07-B2

图应用

Prim算法：极短跨边

从邻枝上切下的一根枝条，必定也是从整个树上切下的。所以，一个人若同另一个人分离，他也是同整个社会分离。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

割 & 极短跨边

❖ 设(U; V\U)是N的割（Cut）

❖ 【Cut Property-A】

若：uv是该割的**极短跨边**

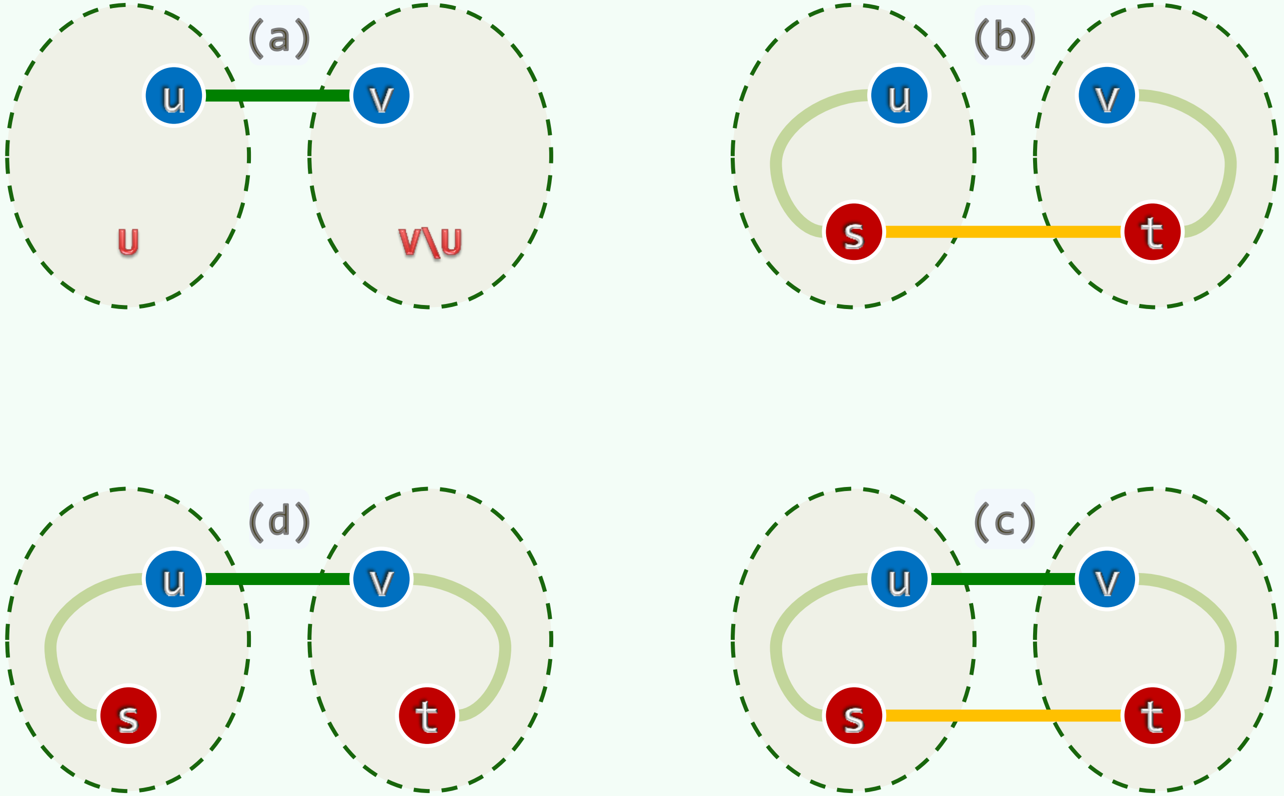
则：必**存在**一棵包含uv的MST

❖ 反证：假设uv未被**任何**MST采用...

❖ **任取**一棵MST，将uv加入其中，于是

- 将出现**唯一**的回路，且该回路
- 必经过uv以及**至少**另一跨边st

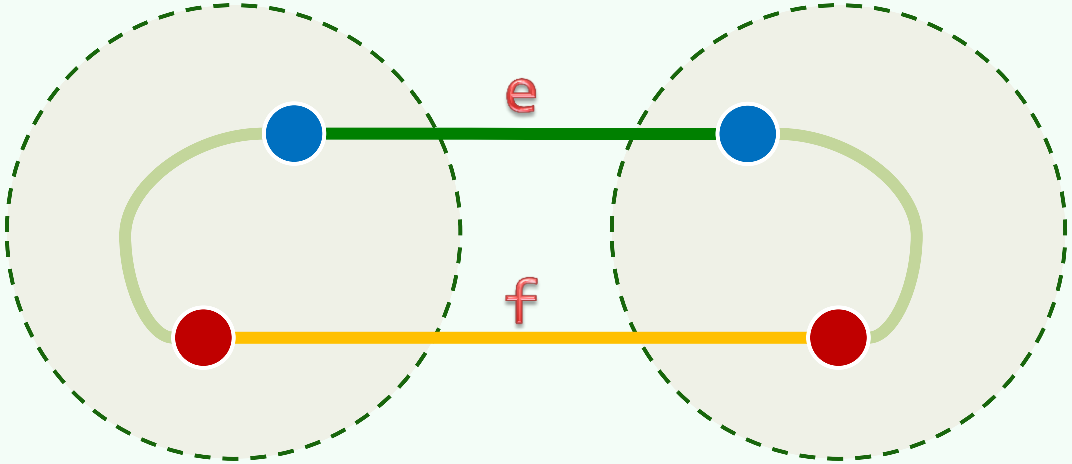
❖ 现在，将原MST中的st替换为uv...



❖ 【Cut Property-B】反之，N的**任一**MST都必然通过极短跨边联接**每一**割

环 & 极长环边

❖ 设T是N的一棵MST，且在N中添加边e后得到N'



❖ 【Cycle Property】

若：沿着e在T中对应的环路，f为一**极长边**

则：T - {f} + {e}即为N'的一棵MST

1) 若e为环路上的**最长边**，则与前同理，e不可能属于N'的MST

此时，f = e，T - {f} + {e} = T依然是N'的MST

2) 否则有：|e| ≤ |f|；移除f后T - {f}一分为二，对应于N/N'的割

在N/N'中，f/e应是该割的**极短跨边**；此割在N和N'中导出的一对互补子图完全一致

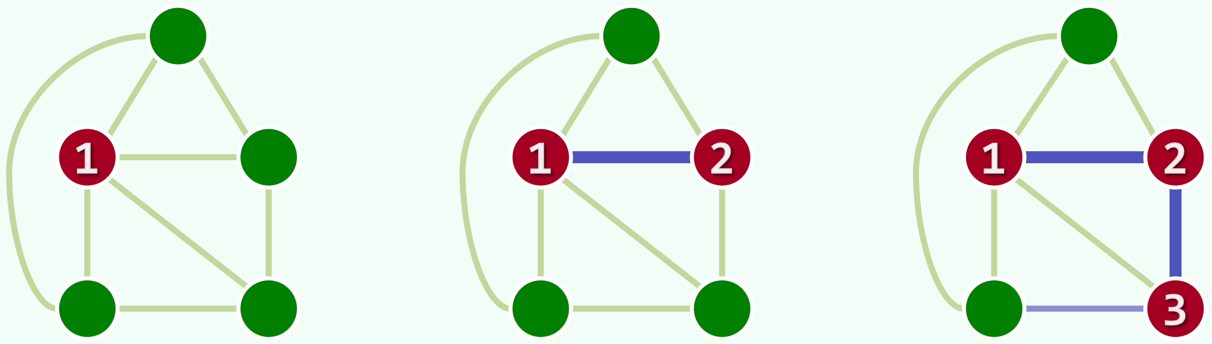
故，这对子图各自的MST经e联接后，即是N'的一棵MST

算法

- 从T_1 = ($\{v_1\}$; $\varnothing$)开始，逐步构造T_2、T_3、...、T_n，其中
  - v_1可以任选
  - T_k = (V_k; E_k)

    $|V_k|$ = k，$|E_k|$ = k-1

    $V_k \subset V_{k+1}$



- 由以上分析，为由T_k构造T_{k+1}，只需
  - 将(V_k; $V \backslash V_k$)视作原图的一个割
  - 在该割的所有跨边中，找出**极短者**e_k = (v_k, u_k)
  - 令T_{k+1} = (V_{k+1}; E_{k+1}) = ($V_k \cup \{u_k\}$; $E_k \cup \{e_k\}$)