

向量

有序向量：Fibonacci查找

02-D3

常伟思微微一笑说：这个比例很奇怪，是吗？

他又想来想去，又想不出好地方，于是终于决心，假定这“幸福的家庭”所在的地方叫做A。

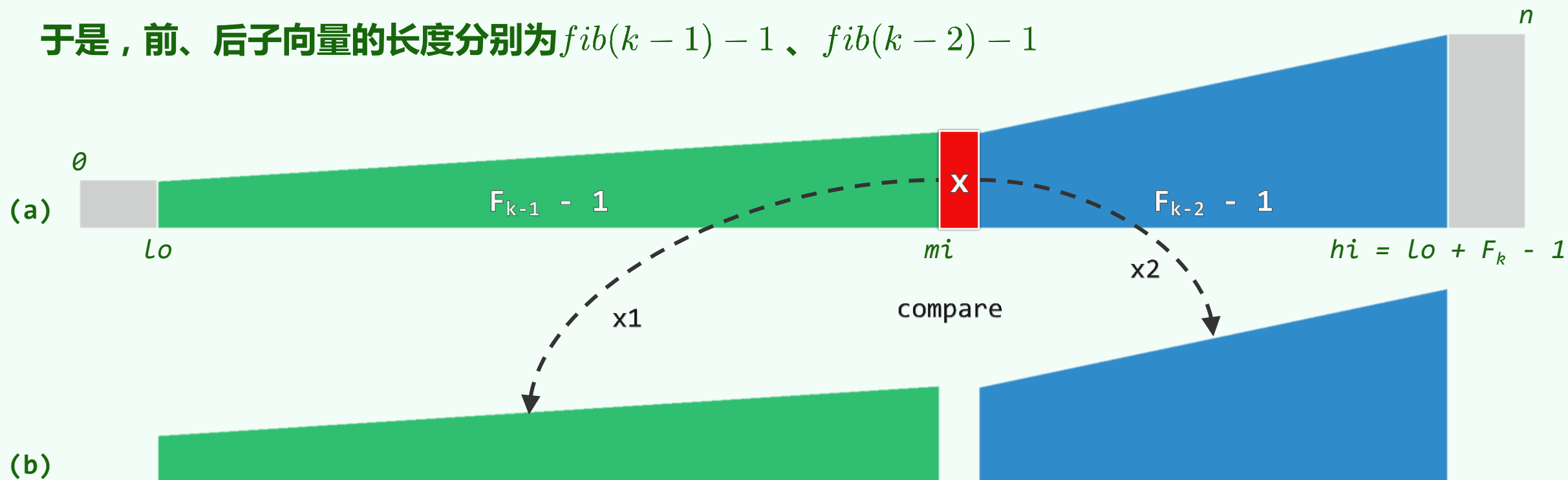
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

思路及原理

- ❖ 版本A：转向左、右分支前的关键码**比较次数**不等，而**递归深度**却相同
- ❖ 通过**递归深度**的不均衡对**转向成本**的不均衡做**补偿**，平均查找长度应能进一步缩短！
- ❖ 比如，若有 $n = fib(k) - 1$ ，则可取 $mi = fib(k - 1) - 1$

于是，前、后子向量的长度分别为 $fib(k - 1) - 1$ 、 $fib(k - 2) - 1$



实现

```
❖ template <typename T> //0 <= lo <= hi <= _size
    static Rank fibSearch( T * S, T const & e, Rank lo, Rank hi ) {
    for ( Fib fib(hi - lo); lo < hi; ) { //Fib数列制表备查
        while ( hi - lo < fib.get() ) fib.prev(); //自后向前顺序查找轴点 ( 分摊O(1) )
        Rank mi = lo + fib.get() - 1; //确定形如Fib(k) - 1的轴点
        if      ( e < S[mi] ) hi = mi; //深入前半段[lo, mi)
        else if ( S[mi] < e ) lo = mi + 1; //深入后半段(mi, hi)
        else
            return mi; //命中
    }
    return -1; //查找失败
}
```

查找长度

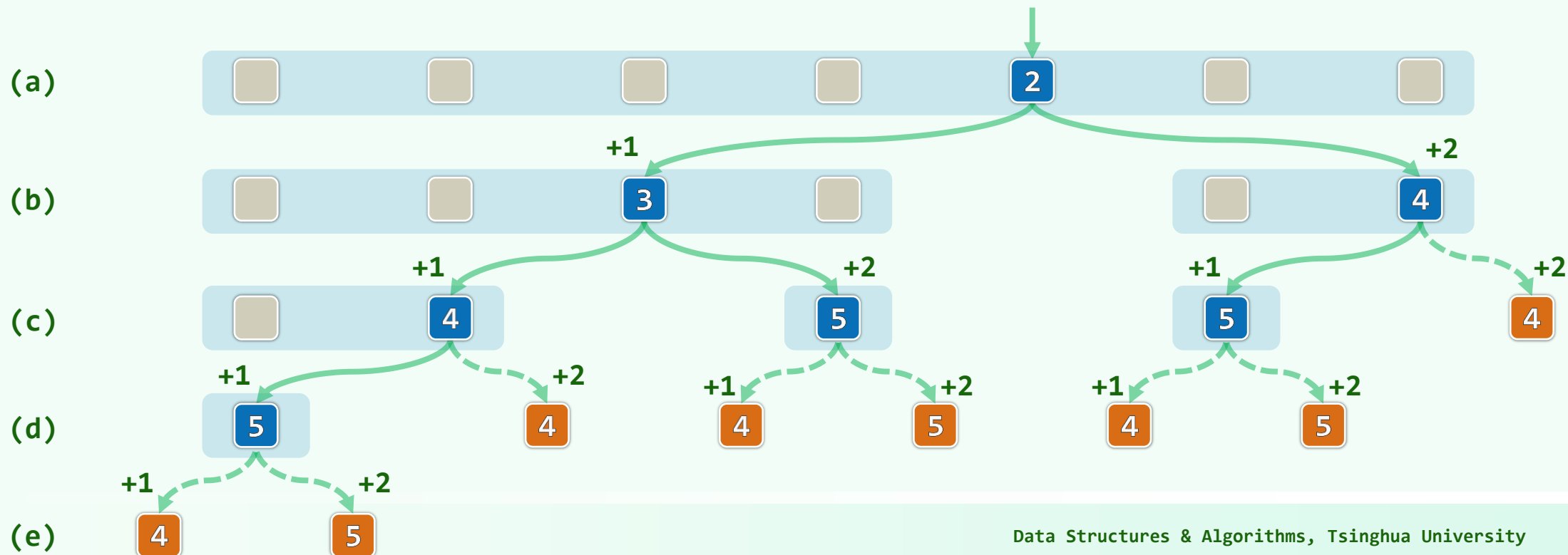
❖ Fibonacci查找的ASL，（在常系数的意义上）优于二分查找

//详见教材、习题解析

❖ 仍以 $n = \text{fib}(6) - 1 = 7$ 为例，在等概率情况下

- 平均成功查找长度 = $(5 + 4 + 3 + 5 + 2 + 5 + 4) / 7 = 28/7 = 4.00$

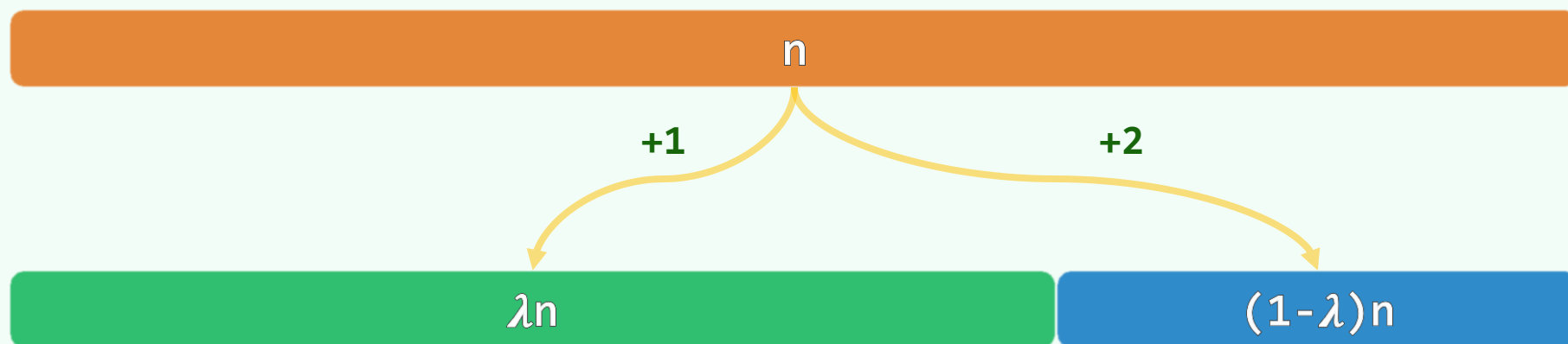
- 平均失败查找长度 = $(4 + 5 + 4 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4) / 8 = 35 / 8 = 4.38$



通用策略

❖ 在任何区间 $[0, n)$ 内，总是选取 $[\lambda \cdot n]$ 作为轴点， $0 \leq \lambda < 1$

比如：二分查找对应于 $\lambda = 0.5$ ，Fibonacci查找对应于 $\lambda = \phi = 0.6180339\dots$



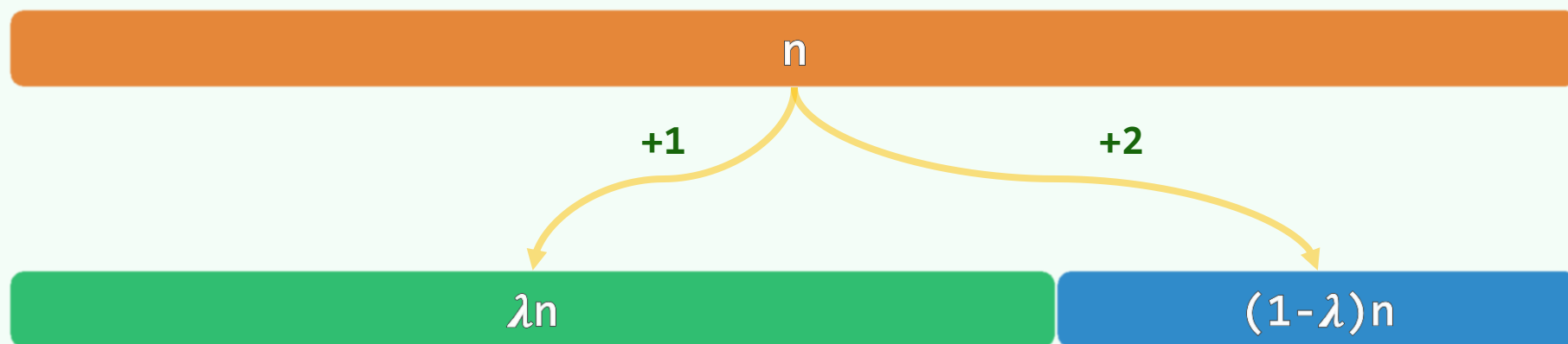
❖ 这类查找算法的渐进复杂度为 $\alpha(\lambda) \cdot \log_2 n = \mathcal{O}(\log n)$

❖ （在常系数意义上的）性能最优，即意味着 $\alpha(\lambda)$ 达到最小

$$\phi = 0.6180339\dots$$

❖ 递推式：

$$\alpha(\lambda) \cdot \log_2 n = \lambda \cdot [1 + \alpha(\lambda) \cdot \log_2 (\lambda n)] + (1 - \lambda) \cdot [2 + \alpha(\lambda) \cdot \log_2 ((1 - \lambda)n)]$$



❖ 整理后：

$$\frac{-\ln 2}{\alpha(\lambda)} = \frac{\lambda \cdot \ln \lambda + (1 - \lambda) \cdot \ln(1 - \lambda)}{2 - \lambda}$$

❖ 当 $\lambda = \phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ 时， $\alpha(\lambda) = 1.440420\dots$ 达到最小