位相空間と分離公理

宇田津 孝介

JAIST

Novenber 20, 2022

今回の発表について

- 今回の発表の目標
  - 近傍意味論に必要な知識の準備
  - 位相空間という数学の基礎知識への理解・整理
- 近傍意味論とは？
  - 様相論理の Kripke モデルの到達可能関係を一般化したもの.
  - 非正規様相論理 (non-normal modal loic) の充足可能性問題が決定可能になる.
    - 正規な様相論理とは, LK に加えて $\frac{\varphi \vdash \psi}{\Box\varphi \vdash \Box\psi}$ を推論規則として含むような様相論理.
    - 正規な様相論理に付け加わる代表的な公理型は D,T,B,4,5
    - 正規な様相論理には K, KD, KT, K4, KB, K5, ..., S4(=KT4), S5(=KT5) などがある.
    - S1, S2, S3 は non-normal.
  - 信念の論理やゲーム理論などに応用されている.

位相空間とは

Definition (位相)

集合 X の部分集合族 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が次の 3 条件を満たすとき, $\mathcal{T}$ を**位相**または**位相構造**という.

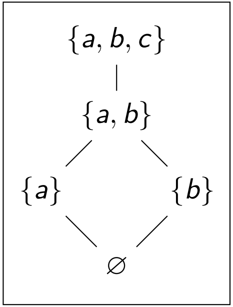
- $X \in \mathcal{T}, \varnothing \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ の任意の有限個の共通部分はまた $\mathcal{T}$ に属する.
- 任意の任意個の $S \in \mathcal{T}$ に対して, $\bigcup S \in \mathcal{T}$.

Definition (位相空間)

位相 $\mathcal{T}$ が 1 つ定められた集合 X を**位相空間**とよび, $(X, \mathcal{T})$ と表す. このとき, X の要素を $(X, \mathcal{T})$ の点とよび, $\mathcal{T}$ の要素を位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の**開集合**とよぶ.

位相空間の例

このスライドでは, なるべく位相構造をハッセ図で表す.
$X = \{a, b, c\}$ に以下のような構造を与えると X は位相空間となる.



- 点は a, b, c
- 開集合は, $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$

開集合と閉集合

Definition (閉集合)

位相空間 X の任意の部分集合 A に対し，$X - A$ が X の開集合のとき，A は X の**閉集合**であるという．

$$
\begin{tikzcd}
& \{a, b, c\} \arrow[d, dash] & \\
& \{a, b\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{a\} \arrow[dr, dash] & & \{b\} \arrow[dl, dash] \\
& \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

X の位相構造

$$
\begin{tikzcd}
& \{a, b, c\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{b, c\} \arrow[dr, dash] & & \{a, c\} \arrow[dl, dash] \\
& \{c\} \arrow[d, dash] & \\
& \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

X の閉集合の包含関係

- $X, \varnothing$ は常に開集合かつ閉集合．

距離空間の開区間と閉区間

- $\mathbb{R}$ について考える.
  - 開区間 (端点を含まない区間) は位相空間の開集合.
  - 閉区間 (端点を含む区間) は位相空間の閉集合.
  - 開集合かつ閉集合となる区間: $\varnothing, (1, 1), \{x \mid 1 \leq x \leq -1\}$...
- 1 点集合は閉区間であるが, 開区間ではない.
  - 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ としても, $\frac{x+\varepsilon}{2} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ なので, 1 点集合にならない.
- $(-\infty, \infty)$ は開区間であり, 閉区間でもある.

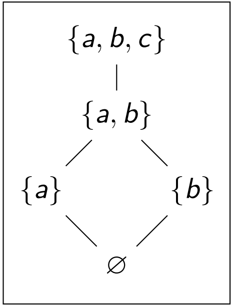
位相の定義に関する疑問点, 理解

- なぜ, 共通部分は有限個でなければならないのか？
  - 開集合でないものが含まれてしまうから.
- 現状の理解
  - 距離空間は位相空間である.
  - 開集合の無限個の共通部分で 1 点のみからなる集合ができる.
  - 1 点集合は開集合ではない.

近傍

Definition

位相空間 X の点 x に対し, $x \in U$ を満たす X の開集合 U を (X における)x の**近傍**という.



- a の近傍は, $\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$.
- b の近傍は, $\{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$.
- c の近傍は, $\{a, b, c\}$.

内部, 閉包

Definition

$U \subseteq A$ を満たす x の近傍 U が存在するとき, x は X における A の**内点**であるといい, X における A の内点全体の集合を X における A の**内部**であるという.

- X における A の内部を $Int_X(A)$ と表すと,
  - $Int_X(A) = \{x \mid \exists O \in \mathcal{T}(x \in O \land O \subseteq A)\}$.
  - $Int_X(A) = \bigcup\{O \mid O \in \mathcal{T} \text{ and } O \subseteq A\}$.

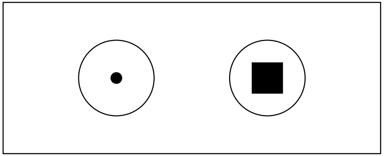
Definition

x の任意の近傍 U に対して, $U \cap A \neq \varnothing$ が成り立つとき, x は X における A の**触点**であるといい, X における A の触点全体の集合を X における A の**閉包**であるという.

- X における A の閉包を $Cl_X(A)$ と表すと,
  - $Cl_X(A) = \{x \mid \forall O \in \mathcal{T}(x \in O \to O \cap A \neq \varnothing)\}$.
  - $Cl_X(A) = \bigcap\{C \mid X - C \in \mathcal{T} \text{ and } A \subseteq C\}$.

分離公理

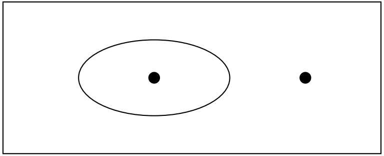
- 分離公理とは何か？
  - 開集合同士, 閉集合同士, 開集合と閉集合で分離できるかどうかの公理.
- 次のスライドから, 下の図のように黒い点を点, 円を開集合, 黒い四角形を閉集合として各公理のイメージを表す.



コルモゴロフ空間 (T_0 空間)

Definition (コルモゴロフ空間 (T_0 空間))

位相空間 X の相異なる任意の 2 点 x, y に対して，$x \in U \wedge y \notin U$ または $x \notin U \wedge y \in U$ を満たす開近傍 U が存在するならば，位相空間 X は**コルモゴロフ空間**または T_0 **空間**であるという．



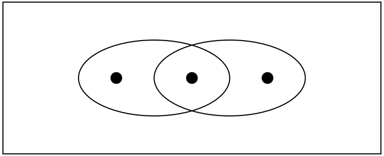
[例]

$$\begin{array}{c} \{a, b\} \\ | \\ \{a\} \\ | \\ \varnothing \end{array}$$

フレシェ空間 (T_1 空間)

Definition (フレシェ空間 (T_1 空間))

位相空間 X の相異なる二点 x, y に対して，$y \notin U(x)$ かつ $x \notin U(y)$ を満たす開近傍 $U(x), U(y)$ が存在するならば，位相空間 X は**フレシェ空間**または T_1 **空間**であるという．

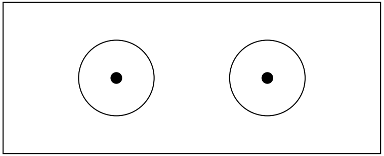


- 以下の位相構造を持つ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ はフレシェ空間である．
  - $\mathbb{R}, \varnothing \in \mathcal{T}$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(\mathbb{R} - \{x\} \in \mathcal{T})$.
  - 有限個の共通部分に関して閉じている．$O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ ならば，$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
- $\mathbb{R}$ は稠密であるので，$\mathbb{R} - \{x\}$ は開集合．
- $a \neq b$ ならば $(\mathbb{R} - \{a\}) \cup (\mathbb{R} - \{b\}) = \mathbb{R}$.

ハウスドルフ空間 (T_2 空間)

Definition (ハウスドルフ空間 (T_2 空間))

位相空間 X の任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, $U \cap V = \varnothing$ を満たす x の近傍 U と y の近傍 V が存在するとき, X を**ハウスドルフ空間**または T_2 **空間**という.



Theorem

X が有限集合となるフレシェ空間はハウスドルフ空間である.

証明の流れ

- 証明の方針
  - X が有限な T_1 空間であると仮定.
  - X が T_2 空間でないと仮定.
  - 帰納法で X の元が無限個必要なことを示す.
  - 背理法より, X は T_2 空間である.
- 帰納法の方針
  - フレシェ性より, 新たな開近傍を二つ用意する.
  - 位相の定義より, 有限個の共通部分を与える.
  - ハウスドルフ性の否定より, 新たな元をもってくる.

$$U_0(a) \qquad U_0(b)$$

$$z_0 \in U_0 = U_0(a) \cap U_0(b)$$

$$z_0 \notin U_1(a) \qquad\qquad z_0 \notin U_1(b)$$

$$z_0 \notin U_1'(a) = U_0(a) \cap U_1(a) \qquad z_0 \notin U_1'(b) = U_0(b) \cap U_1(b)$$

$$z_1 \in U_1 = U_1'(a) \cap U_1'(b)$$

帰納法の流れ

- 帰納法の方針
  - フレシェ性より, 新たな開近傍を二つ用意する.
  - 位相の定義より, 有限個の共通部分を与える.
  - ハウスドルフ性の否定より, 新たな元をもってくる.
  - **(帰納法の仮定)**$z_0, \ldots, z_{n-2}$ **とは異なる点** z_{n-1} **を含まない a と b の近傍が存在する.**
  - n **個の異なる点** $z_0, \ldots, z_{n-1}$ **を含まない a と b の近傍が存在する.**
  - **ハウスドルフ性を否定しているので,** n **個の点と異なる点** z_n **が存在する.**

$$z_{n-1} \notin U_n(a) \qquad\qquad z_{n-1} \notin U_n(b)$$

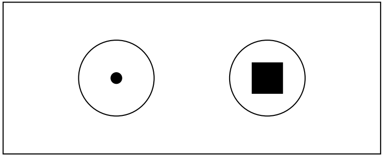
$$z_0, \ldots, z_{n-1} \notin U'_n(a) = U'_{n-1}(a) \cap U_n(a) \qquad z_0, \ldots, z_{n-1} \notin U'_n(b) = U'_{n-1}(b) \cap U_n(b)$$

$$z_n \in U_n = U'_n(a) \cap U'_n(b)$$

正則空間 (T_3 空間)

Definition (正則空間 (T_3 空間))

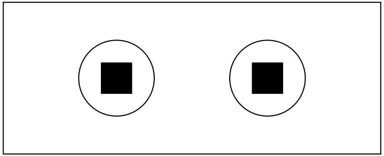
位相空間 X がフレシェ空間であり，さらに X 上の任意の点 x と，x を含まない閉集合 F に対して，二つの開集合 U, V で $x \in U, F \subseteq V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となるものが存在するとき，位相空間 X は**正則空間**または T_3 **空間**という.



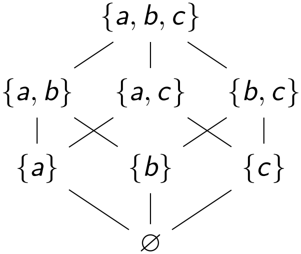
正規空間 (T_4 空間)

Definition (正規空間 (T_4 空間))

位相空間 X がフレシェ空間であり，さらに X の任意の互いに交わらない二つの閉集合 F_1, F_2 に対して，開集合 U, V で $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となるものが存在するとき，位相空間 X を**正規空間**または T_4 **空間**という．



[例]



無限集合で考えた方が面白いかも？

よくある可能世界の集合は有限集合だけれども...

Theorem

有限集合となるハウスドルフ空間は正規空間である. *($\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ となる.)*

- 証明の流れ
  - x の近傍 U_x に対して, $x \neq z, z \in U_x$ となる z を任意にとる.
  - ハウスドルフ性より, $z \notin V_x$ となる x の近傍 V_x が存在する.
  - 位相の定義より, x の近傍 $U_x \cap V_x$ が存在する. $(z \notin U_x \cap V_x)$
  - 上記を繰り返して, x しか含まない 1 点集合が近傍となることを示す.
  - 和集合について閉じているので, 位相はべき集合となる.
  - べき集合を位相とする空間は正規空間である.
- 有限個の点からなる位相空間はコンパクト空間.
- 一般に, コンパクトなハウスドルフ空間は正規空間である.