高等线性代数选讲　A卷　2022年4月11日

1. (12分) 不定项选择题.

(1). 设 T 为 $\mathbb{R}^2$ 上逆时针旋转 $90°$ 定义的线性算子，那么下列 $\mathbb{R}^2$ 的子空间中，是 T 不变的有 __(a)(b)__ ;

(a). $\{0\}$;　　(b). $\mathbb{R}^2$;　　(c) x 轴 ;　　(d). y 轴.

(2). 判断下列命题是否成立：非零的幂零算子不可对角化. __(a)__ ;

(a). 成立 ;　　(b). 不成立.

幂零算子的特征值均为 0. 一个特征值均为 0 的对角阵是零矩阵.

(3). 是否存在 $\mathbb{F}^3$ 上的线性算子 T，使得 $\mathrm{Null}(T) = \mathrm{Range}(T)$? __(b)__ ;

(a). 存在 ;　　(b). 不存在.

我们有 $\dim \mathrm{Null}(T) + \dim \mathrm{Range}(T) = \dim \mathbb{F}^3 = 3$.

故 $\dim \mathrm{Null}(T) \neq \dim \mathrm{Range}(T)$.

2. (10分) 找到线性变换 $S, T: \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$，使得 $ST = 0$，但 $TS \neq 0$.

取 $\mathbb{F}^2$ 的一组基 $\{e_1, e_2\}$，定义

$S: \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$，$S(ae_1 + be_2) = ae_1$，

$T: \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$，$T(ae_1 + be_2) = ae_2$，

(S, T 在基 $\{e_1, e_2\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.)

易见 $ST = 0$，$TS \neq 0$.

证明满足上述条件的 S, T 的秩必为 1.

(注：一个线性映射的秩定义为 $\mathrm{Range}(T)$ 的维数.)

由 $TS \neq 0$，S, T 均非零(秩为0). 由 $ST = 0$ 且 $TS \neq 0$，S, T 均不可逆(秩为2).

故 S, T 的秩为 1.

3. (18分) 设 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 为阶数小于或等于 3 的多项式组成的线性空间. 考虑线性映射

$$T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$$
$$f(x) \mapsto xf''(x) - 2f'(x).$$

取 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 的两组基

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3,$$
$$t_1 = 1+x^2, \quad t_2 = x, \quad t_3 = x^2, \quad t_4 = 1-x^3.$$

(1). 求 T 在这两组基下的矩阵 $M(T, (e_1,e_2,e_3,e_4), (t_1,t_2,t_3,t_4))$.

$$\begin{aligned}
T(e_1,e_2,e_3,e_4) &= (Te_1, Te_2, Te_3, Te_4) \\
&= (T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)) \\
&= (0, -2, -2x, 0) \\
&= (0, -2t_1+2t_3, -2t_2, 0) \\
&= (t_1,t_2,t_3,t_4)\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$M(T, (e_1,e_2,e_3,e_4), (t_1,t_2,t_3,t_4)) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2). 将 T 看作 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 上的算子. 在 $\{0\}$ 和 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 之外, 找到两个 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ 的 T 不变子空间 (不需证明).

例: $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{span}(x^3)$.

(3). 判断 T 是否可以对角化, 并说明原因.

否. 由于 T 将一个 n 次多项式映到一个 $n-1$ 次多项式, T 幂零.

又 $T \neq 0$, 从而 T 不可对角化.

4. (10分) 设 N 为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性算子.

(1). 假设 N 为幂零算子，证明以下命题或给出反例：N 的所有特征值都为 0.

设 λ 为 N 的一个特征值，x 是 λ 对应的一个特征向量.

由 $Nx = \lambda x$，有 $N^k x = \lambda^k x$. k 充分大时有 $N^k = 0$，故 $\lambda^k x = 0$，$\lambda = 0$.

(2). 假设 N 的所有特征值都为 0，证明以下命题或给出反例：N 是幂零的.

反例：N 为矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & a & b \\ & -b & a \end{bmatrix}$ 对应的线性变换，$b \neq 0$.

N 在 $\mathbb{R}$ 上有一个特征值 0，但 N 不幂零.

(N 有三个复特征值 0, $a \pm bi$.)