Def. ペアノ算術の公理（抜粋）

- $A \Rightarrow A$
- $\Longrightarrow t = t$
- $s = t,\ t = u \Longrightarrow s = u$
- $s = t \Longrightarrow s' = t'$
- $s' = t' \Longrightarrow s = t$
- $\Longrightarrow s + 0 = s$
- $\Longrightarrow s + t' = (s + t)'$
- $\Longrightarrow s \cdot 0 = 0$
- $\Longrightarrow s \cdot t' = (s \cdot t) + s$

Def. ペアノ算術の推論規則(抜粋)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{WL}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ \mathrm{WR}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{CL}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ \mathrm{CR}$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x. A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \forall_L$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x. A(x)}\ \forall_R$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta, A(a')}{A(0), \Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}\ \mathrm{CJ}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \qquad A, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow s = u \qquad \Delta \Rightarrow u = t}{\Gamma, \Delta \Rightarrow s = t}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow t = s}{\Gamma \Rightarrow s = t}\ \mathrm{SYM}$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow s = t}{\Gamma \Rightarrow s' = t'}\ \mathrm{FUN}$$

これらは原子論理式に対するCUTを使ってシミュレートできる：

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow s = t \qquad s = t \Rightarrow s' = t'}{\Gamma \Rightarrow s' = t'}\ \mathrm{CUT}$$

$\underline{\text{Ex.}}$ $\Longrightarrow 0+0'' = 0''+0$ (すなわち $0+2=2+0$)の証明

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Longrightarrow 0+0''=(0+0')'$}
\AxiomC{$\Longrightarrow 0+0'=(0+0)'$}
\AxiomC{$\Longrightarrow 0+0=0$}
\RightLabel{FUN}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow (0+0)'=0'$}
\RightLabel{SYM}
\BinaryInfC{$\Longrightarrow 0+0'=0'$}
\RightLabel{FUN}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow (0+0')'=0''$}
\RightLabel{SYM}
\BinaryInfC{$\Longrightarrow 0+0''=0''$}
\AxiomC{$\Longrightarrow 0''+0=0''$}
\RightLabel{SYM}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow 0''=0''+0$}
\RightLabel{TR}
\BinaryInfC{$\Longrightarrow 0+0''=0''+0$}
\end{prooftree}
$$

Ex. $\Rightarrow 0+0''=0''+0$ の別証明

$$\dfrac{\Rightarrow 0+a'=(0+a)' \qquad \dfrac{0+a=a+0}{\Rightarrow\ (0+a)'=(a+0)'}}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=(a+0)'}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{\Rightarrow a+0=a}{\Rightarrow (a+0)'=a'}\ \mathrm{FUN}$$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=(a+0)' \qquad \Rightarrow (a+0)'=a'}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{\Rightarrow a'+0=a'}{\Rightarrow a'=a'+0}\ \mathrm{SYM}$$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a' \qquad \Rightarrow a'=a'+0}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'+0}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'+0}{0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0}\ \mathrm{CJ}$$

$$\dfrac{\Rightarrow 0+0=0+0 \qquad 0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0}{\Rightarrow 0+b=b+0}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\Rightarrow 0+b=b+0}{\Rightarrow \forall x(0+x=x+0)}\ \forall_R$$

$$\dfrac{0+0''=0''+0 \Rightarrow 0+0''=0''+0}{\forall x(0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0}\ \forall_L$$

$$\dfrac{\Rightarrow \forall x(0+x=x+0) \qquad \forall x(0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0}{\Rightarrow 0+0''=0''+0}\ \mathrm{CUT}$$

Def. ペアノ算術が矛盾しているとは $\Rightarrow$ が証明できることである。
そうでないとき無矛盾であるという。

Prop. ペアノ算術が矛盾していることと
任意のシーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能なことは同値。

例. もしペアノ算術が矛盾しているなら

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Rightarrow}}{\Rightarrow 0=0'}\ \mathrm{WR}$$

が得られてしまう。

Def. 閉項 t に対し自然数 $val(t)$ を割り当てる:

$$val(0) = 0 \qquad val(s+t) = val(s) + val(t)$$
$$val(t') = val(t) + 1 \qquad val(s \cdot t) = val(s) \cdot val(t)$$

Def. 閉論理式 $s = t$ が真とは $val(s) = val(t)$ であること。

Def. 閉原子論理式からなるシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が真とは

ある閉論理式 $s = t$ が存在して

- $s = t \in \Gamma$ かつ $s = t$ は真でないか、または
- $s = t \in \Delta$ かつ $s = t$ が真であること、とする。

Ex.

$\Rightarrow 0 + 0' = 0' + 0$ は真。$0 = 0' \Rightarrow$ と $\Rightarrow$ は

真でない。

Def. 証明が単純であるとは、

- 証明に自由変数が現れず、
- 現れる論理式は原子論理式で、
- 使われる推論規則が weakening, contraction 等の構造規則と原子論理式の cut のみであることとする。

Prop. 単純な証明に現れるシークエントはすべて真。

cf. $\Longrightarrow 0+0'' = 0''+0$ の証明。

したがって、$\Longrightarrow$ は単純な証明をもたないことがわかる。

Gentzenのペアノ算術の無矛盾性証明のアイデア:

閉じた原子論理式からなるシークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の証明を、$\Theta \leq \Gamma$, $\Lambda \leq \Delta$ をみたすような $\Theta \Longrightarrow \Lambda$ の単純な証明に変換するアルゴリズムを与える.

もし $\Longrightarrow$ が証明できたとすると、このアルゴリズムで $\Longrightarrow$ の単純な証明が得られてしまうが、先程見たとおりそのようなことはありえない.

Ex. $\Rightarrow 0+0'' = 0''+0$ の証明の変換例.

$\pi_1(a)$

$$\dfrac{\Rightarrow 0+a' = (0+a)' \qquad \dfrac{0+a=a+0}{\Rightarrow (0+a)' = (a+0)'}}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a' = (a+0)'}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{\Rightarrow a+0=a}{\Rightarrow (a+0)'=a'}\ \mathrm{FUN}$$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a' = (a+0)' \qquad \Rightarrow (a+0)'=a'}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'}\ \mathrm{TR}$$

$$\dfrac{\Rightarrow a'+0=a'}{\Rightarrow a'=a'+0}\ \mathrm{SYM}$$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a' \qquad \Rightarrow a'=a'+0}{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'+0}\ \mathrm{TR}$$

$\pi_2(b)$

$$\dfrac{0+a=a+0 \Rightarrow 0+a'=a'+0}{0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0}\ \mathrm{CJ}$$

$$\dfrac{\Rightarrow 0+0=0+0 \qquad 0+0=0+0 \Rightarrow 0+b=b+0}{\Rightarrow 0+b=b+0}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\Rightarrow 0+b=b+0}{\Rightarrow \forall x(0+x=x+0)}\ \forall_R$$

$$\dfrac{0+0''=0''+0 \Rightarrow 0+0''=0''+0}{\forall x(0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0}\ \forall_L$$

$$\dfrac{\Rightarrow \forall x(0+x=x+0) \qquad \forall x(0+x=x+0) \Rightarrow 0+0''=0''+0}{\Rightarrow 0+0''=0''+0}\ \mathrm{CUT}$$

見やすさのため $0+a=a+0$ を $E(a)$ と略記すること

$$
\dfrac{
\dfrac{
\Rightarrow E(0) \qquad
\dfrac{\begin{matrix}\pi_1(a)\\ \vdots \\ E(a) \Rightarrow E(a')\end{matrix}}{E(0) \Rightarrow E(b)}\,\mathrm{CJ}
}{
\dfrac{\Rightarrow E(b)}{\Rightarrow \forall x E(x)}\,\forall R
}\,\mathrm{CUT}
\qquad
\dfrac{E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}\,\forall L
}{\Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CUT}
$$

$\pi_2(b)$

①

これを次のように変形

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\begin{matrix}\pi_2(0'')\\ \vdots \\ \Rightarrow E(0'')\end{matrix}}{\Rightarrow E(0''), \forall x E(x)}\,\mathrm{wL}
\qquad
\dfrac{E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}\,\forall L
}{\Rightarrow E(0''), E(0'')}\,\mathrm{CUT}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\begin{matrix}\pi_2(b)\\ \vdots \\ \Rightarrow E(b)\end{matrix}}{\Rightarrow \forall x E(x)}\,\forall R
\qquad
\dfrac{E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\forall x E(x), E(0'') \Rightarrow E(0'')}
}{E(0'') \Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CUT}
}{
\dfrac{\Rightarrow E(0''), E(0'')}{\Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CR}
}\,\mathrm{CUT}
$$

② 左上の $\pi_2(0'')$ にある帰納法をはずす、

$\pi_2(0'')$

$$\dfrac{\Rightarrow E(0) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1(a)\\ \vdots\end{matrix}}{E(a) \Rightarrow E(a')}}{E(0) \Rightarrow E(0'')}\,\text{CJ}}{\dfrac{\Rightarrow E(0'')}{\Rightarrow E(0''),\ \forall x E(x)}}\,\text{CUT}$$

$\pi_2^{*}(0'')$

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow E(0) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1(0)\\ \vdots\\ E(0) \Rightarrow E(0')\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1(0')\\ \vdots\\ E(0') \Rightarrow E(0'')\end{matrix}}{E(0) \Rightarrow E(0'')}\,\text{CUT}}{\Rightarrow E(0'')}\,\text{CUT}}{\Rightarrow E(0''),\ \forall x E(x)}\,\text{WR}$$

③ Weakeningをはずす。

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\pi_2^*(0'')\ \vdots}{\Rightarrow E(0'')}}{\Rightarrow E(0''), \forall_x E(x)}\,\mathrm{WL}
\qquad
\dfrac{E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\forall_x E(x) \Rightarrow E(0'')}\,\forall_L
}{\Rightarrow E(0''), E(0'')}\,\mathrm{CUT}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\pi_2(b)\ \vdots}{\Rightarrow E(b)}}{\Rightarrow \forall_x E(x)}\,\forall_R
\qquad
\dfrac{E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\forall_x E(x), E(0') \Rightarrow E(0'')}
}{E(0') \Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CUT}
}{
\dfrac{\Rightarrow E(0''), E(0'')}{\Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CR}
}\,\mathrm{CUT}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\pi_2^*(0'')}{\Rightarrow E(0)}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\pi_1(0)\ \vdots}{E(0) \Rightarrow E(0')}
\qquad
\dfrac{\pi_1(0')\ \vdots}{E(0') \Rightarrow E(0'')}
}{E(0) \Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CUT}
}{\Rightarrow E(0'')}\,\mathrm{CUT}
$$

T

アルゴリズムの停止性には順序数を用いる.

$\pi_2(b)$

$\pi_1(a)$

$$\vdots$$

$$\dfrac{9 \quad E(a) \Rightarrow E(a')}{\omega' \quad E(0) \Rightarrow E(b)}\ \mathrm{CJ}$$

$$\dfrac{1 \Rightarrow E(0) \qquad \omega' \quad E(0) \Rightarrow E(b)}{\omega'+1 \Rightarrow E(b)}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\omega'+1 \Rightarrow E(b)}{\omega'+2 \Rightarrow \forall x E(x)}\ \forall R \qquad \dfrac{1 \quad E(0'') \Rightarrow E(0'')}{2 \quad \forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}\ \forall L$$

$$\dfrac{\omega'+2 \Rightarrow \forall x E(x) \qquad 2 \quad \forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}{\omega^{\omega'+4} \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

① これを次のように変形

$\pi_2(0'')$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\omega'+1 \Rightarrow E(0'')}{\omega'+1 \Rightarrow E(0''), \forall x E(x)}\ \mathrm{wL} \qquad \dfrac{1 \quad E(0'') \Rightarrow E(0'')}{2 \quad \forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}\ \forall L$$

$$\dfrac{\omega'+1 \Rightarrow E(0''), \forall x E(x) \qquad 2 \quad \forall x E(x) \Rightarrow E(0'')}{\omega^{\omega'+3} \Rightarrow E(0''), E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

$\pi_2(b)$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\omega'+1 \Rightarrow E(b)}{\omega'+2 \Rightarrow \forall x E(x)}\ \forall R \qquad \dfrac{1 \quad E(0'') \Rightarrow E(0'')}{1 \quad \forall x E(x), E(0'') \Rightarrow E(0'')}$$

$$\dfrac{\omega'+2 \Rightarrow \forall x E(x) \qquad 1 \quad \forall x E(x), E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\omega^{\omega'+3} \quad E(0'') \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\omega^{\omega'+3} \Rightarrow E(0''), E(0'') \qquad \omega^{\omega'+3} \quad E(0'') \Rightarrow E(0'')}{\omega^{\omega'+3} + \omega^{\omega'+3} \Rightarrow E(0''), E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{\omega^{\omega'+3} + \omega^{\omega'+3} \Rightarrow E(0''), E(0'')}{\omega^{\omega'+3} + \omega^{\omega'+3} \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CR}$$

② 左上の $\pi_2(0'')$ にある帰納法をはずす、

$\pi_2(0'')$

$$\dfrac{1 \Rightarrow E(0) \qquad \dfrac{\overset{\pi_1(a)}{\vdots} \atop 9\ \ E(a) \Rightarrow E(a')}{w'\ \ E(0) \Rightarrow E(0'')}\ \langle J\rangle}{w'+1 \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{w'+1 \Rightarrow E(0'')}{w'+1 \Rightarrow E(0''),\ \forall x E(x)}$$

$\pi_2^{*}(0'')$

$$\dfrac{1 \Rightarrow E(0) \qquad \dfrac{\overset{\pi_1(0)}{\vdots} \atop 9\ \ E(0) \Rightarrow E(0') \qquad \overset{\pi_1(0')}{\vdots} \atop 9\ \ E(0') \Rightarrow E(0'')}{18\ \ E(0) \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CUT}}{19 \Rightarrow E(0'')}\ \mathrm{CUT}$$

$$\dfrac{19 \Rightarrow E(0'')}{19 \Rightarrow E(0''),\ \forall x E(x)}\ \mathrm{WR}$$

③ Weakening をはす。

$\pi_2^*(0'')$
$\vdots$
$19 \Rightarrow E(0'')$
WL
$19 \Rightarrow E(0''), \forall_x E(x)$

$1\ E(0'') \Rightarrow E(0'')$
$\forall L$
$2\ \forall_x E(x) \Rightarrow E(0'')$

$\pi_2(b)$
$\vdots$
$\omega+1 \Rightarrow E(b)$
$\forall_R$
$\omega+2 \Rightarrow \forall_x E(x)$

$1\ E(0'') \Rightarrow E(0'')$
$1\ \forall_x E(x), E(0'') \Rightarrow E(0'')$

CUT
$\omega^{\omega+3}\ E(0'') \Rightarrow E(0'')$

CUT
$\omega^{21} \Rightarrow E(0''), E(0'')$

CUT
$\omega^{\omega+3}+\omega^{21} \Rightarrow E(0''), E(0'')$
CR
$\omega^{\omega+3}+\omega^{21} \Rightarrow E(0'')$

$\pi_2^*(0'')$

$\pi_1(0)$
$\vdots$
$9\ E(0) \Rightarrow E(0')$

$\pi_1(0')$
$\vdots$
$9\ E(0') \Rightarrow E(0'')$

CUT

$1 \Rightarrow E(0)$

$18\ E(0) \Rightarrow E(0'')$
CUT
$19 \Rightarrow E(0'')$