10-C3

高级搜索树

红黑树：插入

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

莫赤匪狐，莫黑匪乌；惠而好我，携手同车

算法

❖ 按BST规则插入关键码e //x = insert(e)必为末端节点

❖ 除非系首个节点（根），x的父亲p = x->parent必存在

首先将x染红 //x->color = isRoot(x) ? B : R

❖ 至此，条件1、2、4依然满足；

但3不见得，有可能...

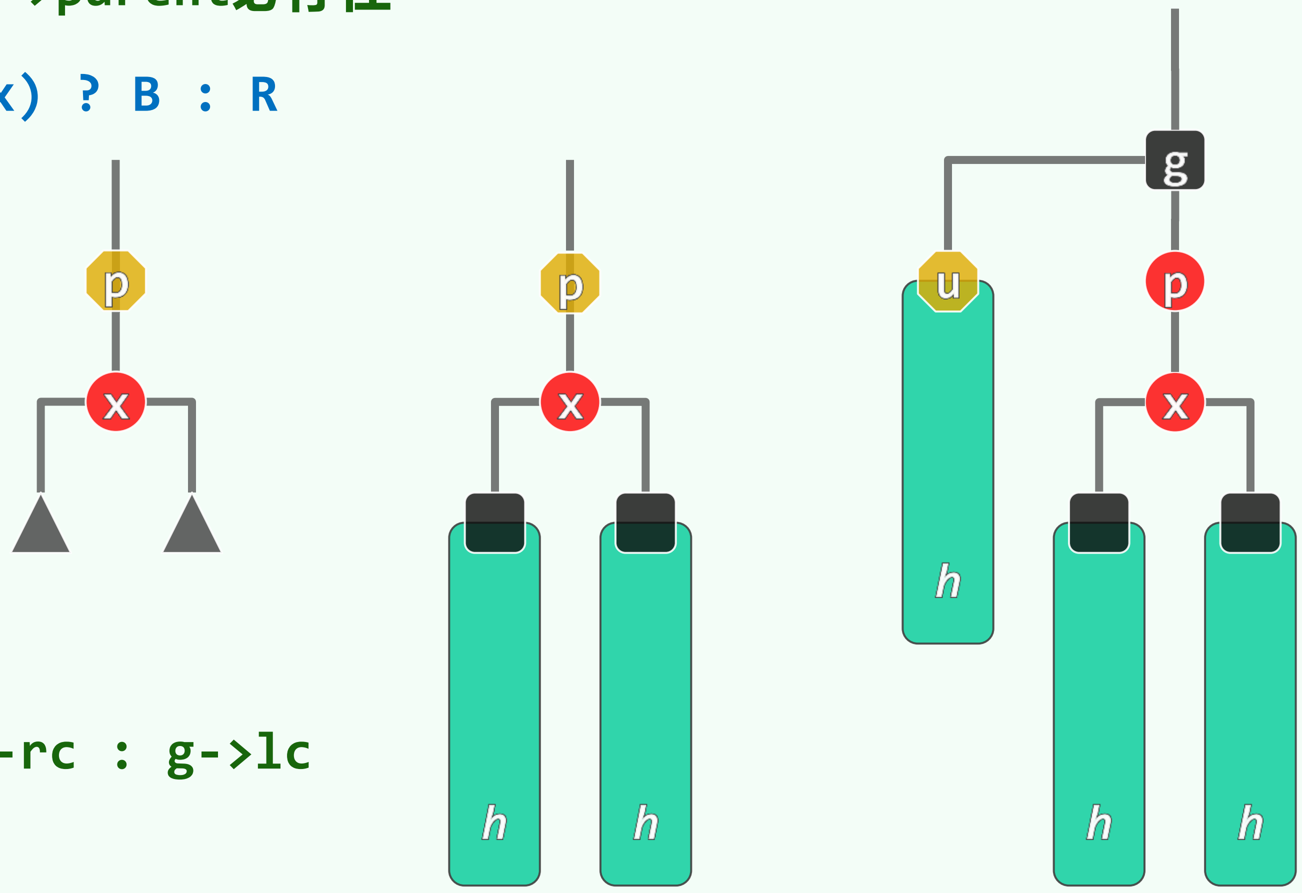
❖ 双红（double-red）

//p->color == x->color == R

❖ 考查：祖父g = p->parent

叔父u = (p == g->lc) ? g-rc : g->lc

❖ 以下，视u的颜色，分两种情况处理...



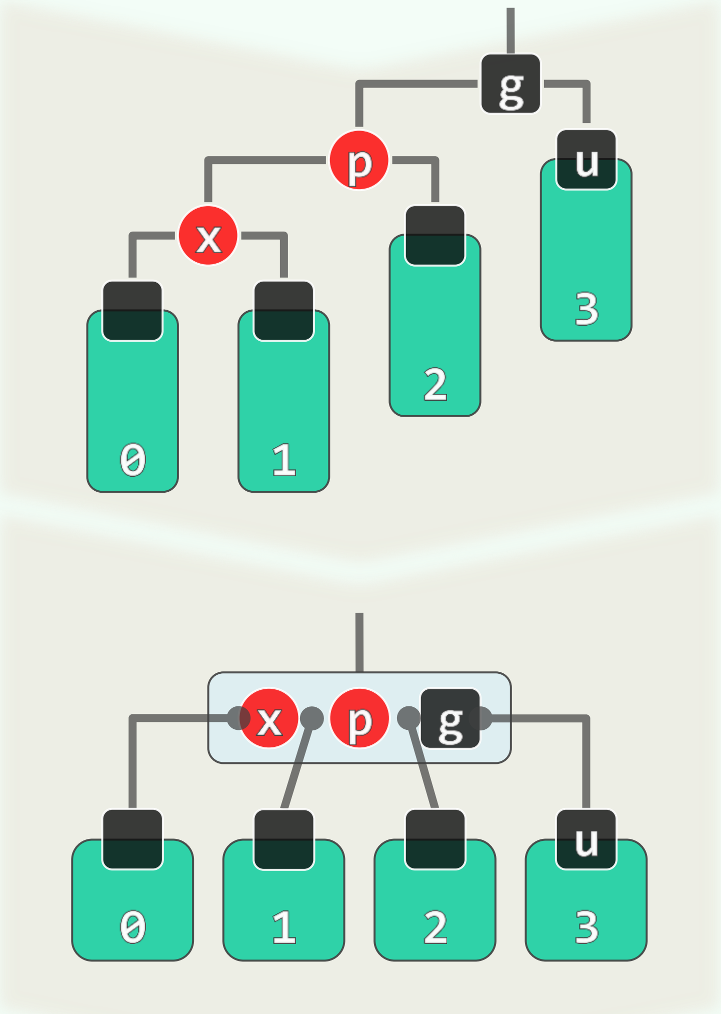
实现

```
❖ template <typename T> BinNodePosi(T) RedBlack<T>::insert( const T & e ) {
   // 确认目标节点不存在（留意对_hot的设置）
      BinNodePosi(T) & x = search( e ); if ( x ) return x;
   // 创建红节点x，以_hot为父，黑高度 = -1
      x = new BinNode<T>( e, _hot, NULL, NULL, -1 ); _size++;
   // 如有必要，需做双红修正，再返回插入的节点
      BinNodePosi(T) xOld = x; solveDoubleRed( x ); return xOld;
   } //无论原树中是否存有e，返回时总有x->data == e
```

双红修正

```
❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed( BinNodePosi(T) x ) {
     if ( IsRoot( *x ) ) { //若已（递归）转至树根，则将其转黑，整树黑高度也随之递增
        { _root->color = RB_BLACK; _root->height++; return; } //否则...
     BinNodePosi(T) p = x->parent; //考查x的父亲p（必存在）
     if ( IsBlack( p ) ) return; //若p为黑，则可终止调整；否则
     BinNodePosi(T) g = p->parent; //x祖父g必存在，且必黑
     BinNodePosi(T) u = uncle( x ); //以下视叔父u的颜色分别处理
     if ( IsBlack( u ) ) { /* ... u为黑（或NULL） ... */ }
     else                { /* ... u为红 ... */ }
  }
```

RR-1：u->color == B



❖ 此时，

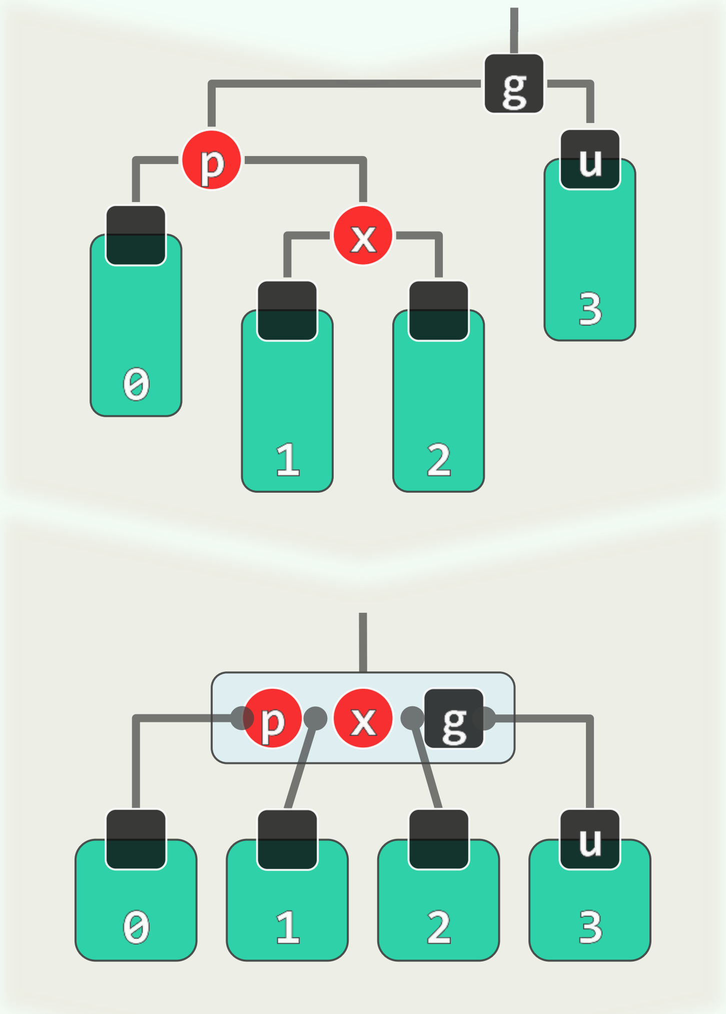
x、p、g的四个孩子

（可能是外部节点）

- 全为黑，且
- 黑高度相同

❖ 另两种对称情况

自行补充



RR-1：u->color == B

1) 参照AVL树算法，做局部“3+4”重构

2) 染色：b转黑，a或c转红

❖ 从B-树的角度，如何理解这一情况？

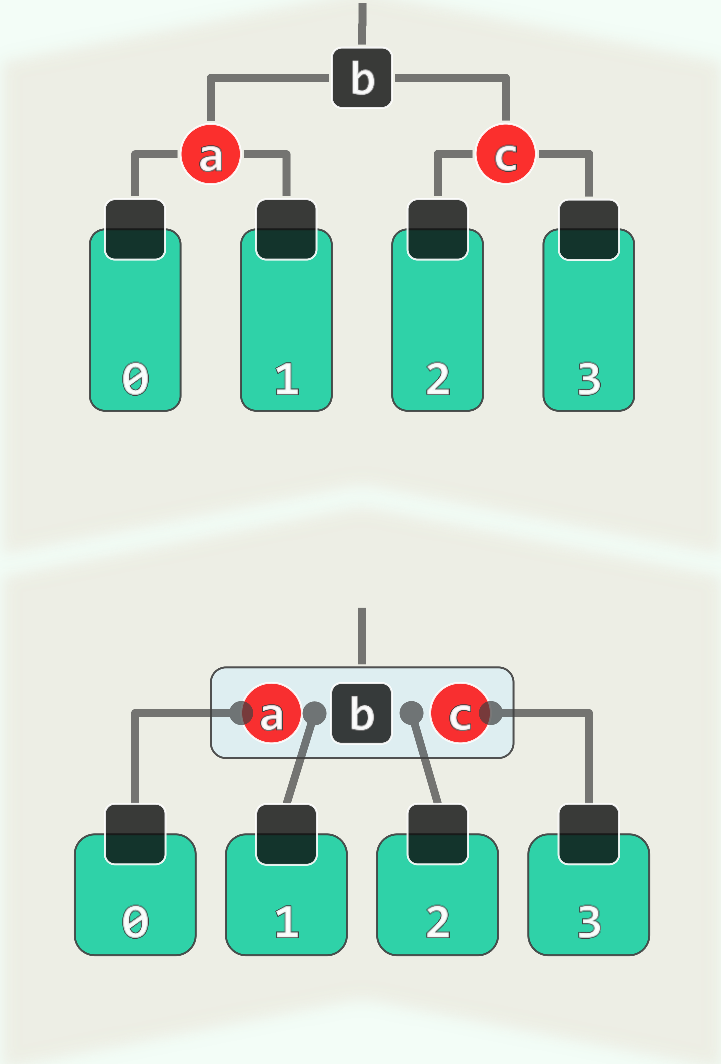
❖ 调整前之所以非法，是因为

  - 在某个三叉节点中插入红关键码，使得

  - 原黑关键码不再居中 //RRB或BRR，出现相邻的红关键码

❖ 调整之后的效果相当于 //B-树的拓扑结构不变，但

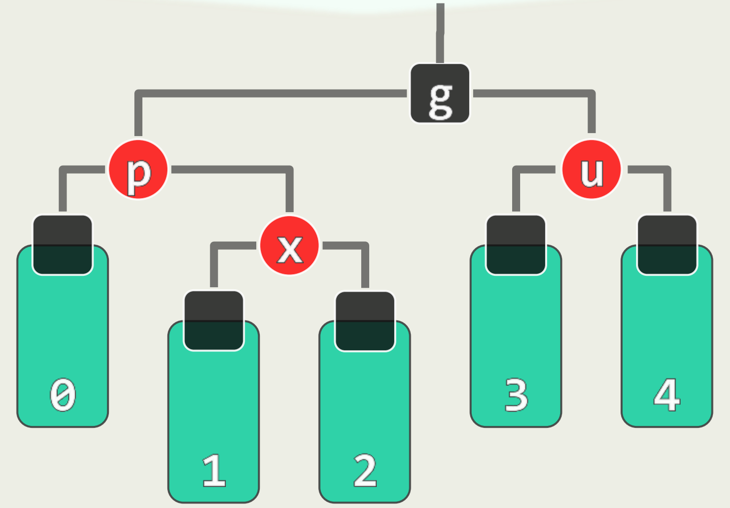
  - 在新的四叉节点中，三个关键码的颜色改为RBR

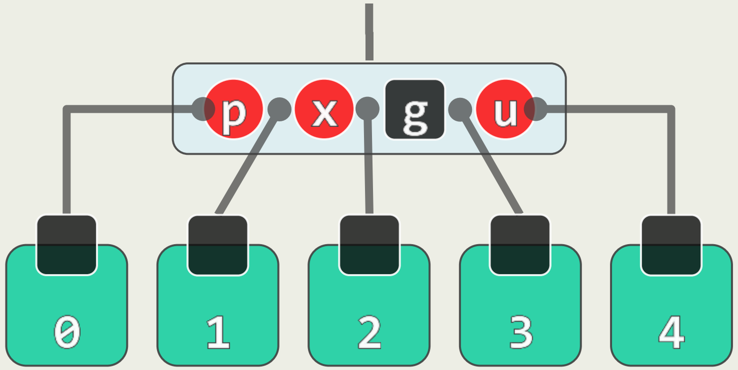


RR-1：实现

```
❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed( BinNodePosi(T) x ) {
     /* ...... */
     if ( IsBlack( u ) ) { //u为黑或NULL
     // 若x与p同侧，则p由红转黑，x保持红；否则，x由红转黑，p保持红
        if ( IsLChild( *x ) == IsLChild( *p ) ) p->color = RB_BLACK;
        else                                     x->color = RB_BLACK;
        g->color = RB_RED; //g必定由黑转红
        BinNodePosi(T) gg = g->parent; //great-grand parent
        BinNodePosi(T) r = FromParentTo( *g ) = rotateAt( x );
        r->parent = gg; //调整之后的新子树，需与原曾祖父联接
     } else { /* ... u为红 ... */ }
  }
```

RR-2：u->color == R



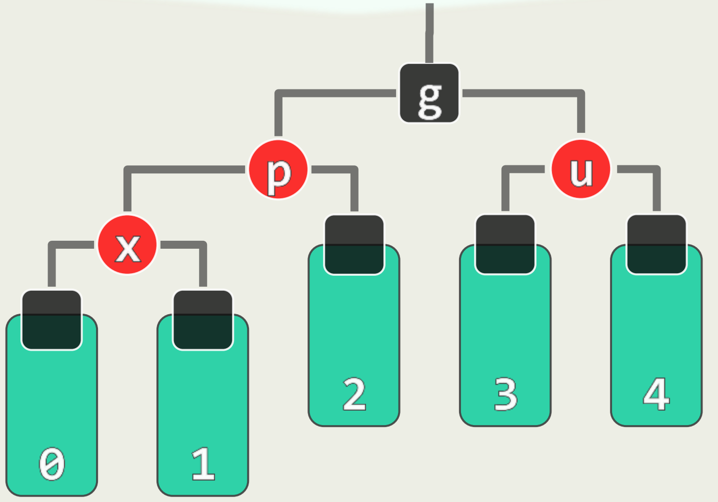


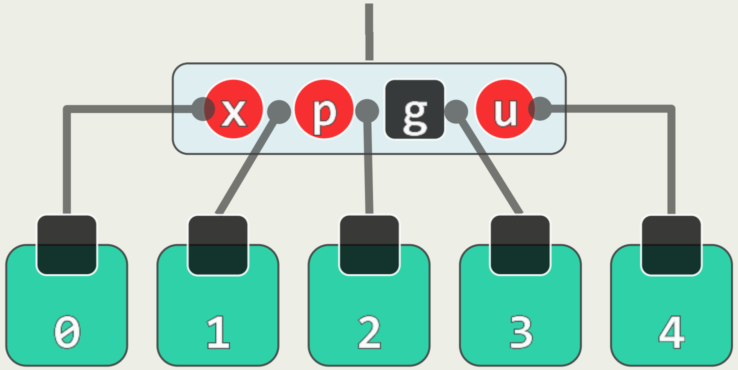
❖ 在B-树中，等效于

超级节点发生**上溢**

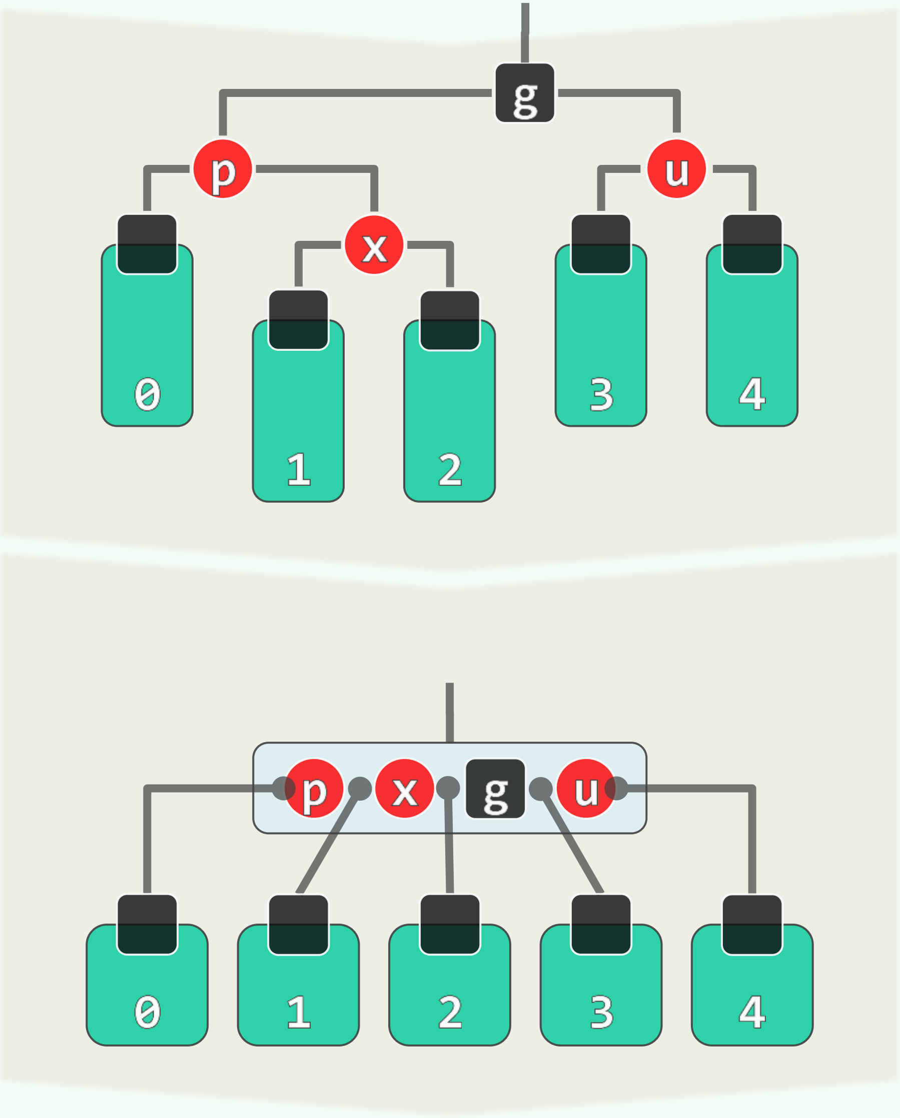
❖ 另两种对称情况

请自行补充

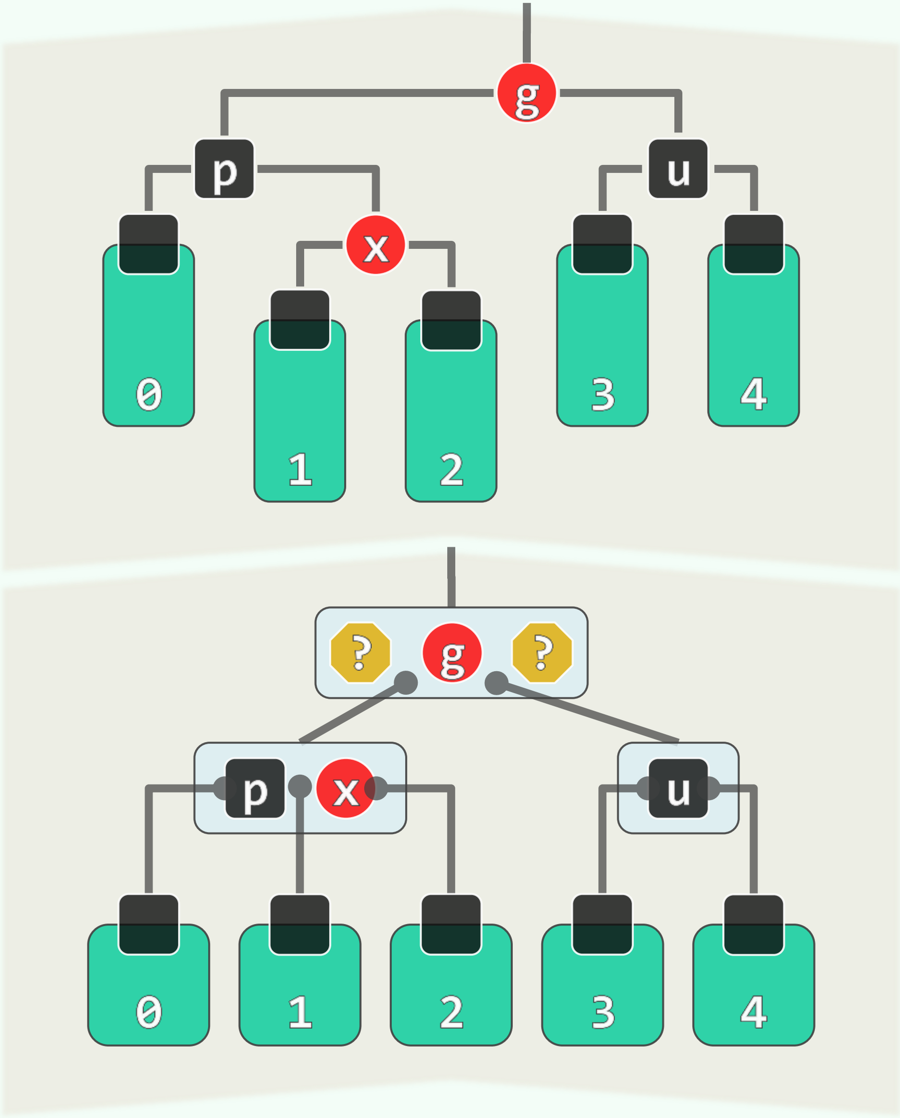




RR-2：u->color == R



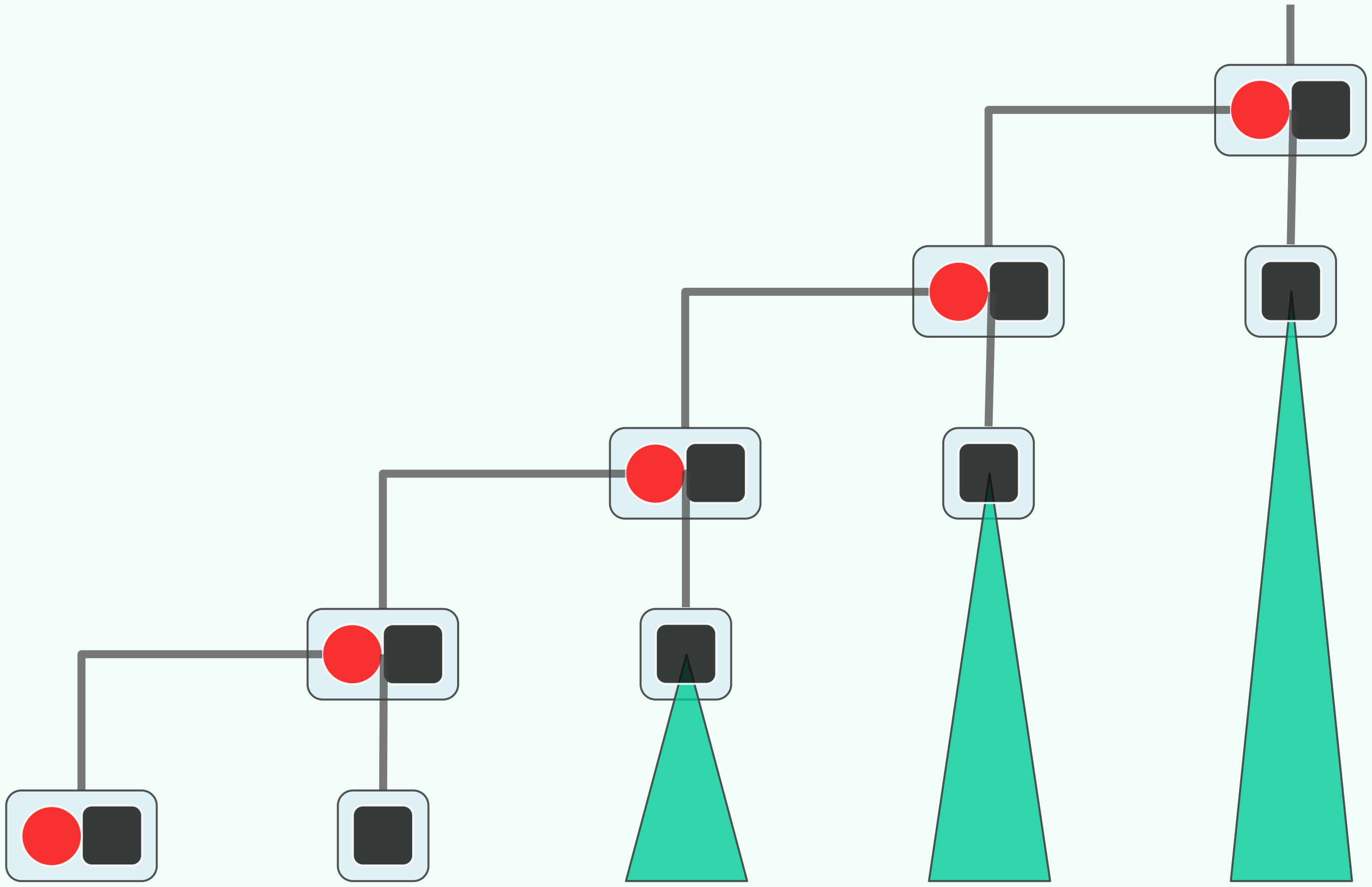
- ❖ p与u转黑，g转红
- ❖ 在B-树中，等效于
  - \- 节点**分裂**
  - \- 关键码g上升一层



RR-2：u->color == R

- 既然是分裂，也应有**可能**继续向上传递——亦即，g与parent(g)**再次构成双红**
- 果真如此，可
  - 等效地将g视作新插入的节点
  - 区分以上两种情况，如法处置
- 直到所有条件满足（即不再双红）

  或者抵达树根
- g若果真到达树根，则
  - 强行将g转为黑色
  - 整树（黑）高度加一



RR-2：实现

```
❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed( BinNodePosi(T) x ) {
    /* ...... */
    if ( IsBlack( u ) ) { /* ... u为黑（含NULL） ... */ }
    else { //u为红色
       p->color = RB_BLACK; p->height++; //p由红转黑，增高
       u->color = RB_BLACK; u->height++; //u由红转黑，增高
       if ( ! IsRoot( *g ) ) g->color = RB_RED; //g若非根则转红
       solveDoubleRed( g ); //继续调整g（类似于尾递归，可优化）
    }
}
```

复杂度

❖ 重构、染色均属常数时间的局部操作，故只需统计其总次数

❖ 红黑树的每一次插入操作，都可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内完成

❖ 其中至多做 $\mathcal{O}(\log n)$ 次节点染色、1次“3+4”重构

	旋转	染色	此后
u为黑	1~2	2	调整随即完成
u为红	0	3	可能再次双红，但必上升两层