

08-D1

二叉搜索树

AVL树：适度平衡

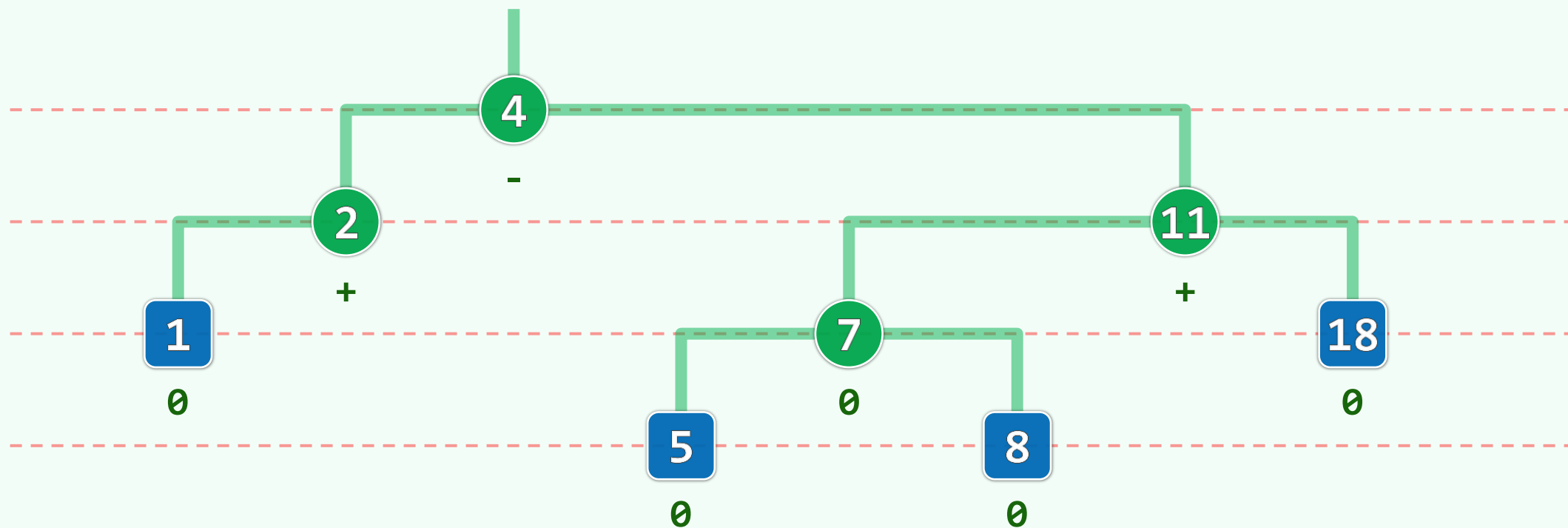
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

平衡因子

❖ **Balance Factor:** $balFac(v) = height(lc(v)) - height(rc(v))$

❖ **G. Adelson-Velsky & E. Landis (1962):** $\forall v \in AVL, |balFac(v)| \leq 1$



❖ **AVL树未必理想平衡，但必然适度平衡...**

AVL = 适度平衡

❖ 高度为 h 的AVL树，至少包含 $S(h) = fib(h + 3) - 1$ 个节点

为什么？

❖ 固定高度 h ，考查节点最少的AVL树...

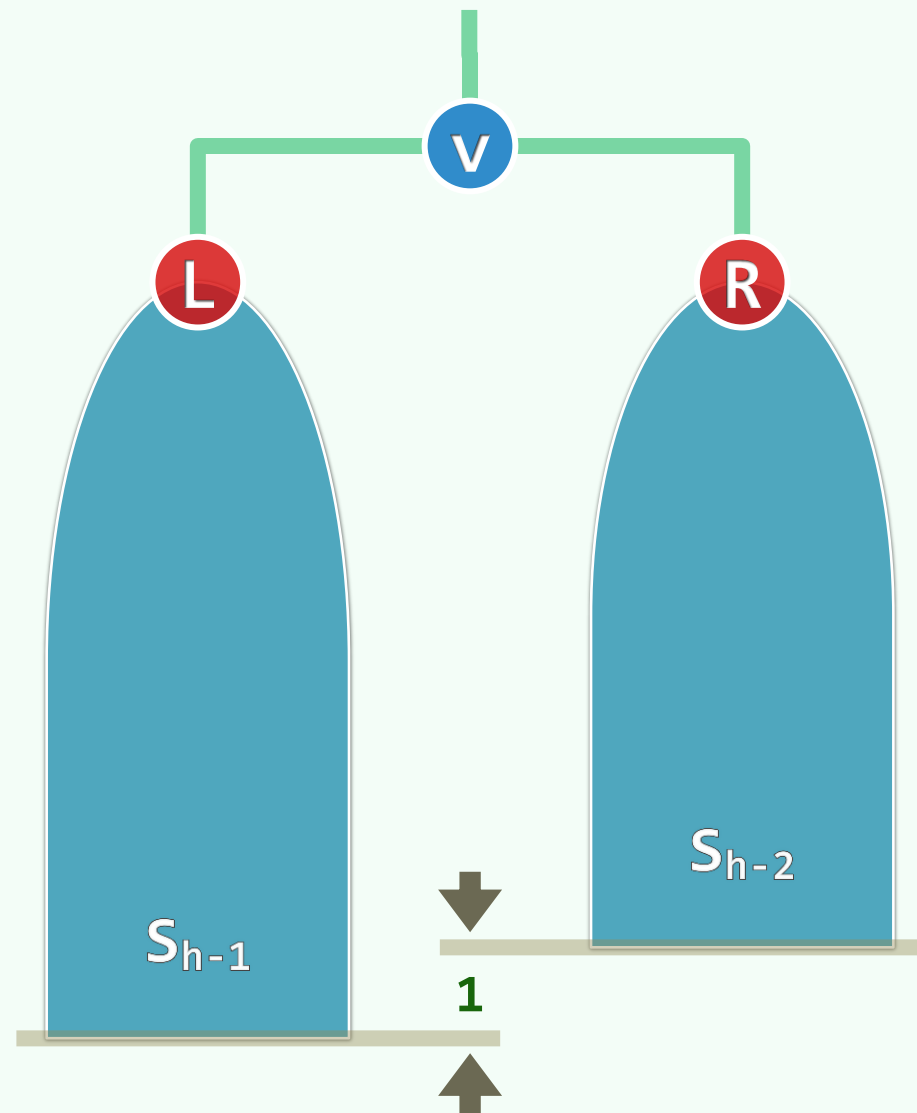
❖ 将其规模记作 $S(h)$

$$S(h) = 1 + S(h - 1) + S(h - 2)$$

$$S(h) + 1 = [S(h - 1) + 1] + [S(h - 2) + 1]$$

$$fib(h + 3) = fib(h + 2) + fib(h + 1)$$

❖ 反过来，由 n 个节点构成的AVL树，高度不致超过 $\mathcal{O}(\log n)$



Fibonacci Tree

❖ 高度为 h ，规模恰为 $S(h) = \text{fib}(h + 3) - 1$ 的AVL树

❖ 最“瘦”的AVL树 = “临界”的AVL树

$$S(0) = 1 \\ \text{fib}(3) - 1$$

2
0

$$S(1) = 2 \\ \text{fib}(4) - 1$$

2
0

3
+

$$S(2) = 4 \\ \text{fib}(5) - 1$$

2
0

3
+

5
+

8
0

1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, ...

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

