14-A4

排序

快速排序：递归深度

今夫盲者行于道，人谓之左则左，谓之右则右。遇君子则得其平易，遇小人则蹈于沟壑。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

居中 + 偏侧

❖ 出现的概率： 最坏情况（ $\Omega(n)$ 递归深度）极低

平均情况（$\mathcal{O}(\log n)$ 递归深度）极高

❖ 实际上：除非过于侧偏的pivot，都会有效地缩短递归深度

(1 - λ) / 2	width = λ = Pr.	(1 - λ) / 2

❖ **准居中**：pivot的秩落在宽度为 $\lambda \cdot n$ 的居中区间

（λ也是这种情况出现的概率）

❖ 每一递归路径上，**至多**出现 $\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$ 个**准居中**的pivots ...

期望深度

- 每递归一层，都有 λ（$1-\lambda$） 的概率**准居中**（**准偏侧**）
- 深入 $\frac{1}{\lambda}\cdot\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$ 层后，即可**期望出现** $\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$ 次**准居中**，且有**极高的**概率出现
- **相反情况的概率** $< \quad (1-\lambda)^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\cdot\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n} = \quad n^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\cdot\log_{\frac{2}{1+\lambda}} (1-\lambda)}$

(1 - λ) / 2	width = λ = Pr.	(1 - λ) / 2

且随着 λ 增加而**下降**

- $\lambda > 1/3$ 之后，即至少有 $1 - n^{2\cdot\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)} = 1 - n^{-2}$ 的概率，使得

递归的深度不超过 $\frac{1}{\lambda}\cdot\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n \;=\; 3\cdot\log_{\frac{3}{2}} n$