导数部分

导数概念

引例:

> 直线运动的速度:$v=\lim_{t\to t_0)}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$
>
> 曲线的切线问题(斜率):$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
>
> 都归为极限

定义:这里的$x-x_0$和$f(x)-f(x_0)$都是函数$f(x)$的自变量的增量Δx和函数的增量Δy:

$$\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x)-f(x_0),\\ \text{因此}x\to x_0\text{相当于}\Delta x\to 0,\text{故}:\\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

函数在一点处的导数:

设函数$y=f(x)$在点x_0处的某个邻域内有定义,当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时,相应的因变量取得增量$\Delta y=f(x)-f(x_0)$;如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之比在$\Delta x\to 0$时极限存在,那么称函数$y=f(x)$在$x_0$处可导,并称这个极限为$y=f(x)$在$x_0$处的导数,记为:$f'(x_0)$即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

也可记作$y'\mid_{x=x_0},\frac{dy}{dx}\mid_{x=x_0},\frac{df(x)}{dx}\mid_{x=x_0}.$

函数在$f(x)$在点x_0处可导有时也可说成$f(x)$在点x_0具有导数或者导数存在.

> 函数的变化率:导数就是函数变化率这一概念的精确描述.:因变量增量与自变量增量之比,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.是因变量$y$在以$x$和$x_0+\Delta x$为端点的区间上的平均变化率,而导数$f'(x_0)$则是因变量$y$在点$x_0$处的变化率,它反映了因变量随自变量的变换而变化的快慢程度.

如果极限不存在,就是说函数在$y=f(x)$在点x_0处不可导,如果不可导的原因是由于$\Delta x\to 0$是比$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$,为了方便起见,也往往说$y=f(x)$在点$x_0$处的导数为无穷大.

导函数:

如果函数$f(x)$在开区间I内的每一个点都可导,那么就称函数$f(x)$在开区间I内可导,这时任意一个$x\in I$都对应这$f(x)$的一个确定的导数值,这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数$y=f(x)$的导函数,记作:$y',f'(x),\frac{dy}{dx},\text{或}\frac{df(x)}{dx}.$

$$\text{把}x_0\text{换成}x\text{即可}:\\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ \text{或者}:f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

> 在以上两式中,虽然x可以在区间I内的任何数值,但在极限过程中,x是常量,$\Delta x,h$是变量.
>
> 显然,函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是导函数$f'(x)$在点$x=x_0$的函数值$f'(x_0)=f'(x_0)\mid_{x=x_0}.$

> 导函数$f'(x)$简称导数,而$f'(x_0)$是$f'(x)$在x_0处的导数,或者导数$f'(x)$在x_0处的值.

求导数举例:

$$\begin{gathered}
f(x)=C, f'(x)=0 \\
f(x)=x^n(n\in N_+), f'(x)=\begin{cases}1, & n=1 \\ nx^{n-1}, & n>1\end{cases} \\
f(x)=x^\mu(\mu\in R), f'(x)=\mu x^{\mu-1} \\
f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x \\
f(x)=a^x(a>0, a\neq 1), f'(x)=a^x\ln a \\
f(x)=e^x, f'(x)=e^x \\
f(x)=\log_a x(a>0, a\neq 1), f'(x)=\frac{1}{x\ln a} \\
f(x)=\ln x, f'(x)=\frac{1}{x}.
\end{gathered}$$

单侧导数:

> 根据函数$f(x_0)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$的定义,
>
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> 导数是一个极限,而极限存在的充分必要条件是,左右极限都存在且相等,
>
> $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{及}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> 因此$f'(x_0)$存在即$f(x_0)$在点x_0处可导的充分必要条件是左右极限都存在且相等,这两个极限分别称为函数$f(x)$在点x_0处的左导数和右导数,记作:$f'_-(x_0)$及$f'_+(x_0)$,即
>
> $$\begin{aligned}
> f'_-(x)&=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
> f'_+(x)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
> \end{aligned}$$
>
> 现在可以说函数$f(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是左导数和右导数$f'_-(x_0)$及$f'_+(x_0)$都存在且相等.
>
> 左右导数统称为单侧导数,
>
> 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导,且$f'_-(x_0)$及$f'_+(x_0)$都存在,那么就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

导数的几何意义:

根据导数的几何意义(切线的斜率)并应用与直线的点斜式方程,可知曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点的$M(x_0,y_0)$且与切线垂直的直线叫做曲线$y=f(x)$在点M处的法线,如果$f'(x_0)\neq 0$,法线的斜率为$-\frac{1}{f'(x_0)}$.从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

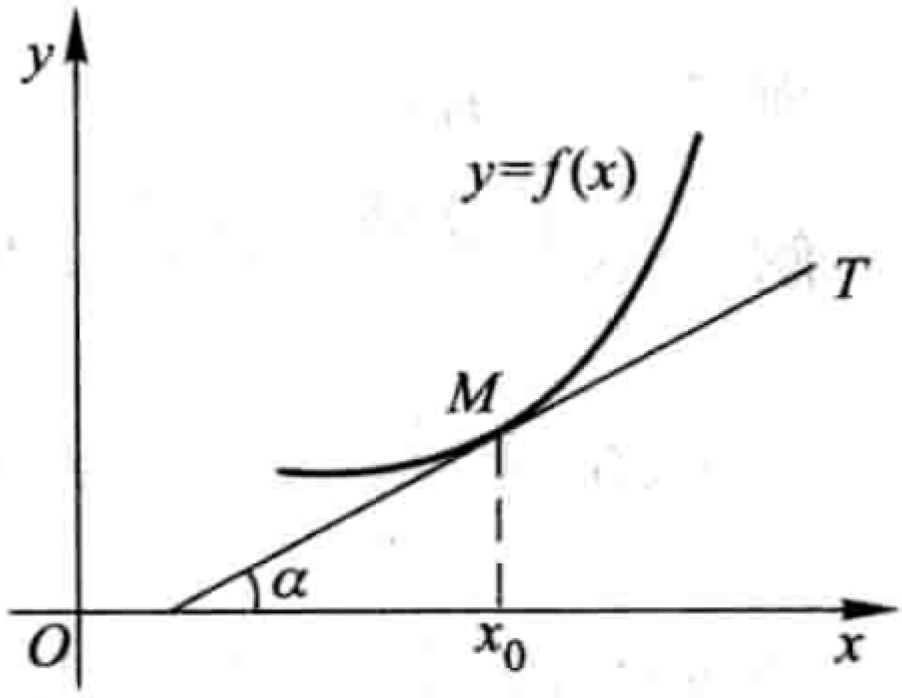

图 2-3

函数可导性与连续性的关系:

> 设函数$y=f(x)$在点x处可导,即$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$
>
> 存在,由具有极限的函数与无穷小的关系知道$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$,
>
> 其中α为当$\Delta x \to 0$时的无穷小,上式两边同乘Δx得$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$:
>
> 由此可见,当$\Delta x \to 0$时,$\Delta y \to 0$这就是说,函数$y=f(x)$在点x处是连续的,所以由此可见,

如果函数$y=f(x)$在点x处可导,那么函数在该点必连续,

函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件,但不是充分条件.

函数求导法则

函数的和,差,积,商的求导法则

如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$都在点x具有导数,那么它们的和,差积,商(除分母为零点外)都在x_0具有导数.且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$
$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)\pm u(x)v'(x)$$
$$[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$(Cu)'=Cu'$$

反函数的求导法则

如果函数$x=f(x)$在区间I_y内单调,可导且$f'(y)=0$,那么它的反函数$y=f^{-1}(x)$在区间$I_x=x|x=f(y),y\in I_y$内也可导,且:

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

证:

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

复合函数的求导法则(链式法则)

如果函数$u = g(x)$在点x处可导,而$y = f(u)$在点$u = g(x)$可导,那么复合函数$y = f[g(x)]$在点x可导,且其导数为

$$\overset{\text{证}:}{\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}}.$$

链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

基本求导公式

常数和基本初等函数的导数公式:

$$\begin{gathered}(C)' = 0, (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \\ (a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1), (e^x)' = e^x, \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}(a > 0, a \neq 1), (\ln x)' = \frac{1}{x}, \\ (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, \\ (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x, \\ (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x, \\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\arctan x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, (arccotx)' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ (shx)' = chx, (chx)' = shx, (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \\ (arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, (archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (arthx)' = \frac{1}{1-x^2}\end{gathered}$$

函数的和,差,积,商求导法则

反函数的求导法则

复合函数的求导法则

高阶导数

定义及意义

变速直线运动的速度$v(t)$是位置函数$s(t)$对时间t的导数,即$v = \frac{ds}{dt}$,或$v = s'$,

而加速度a又是速度对时间t的变化率,即速度v对时间t的导数:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}) \text{或} a = v' \text{或} a = (s')'$$

这种导数的导数$\frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})$或$(s')'$叫做$s$对$t$的二阶导数,记作

$$\frac{d^2s}{dt^2}\text{或}s''(t).$$

所以直线运动的加速度就是位置函数s对时间t的二阶导数.

一般地函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍是函数x的函数,我们把$y'=f'(x)$的导数叫做函数$y=f(x)$的二阶导数,记作y''或者$\frac{d^2y}{dx^2}$,即:

$$y''=(y')'\text{或者}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt})$$

相应的把$y=f(x)$的导数$f'(x)$叫做函数$y=f(x)$的一阶导数.

类似的,二阶导数的导数叫做三阶导数,三阶导数的导数叫做四阶导数......,一般的,$(n-1)$阶导数的导数叫做n阶导数,分别记作:

$$y''',y^{(4)},\ldots,y^{(n)}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数$y=f(x)$具有n阶导数,也通常说函数$f(x)$为n阶可导,如果函数$f(x)$在点x处具有n阶导数,那么$f(x)$在点x的某一邻域内必定具有一切低于n阶的导数,二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

$$\text{求}:(e^x)^{(n)}=e^x$$
$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$
$$(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$
$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$
$$(x^n)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1=n!$$
$$(x^n)^{(n+k)}=0(k=1,2,\ldots).$$

高阶导数求导法则

如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$在点x处具有n阶导数,那么显然$u(x)\pm v(x)$在点x处也具有n阶导数,且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

乘积$(uv)^{(n)}$:数学归纳法证明.

莱布尼茨公式:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

二项式展开定理:

把二项式展开的k次幂换成k阶导数(零阶导数理解为函数本身),再把左端的$(u+v)$换成(uv)就得到了莱布尼茨公式.

$$(u+v)^n\text{按二项式定理展开写成}:$$
$$(u+v)^n=u^nv^0+nu^{n-1}v^1+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\ldots+u^0v^n.$$
$$\text{即}:(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k.$$

举例:(复合函数+两个函数的乘积)

$$\text{求}:y=x^2,y^{(20)}$$

隐函数及由参数方程所确定的的函数的导数,相关变化率

隐函数:

显函数:等号左端是因变量的符号,而右边是含有自变量的式子,当自变量取定义内的任一值时,由这式子能确定对应的函数值,用这样的方式表达的函数叫做显函数.如$y=\sin x, y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$.

隐函数:如方程$x+y^3-1=0$,类似这种当变量x在$(-\infty,+\infty)$内取值时,变量y有确定的值与之对应这样的函数称为隐函数.

> 如果变量x,y满足一个方程$F(x,y)=0$,在一定的条件下,当x取某一个区间内的值时,相应的总有满足这个方程的唯一的y值存在,那么就说方程$F(x,y)=0$在该区间确定了一个隐函数.

隐函数的显化:例如从方程$x+y^3-1=0$解出$y=\sqrt[3]{1-x}$,就把隐函数化成了显函数,但隐函数的显化是有困难的,甚至是不可能的.

隐函数求导:

不管隐函数能否显化,都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数

$$e^y+xy-e=0\text{求导}\frac{dy}{dx}:$$
$$\text{左边求导}:\frac{dy}{dx}(e^y+xy-e)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx},\text{右边求导}:(0)'=0$$
$$ps:\text{隐函数的求导其实和复合函数的求导是一样的把}y\text{看成}x\text{的一个复合关系}(\text{类似}u=g(x)),$$
$$\text{然后再利用求导法则}(uv)\text{求导即可}.$$

$$\text{方程}:y^5+2y-x-3x^7=0\text{求导}:\frac{dy}{dx}:$$
$$5y^4\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0.$$
$$\text{方程}:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\text{求导}:\frac{dy}{dx}:$$
$$\frac{x}{8}+\frac{2y}{9}(\frac{dy}{dx})=0.$$
$$\text{方程}:x-y+\frac{1}{2}siny=0\text{求导}:\frac{d^2y}{dx^2}:$$
$$\text{一阶导数}:1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot(\frac{dy}{dx})=0,\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}$$
$$\text{二阶导数}:\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2(\sin y)}{(2-\cos y)^2}(\frac{dy}{dx}).$$

在某些场合,利用所谓的对数求导法求导数比用通常方法简便些,这种方法是先$y=f(x)$的两边取对数,然后求出y的导数.

$$y=x^{\sin x}\rightarrow\ln y=\sin x\cdot\ln x$$
$$\text{再对两边求导}:\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x}$$

对于一般的形式的幂指函数$y=u^v(u>0)$,如果$u=u(x),v=v(x)$都可导,则可利用对数求导法求出幂指函数的导数.也可表示为$y=e^{v\ln u}$,这样便可直接求出.

$$y'=e^{v\ln u}(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u})=u^v(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}).$$

$$\text{求}:y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\text{的导数}$$

$$\text{先对两边取对数}:\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)].$$

由参数方程所确定的函数的导数:

参数方程

研究物体的运动轨迹,抛物线参数方程$\begin{cases}x=v_1t\\y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2,\end{cases}$其中$v_1,v_2$是抛射物体的初速度水平,铅直的分量,$g$是重力加速度,$t$是飞行时间,$x,y$分别是飞行中抛射物体在铅直平面上的横坐标和纵坐标.

一般的若参数方程为:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t),\end{cases}$$

参数方程求导法则:

如果函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$,且此反函数与函数$y=\psi(t)$构成复合函数,那么可以看做是由函数$y=\psi(t),t=\varphi^{-1}(x)$复合而成的函数$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$,现在要计算这个复合函数的导数,为此在假设函数$x=\varphi(t),y=\psi(t)$都可导,且$\varphi'(t)\neq0$于是根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则就有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\text{即}:\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\text{即}:\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

如果$x=\varphi(t),y=\psi(t)$还是二阶可导的,那么可得到函数的二阶导数公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

举例:

$$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases};\begin{cases}x=v_1t\\y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases};\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases};$$

导数的几何意义:

斜率k

相关变化率:

设$x=x(t),y=y(t)$都是可导函数,而变量x,y间存在某种关系,从而变换率$\frac{dx}{dt}$与$\frac{dy}{dt}$间也存在一种关系,这两个相互依赖的变换率称为相关变化率.相关变化率就是研究这两个变换率之间的关系,以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

例：一气球从离开观察员$500m$的地方离开地面铅直上升，当气球高度为$500m$时，其速率为$140m/min$,求此时观察员视线仰角的增加速率.

$\tan\alpha = \dfrac{h}{500}$，其中$\alpha$和$h$都与$t$存在可导的函数关系.对两边对$t$求导.得：

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

存在t_0，使$h|_{t=t_0} = 500, \dfrac{dh}{dt}|_{t=t_0} = 140, \tan\alpha|_{t=t_0} = 1, \sec^2\alpha|_{t=t_0} = 2,$代入