

启明选拔考试数学部分历年题合集

2023 年 9 月 2 日

写在开头:

整理了一下历年的启明考试真题以供参考,想通过启明考试转专业的同学可以仔细看看,具体的备考策略可参见转专业群文件《转专业-数学(时间匆忙先写一点)》,祝各位考试顺利!

2023年启明考试数学部分

一.填空题(每题9分)

1.若 α, β 为正整数且 $\alpha^2 + \beta^2 = 3025$ 则 $\alpha + \beta =$

注意到 $3025 = 55^2 = (5 \times 11)^2$, 由勾股定理显然可知一种情况 $\alpha = 3 \times 11, \beta = 4 \times 11$, 故 $\alpha + \beta = 77$.

2. $f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$. 则 $f(-1) =$

$$\text{注意到} \begin{cases} f(-1) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -1 & (1) \\ f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{2} & (2) \\ f(\sqrt[3]{2})f(-1) = 2 & (3) \end{cases} \quad (1) + (3) - (2) \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{4}$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi}$ 的值为

$$\begin{aligned} \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi} &= \sin^2(\sqrt{n^2 + n} - n)\pi = \sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \pi \\ &= \sin^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \pi \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

4. β 为锐角. 则 $\left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right)$ 最小值为

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \beta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right) = \frac{\sin \beta \cos \beta + \sin \beta + \cos \beta + 1}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin \beta + \cos \beta + 1}{\sin \beta \cos \beta} + 1$$

令 $t = \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{2} \sin(\beta + \frac{\pi}{4}) \in (1, \sqrt{2}]$, 则 $\sin \beta \cos \beta = \frac{t^2 - 1}{2}$

原式 $= 1 + \frac{1+t}{t^2-1} = 1 + \frac{2}{t-1} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 取等号.

5. $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{p} = 1$ 与 $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{p} = 1 (m, n, p > 0)$ 有公共焦点 F_1, F_2 共交点为 Q . 则 $S_{\triangle QF_1F_2} =$
由题意得 $m - n = 2p$, $m + n = 2(m - p)$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{p} = 1, \\ \frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{p} = 1, \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{2mn}{m+n}, y = \pm \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{m+n}}$$

$$\therefore |F_1F_2| = 2\sqrt{m-p} = 2\sqrt{n+p},$$

$$\therefore S_{\triangle QF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{m-p} \times \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{m+n}} = p.$$

6. 设 ε 为 1 的 7 次方根 $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^4} + \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^6} =$

对于方程 $x^7 = 1 \Rightarrow (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$, ε 为其一个根

$\varepsilon = 1$, 易得原式 $= \frac{3}{2}$

$$\varepsilon \neq 1 \Rightarrow \varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^4} + \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^6} &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^5}{1+\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^4}{1+\varepsilon} = 2 \frac{\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} \\ &= -2 \frac{\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} = -2 \frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)} = -2 \end{aligned}$$

7. 三棱柱侧棱垂直底面且所有棱长为 β , 则外接球表面积为

$$\text{这道题很简单, 画个图很容易得到: } R^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}\beta)^2 + (\frac{1}{2}\beta)^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{6}\beta$$

$$\text{故 } S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi\beta^2$$

8. 甲组 5 名男同学、3 名女同学, 乙组 6 名男同学、2 名女同学, 从甲、乙两组各选 2 名, 则 4 人中恰好有一女的选法有

分两种情况:

case 1: 这名女生来自甲组, 共 $C_3^1 C_5^1 C_6^2 = 225$ 种

case 2: 这名女生来自乙组, 共 $C_2^1 C_6^1 C_5^2 = 120$ 种

故总的选法有 345 种

二. 解答题 (本题 12 分)

设数列 $\{\beta_n\}$ 满足 $\beta_1 = 2$, $\beta_{n+1} - \beta_n = 3 \times 2^{n-1}$ 记 $\alpha_n = n\beta_n$ 求 $\{\alpha_n\}$ 前 n 项和

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) + \beta_1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \Rightarrow \alpha_n = 3n \cdot 2^{n-1} - n$$

$$\text{由错位相减法易求得 } T_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 3(n-1)2^n - \frac{n(n+1)}{2} + 3$$

三.解答题(本题16分)

已知 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{\beta}{x+2}$

(i) 若 $x > 0, f(x) > 1$ 恒成立, 求 β 取值范围.(6分)

$$\ln(x+1) + \frac{\beta}{x+2} > 1 \Rightarrow \beta > (x+2)[1 - \ln(x+1)]$$

令 $h(x) = (x+2)[1 - \ln(x+1)], x \in (0, +\infty)$

$$h'(x) = -[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}] < 0 \Rightarrow h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调减}$$

$$\text{故 } \beta \geq h(0) = 2$$

(ii) 求证 $\ln(2024) > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4045} + \frac{1}{4047}$. (10分)

$$\text{由(i)知: } \ln(x+1) > 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}, x > 0$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{k} \text{ 得到 } \ln(\frac{k+1}{k}) > \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+2} = \frac{1}{2k+1}, x > 0$$

$$\text{故 } \ln(2024) = \sum_{k=1}^{2023} \ln(\frac{k+1}{k}) > \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{2k+1}$$

2022年启明考试数学部分

一.填空题(每题9分)

1. 已知 $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 计算 $[\beta^{12}]$ ($[x]$ 为 x 的整数部分).

解: $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根, 故: $x^2 = x + 1, x^4 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 3x + 2, x^{12} = (3x+2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = 27x(x+1) + 54(x+1) + 36x + 8 = 27x^2 + 117x + 62 = 27(x+1) + 117x + 62 = 144x + 89 \Rightarrow \beta^{12} = 72\sqrt{5} + 161 \in (321, 322)$, 故: $[\beta^{12}] = 321$.

注释: 考察对偶结构 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 也是一个重要思想,

分析: 熟知Fibonacci i 数列通项: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$,

$$\left(\begin{array}{l} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1, \text{ 则特征方程: } x^2 = x + 1, x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ \text{则: } a_n = C_1 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ \text{代入初值条件得: } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \end{array} \right),$$

解: 令 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, 则:

$$a_{12} = 144 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{12} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \right], \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{12} = 144\sqrt{5} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12},$$

注意到: $144\sqrt{5} = \sqrt{103680} \in (321.5, 322)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{12} \approx (0.618)^{12} \approx \frac{1}{2^{12}}$, 故: $[\beta^{12}] = 321$.

2. 已知: $\beta_1 = 3, \beta_{n+1} = \beta_n^2 - 3\beta_n + 4$, 计算: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1}$

解: $\beta_{n+1} = \beta_n^2 - 3\beta_n + 4 \Rightarrow \beta_{n+1} - 2 = \beta_n^2 - 3\beta_n + 2 = (\beta_n - 2)(\beta_n - 1)$,

则: $\frac{1}{\beta_{n+1} - 2} = \frac{1}{(\beta_n - 2)(\beta_n - 1)} = \frac{1}{\beta_n - 2} - \frac{1}{\beta_n - 1}$, 即: $\frac{1}{\beta_n - 1} = \frac{1}{\beta_n - 2} - \frac{1}{\beta_{n+1} - 2}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_{n+1} - 2},$$

下证: β_n 单调递增趋于 $+\infty$, 注意到: $\beta_{n+1} - \beta_n = \beta_n^2 - 4\beta_n + 4 = (\beta_n - 2)^2 > 0$,

$\Rightarrow \beta_{n+1} - \beta_1 = \sum_{i=1}^n (\beta_i - 2)^2 > \sum_{i=1}^n (\beta_1 - 2)^2 = n$, 故: $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$, 即: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i - 1} = 1$.

3. 已知: $a^2 + b^2 = 5$, 求 $2a + 3b$ 的最大值,

解:

$$\text{Solution 1: } 2a + 3b \leq \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} (\text{cauchy}) = \sqrt{65}$$

$$\text{Solution 2: } 2a + 3b = 2\sqrt{5} \cos \theta + 3\sqrt{5} \sin \theta \leq \sqrt{65}.$$

4. 已知: $\begin{cases} x + \sin x \cos x - 1 = 0 \\ 2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0 \end{cases}$, 求 $\sin(2x - y)$.

$$\text{解: } \begin{cases} x + \sin x \cos x - 1 = 0 \\ 2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sin 2x - 2 = 0 \\ y - \cos y - \frac{\pi}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sin 2x - 2 = 0 \\ y - \frac{\pi}{2} + \sin(y - \frac{\pi}{2}) - 2 = 0 \end{cases},$$

观察上式易得同构: $2x = y - \frac{\pi}{2}$, 下证仅有此唯一同构

注意到: $h'(x) = (2x + \sin 2x - 2 = 0)' = 2 + 2 \cos 2x \geq 0$, $h(x)$ 单调增

即根是唯一的, 因此 $2x = y - \frac{\pi}{2}$ 是唯一解

故: $\sin(2x - y) = -1$.

5. 已知: $f(1) = 2022, \forall n > 1, n \in \mathbb{N}$, 有: $\sum_{k=1}^n f(k) = n^2 f(n)$, 求: $f(2022)$.

$$\text{解: } \begin{cases} \sum_{k=1}^n f(k) = n^2 f(n) \\ \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = (n+1)^2 f(n+1) \end{cases} \Rightarrow f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1) - n^2 f(n),$$

$$\text{即: } (n^2 + 2n) f(n+1) = n^2 f(n) \Rightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n}{n+2},$$

故: $f(2022) = f(1) \prod_{k=1}^{2021} \frac{k}{k+2} = 2022 \cdot \frac{2}{2022 \cdot 2023} = \frac{2}{2023}$.

6. 定义 \mathbb{C} 为复数集, 集合 $A = \{z \mid z^{18} = 1, z \in \mathbb{C}\}$, $B = \{w \mid w^{48} = 1, z \in \mathbb{C}\}$,

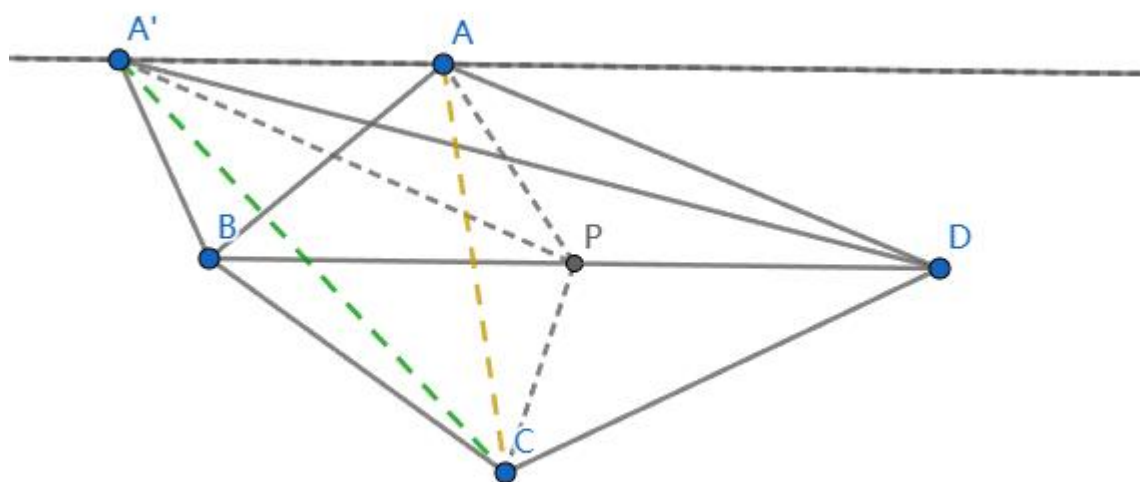
求: $\text{card}[\{zw \mid z \in A, w \in B\}]$.

解: 由棣莫弗定理: $z = e^{\frac{2k\pi}{18}i} = \cos \frac{2k\pi}{18} + i \sin \frac{2k\pi}{18}$, $w = e^{\frac{2k'\pi}{48}i} = \cos \frac{2k'\pi}{48} + i \sin \frac{2k'\pi}{48}$,
 $zw = e^{\frac{2(8k+3k')}{144}i\pi}$, 注意到 8 与 3 互质, 则根据裴蜀定理, $8k + 3k'$ 可以取得任意整数值,
 $k, k' \in \mathbb{Z}$

$8k + 3k' \in \mathbb{Z}$, 且 $8k + 3k'$ 可以取到 $[0, 143]$ 的任意值, 故: zw 一共有 144 个.

7. 在一个凸四边形 $ABCD$ 中存在点 P , 满足 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PDA}$,
 $S_{\triangle ABC} = \alpha S_{\triangle ADC}$, 求: α .

注释: 本题有误, 考察如下情况: BD 平分四边形 $ABCD$ 的面积, P 为 BD 中点, 注意到 A' 在过 A 平行 BD 的直线上运动时 α 的值并不确定



8. 三位数中任意两个数字之和都能被第三个数整除, 求这样的三位数的个数

解:

case 1: 该三位数各位数字相等, 显然有 9 个,

case 2: 该三位数各位数字不等, 有: $(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)$, 一共 $3A_3^3 = 18$ 个,

case 3: 该三位数有且仅有 2 位数相同, 有: $(1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6), (4, 4, 8)$, 一共 $4C_3^1 = 12$ 个, 故这样的三位数有: $9 + 18 + 12 = 39$ 个.

二.解答题(12分)

请用3种方法证明: $\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 \geq \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$).

解:

法一:

根据基本不等式 $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$, 故: $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\eta}{4} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma+\eta}{2}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\gamma\eta}} = \sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta}$,

令 $\eta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, 有: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[4]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$, 证毕

法二:

令 $\alpha = x^3, \beta = y^3, \gamma = z^3$, 则:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ &= \frac{1}{3} \{ [(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2] + z^3 - 3xyz \} \\ &= \frac{1}{3} \{ [(x+y)^3 + z^3] - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz \} \\ &= \frac{1}{6} (x+y+z) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

证毕

法三:

令 $f(x) = \ln x$, 则: $f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$,

故: $f(x)$ 是上凸函数, 根据琴生不等式, $\ln \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \frac{1}{3}(\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma)$, 证毕

三.解答题(16分)

已知: $f(x) = \beta x - \ln x - 1$,

(i): 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 β 的最小值;

(ii): 求证: $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1$;

(iii): 若 $\alpha(e^{-x} + x^2) \geq x - x \ln x$ 恒成立, 求 α 的取值范围

解: (i): $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \beta x - \ln x - 1 \geq 0, \Rightarrow \beta \geq \frac{\ln x + 1}{x}$,

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调减

故 $g_{\max}(x) = g(1) = 1$, 即: $\beta \geq g_{\max}(x) = 1, \beta$ 的最小值为1.

证明:(ii): 当 $\beta = 1$ 时, 有: $\ln x \leq x - 1$,

令 $\frac{1}{xe^x} = t$, 则: $-x - \ln x = \ln t \leq t - 1 = \frac{1}{xe^x} - 1$, 即: $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x \geq 1$.

解: (iii): $\alpha(e^{-x} + x^2) \geq x - x \ln x \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{xe^x} + x\right) \geq 1 - \ln x$,

注意到: $\frac{1}{xe^x} + x > 0$, 即: $\alpha \geq \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x}$,

由(ii) 知: $\frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x} \leq 1$, 且 $xe^x = 1$ 时, $\frac{1 - \ln x}{\frac{1}{xe^x} + x} = 1$,

故: $\alpha \geq 1$, α 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

2021年启明考试数学部分

1. $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, $xyz =$.

Solution:

$$\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

$\Rightarrow x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}) = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ 由于 $x, y, z \in \mathbb{Q}$, 因此不妨设:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{2} \\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

故: $xyz = \frac{3}{4}$

2. $f(x) \geq 0$, $[f(x+1)]^2 + [f(x)]^2 = 73$ ($x \in \mathbb{R}$). 当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 10 - |13x - 4|$, $f(\frac{2021}{13}) =$

解: $[f(x+1)]^2 + [f(x)]^2 = 73 \Rightarrow [f(x+2)]^2 + [f(x+1)]^2 = 73 \Rightarrow [f(x+2)]^2 = [f(x)]^2$

$\because f(x) \geq 0 \therefore f(x+2) = f(x)$

$f(\frac{2021}{13}) = f(\frac{19}{13})$, 由 $[f(\frac{19}{13})]^2 + [f(\frac{6}{13})]^2 = 73$

解得: $f(\frac{2021}{13}) = 3$

3. $y = \frac{4 \sin \theta \cos \theta + 3}{\sin \theta + \cos \theta}$ ($-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$), 则 y 的最小值为

$$y = \frac{2(1 + 2 \sin \theta \cos \theta) + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2(\sin \theta + \cos \theta)^2 + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = 2(\sin \theta + \cos \theta) + \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \geq 2\sqrt{2}$$

当且仅当 $2(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 即 $\theta = \frac{7\pi}{12}$ or $-\frac{\pi}{12}$ 取"

4. $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_3 = -13$, $a_7 = 3$. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 则 $(S_n)_{\min} =$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = -13 \\ a_1 + 6d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -21 \\ d = 4 \end{cases}$$

易知 $n = 6, (S_n)_{\min} = -66$

5. $w = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, 则以 w, w^3, w^7, w^9 为解的方程为.

解: 由棣莫弗定理易知: $w^5 = 1$, 因此以 w, w^3, w^7, w^9 为解的方程等价于以 w, w^2, w^3, w^4 为解的方程.

易知: $1, w, w^2, w^3, w^4$ 是 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$ 的根. 故以 w, w^2, w^3, w^4 为解的方程是 $x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$

6. A, B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点, O 是原点, $OA \perp OB$, 则 $|AB|_{\min} =$

解: 根据题意不妨设 $A(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta), B\left[r_2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), r_2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$,

则 $B(-r_2 \sin \theta, r_2 \cos \theta), AB^2 = r_1^2 + r_2^2, \frac{r_1^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1,$

$r_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}, \frac{r_2^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{r_2^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1, r_2^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}.$

$$\begin{aligned} \text{故 } r_1^2 + r_2^2 &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2 (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + a^2 b^2} = \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\theta + 4a^2 b^2} \\ &\geq \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ 时等号成立. 因此, 线段 AB 长的最小值为 $\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

7. 双曲线: $\Gamma \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, 过右焦点作一条长度为 $4\sqrt{3}$ 的弦 AB, A, B 位于右支上. 将双曲线 Γ 绕其右准线旋转 90° , 则弦 AB 形成的曲面面积为

解: 分析易知弦 AB 扫过的面积为一圆台侧面积的 $\frac{1}{4}$. 设 A, B 两点到右准线 $l: x = \frac{4}{3}$ 的距离分别为 r_1, r_2 ,

由于双曲线离心率 $e = \frac{3}{2}$, 故 $S = \frac{1}{4} \pi (r_1 + r_2) |AB| = \frac{1}{4e} \pi |AB|^2 = 8\pi$

8. 三种方法求 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 最小值.

法一: 不妨设 $y = x + \frac{3}{2}$, 则 $x = y - \frac{3}{2}$, 代入 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 中得到:

$$\begin{aligned}
& x(x+1)(x+2)(x+3) \\
&= (y - \frac{3}{2})(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})(y + \frac{3}{2}) \\
&= (y^2 - \frac{9}{4})(y^2 - \frac{1}{4}) \\
&= y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} \\
&= (y^2 - \frac{5}{4})^2 - 1
\end{aligned}$$

由于 $y^2 \geq 0$, 所以 $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$, 等号成立当且仅当 $y^2 = \frac{5}{4}$, 即

$$x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$$

法二:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}[x(x+1)(x+2)(x+3)] \\
&= (x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) \\
&= 4x^3 + 18x^2 + 11x + 6 \\
&= (4x+6)(x^2+3x+1)
\end{aligned}$$

令导函数等于 0, 解得 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$ 带入原函数中可得最小值在 $x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}$ 取得, 结果为 -1。

法三:

$$\begin{aligned}
& x(x+1)(x+2)(x+3) \\
&= x(x+3)(x+1)(x+2) \\
&= (x^2+3x)(x^2+3x+2) \\
&= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) \\
&= (x^2+3x+1)^2 - 1 \geq -1 (x^2+3x+1=0, \text{即 } x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2} \text{ 取得})
\end{aligned}$$

9. 已知 $0 < a < b$, 证 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}$.

证明: 原式等价于要证: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2a(b-a)}{a^2+b^2} = \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$t = \frac{b}{a} \in (1, +\infty)$, 即证: $(1+t^2)\ln t > 2t-2$

注意到 $\ln t > 1 - \frac{1}{t}, t \in (1, +\infty)$, 即证: $(1+t^2)\ln t > (1+t^2)(1 - \frac{1}{t}) > 2t-2$,

即证: $t^2 - 3t - \frac{1}{t} + 3 > 0$, 而此式求导易证

2019年启明考试数学部分

1. 37, 23, 19, 5.....以此类推,第五个数为:

解: 1

2. 今天星期六, 则 3^{1998} 天后是星期几

解: 注意到 $3^{1998} = (27)^{666} = (28 - 1)^{666} = 1 + \sum_{k=0}^{665} C_{666}^k (28)^{666-k} (-1)^k = 7N + 1$

故为星期天.

3. 若 x 满足 $x + x^{-1} = -1$, 求 $x^{2019} + x^{-2019}$.

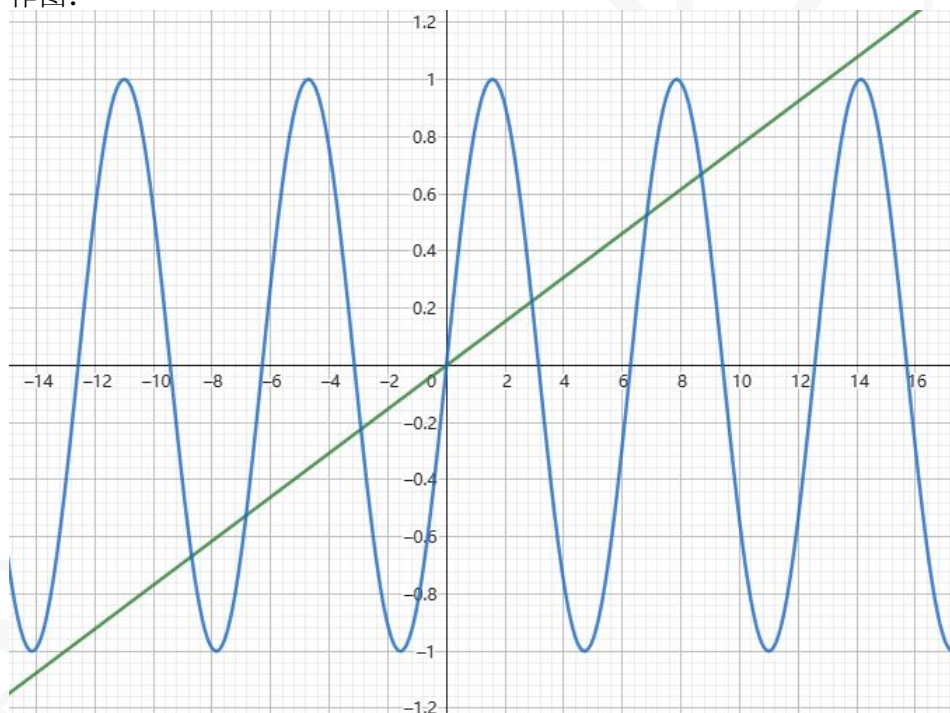
$x + x^{-1} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$, 则 $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}$ (欧拉公式).

由棣莫弗定理易得 $x^{2019} = e^{\pm 1046\pi i} = 1$

故 $x^{2019} + x^{-2019} = 2$.

4. 求方程 $13\sin x = x$ 的根.

作图:



可以求得的零点为 $x = 0$, 由于此方程为超越方程, 其他6个零点为隐零点.

5. 设整数数列 a_1, a_2, \dots, a_{10} 满足 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$. 且 $a_{i+1} \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$), 求这样的数列有多少个.

不妨设 $b_i = a_{i+1} - a_i \in \{1, 2\}$, 由 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$, 可得:

$$\begin{cases} 2a_1 = \sum_{i=1}^9 b_i \\ b_7 + b_6 + b_5 = b_4 + b_3 + b_2 \end{cases}$$

对于 $b_7 + b_6 + b_5 = b_4 + b_3 + b_2$, 分析易知等式两端 1, 2 的个数相等, 因此 $b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2$ 总的取法共有: $(C_3^0)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^3)^2 = 20$ 种

注意到 $b_7 + b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2$ 必是偶数, 由 $\therefore 2a_1 = \sum_{i=1}^9 b_i$, $2a_1$ 也为偶数

故 $b_1 + b_8 + b_9$ 必为偶数, 取法有 4 种

故满足条件的数列共有 $4 \times 20 = 80$ 种

6. 求 $n^3 + 100$ 能被 $n + 10$ 整除的最大整数.

$$\begin{aligned} & \frac{n^3 + 100}{n + 10} \\ &= \frac{n^3 + 1000}{n + 10} - \frac{900}{n + 10} \\ &= n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n + 10} \\ &\Rightarrow n_{\max} = 890 \end{aligned}$$

7. x, y, z 为非负整数, 且 $\begin{cases} x + y + z = 10 & \text{①} \\ x + 2y + 3z = 30 & \text{②} \end{cases}$, 求 $x + 5y + 3z$ 的取值范围

解: $3 \times \text{①} - \text{②} \Rightarrow 2x + y = 0$

$\therefore x, y \in \mathbb{N}^* \therefore x = y = 0 \Rightarrow z = 10$

故 $x + 5y + 3z = 30$

8. 若 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 关于 $x = -2$ 对称, 求 $f(x)_{\max}$.

解: 注意到 $x = -1, 1$ 为 $f(x)$ 的零点, 又 $\therefore x = -2$ 为其对称轴, 因此可得另两个零点为:

$x = -3, x = -5$

故 $f(x) = (1 - x^2)(x + 3)(x + 5)$

$$\begin{aligned} \text{注意到: } f(x) &= (1 - x)(x + 5)(1 + x)(x + 3) \\ &= (-x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 3) \\ &\leq \left(\frac{-x^2 - 4x + 5 + x^2 + 4x + 3}{2} \right)^2 \\ &= 16 (\text{当且仅当 } -x^2 - 4x + 5 = x^2 + 4x + 3 \text{ 取得}) \end{aligned}$$

9. 若 α, β 满足 $\begin{cases} x \sin \beta + y \cos \alpha = \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \beta = \sin \beta \end{cases}$, 求 $x^2 - y^2$.

分析: 不要被题设吓到, 实际上就是解二元一次方程组

$$\begin{cases} x \sin \beta + y \cos \alpha = \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \beta = \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} \\ y = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} \end{cases}$$

$$x = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

$$= \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = -\sec(\alpha + \beta)$$

$$y = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$$

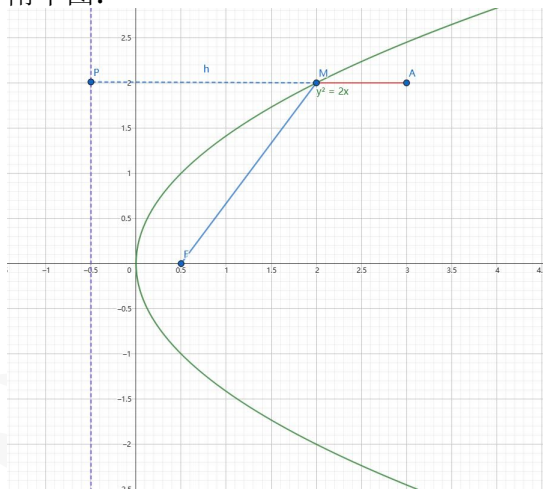
$$= \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

故 $x^2 - y^2 = 1$

10. $A(3, 2)$ 是平面上一点, F 是抛物线: $y^2 = 2x$ 上的一点, 抛物线上一点 M , 则 $|MF| + |MA|$ 取最小值的时 M 的坐标

解: 很简单的高中题. 由题意得 $F(\frac{1}{2}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$, 设点 M 到准线的距离为 $d = |PM|$. 则由抛物线的定义得 $|MA| + |MF| = |MA| + |PM|$ 故当 P, A, M 三点共线时, $|MF| + |MA|$ 取得最小值为 $|AP| = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$. 把 $y = 2$ 代入抛物线 $y^2 = 2x$ 得 $x = 2$, 故点 M 的坐标是 $(2, 2)$

附个图:



11. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 函数 $f(z)$ 满足 $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 且 $f(x) \neq 0$, 证明: $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y) \Rightarrow 2f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y) (*)$

令 $x = y \Rightarrow 2f^2(x) = f(2x) + f(0) = f(2x) + 1$, 同理 $2f^2(y) = f(2y) + 1$

带入 $(*)$ 中得: $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$, 且 $a_{505} = 2019$. 求 $\max a_5$.

分析: 一个自然的想法是所有的等号均能取得时 a_3 取得最大值, 此时 $\{a_n\}$ 为 $d = 4$ 的等差数列, 解得 $a_5 = 19$

$$\text{令 } b_n = a_{n+1} - a_n, a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) \Rightarrow b_n \leq b_{n+1}$$

$$\therefore a_5 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$a_{505} - a_1 = \sum_{i=1}^{504} b_i \geq 126(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 16$$

$$\therefore a_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 19, \text{ 当 } \{a_n\} \text{ 为等差数列取 “=”}$$

13. $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数, 函数图像关于 $x = 1$ 对称。对任意的 $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 且 $f(1) = \beta > 0$.

(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值.

(2) 证明: $f(x)$ 是周期函数

(3) 记 $\beta(n) = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \beta(n)$.

解: (1) 易得: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \beta^{\frac{1}{2}}, f\left(\frac{1}{4}\right) = \beta^{\frac{1}{4}}$

证明: (2) 事实上, 由双镜原理周期为 2 是显然的

$f(2+x) = f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ 是 $T = 2$ 的周期函数

解: (3) $\beta(n) = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$

注意到: $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n \times \frac{1}{2n}\right) = f^n\left(\frac{1}{2n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2n}\right) = \beta^{\frac{1}{2n}}$

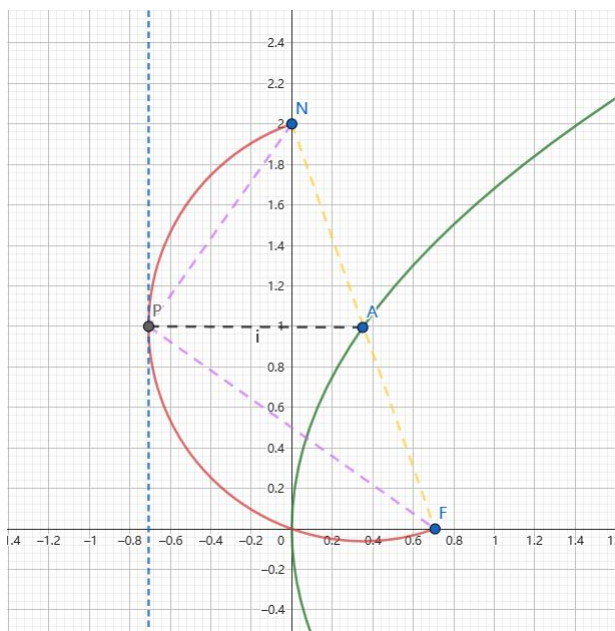
$$\therefore \beta(n) = \ln f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{\beta}{2n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

2015年启明考试数学部分

一、填空题

1. 对抛物线 $y^2 = 2\sqrt{2}x$, 若设其焦点为 F , y 轴正半轴上一点为 N . 若准线上存在唯一的点 P 使得 $\angle NPF = 90^\circ$, 则 N 点的纵坐标为

分析: 实际上就是以 NF 为直径的圆与准线相切, 求此时 N 点坐标, 图如下:



$|AP| = |AN| = |AF|, AP \perp l : x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A$ 在抛物线上

设 $N(0, a) \Rightarrow A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2})$ 带入抛物线方程, 解得 $a = 2$

$$2. \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{255} + \sqrt{256}} =$$

解: 设 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{255} + \sqrt{256}} = \sum_{i=1}^{255} b_i = \sqrt{256} - 1 = 15$$

$$3. \text{若已知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \text{ 存在, 则 } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} =$$

这道题超纲太多了, 涉及到级数知识, 仅展示做法

法一:

$$\text{设 } H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \Rightarrow H(n) = \gamma + \ln n + o(1)$$

$$\text{考虑部分和: } S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H(2n) - H(n) =$$

$$\ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty)$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{综上: } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2$$

法二：注意到： $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4.在边长为 1 的正方形中 (含边界) 取9 个点, 其中必有 3 个点, 它们构成的三角形面积不超过

解:在边长为 1 的正方形内任取3个点, 则这3点组成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{2}$ 。若我们在一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形内任取3点,那么这3点所组成的三角形的最大面积就是这个正方形的面积的一半, 即不超过 $\frac{1}{8}$ 。那么我们将一个边长为 1 的正方形分为4个相同的边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形, 任取9个点放到正方形中, 必有3个点落在同一个小正方形内。

由上面的分析得知,这3个点所组成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$

5.某人打靶打中 8 环、9 环、10 环的概率分别为 0.15,0.25,0.2, 现他开三枪, 不少于 28 环的概率为

解: case 1:成绩为28环, 有以下情况: $\{9, 9, 10\}, \{8, 10, 10\}$

case 2:成绩为29环, 有以下情况: $\{9, 10, 10\}$

case 3:成绩为30环, 有以下情况: $\{10, 10, 10\}$

$$p = C_3^2 0.25^2 \cdot 0.2 + C_3^2 0.2^2 \cdot 0.15 + C_3^2 0.2^2 \cdot 0.25 + 0.2^3 = 0.0935$$

二、解答题

6.若对任意实数 x, y , 有 $f((x-y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$, 求 $f(x)$.

解: 令 $x = y \Rightarrow f(0) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2$

再令 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ or } 1$

$\Rightarrow f(x) = x \text{ or } f(x) = x + 1$

7.求所有 a, b , 使 $|\sqrt{1-x^2} - ax - b| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 成立, 其中 $x \in [0, 1]$.

不妨设 $x = \sin \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$|\sqrt{1-x^2} - ax - b|$$

$$= |\cos \theta - a \sin \theta - b|$$

$$= |\sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi) - b| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} (\tan \phi = -\frac{1}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{2}}{2} + b \leq \sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi) \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} + b \quad (*)$$

$$f(\theta) := \sqrt{a^2+1} \sin(\theta + \phi)$$

case 1: $a \geq 0$

$$[f(\theta)]_{\max} = f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{a}, [f(\theta)]_{\min} = f(0) = -1$$

注意到此时值域区间长度 $l = a + 1 > \sqrt{2} - 1$, (*) 必不能恒成立, 此种情况舍去

case 2: $a < 0$

$[f(\theta)]_{\max} = f(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sqrt{a^2 + 1}$, $[f(\theta)]_{\min} = \min\{f(\frac{\pi}{2}), f(0)\} = \min\{-a, 1\}$
 if $a \leq -1$, $\Rightarrow [f(\theta)]_{\min} = 1$, 区间长度 $l = \sqrt{a^2 + 1} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a \in [-1, 1] \Rightarrow a = -1$
 $[f(\theta)]_{\min} = 1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
 if $a > -1$, $\Rightarrow [f(\theta)]_{\min} = -a$, 此时区间长度 $l = \sqrt{a^2 + 1} + a > \sqrt{2} - 1$, (*) 必不能恒成立,
 此种情况舍去

综上所述: $a = -1, b = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

8. 若复数 z 满足 $|z| = 1$, 求 $|z^3 - z + 2|^2$ 的最小值.

解:

法一:

设 $z = \cos \theta + i \sin \theta$, 得 $z^3 - z + 2 = \cos 3\theta - \cos \theta + 2 + i(\sin 3\theta - \sin \theta)$

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= (\cos 3\theta - \cos \theta + 2)^2 + (\sin 3\theta - \sin \theta)^2 \\
 &= 6 - 2(\cos 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin \theta) + 4\cos 3\theta - 4\cos \theta \\
 &= 6 - 2\cos 2\theta + 4\cos 3\theta - 4\cos \theta \\
 &= 4(4\cos^3 \theta - \cos^2 \theta - 4\cos \theta + 2)
 \end{aligned}$$

求导易得当 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ 时, $(|z^3 - z + 2|^2)_{\min} = \frac{8}{27}$.

法二:

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2|^2 &= |z^3 - z + 2z\bar{z}|^2 = |z(z^2 - 1 + 2\bar{z})|^2 = |z^2 - 1 + 2\bar{z}|^2 \\
 &= (z^2 - 1 + 2\bar{z})(\bar{z}^2 - 1 + 2z) = 4 - 2(z + \bar{z}) - (z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \\
 &= 4 - 2(z + \bar{z}) - [(z + \bar{z})^2 - 2] + 2(z + \bar{z})[(z + \bar{z})^2 - 3]
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{let } z+\bar{z}=x \in [-2, 2]} 2x^3 - x^2 - 8x + 6 \text{ (用导数易求最值)}$$

9. 已知三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三个实根.

(1) 若三个实根为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, a, b 为常数, 求 c 变化时 $x_3 - x_1$ 的取值范围;

(2) 若三个实根为 a, b, c , 求 a, b, c .

解: 这题有些麻烦, 如果缺少一元三次方程的相关概念建议下去了解一下再来看这道题

(1) 设三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三个实根分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 \leq x_2 \leq x_3$) 由韦达定理, 可得 $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$, 注意到

$$\frac{1}{2}[2(\frac{x_3 - x_1}{2})^2 + (x_3 - x_1)^2] \leq a^2 - 3b = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2] \leq [(x_3 - x_1)^2]$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 3b} \leq x_3 - x_1 \leq 2\sqrt{\frac{a^2 - 3b}{3}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2$ 或 $x_2 = x_3$ 时取到左端“=”, 当且仅当 $x_1 + x_3 = 2x_2$ 时取到右端“=”.

综上所述: $x_3 - x_1$ 的取值范围是 $\left[\sqrt{a^2 - 3b} \leq w \leq 2\sqrt{\frac{1}{3}a^2 - b} \right]$.

(2) 易知 $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - a)(x - b)(x - c)$, 由韦达定理得

$$\begin{cases} a + b + c = -a \\ ab + bc + ca = b \\ abc = -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ or } ab = -1$$

$$\text{if } c = 0, \begin{cases} b = -2a \\ ab = b \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

$$\text{if } ab = -1 \text{ 时, } \begin{cases} c = -2a - b \\ -1 + (a + b)c = b \end{cases}, \text{ 代入原方程, 得:}$$

$$b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow b + 1 = 0 \text{ or } b^3 - 2b + 2 = 0$$

$$\text{if } b + 1 = 0, \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{if } b^3 - 2b + 2 = 0,$$

$$\text{由一元三次方程的求根公式得 } b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} + 1} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{b} \\ c = \frac{2}{2} - b \end{cases}$$

综上 (a, b, c) 的值为 $(0, 0, 0), (1, -2, 0), (1, -1, -1), \left(-\frac{1}{k}, k, \frac{2}{k} - k\right)$ (其中 $k = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{19}{27}} + 1}$).

2014年启明考试数学部分

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题8分, 共40分)

1. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 n 重复合函数 $f_n(x) = f(f(\cdots f(x)\cdots)) =$

解: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 计算得 $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}, f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

由此猜想: $f(x)$ 经过 n 次复合后结果是 $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, 下面用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时, 显然成立

当 $n=k(k \in \mathbb{N}^+)$ 时, $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$ 成立.

当 $n=k+1$ 时, f_{k+1} 为 $f(x)$ 和 $f_k(x)$ 的复合函数

经计算得 $f_{k+1} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$ 与假设相符, 故假设成立

故: $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

2. 设多项式 $p(x)$ 满足 $p(x^2+1) = (p(x))^2+1$ 和 $p(0)=0$, 则 $p(x) =$

答案很明显 $p(x) = x$, 证明如下: 注意到 $p(1) = p(0)^2+1 = 1, p(2) = p(1)^2+1 = 2, p(5) = p(2)^2+1 = 5, \dots \Rightarrow p(x) = x$ 有无穷多解

又: $p(x)$ 为多项式函数 (设为 n 次), 则 $p(x) - x$ 也为多项式函数

但由代数基本定理 $p(x) - x = 0$ 最多有 n 个根 $\Rightarrow p(x) - x \equiv 0 \Rightarrow p(x) = x$

3. 设 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

注意到:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

4. 对 $x > 0$, 函数 $f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$ 的最小值为

注意到:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^3 + \frac{1}{x^3})^2}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= \frac{(x + \frac{1}{x})^2((x + \frac{1}{x})^4 - (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)^2)}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= \frac{(x + \frac{1}{x})^2((x + \frac{1}{x})^2 - (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1))((x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1))}{(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} \\
&= 3(x + \frac{1}{x}) \geq 6 \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 取得“=”)}
\end{aligned}$$

5. 假设 20 名学生中的每一名学生可从提供的六门课程中选学一门至六门, 也可以一门都不选. 试判断下列命题是否正确: 存在 5 名学生和两门课程, 使得这 5 名学生都选了这两门课, 或者都没选, 选填“正确”或“否”

解: 答案是否定的. 不一定会出现这 5 个学生. 假设 20 个学生都选三门课, 而且选法都不完全一样, 因为 $20 = \binom{6}{3}$, 所以这是可能的. 那么对任何两门课程, 恰有 4 个学生选 (他们选的第 3 门课都不同, $4 = 6 - 2$ 门课程中的一门). 所以任何两门课程没有 5 个学生同时选. 同样地, 对任何两门课程, 恰有 4 个学生没有选取这两门课, 而没有 5 名学生同时不选两门课.

二、(本题共 14 分)

1. 若 a 为正整数而 \sqrt{a} 不为整数, 证明: \sqrt{a} 为无理数.

证明: 反证法, 设 $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, 从而可进一步设 $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$) $\Rightarrow p^2 = aq^2$

$\because a$ 不是完全平方数. $\therefore \exists m \in \mathbb{P}, s.t. a \bmod m = 0, a \bmod m^2 \neq 0$

$p^2 = aq^2 \Rightarrow p^2 \bmod m = 0 \Rightarrow p \bmod m = 0 \Rightarrow p^2 \bmod m^2 = 0$

$\Rightarrow aq^2 \bmod m^2 = 0 \Rightarrow q^2 \bmod m = 0 \Rightarrow q \bmod m = 0$

$\therefore q \bmod m = 0, p \bmod m = 0$ 与 $(p, q) = 1$ 矛盾, 故 \sqrt{a} 为无理数

2. 试证: 除 $\{0, 0, 0\}$ 外, 没有其他整数 m, n, p 使得

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0.$$

证明:

反证法. 假设存在整数 m, n, p , 使得 $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$

首先考虑含有 0 的情况, 这种情况显然是存在矛盾的, 不多赘述

下面考虑 m, n, p 全部不为 0 的情况:

注意到 $n\sqrt{2}$ 和 $p\sqrt{3}$ 也是无理数对于 $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$, 易得:

$$m = -n\sqrt{2} - p\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = (n\sqrt{2} + p\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np$$

$\because m \in \mathbb{Z} \therefore m^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np \in \mathbb{Z}$

但 $2\sqrt{6}np$ 是一个无理数。因此, $2n^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}np$ 必是一个无理数。矛盾, 假设不成立。综上所述, 除了 $\{0, 0, 0\}$ 外, 不存在其他整数 m, n, p 使得 $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$ 。

三、(本题共16分) 设 a, b, c 为三角形三边之长, $p = \frac{a+b+c}{2}$, r 为内切圆半径, 证明:

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

证明: 设三角形的面积为 S , 则 $S = pr$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$\Rightarrow p^2 r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

设 $x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$, 则有:

$$\frac{1}{r^2} = pxyz = xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

而上式是显然易证的。

四、(本题共 12 分) 证明: 设 m 是任一正整数, 则 $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^m}$ 不是整数。

证明: 当 $m = 1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$, 显然不是整数, 结论成立。下面证明, 当 $m \geq 2$ 时, $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$ 也不可能是整数。设 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$, 令 $M = 2^m$, 在 S 两边同时乘以 M 得:

$$MS = \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \frac{M}{4} + \dots + 1 \quad (*)$$

等式右边的每一项 $\frac{M}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 2^m$) 要么是整数, 要么是一个分母为奇数的不可约分数, 再来考察那些分母为奇数的不可约分数的项。因为 $m \geq 2$, 故在所有的分母当中 (都是奇数) 必定存在一个最大的奇素数, 设它为 p , 这样在分母中去掉 p , 设余下的奇数的最小公倍数为 N , 在(*)再同时乘以 N , 得到

$$MNS = \frac{MN}{2} + \frac{MN}{3} + \frac{MN}{4} + \dots + N$$

等式右边的每一项 $\frac{MN}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 2^m, k \neq p$), 仅当 $k = p$ 时, $\frac{MN}{k}$ 不是整数, 其他的项都是整数。

所以等式右边最后得到的不是整数, 因此, 等式左边的 MNS 也不是整数, 显然, 若 S 是整数, 那么就与 MNS 不是整数相矛盾! 所以 a_m 不可能是整数. 证毕.

五、(本题共18分) 下图是2013年恒大足球俱乐部策划的主场与首尔 FC 足球队亚冠决赛海报, 左边是恒大队, 右边是首尔队, 该海报的寓意是什么? 要求简单推导海报中两个数学式子的结果. 一个数学式子是 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}$ (拉马努金式子), 另一个是 $e^{\pi i} + 1$ (已知欧拉公式 $e^{\pi i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$).

解: 注意到拉马努金恒等式: $n = \sqrt{1 + (n-1)(n+1)}$, 因此:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{1+2 \cdot 4} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \cdot 6}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

注意到 $e^{i\pi} + 1 = 0$, 故结果为: 3 : 0



写在最后:

欢迎大家加入2023级学数华科志愿辅导群(855590575),交流数学问题!
如果参考答案有些许纰漏欢迎大家指出