

南京大学微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2022.8.18)

一、(8分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题 (7 分 $\times 3 = 21$ 分)

1. 求过直线 $L: \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ 与半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I = \iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$, 其中 $D: x \geq 1, y \geq x^2$.

三、计算下列各题 (7 分 $\times 3 = 21$ 分)

1. 计算 $I = \int_C 2x dx + z dy + (x + 2y - z) dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = z \end{cases}$ 上

从点 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I = \oint_C \frac{y^2}{2} dx - xz dy + \frac{y^2}{2} dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y = R. \end{cases}$ 从 y 轴的

正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I = \iint_S (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy$, 其中 S 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题 (7 分 $\times 4 = 28$ 分)

1. 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性. (提示: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$)

3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题 (7 分 $\times 2 = 14$ 分)

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(1+x+y), y(0) = -1$ 的特解.

2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 的通解.