Def. 初項sの弱グッドスタイン数列$\{a_n\}_{n\geq 2}$

- $a_2 = s$
- $n>2$に対して、
  - $a_{n-1}>0$の$(n-1)$進展開が

    $a_k(n-1)^k + \cdots + a_1(n-1) + a_0$のとき

    $a_n = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 - 1$
  - $a_{n-1}=0$のとき$a_n=0$

と定義する。

Ex. 初項3の弱グッドシュタイン数列:

$$g_2 = 3 = 2^1 + 2^0$$

$$g_3 = 3^1 + 3^0 - 1 = 3 = 3^1$$

$$g_4 = 4^1 - 1 = 3 = 3 \cdot 4^0$$

$$g_5 = 3 \cdot 5^0 - 1 = 2 = 2 \cdot 5^0$$

$$g_6 = 2 \cdot 6^0 - 1 = 1 = 1 \cdot 6^0$$

$$g_7 = 1 \cdot 7^0 - 1 = 0 = 0 \cdot 7^0$$

$$g_8 = 0 \quad \cdots$$

Ex. 初項4の弱グッドシュタイン数列:

$$a_2 = 4 = 2^2$$

$$a_3 = 3^2 - 1 = 8 = 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0$$

$$a_4 = 2\cdot 4^1 + 2\cdot 4^0 - 1 = 9 = 2\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0$$

$$a_5 = 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 - 1 = 10 = 2\cdot 5^1$$

$$a_6 = 2\cdot 6^1 - 1 = 11 = 1\cdot 6^1 + 5\cdot 6^0$$

$$a_7 = 1\cdot 7^1 + 5\cdot 7^0 - 1 = 11 = 1\cdot 7^1 + 4\cdot 7^0$$

$$\vdots$$

$$a_{11} = 1\cdot 11^1 + 1\cdot 10^0 - 1 = 11 = 1\cdot 11^1$$

$$a_{12} = 1\cdot 12 - 1 = 11 = 11\cdot 12^0$$

$$a_{13} = 11 \cdot 13^0 - 1 = 10 = 10 \cdot 13^0$$

$$a_{14} = 10 \cdot 14^0 - 1 = 9 = 9 \cdot 14^0$$

$$\vdots$$

$$a_{23} = 1 \cdot 23^0 - 1 = 0$$

Observation:

あるところまでは数が増え続け
定常状態になったあとに
1ずつ減り始める.

Thm. 任意の初項に対してあるNが存在して

$k \geq N$ のとき $a_k = 0$.

方針; n進表記に順序数を割り当てる.

ex. 初項4のグッドスタイン数列;

$a_2 = 4 = 2^2 \longrightarrow \omega^2$

$a_3 = 3^2 - 1 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \longrightarrow \omega^1 + \omega^1 + \omega^0 + \omega^0$

$(\omega^1 \cdot 2 + \omega^0 \cdot 2)$

$a_4 = 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 - 1$

$= 2 \cdot 4^1 + 4^0 \longrightarrow \omega^1 + \omega^1 + \omega^0$

$(\omega^1 \cdot 2 + \omega^0)$

Def. 高さkの順序数O_kと関係$>$を以下のように定義する.

- $O_0 = \{0\}$ $\quad\quad 0 \not> 0$
- $O_k = \left\{ \omega^{\alpha_n} + \cdots + \omega^{\alpha_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_n \in O_{k-1} \\ \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0 \in O_{\leq k-1} \\ \alpha_n \geq \alpha_n \geq \cdots \geq \alpha_0 \end{array} \right\}$.

ここで $O_{\leq k-1} = O_{k-1} \cup \cdots \cup O_0$.

$\alpha > \beta$ は $\alpha \in O_k$ かつ $\beta \in O_{\leq k-1}$.

または $\alpha = \omega^{\alpha_n} + \cdots + \omega^{\alpha_0} \in O_k$, $\beta = \omega^{\beta_m} + \cdots + \omega^{\beta_0} \in O_k$ で

- ある $l \leq m, n$ について $\alpha_n = \beta_m, \cdots, \alpha_{l+1} = \beta_{l+1}, \alpha_l > \beta_l$ または
- ある $0 < l \leq n$ について $\alpha_n = \beta_m, \cdots, \alpha_{l+1} = \beta_1, \alpha_l = \beta_0$.

Ex.

$$\omega^0 + \omega^0 \in O_1$$

$$\omega^{\omega^0 + \omega^0} \in O_2$$

$$\omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0} + \omega^0 + \omega^0 \in O_2$$

$$\omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0} + \omega^0 \in O_2.$$

一方次のようなものは順序数でない。

$$\omega^{\omega^0} + \omega^0 + \omega^{\omega^0}$$

$$\omega^{\omega^0} + 0$$

Ex.

- $\omega^{\omega^0} > \omega^0 + \omega^0 + \cdots + \omega^0$

- $\omega^{\underline{\omega^0+\omega^0}} > \omega^{\underline{\omega^0}} + \omega^{\omega^0} + \omega^0 + \omega^0$

なぜならば $\underline{\omega^0 + \omega^0} > \underline{\omega^0}$

- $\omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0} + \omega^0 + \omega^0 > \omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0} + \omega^0$

Def. 順序数のための略記法.

$\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n\text{個}}$ は $\alpha\cdot n$ とかく.

とくに $\underbrace{\omega^0+\cdots+\omega^0}_{n\text{個}}$ は n とかく.

Ex. $\omega^{\omega^0+\omega^0}$ は略記すると ω^2.

$\omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0+\omega^0$ は $\omega^1\cdot 2+2$

Ex.

- $\omega^{\omega^0} > \overbrace{\omega^0+\omega^0+\cdots+\omega^0}^{n\text{個}}$

  n

- $\omega^{\omega^0+\omega^0} > \omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0+\omega^0$

  ω^2 $\qquad$ $\omega^1\cdot 2+2$

- $\omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0+\omega^0 > \omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0$

  $\omega^1\cdot 2+2$ $\qquad$ $\omega^1\cdot 2+1$

Thm. $O=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k$ 上の関係 $>$ は

無限降下列 $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\cdots$ を持たない。

Thm. 任意の初項に対してある N が存在して

$k\geq N$ のとき $a_k=0$ となる.

Proof. $a_n>0$ のとき a_n の n進展開

$a_k n^k+\cdots+a_1\cdot n^1+a_0$ に対して

$\alpha_n=\omega^k\cdot a_k+\cdots+\omega^1\cdot a_1+a_0$ を割り当てる.

$a_n, a_{n+1} > 0$ ならば $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ がいえるので、

もし任意の n に対して $a_n > 0$ ならば

順序数の無限降下列

$\alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$ が得られ矛盾。□

ex.

$$a_2 = 2^2 \longrightarrow \omega^2$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1)$$

$$a_3 = 3^2 - 1 = 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 \longrightarrow \omega^1 \cdot 2 + 2$$

$$a_4 = 2\cdot 4^1 + 2\cdot 4^0 - 1 = 2\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 \longrightarrow \omega^1 \cdot 2 + 1$$

Ex. 初項3の弱グットシュタイン数列:

$$g_2 = 3 = 2^1 + 2^0 \qquad \omega^1 + \omega^0$$

$$g_3 = 3^1 + 3^0 - 1 = 3 = 3^1 \qquad \omega^1$$

$$g_4 = 4^1 - 1 = 3 = 3 \cdot 4^0 \qquad 3$$

$$g_5 = 3 \cdot 5^0 - 1 = 2 = 2 \cdot 5^0 \qquad 2$$

$$g_6 = 2 \cdot 6^0 - 1 = 1 = 1 \cdot 6^0 \qquad 1$$

$$g_7 = 1 \cdot 7^0 - 1 = 0 = 0 \cdot 7^0 \qquad 0$$

$$g_8 = 0 \quad \cdots$$

$\underline{\text{Ex.}}$ 初項4の弱グッドシュタイン数列:

$a_2 = 4 = 2^2$ $\quad \omega^2$

$a_3 = 3^2 - 1 = 8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$ $\quad \omega^1 \cdot 2 + 2$

$a_4 = 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 - 1 = 9 = 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$ $\quad \omega^1 \cdot 2 + 1$

$a_5 = 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 - 1 = 10 = 2 \cdot 5^1$ $\quad \omega^1 \cdot 2$

$a_6 = 2 \cdot 6^1 - 1 = 11 = 1 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$ $\quad \omega^1 \cdot 1 + 5$

$a_7 = 1 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 - 1 = 11 = 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0$ $\quad \omega^1 \cdot 1 + 4$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$a_{11} = 1 \cdot 11^1 + 1 \cdot 10^0 - 1 = 11 = 1 \cdot 11^1$ $\quad \omega^1 \cdot 1$

$a_{12} = 1 \cdot 12 - 1 = 11 = 11 \cdot 12^0$ $\quad 12 \ldots$

Ex.（遺伝的n進表記）

- $10 = 2^3 + 2^1$

$$= 2^{2^1+2^0} + 2^1$$

- $100 = 3^4 + 2\cdot 3^2 + 3^0$

$$= 3^{3^1+3^0} + 2\cdot 3^2 + 3^0$$

- $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$

$$= 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2$$

Def. 初項 S のグッドシュタイン数列 $\{G_n\}_{n\geq 2}$ は

- $G_2 = S$
- $n > 2$ のとき
  - $G_{n-1} = 0$ なら $G_n = 0$
  - $G_{n-1} > 0$ なら
    G_n は G_{n-1} の遺伝的 $n-1$ 進表記の $n-1$ を n で置きかえたものから 1 を引いたもの。

Ex. 初項3のグッドスタイン数列

$$G_2 = 3 = 2^1 + 2^0$$

$$G_3 = 3^1 + 3^0 - 1 = 3 = 3^1$$

$$G_4 = 4^1 - 1 = 3 = 3 \cdot 4^0$$

$$G_5 = 3 \cdot 5^0 - 1 = 2 = 2 \cdot 5^0$$

$$G_6 = 2 \cdot 6^0 - 1 = 1 = 1 \cdot 6^0$$

$$G_7 = 1 \cdot 7^0 - 1 = 0$$

$$G_8 = 0 \cdots$$

Ex. 初項4のグッドシュタイン数列:

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)$

$$G_2=4=2^2$$

$$G_3=3^3-1=26=2\cdot3^2+2\cdot3^1+2\cdot3^0$$

$$G_4=2\cdot4^2+2\cdot4^1+4^0$$

$$G_5=2\cdot5^2+2\cdot5^1$$

$$G_6=2\cdot6^2+2\cdot6^1-1$$

$$=2\cdot6^2+6^1+5\cdot6^0$$

$\vdots$

$$G_{11}=2\cdot11^2+11^1$$

$$G_{12} = 2 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^0$$

$$\vdots$$

$$G_{23} = 2 \cdot 23^2$$

$$\begin{aligned} G_{24} &= 2 \cdot 24^2 - 1 \\ &= 24^2 + 24^2 - 1 \\ &= 24^2 + 23 \cdot 24^1 + 23 \cdot 24^0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ex. 初項10のグッドシュタイン数列:

$$G_2 = 10 = 2^{2+1} + 2$$

$$G_3 = 3^{3+1} + 3 - 1 = 83$$

$$G_4 = 4^{4+1} + 2 = 1026$$

$$G_5 = 5^{5+1} + 1 = 15626$$

$$G_6 = 6^{6+1} = 279936$$

$$G_7 = 7^{7+1} - 1 = 6 \cdot 7^7 + 6 \cdot 7^6 + \cdots + 6 \cdot 7 + 6$$

$$\vdots$$

Thm. 任意の初項について あるNが存在して

$k \geq N$ のとき $G_k = 0$.

証明は同様に 順序数を割り当てる.

Ex. 初項4のグッドシュタイン数列:

$$G_2 = 2^2 \longrightarrow \omega^{\omega^1}$$

$$G_3 = 3^3 - 1$$

$$= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \longrightarrow \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 2 + 2$$

$$G_4 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 4^0 \longrightarrow \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 2 + 1$$

$$\vdots$$

Ex. 初項10のグッドシュタイン数列:

$$G_2 = 10 = 2^{2+1} + 2 \qquad \omega^{\omega+1} + \omega^1$$

$$G_3 = 3^{3+1} + 3 - 1 = 3^{3+1} + 2 \qquad \omega^{\omega+1} + 2$$

$$G_4 = 4^{4+1} + 1 \qquad \omega^{\omega+1} + 1$$

$$G_5 = 5^{5+1} = 15625 \qquad \omega^{\omega+1}$$

$$G_6 = 6^{6+1} - 1$$

$$= 5 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^5 + \cdots + 5 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$$

$$5 \cdot \omega^{\omega} + 5 \cdot \omega^5 + \cdots + 5 \cdot \omega^1 + 5$$