項書き換え系の例：

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{ll} ① & 0 + y \to y \\ ② & s(x) + y \to s(x+y) \end{array} \right\}$$

$$s(s(0)) + s(0) \xrightarrow[②]{}_{\mathcal{R}} s(s(0) + s(0))$$

$$\xrightarrow[②]{}_{\mathcal{R}} s(s(0 + s(0)))$$

$$\xrightarrow[①]{}_{\mathcal{R}} \underbrace{s(s(s(0)))}_{\text{正規形}}$$

例: $\mathcal{R} = \{ f(x) \to f(f(x)) \}$

$f(x) \to_{\mathcal{R}} f(f(x)) \to_{\mathcal{R}} f(f(f(x))) \to_{\mathcal{R}} \cdots,$

Prop. ある自然数上の多項式からなる狭義単調代数 $\mathcal{A}$ が存在して各規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ について $l >_{\mathcal{A}} r$ なら項書換系 $\mathcal{R}$ は停止性を持つ.

(Lankford, 1979)

例:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{ll} ① & 0 + y \to y \\ ② & s(x) + y \to s(x+y) \end{array} \right\}$$

代数 A を以下のように決める;

$0_A = 0 \qquad s_A(x) = x+1 \qquad x +_A y = 2x + y + 1$

このとき ① $0_A +_A y = y+1 > y$

② $$\begin{aligned} s_A(x) +_A y &= 2(x+1) + y + 1 \\ &= 2x + y + 3 \\ &> 2x + y + 2 \\ &= s_A(x +_A y). \end{aligned}$$

停止性証明から計算量についての情報を取り出す.

例: 先ほどの代数 A は

$0_A = 0 \qquad S_A(x) = x+1 \qquad x +_A y = 2x + y + 1$

書き換え列と A による解釈を比較:

$$\underline{S(S(0)) + S(0)}^{6} \longrightarrow S(S(0) + S(0))^{5}$$

$$\longrightarrow S(S(0 + S(0)))^{4}$$

$$\longrightarrow S(S(S(0)))^{3}$$

この項は6回以上書きかえられない!

Def. $dh_{\mathcal{R}}(t) = \max\{n \mid \exists t' \in NF(\mathcal{R}).\ t \to_{\mathcal{R}}^{n} t'\}$

$dc_{\mathcal{R}}(n) = \max\{ dh(t) \mid t \in \mathcal{T},\ |t| = n\}$

例: 足し算の項書き換え系 $\mathcal{R}$において

$dh_{\mathcal{R}}(s(s(0)) + s(0))) = 4$

実は $dc_{\mathcal{R}}(n)$ は少なくとも n^2のスケールはある.

$\underline{(s^n(0) + 0) + 0} \to_{\mathcal{R}}^{n+1} s^n(0) + 0$

size $n+5$ $\to_{\mathcal{R}}^{n+1} s^n(0)$

ステップ数$2(n+1)$.

(つづき)

$$\underbrace{(((S^n(0)+0)+0)+0)+\cdots\cdots+0}_{n\text{コの}0\text{を足す}}$$

size
$n+1+2n$
$=3n+1$

$$\xrightarrow{n+1} ((S^n(0)+0)+0)+\cdots+0$$

$\vdots$

$$\xrightarrow{n+1} S^n(0)$$

ステップ数 $n(n+1)$.

よって $dc_R(n)$ は少なくとも n^2 のオーダ〜。

Thm. (Hofbauer and Lautemann, 1989)

項書き換えシステム $\mathcal{R}$ に対し自然数上の線形狭義単調多項式からなる代数 $\mathcal{A}$ が存在し

各 $l \to r \in \mathcal{R}$ について $l >_{\mathcal{A}} r$ が存在するならば

$$dc_{\mathcal{R}}(n) \in 2^{O(n)}.$$

例： 足し算の例 $\mathcal{R}$ に対して代数 $\mathcal{A}$ として

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \qquad s_{\mathcal{A}}(x) = x+1 \qquad x +_{\mathcal{A}} y = 2x+y+1$$

が存在するから $dc_{\mathcal{R}}(n) \in 2^{O(n)}$.

<u>例</u>: $\mathcal{R} = \{ d(s(x)) \to s(s(d(x))) \}$ に対し

代数 A を $d_A(x) = 3x$ 　 $s_A(x) = x+1$ ととると

$$d_A(s_A(x)) = 3x+3 > 3x+2 = s_A(s_A(d_A(x))).$$

したがって $dc_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \in 2^{O(n)}$.

一方でこの評価は最良:

$$
\begin{aligned}
d^n s x &\to d^{n-1} s s d x \\
&\to^2 d^{n-2} s s s s d x \\
&\ \ \vdots \\
&\to s^{2^n} d^n x.
\end{aligned}
$$

ステップ数は $2^{n+1} - 1$.

Def. 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ に対し

$D_\mathcal{R}$: 規則の左辺の head symbol になっている記号

$C_\mathcal{R}$: $D_\mathcal{R}$ 以外

$C_\mathcal{R}$ と変数からなる項を constructor term という,

$f(t_1, \cdots, t_n)$ の形の項で

・$t_1, \cdots, t_n$: constructor terms でかつ

・$f \in D_\mathcal{R}$ を満たすものを

basic term という

例:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} 0 + x \to \\ s(x) + y \to s(x+y) \end{array} \right\}$$

$D_{\mathcal{R}} = \{+\}$ $C_{\mathcal{R}} = \{0, s\}$

constructor terms: $s(s(0))$, 0, $s(0)$, x

basic terms: $s(0)+s(0)$, $s(s(0))+s(0)$

$(s(0)+0)+0$ は basic term でない.

Def. $rc_{\mathcal{R}}(n) = \max\{ d^{h}_{\mathcal{R}}(t) \mid t$ は basic term で $|t| \le n \}$

Def. 代数 A が制限されているとは

$f \in C_{\mathcal{R}}$ に対して $f_A(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n + c_f$

の形であること。

Thm. (Bonfante et. al., 2001)

項書き換え系 $\mathcal{R}$ に対して制限された自然数上の

線形多項式からなる代数 A が存在して

$\mathcal{R} \subseteq >_A$ ならば $rc_{\mathcal{R}}(n) \in O(n)$.

例: $\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} 0 + y \to y \\ s(x) + y \to s(x+y) \end{array} \right\}$ に対して

A として $0_A = 0$ $\quad s_A(x) = x+1$ $\quad x +_A y = 2x+y+1$

をとれば $rc_{\mathcal{R}}(n) \in O(n)$ がわかる.

例: $\mathcal{R} = \{ d(s(x)) \to s(s(d(x))) \}$ に対し

A として $d_A(x) = 3x$ $\quad s_A(x) = x+1$ をとれば

$rc_{\mathcal{R}}(n) \in O(n)$ がわかる.