Banach-Tarski paradox 入門 2

一倉海斗

令和 6 年 6 月 22 日

群の自由な作用

定義 1

群 G の作用する集合 X において $A \sim_G B$ となる X の部分集合 A, B を考える。このとき

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_m,\ B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m,\ B_i = g_i.A_i\ (i = 1, \ldots, m)$$

となるように分割 $\{A_i | i = 1, \ldots, m\}, \{B_i | i = 1, \ldots, m\}$ と群要素 g_i をとれる。写像 $f : A \to B$ を

$$f(x) = g_i.x \text{ (但し、} i \text{ は } x \in A_i \text{ となる番号)}$$

によって定義する。

群の自由な作用

補題 2

$f : A \to B$ を上に述べたとおりのものとするとき、$E \subset A$ とすれば $E \sim_G f(E)$ である。

証明. $E = (E \cap A_1) \sqcup \cdots \sqcup (E \cap A_m)$, $f(E) = (f(E) \cap B_1) \sqcup \cdots \sqcup (f(E) \cap B_m)$ かつ $f(E) \cap B_i = g_i.(E \cap A_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$。 □

群の自由な作用

定理 3 (Banach-Schröder–Bernstein の定理)

$B \subset E \subset A$ かつ $A \sim_G B$ の時、$A \sim_G E$。

証明. $f : A \to B$ を定義 *1* のように定める。$A_0 = A$, $A_1 = f(A) = B$ とし、以下 $A_{n+1} = f(A_n)$ とする。また、$E_0 = E$, $E_{n+1} = f(E_n)$ とする。更に、$C_n = A_n - E_n$, $D_n = E_n - A_{n+1}$, $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, $A_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ とする。この時、補題 *2* より $C \sim_G f(C)$ である。

群の自由な作用

$A = C \sqcup D \sqcup A_\infty$ と $E = f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty$ が成り立つ。

$(\because)_1$ 先ず、$C \sqcup D \sqcup A_\infty$ と $f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty$ が成り立つことを確認する。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$C_n \cap D_n$ は明らか。任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、

$C_m \cap D_n = \varnothing$ が成り立つ。

$(\because)_2$ $m < n$ $(n = m + k$ とする$)$ の時は、自己写像と全単射の性質から $D_{m+1} \subset D_m$

となり $C_m \cap D_{m+k} \subset C_m \cap D_m = \varnothing$ となる。

他方も全く同様。故に $C \cap D = \varnothing$ が成り立つ。 $\square_2$

群の自由な作用

$D \cap A_\infty = \varnothing$ であることはそれぞれの構成から明らか。

また $C \cap A_\infty = \varnothing$ であることは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_{n+1} \subset E_n$ が成り立つことから分かる。

故に $C \sqcup D \sqcup A_\infty$ を得る。

また、$f(C) \subset C$ と前述の結果から $f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty$ も得る。

群の自由な作用

次に $A = C \sqcup D \sqcup A_\infty$ を確かめる。

$C \sqcup D \sqcup A_\infty \subset A$ は明らかなので、逆の包含が成り立つことを確認する。

$a \in A$ かつ $a \notin A_\infty$ となる a をとる。故に、ある n が存在して、$a \notin A_n$ となる。従って C と D の構成を考えると以下が成り立つ。

よって $A = C \sqcup D \sqcup A_\infty$ が確認された。

$a \in (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) - A_n = C_0 \cup D_0 \cup \cdots \cup C_{n-1} \cup D_{n-1} \subset C \sqcup D$。

群の自由な作用

次に $E = f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty$ を確かめる。$f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty \subset E$ は任意の n に対して $A_{n+1} \subset E$ とそれぞれの構成から明らかなので逆の包含が成り立つことを確認する。

先ず、$a \in E$ かつ $a \notin A_\infty$ を仮定する。これよりある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $a \notin A_n$ (最小の自然数をとる) となる。もし、$n = 1$ の場合、$a \in E = E_0$ かつ $a \notin A_1$ 故に $a \in D_0 \subset D$ となる。

他方 $1 < n$ の場合、$a \in E_{n-1}$ であれば $a \notin A_n$ なので $a \in D_n \subset D$ が成り立つ。しかし、$a \notin E_{n-1}$ であれば、n の最小性より $a \in A_{n-1} = f(A_{n-2})$ となる。従って $a \in f(C_{n-1}) \subset f(C)$ を得る。

よって $E = f(C) \sqcup D \sqcup A_\infty$ が確認された。 $\square_1$

群の自由な作用

定義 4 (固定点、自由な作用、G-不変集合)

群 G の集合 X への作用が与えられているとする。群要素 $g \in G$ と点 $x \in X$ について $g.x = x$ となっているとき、x は群要素 g の固定点であるという。x を固定点とする群要素の全体

$$G_x = \{g \in G | g.x = x\}$$

は、G の部分群 (x の固定部分群) になっている。すべての $x \in X$ について固定部分群 Gx が自明 ($Gx = \{1G\}$) となるような作用のことを、自由な作用とよぶ。つまり、自由な作用とは、単位元以外の群要素が固定点をひとつももたない作用のことである。また、部分集合 $A \subset X$ がすべての群要素 g について $g.A = A$ をみたすとき、A は G-不変集合であるという。

群の自由な作用

定理 5

G を回転群 $SO(3)$ の可算な部分群とするとき、単位球面 S の部分集合 D で、

(i) D は可算集合

(ii) D と $S-D$ は G-不変

(iii) G の $S-D$ への作用は自由な作用である、という条件をみたすものが存在する。

群の自由な作用

証明. 単位行列以外の回転行列は S 上にちょうど 2 点だけ固定点をもつ。[3],[2] そこで、G に属する回転行列のうち単位行列以外について、その固定点をすべて集めた集合を D とすると、G が可算であるから D も可算集合である。点 a が回転行列 g で固定されるなら、別の回転行列 h によるその像 $h.a$ は回転行列 hgh^{-1} で固定される。このことから D は G-不変である。したがってまた $S - D$ も G-不変である。最後に S 上にある $G - I_3$ の要素の固定点はすべて D にあるので $S - D$ への G の作用は自由な作用である。 □

参考文献

- 藤田博司, 選択公理とバナッハ $=$ タルスキの定理-講義のハンドアウト, 2011-2012.
- 鈴木実, オイラーの角による回転行列の回転軸と回転角を求めるもう一つの方法, 2014.
- ________, 任意の方向を回転軸とする *3* 次元の回転を表す回転行列について, 2014.