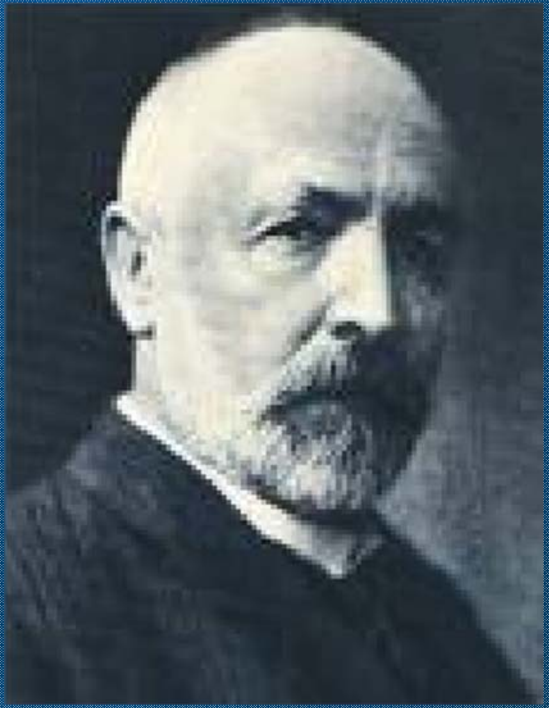
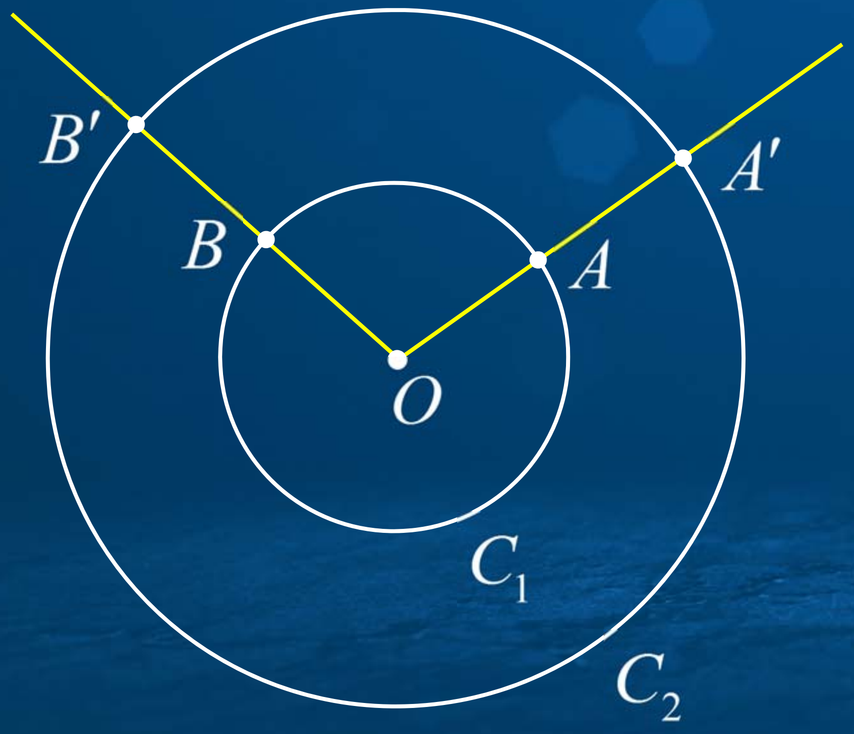
第3讲 集合与映射

- 集合论是德国著名数学家康托尔于19世纪末创立的.
- 牛顿与莱布尼兹在十七世纪创立了微积分并获得飞速发展.
- 十八世纪，由于无穷概念没有精确的定义，使微积分理论遇到严重的逻辑困难.
- 十九世纪初，出现了一场重建数学基础的运动，集合论由此产生.

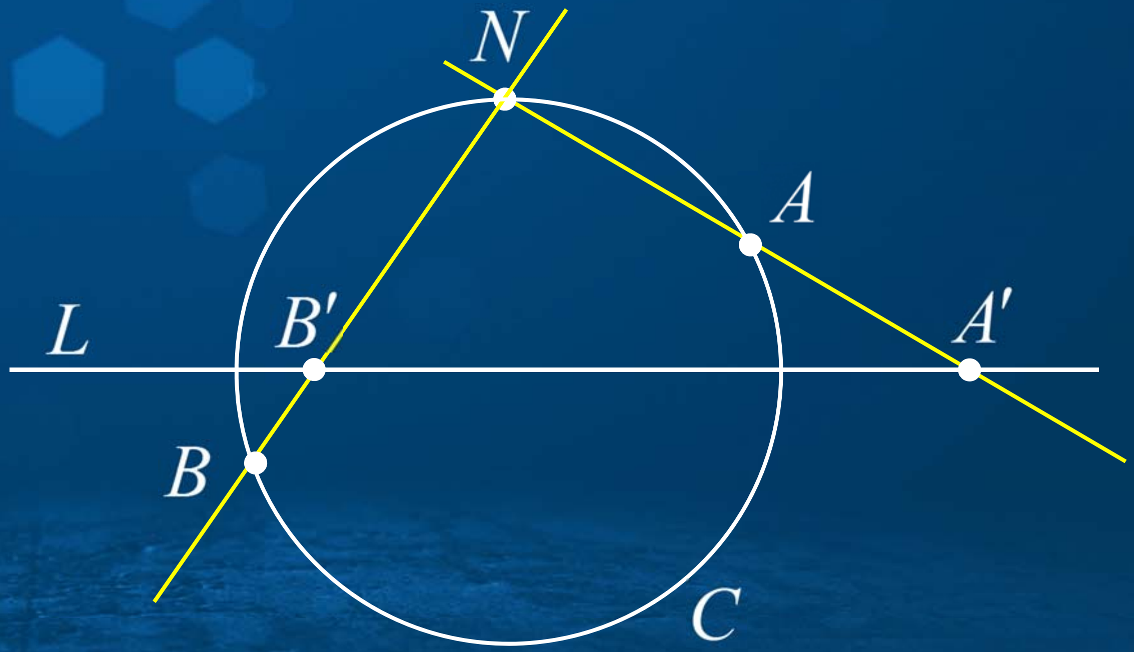


康托尔[德]
G.Cantor
1845—1918

中世纪：如果从两个同心圆的圆心出发画射线，那么射线就在两个圆的点与点之间建立一一对应.



两个圆之间的对应关系



圆与直线的对应关系

- 集合的概念与运算
- 确界与连续性公理
- 区间与邻域
- 映射
- 集合的比较

第3讲 集合与映射——主要内容

1. 集合的定义

将具有某种特定性质的对象的全体称为集合. 组成集合的对象称为元素 .

$$a \in A \quad \text{或者} \quad a \notin A$$

- 集合的表示法

例如

(1) 枚举法 : $A = \{a, b, c, d, e\}$　　$A = \{3, 5, 7, 11, 13\}$

(2) 描述法 : $A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$　$A = \{x \mid x \text{为前5个素数}\}$

- 集合的关系

子集 : $A \subset B$　　相等 : $A = B$　　空集 : ϕ

● 数集的表示

自然数 $\mathbb{N}=\{x \mid x=1,\ 2,\ \cdots\}$

整数 $\mathbb{Z}=\{x \mid x=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$

有理数 $\mathbb{Q}=\{\, p/q \mid p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\,\}$

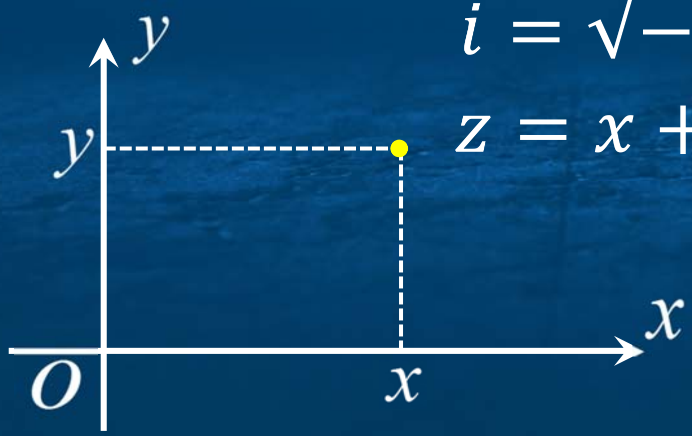
实数 $\mathbb{R}$

复数 $\mathbb{C}$

$i=\sqrt{-1}$

$z=x+iy\in\mathbb{C}$

复平面



“数是人类在精神上制造出来的最抽象的概念.”

2. 集合运算

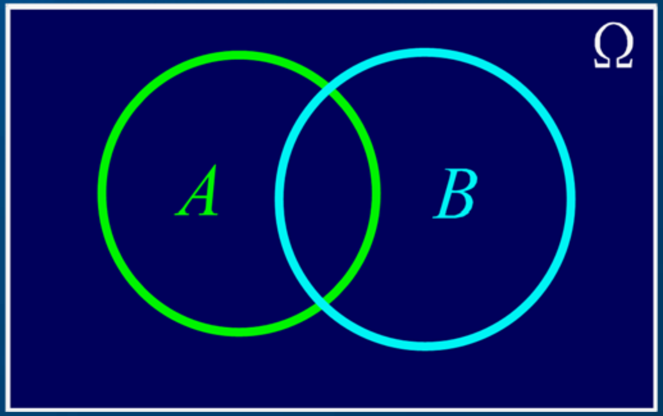
给定两个集合 A, B, 定义下列运算:

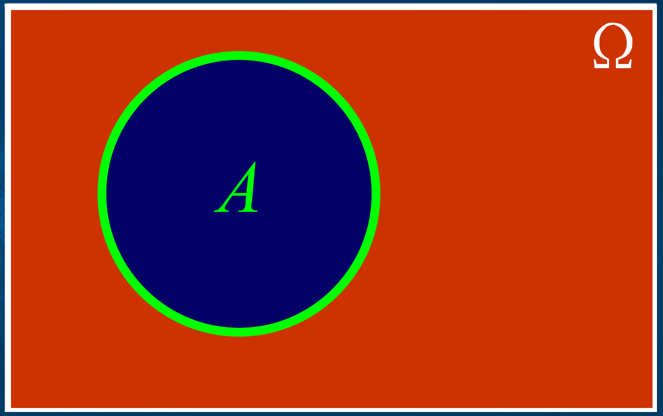
并集 $A\cup B=\{x|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$

交集 $A\cap B=\{x|\,x\in A$且$x\in B\}$

差集 $A-B=\{x|\,x\in A$且$x\notin B\}$

补集 $\bar{A}=\Omega-A$





3. 集合的运算性质

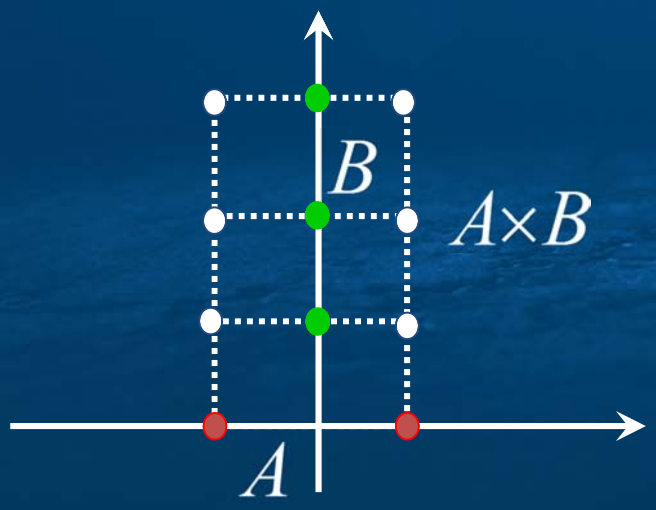
- 交换律 $A \cap B = B \cap A$， $A \cup B = B \cup A$
- 结合律 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 对偶律 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \bar{B}$， $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \bar{B}$

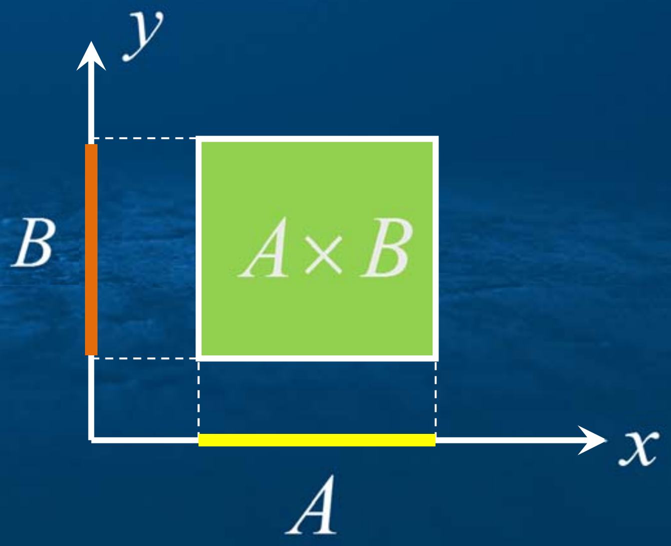
4. 直积

笛卡儿积： $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

例1　$A = \{-1, 1\}$，$B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(-1,1), (-1,2), (-1,3), (1,1), (1,2), (1,3)\}$$





- 实数的性质

  1）有序性　　　　2）连续性或完备性

- 数集的上界与上确界

设 E 是一个非空实数集，M 是一个实常数，如果对于 E 中的任何元素 x，均有 $x \le M$，则称 M 为数集 E 的一个上界，并称 E 有上界.

如果一个实数集 E 有上界，称 E 的最小上界为上确界，记为 $\sup E$（supremum 的缩写）.

连续性公理：一个非空有上界的实数集必有上确界.

设E 是一个非空实数集，m 是一个实常数，如果对于 E 中的任何元素 x，均有 $x \geq m$，则称 m 为数集 E 的一个下界，并称 E 有下界.

如果一个实数集 E 有下界，称 E 的最大下界为下确界，记为 $\inf E$（infimum 的缩写）.

连续性公理：一个非空有下界的实数集必有下确界.

微积分的基础是极限理论，而连续性公理是极限理论的基石.

例2 讨论有限集与无限集

$$A=\{2,3,5,7\}\ 和\quad B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}$$

的上下界和上下确界，并判断上下确界是否在集合内.

集合A有上界也有下界

上界： 7以及比7更大的数　　下界： 2以及比2更小的数

$\sup A=7$　　$\inf A=2$

集合B有上界也有下界

上界： 1以及比1更大的数　　下界： 小于或等于零的数

$\sup B=1$　　$\inf B=0$

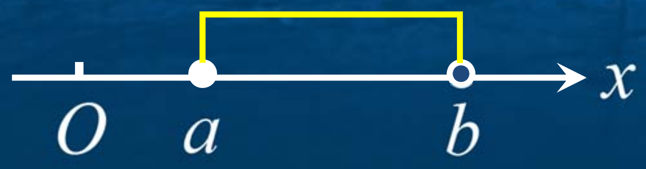
1. 区间

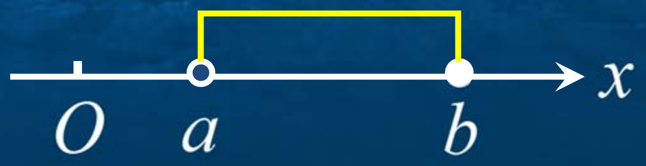
- 有限区间

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

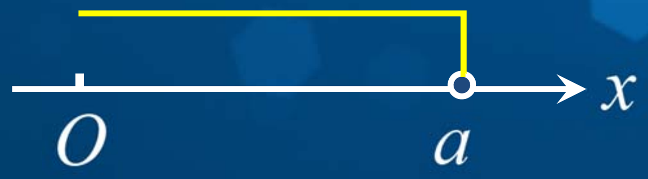
半开闭区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$和 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$





- 无限区间

无限开区间 $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$和 $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$



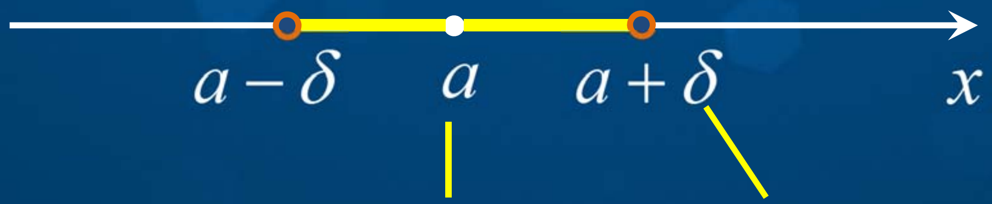
无限闭区间 $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$和 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$

全体实数的集合 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. 邻域

邻域: 以点 a 为中心的任何开区间，记作：$U(a)$

δ 邻域: $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$



去心邻域: $U_0(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$

左邻域: $(a-\delta,a)$

右邻域: $(a,a+\delta)$

定义1 设 A, B 是两个非空集合，若对 A 中的任一元素 x，依照某种规律（或法则）f，恒有 B 中的唯一确定的元素 y 与之对应，则称对应规律 f 为一个从 A 到 B 的映射.

记作$f: A \to B$，有时记 $f: x \mapsto y$.

称 y 为 x 的像，记作$y = f(x)$，并称 x 为 y 的原像. 集合A称为映射 f 的定义域，集合 B 称为 f 的像集.

集合 $R_f = \{f(x) | x \in A\}$ 称为映射 f 的值域.

定义2 设$f: A \to B$是映射. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

则称 f 为**单射**. 若 $R_f = B$，则称 f 为**满射**. 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**，又叫**双射**.

例3 数轴上点到原点的距离 $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$$f(x) = |x|.$$

它是满射
但非单射

定义3 设A, B是两个集合，若存在一个一一映射$\varphi: A \to B$，则称集A与集B是等势的.

结论：两个有限集是等势的，当且仅当它们的元素个数相等.

例4 设$E = \{ 2n | n \in \mathbb{N}\}$是全体偶数的集合，那么，它与自然数集$\mathbb{N}$是等势的.

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ E: & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

➢ 所有偶数与自然数是“一样多”的！

$$\begin{array}{lcccccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & & ? & \end{array}$$

$$\frac{1+(-1)^n(2n-1)}{4}$$

$$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad \varphi(n) = \frac{1+(-1)^n(2n-1)}{4}$$

1. $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 是等势的.

   ➢ 所有有理数与自然数是“一样多”的！

2. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$与$\mathbb{N}$是不等势的，它与$\mathbb{Q}$也是不等势的.

   ➢ 无理数比有理数“个数多”！