第5讲 初等函数


天下第一村

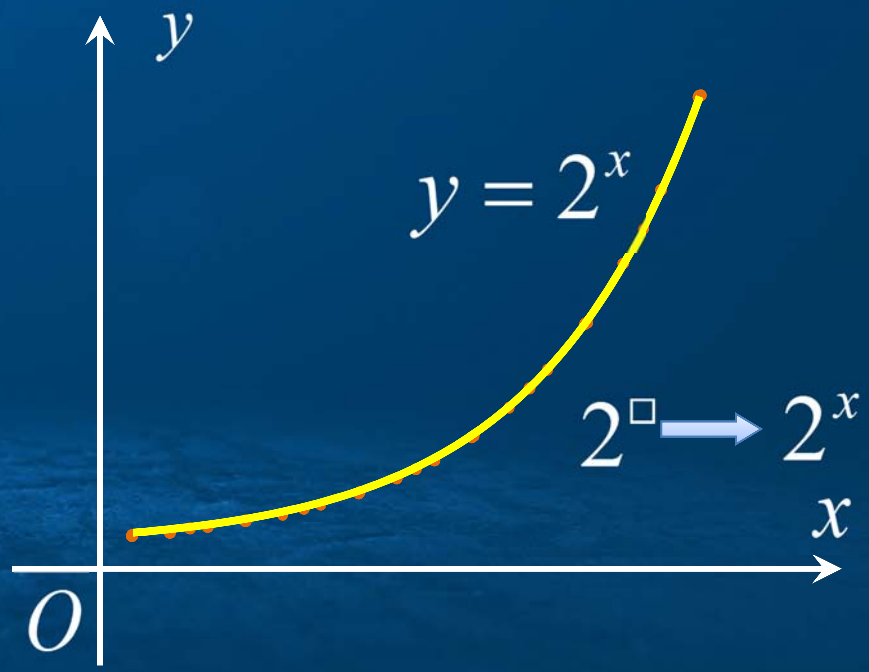
翻一番就是在原来的基础上乘2，翻两番就是在原来的基础上乘2的平方，翻N番就是在原来的基础上乘以2的 N 次方.

$$2^{\square}:2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots$$

$$2^{\square}:2^{\frac{1}{2}},\ 2,\ 2^{\frac{3}{2}},\ 2^2,\ 2^{\frac{5}{2}}\ \cdots$$

$$2^{\square}:2^{\frac{1}{3}},2^{\frac{2}{3}},2,2^{\frac{4}{3}},2^{\frac{5}{3}},2^2,\cdots$$

$2^y=x \longrightarrow y=\log_2 x$ —对数

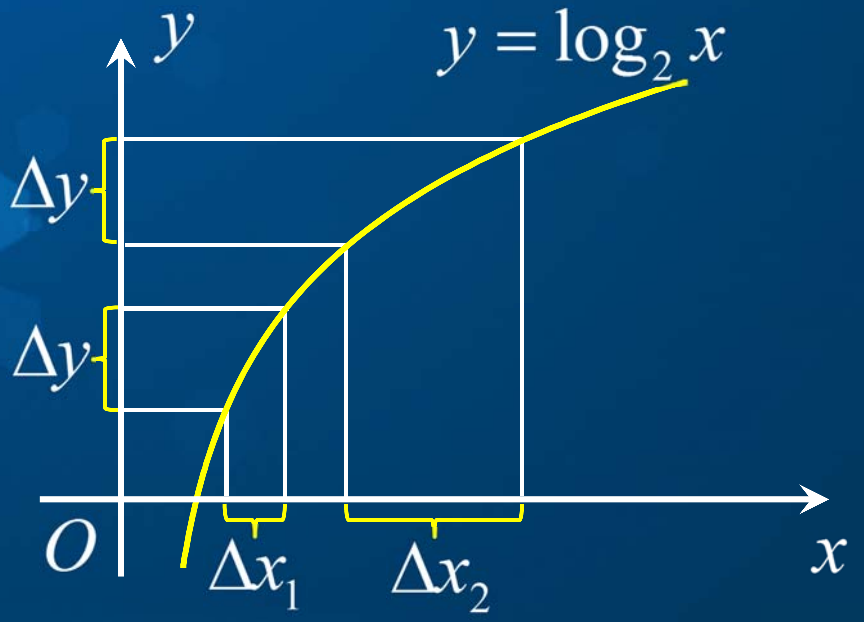


$$2^y = x \longrightarrow y = \log_2 x$$

$x: 2 \to 8$ $y: 1 \to 3$

$x: 8 \to 32$ $y: 3 \to 5$

$x: 32 \to 128$ $y: 5 \to 7$



"人们的精神财富与物质财富的对数成正比."

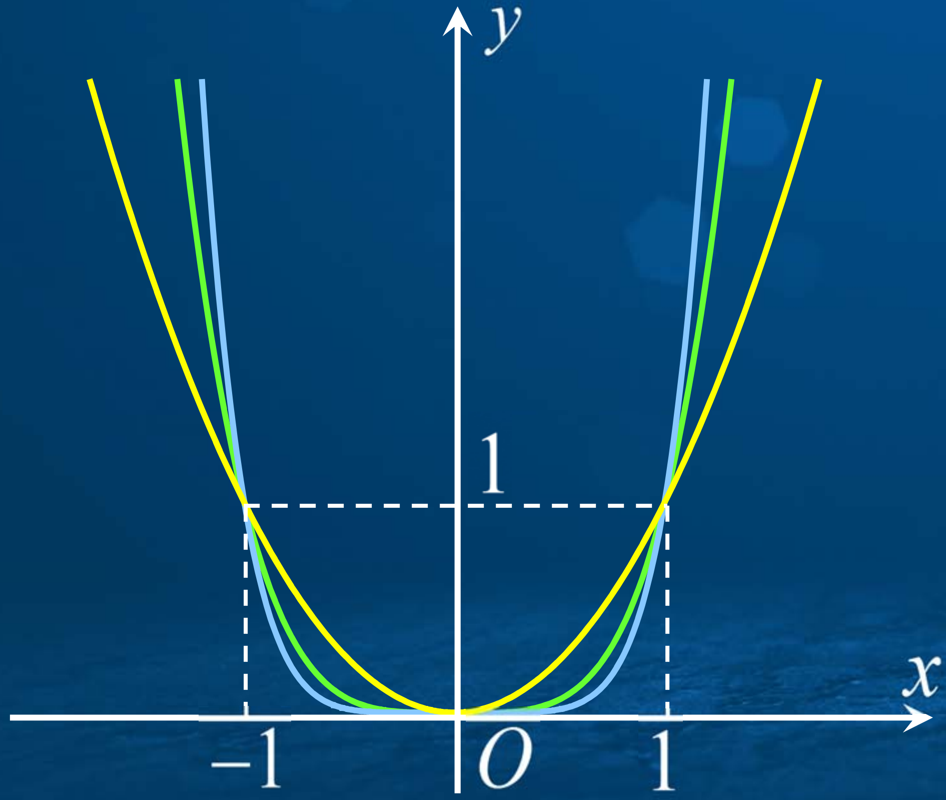
丹尼尔·伯努利

基本初等函数

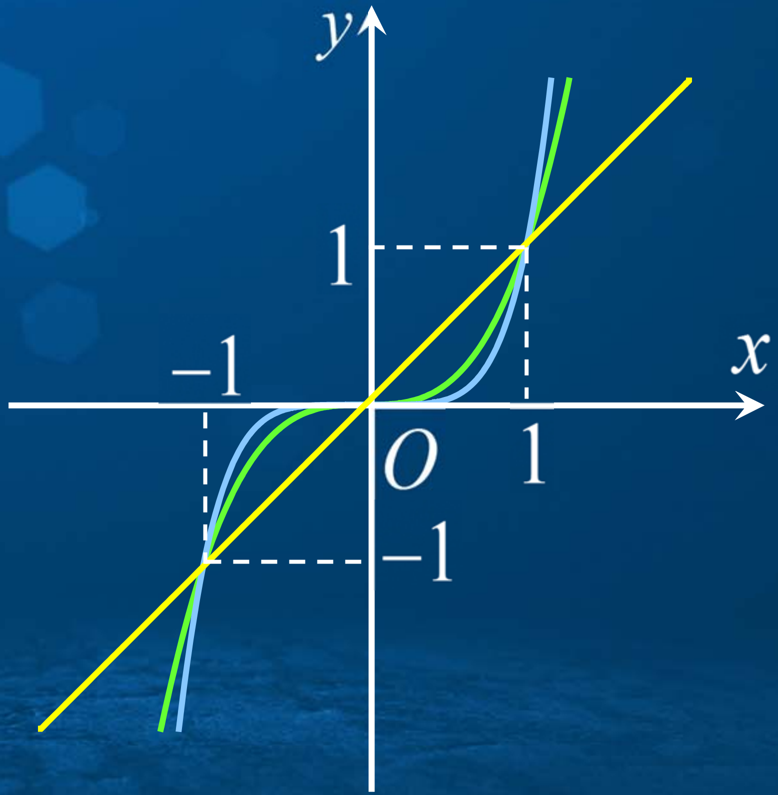
初等函数

双曲函数

幂函数 $y = x^{\mu}$

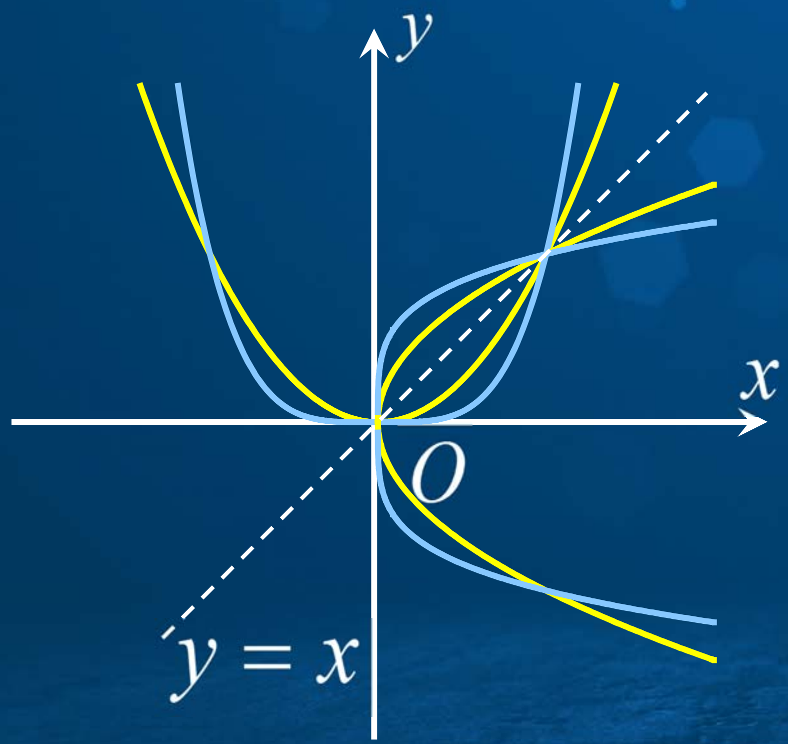


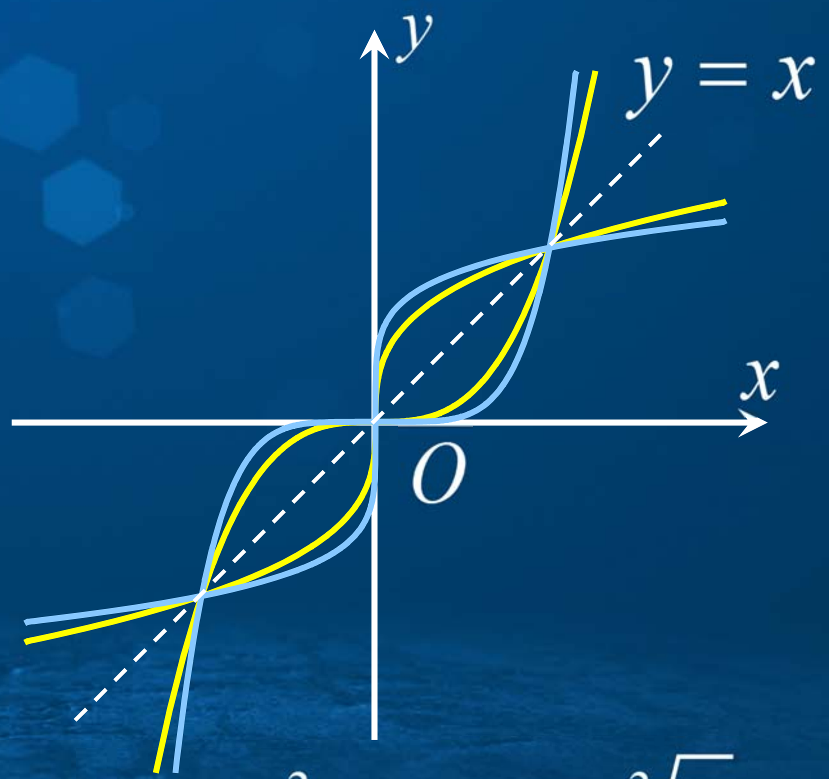
$y = x^2, x^4, x^6$



$y = x, x^3, x^5$

整幂函数与根式函数





$$y = x^2 \longleftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

$$y = x^4 \longleftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x}$$

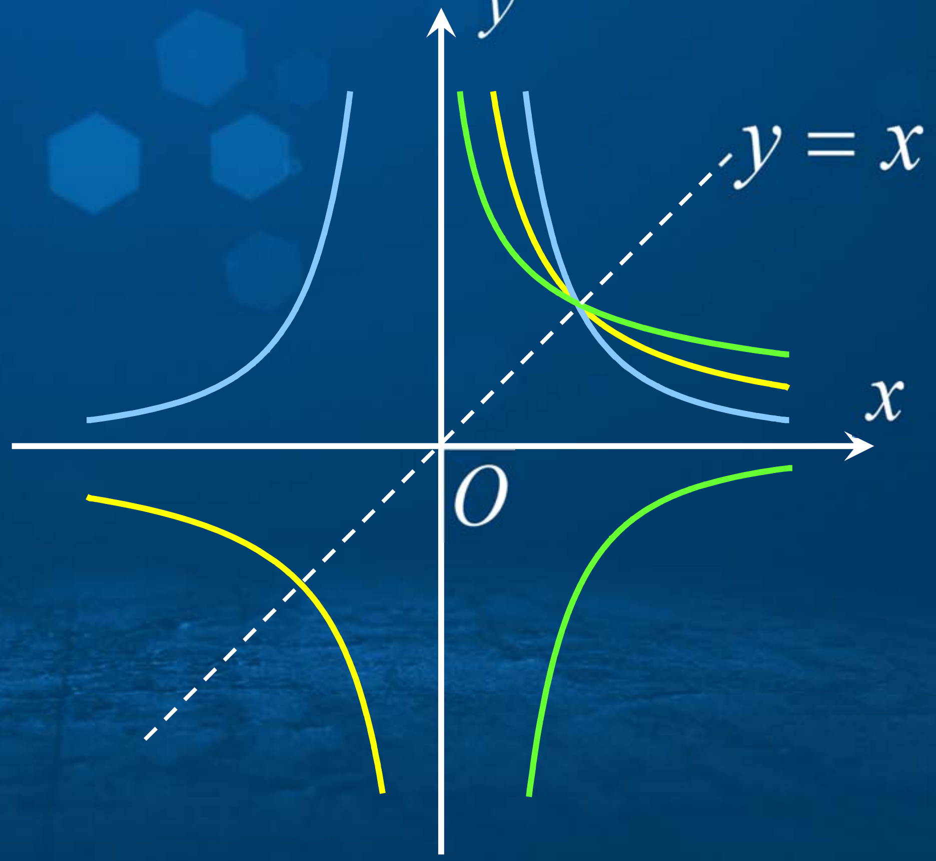
$$y = x^3 \longleftrightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

$$y = x^5 \longleftrightarrow y = \sqrt[5]{x}$$

双曲函数与“广义双曲函数”

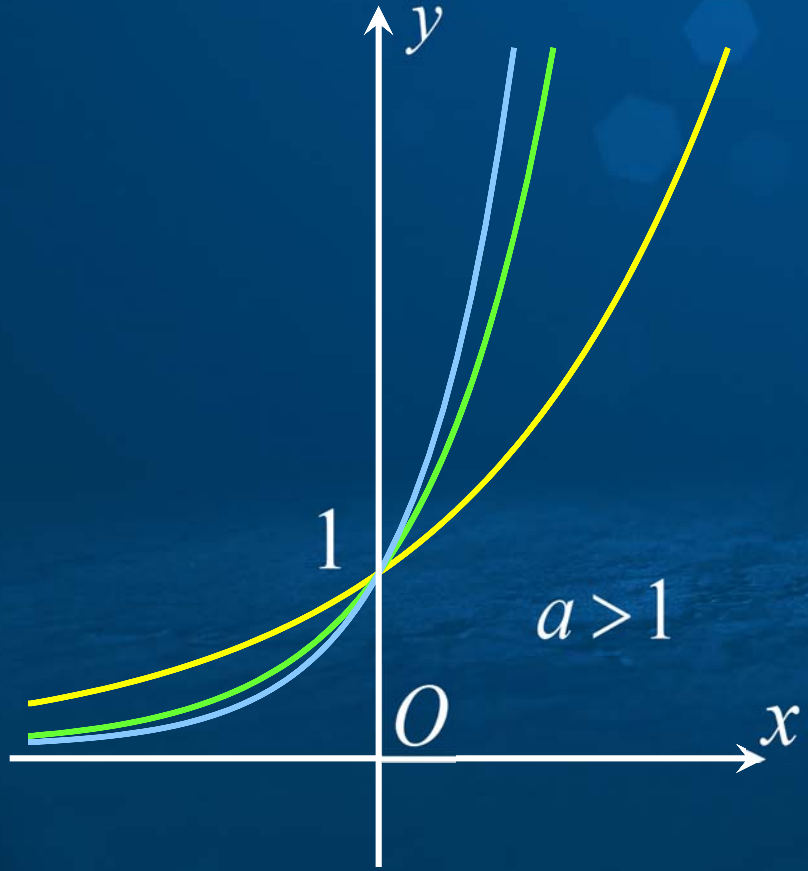
$$y=\frac{1}{x} \Longleftrightarrow y=\frac{1}{x}$$

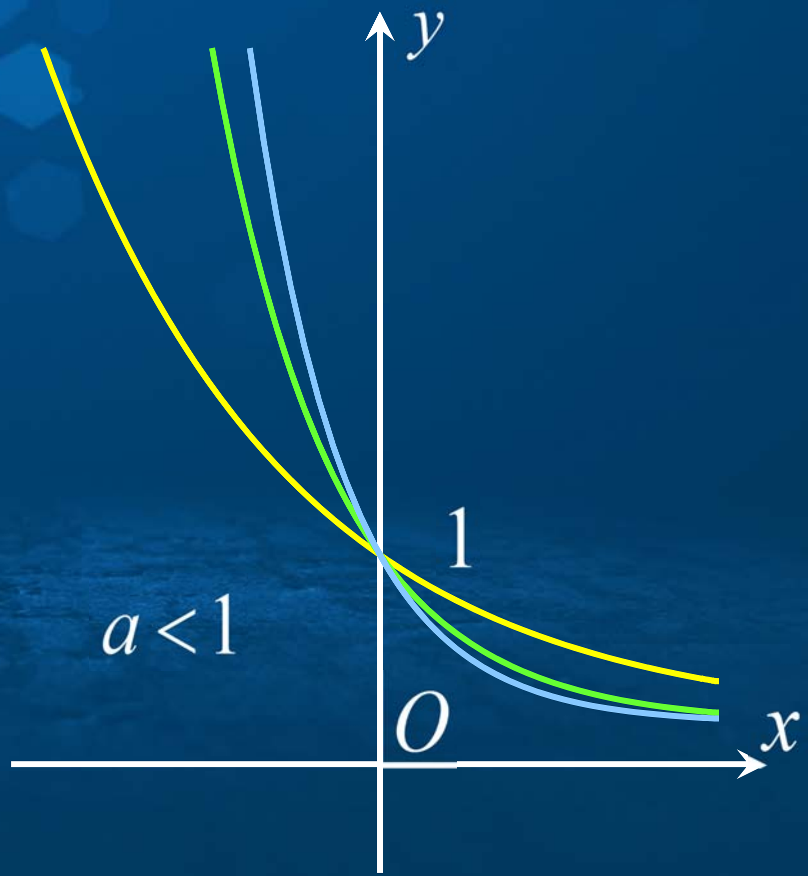
$$y=\frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow y=\frac{1}{\pm\sqrt{x}}$$



- **指数函数** $y = a^x$（a 为常数且 $a > 0, a \neq 1$）

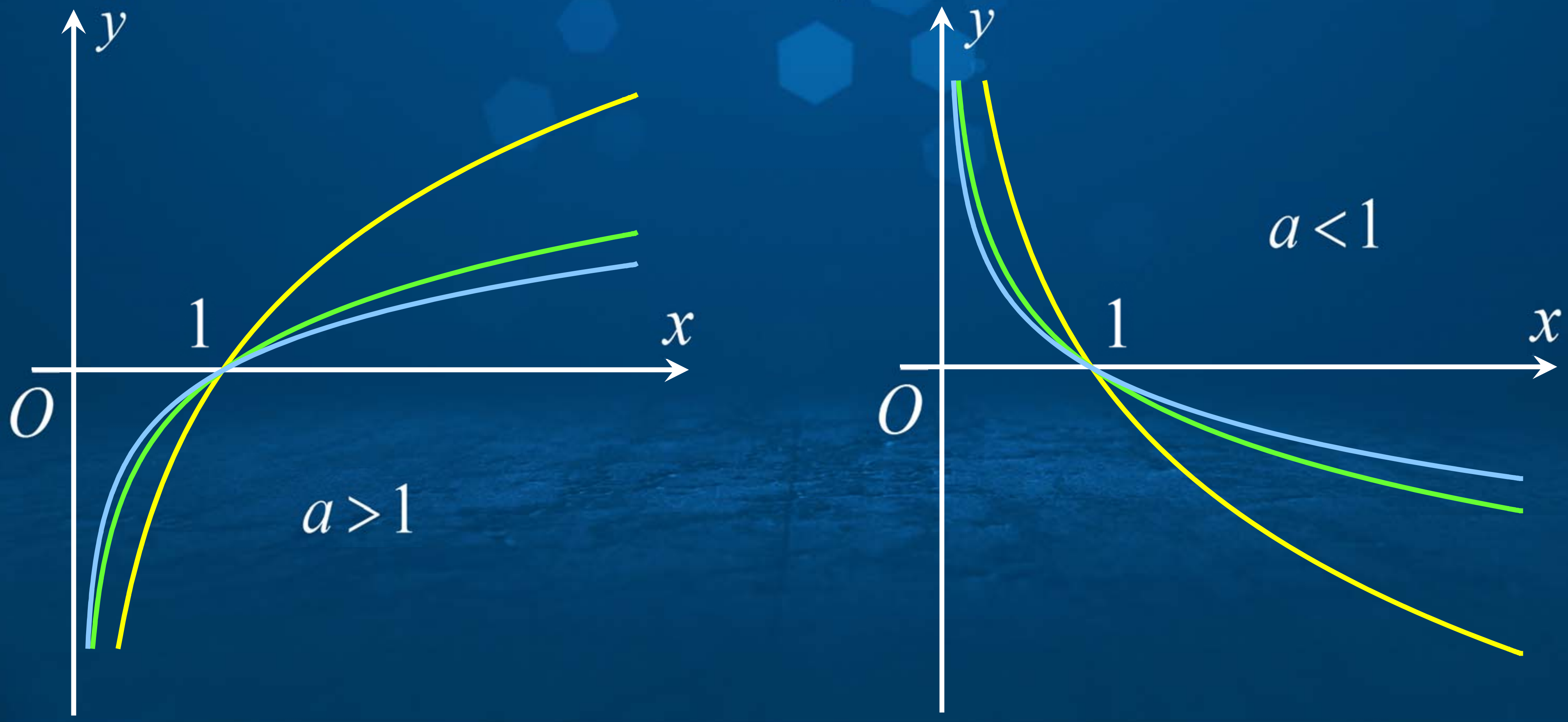
常用：自然指数函数 $y = e^x$





- 对数函数 $y=\log_a x$（ a 为常数且 $a>0,a\neq 1$ ）

常用：自然对数函数 $y=\log_e x=\ln x$



指数与对数运算法则

指数运算法则 若a, b为不等于1的正数，x, y 为任意实数，则有

$$1.\ a^{x+y} = a^x a^y \qquad 2.\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$3.\ (a^x)^y = a^{xy} \qquad 4.\ (ab)^x = a^x b^x$$

对数运算法则 若a 为不等于1的正数，x, y 为任意正数，r 为任意实数，则有

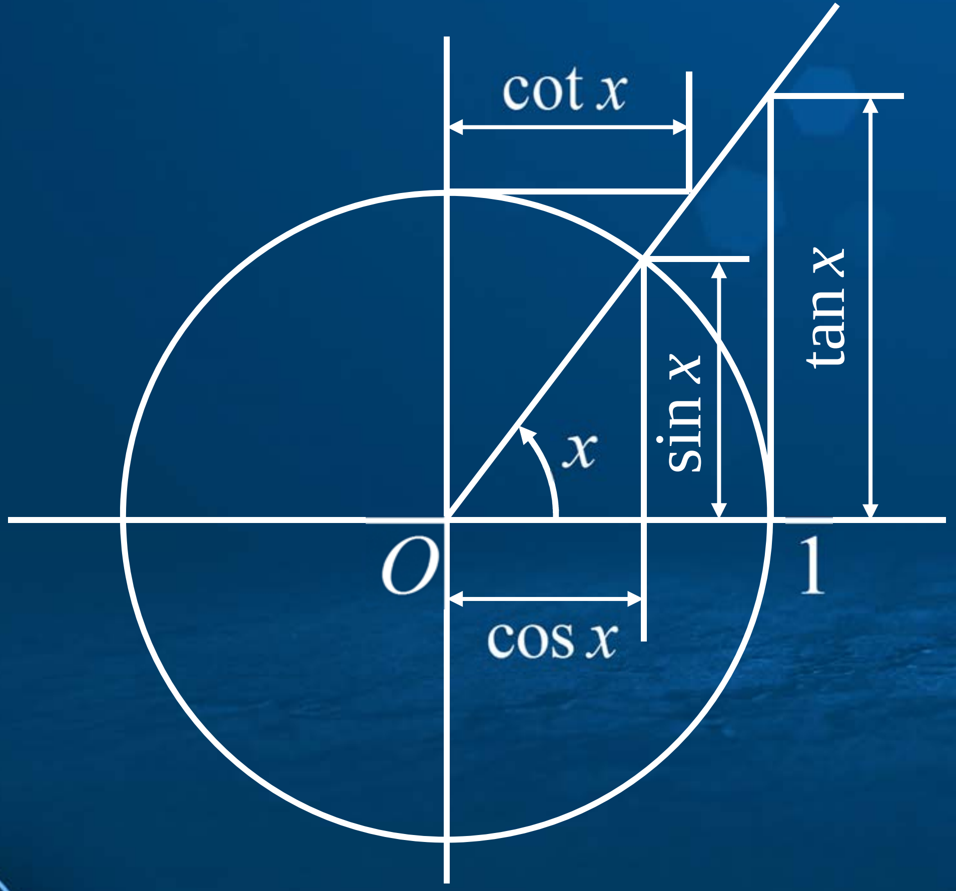
$$1.\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad 2.\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3.\ \log_a x^r = r\log_a x$$

“托对数的福，天文学家的寿命延长了一倍。”

开普勒

三角函数 $y=\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ （圆函数）

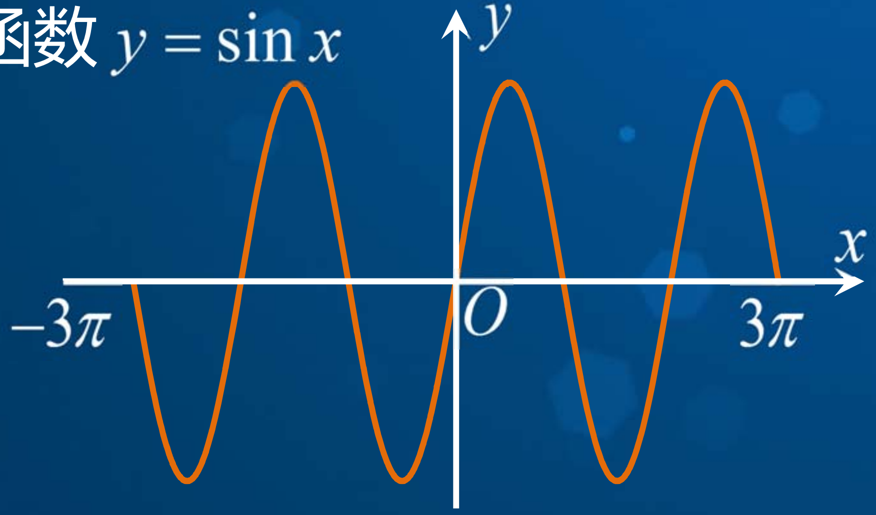


欧拉《无穷小分析引论》: 三角函数是一种函数线与圆半径的比值.

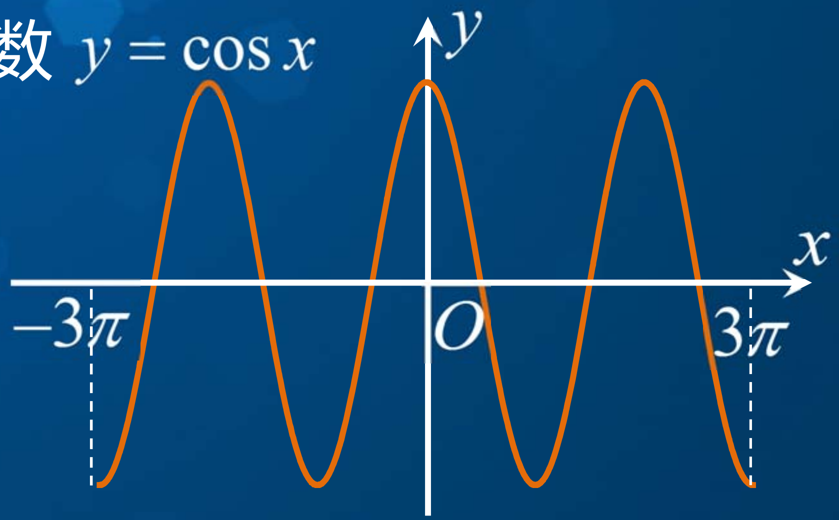
欧拉[瑞士]
（1707-1787）

正弦函数 $y = \sin x$ 的图像

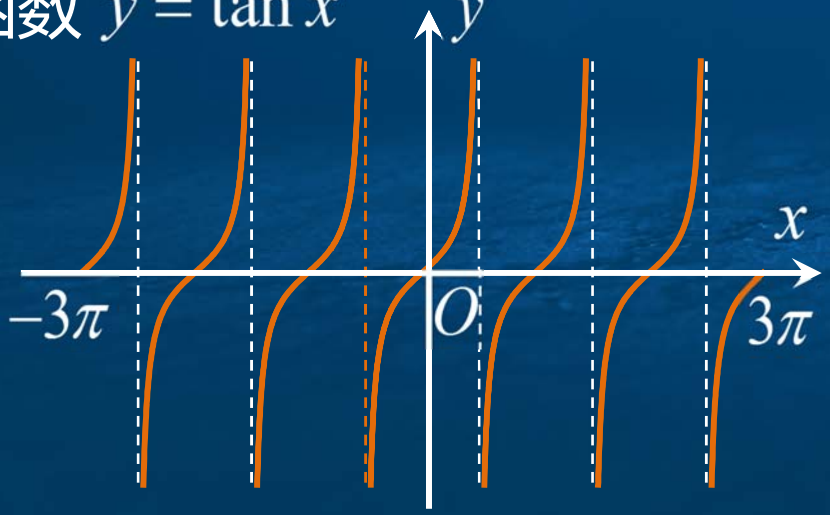
正弦函数 $y=\sin x$



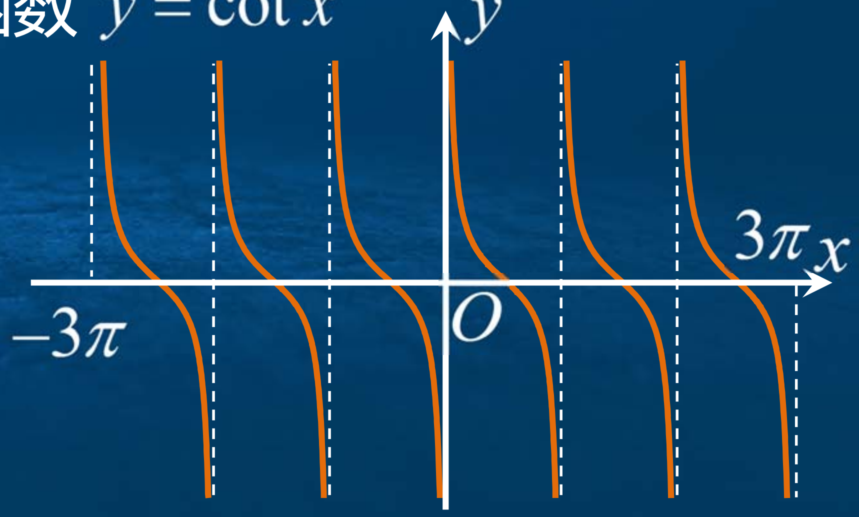
余弦函数 $y=\cos x$

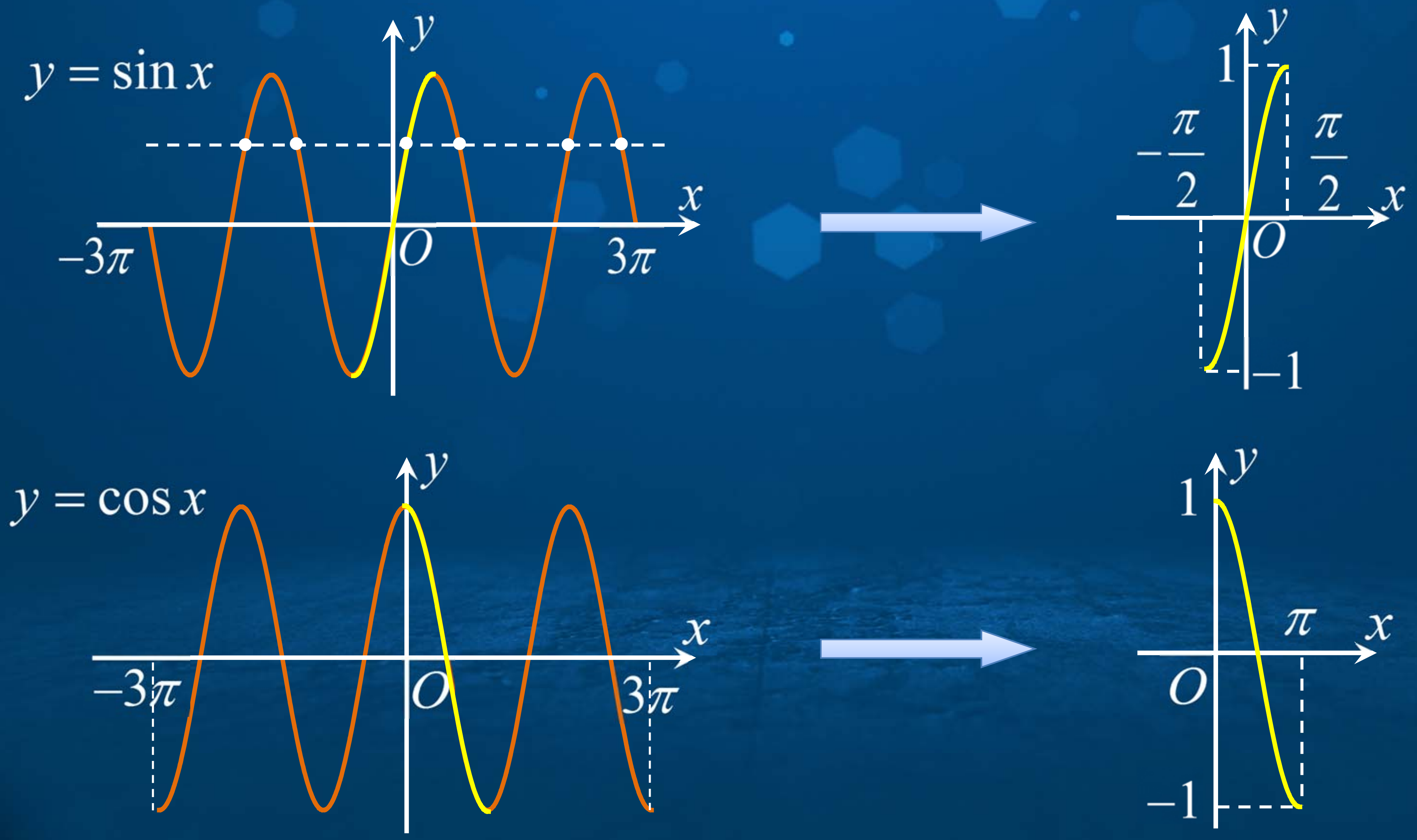


正切函数 $y=\tan x$

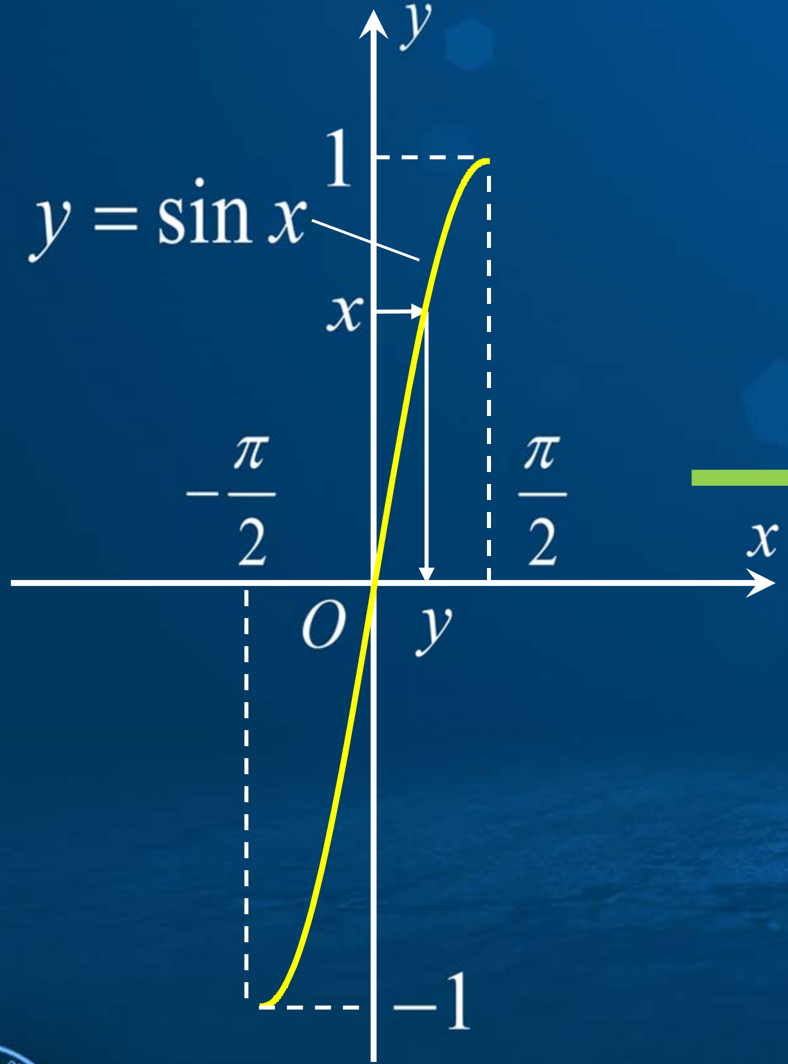


余切函数 $y=\cot x$





y = sin x
y
x
−3π
O
3π
y
1
−π/2
π/2
x
O
−1
y = cos x
y
x
−3π
O
3π
y
1
π
x
O
−1

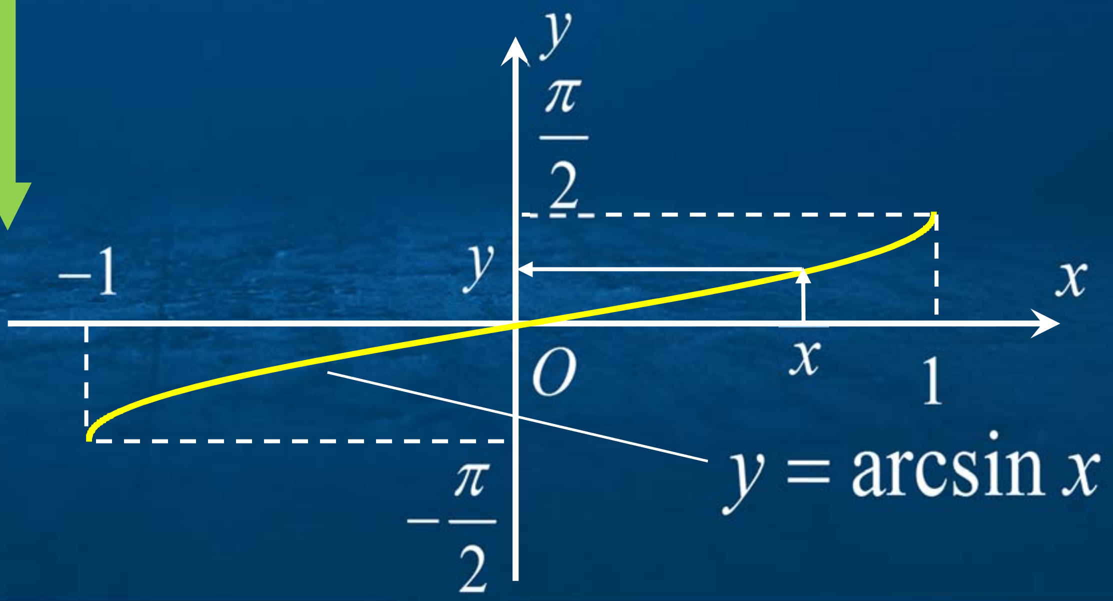


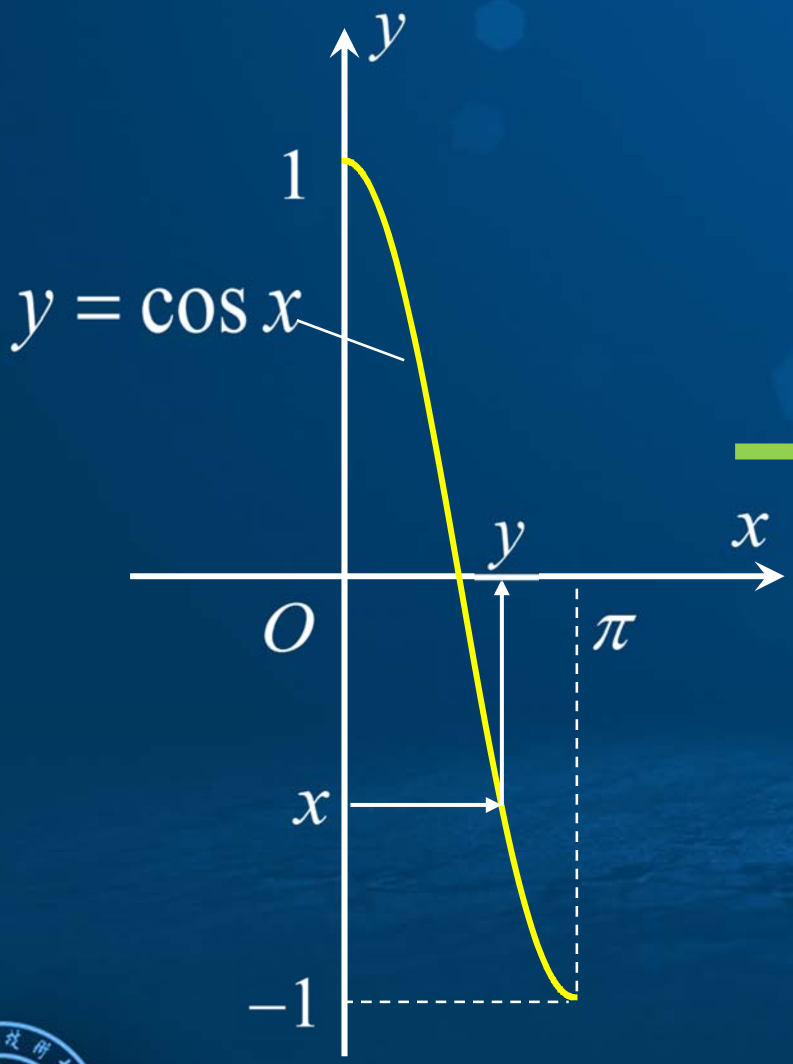
反正弦函数

$$x=\sin y \longleftrightarrow y=\arcsin x$$

定义域：$-1\le x\le 1$

值域：$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$



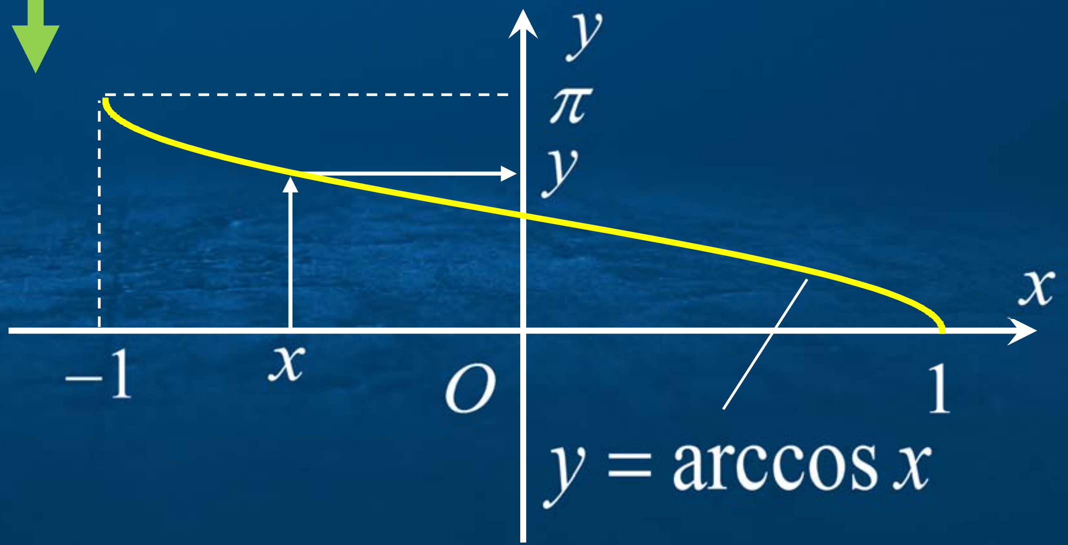


反余弦函数

$x=\cos y \longleftrightarrow y=\arccos x$

定义域：$-1\le x\le 1$

值域：$0\le y\le \pi$

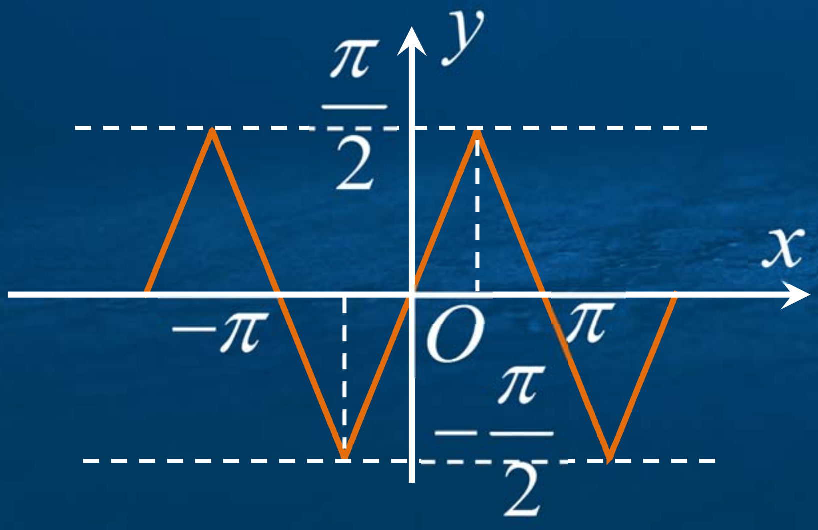


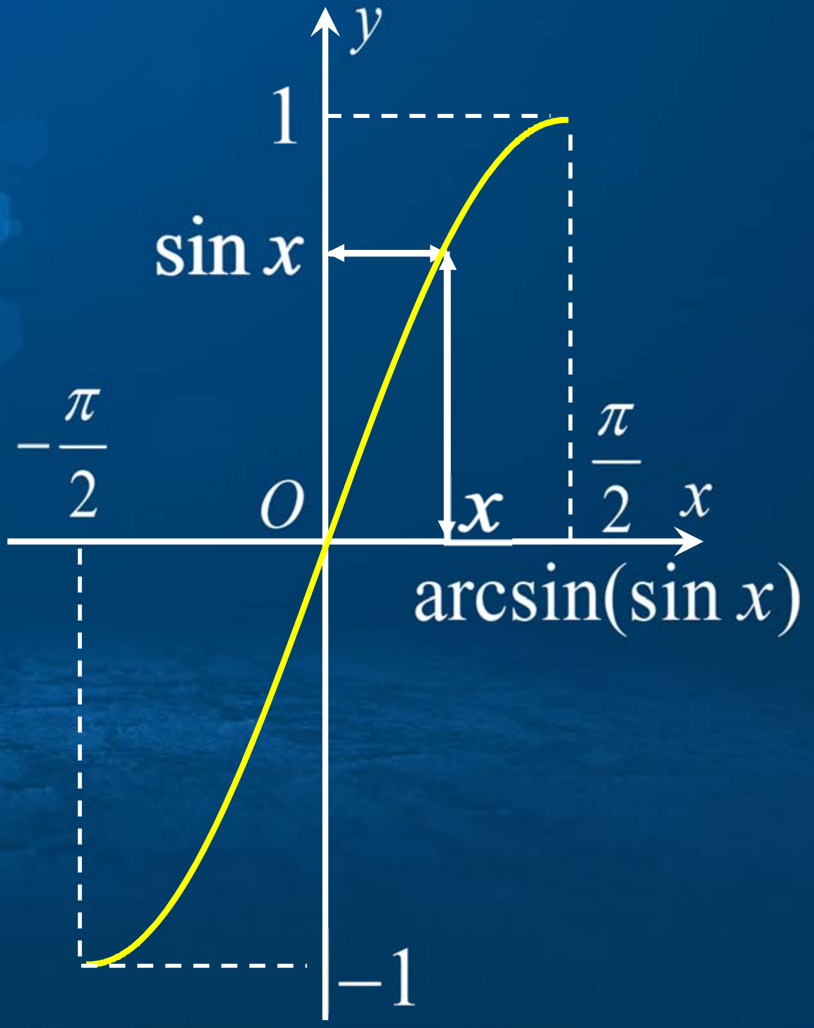
例1 三角函数函数与其反三角函数的复合

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (-1 \le x \le 1)$$

$$\arcsin(\sin x) = ?$$





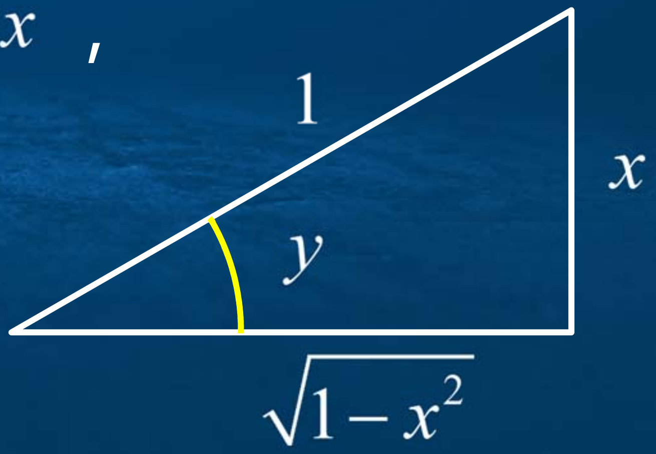
例2 化简 $\tan(\arcsin x)$，其中 $x \in (-1, 1)$.

【方法一】令 $\arcsin x = y$ ，则 $\sin y = x$ ，所以

$$\tan(\arcsin x) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

【方法二】 令 $\arcsin x = y$ ，则 $\sin y = x$ ，

$$\tan(\arcsin x) = \tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



定义1 由基本初等函数与常值函数经过有限次四则运算或复合运算得到的由一个统一的解析式子表示的函数称为**初等函数**.

多项式函数

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

有理函数

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

例如，$f(x)=\dfrac{x^4-20x^2}{x+\sqrt{1-x}}+(x^2-2)\sqrt[3]{x+3}$ 为初等函数

定义2 通过对多项式进行代数运算(四则运算与开方运算）所得到函数称为代数函数，非代数函数的的函数称为超越函数.

- 超越函数包含三角函数与反三角函数、指数函数与对数函数等.

定义3（双曲函数）

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

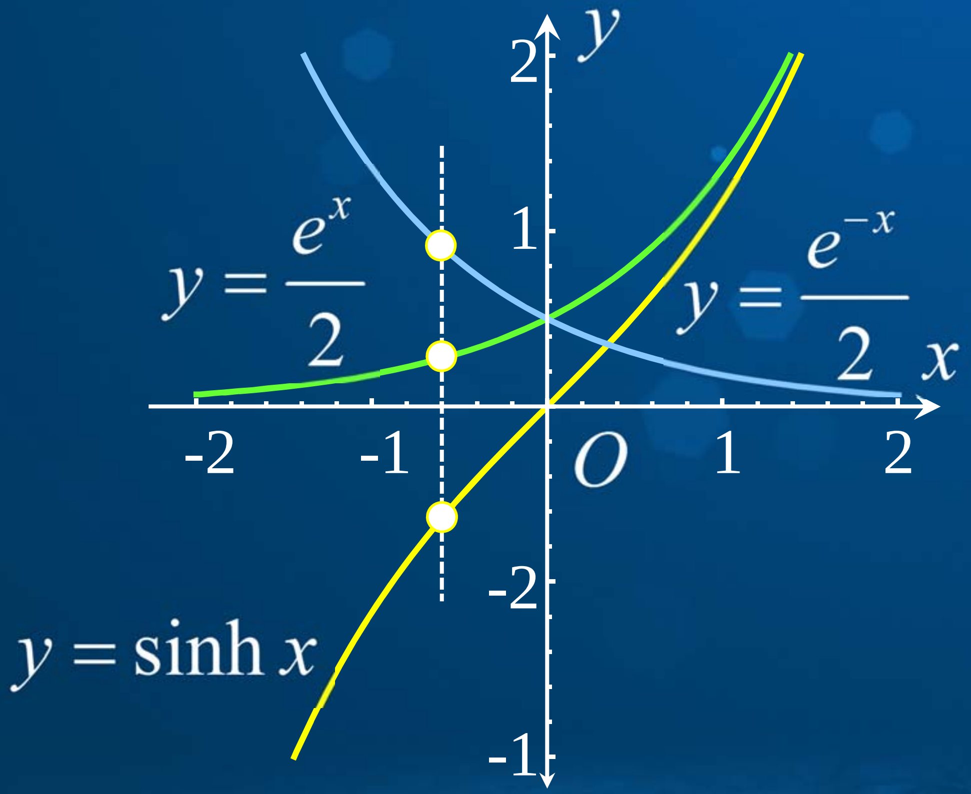
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

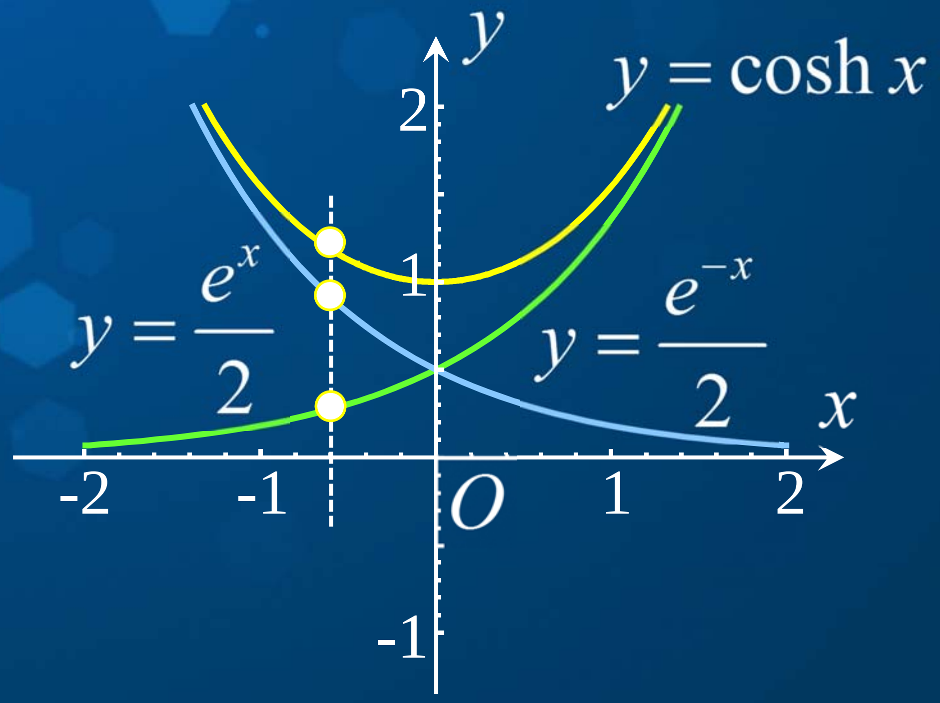
分别成为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切函数.

双曲恒等式

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$





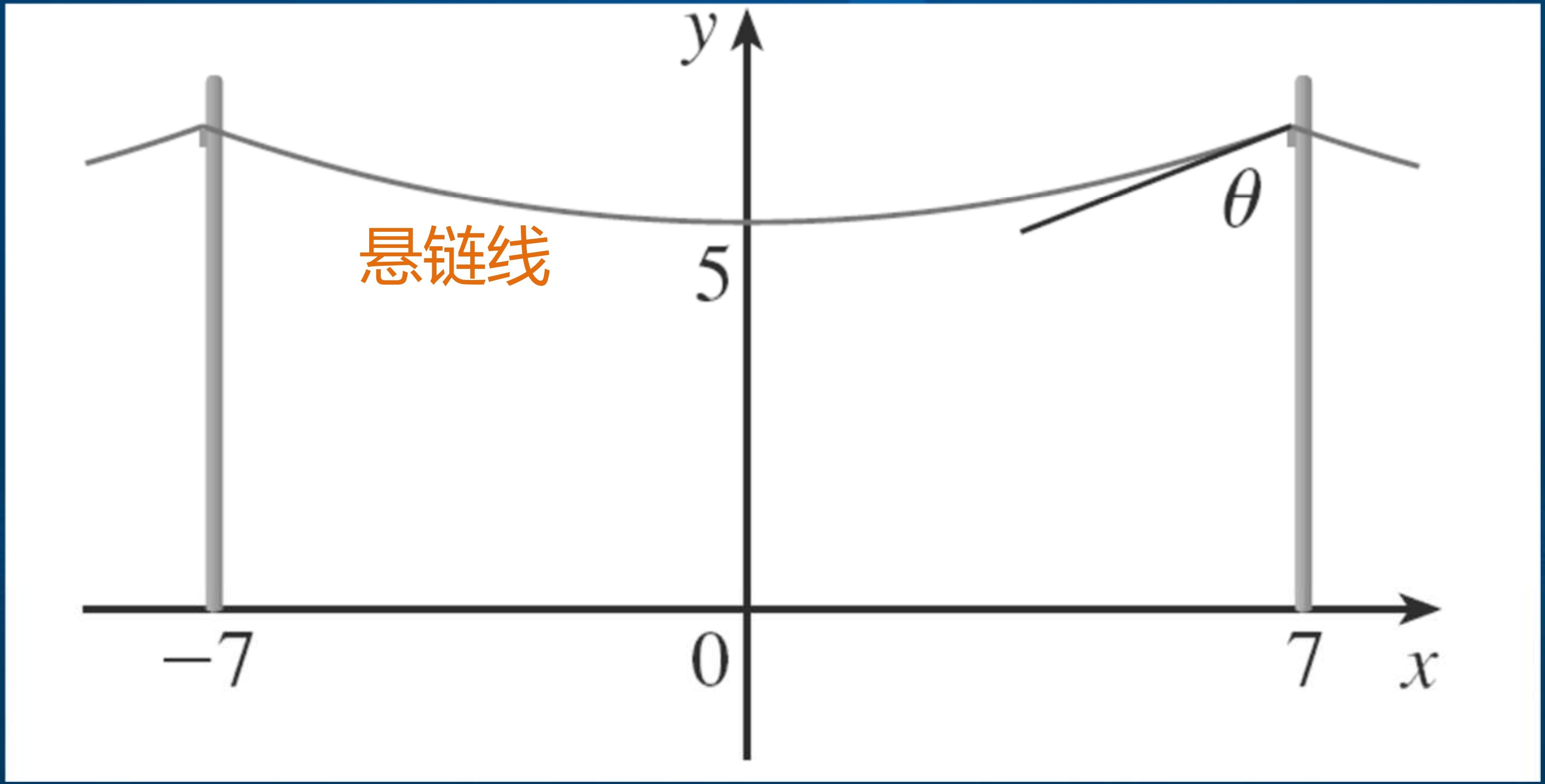
双曲正弦函数

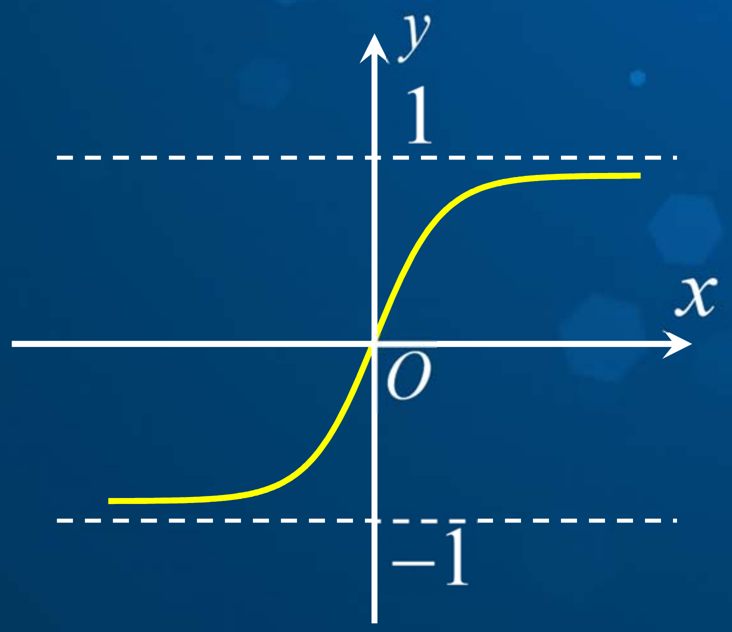
$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

双曲余弦函数

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

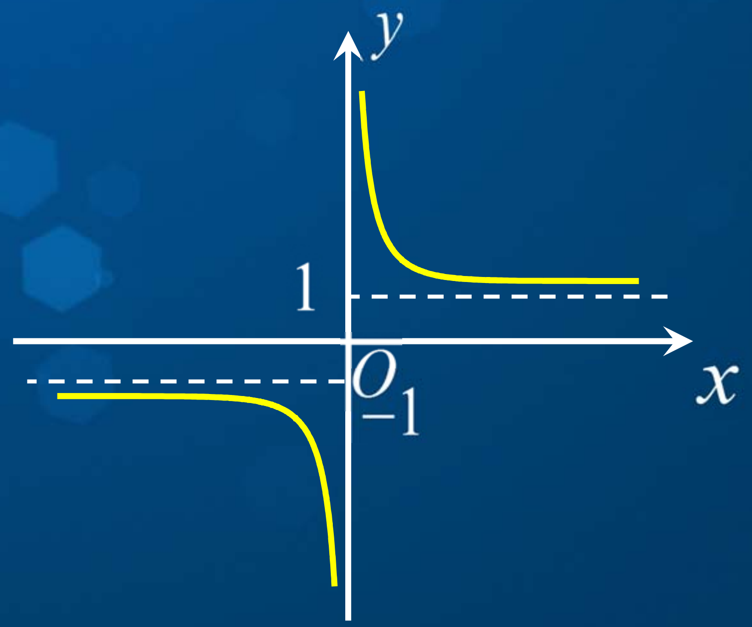
例3 画出函数 $y=20\cosh\dfrac{x}{20}-15$ 在区间 $[-7,7]$ 上的图形.





双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

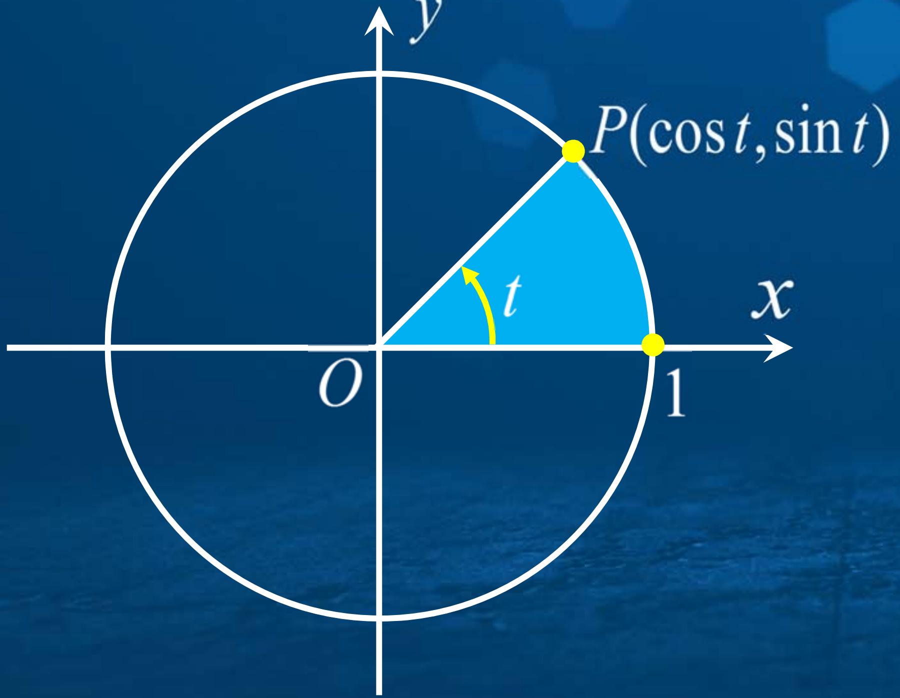


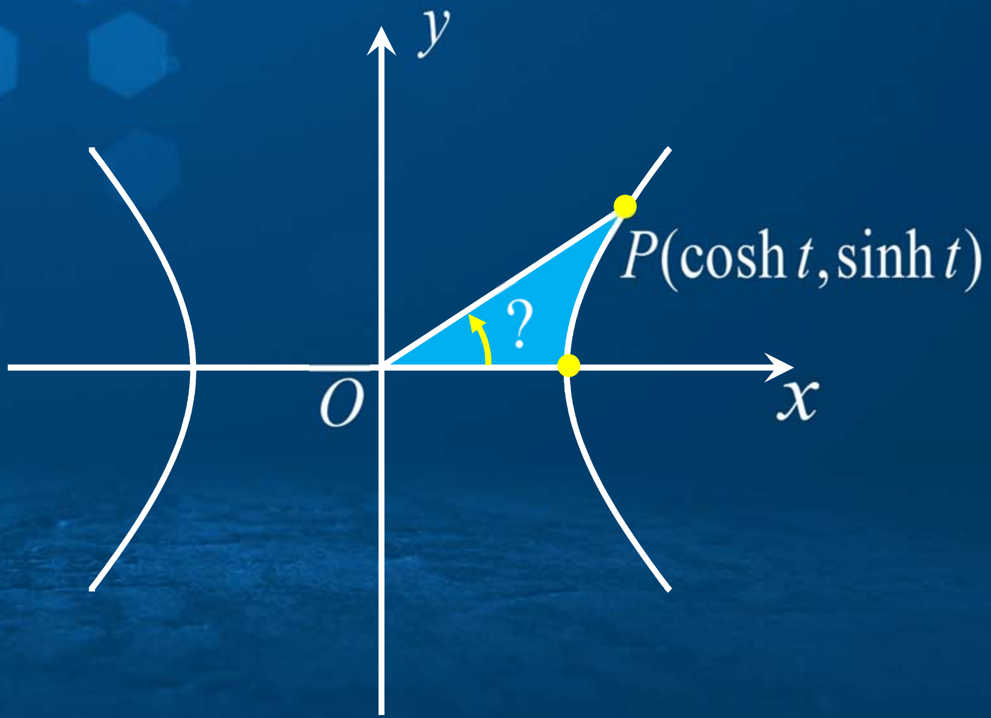
双曲余切函数

$$\tanh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sinh t \end{cases}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \longrightarrow x^2-y^2=1$$





共性：*t* 均为阴影部分扇形面积的二倍！

定义4 对于 $x \in \mathbb{R}$，称满足方程 $\sinh y = x$ 的 y 为 x 的反双曲正弦函数，记为

$$y = \operatorname{arcsinh} x.$$

反双曲正切函数 $y = \operatorname{arctanh} x \Longleftrightarrow \tanh y = x$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$