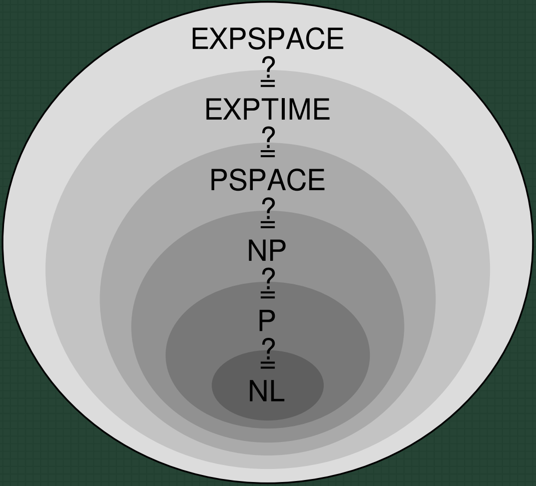
対数領域計算量クラス

齊藤哲平

November 16, 2024



$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} = \mathsf{coNL} \subseteq \mathsf{L}^2$$

TM: 入力テープと作業テープの区別があるチューリングマシン
非決定性･決定性に関わらず領域計算量は作業テープのみカウント

Definition
L は決定性 TM で対数領域で決定できる問題のクラス. すなわち:

$$\mathsf{L} = \mathsf{SPACE}(\log n)$$

同様に NL は非決定性 TM で対数領域で決定できる問題のクラス

$$\mathsf{NL} = \mathsf{NSPACE}(\log n)$$

命題
$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL}$

命題

言語 $\{0^k1^k \mid k \in \mathbf{N}\}$ は L に属する

証明.

0 と 1 の数を二進数でカウントする決定性 TM で認識可能

Definition

以下の決定問題を PATH と呼ぶ

入力: 有向グラフ G と頂点 s, t

出力: G において s から t へのパスは存在するか?

命題

PATH は NL に属する

証明.

非決定的に歩く(現在の頂点と、ステップ数だけ覚えておけば良い)

対数領域還元: 入力･作業･出力テープを持つ TM で定義
領域計算量は作業テープのみカウント

Definition
言語 A が NL 完全とは以下の2つの条件が成立すること

- $A \in$ NL
- 任意の $B \in$ NL が A に対数領域還元可能

命題
もしある NL 完全な言語が L に属するなら NL $=$ L

証明の注意点: 対数領域還元はオンデマンドで使用すること

Theorem
PATH は NL 完全

証明.
非決定性 TM の状況を頂点, 遷移可能性を辺したグラフを考える

Corollary
$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

証明.
PATH は多項式時間で決定可能

Theorem
NL $\subseteq$ L^2. ここで L^2 $=$ SPACE$((\log n)^2)$

証明.
PATH は $O((\log n)^2)$ 領域で解ける (cf. Savitch の定理)
サブルーチン $f(s,t,k)$: s から t まで k ステップで到達できるか?

$k=0$ なら $s=t$ か調べる

$k=1$ なら s から t への辺があるか調べる

$k>1$ なら $f(s,u,\lfloor k/2 \rfloor)$ かつ $f(s,u,\lceil k/2 \rceil)$ をみたす u を探す

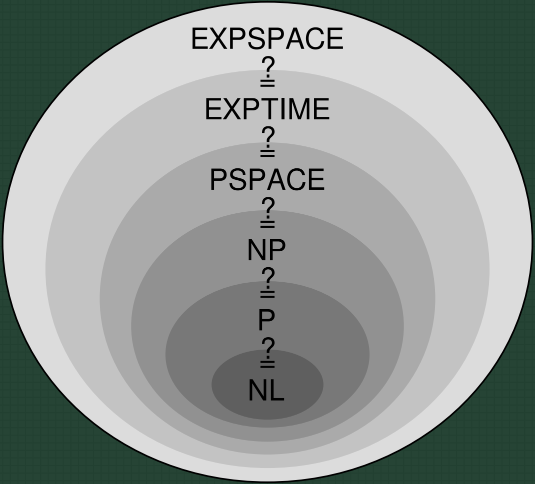
各再帰呼び出しで必要なメモリ・再帰の深さはいずれも $O(\log n)$

Theorem (Savitch の定理)
$O(f(n))$ 領域を利用する 非決定性 TM で決定できる問題は
$O(f(n)^2)$ 領域を利用する 決定性 TM で決定できる

Theorem (Immerman–Szelepcsényi の定理)

$\mathrm{NL} = \mathrm{coNL}$

次回やるかも？



$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} = \mathsf{coNL} \subseteq \mathsf{L}^2$$