θ2-XA2

向量

位图：典型应用

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

Those too big to pass through are our friends.

小集合 + 大数据：问题

- 老问题：int A[n]的元素均取自[0, m)

  如何剔除其中的重复者？

- 仿照Vector::deduplicate()改进版

  先排序，再扫描

  —— O(nlogn + n) —— 毫无压力

- 新特点：数据量虽大，但重复度极高

  - 想想我们电脑里的mp3、mp4
  - 还有，朋友圈 ...

- 比如：

  2^24 = m << n = 10^10

  亦即，10,000,000,000个24位无符号整数

- 如果采用内部排序算法

  至少需要 4 * n = 40GB 内存

  ——否则，频繁的I/O将导致整体效率的低下

- 那么

  m << n 的条件，又应如何加以利用？

小集合 + 大数据：算法

```
Bitmap B( m ); //O(m)
for (int i = 0; i < n; i++)
   B.set( A[i] ); //O(n)
for (int k = 0; k < m; k++)
   if ( B.test( k ) )
      /* ... */; //O(m)
```

❖ 拓展：搜索引擎的使用规律亦是如此

词表规模不大，但重复度极高

——如何从中剔除重复的索引词？

❖ 总体运行时间 = O(n+m) = O(n)

❖ 空间 = O(m)

- 就上例而言，降至：

  m/8 = 2^21 = 2MB << 40GB

- 即便 m = 2^32，也不过：

  2^29 = 0.5GB

❖ 关键在于

如何将查询词表转换为某一集合

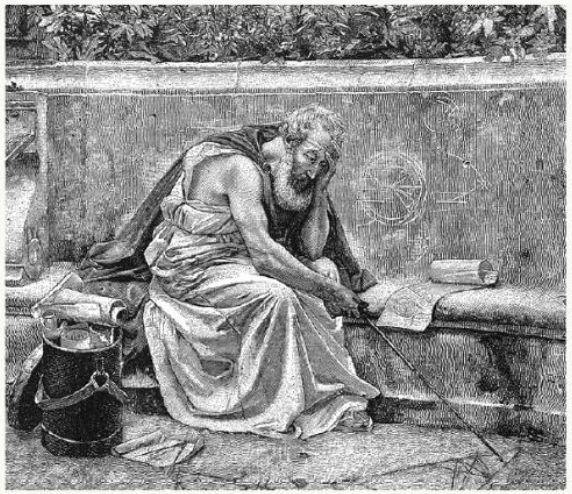
——留作习题

筛法：思路

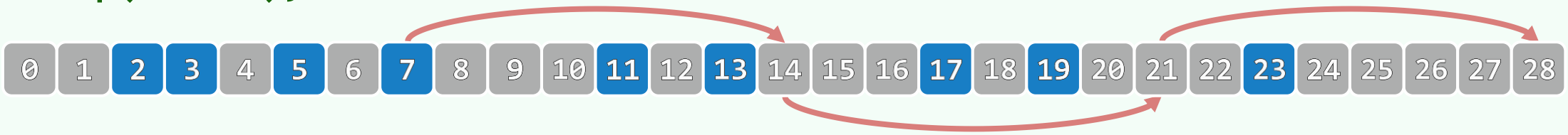

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

筛法：实现

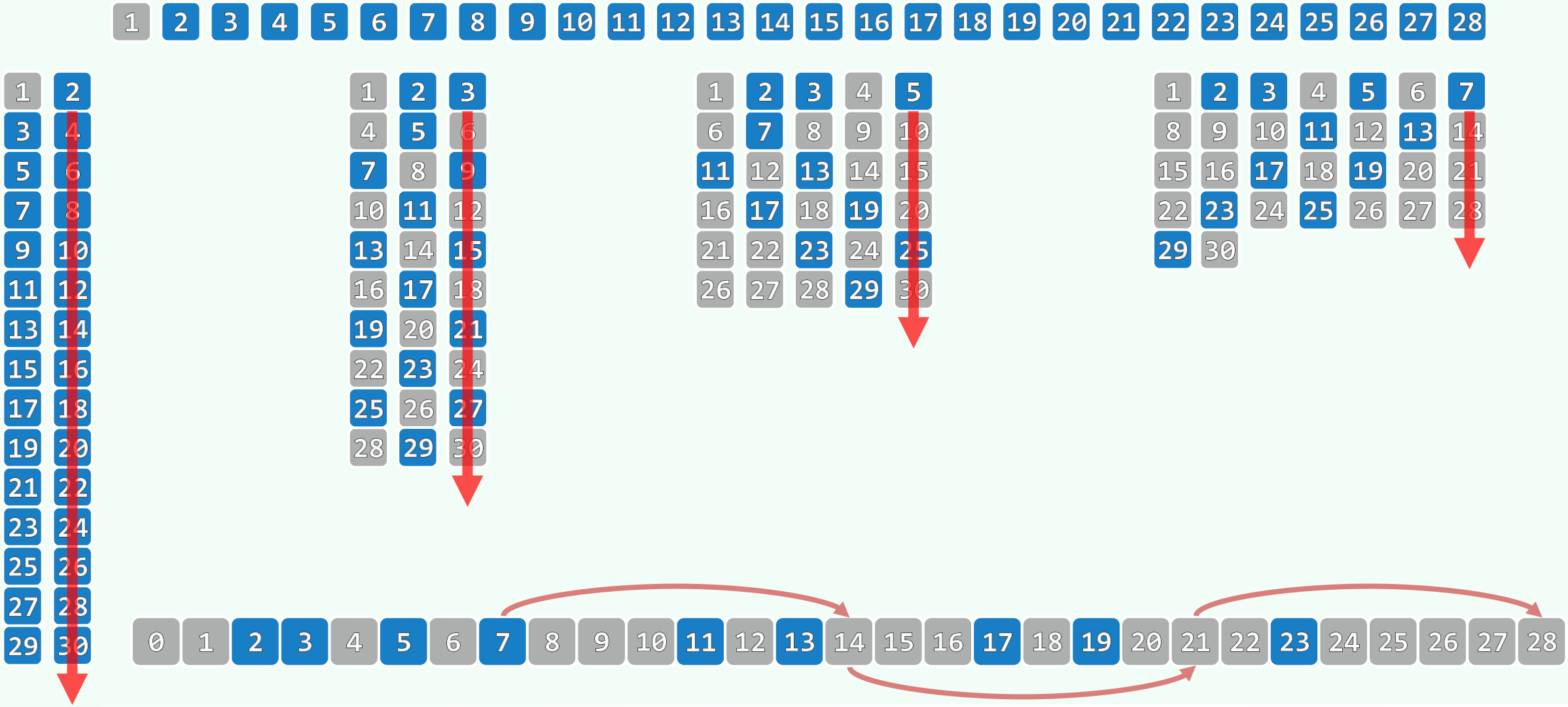
```
❖void Eratosthenes( int n, char * file ) {
    Bitmap B( n );
    B.set( 0 ); B.set( 1 );
    for ( int i = 2; i < n; i++ )
       if ( ! B.test( i ) )
          for ( int j = 2*i; j < n; j += i )
             B.set( j );
    B.dump( file );
}
```



Eratosthenes
(276 ~ 194 B.C.)



筛法：过程 + 效果


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

效率 + 改进

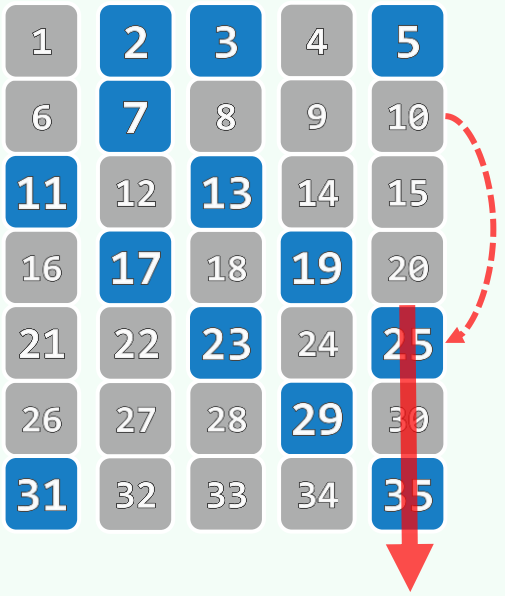
❖ 不计内循环，外循环自身每次仅一次加法、两次判断，累计$\mathcal{O}(n)$

❖ 内循环每趟迭代$\mathcal{O}(n/i)$步，由素数定理至多$n/\ln n$趟，累计耗时不过

$$n/2 + n/3 + n/5 + n/7 + n/11 + \ldots$$

$$< n/2 + n/3 + n/4 + n/5 + n/6 + \ldots + n/(n/\ln n)$$

$$= \mathcal{O}(n \cdot (\ln(n/\ln n) - 1)) = \mathcal{O}(n \cdot \ln n - n \cdot \ln(\ln(n))) = \mathcal{O}(n \cdot \log n)$$



❖ 循环起点“i+i”可改作“i*i” //为什么？

❖ 如此，内循环的长度将由$\mathcal{O}(n/i)$降至$\mathcal{O}(\max(1, n/i - i))$ //从渐进角度看，是否实质的改进？

❖ 基于以上，如何实现primeNLT(int low)？