ackerman 関数が
原始再帰関数でないことの証明.

定義. $ack: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は以下をみたす関数

$$ack(x, y) = \begin{cases} y+1 & (x=0) \\ ack(x-1, 1) & (x>0 \text{ かつ } y=0) \\ ack(x-1, ack(x, y-1)) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

例.
$$\begin{aligned} ack(1,2) &= ack(0, ack(1,1)) \\ &= ack(0, ack(0, ack(1,0))) \\ &= ack(0, ack(0, ack(0,1))) \\ &= ack(0, ack(0,2)) \\ &= ack(0,3) = 4 \end{aligned}$$

例: $ack(1,3)$

$= ack(0, \underline{ack(1,2)})$

$= ack(0, ack(0, \underline{ack(1,1)}))$

$= ack(0, ack(0, ack(0, \underline{ack(1,0)})))$

$= ack(0, ack(0, ack(0, \underline{ack(0,1)})))$

$= 5.$

cf. $ack(0,b) = b+1$

prop. $ack(1,b) = b+2.$

例. ack(2, 1)

$$= ack(1, \underline{ack(2, 0)})$$

$$= ack(1, \underline{ack(1, 1)})$$

$$= ack(1, 3)$$

$$= 5$$

例. ack(2, 2)

$$= ack(1, \underline{ack(2, 1)})$$

$$= ack(1, ack(1, \underline{ack(2, 0)}))$$

$$= ack(1, ack(1, ack(1, 1)))$$

$$= 7$$

Prop. $\mathrm{ack}(2, b) = 2b + 3$

例. $\mathrm{ack}(3, 1)$

$= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(3, 0))$

$= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(2, 1))$

$= \mathrm{ack}(2, 5)$

$= 13$

例. $\mathrm{ack}(3,2)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(3,1)) \\
&= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(3,0))) \\
&= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(2,1))) \\
&= \mathrm{ack}(2, \mathrm{ack}(2,5)) \\
&= \mathrm{ack}(2,13) \\
&= 29.
\end{aligned}
$$

命題 $\mathrm{ack}(3,k) > 2^k$

例. $\mathrm{ack}(4,2)$

$$= \mathrm{ack}(3, \mathrm{ack}(4,1))$$

$$= \mathrm{ack}(3, \mathrm{ack}(3, \mathrm{ack}(3,0)))$$

$$> \mathrm{ack}(3, \mathrm{ack}(3, 2^0))$$

$$> \mathrm{ack}(3, 2^{2^0})$$

$$> 2^{2^{2^0}}.$$

命題. $\mathrm{ack}(4,a) > 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}}} \Big\}$ 高さ $a+1$

例. $\mathrm{ack}(4,4) > 2^{2^{2^{2^{2^0}}}} = 2^{16} > 6$万.

まとめると…

- $ack(0,b) = b+1$
- $ack(1,b) = b+2$
- $ack(2,b) = 2b+3$
- $ack(3,b) > 2^b$
- $ack(4,b) > \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}}} \right\}$ 高さ $b+1$

定義: 原始再帰関数は

- 定数関数 $z(x) = 0$
- 後者関数 $s(x) = x+1$
- 射影関数 $\pi^n_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$

を含み、さらに

- 関数合成 と
- 原始再帰

で閉じている自然数上の関数の集合で最小のもの.

定義: $g:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ と

$h_1,\cdots,h_m:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ の関数合成で

得られる関数 $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ は

$f(\vec{x})=g(h_1(\vec{x}),\cdots,h_m(\vec{x}))$ で

定義される. ここで $\vec{x}$ は $\mathbb{N}^n$ の元を表す.

定義： $g: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

$h: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ から原始再帰で

得られる関数 $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ は

$$f(x, \vec{z}) = \begin{cases} g(\vec{z}) & (x = 0) \\ h(f(x-1, \vec{z}), x-1, \vec{z}) & (x > 0) \end{cases}$$

で定義される. ここで $\vec{z} \in \mathbb{N}^n$.

例. $f(x,y)=x+y$ は原始再帰関数.

$$g(y)=\pi^1_1(y)$$

$$h(x_1,x_2,x_3)=S(\pi^3_1(x_1,x_2,x_3))$$

に対して原始再帰を用いればよい.

$$\left(\begin{array}{l}\text{アイデア}: \\ \qquad 0+y=y \\ \qquad (x+1)+y=1+(x+y)\end{array}\right)$$

例。 $f(x, y) = x \times y$ は原始再帰関数.

アイデア: $0 \times y = 0$

$(x+1) \times y = x \times y + y$

$g(y) = z(y)$

$h(x_1, x_2, x_3) = \pi^3_1(x_1, x_2, x_3) + \pi^3_3(x_1, x_2, x_3)$

で原子再帰を用いればよい.

アッカーマン関数 ack が原始再帰関数でないことを示したい。

補題：任意の原始再帰関数 $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ に対してある $c \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f(x_1, \cdots, x_n) < \mathrm{ack}(c, \max\{x_1, \cdots, x_n\})$$

が任意の $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$ について成立する。

補題：任意の $x, y \in \mathbb{N}$ について

- $ack(x+1, y) > ack(x, y)$
- $ack(x, y+1) > ack(x, y)$
- $ack(x, y) > y$
- $ack(x+1, y) \geq ack(x, y+1)$
- $ack(x+2, y) > ack(x, 2y)$.

補題. $\mathrm{ack}(x+1, y) \geq \mathrm{ack}(x, y+1)$.

証明. yに関する帰納法.

- $y = 0$ のとき

$$\mathrm{ack}(x+1, y) = \mathrm{ack}(x, 1) = \mathrm{ack}(x, y+1).$$

- $y > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{ack}(x+1, y) &= \mathrm{ack}(x, \mathrm{ack}(x+1, y-1)) \\
&\geq \mathrm{ack}(x, \mathrm{ack}(x, y)) && \text{(I.H.)} \\
&\geq \mathrm{ack}(x, y+1). && (\mathrm{ack}(x,y) > y)
\end{aligned}$$

$\square$

補題: 任意の原始再帰関数 $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ に対しある $c \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f(x_1, \cdots, x_n) < ack(c, \max\{x_1, \cdots, x_n\})$$

が任意の $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$ について成立する

証明. 原始再帰関数の構成に関する帰納法.

$$Z(x) = 0 < ack(0, \max\{x\})$$

$$S(x) = x+1 < ack(1, \max\{x\})$$

$$\pi^n_j(x_1, \cdots, x_n) = x_j < ack(0, \max\{x_1, \cdots, x_n\})$$

(関数合成) $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ は $g: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ と

$h_1, \cdots, h_m: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ の合成であるとする:

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \cdots, h_m(\vec{x})).$$

I.H. からある $c_0, \cdots, c_m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$g(y_1, \cdots, y_m) < ack(c_0, \max\{y_1, \cdots, y_m\})$$

$$h_i(\vec{x}) < ack(c_i, \max \vec{x})$$ である.

このとき $f(\vec{x}) < ack(c_0, \max\{h_1(\vec{x}), \cdots, h_m(\vec{x})\})$

$$\leq ack(c_0, ack(\max\{c_1, \cdots, c_m\}, \max \vec{x}))$$

(ここで, $M = \max\{c_0, \cdots, c_m\}$ とする)

$$\leq \mathrm{ack}(M, \mathrm{ack}(M+1, \max \vec{x}))$$

$$= \mathrm{ack}(M+1, \max \vec{x} + 1)$$

$$\leq \mathrm{ack}(\underline{M+2}, \max \vec{x})$$

(最後に $\mathrm{ack}(x+1, y) \geq \mathrm{ack}(x, y+1)$ を用いた。)

したがって

$$f(\vec{x}) < \mathrm{ack}(\underline{M+2}, \max \vec{x}).$$

(原始再帰) $f: \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ は以下で与えられるとする。

$$f(x, \vec{z}) = \begin{cases} g(\vec{z}) & (x = 0) \\ h(f(x-1, \vec{z}), x-1, \vec{z}) & (x > 0) \end{cases}$$

このとき、I.H. から ある C_g, C_h が存在して

$g(\vec{z}) < ack(C_g, \max \vec{z})$

$h(x_1, x_2, \vec{z}) < ack(C_h, \max\{x_1, x_2, \vec{z}\})$.

(ここで直接 $f(x, \vec{z}) < ack(C, \max\{x, \vec{z}\})$

なる C をとろうとすると、うまくいかない!!)

主張. $f(x,\vec{z}) < \mathrm{ack}(c', x+\max\vec{z})$

ここで $c' = \max\{c_g, c_h+1\}$. $\max\{x,\vec{z}\}$

証明. xに関する帰納法.

(x=0のとき) $f(x,\vec{z}) = g(\vec{z}) < \mathrm{ack}(c_g, \max\vec{z})$

(x>0のとき)

$$\le \mathrm{ack}(c', x+\max\vec{z}).$$

$$
\begin{aligned}
f(x,\vec{z}) &= h(f(x-1,\vec{z}), x-1, \vec{z}) \\
&< \mathrm{ack}(c_h, \max\{f(x-1,\vec{z}), x-1, \vec{z}\}) \\
&< \mathrm{ack}(c_h, \max\{\mathrm{ack}(c', x-1+\max\vec{z}), x-1, \vec{z}\}) \\
&< \mathrm{ack}(c_h, \mathrm{ack}(c', x-1+\max\vec{z})) \\
&\le \mathrm{ack}(c'-1, \mathrm{ack}(c', x-1+\max\vec{z})) \\
&< \mathrm{ack}(c', x+\max\vec{z}). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

したがって

$$f(x, \vec{z}) < ack(c', x + \max\{\vec{z}\})$$
$$\leq ack(c', 2\max\{x, \vec{z}\})$$
$$< ack(\underline{c'+2}, \max\{x, \vec{z}\}).$$

ここで最後に

$ack(x+2, z) > ack(x, 2z)$ を使った!

以上ですべてのケースで適当な $c \in \mathbb{N}$ について

$f(\vec{x}) < ack(c, \max \vec{x})$ が示せた. □

定理: ackは原始再帰関数でない.

証明. もしそうならある$c \in \mathbb{N}$について

任意の$x, y \in \mathbb{N}$について

$$ack(x, y) < ack(c, \max\{x, y\}).$$

ここで$x = y = c$とすれば

$ack(c, c) < ack(c, c)$となり矛盾. □

一方でackは原始再帰関数に
minimization μを加えればつくれることが
知られている.
その体系は再帰関数と呼ばれ
計算可能性を特徴づけている.
(参考資料: Aart Middeldorp先生の
Computability Theoryの講義資料).