01-XB2

绪论

局限：宇宽

God kisses the finite in his love and man the infinite.

当一个人反复思考的时候，就必定会出现悖论，然而不管你们会怎么说，
我宁愿做一个持有悖论的人，也不愿做心存偏见的人。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

$power_a(n) = a^n$

❖ 平凡实现：

```
pow = 1; //O(1)

while ( 0 < n ) //O(n)

  { pow *= a; n--; } //O(1+1)
```

❖ $T(n) = 1 + 2n = \mathcal{O}(n)$

线性？伪线性！

❖ 所谓输入规模，准确地应定义为

用以描述输入所需的空间规模

❖ 对于此类数值计算

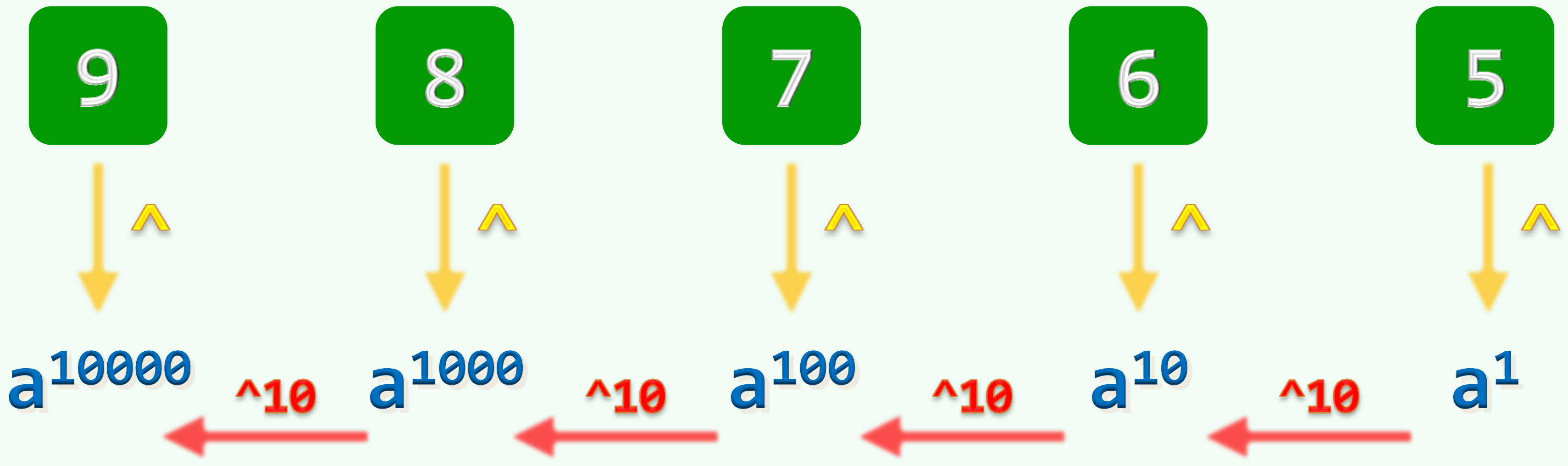
即是n的二进制位数，亦即n的打印宽度

$$r = \lceil \log_2(n+1) \rceil = \mathcal{O}(\log n)$$

$T(r) = \mathcal{O}(2^r)$ //指数复杂度！

a^{98765}

$$a^{9\cdot10^4 \;+\; 8\cdot10^3 \;+\; 7\cdot10^2 \;+\; 6\cdot10^1 \;+\; 5\cdot10^0}$$



$$\left(a^{10^4}\right)^9 \cdot \left(a^{10^3}\right)^8 \cdot \left(a^{10^2}\right)^7 \cdot \left(a^{10^1}\right)^6 \cdot \left(a^{10^0}\right)^5$$

a^{10110b}

$$a^{1 \cdot 2^4 \;+\; 0 \cdot 2^3 \;+\; 1 \cdot 2^2 \;+\; 1 \cdot 2^1 \;+\; 0 \cdot 2^0}$$

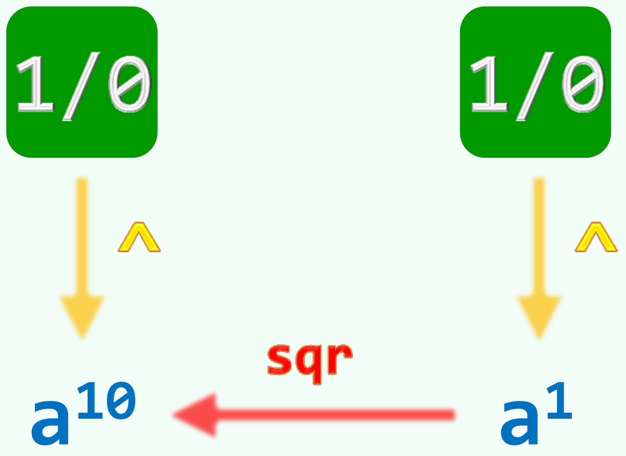
1	0	1	1	0
^	^	^	^	^
a^{10000}	a^{1000}	a^{100}	a^{10}	a^{1}

$$a^{10000} \xleftarrow{\wedge 10} a^{1000} \xleftarrow{\wedge 10} a^{100} \xleftarrow{\wedge 10} a^{10} \xleftarrow{\wedge 10} a^{1}$$

$$\left(a^{2^4}\right)^1 \cdot \left(a^{2^3}\right)^0 \cdot \left(a^{2^2}\right)^1 \cdot \left(a^{2^1}\right)^1 \cdot \left(a^{2^0}\right)^0$$

从 $\mathcal{O}(n)$ 到 $\mathcal{O}(r = \log n)$

```
❖ int power( int a, int n ) {
      int pow = 1, p = a; //O(1 + 1)
      while (0 < n) { //O(logn)
         if (n & 1) //O(1)
            pow *= p; //O(1)
         n >>= 1; //O(1)
         p *= p; //O(1)
      }
      return pow; //O(1)
  }
```



❖ **输入规模** $= r = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$

❖ **运行时间** $= T(r) = 1 + 1 + 4r + 1 = \mathcal{O}(r)$

❖ **如此，“实现”了从指数到线性的改进**

悖论？

❖ 根据以上算法，“可以”在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内计算出 $power(n) = a^n$

❖ 然而，a^n 的二进制展开宽度为 $\Theta(n)$

这意味着，即便是直接打印 a^n，也至少需要 $\Omega(n)$ 时间......哪里错了？

❖ 类似的悖论对 $fib(n)$ 也存在...

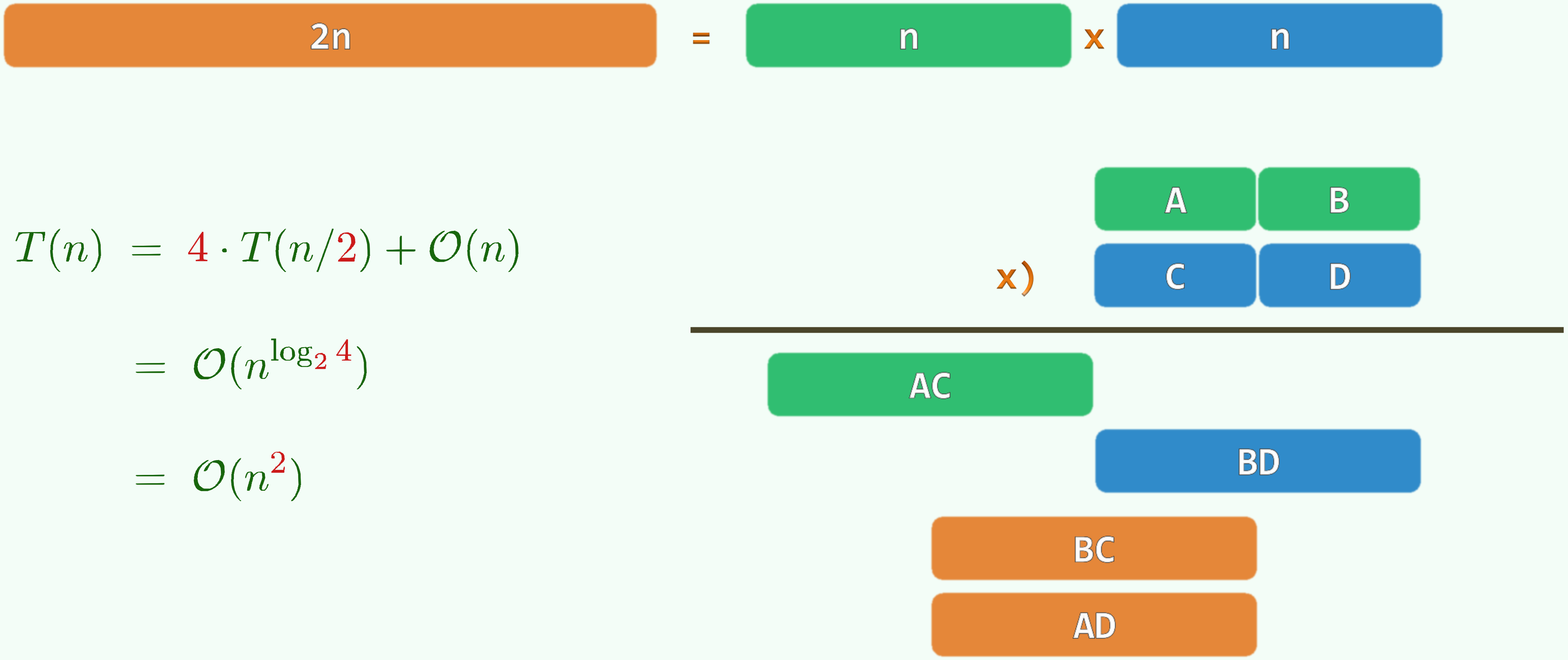
❖ 令：$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fib(0) & fib(1) \\ fib(1) & fib(2) \end{bmatrix}$，则：$\mathcal{A}^n = \begin{bmatrix} fib(n-1) & fib(n) \\ fib(n) & fib(n+1) \end{bmatrix}$

❖ 因此参照上述power()算法，似乎也“可以”在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内计算出 $fib(n)$

❖ RAM模型： 常数代价准则（uniform cost criterion）

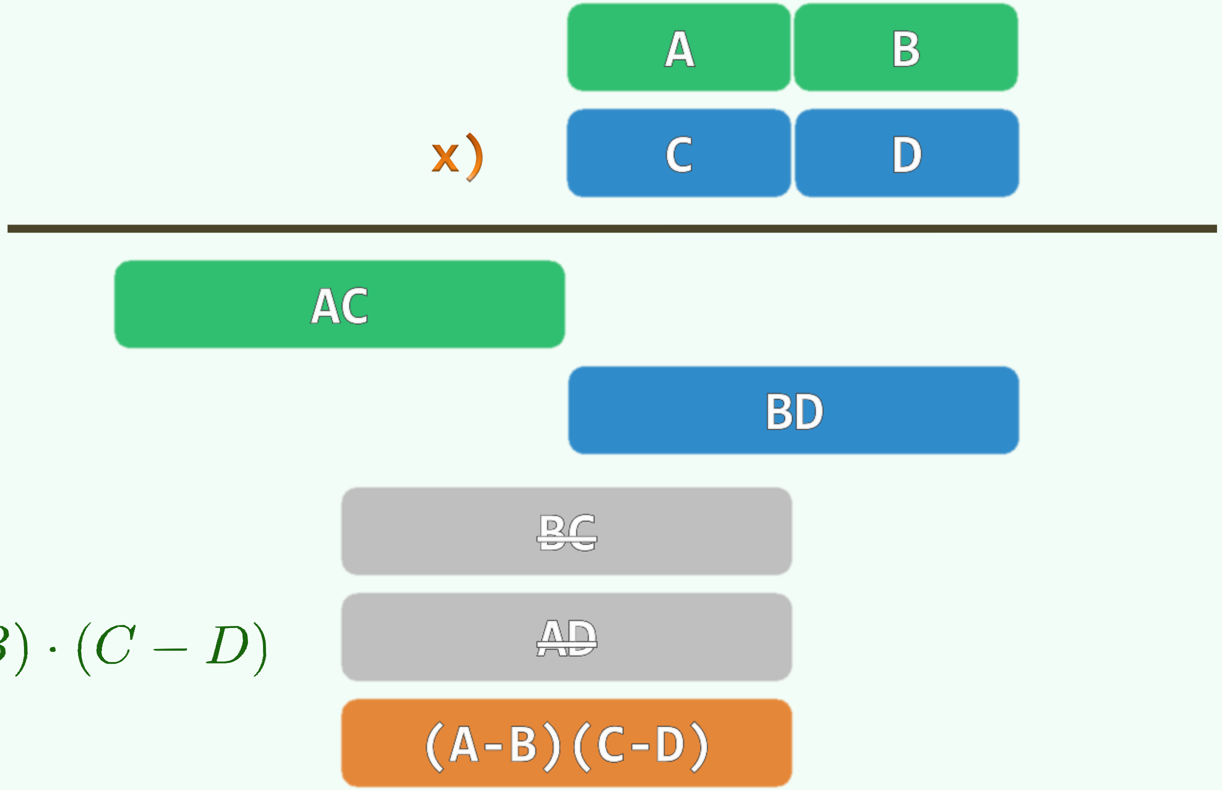
对数代价准则（logarithmic cost criterion）

Multiplication: Naive + DAC



$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4 \cdot T(n/2) + \mathcal{O}(n) \\
&= \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) \\
&= \mathcal{O}(n^2)
\end{aligned}
$$

Multiplication: Optimal



$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/2) + \mathcal{O}(n) \\
&= \mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \\
&\approx \mathcal{O}(n^{1.585})
\end{aligned}
$$

$$B \cdot C + A \cdot D = A \cdot C + B \cdot D - (A - B) \cdot (C - D)$$