10-C4

高级搜索树

红黑树：删除

变白以为黑兮，倒上以为下

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

等效删除

❖ 首先按照BST常规算法，执行

```
r = removeAt( x, _hot )
```

//实际被摘除的可能是x的前驱或后继w

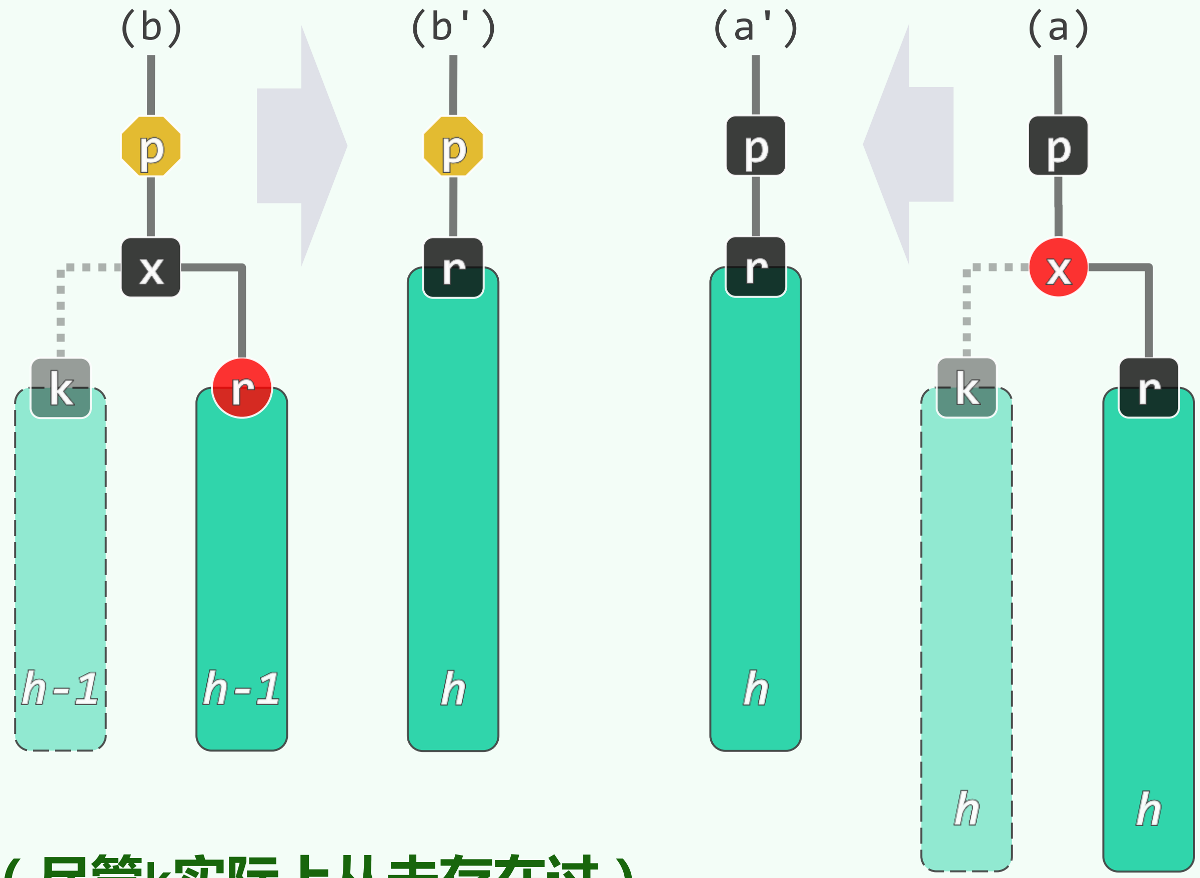
//简捷起见，以下不妨统称作x

❖ x由孩子r接替，此时另一孩子k必为NULL

❖ 但在随后的调整过程中，x可能逐层上升

❖ 故需要**假想**地、**统一**地、**等效**地理解为：

k为一棵黑高度与r相等的子树，且随x一并摘除（尽管k实际上从未存在过）



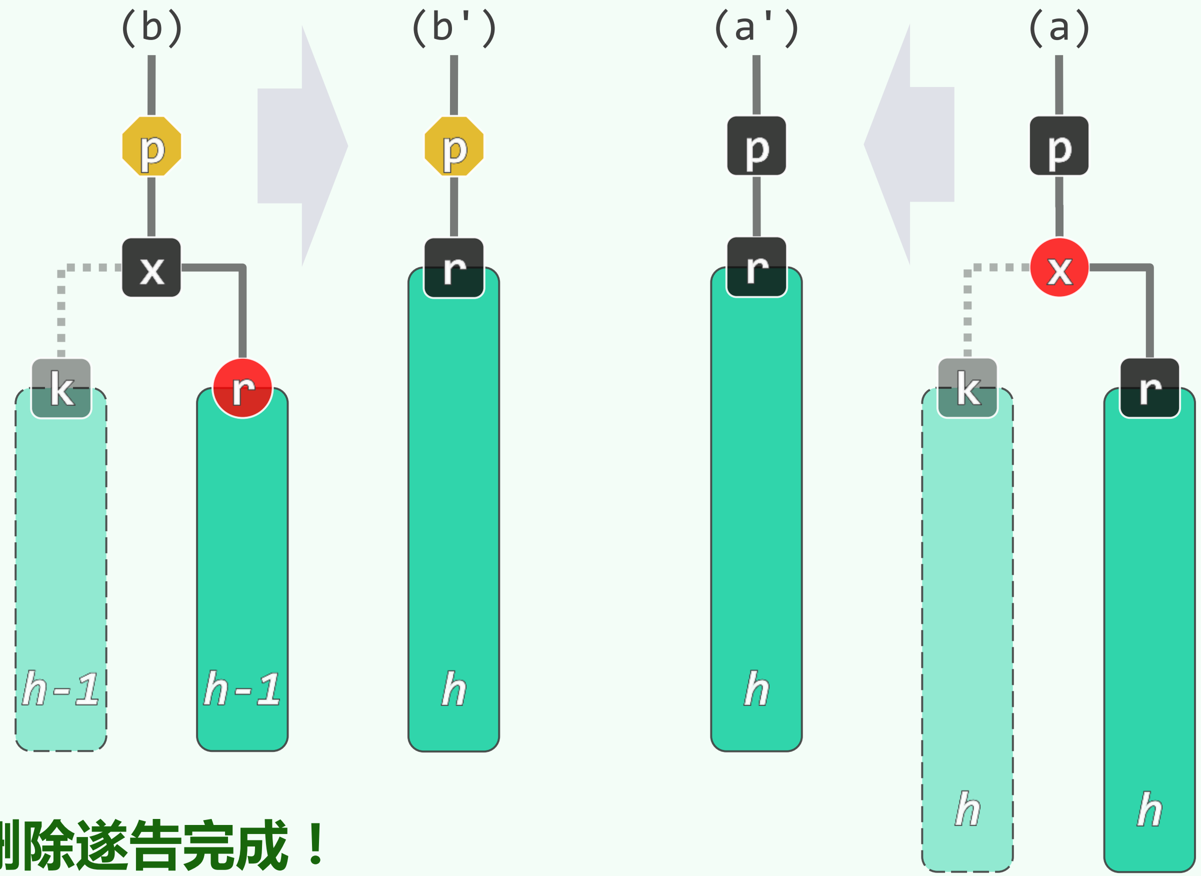
其一为红

❖ 完成removeAt()之后

- 条件1、2依然满足
- 但条件3、4却不见得

❖ 在原树中，考查x与r

- 若x为红，则条件3、4自然满足
- 若r为红，则令其与x交换颜色



❖ 总之，无论x或r为红，则3、4均不难满足——删除遂告完成！

双黑

❖ 若x与r均黑(double black),则不然...

❖ 摘除x并代之以r后,全树黑深度不再统一

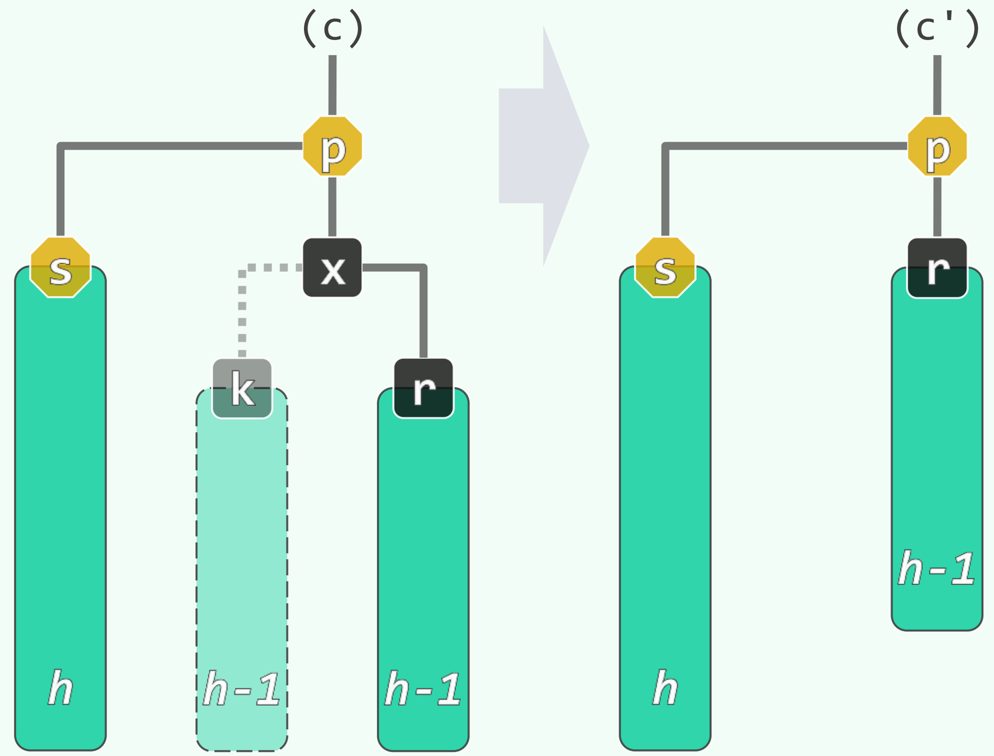
(稍后可见,等效于B-树中x所属节点下溢)

❖ 在新树中,考查r的

- 父亲:p = r->parent //原x的父亲

- 兄弟:s = (r == p->lc) ? p->rc : p->lc

❖ 以下分四种情况处理...



实现

```
template <typename T> bool RedBlack<T>::remove( const T & e ) {
   BinNodePosi(T) & x = search( e ); if ( !x ) return false; //查找定位
   BinNodePosi(T) r = removeAt( x, _hot ); //删除_hot的某孩子，r指向其接替者
   if ( ! ( -- _size ) ) return true; //若删除后为空树，可直接返回
   if ( ! _hot ) { //若被删除的是根，则
      _root->color = RB_BLACK; //将其置黑，并
      updateHeight( _root ); //更新（全树）黑高度
      return true;
   }  //至此，原x（现r）必非根
```

实现

❖ // 若父亲（及祖先）依然平衡，则无需调整

```
    if ( BlackHeightUpdated( * _hot ) ) return true;
// 至此，必失衡
// 若替代节点r为红，则只需简单地翻转其颜色
    if ( IsRed( r ) ) { r->color = RB_BLACK; r->height++; return true; }
// 至此，r以及被其替代的x均为黑色
    solveDoubleBlack( r ); //双黑调整（入口处必有 r == NULL）
    return true;
}
```

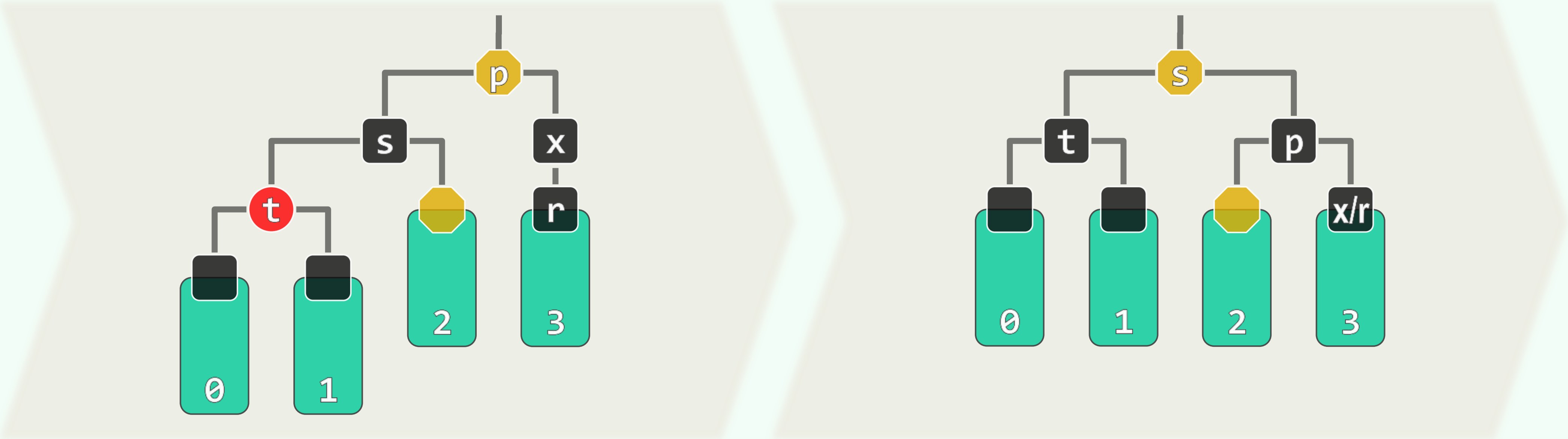
双黑修正

```
template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleBlack( BinNodePosi(T) r ) {
   BinNodePosi(T) p = r ? r->parent : _hot; if ( !p ) return; //r的父亲
   BinNodePosi(T) s = (r == p->lc) ? p->rc : p->lc; //r的兄弟
   if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
      BinNodePosi(T) t = NULL; //s的红孩子（若左、右孩子皆红，左者优先；皆黑时为NULL）
      if ( IsRed ( s->rc ) ) t = s->rc;
      if ( IsRed ( s->lc ) ) t = s->lc;
      if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
      else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
   } else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
}
```

BB-1：s为黑，且至少有一个红孩子t

❖ “3+4”重构：t、s、p重命名为a、b、c

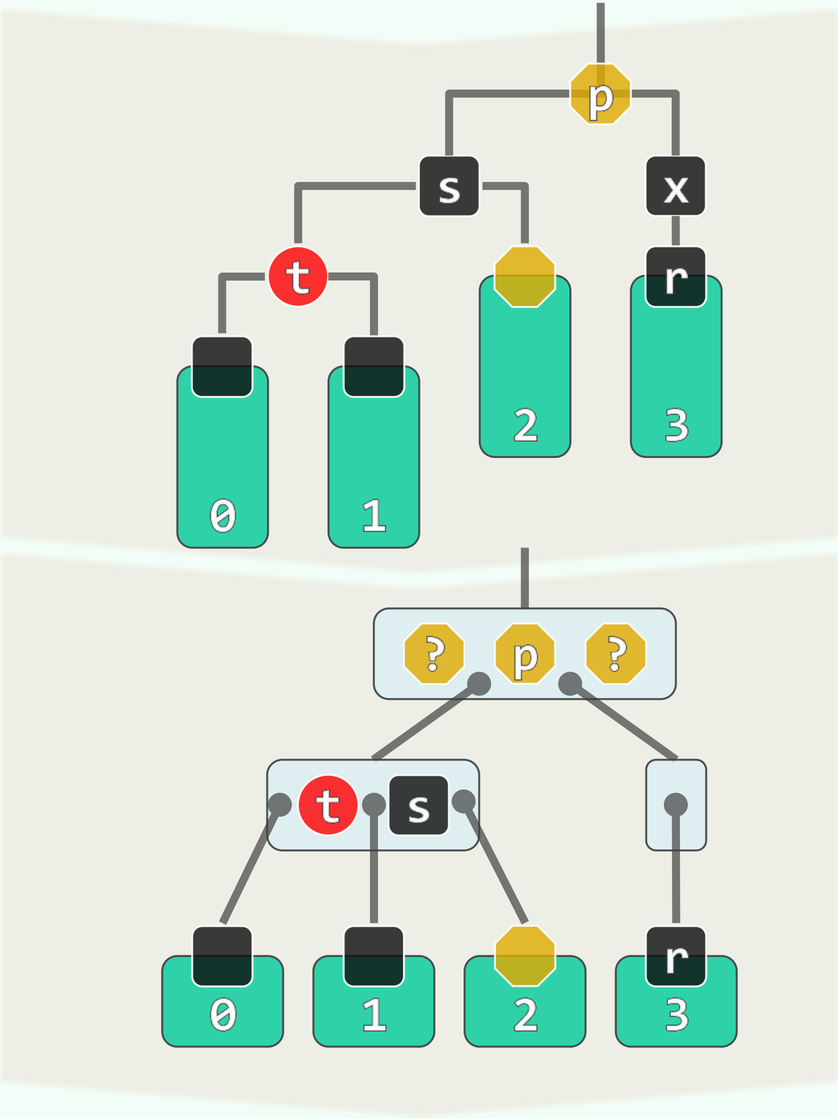
r保持黑；a和c染黑；b继承p的原色



❖ 如此，红黑树性质在全局得以恢复——删除完成！ //zig-zag等类似

❖ 在对应的B-树中，以上操作等效于...

BB-1：s为黑，且至少有一个红孩子t



- ❖ 通过关键码的**旋转**

  消除超级节点的**下溢**

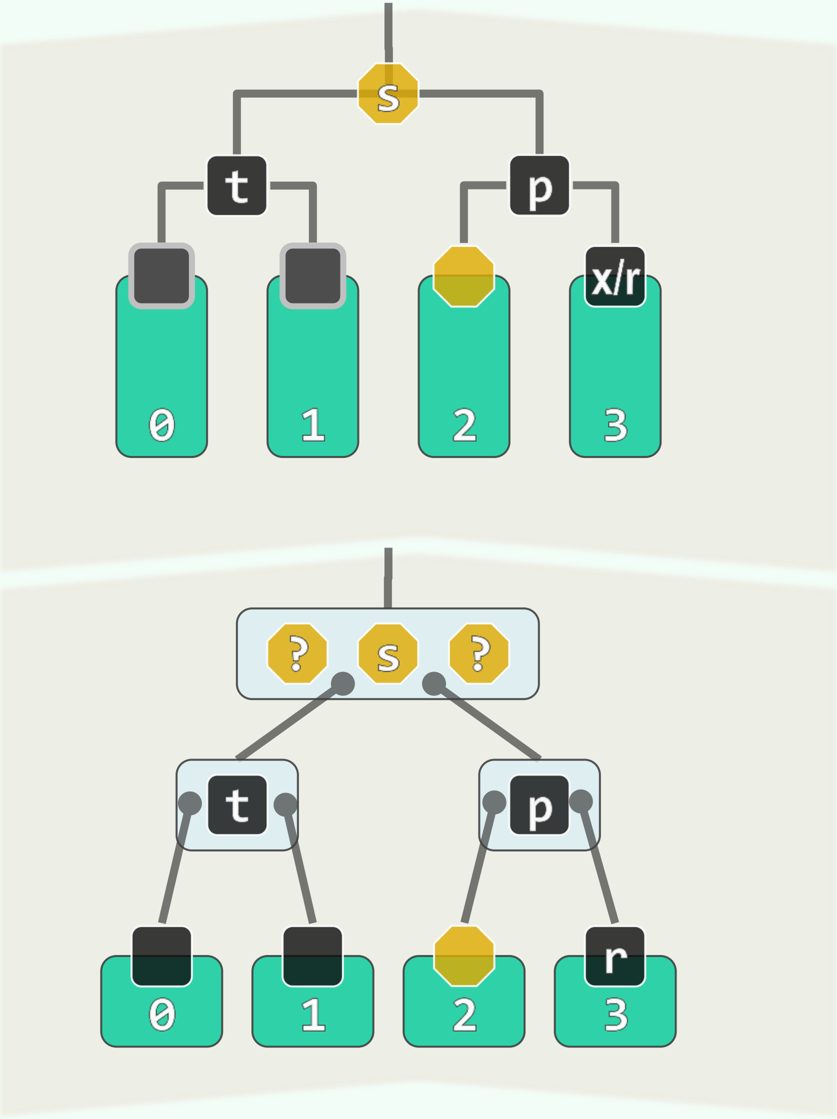
- ❖ 在对应的B-树中

  - p若为红

    问号之一为黑关键码

  - p若为黑

    必自成一个超级节点



BB-1：实现

```
if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
   /* ...... */
   if ( t ) { //黑s有红孩子：BB-1
      RBColor oldColor = p->color; //备份p颜色，并对t、父亲、祖父
      BinNodePosi(T) b = FromParentTo( *p ) = rotateAt( t ); //旋转
      if (HasLChild( *b )) { b->lc->color = RB_BLACK; updateHeight( b->lc ); }
      if (HasRChild( *b )) { b->rc->color = RB_BLACK; updateHeight( b->rc ); }
      b->color = oldColor; updateHeight( b ); //新根继承原根的颜色
   } else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
} else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
```

BB-2R：s为黑，且两个孩子均为黑；p为红

❖ r保持黑；s转红；p转黑

❖ 在对应的B-树中，等效于

下溢节点与兄弟合并

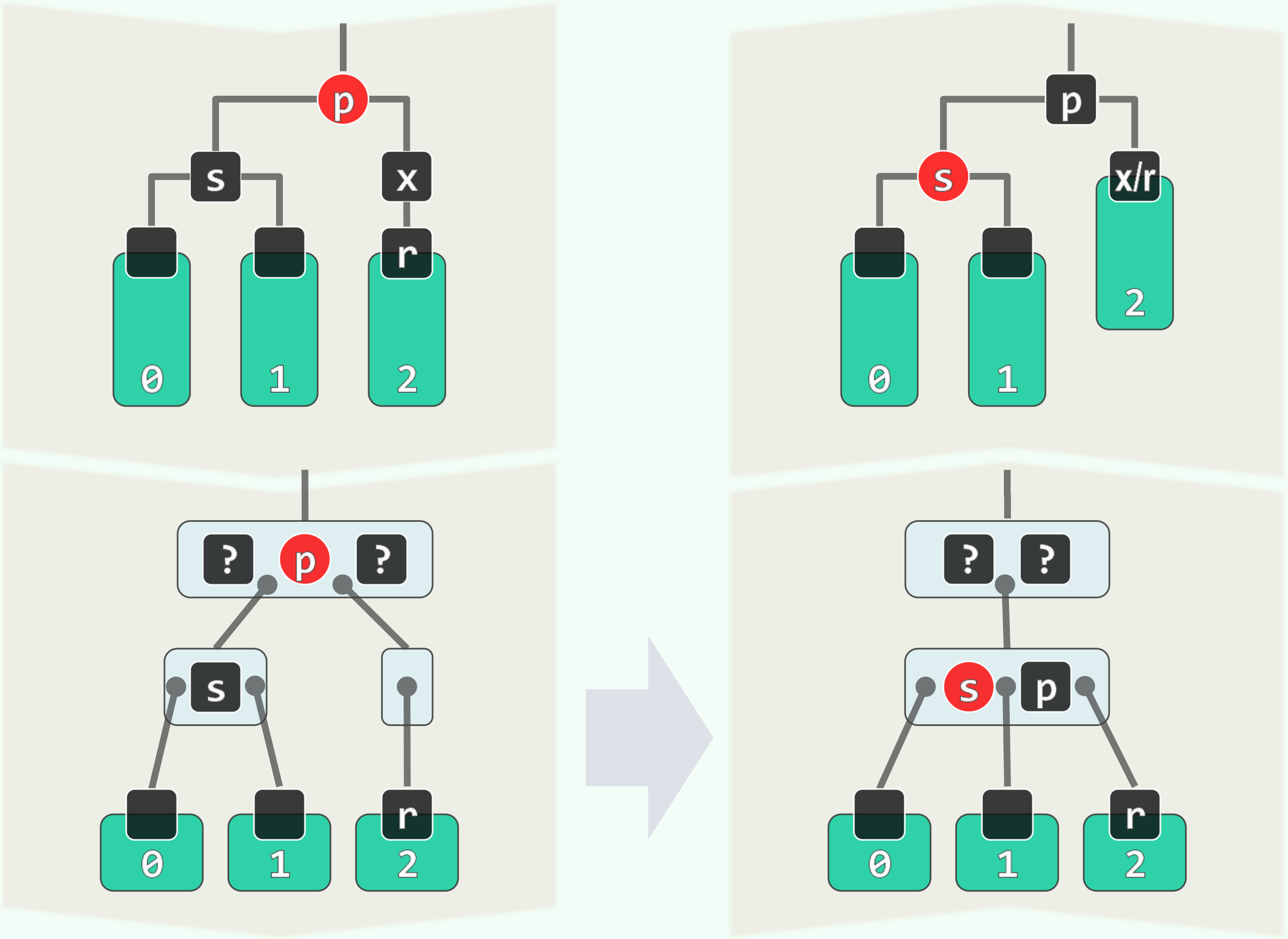
❖ 红黑树性质在**全局**得以恢复

❖ 失去关键码p后，上层节点

会否**继而**下溢？不会！

❖ 合并之前，在p之左或右侧

还应有一个黑关键码（问号）

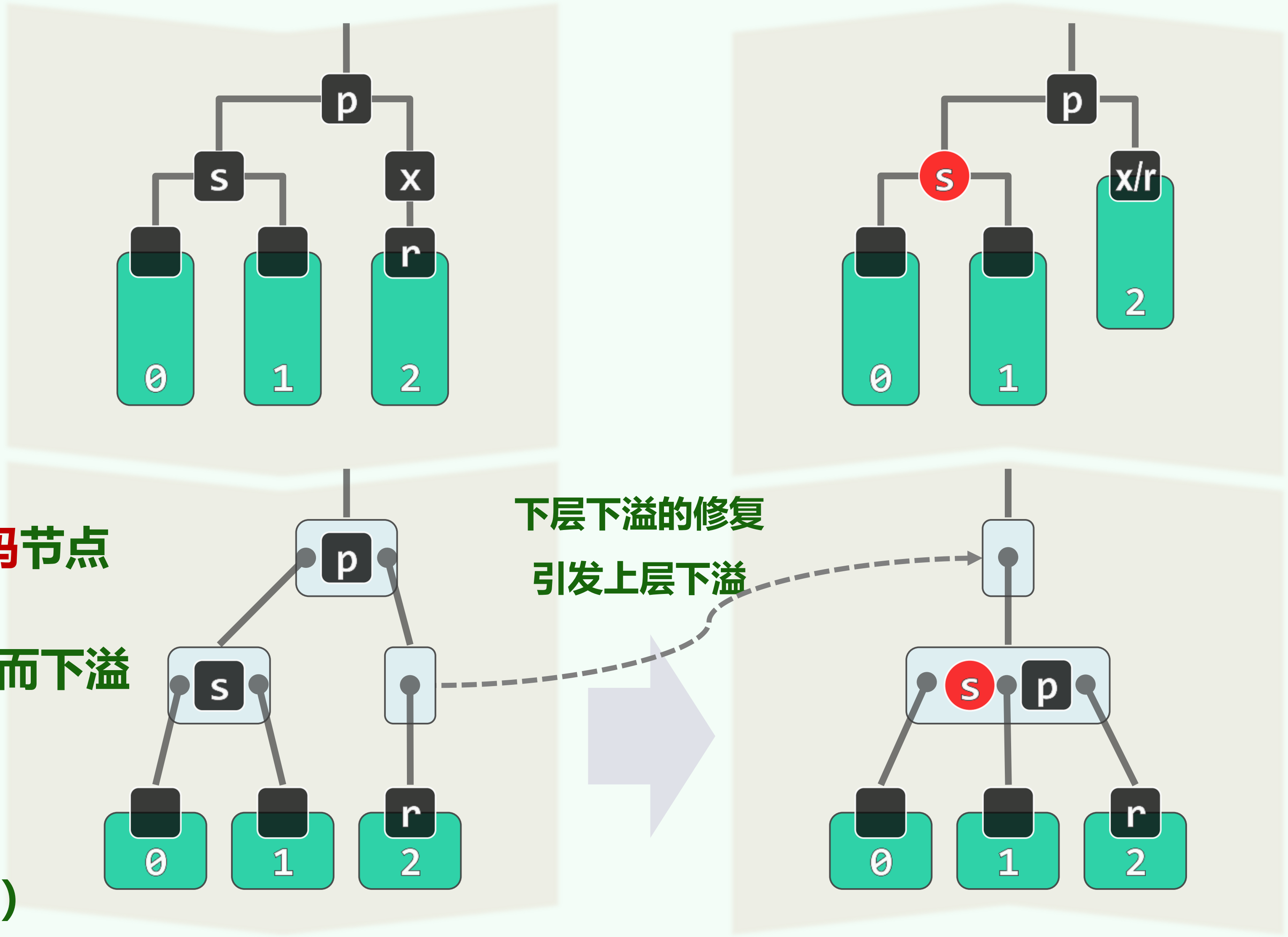


BB-2B：s为黑，且两个孩子均为黑；p为黑

- ❖ s转红；r与p保持黑
- ❖ 红黑树性质在**局部**得以恢复
- ❖ 在对应的B-树中，等效于

  下溢节点与兄弟合并
- ❖ 合并之前，p和s均对应于**单关键码**节点
- ❖ 失去关键码p后，上层节点必然继而下溢
- ❖ 好在可继续分情况处理

  高度递增，至多 $\mathcal{O}(\log n)$ 层（步）



BB-(2R+2B)：实现

```
if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
   /* ...... */
   if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
   else { /* 黑s无红孩子 */
      s->color = RB_RED; s->height--; //s转红
      if ( IsRed( p ) ) //BB-2R：p转黑，但黑高度不变
         { p->color = RB_BLACK; }
      else //BB-2B：p保持黑，但黑高度下降；递归修正
         { p->height--; solveDoubleBlack( p ); }
   }
} else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
```

BB-3：s为红（其孩子均为黑）

❖ zag(p)或zig(p)；红s转黑，黑p转红

❖ 黑高度依然异常，但...

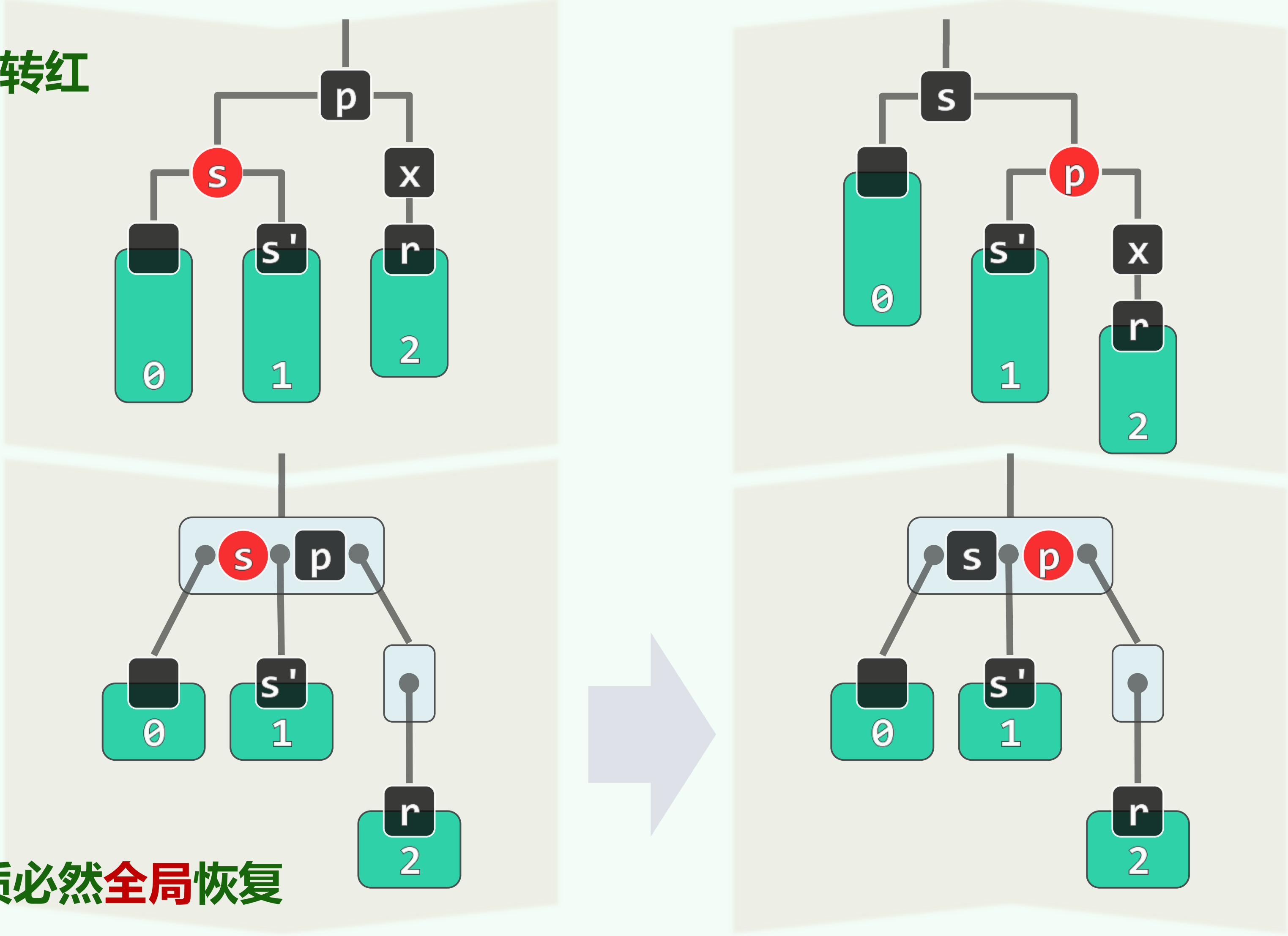
❖ r有了一个**新的**黑兄弟s'

故转化为前述情况，而且...

❖ 既然p已转红，接下来

- 绝不会是情况BB-2B
- 而只能是**BB-1**或**BB-2R**

❖ 于是，再经**一轮**调整，红黑树性质必然**全局**恢复



BB-3：实现

```
❖   if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
       if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
       else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
    } else { //兄弟s为红：BB-3
       s->color = RB_BLACK; p->color = RB_RED; //s转黑，p转红
       BinNodePosi(T) t = IsLChild( *s ) ? s->lc : s->rc; //取t与其父s同侧
       _hot = p; FromParentTo( *p ) = rotateAt( t ); //对t及其父亲、祖父做平衡调整
       solveDoubleBlack( r ); //继续修正r——此时p已转红，故后续只能是BB-1或BB-2R
    }
```

复杂度

- ❖ **红黑树的每一删除操作**
  - 至多做$\mathcal{O}(\log n)$次重染色
  - 1次“3+4”重构、1次单旋

故必可在$\mathcal{O}(\log n)$时间内完成

	旋转	染色	此后
(1) 黑s有红子t	1~2	3	调整随即完成
(2R) 黑s无红子，p红	0	2	调整随即完成
(2B) 黑s无红子，p黑	0	1	必再次双黑，但将上升一层
(3) 红s	1	2	转为(1)或(2R)