图应用

Floyd-Warshall算法

07-F

让我们测量一下自己的活动半径，并待在那个中心吧，
就像蜘蛛待在网的中心一样。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

从Dijkstra到Floyd-Warshall

❖ 给定带权网络G，计算其中**所有点对**之间的最短距离

❖ 应用：确定G的中心点（center）

- radius(G,s) = s的半径 = 所有顶点到s的最大距离
- 中心点 = 半径最小的顶点s

❖ 直觉：依次将各顶点作为源点，调用Dijkstra算法

时间 = $n \times \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$ —— 可否更快？

❖ 思路：图矩阵 ~ 最短路径矩阵

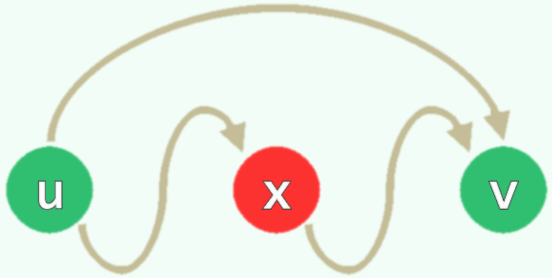
❖ 效率：$\mathcal{O}(n^3)$，与执行n次Dijkstra相同 —— 既如此，为何还要用F.W.？

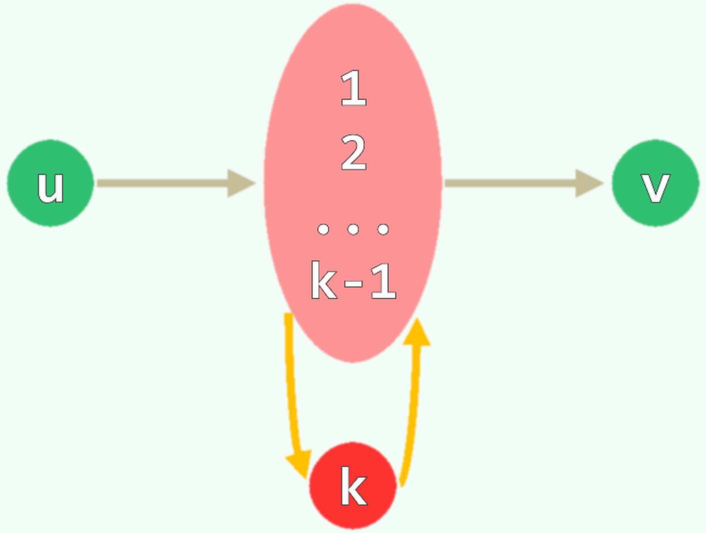
❖ 优点：形式简单、算法紧凑、便于实现；允许**负权边**（尽管仍不能有**负权环路**）

问题 + 特点

❖ u和v之间的最短路径可能是

- 不存在通路，或者
- 直接连接，或者
- 最短路径(u, x) + 最短路径(x, v)





❖ 将所有顶点随意编号：1, 2, ..., n

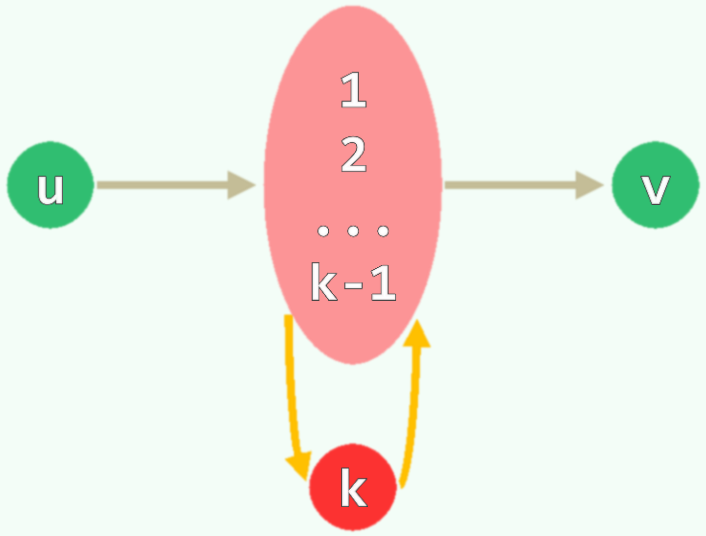
❖ 定义：$d^k(u, v)$ = 中途只经过**前k个**顶点、联接u和v的最短路径长度

= $w(u, v)$ (if $k = 0$)

= $\min(d^{k-1}(u, v), d^{k-1}(u, k) + d^{k-1}(k, v))$ (if $k \geq 1$)

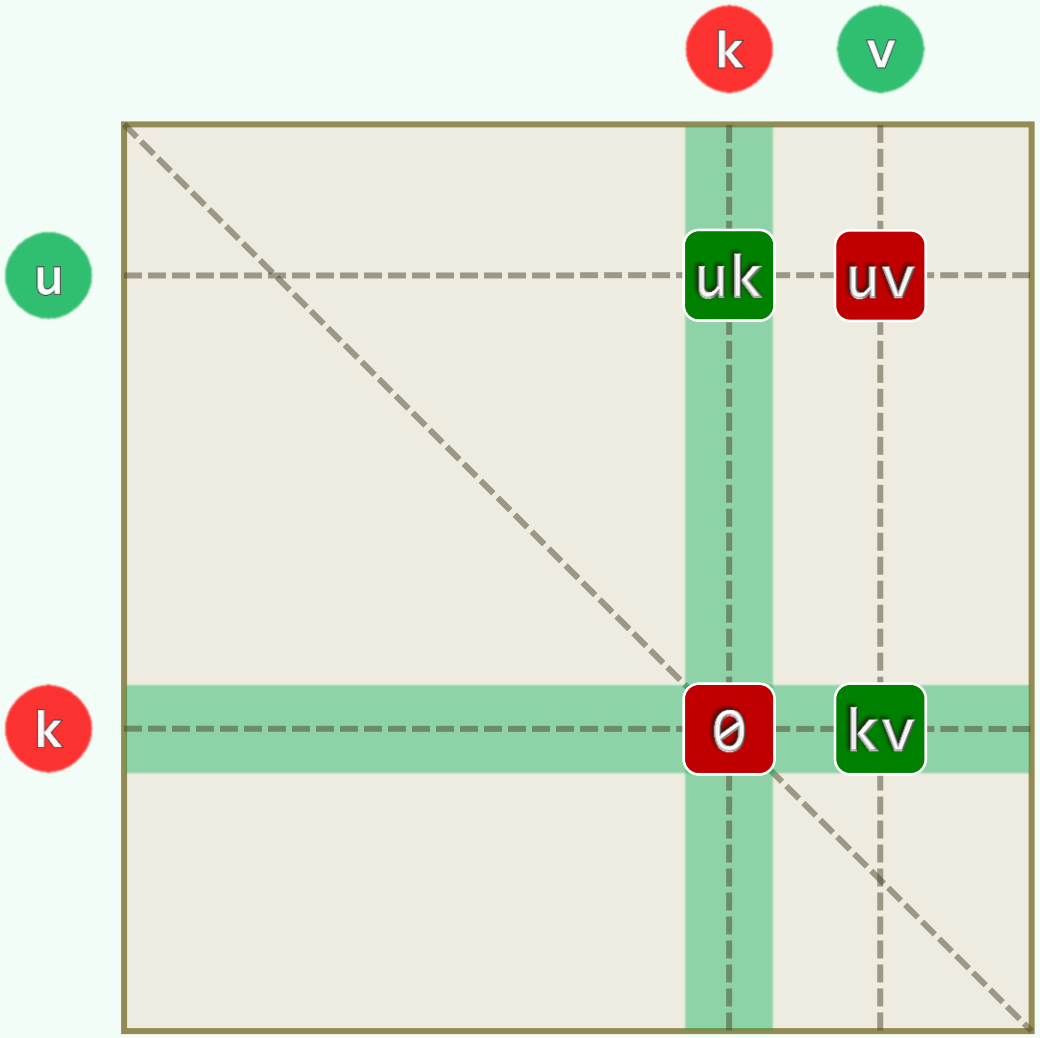
蛮力递归

```
❖ weight dist( node * u, node * v, int k )
     if ( k < 1 ) return w( u, v );
     u2v  =  dist( u, v, k-1 ); //经前k-1个点中转
     for each node x ∉ { u, v } //x作为第k个可中转点
        u2x2v = dist( u, x, k-1 )
              + dist( x, v, k-1 ); //递归
        u2v   = min( u2v, u2x2v ); //择优
     return u2v;
```



- 存在大量**重复**的递归调用，如何**避免**？
- 动态规划之**记忆化**：维护一张表，记录需要**反复计算**的数值

动态规划



- for k in range(0, n)

```
for u in range(0, n)
   for v in range(0, n)
      A[u][v]  =
         min( A[u][v],
              A[u][k] + A[k][v]
         )
```