1. (12 分) 不定项选择题，选择下列满足陈述的所有选项：

(1) 下列关于 V 上线性算子 T 的命题中，总是正确的是 ___(a) (d)___ :

(a) $\text{Null}(T) \subseteq \text{Null}(T^2)$;

(b) $\text{Null}(T^2) \subseteq \text{Null}(T)$;

(c) $\text{Range}(T) \subseteq \text{Range}(T^2)$;

(d) $\text{Range}(T^2) \subseteq \text{Range}(T)$.

(2) 判断下列命题是否正确：___(b)___.

设 $V = \text{Span}\{(0,1)\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，$W \subseteq \mathbb{R}^2$ 为另一子空间，且 $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$. 那么 $(1,0) \in W$.

(a) 正确；

(b) 不正确.

(3) 设 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为所有 $n \times n$ 的实矩阵组成的向量空间. 设 $n \geq 2$, 那么下列 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子集中，是子空间的是 ___(c)___ :

(a) 所有特征值全部为 0 的矩阵组成的集合.

(b) 所有行列式为的 0 的矩阵组成的集合.

(c) 所有迹为 0 的矩阵组成的集合 (注：一个方阵的迹为对角线元素之和).

(d) 所有对角线元素乘积为 0 的矩阵组成的集合.

2. (12 分) 设 $\mathbb{F}^3$ 上的线性算子 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

(1) 若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, 判断 T 是否可以对角化，说明理由.

(2) 若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 判断 T 是否可以对角化，说明理由.

(1) 不能

设 λ 为 T 特征值 则 $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (x_2, x_3, x_1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = x_2 \\ \lambda x_2 = x_3 \\ \lambda x_3 = x_1 \end{cases}$

$\lambda^3 x_i = x_i$ $(\lambda^3 - 1)x_i = 0$ (而 (x_i) 不全为 0 否则为 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$) $\Rightarrow \lambda^3 = 1$

在 R 中仅有解 $\lambda = 1$ 而 $E(1,T) = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ $\dim(E(1,T)) = 1 < 3$ 不可对角化.

(2) 同(1) $\lambda^3 = 1$ 在 C 中有解 $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ $\lambda_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$\dim E(\lambda_i, T) = 1$ $\sum_{i=1}^{3} \dim(E(\lambda_i, T)) = 3$ 可对角化

3. (14 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 定义 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 上的算子:

$$T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad X \mapsto AX - XA$$

(1) 令 I_2 为 2×2 单位矩阵, 设 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间 $U = \mathrm{Span}\{I_2, A\}$, 证明 U 是 T 不变子空间.

(2) 求商算子 T/U 的特征值和特征向量.

(1) $\forall u \in U \quad u = aI_2 + bA$

$T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$

再验证 T是线性映射, 可知 U是T不变子空间。

(2) 设 λ 是 T/U 的特征值. 则有 非零 v. $T: v \longrightarrow \lambda v + U$

设 $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad T(v) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 2b \\ -2c & \end{pmatrix}$

$U = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \begin{cases} 2b = \lambda b \\ -2c = \lambda c \end{cases}$ $\quad b, c$ 不同时为 0

$\Rightarrow \lambda = \pm 2$

$\lambda = 2$ 对应特征向量 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U \quad b \neq 0$

$\lambda = -2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + U \quad c \neq 0$

4. (12 分) 设 M, N 为有限维向量空间 V 上的幂零算子.

(1) 那么 $M+N$ 是否为幂零算子? 给出证明或反例.

(2) 另假设 $MN = NM$, 证明 $M+N$ 也是幂零算子.

(1) 反例 $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = N^2 = 0$

$(M+N)^2 = I$

(2) 设 $M, N \in \mathcal{L}(F^n)$

$M^n = N^n = 0$

$(M+N)^n = M^n + n \cdot M^{n-1}N + C_n^2 M^{n-2}N \cdots$ (By $MN=NM$)

$(M+N)^{2n} = M^{2n} + 2n M^{2n-1}N + C_{2n}^2 M^{2n-2}N \cdots$

$= 0$

$M+N$ 是幂零算子