Chap 1 概率

1 试验与事件

- **定义(随机试验)**
  - 不能预先确知结果;
  - 试验之前可预测所有可能结果.
- **定义(样本空间)** 一个试验所有可能结果之集 (Ω).
- **定义(随机事件)** $a\ well\ defined\ subset\ A \in \Omega$.
  - 全事件 Ω (必然事件);
  - 空事件 $\varPhi$ (不可能事件);
  - 单一试验结果 (基本事件).

2 事件的运算

- 借助集合的语言 $or\ Venn$ 图.
  - 余: $A^c - (\Omega \backslash A)$;
  - 和: $A + B - (A \cup B)$;
  - 差: $A - B - (A \backslash B)$;
  - 积: $AB - (A \cap B)$;
  - 互斥: $AB = \varnothing$;
  - 对立: $AB = \varnothing, A + B = \Omega$;
  - **De Morgan** 定律: $(A+B)^c = A^cB^c$ $(\sum_n A_n)^c = \prod_n A_n^c$.

3 概率的几种解释

- 古典解释 - 基于等可能性;
- 频率解释;
- 主观解释.

4 公理化定义

- $2^\Omega \Rightarrow \Omega$ 的所有子集构成的集合.
- 事件集类 $\mathscr{F} \subset \Omega \Rightarrow \sigma-$代数: 事件运算的封闭性.
- 特别地,

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}, \forall A_i \in \mathscr{F}.$$

- **定义(Kolmogorov)**

$$P:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$$

满足以下三条公理:

  - $P(A)\geq 0,\forall A\in\mathscr{F}$
  - $P(\Omega)=1$
  - $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),A_iA_j=\varnothing,\forall i\neq j$

  则称 P 为概率函数, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

- **命题**
  - $P(A)\leq 1,\forall A\in\mathscr{F}$;
  - $P(\Phi)=0$;
  - $P(A^c)=1-P(A)$;
  - $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),A_iA_j=\varnothing,\forall i\neq j$;
  - $P(A)\leq P(B),\forall A\subset B$;
  - $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.
- **推广**

  $P(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{i_1<i_2}P(A_{i_1}A_{i_2})+\cdots+(-1)^{r-1}\sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})+\cdots$
- **例** n 个人, 每人一顶帽子, 随机挑选一顶帽子. 无人拿到自己帽子的概率为? 恰有 k 人拿到自己帽子的概率为?
- **解答** 令 $A_i=$ 第 i 个人拿到自己帽子. 注意到

$$P(A_i)=\frac{1}{n}.$$

  运用排列组合知识可得

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!},$$

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}C_n^r=\frac{1}{r!}.$$

  故至少有一个人拿到自己帽子的概率为

$$\begin{aligned}P(\sum_{i=1}^{n}A_i)&=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})\\&=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{1}{r!}.\end{aligned}$$

无人拿到自己帽子的概率为

$$
\begin{aligned}
P_n &= 1 - P(\sum_{i=1}^{n} A_i) \\
&= 1 - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} P(A_{i_1} \cdots A_{i_r}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

5 条件概率

- **定义(条件概率)** $P(A \mid B) := \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (需 $P(B) > 0$).
- $A \mid B$ 不是事件.
- **计算** (1) 缩小样本空间; (2) 定义.
- **定义(乘法法则)** $P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$.
- **例** 8 个红球, 4 个白球, 等可能无放回地取出 2 红球的概率为?
- **解答** 无放回地取出 2 红球的概率为

$$
P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.
$$

- **推广**

  $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots P(A_n \mid A_1A_2 \cdots A_{n-1})$.

- **解答续** 在配对问题中, 注意到

$$
\begin{aligned}
P(A_{i_1} \cdots A_{i_r}) &= P(A_{i_1})P(A_{i_2} \mid A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r} \mid A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_{r-1}}) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{n-(r-1)} \\
&= \frac{(n-r)!}{n!}.
\end{aligned}
$$

- **定义**

$$
P(\cdot \mid B) : \mathscr{F} \to \mathbb{R}
$$

  令 $\widetilde{P} = P(\cdot \mid B)$, 则 $\widetilde{P}$ 满足以下三条公理:

  - $\widetilde{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{R}$
  - $\widetilde{P}(\Omega) = 1$
  - $\widetilde{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(A_i), A_iA_j = \varnothing, \forall i \neq j$

故 $\widetilde{P}$ 为概率函数, $(\Omega, \mathscr{F}, \widetilde{P})$ 为新概率空间.

- **注**
  - $P(A)$ **v.s.** $\widetilde{P}(A) = P(A \mid B)$;
  - "已观测到 A 发生, 则 $P(A) = 1$" 这句话是错误的, 因为 $P(A \mid A) = 1$.

6 独立事件

- **定义(独立事件)** 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立.
- **注**
  - 此时 $P(A \mid B) = P(A)$, 即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A\Omega)}{P(\Omega)}$;
  - 事件 B 的发生未改变 A 发生的概率;
  - 从实际角度判断可应用定义中的关系式; 一般利用定义判断独立性.
- **例** 中奖率为 10^{-5} 的彩票每周开奖, 不累积, 一个人购彩十年未中奖的概率为?
- **解答**

  每次购彩事件都是独立的.

  设事件 $A_i =$ 第 i 周未中奖, 那么 $P(A_i) = 1 - 10^{-5}$.

  故 $P = P(A_1 A_2 \cdots A_{520}) = (1 - 10^{-5})^5 20 = 99.48\%$.
- 事件 A, B 相互独立, 则事件 A^c, B 相互独立.
- **推广**
  - A, B, C 相互独立 $\Leftrightarrow P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 且 A, B, C 两两独立;
  - A, B, C 两两独立 $\nRightarrow A, B, C$ 相互独立

    (反例) 甲乙两人抛掷 2 枚硬币. $A =$ 甲正, $B =$ 乙正, $C =$ 甲乙同.
- **定义(相互独立)**

  $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ 任 m 个事件 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}$, 有 $P(A_{i_1} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m})$.
- **定义(条件独立)**

  A, B 关于事件 E 条件独立 $\Leftrightarrow P(AB \mid E) = P(A \mid E)P(B \mid E)$.
- **注** 条件独立与独立不可互推.

7 Bayes 公式

- **定义(全概率公式)** 给出 Ω 的一个分割
  - $\sum_i B_i = \Omega$;
  - $B_i B_j = \varnothing, \forall i \neq j$;

    - $P(B_i) > 0, \forall i.$

  则有

$$P(A) = P(\sum_i (AB_i)) = \sum_i P(AB_i) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i).$$

- **定义(Bayes 公式)**

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

  其中 $P(B_i)$ 为先验概率, $P(B_i \mid A)$ 为后验概率.

- **例** $A =$ 阳性, $B =$ 患病, $P(B) = 10^{-4}$, $P(A \mid B) = 0.99$, $P(A \mid B^c) = 10^{-3}$. 求 $P(B \mid A)$, $P(B \mid A_1A_2)$.
- **解答** 由 **Bayes** 公式, 容易得到

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)} \\ &= 9.01\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \mid A_1A_2) &= \frac{P(A_1A_2B)}{P(A_1A_2)} \\ &= \frac{P(A_1A_2 \mid B)P(B)}{P(A_1A_2)} \\ &= \frac{P(A_1A_2 \mid B)P(B)}{P(A_1A_2 \mid B)P(B) + P(A_1A_2 \mid B^c)P(B^c)} \\ &= \frac{P(A \mid B)^2P(B)}{P(A \mid B)^2P(B) + P(A \mid B^c)^2P(B^c)} \\ &= 98.99\%. \end{aligned}$$

8 一些讨论

- 什么是概率?
    - 不确定性的一种度量;
    - 具有不同的解释;
    - 公理化定义.
- 为什么用概率?
    - 不确定性的来源
        - 被建模系统的内在随机性;

        - 不完全观测 (**Monty Hall** 中的参与者);
        - 不完全建模.
    - 很多情况下, 简单而不确定的规则好于复杂而确定的规则
    - 应用、维护、沟通
- 怎么用概率?
    - 计算正确的概率;
    - 正确计算概率;
    - 正确使用概率.