第4讲 函数的概念与性质

函数的概念起源于描述一个量依赖于另一个量的变化

- 球体积 V 与球半径 r 的的关系

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- 全世界人口数量与时间的关系

年份	1960	1970	1980	1990	2000
人口(百万)	3040	3710	4450	5280	6080

股票走势图

横轴表示开市的时间

纵轴表示股价（上图）与成交量（下图）

函数的概念

函数的例子

函数的运算

函数的简单特性

1. 变量

笛卡尔首先用字母来表示变动的数——变量

常量和变量是相对的，两者在一定条件下可以相互转化 .

常量通常用 a、b、c 表示，变量通常用 x、y、t 表示.

变量所在的集合

$$I=(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

$$D=\{x\mid x=a,b,c,d,\cdots,e\}$$

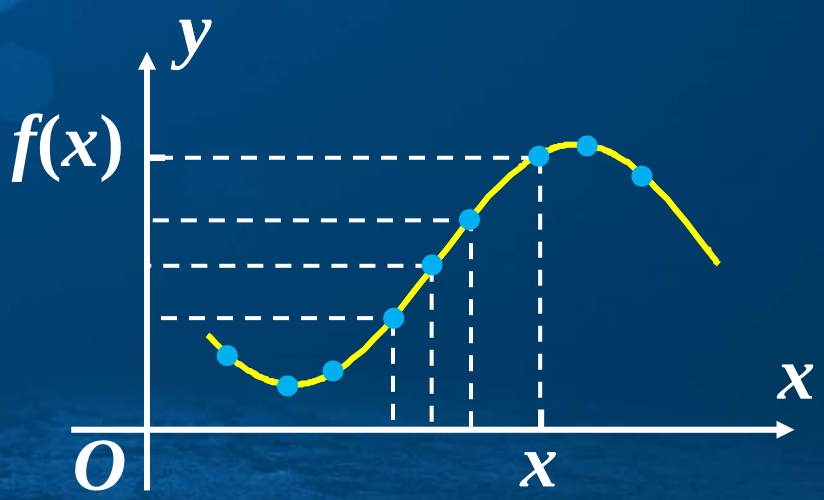
2. 函数的定义

定义1 设 D 是 $\mathbb{R}$ 中的非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的**一元函数**.

通常记作：$y = f(x),\ x \in D$

x 为自变量　　y 为因变量

D 为定义域



$R_f = \{ f(x) \mid x \in D \}$ —— 值域

$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$ —— 函数图形（或图像）

莱布尼兹：函数是变化和运动的“普通语言”

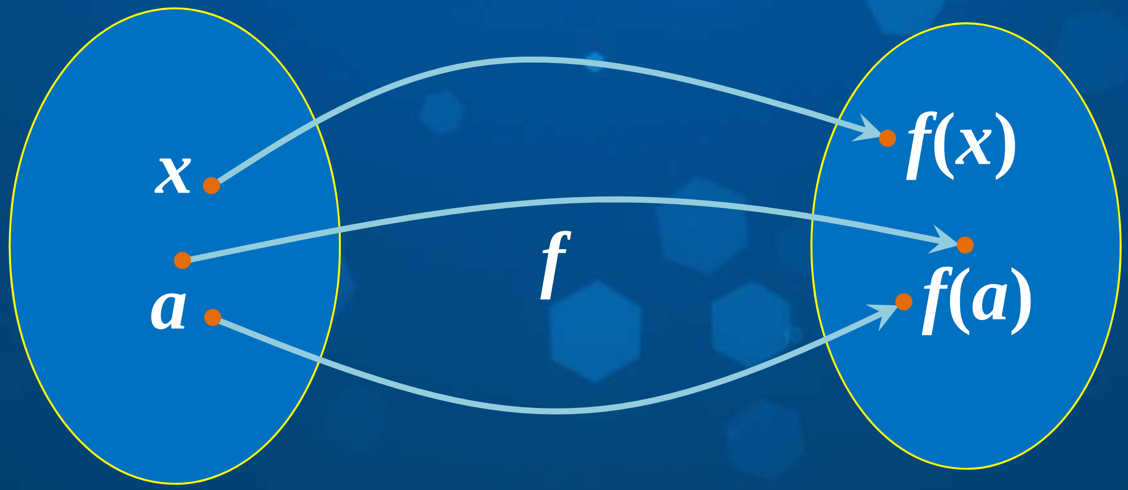
不变和静止的数学 → 变化和运动的数学

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

输入　　　　　　　　输出

函数 f 的机器图

$$-21 \longrightarrow \boxed{-21}^2+2\boxed{-21}+1 \longrightarrow 09$$



函数 f 的箭头图

注意： 1) 函数 $y=f(x), x\in D$ 由其定义域 D 与对应法则 f 唯一确定，与自变量、因变量以及函数的名称无关.

2) 两个函数相等是指它们的定义域与对应法则都相同，自然它们的值域也相同 .

3. 函数定义域的确定

自然定义域 函数表达式在实数域中有意义的所有自变量的集合

实际定义域 问题的实际背景所要求的自变量的取值范围

$A=\pi r^2$ 圆面积公式 实际定义域 $r>0$

$h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 自由落体公式 实际定义域 $t\geq 0$

自然定义域均为全体实数集合 $\mathbb{R}$

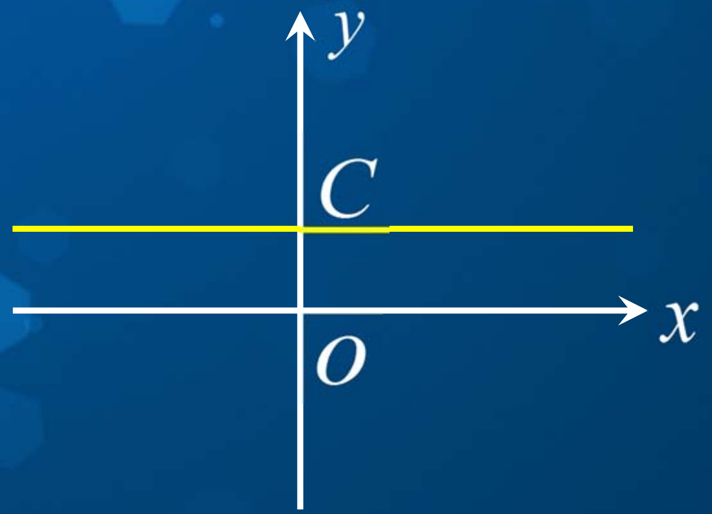
函数的表示方法

- 描述法 —— 通过语言描述
- 表格法 —— 通过数值表格表示
- 图形法 —— 通过图形表示
- 公式法 —— 通过精确公式表示

例1 常值函数 $y = C$

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

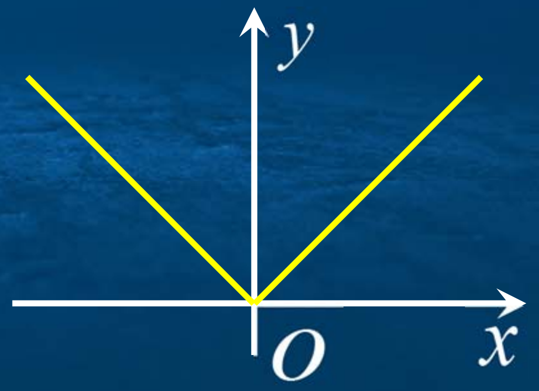
$$R_f = \{C\}$$



例2 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

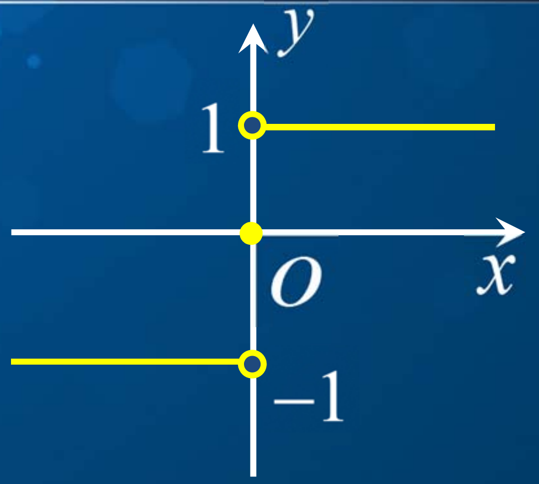
$$R_f = [0, +\infty)$$



例3 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0, \\ 0, x=0, \\ -1, x<0.\end{cases}$

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=\{-1,0,1\}$



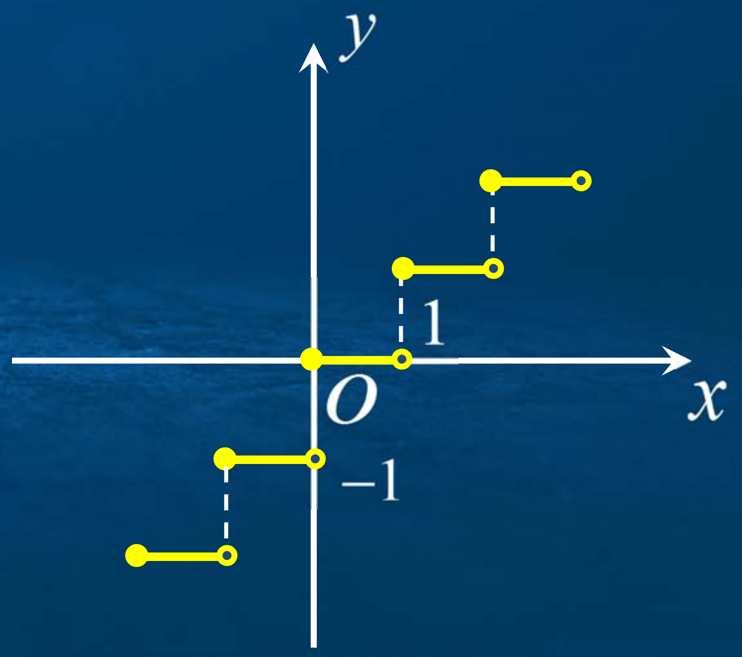
- 在不同区间或点处有不同表达式的函数称为**分段函数**

例4 取整函数 $y=[x]$

—— 不超过 x 的最大整数

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=\mathbb{Z}$

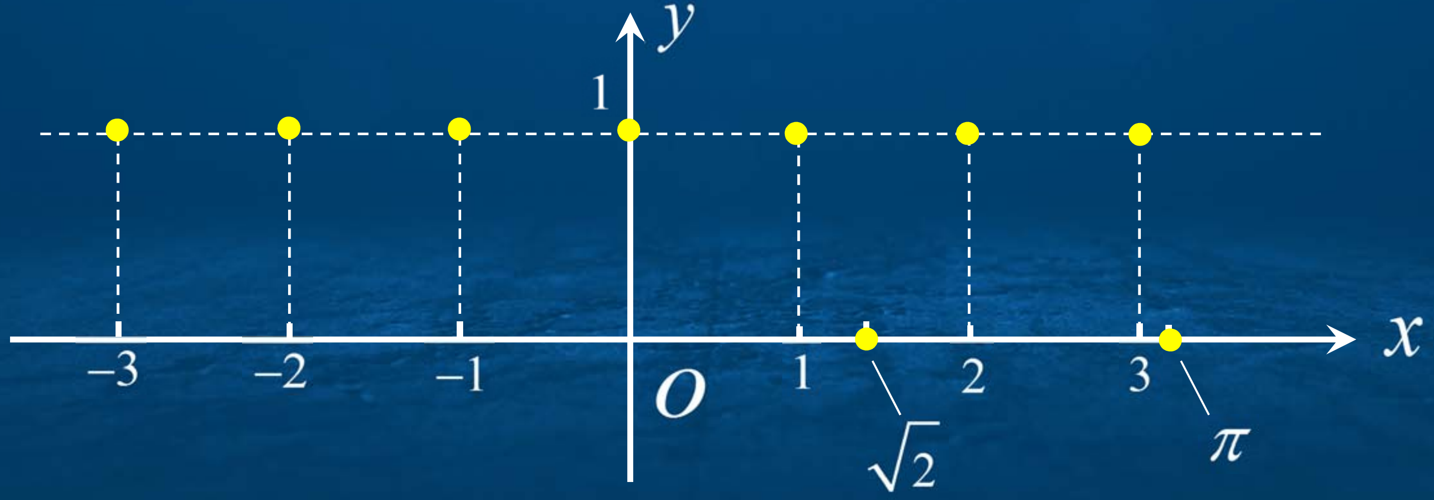


例5 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q},\\ 0, x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

不能画出该函数的完整图形

$D_f=(-\infty,+\infty)$

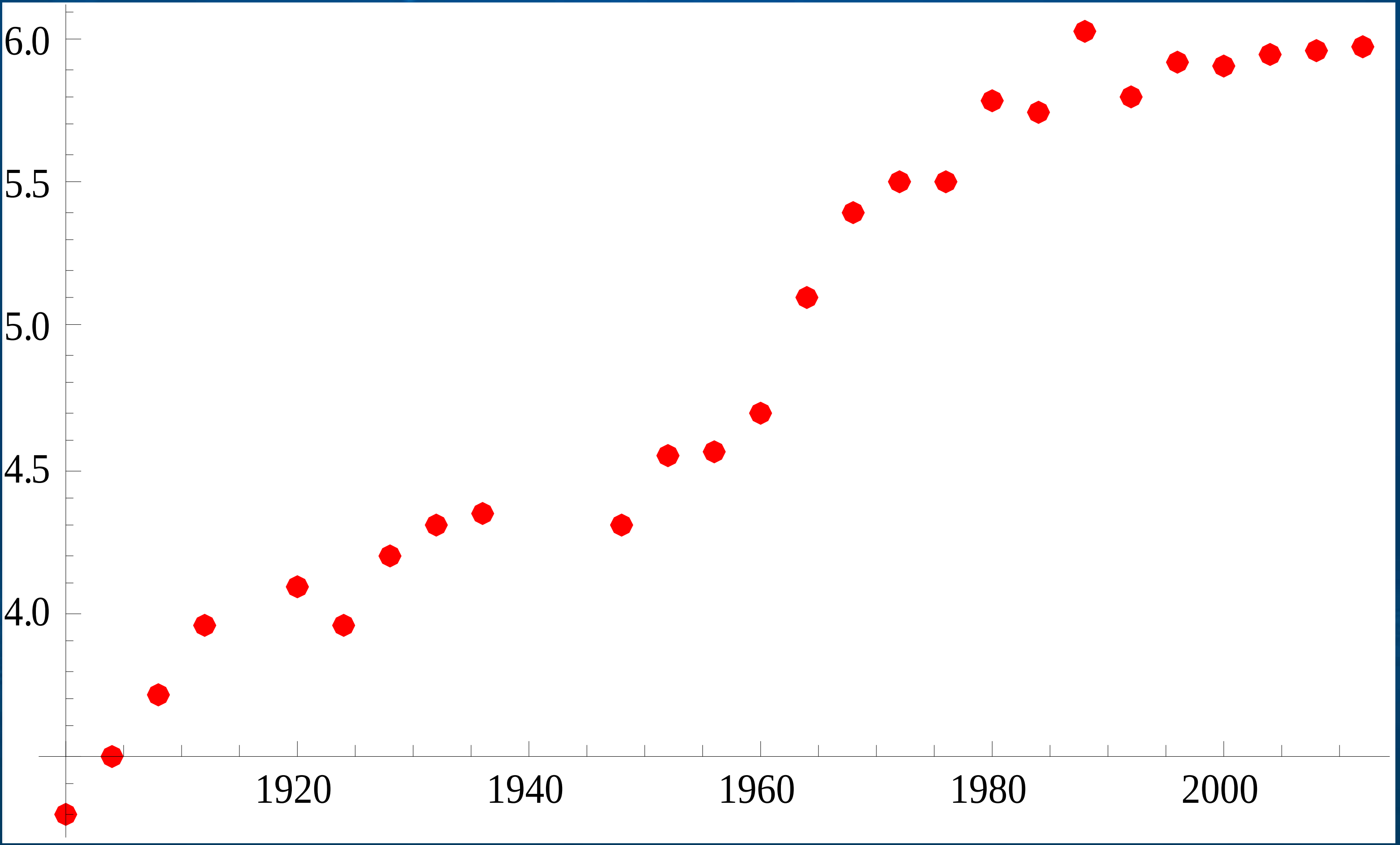
$R_f=\{0,1\}$



例6 历届(1900-2012)奥运会男子撑杆跳高成绩

年份 t	成绩 h (m)	年份 t	成绩 h (m)	年份 t	成绩 h (m)
1900	3.3	1948	4.3	1984	5.75
1904	3.5	1952	4.55	1988	6.03
1908	3.71	1956	4.56	1992	5.8
1912	3.95	1960	4.7	1996	5.92
1920	4.09	1964	5.1	2000	5.90
1924	3.95	1968	5.4	2004	5.95
1928	4.2	1972	5.5	2008	5.96
1932	4.31	1976	5.5	2012	5.97
1936	4.35	1980	5.78		

例6 历届(1900-2012)奥运会男子撑杆跳高成绩



1. 函数的四则运算

定义2 设有 $f(x)\,(x\in A)$ 和 $g(x)\,(x\in B)$，且 $A\bigcap B\neq\varnothing$ ，则定义函数的加法 $f+g$、乘法 $f\cdot g$ 与除法 f/g 如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \ x\in A\bigcap B$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in A\bigcap B$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ \ x\in A\bigcap B \text{ 且 } g(x)\neq 0$$

注意函数的定义域不能以运算后的形式来确定.

例7 设有函数 $f(x)=\sqrt{x-1}, g(x)=\sqrt{x-2}$ ，求

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

并指出它们的定义域 .

$$f(x)+g(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}, \quad x\in[2,\infty)$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}=\sqrt{x^2-3x+2}, \quad x\in[2,\infty)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad x\in(2,\infty)$$

2. 函数的复合运算

例如 （1） $y=\sin u, u=2+x \xrightarrow{\text{代入}} y=\sin(2+x)$

（2） $y=u^2, u=2+x \xrightarrow{\text{代入}} y=(2+x)^2$

一般地，$y=g(u), u=f(x) \xrightarrow{\text{代入}} y=g[f(x)]$ ← 复合运算

函数复合过程就是代入的过程，复合函数又称为函数的函数

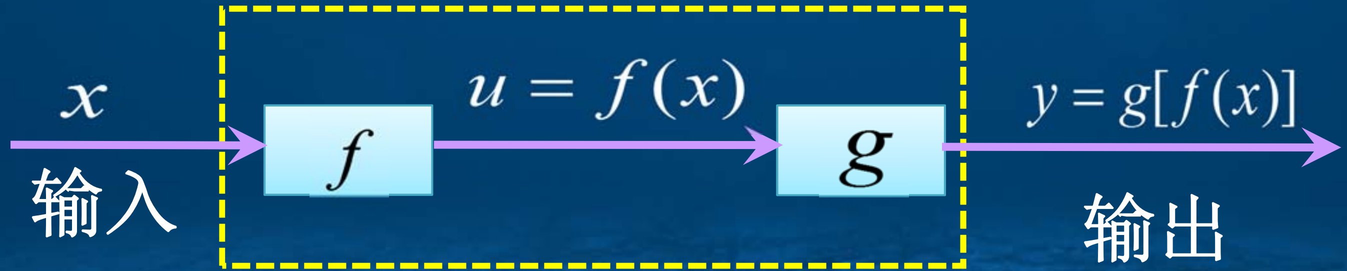
自变量 — x → u → y — 因变量

u — 中间变量

定义3 设有两函数 $f:A\to B_1$ 与 $g:B\to C$ ，且满足 $B_1\subset B$ ，函数 $h:A\to C$ 定义为：对任意 $x\in A$ ，有

$$h(x)=g(f(x)).$$

称 h 为 f 与 g 的**复合函数**，记作：$h=g\circ f$.



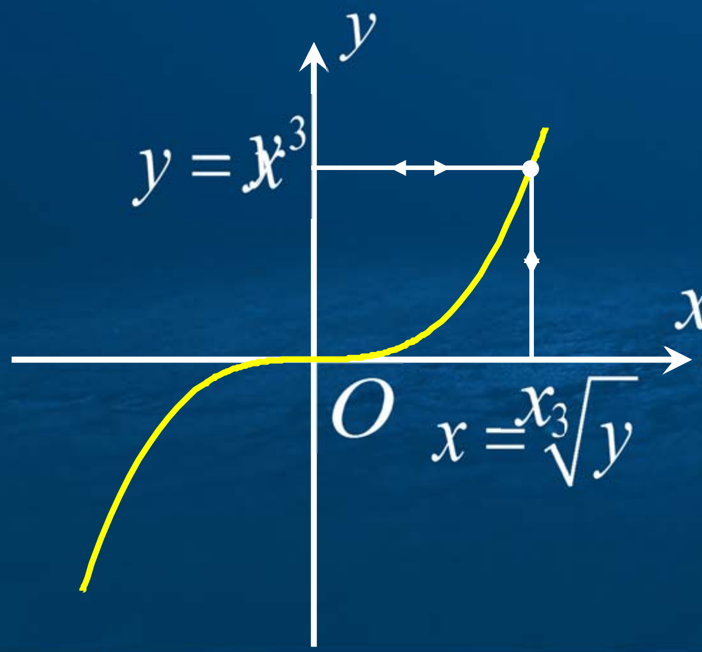
复合运算

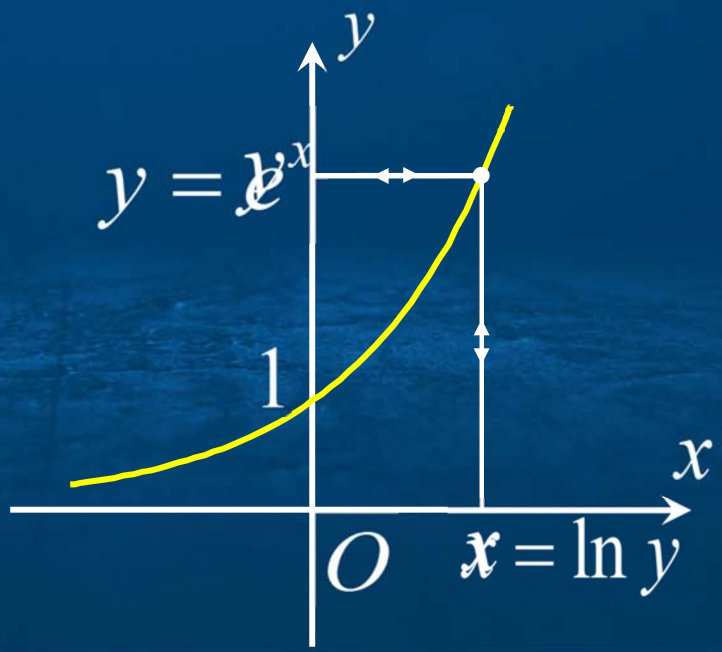
$$u=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}\Longleftrightarrow u=\sqrt{1+u_1}\ ,u_1=\sqrt{2+u_2},u_2=\sqrt{x}$$

3. 函数的求逆运算

引例 (1) $y = x^3 \xrightarrow{\text{用 } y \text{ 表示 } x} x = \sqrt[3]{y}$

(2) $y = e^x \xrightarrow{\text{用 } y \text{ 表示 } x} x = \ln y$





定义4 设函数 $f:A\to B$ 作为映射是双射，那么对任何 B 中的 y 存在且唯一存在一个 A 中的 x 使得 $f(x)=y$. 称这个对应法则给出的从 B 到 A 的函数为 f 的反函数，记为 $f^{-1}:B\to A$.

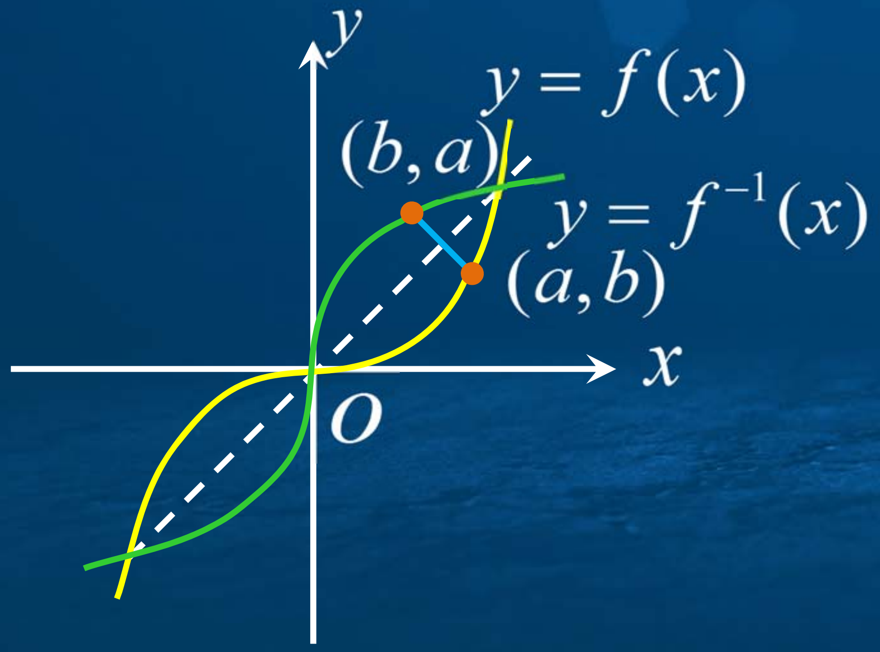
函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

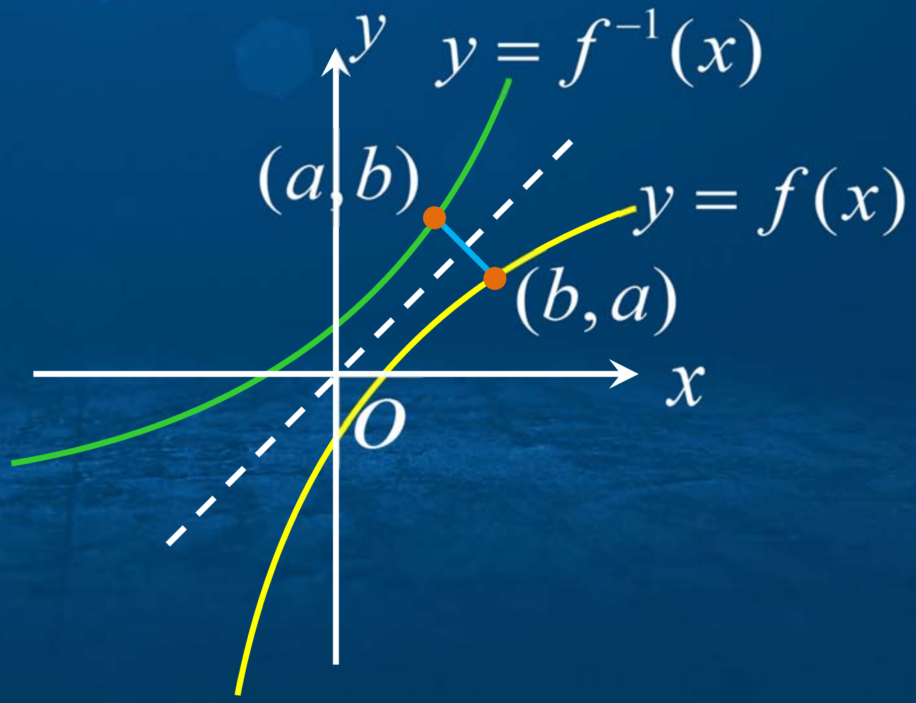
习惯上，将函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$

性质 设 $f^{-1}:B\to A$ 为 $f:A\to B$ 的反函数，则

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,\forall x\in A \qquad (f\circ f^{-1})(y)=y,\forall y\in B$$

几何上，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 但 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一个 .





1. 有界性

定义5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，数集 $I\subset D$.

如果存在 M ，使得对于任意的 $x\in I$ ，有 $f(x)\le M$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界.

如果存在 m ，使得对于任意的 $x\in I$ ，有 $f(x)\ge m$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界.

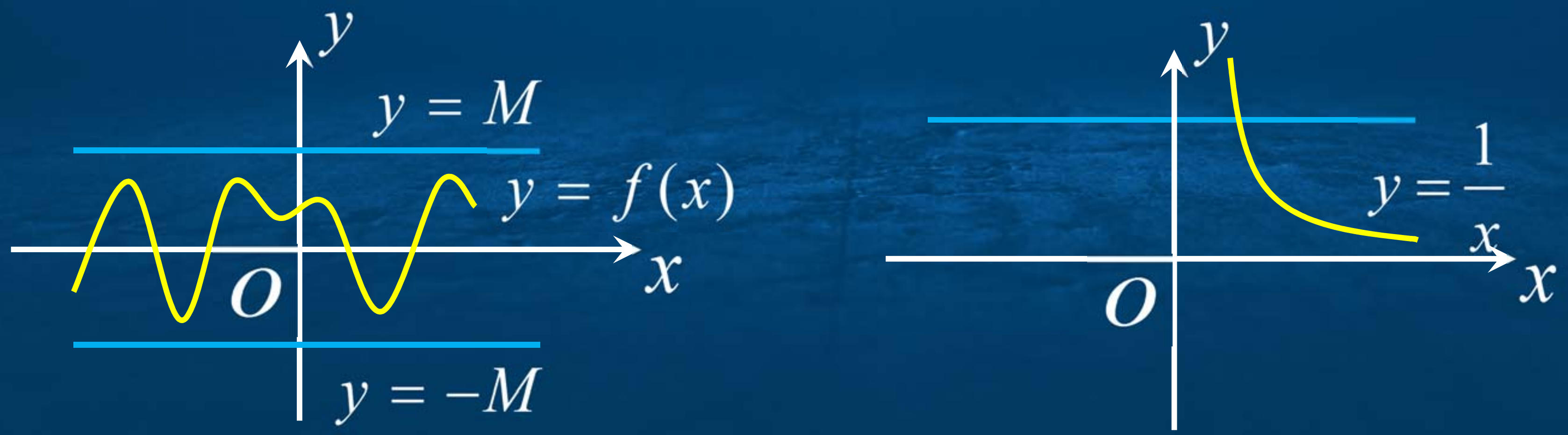
如果存在 $M>0$, 使得对于任意的 $x\in I$ ，有 $|f(x)|\le M$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

性质 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界 .

- 函数有界与无界的几何特点

有界函数的图形介于某两条水平直线之间 .

无界函数的图形不能介于任何两条水平直线之间.



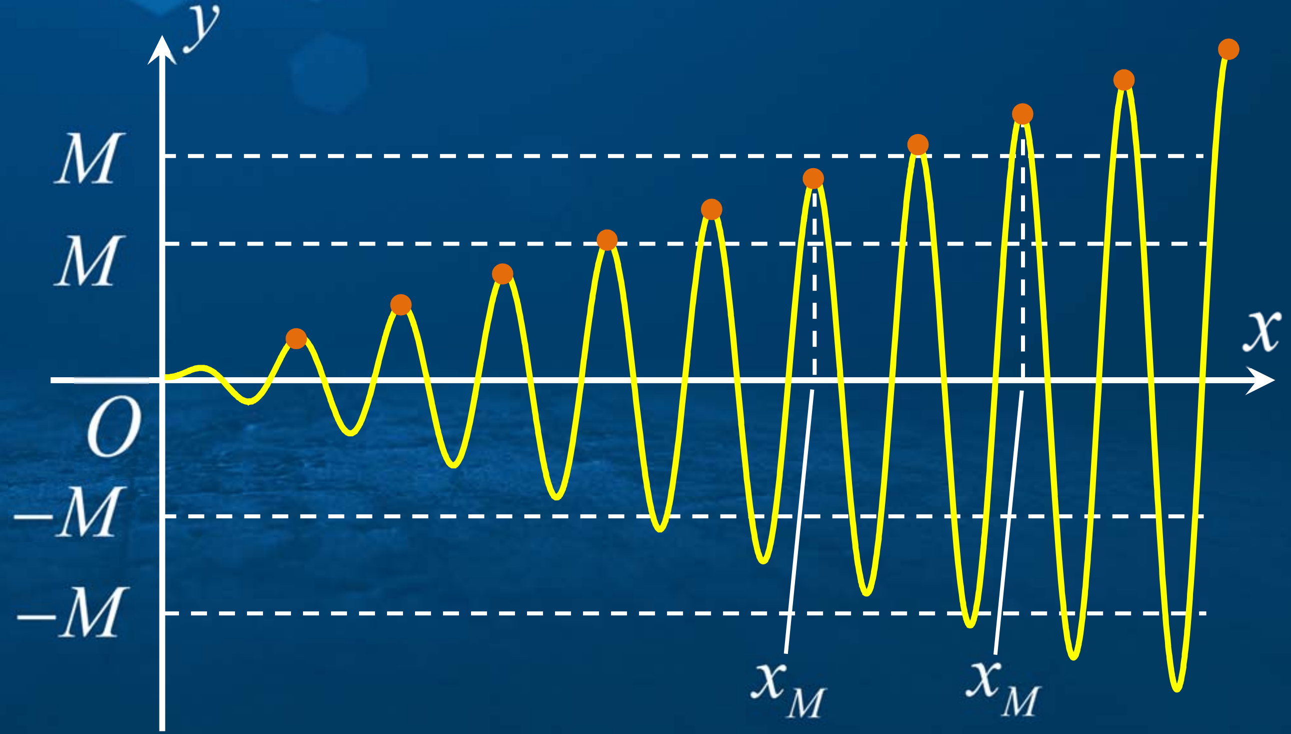
例8 研究函数 $f(x)=x\sin x$ 在定义域上的有界性.

$$f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{Z})$$

- 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无界

对于任意的正数M，存在 $x_M\in\mathbb{R}$，使得

$$|f(x_M)|>M.$$



2. 单调性

定义6 设函数 $f(x)$ 在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上有定义，若对 I 中任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad \left(f(x_1) < f(x_2)\right)$$

$$f(x_1) \ge f(x_2) \quad \left(f(x_1) > f(x_2)\right)$$

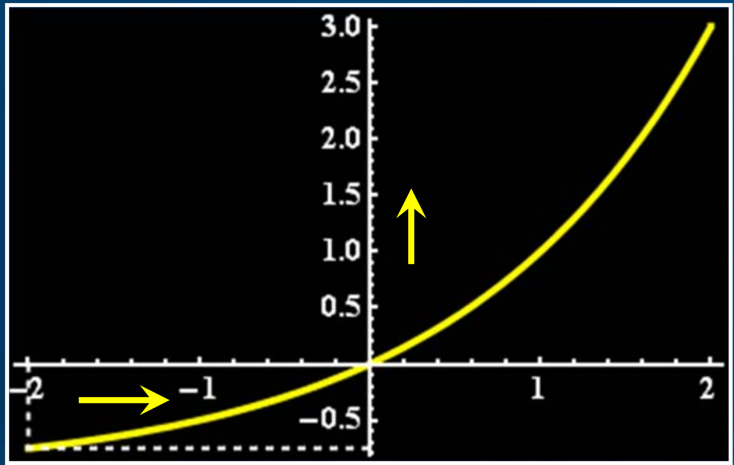
则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（严格单调增加）.

单调减少（严格单调减少）.

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数 .

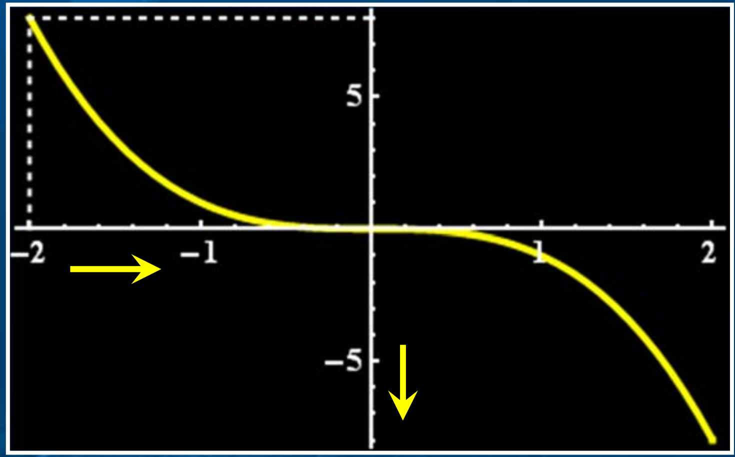
单调函数的几何特征

严格单调增加



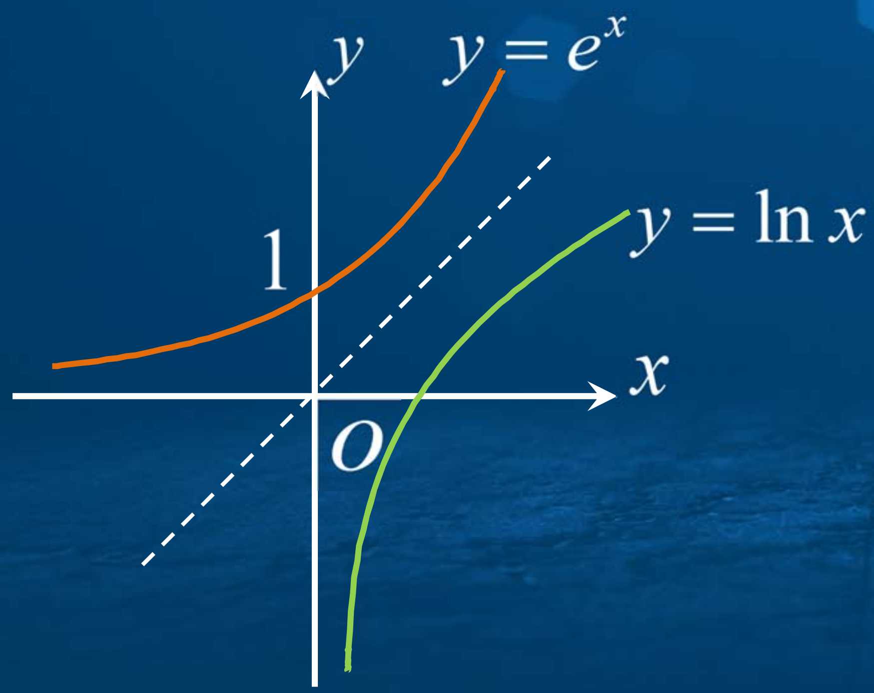
y 的值随 x 增大而增大

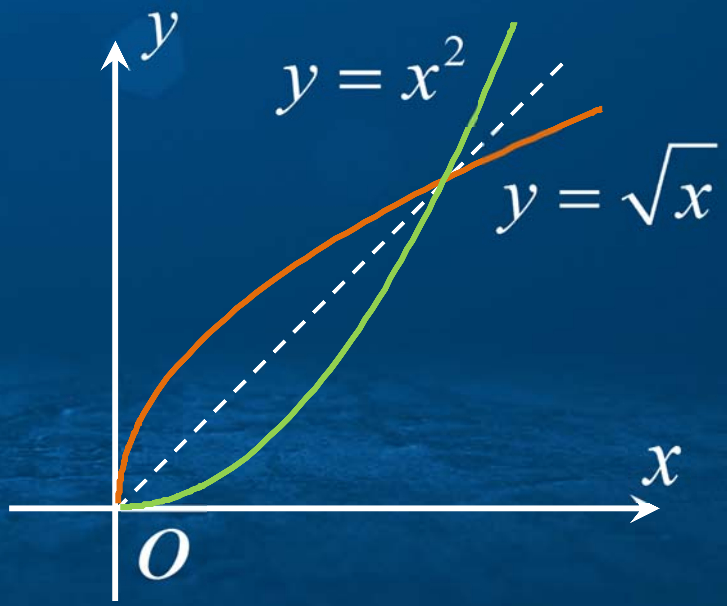
严格单调减少



y 的值随 x 增大反而减少

性质 严格单调增加（减少）的函数一定存反函数，且其反函数也是严格单调增加(减少).





3. 奇偶性

定义7 设函数 $f(x)$ 在区间 $I=(-a,a)$ (或 $[-a,a]$) 上有定义，若对于 I 中的任意 x ，恒有

$$f(-x)=f(x) \quad (\; f(-x)=-f(x) \;)$$

则称为区间 I 上的偶函数 (奇函数) .

- 奇函数的代数和为奇函数
- 偶函数与奇函数的乘积为奇函数

例9 证明狄利克雷函数 $y=D(x)$ 为偶函数 .

4. 周期性

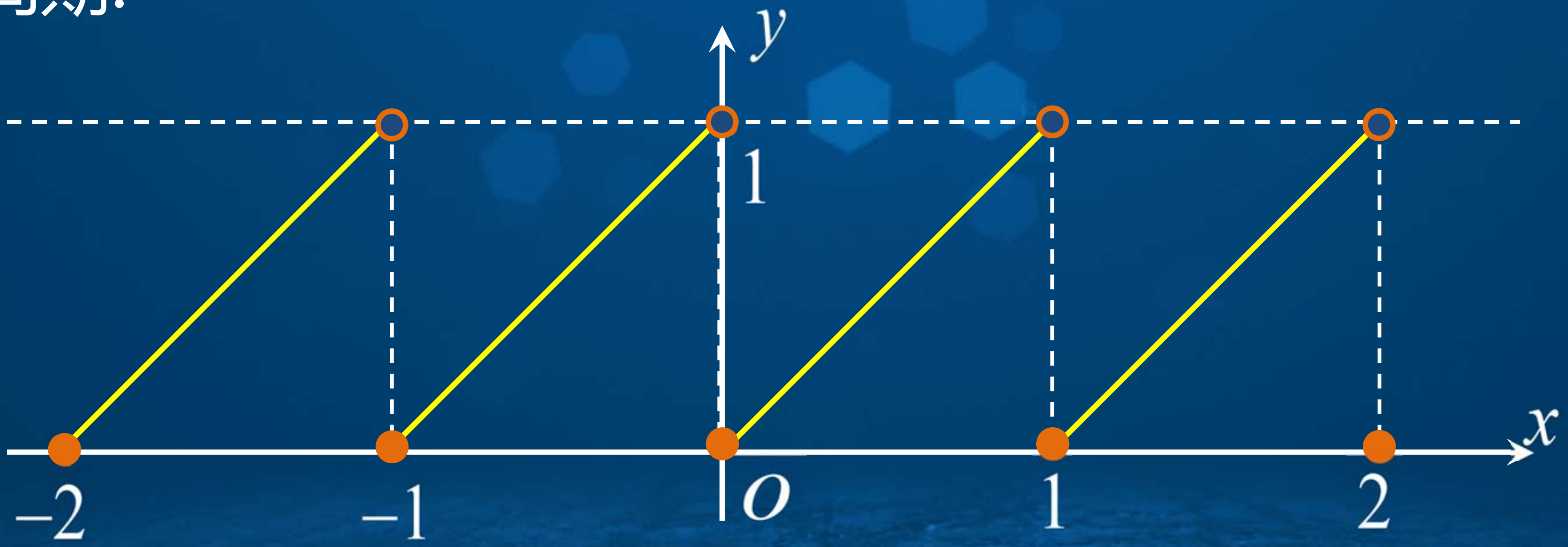
定义8 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，若存在正常数 T 使得对于任意 x ，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数.

- 如果 T 是 $f(x)$ 的周期， $nT\ (n\in\mathbb{N})$ 也为 $f(x)$ 的周期，并有 $f(x\pm nT)=f(x)$.
- 在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中，如果存在最小的正数 T_0, 则称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期，或基本周期.

例10 证明函数 $f(x)=x-[x]$ 为周期函数，且$T=1$是它的最小正周期.



- 几何特点：周期函数的图形具有“平移复制”特点