

Def. へ 3) 算術の公理 (抜粋)

- $A \Rightarrow A$
- $\Rightarrow t = t$
- $S = t, t = u \Rightarrow S = u$
- $S = t \Rightarrow S' = t'$
- $S' = t' \Rightarrow S = t$
- $\Rightarrow S + 0 = S$
- $\Rightarrow S + t' = (S + t)'$
- $\Rightarrow S \cdot 0 = 0$
- $\Rightarrow S \cdot t' = (S \cdot t) + S$

Def. \wedge^P / 算術の 推論規則 (抜粋)

$$\frac{P \Rightarrow \Delta}{A, P \Rightarrow \Delta} WL$$

$$\frac{P \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} WR$$

$$\frac{A, A, P \Rightarrow \Delta}{A, P \Rightarrow \Delta} CL$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} CR$$

$$\frac{A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x. A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall L$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x. A(x)} \forall R$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta, A(a')}{A(0), \Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)} C J$$

$$\frac{P \Rightarrow \textcircled{H}, A \quad A, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \textcircled{H}, \Lambda} CUT$$

$$\frac{P \Rightarrow S = U \quad \Delta \Rightarrow U = T}{P, \Delta \Rightarrow S = T} \text{ TR}$$

$$\frac{P \Rightarrow t = S}{P \Rightarrow S = t} \text{ SYM}$$

$$\frac{P \Rightarrow S = t}{P \Rightarrow S' = t'} \text{ FUN}$$

これは原子論理式に対する CUT を使ってミニマレートする

$$\frac{\text{CUT}}{P \Rightarrow S = t \quad S = t \Rightarrow S' = t'} \text{ CUT}$$

Ex. $\Rightarrow 0 + 0'' = 0'' + 0$ (すなはち $0+2=2+0$) の 証明

$$\frac{\Rightarrow 0+0=0}{\Rightarrow (0+0)'=0'} \text{ FUN}$$

$$\frac{\Rightarrow 0+0'=(0+0)'}{\Rightarrow 0+0'=0'} \text{ SYM}$$

$$\frac{\Rightarrow 0+0'=0'}{\Rightarrow 0+0'=0'} \text{ FUN}$$

$$\frac{\Rightarrow 0+0''=(0+0')' \quad \Rightarrow (0+0')'=0''}{\Rightarrow 0+0''=0''} \text{ SYM} \quad \frac{\Rightarrow 0''+0=0''}{\Rightarrow 0''=0''+0} \text{ SYM}$$

$$\frac{\Rightarrow 0+0''=0''}{\Rightarrow 0''=0''+0} \text{ TR}$$

$$\Rightarrow 0+0''=0''+0$$

Ex. $\Rightarrow 0+0'' = 0''+0$ の別証明

$$0+a=a+0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\Rightarrow 0+a'=(0+a)'}{(0+a)'=(a+0)'} \text{TR} \quad \Rightarrow a+0=a \text{ FUN}$$

$$\frac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=(a+0)'}{\Rightarrow (a+0)'=a'} \text{TR} \quad \Rightarrow d+0=d' \text{ SYM}$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow a'=a'+0 \text{ TR}$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=d+0 \text{ CJ}$$

$$\Rightarrow 0+0=0+0$$

$$0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0 \text{ CUT}$$

$$\Rightarrow 0+b=b+0 \text{ TR}$$

$$\Rightarrow \forall x (0+x=x+0)$$

$$0+0''=0''+0 \Rightarrow 0+0''=0+0 \text{ AL}$$

$$\forall x (0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0$$

$$\Rightarrow 0+0''=0''+0 \text{ CVT}$$

Def. ペア/算術が「矛盾」には \Rightarrow が「證明でまよそぞ」とす。
こうでないとき 無矛盾であるといふ。

Prop. ペア/算術が矛盾しないことと
任意の三つのエント $P \Rightarrow \Delta$ が「證明可能」ことは同値。

例。もしペア/算術が矛盾しないとす

⋮
⋮
~~~~~  
 $\Rightarrow$       WR      が得られてしまう。  
 $\Rightarrow 0 = 0$

Def. 由項式 $t$ に対し自然数 val( $t$ )を割り当てる:

$$\text{val}(0) = 0$$

$$\text{val}(S+t) = \text{val}(S) + \text{val}(t)$$

$$\text{val}(t') = \text{val}(t) + 1$$

$$\text{val}(S \cdot t) = \text{val}(S) \cdot \text{val}(t)$$

Def. 由論理式  $S=t$  が真とは  $\text{val}(S) = \text{val}(t)$  であると。

Def. 由原子論理式からなるシーケンス  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  が真とは  
ある由論理式  $S=t$  が存在する

•  $S=t \in \Gamma$  かつ  $S=t$  は真であるか、または

•  $S=t \in \Delta$  かつ  $S=t$  が真であるとする。

Ex.

$\Rightarrow 0+0'=0'+0$  は真。 $0=0' \Rightarrow$  と  $\Rightarrow$  は  
真である。

Def.

証明が単純であるとは、

- 証明に自由変数が現れない、
- 現れる論理式は原子論理式で、
- 使われる推論規則が weakening, contraction 等の構造規則と反論規則 cut の2つであるとする。

Prop.

単純な証明に現れる三ーウェントはすべて真。

cf.  $\Rightarrow o + o'' = o'' + o$  が証明。

したがって、 $\Rightarrow$  は単純な証明をもつまい  
 $\Rightarrow$  がわかる。

Gentzenのペア/算術の無矛盾性証明のアート:

由じた原子論理式から又ミーエン  $P \Rightarrow \Delta$  の

証明を、 $\Theta \subseteq P$ ,  $\Lambda \subseteq \Delta$  をみよとする

$\Theta \Rightarrow \Lambda$  の単純な証明上に変換する

アレゴリズムをとる。

{もし  $\Rightarrow$  が“証明”したとする、 =  $\beta\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\vartheta$   
 $\Rightarrow$  の単純な証明が“得られまつた”が、  
先程見た通り  $\beta\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\vartheta$  は  $\beta\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\vartheta$ .

Ex.  $\Rightarrow 0+0'' = 0''+0$  の證明の書類例.

$\pi_1(a)$

$$0+a=a+0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\Rightarrow 0+a'=(0+a)'}{(0+a)'=(a+0)'} \text{TR} \quad \Rightarrow a+0=a \text{ FUN}$$

$$\frac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=(a+0)'}{\Rightarrow (a+0)'=a'} \text{TR} \quad \Rightarrow d+0=a' \text{ SYM}$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow a'=a+0 \text{ TR}$$

$$0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=d+0 \text{ CJ}$$

$$\Rightarrow 0+0=0+0$$

$$0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0 \text{ CUT}$$

$\pi_2(b)$

$$\Rightarrow 0+b=b+0$$

TR

$$0+0''=0''+0 \Rightarrow 0+0''=0+0 \text{ AL}$$

$$\Rightarrow \forall x (0+x=x+0)$$

$$\forall x (0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0 \text{ CVT}$$

$$\Rightarrow 0+0''=0''+0$$

見せよ $\vdash \alpha$   $\vdash 0 + a = a + 0 \vdash E(a)$  と略記する

$\pi_2(b)$

$\pi_1(a)$

$$E(a) \Rightarrow E(a')$$

CJ

$$\Rightarrow E(0)$$

$$E(0) \Rightarrow E(b)$$

CUT

$$\Rightarrow E(b)$$

VR

$$E(0') \Rightarrow E(0')$$

VL

$$\Rightarrow \forall x E(x)$$

$$\forall x E(x) \Rightarrow E(0'')$$

CUT

$$\Rightarrow E(0'')$$

①

これを次のように書く

$\pi_2(0'')$

$\pi_2(b)$

$$\Rightarrow E(0'')$$

$$\Rightarrow E(b)$$

$$E(0') \Rightarrow E(0')$$

$$\Rightarrow E(0') \wedge E(x)$$

$$\forall x E(x) \Rightarrow E(0'')$$

$$\Rightarrow \forall x E(x)$$

$$\forall x E(x), E(0') \Rightarrow E(0'')$$

$$\Rightarrow E(0'), E(0'')$$

$$E(0) \Rightarrow E(0'')$$

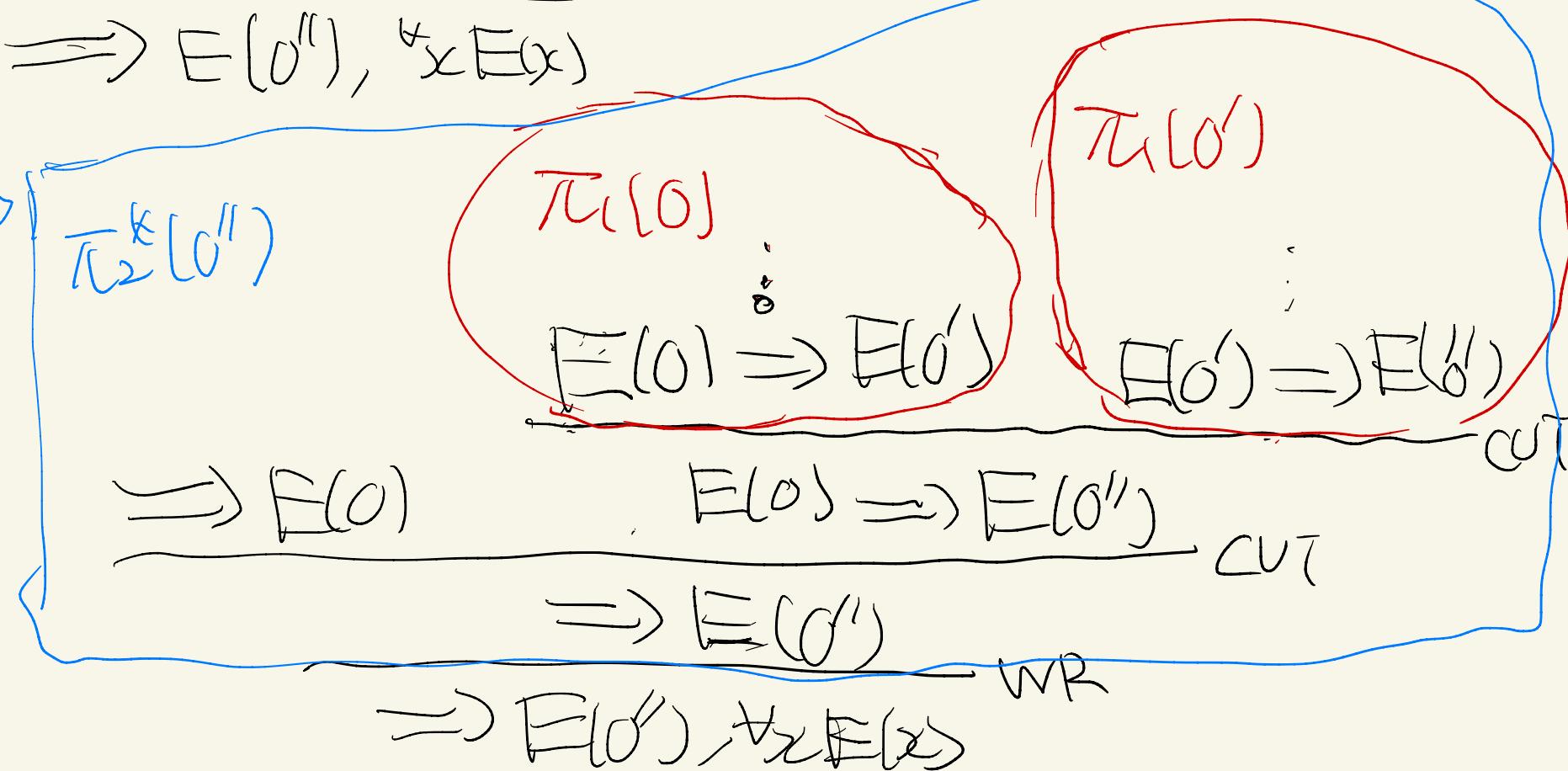
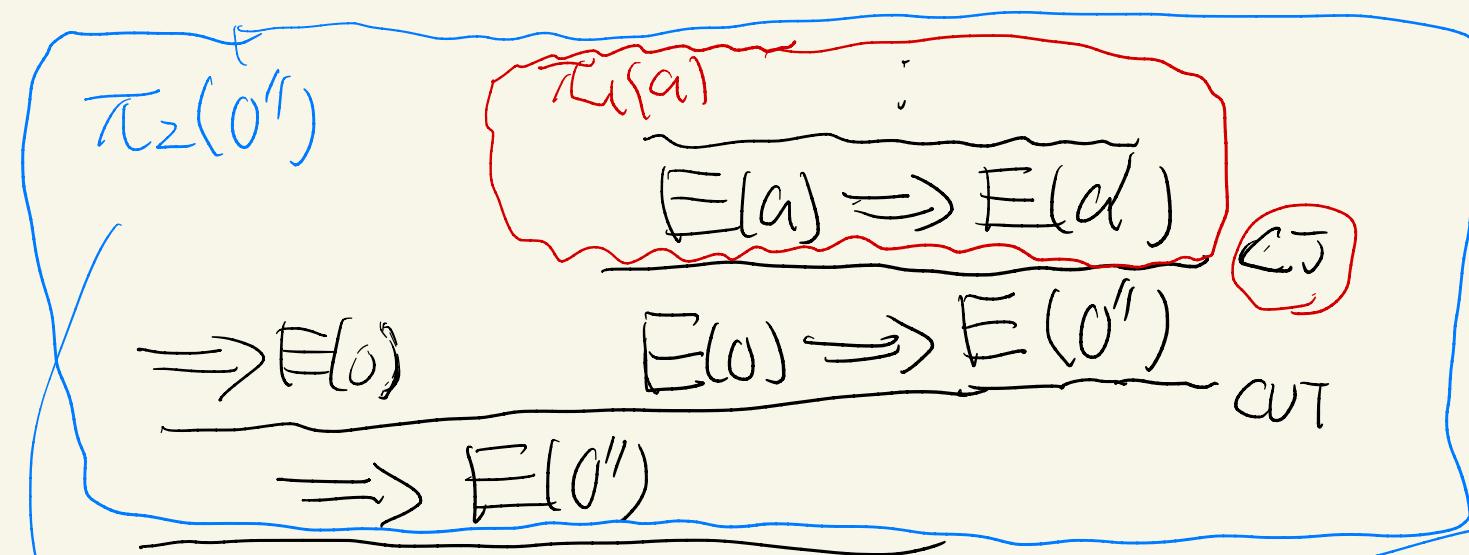
CUT

$$\Rightarrow E(0''), E(0)$$

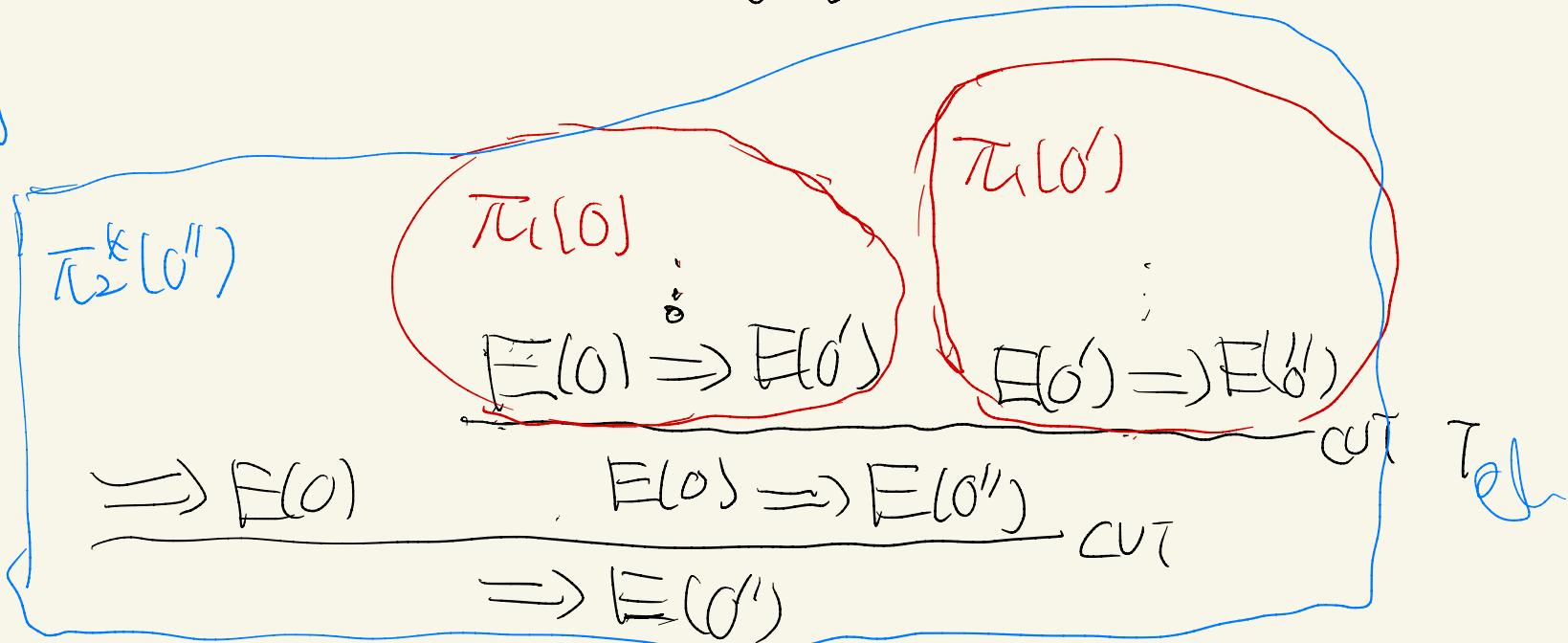
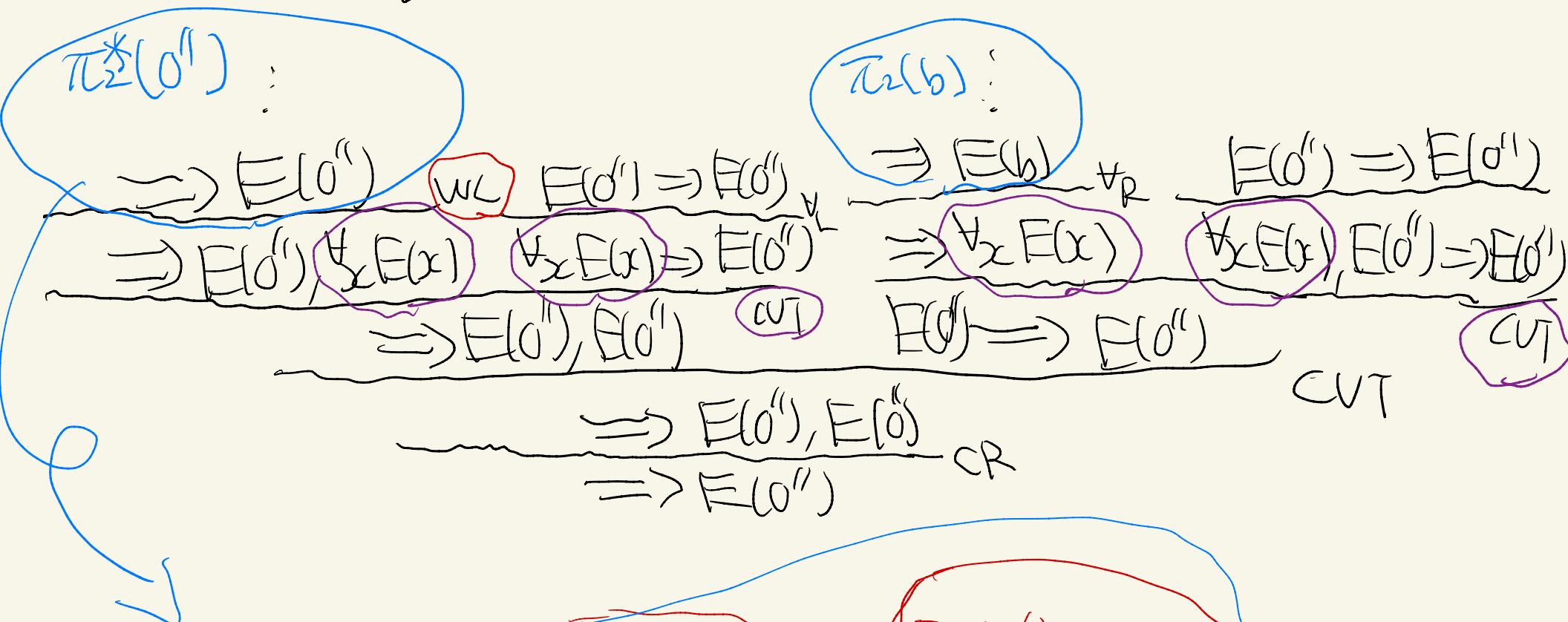
$$\Rightarrow E(0'')$$

CR

② 左上の  $\pi_2(0'')$  に赤字 帰納法を付す。



### ③ Weakening EIT す.



PLG の「 $\lambda$ 」の値は上位 (または順序数) です。

$\pi_2(b)$

$\pi_1(a)$

9

$$E(a) \rightarrow E(a')$$

CJ

$$\boxed{1 \Rightarrow E(0)}$$

$$w' \boxed{E(0) \Rightarrow E(b)}$$

$$w'+1 \rightsquigarrow E(b)$$

CUT

$$\boxed{1 \quad E(0') \Rightarrow E(0')}$$

$\forall_L$

$$w'+2 \rightsquigarrow \forall_x E(x)$$

$\forall_R$

2

$$\forall_x E(x) \Rightarrow E(0'')$$

CUT

$$w^{w'+4} \Rightarrow E(0'')$$

①

これを次のように書く、

$\pi_2(0'')$

$$w'+1 \rightsquigarrow E(0'')$$

$$\boxed{1 \quad E(0') \Rightarrow E(0'')}$$

$\pi_2(b)$

$$w'+1 \rightsquigarrow E(b)$$

$$\boxed{1 \quad E(0'') \Rightarrow E(0')}$$

$$w'+1 \rightsquigarrow E(0''), \forall_x E(x)$$

$$2 \forall_x E(x) \Rightarrow E(0'')$$

$$w'+2 \forall_x E(x)$$

$$\boxed{1 \quad \forall_x E(x), E(0'') \Rightarrow E(0')}$$

$$w^{w'+3}$$

$$\Rightarrow E(0''), E(0'')$$

$$\boxed{\text{CUT}}$$

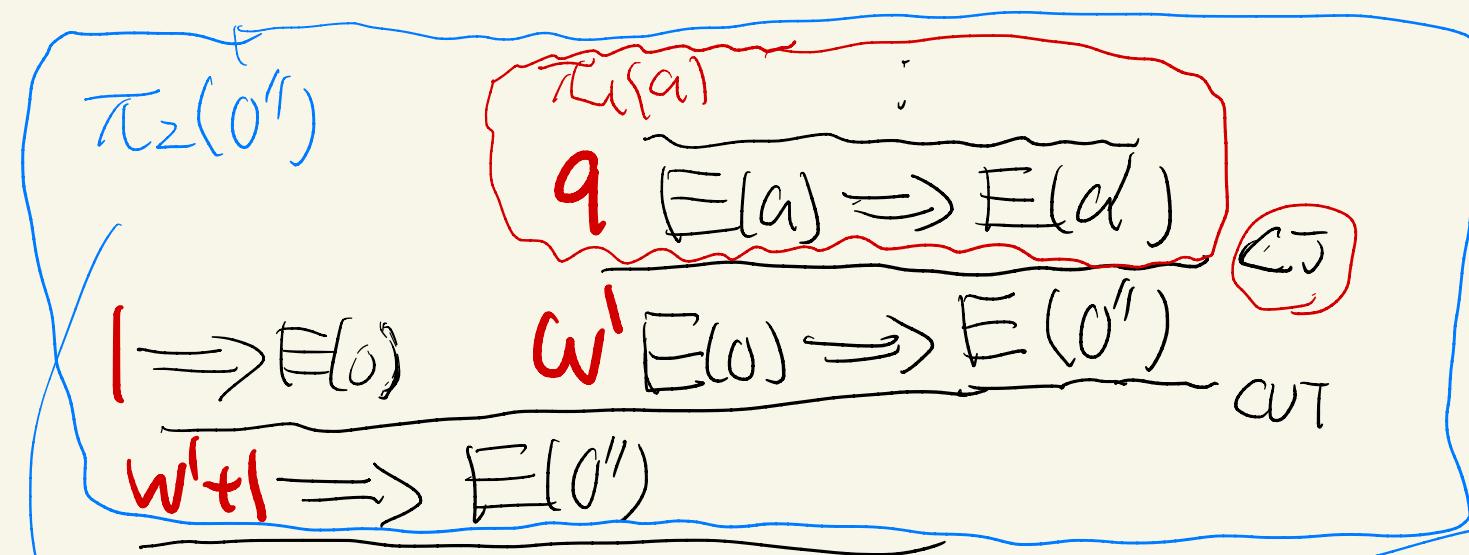
$$w^{w'+3} + w^{w'+3} \Rightarrow E(0'')$$

CR

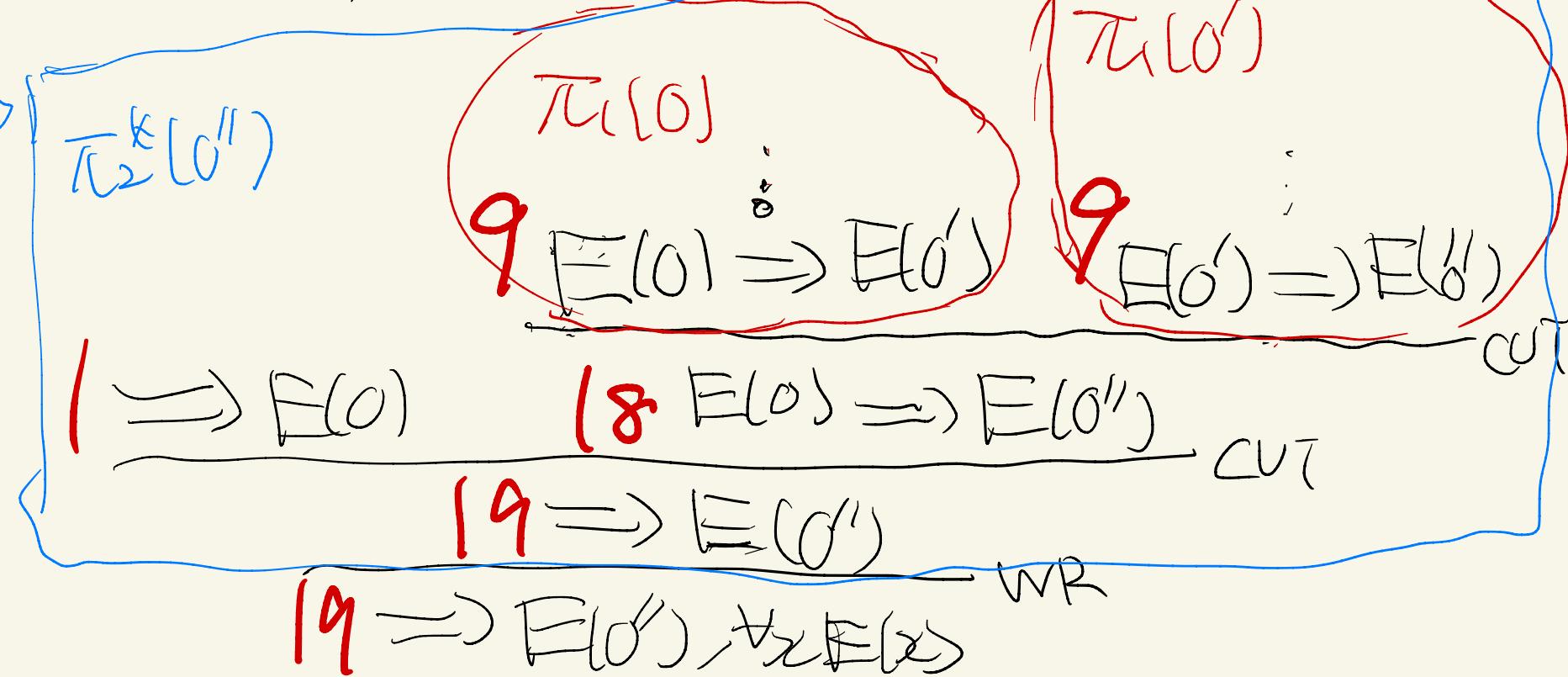
$$w^{w'+3} + w^{w'+3} \Rightarrow E(0'')$$

$$w^{w'+3} + w^{w'+3} \Rightarrow E(0'')$$

② 左上の  $\pi_2(0'')$  に赤字 帰納法を付す。



$\omega' + I \Rightarrow E(0''), \forall x E(x)$



### ③ Weakening EIT す.

