2020 阿里巴巴数学竞赛

阿里巴巴

日期：2020 年 04 月

1 代数与数论

1. 设 F 为域。考虑 F^n 上的如下环结构, 加法是通常的向量加法, 乘法定义为
$$(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)=(x_1y_1,\ldots,x_ny_n) \tag{1}$$
设 $\Lambda\subset F^n$ 为包含 $(1,\ldots,1)$ 的子环。假设 Λ 为整环, 而且它作为加法群是有限生成的。试证对于 Λ 的任何非零元 $(x_1,\ldots,x_n)$, 我们有 $\prod_{i=1}^n x_i\neq 0$.

2. 设群 G 作用在集合 Ω 上, 使得所有 G-轨道都是无限集。设 Γ,Δ 为 Ω 的有限子集。试证存在 $g\in G$ 使得 $g\Gamma\cap\Delta=\varnothing$.

3. 设 V 为域 F 上的有限维向量空间, $\mathrm{char}(F)\neq 2$, 令 $q:V\to F$ 为二次型, 也就是说: 存往对称 F-双线性型 $B:V^2\to F$(必然唯一) 使得 $q(v)=B(v,v)$ 对所有 v 成立。对所有域扩张 $F\hookrightarrow E$, 定义二次型 q 到 E 上的基变换为
$$q_E:E\otimes_F V\to E;\quad q_E(a\otimes v)=a^2q(v),\quad a\in E,v\in V \tag{2}$$
我们说 q 是迷向的, 如果 $v\neq 0\iff q(v)\neq 0$ (a) 试证如果 q 迷向, 而 $[E:F]$ 是奇数, 那么 q_E 也是迷向的。(b) 以上叙述在 $[E:F]$ 为偶数时是否成立?

4. 找出所有满足以下条件的有限群 G: - G 的阶是相异素数的积, 换句话说, 存往相异素数 $p_1,\ldots,p_m$ 使得 $\sharp G=p_1\cdots p_m$ - G 的所有非平凡元都是素数阶的, 换句话说每个元素的阶数都属于 $\{1,p_1,\ldots,p_m\}$ (注记: 答案和 m 有关; 例如当 $m=2$ 时存在许多这样的 G; 您必须对它们分类。)

5. 找出所有 (k,α), 其中 $k>2$ 是整数而 $\alpha\neq 0$ 是复数, 使得
$$\alpha\in\{re^{\frac{i\pi}{k}}\mid r\in\mathbb{R}\},\quad \alpha+\alpha^{-1}\in\{m+n\sqrt{-2}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}. \tag{3}$$

2 几何与拓扑

6. 设 S_g 是亏格为 g 的可定向闭曲面,N_{2g} 是亏格为 $2g$ 的不可定向闭曲面 (即 N_{2g} 由球面粘接 $2g$ 个"交叉帽"得到). 设 $f : N_{2g} \to S_g$ 是连续映射. 证明：诱导映射 $f_* : H_2(N_{2g}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_2(S_g; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 恒为 0.

7. 设 S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 中的单位球面，赋予标准的李群结构，x 为 de Rham 上同调 $H^3(S^3, \mathbb{R})$ 的一个非零元. 证明：不存在李群同构 $f : S^3 \to S^3$ 使得 $f^*(x) = -x$.

8. 设 $\mathbb{C}P^2$ 为复射影平面, L_1, L_2, L_3 为其中三条复射影直线，满足 $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \varnothing$. 取 L_1, L_2, L_3 各自的紧致管状邻域，使得它们的并是一个 (实)4 维带边紧致流形 W，边界记为 $M = \partial W$, 并且要求 $W \backslash (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ 同胚于 $M \times [0, 1)$. 请计算 M 的 $\mathbb{Z}$ 系数同调群.

9. 设 (M, g) 是 n 维黎曼流形 $(n \geq 3)$, 截面曲率 $K \geq 0$. 设 $\gamma(t)$ 为测地线, $t \in [0, T)$, 其中 t 是弧长参数. 假设 $J_1, \ldots, J_{n-1}$ 是沿 γ 的 Jacobi 场, 都垂直于 γ', 且在每一点都线性无关。假设对任何 i, j 都满足

$$(J_i'(0), J_j(0)) = (J_i(0), J_j'(0)) \tag{4}$$

其中 J_i' 表示 J_i 沿 γ' 方向的协变导数。证明: 对每个 $i = 1, \ldots, n-1$ 和 $0 < s < t < T$, 都有 $\frac{|J_i(s)|_g}{s} \geq \frac{|J_i(t)|_g}{t}$.

10. 设 M 是 5 维紧致光滑流形 $SO(3) \times T^2$，其中 T^2 为一个 2 维环面. (1) 是否存在 M 上的光滑黎曼度量 g 使得 Ricci 曲率严格为正? (2) 是否存在 M 上的光滑黎曼度量 g 使得 $Ric \equiv 0$? 如果存在请给出具体的例子，如果不存在请给出证明.

3 分析与方程

11. 假设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑 Schwarz 函数（也称速降函数），满足条件

$$\int_{|y|=1} g(x+y)d\sigma(y) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

这里 $d\sigma(y)$ 是球面 $\{|y|=1\}$ 上的标准面积单元。证明 $g=0$.

12. 假设 $\mathbb{R}^3$ 上的球对称函数 $u(x)$(也就是当 $|x|=|y|$ 时有 $u(x)=u(y)$) 满足方程

$$\Delta u - u + |u|^2 u = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

如果 $u \in C^2(\mathbb{R}^3) \bigcap H^1(\mathbb{R}^3)$，证明存在常数 C 使得

$$|u(x)| \le Ce^{-\frac{1}{2}|x|} \tag{7}$$

13. 考虑限 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域 Ω，以及定义在这个区域上的非负函数 κ 使得对常数 $\alpha > 1, M > 0, E_0 > 0$ 有

$$M \le \int_\Omega \kappa dx, \quad \int_\Omega \kappa^\alpha dx \le E_0 \tag{8}$$

证明存在只依赖于 M, E_0, α 的常数 C 使得

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \kappa |v| dx\right), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{9}$$

14. 在 $\mathbb{R}^n$ 上考虑薛定谔方程

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

假设初始值 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{|x|\le\sqrt{t}} |u(t,x)|^2 dx dt = 0 \tag{11}$$

15. 考虑标准的 2 维环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, 以及上面的半径为 0.1 的圆圈 S。证明存在常数 $C > 0$ 使得对任意定义在环面上，并且满足方程

$$\partial_{x_1}^2 f - \partial_{x_2}^2 f = \lambda f, \quad \lambda \ne 0 \tag{12}$$

的函数 f 均满足不等式

$$\|f\|_{L^2(S,\mathrm{ds})} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{13}$$

其中 ds 为圆圈的弧长测度。

4 应用与计算数学

16. 一个简单图 G 称为“漂亮的”, 如果它的任意两个相邻顶点的度数不同. 对任意 $n \geq 2$, 定义 $f(n)$ 为 n 阶“漂亮的”简单图的边数的最大值. 求满足
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2} - f(n)}{n^a} = b \tag{14}$$
的实数 $a, b \quad (b \neq 0)$.

17. 令 a 和 b 为两个正整数, 在一个不透明的袋子里放了 a 个红球和 b 个蓝球. 红球和蓝球除了颜色以外的其它特征相同, 只能通过颜色来分辨. 小明进行如下的游戏: 每一轮她从袋子里随机抽取一个球, 如果这个球是蓝球, 那么游戏结束：如果是红球, 那么她将该球放回袋子并再加放一个红球到袋子之中（这样袋子中的红球增多了一个）. 令 $E_{a,b}$ 为游戏总轮数的期望. (1) 当 a 与 b 为何值时, 期望 $E_{a,b}$ 取有限值? (2) 将 $E_{a,b}$ 表示为 a 与 b 的函数. (3) 假设小明知道袋中的总球数 N 但不知道 a 与 b 的值. 她先验地认为 a 在集合 $\{1, \ldots, N-1\}$ 中均匀分布. 在第几轮抽到红球的情况下她可以有 90% 的把握猜测 $E_{a,b}$ 取无穷值?

18. 给定 n 个正实数 $a_1, \cdots, a_n$, 假设它们满足 $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ 和 $a_1 + \cdots + a_n = a$. 证明存在一种挑选系数 $\epsilon_1, \cdots \epsilon_n$ 的方法，使得每个系数 ϵ_i 均为 1 或 -1, 并且
$$|\epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_n a_n| \leq \frac{1}{a} \tag{15}$$
比如当 $n = 5$ 且 $a_1 = \cdots = a_5 = 1/\sqrt{5}$ 时 $a = \sqrt{5}$, 可以取 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = \epsilon_5 = -1$, 这样 $|\epsilon_1 a_1 + \cdots + \epsilon_5 a_5| = 1/\sqrt{5} = 1/a$.

19. 在分子动力学中, 人们常使用 overdamped Langevin equation
$$\dot{x} = f(x) + \sqrt{2\beta^{-1}}\eta \tag{16}$$
来采样 Boltzmann 分布 $\rho_\beta(x) = Z_\beta^{-1} e^{-\beta V(x)}$, 这里 $x \in \mathbb{R}^{3n}, \beta = \frac{1}{k_\beta T} > 0$, k_B 是 Boltzmann 常数, T 是温度, $f(x) = -\nabla V(x)$ 是由势函数 $V(x)$ 决定的作用力, η 是一个 3n 维的白噪声, 而 $Z_\beta = \int_{\mathrm{R}^{3n}} e^{-\beta V(x)} dx$ 是归一化常数. 考虑如下的两条耦合的采样轨道,
$$\left\{ \dot{x}_1 = f(x_1) + \sqrt{2\beta_1^{-1}(t)}\eta_1 \dot{x}_2 = f(x_2) + \sqrt{2\beta_2^{-1}(t)}\eta_2 \right. \tag{17}$$

其中 $\beta_1(t)$ 和 $\beta_2(t)$ 会交替地取值 $\beta > 0$ 和 $\bar{\beta} > 0$. 例如, 可选 $\bar{\beta} < \beta$ (即 $\bar{\beta}^{-1} > \beta^{-1}$) 使得 $\bar{\beta}$ 对应的温度高于原系统的温度以提高采样效率. 按照频率 $\nu, \beta_1(t)$ 和 $\beta_2(t)$ 会尝试互换取值, 如界互换是尝试从 $(\beta_1, \beta_2) = (\beta, \bar{\beta})$ 变成 $(\beta_1, \beta_2) = (\bar{\beta}, \beta)$, 那么这种互换的接受概率为

$$\min\left(\frac{\rho_{\bar{\beta}}(x_1)\rho_{\beta}(x_2)}{\rho_{\beta}(x_1)\rho_{\bar{\beta}}(x_2)}, 1\right) \quad (1) \tag{18}$$

而另外一种互换的接受概率类似可得. 写出(无需证明)当频率 $\nu \to \infty$ 时 (1) 的极限方程, 我们称之为系统（A）. 写出另一个 x_1 和 x_2 满足的随机动力方程, 我们称之为系统（B），使得系统（B）中只含有常系数的噪声项, 且系统（A）和系统（B）对应一样的不变分布。

20. 假设 $x_1, \ldots, x_n$ 是一组相异实数, $y_1, \ldots, y_n$ 是另一组相异实数, 并且对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 都有 $y_i \geq x_i$. 一个单向运输 T 是一个从 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 的一一映射，并且满足对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 都有 $T(x_i) \geq x_i$. (例如, 对每个 $i = 1, \ldots, n$ 使 $T(x_i) = y_i$ 就定义了一个单向运输.) T 的运输成本定义为

$$\sum_{i=1}^{n} (T(x_i) - x_i)^2 \tag{19}$$

(1) 找到或描述分别最小化和最大化运输成本的两个单向运输，并证明它们的最优性. (2) 假设 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$, 是一列来自标准正态分布的独立同分布序列, 并且 $y_i = x_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots$. 令 T_n^* 为从 $X_n := \{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $Y_n := \{y_1, \ldots, y_n\}$ 的最大化运输成本的单向运输. 计算以下随机量

$$\frac{\sharp\{x \in X_n : x \leq 0, T_n^*(x) \leq 1\}}{n} \tag{20}$$

当 $n \to \infty$ 时的极限 (在几乎必然 (a.s.) 意义下), 其中 $\sharp$ 表示集合的势.