在有界闭区域 D 上一致收敛于 $f(x, y)$, 证明:

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y=\lim _{n \rightarrow \infty} \iint_D f_n(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y .$$

证: 因 $\{f_n(x,y)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x,y)$, 故由定义, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)>0$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $(x,y)\in D$, 有 $\mid f_n(x,y)-f(x,y)<\varepsilon$. 于是

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y-\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right|\leq\iiint_D|f(x,y)-f_n(x,y)|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leq\varepsilon\iint_D\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leq\varepsilon S_D,$$

其中 S_D 为存界闭区域 D 的面积. 故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$