Modal Mu Calculus Part 2

北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科（青木研究室）

長谷川 央

2023-2-11

自己紹介

名前
長谷川 央（ハセガワ アキラ）

経歴

1997	愛知県豊田市で生まれる
2016	名古屋大学教育学部附属中・高卒
2016–2020	三重大学 総合情報処理センター主催 講習会「パソコン分解講習会」TA
2019	三重大学 総合情報処理センター主催 講習会「Linux 実践入門」講師
2020	北陸先端科学技術大学院大学 入学

はじめに

モデル検査を始めとした様々な分野で時相論理が使用されている

時相論理には LTL や CTL 以外にも μ-calculus というものがある

前回は μ-calculus の形式的な定義を見たがいまいちピンと来なかったと思う

今回は直感的な意味に焦点を当てて紹介する

様相論理 K モデル

命題論理式の定義に $\Box\varphi$ と $\Diamond\varphi$ を追加したものを K 論理式という

K 論理式の真理値は状態遷移系（クリプキフレーム）上で扱われる

状態遷移系の定義
$\langle S, \rightsquigarrow \rangle$, where

- S：状態の集合（無限集合も可）
- $\rightsquigarrow$：遷移関数

この状態遷移系に付値関数を追加したものを K モデル（クリプキモデル）と呼ぶ

K モデルの定義
$\langle S, \rightsquigarrow, f \rangle$, where

- f：PropVar$\times S \rightarrow$ {true,false}

K モデルの $\models$ の定義

$M = \langle S, \rightsquigarrow, f \rangle$ の充足関係 $\models$ の定義

(1) $f(p, s) = \mathrm{true}$ならば$M, s \models p$. falseならば$M, s \not\models p$.

(2) $M, s \models \top$

(3) $M, s \not\models \bot$

(4) $M, s \models \neg\varphi \iff M, s \not\models \varphi$.

(5) $M, s \models \varphi \wedge \psi \iff M, s \models \varphi$かつ$M, s \models \psi$

(6) $M, s \models \varphi \vee \psi \iff M, s \models \varphi$または$M, s \models \psi$

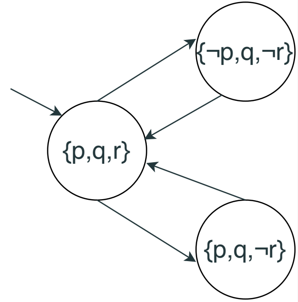
(7) $M, s \models \varphi \to \psi \iff M, s \not\models \varphi$または$M, s \models \psi$

(8) $M, s \models \varphi \longleftrightarrow \psi \iff$ （省略）

(9) $M, s \models \Box\varphi \iff s \rightsquigarrow t$となる任意の$t$に対して$M, t \models \varphi$

(10) $M, s \models \Diamond\varphi \iff s \rightsquigarrow t$となる$t$が存在して$M, t \models \varphi$

K 論理式の例

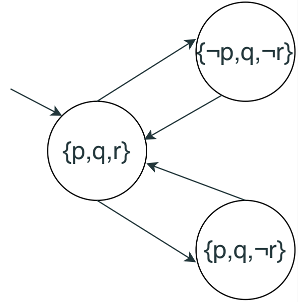


$M \not\models \Box p$ (CTL では$\mathbf{AX}p$)

$M \models \Box^2 p (\iff M \models \Box\Box p)$

$M \models \Diamond p$ (CTL では$\mathbf{EX}p$)

K の拡張



「常に q が真である」と書きたい ⇒ 拡張して書けるようにする

K に様相記号 $\Box^*$ を追加し，論理 $\mathbf{K}^*$ と呼ぶ．ただし，$\rightsquigarrow^n$ は n ステップの遷移を意味する．

$$M, s \models \Box^* \varphi \iff (\forall n \geq 0)(\forall t)(s \rightsquigarrow^n t \text{ならば} M, t \models \varphi)$$

様相記号 $\Box^*$ を使うと，$M \models \Box^* q$ と書ける．

不動点演算子の導入

$M \models \Box^* q \iff M \models q \wedge \Box\Box^* q \iff M \models q \wedge \Box q \wedge \Box\Box\Box^* q$ は恒真である

この傾向を使うと $\Box^*$ の代わりに不動点演算子 ν を導入して，次式のようにも書ける

$$\nu x.(q \wedge \Box x)$$

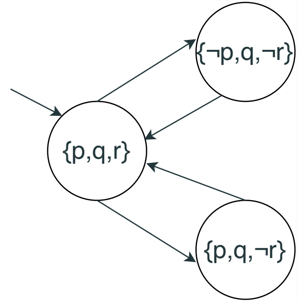
K に不動点演算子 μ と ν を導入して拡張したものを様相 μ 計算 (modal μ-calculus) と言う

μ と ν の直感的な違いは次の通り

- $\nu x.(\varphi \wedge \Box x) = \Box^* \varphi$（無限パスでも良い，無限パスでなくても良い）
- $\mu x.(\varphi \wedge \Box x) =$「$\Box^* \varphi$ が成り立ち，かつ，無限パスではない」

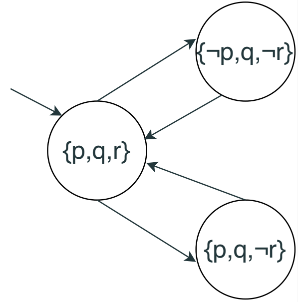
Note: $\Box\varphi$ は遷移先がない場合，無条件に真となる

不動点演算子の例



「常に q が成り立つ」 $\iff \nu x.(q \land \Box x)$（CTL では $\mathbf{AG}q$）
「どの無限パス上にも $\neg r$ となる状態がある」 $\iff \mu x.(\neg r \lor \Box x)$（CTL では $\mathbf{AF}(\neg r)$）
「初期状態から始まるある無限パスが存在して，その上で $\neg r$ が無限回真になる」
$\iff \nu x.\mu y.((\neg r \land \Diamond x) \lor \Diamond y)$（CTL では $\mathbf{EGF}\neg r$）

CTL*で書けない性質



μ-calculus では，CTL*で扱えない性質も書き表せる

「**偶数回遷移後に**常に p が成り立つ」$\iff$ $\nu x.(p \land \Box\Box x)$
（参考：「常に q が成り立つ」$\iff$ $\nu x.(q \land \Box x)$（CTL では $\mathbf{AG}q$））

前回のスライドの μ-Calculus の μ と ν の例

前回スライドから引用した次の Kripke structure 上で $\nu Q_1.(p \vee \langle b \rangle Q_1)$ と $\mu Q_2.(p \vee \langle b \rangle Q_2)$ を考える

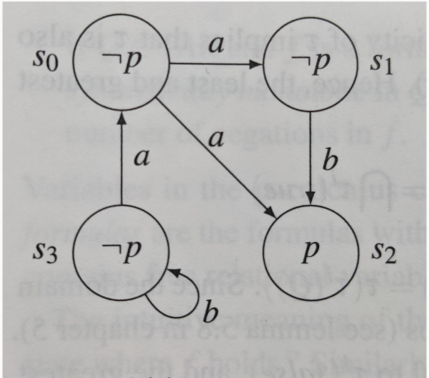


Figure 16.1
A modified Kripke structure.

各論理式が成り立つ状態の集合は以下の通り

$[\![\nu Q_1.(p \vee \langle b \rangle Q_1)]\!]_M e = \{s_1, s_2, s_3\}$

$[\![\mu Q_2.(p \vee \langle b \rangle Q_2)]\!]_M e = \{s_1, s_2\}$

ν の方は s_3 も入っているが，これは s_3 の自己遷移による無限ループで論理式を満たしている

一方，μ では無限パスを許さないため，必ず p に到達する必要がある

よって，b のみを 0 回以上実行して p が真となる状態へ到達する s_1 と s_2 のみが集合に入っている

おまけ

定理 4.7.1　評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s_0)$ のどんな無限プレイ P に対しても，上記の条件 (4.6) を満たす束縛変数 x_0 が（P ごとに）ただ一つ存在する．

表 4.1　局面 (φ, s) からの進行ルール

φ	手番	論理式駒の動き	状態駒の動き
$\wedge$	否定者	一つ下へ	s のまま
$\vee$	肯定者	一つ下へ	s のまま
$\Box$	否定者	一つ下へ	s から 1 回遷移，できなければ肯定者の勝利で終了
$\Diamond$	肯定者	一つ下へ	s から 1 回遷移，できなければ否定者の勝利で終了
ηx	—	一つ下へ	s のまま
束縛変数 x	—	ηx の一つ下へ	s のまま
上記以外 (注)	φ が s で真ならば肯定者の勝利で終了，偽ならば否定者の勝利で終了		

（注）上記以外とはリテラル，⊤，⊥ のどれかである．

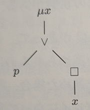


図 4.3　論理式 $\varphi = \mu x.(p \vee \Box x)$

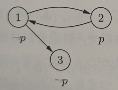


図 4.4　モデル M_0

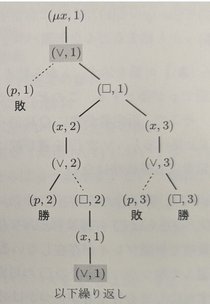


図 4.5　$\mathcal{E}(\varphi, M_0, 1)$ の完全ゲーム木

「コンピュータサイエンスにおける様相論理」（鹿島 亮著）より

まとめ

- μ-calculus は 2 つの不動点演算子を K 論理式の定義に追加したものである
- ν は無限パスを許し，μ は無限パスを許さないという違いがある
- μ-calculus の表現力は CTL*よりも高い