対数領域計算量クラス

齊藤哲平

December 21, 2024

TM: 入力テープと作業テープの区別があるチューリングマシン
非決定性･決定性に関わらず領域計算量は作業テープのみカウント

Definition
L は決定性 TM で対数領域で決定できる問題のクラス. すなわち:

$$\mathsf{L} = \mathsf{SPACE}(\log n)$$

同様に NL は非決定性 TM で対数領域で決定できる問題のクラス

$$\mathsf{NL} = \mathsf{NSPACE}(\log n)$$

Theorem (Immerman–Szelepcsényi の定理)
$\mathsf{NL} = \mathsf{coNL}$

NL $=$ coNL の位置づけ

L $=$ NL かどうかは未解決だが、1つのアプローチは...

命題

L $=$ NL ならば NL $=$ coNL; すなわち NL $\neq$ coNL ならば L $\neq$ NL

しかし NL $=$ coNL なので、このアプローチは使えない!

命題 (参考)

P $=$ NP ならば NP $=$ coNP; すなわち NP $\neq$ coNP ならば P $\neq$ NP

チョムスキー階層との比較

言語	機械	complement
帰納的可算	チューリングマシン	not closed
文脈依存	線形拘束オートマトン (LBA)	closed
文脈自由	プッシュダウン・オートマトン	not closed
正規	有限オートマトン	closed

Table: チョムスキー階層と閉包特性

文脈依存言語が補に閉じていることは NL = coNL の系（らしい）

cf. 黒田の第二 LBA 問題（否定的解決）

$\overline{\textbf{PATH}} \in \textbf{NL}$ ならば $\textbf{NL} = \textbf{coNL}$

命題

以下の決定問題 PATH は NL 完全問題:

入力: 有向グラフ G と頂点 s, t

出力: s から t へのパスが存在するかどうか ($\exists$)

命題

以下の決定問題 $\overline{\text{PATH}}$ は coNL 完全問題:

入力: 有向グラフ G と頂点 s, t

出力: s から t へのパスが存在しないかどうか ($\forall$)

Lemma

$\overline{\text{PATH}} \in \text{NL}$ ならば $\text{NL} = \text{coNL}$

困難さ: 非決定的探索は $\exists$ 型の問題が得意; $\forall$ 型の問題は苦手?

$\overline{\textsf{PATH}} \in \textsf{NL}$ の方針

命題

以下の決定問題 $\overline{\text{PATH}}$ は coNL 完全問題:

入力: 有向グラフ G と頂点 s, t

出力: s から t へのパスが存在しないかどうか ($\forall$)

$\overline{\text{PATH}}$ を対数領域で解く非決定的アルゴリズムを構成する

1. 始点 s から到達可能な頂点の数 c を計算する(次のスライド)
2. G の頂点を非決定的に選び、c を検証する
   - ただし、最中に t に到達可能と判明したなら reject
   - 到達可能性判定には PATH の解法が使える

c を用いた、適当な到達可能な頂点集合の存在($\exists$) への言い換え

s から到達可能な頂点数 c の計算

s から i ステップ以内に到達可能な頂点数を c_i とする

- $c_0 = 1$
- c_i から c_{i+1} を計算する (*)
- 最後に $c = c_m$ とする（m はグラフの辺の数）

(*) 次の言いかえを使う

- 頂点 v は s から $i+1$ ステップ以内に到達可能
- 次の条件を満たすグラフの頂点の部分集合 U が存在する
  - s から u へ i ステップ以内に到達可能
  - ある頂点 $u \in U$ が v への辺を持つ
  - $|U| = c_i$

前のスライドの c の検証法と同様に U を非決定的に選べばよい！

感想

この証明は Uezato 2024 の鍵になっている

適当な頂点集合の存在とその検証への帰着が肝？

辺に重みがあったらダメそう

もっとアルゴリズムを壊して遊ばないと本質部分が見えなさそう