清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 高等线性代数选讲　　A 卷　　2021 年 6 月 17 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 不定项选择题，选择下列满足陈述的所有选项：

   (1) 设 V_1, V_2, V_3, V_4 为 $\mathbb{R}^4$ 的子空间:

   $V_1 = \mathrm{Span}\{(1,1,0,0)\}$

   $V_2 = \mathrm{Span}\{(1,-1,0,0),(0,1,0,0)\}$

   $V_3 = \mathrm{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

   $V_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$

   那么下列子空间的和中，是直和的是 __________ :

   (a) $V_1 + V_2$；

   (b) $V_1 + V_3$；

   (c) $V_1 + V_4$；

   (d) $V_2 + V_4$.

   (2) 设 V 为一复向量空间，T 为 V 上的算子，那么下列命题成立的是 _____ :

   (a) T 有一个特征向量；

   (b) 存在 V 的基使得 T 是上三角矩阵；

   (c) 存在 V 的基使得 T 是对角矩阵；

   (d) V 有一个由 T 的广义特征向量组成的基.

2. (10 分) 写出下列概念的定义：

   (1) 对偶空间和对偶基；

   (2) 有限维向量空间的张量积 $V \otimes W$ 的其中一个定义.

3. (12 分) 设 A 是一个特征值为 0 和 3 的 3×3 矩阵.

   (1) 写出 A 所有可能的若当标准型；

   (2) 找到满足 $\dim \mathrm{Null}(A) = 1$, 且 $\dim \mathrm{Range}(A-3I) = 1$ 的若当标准型.

4. (12 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征多项式，最小多项式和若当标准型.

5. (20 分) 设 $V=\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ 为所有次数小于等于 2 的实系数多项式组成的向量空间．定义 V 上的内积为：

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

考虑算子 $T: V\to V$, $T(p)=(x^2-1)p''+2xp'$.

(1) 求 T 在基 $\{1,x,x^2\}$ 下的矩阵；

(2) 求对基 $\{1,x,x^2\}$ 做格拉姆-施密特正交化得到的规范正交基；

(3) 求 T 在上述所得规范正交基下的矩阵；

(4) 求 T 的伴随.

6. (16 分) 设 $V=M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ 为所有 2×2 复矩阵组成的向量空间．对于任意 $A,B\in V$, 定义 V 上的内积为：

$$< A,B >= \frac{1}{2}tr(A\overline{B}^{\mathrm{T}}).$$

其中 $tr(M)$ 为 M 的对角线元素之和.

(1) 设 V 的子空间 $U=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid tr(A)=0\}$, 求 U 的一组基；

(2) 求 U 在 V 中的正交补；

(3) 对于任意 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$, 求 $A_0\in U$, 使得 A_0 是 U 中到 A 距离最小的元素.

7. (10 分) 判断下列命题是否正确．若正确请证明；若不一定正确，请给出反例.

命题：设 T 为内积空间 V 上的算子，满足 $TT^*=0$, 那么 $T=0$.

8. (10 分) 设 A 为 n 阶复方阵, 满足 $A^2=I$, 证明：

(1) A 可对角化；

(2) $\mathrm{rank}(I+A)+\mathrm{rank}(I-A)=n$. ($\mathrm{rank}(M)$ 为 M 的秩.)