Typ-3 : REG *[regulär]*

Erkannt durch **DEA = NEA = RegEx** (γ) (Robin & Scott, regEx : Kleene)
Gleichbedeutend : $Synt(L)$ ist endlich.
Bsp : $\{a^n b^m | n, m \in \mathbb{N}\}$
Beweis $w \in REG$: regEx, Automat
Beweis $w \notin REG$: Pumping-Lemma, Myhill-Nerode
$(u, v) \in P$ mit $v \in \Sigma \cup \Sigma V$

—— : DCFL *[deterministisch kontextfrei]*

Erkannt durch **DPDA**
Bsp : $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$, $\{w\$w^R | w \in \Sigma^*\}$

Typ-2 : CFL *[kontextfrei]*

Erkannt durch **PDA** (keine kreuzenden Abhängigkeiten)
Bsp : $\{ww^R | w \in \Sigma^*\}$
Beweis $w \in CFL$: **CYK-Algo**, Grammatik, PDA
Beweis $w \notin CFL$: **Pumping-Lemma T2**
Chomsky-Normalform (CNF) : $A \to a | AB$
Kuroda-Normalform (KNF) : $A \to a | A | AB$ & $AB \to CD$
Greibach-Normalform : $A \to aV^*$ (mit V^*, A : Variablen)
$(u, v) \in P$ mit $u \in V$

Typ-1 : CSL *[nicht-verkürzend]*

[kontextsensitiv]
Erkannt durch **LBA** (linear beschränkte Turing-Maschine) (Satz von Kuroda)
Bsp : $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^m n^n d^m | n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{ww | w \in \Sigma^*\}$
$(u, v) \in P$ mit $|u| \le |v|$

—— : REC *[entscheidbare Sprachen]*

Erkannt durch Turing-Maschinen mit **JA/ NEIN**-Antwort

Typ-0 : R.E. *[beliebig]*

Erkannt durch Turing-Maschinen mit **JA/ ?**-Antwort
Bsp : Halte-Problem

Abschlusseigenschaften

	Schnitt $\cap$	Vereinig. $\cup$	Kompl.	Produkt	Stern
Typ-3	✓	✓	✓	✓	✓
DCFL	✗	✗	✓	✗	✗
Typ-2	✗	✓	✗	✓	✓
Typ-1	✓	✓	✓	✓	✓
Typ-0	✓	✓	✗	✓	✓

Typ-3 ist auch unter Homomorphismen abgeschlossen.

Grammatiken & Automaten

Grammatik

Allgemein : $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$

Automaten

$\hat{\delta}(z, w)$ beschreibt in welchen Zustand man kommt, wenn man das ganze Wort w liest

DEA

Allgemein : $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$
Z : Zustände ; z_0 : Startzustand $\in Z$; E : akzeptierende Endzustände $\subseteq Z$; δ : Überführungsfunktion $Z \times \Sigma \to Z$ ... erzeugt Sprache T(M)

NEA

Allgemein : $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$
S : Menge an Startzuständen ; δ Überführungsfunktion $\to \mathcal{P}(Z)$

PDA

Allgemein : $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$
Mit Endzuständen : $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$
Γ : Kelleralphabet ; δ Zustandübernagsfunktion $\to \mathcal{P}_{\text{endlich}}(Z \times \Gamma^*)$
$\delta(z, a, A) \ni (z', B_1..B_k)$, oder ϵ-Üg : $\delta(z, \epsilon, A) \ni (z', B_1..B_k)$
Konfiguration (z, w, V) mit
$L(G) = N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in Z : (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \epsilon, \epsilon)\}$
Lemma : $(z, w, V) \vdash^* (z', w', V') \Rightarrow (z, wx, VY) \vdash^* (z', w'x, V'Y)$

DPDA

Akzeptiert durch Endzustände ; Immer max. ein Übergang möglich

Diverses

Pumping-Lemma

Sei n gegeben. Wähle Wort $z \in L$ mit $|z| \ge n$
Typ-3
Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig in Zerlegung $z = uvw$ (wo gilt : $|v| \ge 1$ & $|uv| \le n$)
Beweis, dass $uv^i w \notin L$ für ein $i \ge 0 \Rightarrow L$ nicht Typ-3
Typ-2
Seien $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ beliebig in Zerlegung $z = uvwxy$ (wo gilt : $|vwx| \le n$ & $|vx| \ge 1$)
Meist Fallunterscheidung für vx enthält ....
Beweis, dass $uv^i wx^i y \notin L$ für ein $i \ge 0 \Rightarrow L$ nicht Typ-2

Äquivalenzen

Myhill-Nerode R_L
$xR_r y \iff [\forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L]$ - hinten anhängen.
Beweis Sprache L nicht regulär :
Menge $M \subseteq \Sigma^*$ finden, mit $|M| = \infty$, für die gilt :
z.Z. : $\forall x, y \in M : x \ne y \Longrightarrow x \not{R_L}\, y$
Dann L nicht regulär, da Index von M-N-Aquivalenz $|\Sigma^* / R_L| = \infty$
wird durch **Relation** R_M verfeinert.
(Auf gegebenem Automaten definiert - Muss nicht minimal sein)
$xR_r y \iff \hat{\delta}(z_o, x) = \hat{\delta}(z_o, y)$ Alle Wörter in selber Klasse, die im selben Automat-Zustand sind.
$\Rightarrow xR_M y \Longrightarrow xR_L y \Longrightarrow |R_L| \le |R_M|$

Syntaktische Kongruenz $\equiv_L$
$x \equiv_L y \iff [\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : w_1 x w_2 \in L \Leftrightarrow w_1 y w_2 \in L]$ - auf beiden Seiten anhängen.

Monoide

- Abgeschlossenheit
- Assoziativ $\forall a, b, c \in M$: $(a * b) * c = a * (b * c)$
- neutrales Element e : $\forall a \in M$: $e * a = a * e = a$

$\to$ **syntaktisches Monoid Synth**(L) $\Sigma^* / \equiv_L$

Erkennung durch Monoide

Monoid M erkennt L, wenn $A \subseteq M, \varphi = \Sigma^* \mapsto M$ und $L = \varphi^{-1}(A)$ (bzw. $w \in L \Leftrightarrow \varphi(w) \in A$) mit φ ist Homomorphismus.

Homomorphismus

Abbildung φ : Monoid $M \to N$ Monoid. Mit Eigenschaften :
$\forall a, b \in M : f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$ und $\varphi(\text{neutrE}_1) = \text{neutrE}_2$

Chomsky-Normalform

- Ringleitung entfernen (jeweils alle beteiligten Variablen zu neuer ändern)
- Variablen anordnen & Kettenregeln entfernen
- Pseudoterminale einführen
- Abkürzungen einführen

Minimierung DEA

z1			
z2			
z3			
	z0	**z1**	**z2**

- Paare mit **einem** Endzustand markieren.
- Wiederholt alle Paare markieren, die für $\exists a \in \Sigma$ in Markierung landen.
- nicht markierte Zustandspaare verschmelzen.

CYK-Algo

Länge	w1	w2	...
1	T1,1	T2,1	...
2	T2,1	T2,2	
...			

$T_{i,j} = \{A \in V | A \Rightarrow^*_G a_i ... a_{i+j-1}\}$

whrschl. Irrelevant

Logik

Kontraposition : $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg B \Rightarrow \neg A$
DeMorgan : $\neg(A \wedge B) \quad = \quad (\neg A \vee \neg B)$

linksrekursion Entfernen (vgl. GNF)

$A \to A\alpha_1 | A\alpha_2 | ... | \beta_1 | \beta_1 | ...$
ersetzen durch :
$A \to \beta_1 | \beta_2 | ... \quad | \beta_1 B | \beta_2 B | ...$
$B \to \alpha_1 | \alpha_2 | ... \quad | \alpha_1 B | \alpha_2 B | ...$

Relationen

für $m, m'^{(\prime)} \in M$:
Ordnungsrelationen
reflx. : $m\ R\ m$
Identität : $(m'\ R\ m) \wedge (m\ R\ m') \Rightarrow (m' = m)$
transitiv : $(m'\ R\ m) \wedge (m\ R\ m'') \Rightarrow (m\ R\ m')$
symmetrisch : $(m'\ R\ m) \Leftrightarrow (m\ R\ m')$
Kongruenz : $[w_1 \equiv z_1$ und $w_2 \equiv z_2] \Rightarrow w_1 w_2 \equiv z_1 z_2$

Beweis Pumping-Lemma T3

L beliebige T3-Sprache. $\Rightarrow$ DEA M. $n = |Z|$. Mit $x \in L, |x| \ge n \Rightarrow x = x_1 x_2 x_3 ... x_n y$ $(y \in \Sigma^*)$. $Q \subseteq Z$ mit $Q = \{\hat{\delta}(z_0, x_1 ... x_n)\} \Rightarrow |Q| \le n$.