<u>def.</u> $\geq$: quasi-order

$\geq$ が well-quasi-order (WQO)

$\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ 任意の無限列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$

ある $i < j$ が存在して $a_i \leq a_j$.

<u>def.</u> $\geq$ が well-founded (整礎) とは

strict part $>$ ($\geq \setminus \leq$) について無限降下列

$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ が存在しない.

<u>prop.</u> $\geq$ が WQO $\Longrightarrow$ $\geq$ は well-founded.

($\not\Leftarrow$)

例 (WQO)

- 自然数上の通常の順序 $\geq_{\mathbb{N}}$ は WQO

$$7,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 9$$

$$7 \leq 9$$ (最小の拡張)

- $\geq_{\mathbb{N}}$ を $\mathbb{Z}$ 上の順序としてみなしたものは well-founded だが WQO ではない $\not\succeq$

$$0 \not\succ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \cdots$$

$$\not\succeq \;=\; \boxed{\geq_{\mathbb{N}} \cup \mathrm{id}} \subsetneq \boxed{\geq_{\mathbb{Z}}}$$

prop. $\boxed{\geq}$ が WQO

$\Longleftrightarrow$ $\geq$ の任意の拡張 $\geq'$ ($\geq \subseteq \geq'$) が well-founded.

proof. ($\Longrightarrow$) $\geq'$ が well-founded でないとする:

$$a_0 >' a_1 >' a_2 >' \cdots$$

$\geq$ が WQO だから ある $i < \alpha$ について

$a_i \leq a_\alpha$. 一方で $a_i >' a_\alpha$ で

$a_i \leq' a_\alpha$

$a_i >' a_i$ ↯

prop. $\leq$ が WQO

$\iff$ 任意の無限列 $a_0, a_1, \dots$ について

部分列 $a_{i_0} \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots$ が存在する。

proof. ($\Leftarrow$) は自明

($\Rightarrow$) a_i が終点(terminal)であるとは

任意の $i<j$ について $a_i \not\leq a_j$ であること。

ここで、$\geq$ が WQO であることから終点は

高々有限個しか現れない。

(終点の無限列は WQO の定義から存在しない)

def. (積順序) $\gtrsim_A, \gtrsim_B$: quasi-order

$$(a,b) \gtrsim_{A\times B} (a',b') \iff a \geq a' \text{ かつ } b \geq b'$$

(ディクソンの補題)

$\gtrsim_A$, $\boxed{\gtrsim_B}$ が WQO $\Longrightarrow$ $\gtrsim_{A\times B}$ も WQO

Proof. $(a_0,b_0), (a_1,b_1), (a_2,b_2), \cdots$ に対して

a たちに対してさっきの補題を使う:

$$a_{i_0} \leq_A a_{i_1} \leq_A a_{i_2} \leq_A \cdots$$

$\boxed{b_{i_\alpha} \leq_B b_{i_\beta}}$

b たちの対応している部分列 $b_{i_0}, b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots$ 考える