

05-A

二叉树 树

越到你的高度上——那是我的深度！

藏在你的纯洁里——那是我的天真！

Two roads diverged in a yellow wood
And sorry I could not travel both

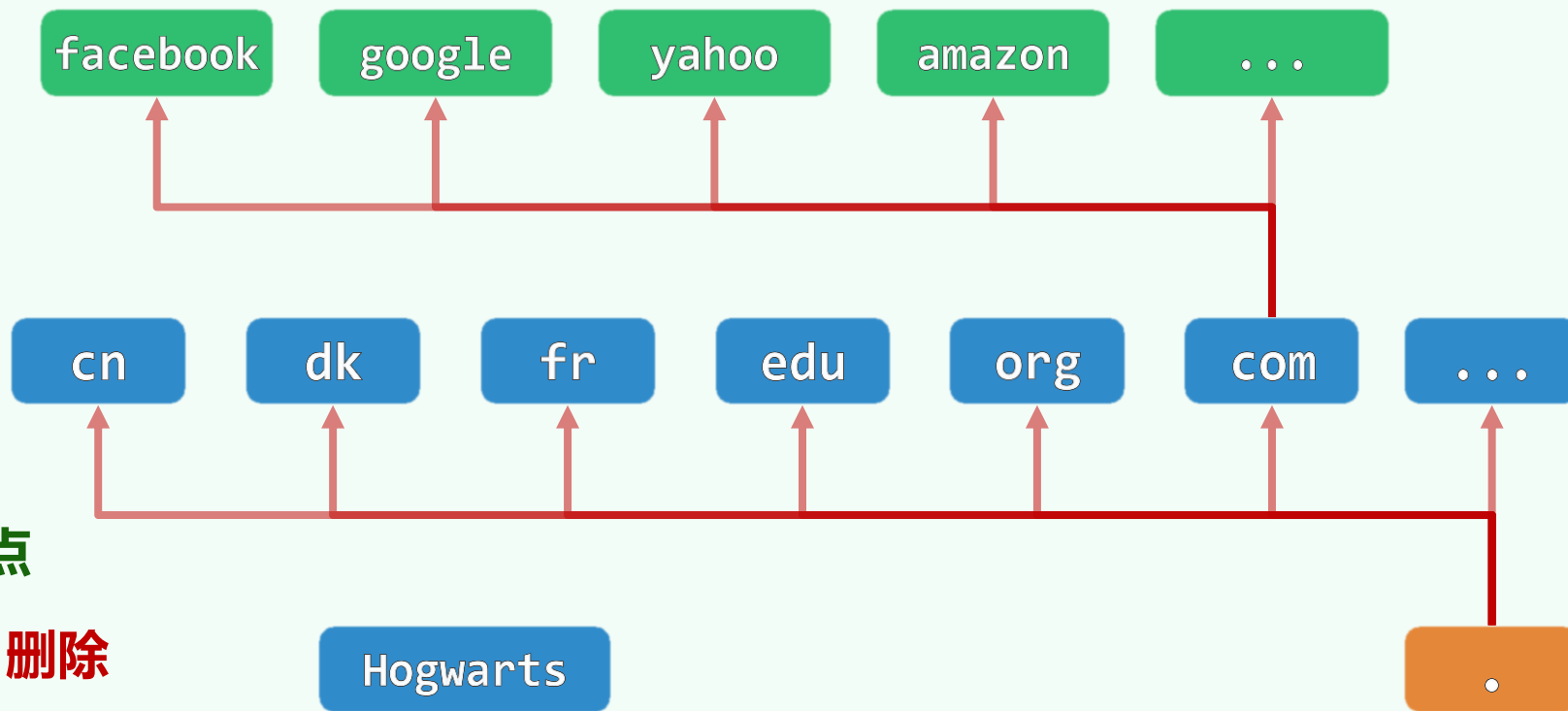
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

动机

❖ 【应用】层次结构的表示

- 表达式
- 文件系统
- URL ...

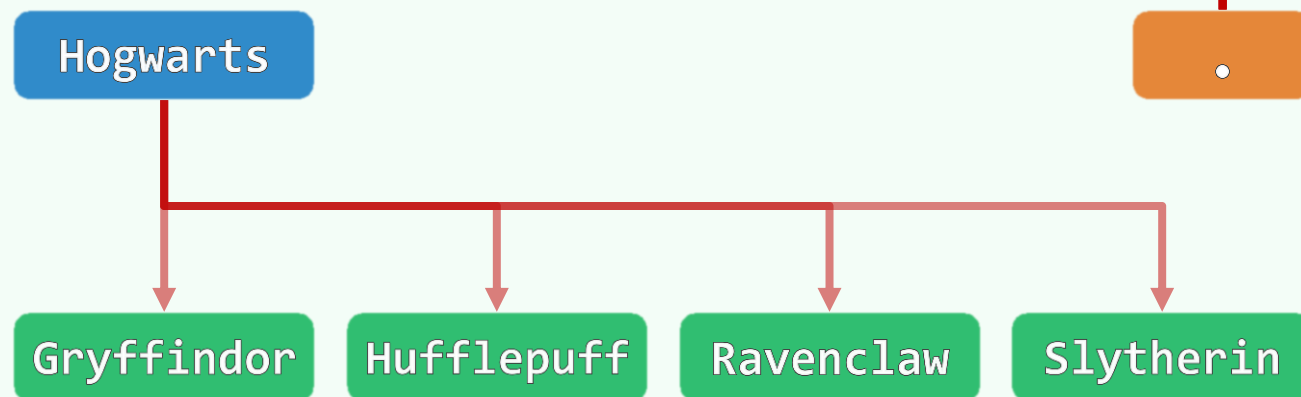


❖ 【数据结构】综合性

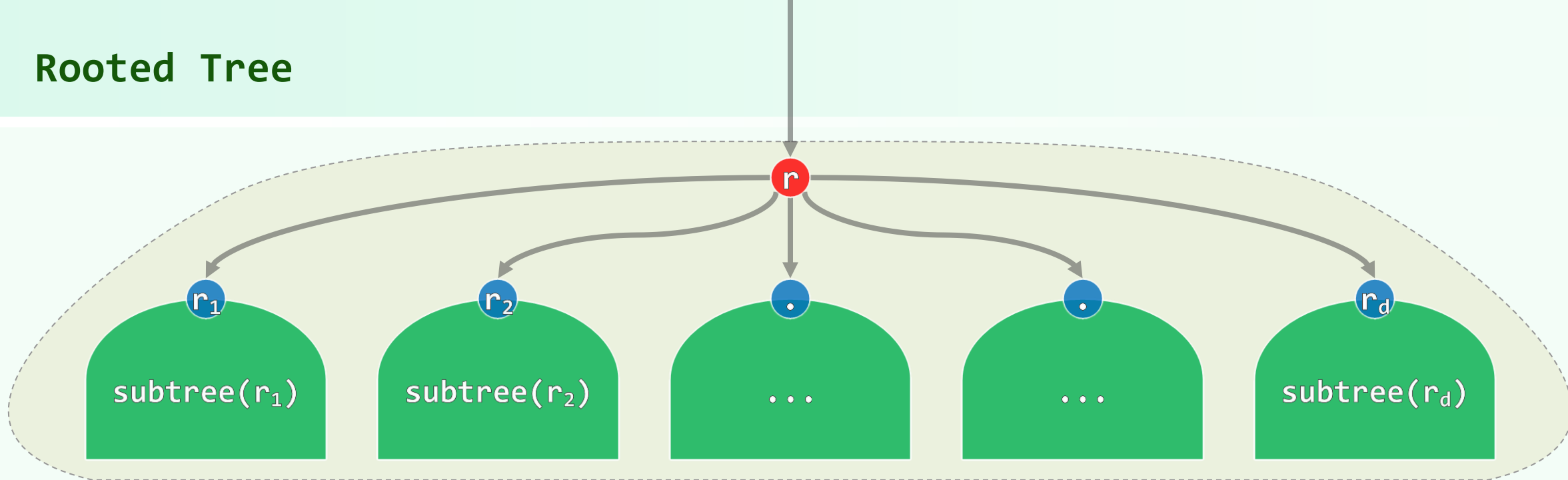
- 兼具Vector和List的优点
- 兼顾高效的**查找**、**插入**、**删除**

❖ 【半线性】

- 不再是简单的线性结构，但
- 在确定某种**次序**之后，具有线性特征

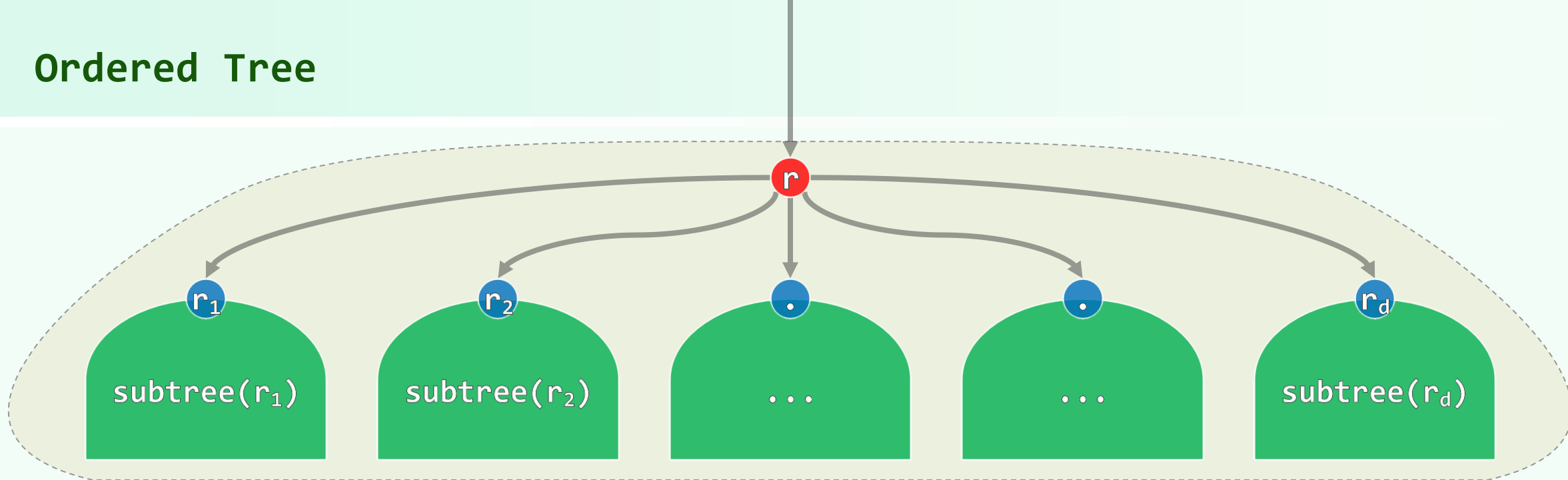


Rooted Tree



- ❖ 树是极小连通图、极大无环图 $\mathcal{T} = (V; E)$: 节点数 $n = |V|$, 边数 $e = |E|$
- ❖ 指定任一节点 $r \in V$ 作为根后, \mathcal{T} 即称作有根树
- ❖ 若 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \dots, \mathcal{T}_d$ 为有根树, 则 $\mathcal{T} = ((\bigcup_i V_i) \cup \{r\}, (\bigcup_i E_i) \cup \{ \langle r, r_i \rangle \mid 1 \leq i \leq d \})$ 也是
- ❖ 相对于 \mathcal{T} , \mathcal{T}_i 称作以 r_i 为根的子树 (subtree rooted at r_i) , 记作 $\mathcal{T}_i = subtree(r_i)$

Ordered Tree



❖ r_i 称作 r 的**孩子** (child) , r_i 之间互称**兄弟** (sibling)

r 为其**父亲** (parent) , $d = degree(r)$ 为 r 的 (出) **度** (degree)

❖ 可归纳证明 : $e = \sum_{v \in V} degree(v) = n - 1 = \Theta(n)$

故在衡量相关复杂度时 , 可以 n 作为参照

❖ 若指定 \mathcal{T}_i 作为 \mathcal{T} 的第 i 棵子树 , r_i 作为 r 的第 i 个孩子 , 则 \mathcal{T} 称作**有序树**

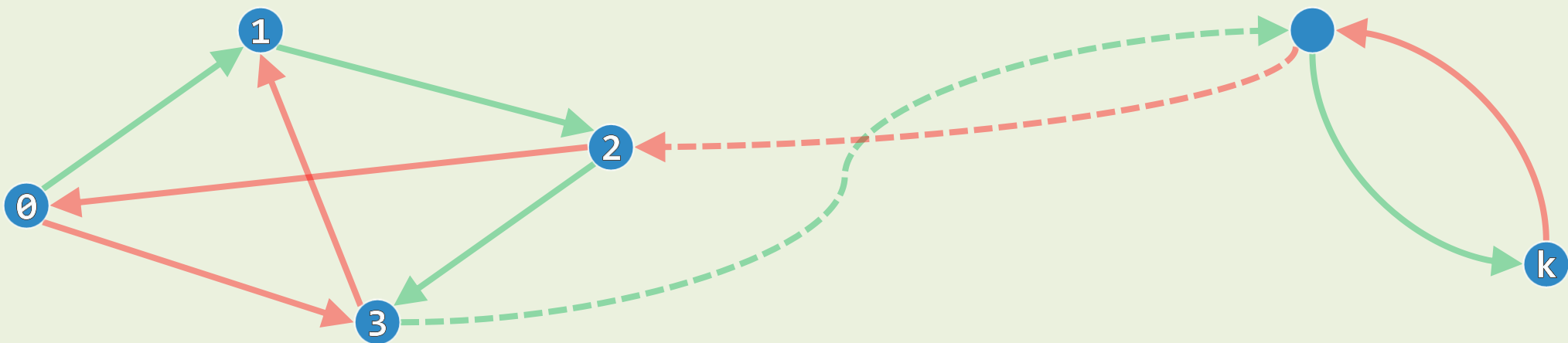
路径 + 环路

❖ V 中的 $k + 1$ 个节点，通过 V 中的 k 条边依次相联，构成一条**路径** (path) //亦称通路

$$\pi = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k) \}$$

❖ **路径长度**即所含**边数**： $|\pi| = k$ //注意：早期文献，多以**节点数**为长度

❖ **环路** (cycle/loop)： $v_k = v_0$ //如果覆盖所有节点各一次，则称作**周游** (tour)



连通 + 无环

❖ **连通图**：节点之间均有路径 (connected)

不含环路，称作**无环图** (acyclic)

❖ 树：**无环连通图**

极小连通图

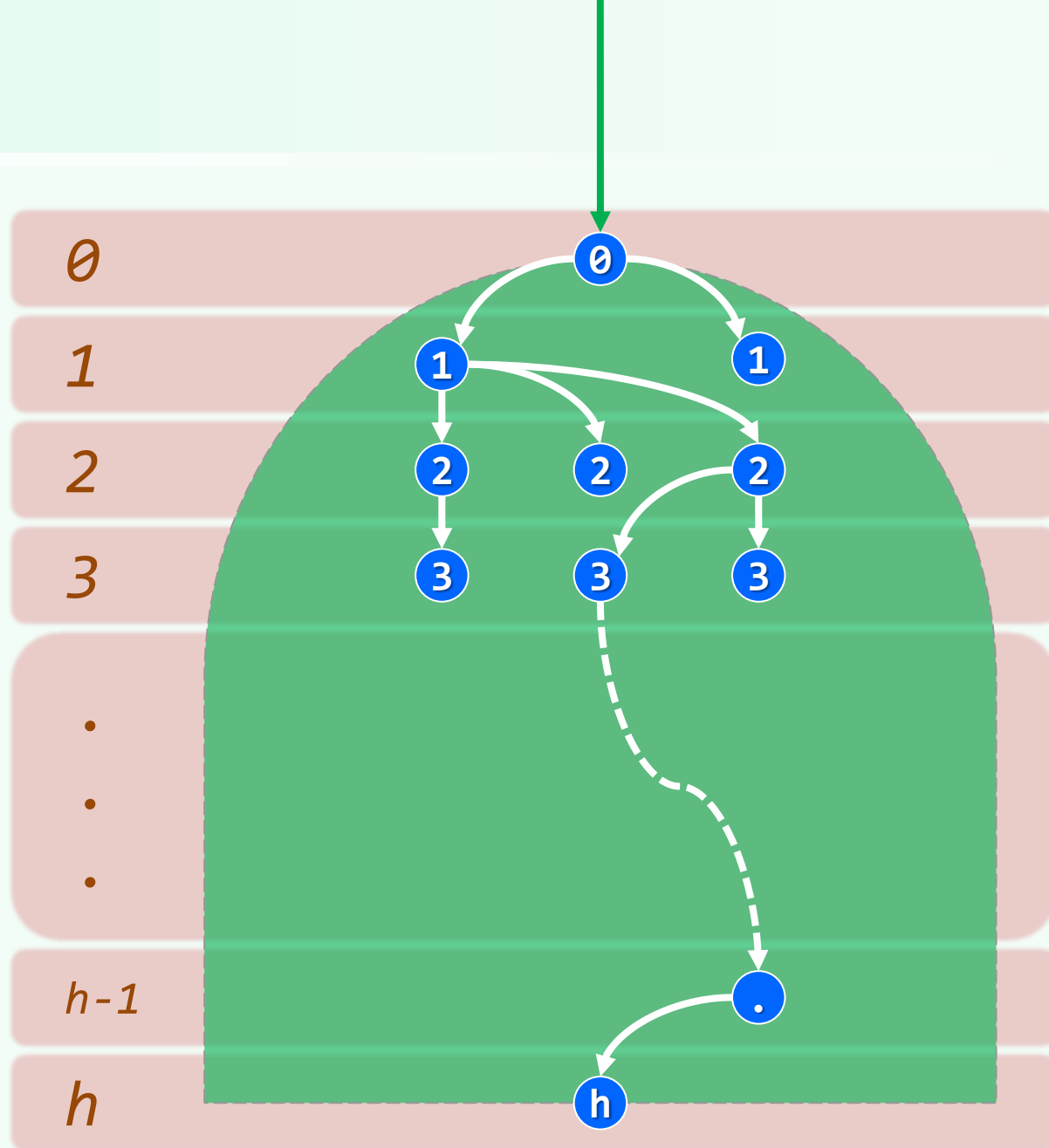
极大无环图

❖ 故：任一节点 v 与根之间存在**唯一**路径

$$\text{path}(v, r) = \text{path}(v)$$

❖ 于是：以 $|\text{path}(v)|$ 为指标

可对所有节点做**等价类**划分...



深度 + 层次

❖ 不致歧义时，路径、节点和子树可**相互指代**

- $\text{path}(v) \sim v \sim \text{subtree}(v)$

❖ v 的**深度**： $\text{depth}(v) = |\text{path}(v)|$

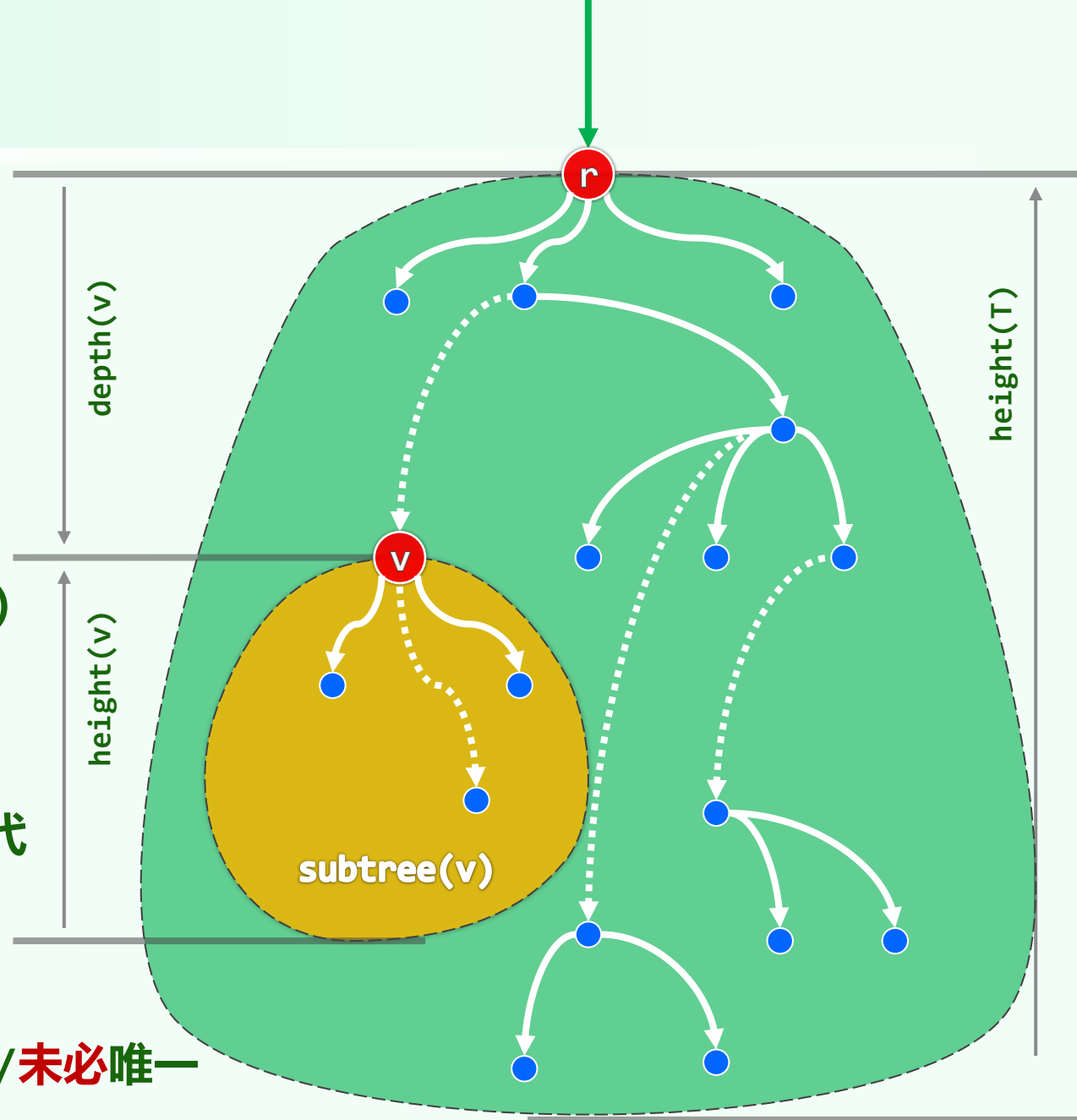
❖ $\text{path}(v)$ 上节点，均为 v 的**祖先** (ancestor)

v 是它们的**后代** (descendent)

❖ 其中除自身以外，是**真** (proper) 祖先/后代

❖ **半线性**：

在任一深度， v 的祖先/后代若存在，则**必然/未必唯一**



深度 + 层次

- ❖ 根节点是所有节点的**公共祖先**，深度为0
- ❖ 没有后代的节点称作**叶子** (leaf)
- ❖ 所有叶子深度中的最大者
称作 (子) 树 (根) 的**高度**
 - $\text{height}(v) = \text{height}(\text{subtree}(v))$
- ❖ 特别地，**空树**的高度取作-1
- ❖ $\text{depth}(v) + \text{height}(v) \leq \text{height}(T)$

何时取等号？

