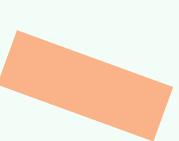


## 绪论

### 渐进复杂度：指数

01



C3

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

慌得那拿盘的小怪，战兢兢跑去报道：“难，难，难！难，难，难！”  
老妖道：“怎么有许多难？”

“你是什么东西？”太太说。四虎子也楞住了，他自己不知道他是什么  
东西——这本是世上最难答的一个问题。

# $\mathcal{O}(2^n)$ : exponential

❖ 指数： $T(n) = \mathcal{O}(a^n)$ ,  $a > 1$

❖  $\because e^n = 1 + n + n^2/2! + n^3/3! + n^4/4! + \dots$

$\therefore \forall c > 1, n^c = \mathcal{O}(2^n)$

$$n^{1000\dots01} = \mathcal{O}(1.000\dots01^n) = \mathcal{O}(2^n)$$

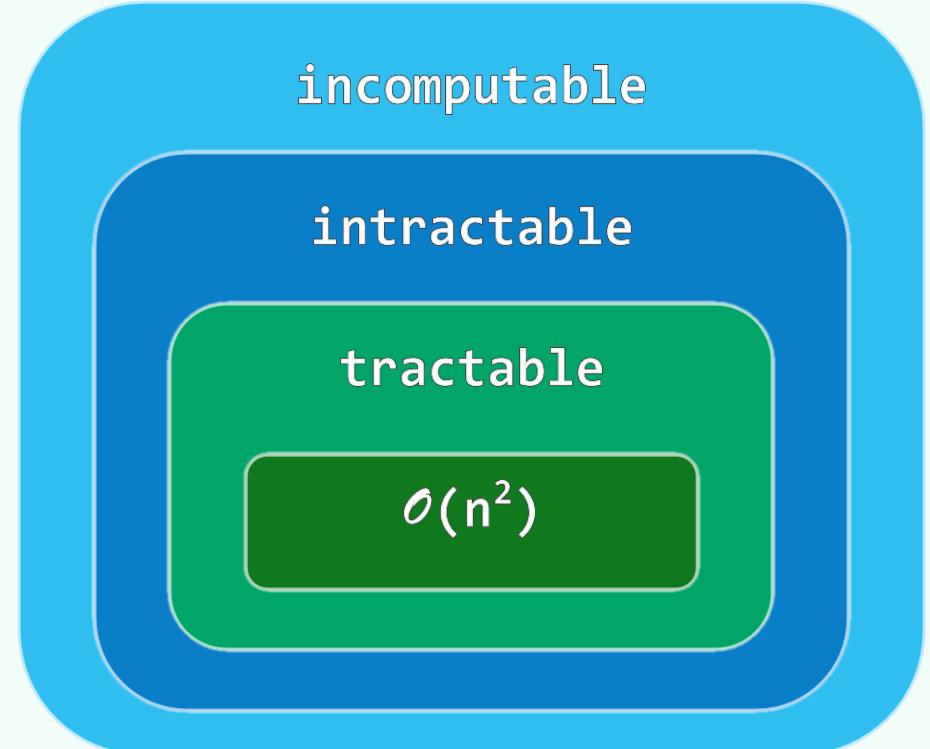
$$1.000\dots01^n = \Omega(n^{1000\dots01})$$

❖ 这类算法的计算成本增长极快，通常被认为不可忍受

❖ 从 $\mathcal{O}(n^c)$ 到 $\mathcal{O}(2^n)$ ，是从**有效算法**到**无效算法**的分水岭

❖  $\mathcal{O}(2^n)$ 算法往往显而易见，然而设计出 $\mathcal{O}(n^c)$ 算法却极其不易，有时甚至注定是徒劳无功

❖ 更糟糕的是，这类问题要远比我们想象的多得多...



## 2-Subset : 问题

$$\forall S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z} \text{ and } \sum_{k=1}^n a_k = 2m$$

$$\exists T \subset S \text{ s.t. } \sum_{a \in T} a = m = \sum_{a \notin T} a ?$$

❖ 选举人团投票制：

50个州加1个特区，共**538票** //n, 2m

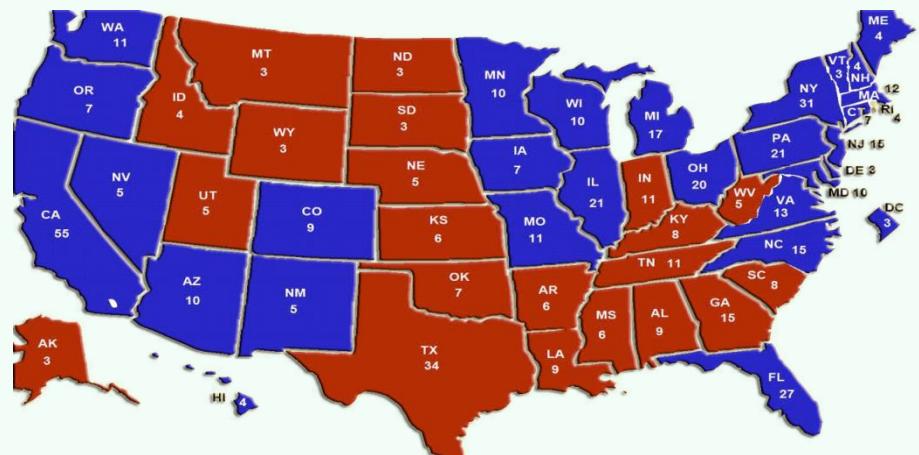
获**270张**选举人票，即可当选 //m+1

❖ 若共有两位候选人，会否恰好各得**269票**？ //m

❖ 直觉上，并**不难**：

**逐一枚举S的每一子集，并统计其中元素的总和**

55	California	11	Indiana	7	Connecticut	4	Idaho
34	Texas	11	Missouri	7	Iowa	4	Maine
31	New York	11	Tennessee	7	Oklahoma	4	New Hampshire
27	Florida	11	Washington	7	Oregon	4	Rhode Island
21	Illinois	10	Arizona	6	Arkansas	3	Alaska
21	Pennsylvania	10	Maryland	6	Kansas	3	Delaware
20	Ohio	10	Minnesota	6	Mississippi	3	D. C.
17	Michigan	10	Wisconsin	5	Nebraska	3	Montana
15	Georgia	9	Alabama	5	Nevada	3	North Dakota
15	New Jersey	9	Colorado	5	New Mexico	3	South Dakota
15	North Carolina	9	Louisiana	5	Utah	3	Vermont
13	Virginia	8	Kentucky	5	West Virginia	3	Wyoming
12	Massachusetts	8	South Carolina	4	Hawaii	538 = $\Sigma$	



## 2-Subset : NPC

- ❖ 定理： $|2^S| = 2^{|S|} = 2^n$
- ❖ 亦即：直觉算法需要迭代 $2^n$ 轮，并（在最坏情况下）至少需要花费这么多的时间  
故严格地讲，这仍只是程序，而不是算法
- ❖ 还是直觉：应该有更好的办法吧？
- ❖ 定理：2-Subset is NP-complete
  - 什么意思？
  - ❖ 意即：就目前的计算模型而言，不存在可在多项式时间内回答此问题的算法  
— 就此意义而言，上述的直觉算法已属最优