01-E3

绪论

迭代与递归：总和最大区段

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

...

问题 + 蛮力算法

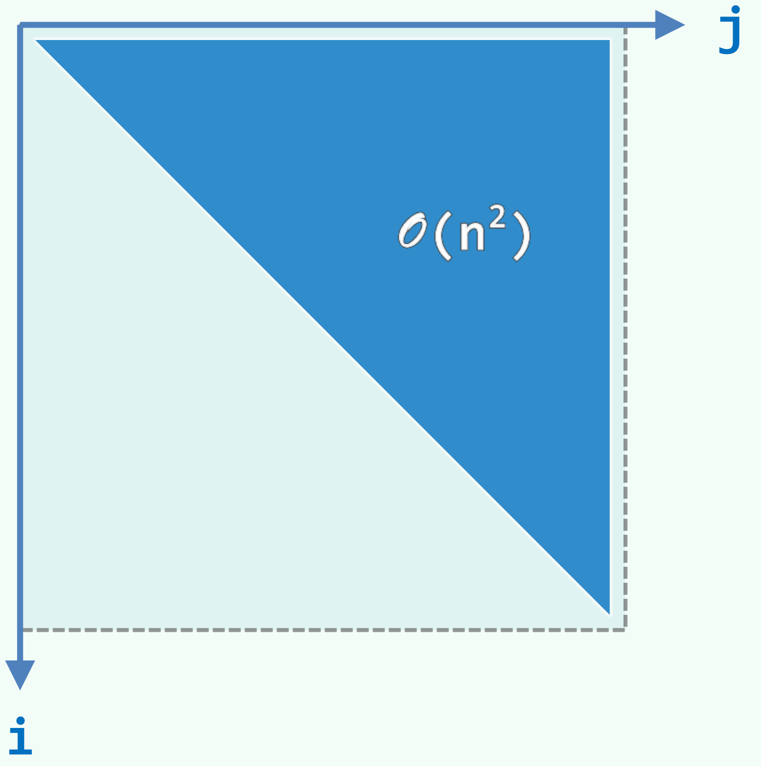
❖ 从整数序列中，找出总和最大的区段（有多个时，短者优先），例（总和最大区间有三个）：

$$\mathcal{A}[0,19)\ =\ \{\,1,\ -2,\ \underline{7,\ 2,\ 6,\ -9,\ 5,\ 6,}\ -12,\ -8,\ \underline{13,\ 0,\ -3,\ 1,\ -2,\ 8,}\ 0,\ -5,\ 3\,\}$$

```
int gs_BF( int A[], int n ) { //蛮力策略：O(n^3)
    int gs = A[0]; //当前已知的最大和
    for ( int i = 0; i < n; i++ )
        for ( int j = i; j < n; j++ ) { //枚举所有的O(n^2)个区段！
            int s = 0; for ( int k = i; k <= j; k++ ) s += A[k]; //用O(n)时间求和
            if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
        }
    return gs;
}
```

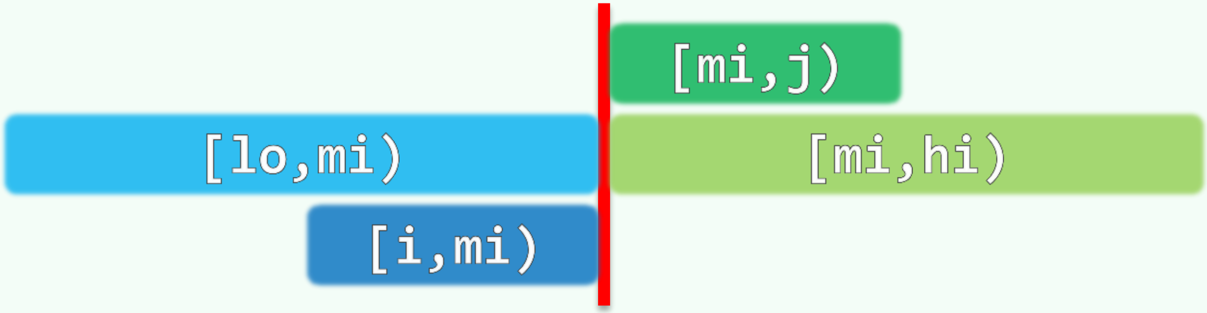
递增策略

```
❖ int gs_IC( int A[], int n ) { //Incremental Strategy: O(n^2)
    int gs = A[0]; //当前已知的最大和
    for ( int i = 0; i < n; i++ ) { //枚举所有起始于i
      int s = 0;
      for ( int j = i; j < n; j++ ) { //终止于j的区间
        s += A[j]; //递增地得到其总和：O(1)
        if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
      }
    }
    return gs;
}
```



分治策略：构思

- 不妨将计算的范围，一般化为：$\mathcal{A}[lo, hi) \ = \ \mathcal{A}[lo, mi) \cup \mathcal{A}[mi, hi) \ = \ \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- 于是借助递归，可求得$\mathcal{P}$、$\mathcal{S}$内部的GS
- 而剩余的（也是实质的）任务无非是：
  - 求得跨越前、后缀的GS
  - 准确地说，需要考察那些“覆盖”$\mathcal{A}[mi, mi)$ 的区段：$\mathcal{A}[i, j) \ = \ \mathcal{A}[i, mi) + \mathcal{A}[mi, j)$



- 实际上，必然有：$S[i, mi) \ = \ \max\{ \ S[k, mi) \mid lo \le k < mi \ \}$

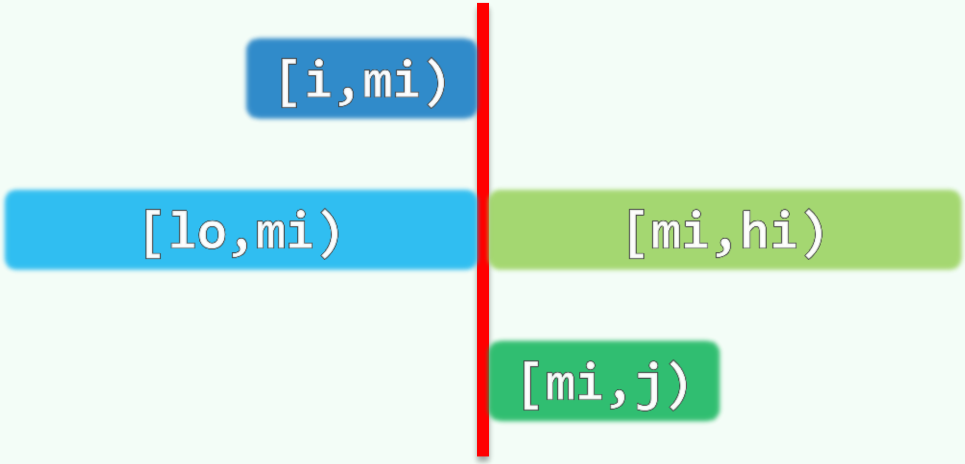
$$S[mi, j) \ = \ \max\{ \ S[mi, k) \mid mi \le k < hi \ \}$$

- 更好的消息是，二者均可独立计算，且累计耗时不过$\mathcal{O}(n)$

  于是总体复杂度也优化为$\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

分治策略：实现

```
❖ int gs_DC( int A[], int lo, int hi ) { //Divide-And-Conquer: O(n*logn)
     if ( hi - lo < 2 ) return A[lo]; //递归基
     int mi = (lo + hi) / 2; //在中点切分
     int gsL = A[mi-1], sL = 0, i = mi; //枚举
     while ( lo < i-- ) //所有[i, mi)类区段
        if ( gsL < (sL += A[i]) ) gsL = sL;
     int gsR = A[mi], sR = 0, j = mi-1; //枚举
     while ( ++j < hi ) //所有[mi, j)类区段
        if ( gsR < (sR += A[j]) ) gsR = sR; //更新
     return max( gsL + gsR, max( gs_DC(A,lo,mi), gs_DC(A,mi,hi) ) ); //递归
  }
```



减治策略：构思

- 考查**最短的**总和非正的后缀$A[k,hi)$，以及总和最大的区段$GS(lo,hi) = \mathcal{A}[i,j)$

  后者要么是前者的（真）**后缀**，要么与前者**无交**

- [反证]

  假若二者确有非空的公共部分：

  $\mathcal{A}[k,j),\ k < j < hi$

[lo,hi)

S(k,hi) <= 0

GS(lo,hi) = A[i,j)

S(k,j) > 0

S(j,hi) < 0

- 由 $GS[lo,hi)$ 的最大性（及最短性），必有

  $S(k,j) > 0$，即 $S(j,hi) < 0$ ——这与$A[k,hi)$ 的**最短性**矛盾

- 基于以上事实，完全可以采用“减而治之”的策略，通过**一趟**线性扫描在**线性**时间内找出GS...

减治策略：实现

```
❖ int gs_LS( int A[], int n ) { //Linear Scan: O(n)
    int gs = A[0], s = 0, i = n, j = n;
    while ( 0 < i-- ) { //对于当前区间[i,j)
       s += A[i]; //递增地得到其总和：O(1)
       if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
       if ( s <= 0 ) { s = 0; j = i; } //剪除负和后缀
    }
    return gs;
 }
```