常微分方程

敖鸥

2021 年 11 月 16 日

目录

1 一阶微分方程的初等解法

1.1 变量分离方程与变量变换

1.1.1 变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{1}$$

的方程, 称为变量分离方程, 这里 $f(x), \varphi(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.
如果 $\varphi(y) \neq 0$, 我们可将 (1) 改写成

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

这样, 变量就“分离”开来了. 两边积分, 得到

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c \tag{2}$$

1.1.2 可化为变量分离方程的类型

(1) 形如

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}) \tag{3}$$

的方程, 称为齐次微分方程, 这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数.
作变量变换

$$u = \frac{y}{x}, \tag{4}$$

即 $y = ux$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u. \tag{5}$$

将 (4),(5) 代入 (3), 则原方程变为

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u),$$

整理后, 得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}. \tag{6}$$

方程 (6) 是一个变量分离方程. 可按 1.1.1 的方法求解, 然后代回原来的变量, 便得 (3) 的解.

(2) 形如

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{7}$$

的方程也可经变量变换化为变量分离方程, 这里 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为常数.

有如下三种情形:

1.$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$(常数) 情形.

这是方程化为

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

有通解

$$y = kx + c.\text{(其中 } c \text{ 为任意常数)}$$

2.$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \neq \frac{c_1}{c_2}$ 情形

令 $u = a_2x + b_2y$, 这时有

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2\frac{ku + c_1}{u + c_2}$$

是分离变量方程.

3.$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ 情形

如果方程 (7) 中 c_1, c_2 不全为零, 方程右端分子、分母都是 x, y 的一次多项式, 因此

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

代表 Oxy 平面上两条相交的直线, 设交点为 (α, β). 若令

$$\begin{cases} X = x - \alpha, \\ Y = y - \beta, \end{cases} \tag{9}$$

则 (8) 化为

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y = 0, \\ a_2X + b_2Y = 0, \end{cases}$$

从而 (7) 变为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} = g(\frac{Y}{X}) \tag{10}$$

因此, 求解上述变量分离方程, 最后代回原变量即可的原方程 (7) 的解.

1.2 线性微分方程与常数变易法

一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x), \tag{11}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数. 若 $Q(x) = 0$, (11) 变为

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y, \tag{12}$$

(12) 称为一阶线性微分方程. 若 $Q(x) \neq 0$,(11) 称为一阶非齐次线性微分方程.

(12) 是变量分离方程, 它的通解为

$$y = ce^{\int P(x)dx}, \tag{13}$$

这里 c 是任意常数.
将常数 c 变易为 x 的待定函数 $c(x)$. 令

$$y = c(x)e^{\int P(x)dx} \tag{14}$$

微分之, 得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx} + c(x)P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{15}$$

以 (14),(15) 代入 (11), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}\\&=P(x)c(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x),\end{aligned}$$

即

$$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx},$$

积分后得到

$$c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{c},$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数. 将上式代入 (14), 得到方程 (11) 的通解

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{c}) \tag{16}$$

伯努利微分方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{17}$$

这里 $P(x),Q(x)$为x 的连续函数,$n\neq 0,1$ 是常量. 对于 $y\neq 0$, 用 y^{-n} 乘 (17) 两边, 得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x), \tag{18}$$

引入变量变换

$$z=y^{1-n} \tag{19}$$

从而

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

将 (19),(20) 代入 (18), 得到

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x) \tag{21}$$

这是线性微分方程, 可按上面的方法求得它的通解, 然后代回原来的变量, 便得到 (17) 的通解. 此外, 当 $n>0$ 时, 方程还有解 $y=0$.

1.3 恰当微分方程与积分因子

1.3.1 恰当微分方程

形如

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{22}$$

这里假设 $M(x,y), N(x,y)$ 在某矩形域内是 x, y 的连续函数, 且具有连续的一阶偏导数. 如果方程 (22) 的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即

$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy &= du(x,y) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \end{aligned} \tag{23}$$

则称 (22) 为恰当微分方程.
易知 (22) 的通解就是

$$u(x,y) = c, \tag{24}$$

这里 c 是任意常数

$$\begin{aligned} &ydx + xdy = d(xy), \\ &\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y}), \\ &\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d(\frac{y}{x}), \\ &\frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|), \\ &\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d(\arctan\frac{x}{y}), \\ &\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|). \end{aligned} \tag{25}$$

1.3.2 积分因子

如果存在连续的可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

为一恰当微分方程, 即存在函数 v, 使

$$\mu M dx + \mu N dy \equiv dv, \tag{26}$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程 (22) 的积分因子.
这时 $v(x,y)=c$ 是 (26) 的通解, 因而也就是 (22) 的通解.
方程 (22) 有只与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x), \tag{27}$$

故方程 (22) 有一个积分因子

$$\mu = e^{\int \psi(x)dx}. \tag{28}$$

方程 (22) 有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(x), \tag{29}$$

故方程 (22) 有一个积分因子

$$\mu = e^{\int \varphi(y)dy}. \tag{30}$$

1.4 一阶隐式微分方程与参数表示

有如下四种类型:

$$(1)\quad y=f(x,y'); \qquad (2)\quad x=f(y,y');$$

$$(3)\quad F(x,y')=0; \qquad (4)\quad F(y,y')=0.$$

1.4.1 可以解出 y 或 (x) 的方程