

绪论

动态规划：记忆法



OI - XAJ

圣人不记事，所以常记得；今人忘事，以其记事

有人建议不妨置备一本签名簿，供来访者留下自己的名字，就像怀特山
那样；可是，天哪！我的记性非常好，用不着那个玩意儿。

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

fib() : 递归

$$fib(n) = fib(n - 1) + fib(n - 2)$$



❖ `int fib(n) { return (2 > n) ? n : fib(n - 1) + fib(n - 2); } //为何这么慢？`

❖ 复杂度 : $T(0) = T(1) = 1$; $T(n) = T(\boxed{n - 1}) + T(\boxed{n - 2}) + 1$, $\forall n > 1$

- 令 $S(n) = [T(n) + 1]/2$
- 则 $S(0) = 1 = fib(1)$, $S(1) = 1 = fib(2)$
- 故 $S(n) = S(n - 1) + S(n - 2) = fib(n + 1)$

$$T(n) = 2 \cdot S(n) - 1 = 2 \cdot fib(n + 1) - 1 = \mathcal{O}(fib(n + 1)) = \mathcal{O}(\phi^n)$$

- 其中 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$

封底估算

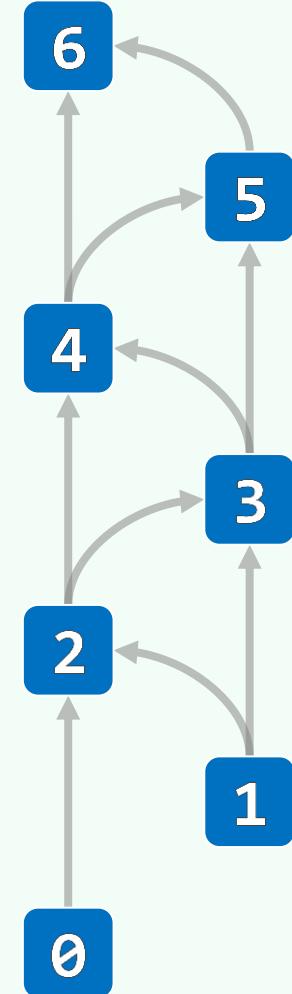
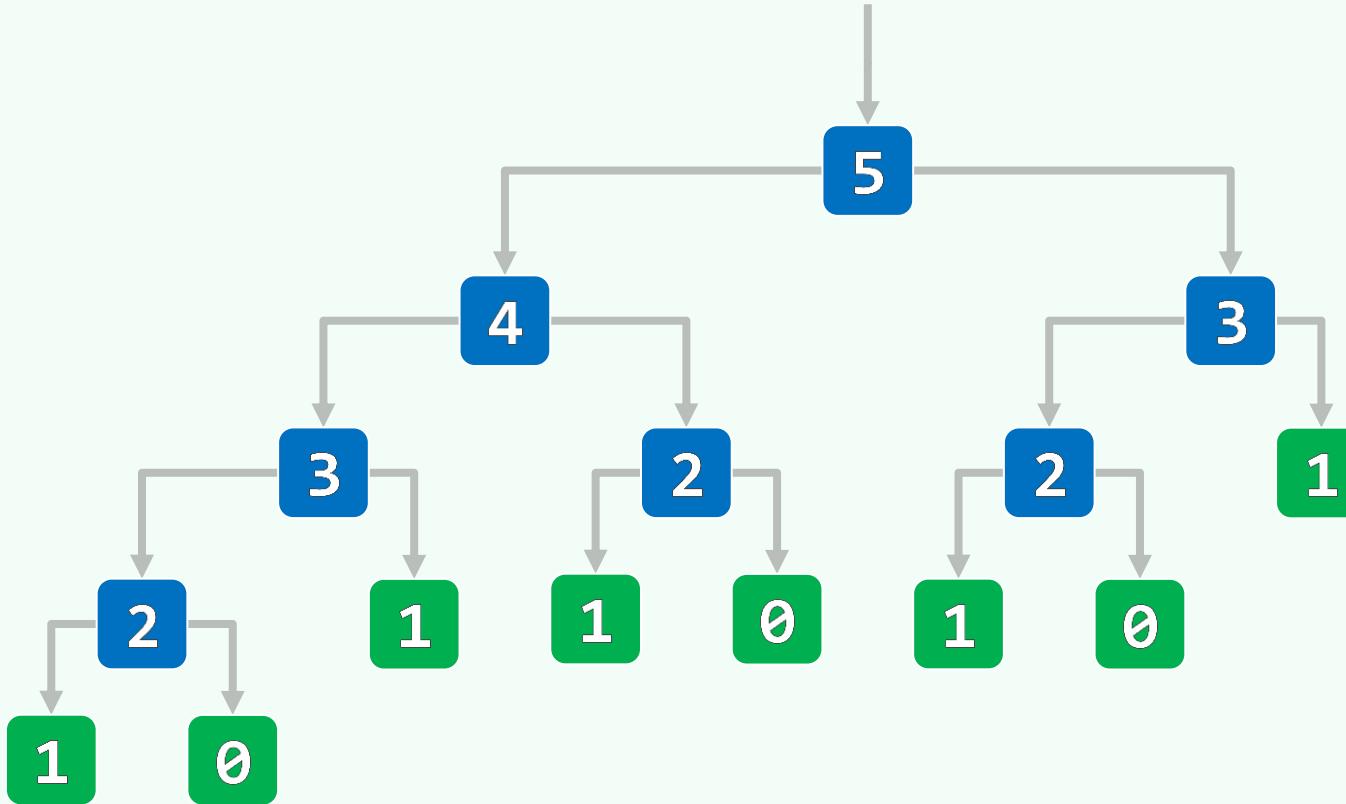
$$\phi^{36} \approx 2^{25} \quad \phi^{43} \approx 2^{30} \approx 10^9 \text{ flo} = 1 \text{ sec}$$

$$\phi^5 \approx 10 \quad \phi^{67} \approx 10^{14} \text{ flo} = 10^5 \text{ sec} \approx 1 \text{ day}$$

$$\phi^{92} \approx 10^{19} \text{ flo} = 10^{10} \text{ sec} \approx 10^5 \text{ day} \approx 3 \text{ century}$$

递归

❖ 递归版fib()低效的根源在于，各递归实例均被大量地重复调用



◆ 先后出现的递归实例，共计 $\mathcal{O}(\phi^n)$ 个；而去除重复之后，总共不过 $\mathcal{O}(n)$ 种

Memoization

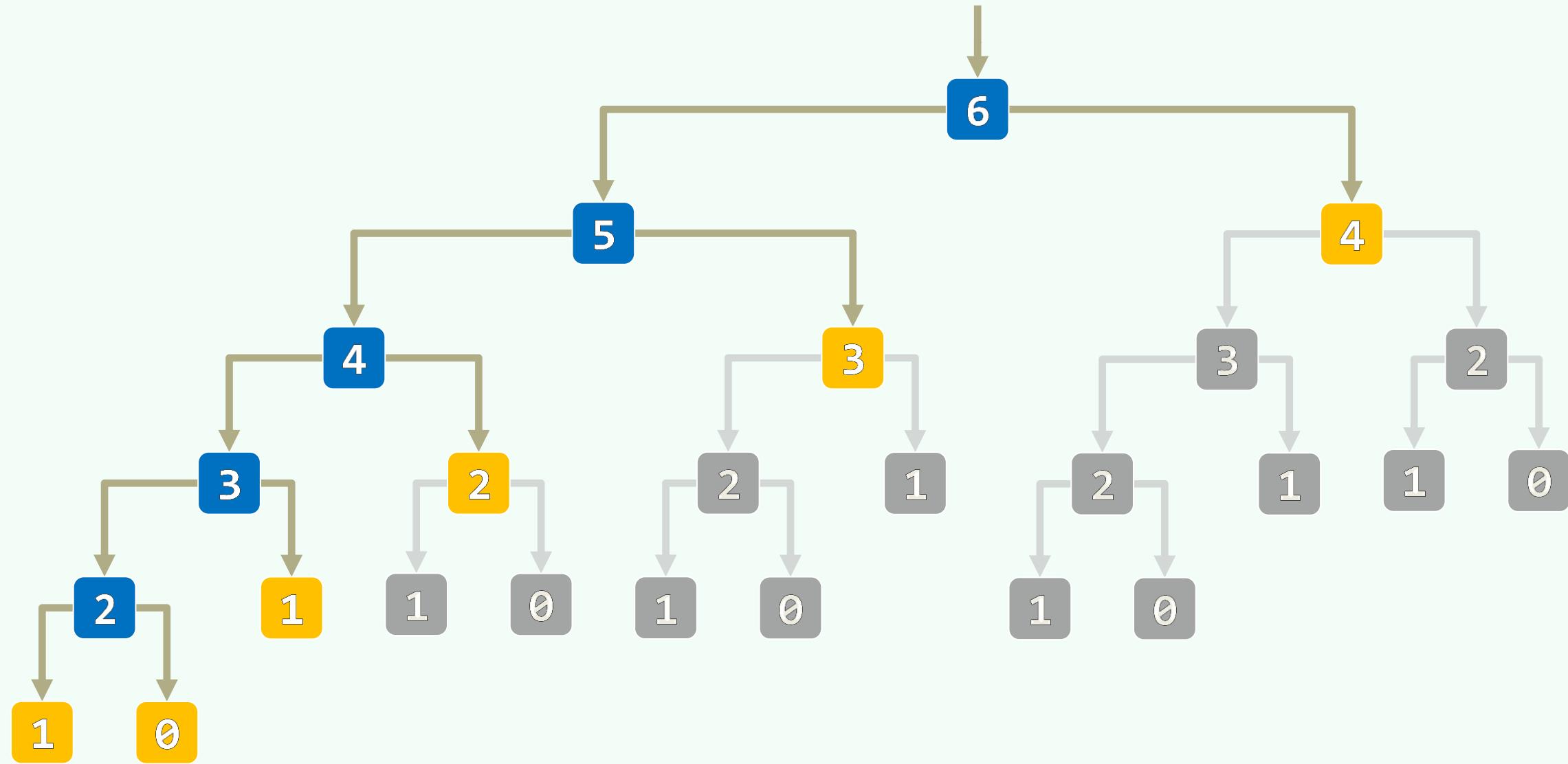


❖ $T \ M[N]$; #init. with UNDEFINED

```
def f(n)
    if ( n < 1 ) return trivial( n );
    return f(n-X) + f(n-Y)*f(n-Z);
```

```
def f(n)
    if ( n < 1 ) return trivial( n );
    # recur only when necessary &
    # always write down the result
    if ( M[n] == UNDEFINED )
        M[n] = f(n-X) + f(n-Y)*f(n-Z);
    return M[n];
```

Memoization: fib()



动态规划

❖ Dynamic programming , 颠倒计算方向 :

由自顶而下递归，改为自底而上迭代

❖ `f = 1; g = 0; //fib(-1), fib(0)`

```
while ( 0 < n-- ) {  
    g = g + f;  
    f = g - f;  
}  
return g;
```

❖ $T(n) = \Theta(n)$, 而且仅需 $\Theta(1)$ 空间 !

