清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 高等线性代数选讲　　答案　　2021 年 6 月 17 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 不定项选择题，选择下列满足陈述的所有选项：

 (1) 设 V_1, V_2, V_3, V_4 为 $\mathbb{R}^4$ 的子空间:

 $V_1 = \mathrm{Span}\{(1,1,0,0)\}$

 $V_2 = \mathrm{Span}\{(1,-1,0,0),(0,1,0,0)\}$

 $V_3 = \mathrm{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

 $V_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$

 那么下列子空间的和中，是直和的是 $\underline{(c)\qquad\qquad}$:

 (a) V_1+V_2；

 (b) V_1+V_3；

 (c) V_1+V_4；

 (d) V_2+V_4.

 (2) 设 V 为一复向量空间,T 为 V 上的算子,那么下列命题成立的是 $\underline{(a)(b)(d)\qquad}$:

 (a) T 有一个特征向量;

 (b) 存在 V 的基使得 T 是上三角矩阵;

 (c) 存在 V 的基使得 T 是对角矩阵;

 (d) V 有一个由 T 的广义特征向量组成的基.

2. (10 分) 写出下列概念的定义：

 (1) 对偶空间和对偶基；

 (2) 有限维向量空间的张量积 $V \otimes W$ 的其中一个定义.

 解：(1) V 的对偶空间 V' 为 V 上所有线性泛函组成的向量空间. 设 $\{v_1,...,v_n\}$ 为 V 的基，那么 V 的对偶基 $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ 为满足 $\phi_i(v_j)=\delta_{ij}$ 的元素组.

 (2) $V \otimes W = L(V,W;\mathbb{F})$ 为所有 $V' \times W'$ 上的双线性泛函组成的线性空间.

3. (12 分) 设 A 是一个特征值为 0 和 3 的 3×3 矩阵.

 (1) 写出 A 所有可能的若当标准型；

 (2) 找到满足 $\dim \mathrm{Null}(A)=1$, 且 $\dim \mathrm{Range}(A-3I)=1$ 的若当标准型.

解：(1) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

4. (12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-1\\-1&4&-1\end{pmatrix}$, 求 A 的特征多项式，最小多项式和若当标准型.

解：特征多项式 $= det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&1\\1&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

$I-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\1&-4&2\end{pmatrix}$ 秩为 2, 所以 $\dim\mathrm{Null}(I-A)=1$. 因此特征值 1 对应的若当块为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. 所以 A 的若当标准型为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 最小多项式为 $(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

5. (20 分) 设 $V=\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 为所有次数小于等于 2 的实系数多项式组成的向量空间. 定义 V 上的内积为:

$$<f,g>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

考虑算子 $T:V\to V$, $T(p)=(x^2-1)p''+2xp'$.

(1) 求 T 在基 $\{1,x,x^2\}$ 下的矩阵;

(2) 求对基 $\{1,x,x^2\}$ 做格拉姆-施密特正交化得到的规范正交基;

(3) 求 T 在上述所得规范正交基下的矩阵;

(4) 求 T 的伴随.

解：(1) $\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

(2) $\{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}x}{2},\frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2-\frac{1}{3})\}$.

(3) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

(4) $T = T^*$.

6. (16 分) 设 $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ 为所有 2×2 复矩阵组成的向量空间．对于任意 $A, B \in V$, 定义 V 上的内积为:

$$< A, B >= \frac{1}{2} tr(A\overline{B}^{\mathrm{T}}).$$

其中 $tr(M)$ 为 M 的对角线元素之和．

(1) 设 V 的子空间 $U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid tr(A) = 0\}$, 求 U 的一组基;

(2) 求 U 在 V 中的正交补;

(3) 对于任意 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$, 求 $A_0 \in U$, 使得 A_0 是 U 中到 A 距离最小的元素.

解：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{Span}\{I\}$.

(3) $P_U(A) = A - P_{U^\perp} A = A - \frac{<A,I>}{<I,I>} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$.

7. (10 分) 判断下列命题是否正确．若正确请证明；若不一定正确，请给出反例．

命题：设 T 为内积空间 V 上的算子，满足 $TT^* = 0$, 那么 $T = 0$.

命题正确．证明：对于任意 $v \in V$, $||T^*v||^2 =< T^*v, T^*v >=< TT^*v, v >= 0$

$\Rightarrow T^* = 0$

$\Rightarrow T = 0$.

8. (10 分) 设 A 为 n 阶复方阵, 满足 $A^2 = I$, 证明:

(1) A 可对角化;

(2) $\mathrm{rank}(I + A) + \mathrm{rank}(I - A) = n$. ($\mathrm{rank}(M)$ 为 M 的秩.)

证明：(1) A 的最小多项式整除 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. 最小多项没有重根，因此 A 可对角化.

(2) A 可对角化，$\dim \mathrm{Null}(I + A) + \dim \mathrm{Null}(I - A) = n$. 所以 $\mathrm{rank}(I + A) + \mathrm{rank}(I - A) = (n - \dim \mathrm{Null}(I + A)) + (n - \dim \mathrm{Null}(I - A)) = n$.