Aguilera and Baaz (2019) の紹介。

Drinker Paradoxの証明

(1) ゲーデルがオーストリア人であると仮定すると
ゲーデルはオーストリア人である.

(2) よって、ゲーデルがオーストリア人であると仮定すると
すべての人はオーストリア人である.

(3) よって、ゲーデルがオーストリア人ならば
すべての人はオーストリア人である.

(4) よって、ある人が存在して、その人がオーストリア人ならば
すべての人はオーストリア人である.

LK風にすると

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \vdash A(a)}{A(a) \vdash \forall y\, A(y)}}{\vdash A(a) \to \forall y\, A(y)}}{\vdash \exists x\, (A(x) \to \forall y\, A(y))}$$

unsound!

LKの固有変数条件(☆)

(∀L)

$$\frac{\Gamma, A(\boxed{t}) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta}$$

(∀R) 固有変数

$$\frac{\Gamma \vdash A(\boxed{a}), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}$$

(∃L) 固有変数

$$\frac{\Gamma, A(\boxed{a}) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \Delta}$$

(∃R)

$$\frac{\Gamma \vdash A(\boxed{t}), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta}$$

$\boxed{t}$は任意の項でよいが、$\boxed{a}$は下式に表われない変数でなければならない。(☆)

def: LK^+ (Aguilera and Baaz, 2019)

LKの固有変数条件を以下の3つの条件でおき換えた体系をLK^+と呼ぶ。

- substitutability
- side-variable condition
- weak regularity

...

(substitutability)

証明の結論に固有変数が現れてはいけない。

例1:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \vdash A(\boxed{a})}{A(a) \vdash \forall y\, A(y)}\ (\forall R)}{\vdash A(a) \to \forall y\, A(y)}}{\vdash \exists x\, (A(x) \to \forall y\, A(y))}\ (\exists R)
$$

OK!

例2:

$$
\dfrac{A(a) \vdash A(\boxed{a})}{A(\boxed{a}) \vdash \forall y\, A(y)}\ (\forall R)
$$

NG!

(side variable condition)

証明πにおいて自由変数上の2項関係 $>_\pi$ はサイクル ($a >_\pi \cdots >_\pi a$) をもたない。

ここで、証明πに

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(\cdots, \boxed{a}, \boxed{b}, \cdots)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A(\cdots, x, \boxed{b}, \cdots)} \quad \text{or} \quad \frac{A(\cdots, \boxed{a}, \boxed{b}, \cdots), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A(\cdots, x, \boxed{b}, \cdots), \Gamma \vdash \Delta}$$

が現れるとき $\boxed{a} >_\pi \boxed{b}$ とかくとする。

(多分このschemaでは変数の順序は関係ない?)

例:

$$
\begin{array}{cl}
P(a,a) \vdash P(a,a) & \\ \hline
\forall x\, P(x,x) \vdash P(\boxed{a}, \boxed{a}) & \\ \hline
\forall x\, P(x,x) \vdash \forall y\, P(y, \boxed{a}) & \forall R \\ \hline
\forall x\, P(x,x) \vdash \exists x \forall y\, P(y, x) &
\end{array}
$$

この証明図はサイクル $\boxed{a} >_\pi \boxed{a}$ をもつ

よって side-variable condition をみたさない.

(weak regularity)

同じ自由変数が固有変数として二度使われてはいけない。

例：以下の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a) \vdash P(a)}{P(a) \vdash \forall x P(x)}\ (\boxed{\forall R})}{\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)}\ (\exists L)}{\vdash \exists x P(x) \to \forall x P(x)}$$

は weak regularity をみたさない。

(cf. drinker paradox は $\exists x (P(x) \to \forall x P(x))$)

例：(drinker paradox の LK^{+} における証明)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \vdash A(a)}{A(a) \vdash \forall y\, A(y)}\ (\forall R)}{\vdash A(a) \to \forall y\, A(y)}}{\vdash \exists x\, (A(x) \to \forall y\, A(y))}\ (\exists L)$$

- substitutability
- side-variable condition
- weak regularity

いずれも OK

LK$^+$は健全である:

<u>prop</u>: (Aguilera and Baaz, 2019)

$$\boxed{\text{LK}^+\text{で証明できる sequent は LK でも証明できる.}}$$

~~逆はダメそうだけど自由変数が出てこなかったら大丈夫? (例): $A(a) \vdash \forall a\, A(a)$)~~

これはLKで証明できないので

反例になってない

LK$^+$で非初等的に証明が短くなる例がある。

<u>def</u>: 初等関数は $+, \times, 2^x$ で作られる関数のクラス。

<u>prop</u> (Aguilera and Baaz, 2019)

以下をみたす初等関数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は存在しない。

任意の LK$^+$で証明できる sequent $\Gamma \vdash \Delta$ に対して

$$|\pi| < f(|\pi^+|)$$

ここで π, π^+ はそれぞれ LK, LK$^+$における cut-free な

$\Gamma \vdash \Delta$ の証明で、推論の数が最小のもの。

例: drinker paradox の LK における証明.

$$A(a) \vdash A(a)$$

$$A(a) \vdash A(a), \forall y\, A(y)$$

$$\vdash A(a),\ A(a) \to \forall y\, A(y) \qquad (\exists R)$$

$$\vdash A(a),\ \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y)) \qquad (\forall R)$$

$$\vdash \forall y\, A(y),\ \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y))$$

$$A(a) \vdash \forall y\, A(y),\ \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y))$$

$$\vdash A(a) \to \forall y\, A(y),\ \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y))$$

$$\vdash \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y)),\ \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y))$$

$$\vdash \exists x\,(A(x) \to \forall y\, A(y))$$

まとめ

Aguilera と Baaz (2019) による大域的な条件を課した $LK^{\dagger}$ をみた。

- substitutability
- side-variable condition
- weak regularity

$LK^{\dagger}$ は LK より短い証明を書ける。