排序

选取：众数

14-B1

善钧，从众。夫善，众之主也。三卿为主，可谓众矣。从之，不亦可乎？！

诚若为今立计，所当稽求既往，相度方来，掊物质而张灵明，任个人而排众数。

然而，在现代文明社会里，居有其所的家庭却不到一半；在文明特别发达的大城市里，拥有住房的人只占全体居民的极小部分。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

选取 + 中位数

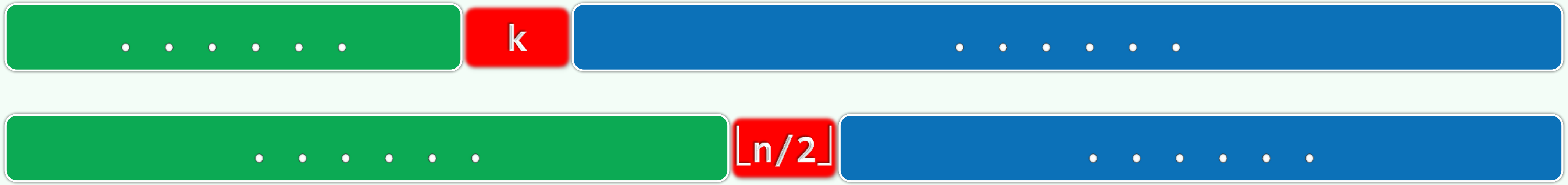
- ❖ k-selection　在任意一组可比较大小的元素中，如何由小到大，找到次序为k 者？

  亦即，在这组元素的非降排序序列S 中，找出$S[k]$

  // Excel：large(range, rank)

- ❖ median　长度为n 的有序序列S中，元素 $S[\lfloor n/2 \rfloor]$ 称作中位数　//数值上可能有重复

  在任意一组可比较大小的元素中，如何找到中位数？　// Excel：median(range)



- ❖ **中位数**是k-选取的一个特例；稍后将看到，也是其中难度最大者

Majority

❖ 无序向量中，若有**一半以上**元素同为m，则称之为众数

- 在 $\{\boxed{3}, 5, 2, \boxed{3}, \boxed{3}\}$ 中，众数为3；然而
- 在 $\{\boxed{3}, 5, 2, \boxed{3}, \boxed{3}, 0\}$ 中，却**无**众数

❖ 平凡算法　排序 + 扫描

但进一步地　若限制时间不超过$\mathcal{O}(n)$，附加空间不超过$\mathcal{O}(1)$呢？

❖ 必要性　众数若存在，则亦必中位数

❖ 事实上　只要能够**找出**中位数，即不难**验证**它是否众数

```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = median( A ) ); }
```

必要条件

- ❖ 然而　在高效的中位数**算法未知**之前，如何确定众数的候选呢？
- ❖ mode　众数若存在，则亦必**频繁数**　//Excel：mode(range)

```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = mode( A ) ); }
```

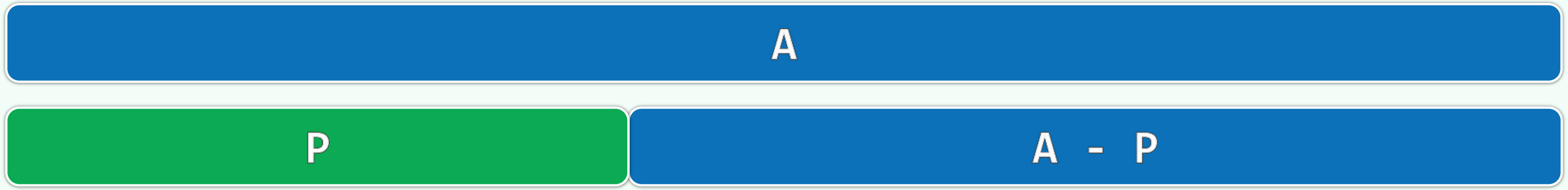
- ❖ 同样地　mode()算法难以**兼顾**时间、空间的高效
- ❖ 可行思路　借助**更弱**但计算**成本更优**的必要条件，选出唯一的候选者

```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = majEleCandiate( A ) ); }
```

减而治之

❖ 若在向量A的前缀P（|P|为偶数）中，元素$\boxed{x}$出现的次数**恰**占半数，则

A有众数，**仅当**对应的后缀$\boxed{A - P}$有众数m，且m就是$\boxed{A}$的众数



❖ 既然最终总要花费$\mathcal{O}(n)$时间做验证，故而只需考虑A**的确**含有众数的两种情况：

1. 若x = m，则在排除前缀$\boxed{P}$之后，m与其它元素在数量上的差距**保持不变**

2. 若x ≠ m，则在排除前缀$\boxed{P}$之后，m与其它元素在数量上的差距**不致缩小**

❖ 若将众数的标准从“一半以上”改作“至少一半”，算法需做什么调整？

算法

```
template <typename T> T majCandidate( Vector<T> A ) {
   T maj;
   for ( int c = 0, i = 0; i < A.size(); i++ )
      if ( 0 == c ) {
         maj = A[i]; c = 1;
      } else
         maj == A[i] ? c++ : c--;
   return maj;
}
```