ゲーデル論理の階層

齊藤　哲平

March 2, 2024

概要

ゲーデル論理は以下の階層をなしている

$$\cdots \subsetneq L(G_4) \subsetneq L(G_3) \subsetneq L(G_2) = \mathbf{CL}$$

ここで

- $\mathbf{CL} = L(G_2)$ は古典命題論理
- $L(G_n)$ は n 値のゲーデル論理

概要

ゲーデル論理は以下の階層をなしている

$$\cdots \subsetneq L(G_4) \subsetneq L(G_3) \subsetneq L(G_2) = \mathbf{CL}$$

ここで

- $\mathbf{CL} = L(G_2)$ は古典命題論理
- $L(G_n)$ は n 値のゲーデル論理

以下、命題論理の語彙 $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$ で考える

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition

ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition

ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

論理式の真理値割り当ては $\vee, \wedge, \to, \neg$ をゲーデル鎖で解釈して定義

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition
ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

論理式の真理値割り当ては $\vee, \wedge, \to, \neg$ をゲーデル鎖で解釈して定義
論理式 φ が妥当とは任意の真理値割り当て v について $v(\varphi) = 1$

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition
ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

論理式の真理値割り当ては $\vee, \wedge, \to, \neg$ をゲーデル鎖で解釈して定義
論理式 φ が妥当とは任意の真理値割り当て v について $v(\varphi) = 1$
妥当な論理式全体の集合を $L(G_n)$ と書き、n 値のゲーデル論理と呼ぶ

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition
ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

論理式の真理値割り当ては $\vee, \wedge, \to, \neg$ をゲーデル鎖で解釈して定義
論理式 φ が妥当とは任意の真理値割り当て v について $v(\varphi) = 1$
妥当な論理式全体の集合を $L(G_n)$ と書き、n 値のゲーデル論理と呼ぶ

$L(G_2)$ は古典命題論理 $\mathbf{CL}$;

ゲーデル論理 $L(G_n)$

$n \geq 2$ とする

Definition
ゲーデル鎖 G_n は集合 $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$ に以下の演算を入れたもの

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \vee y = \max\{x, y\}$$

$$x \to y = \begin{cases} y & \text{if } x > y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

論理式の真理値割り当ては $\vee, \wedge, \to, \neg$ をゲーデル鎖で解釈して定義
論理式 φ が妥当とは任意の真理値割り当て v について $v(\varphi) = 1$
妥当な論理式全体の集合を $L(G_n)$ と書き、n 値のゲーデル論理と呼ぶ

$L(G_2)$ は古典命題論理 $\mathbf{CL}$; 前回の Hanazawa の三値論理は $L(G_3)$

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない:

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \tfrac{1}{n-1}$$

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \tfrac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \tfrac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

- もし $v(\varphi) = 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 1$

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \tfrac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

- もし $v(\varphi) = 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 1$
- もし $v(\varphi) > 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 0$ で、したがって $v(\neg\neg\varphi) = 1$

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \frac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

- もし $v(\varphi) = 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 1$
- もし $v(\varphi) > 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 0$ で、したがって $v(\neg\neg\varphi) = 1$

任意の $L(G_n)$ において prelinearity axiom $(\varphi \to \chi) \vee (\chi \to \varphi)$ は妥当

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \tfrac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

- もし $v(\varphi) = 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 1$
- もし $v(\varphi) > 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 0$ で、したがって $v(\neg\neg\varphi) = 1$

任意の $L(G_n)$ において prelinearity axiom $(\varphi \to \chi) \vee (\chi \to \varphi)$ は妥当

- もし $v(\varphi) \geq v(\chi)$ ならば $v(\chi \to \varphi) = 1$

妥当性の具体例

$n \geq 3$ なら $L(G_n)$ で排中律 $p \vee \neg p$ は妥当でない: $v(p) = \frac{1}{n-1}$ とすれば

$$v(p \vee \neg p) = \max\{v(p), v(\neg p)\} = \max\{\tfrac{1}{n-1}, 0\} = \frac{1}{n-1}$$

任意の $L(G_n)$ において $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ は妥当:

- もし $v(\varphi) = 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 1$
- もし $v(\varphi) > 0$ ならば $v(\neg\varphi) = 0$ で、したがって $v(\neg\neg\varphi) = 1$

任意の $L(G_n)$ において prelinearity axiom $(\varphi \to \chi) \vee (\chi \to \varphi)$ は妥当

- もし $v(\varphi) \geq v(\chi)$ ならば $v(\chi \to \varphi) = 1$
- もし $v(\chi) > v(\varphi)$ ならば $v(\varphi \to \chi) = 1$

G_n を G_{n+1} に埋め込む

Definition

写像 $e_n : G_n \to G_{n+1}$ を以下のように定義する

$$e_n\left(\frac{k}{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{if } k < n-1 \\ 1 & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

G_n を G_{n+1} に埋め込む

Definition
写像 $e_n : G_n \to G_{n+1}$ を以下のように定義する

$$e_n\left(\frac{k}{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{if } k < n-1 \\ 1 & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

例えば $e_3 : G_3 \to G_4$ は

$$e_3(0) = 0 \qquad e_3(1/2) = 1/3 \qquad e_3(1) = 1$$

G_n を G_{n+1} に埋め込む

Definition
写像 $e_n : G_n \to G_{n+1}$ を以下のように定義する

$$e_n\left(\tfrac{k}{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{if } k < n-1 \\ 1 & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

例えば $e_3 : G_3 \to G_4$ は

$$e_3(0) = 0 \qquad e_3(1/2) = 1/3 \qquad e_3(1) = 1$$

v を G_n の付置とする。合成 $e_n \circ v$ は G_{n+1} の付置になる。

G_n を G_{n+1} に埋め込む

Definition

写像 $e_n : G_n \to G_{n+1}$ を以下のように定義する

$$e_n(\tfrac{k}{n-1}) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{if } k < n-1 \\ 1 & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

例えば $e_3 : G_3 \to G_4$ は

$$e_3(0) = 0 \qquad e_3(1/2) = 1/3 \qquad e_3(1) = 1$$

v を G_n の付置とする。合成 $e_n \circ v$ は G_{n+1} の付置になる。

命題

$(e_n \circ v)(\varphi) = e_n(v(\varphi))$

G_n を G_{n+1} に埋め込む

Definition
写像 $e_n : G_n \to G_{n+1}$ を以下のように定義する

$$e_n(\tfrac{k}{n-1}) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{if } k < n-1 \\ 1 & \text{if } k = n-1 \end{cases}$$

例えば $e_3 : G_3 \to G_4$ は

$$e_3(0) = 0 \qquad e_3(1/2) = 1/3 \qquad e_3(1) = 1$$

v を G_n の付置とする。合成 $e_n \circ v$ は G_{n+1} の付置になる。

命題
$(e_n \circ v)(\varphi) = e_n(v(\varphi))$

証明.
φ に関する帰納法 (e_n が順序を保つことを使う)

包含関係

$$\cdots \subseteq L(G_6) \subseteq L(G_5) \subseteq L(G_4) \subseteq L(G_3) \subseteq L(G_2)$$

包含関係

$$\cdots \subseteq L(G_6) \subseteq L(G_5) \subseteq L(G_4) \subseteq L(G_3) \subseteq L(G_2)$$

命題

任意の $n \geqslant 2$ について $L(G_{n+1}) \subseteq L(G_n)$

包含関係

$$\cdots \subseteq L(G_6) \subseteq L(G_5) \subseteq L(G_4) \subseteq L(G_3) \subseteq L(G_2)$$

命題

任意の $n \geqslant 2$ について $L(G_{n+1}) \subseteq L(G_n)$

証明.

対偶を示す: φ がある G_n の付置 v で $v(\varphi) < 1$ であるとする。

包含関係

$$\cdots \subseteq L(G_6) \subseteq L(G_5) \subseteq L(G_4) \subseteq L(G_3) \subseteq L(G_2)$$

命題

任意の $n \geqslant 2$ について $L(G_{n+1}) \subseteq L(G_n)$

証明.

対偶を示す: φ がある G_n の付置 v で $v(\varphi) < 1$ であるとする。このとき

$$(e_n \circ v)(\varphi) = e_n(v(\varphi)) < 1$$

包含関係

$$\cdots \subseteq L(G_6) \subseteq L(G_5) \subseteq L(G_4) \subseteq L(G_3) \subseteq L(G_2)$$

命題

任意の $n \geqslant 2$ について $L(G_{n+1}) \subseteq L(G_n)$

証明.

対偶を示す: φ がある G_n の付置 v で $v(\varphi) < 1$ であるとする。このとき

$$(e_n \circ v)(\varphi) = e_n(v(\varphi)) < 1$$

したがって φ は G_{n+1} の付置 $e_n \circ v$ の下で $(e_n \circ v)(\varphi) < 1$

$L(G_n)$ と $L(G_{n+1})$ の分離

原子論理式 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を使って $\pi_2, \pi_3, \ldots$ を帰納的に定義

$$\pi_2 = p_2 \vee (p_2 \to p_1) \qquad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$$

$L(G_n)$ と $L(G_{n+1})$ の分離

原子論理式 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を使って $\pi_2, \pi_3, \ldots$ を帰納的に定義

$$\pi_2 = p_2 \lor (p_2 \to p_1) \qquad \pi_{n+1} = p_{n+1} \lor (p_{n+1} \to \pi_n)$$

命題

任意の $n \geq 2$ について、$\pi_n \in L(G_n)$ だが $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

$L(G_n)$ と $L(G_{n+1})$ の分離

原子論理式 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を使って $\pi_2, \pi_3, \ldots$ を帰納的に定義

$$\pi_2 = p_2 \vee (p_2 \to p_1) \qquad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$$

命題

任意の $n \geq 2$ について、$\pi_n \in L(G_n)$ だが $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

Example

$\pi_3 = p_3 \vee (p_3 \to (p_2 \vee (p_2 \to p_1))) \notin L(G_4)$

$L(G_n)$ と $L(G_{n+1})$ の分離

原子論理式 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を使って $\pi_2, \pi_3, \ldots$ を帰納的に定義

$$\pi_2 = p_2 \vee (p_2 \to p_1) \qquad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$$

命題

任意の $n \geq 2$ について、$\pi_n \in L(G_n)$ だが $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

Example

$\pi_3 = p_3 \vee (p_3 \to (p_2 \vee (p_2 \to p_1))) \notin L(G_4)$: 付置 v を

$$v(p_1) = 0 \qquad v(p_2) = \tfrac{1}{3} \qquad v(p_3) = \tfrac{2}{3}$$

とすれば

$L(G_n)$ と $L(G_{n+1})$ の分離

原子論理式 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を使って $\pi_2, \pi_3, \ldots$ を帰納的に定義

$$\pi_2 = p_2 \vee (p_2 \to p_1) \qquad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$$

命題

任意の $n \geq 2$ について、$\pi_n \in L(G_n)$ だが $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

Example

$\pi_3 = p_3 \vee (p_3 \to (p_2 \vee (p_2 \to p_1))) \notin L(G_4)$: 付置 v を

$$v(p_1) = 0 \qquad v(p_2) = \frac{1}{3} \qquad v(p_3) = \frac{2}{3}$$

とすれば

$$v(p_3 \vee \underbrace{(p_3 \to (p_2 \vee \overbrace{(p_2 \to p_1)}^{0}))}_{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}$$

Lemma

任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.

付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

Lemma

任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.

付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma
任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.
付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma
$n \geq k$ とすると、G_n の任意の付置 v について $v(\pi_k) \geq \frac{k-1}{n-1}$

証明.
$v(\phi \vee (\phi \to \psi)) > v(\psi)$ を用いて k に関する帰納法

Lemma

任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.

付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma

$n \geq k$ とすると、G_n の任意の付置 v について $v(\pi_k) \geq \frac{k-1}{n-1}$

証明.

$v(\phi \vee (\phi \to \psi)) > v(\psi)$ を用いて k に関する帰納法

- $v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) > v(p_1)$

Lemma

任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.

付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma

$n \geq k$ とすると、G_n の任意の付置 v について $v(\pi_k) \geq \frac{k-1}{n-1}$

証明.

$v(\phi \vee (\phi \to \psi)) > v(\psi)$ を用いて k に関する帰納法

- $v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) > v(p_1)$ すなわち $v(\pi_2) \geq \frac{1}{n-1}$

Lemma

任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.

付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma

$n \geq k$ とすると、G_n の任意の付置 v について $v(\pi_k) \geq \frac{k-1}{n-1}$

証明.

$v(\phi \vee (\phi \to \psi)) > v(\psi)$ を用いて k に関する帰納法

- $v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) > v(p_1)$ すなわち $v(\pi_2) \geq \frac{1}{n-1}$
- $v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) > v(\pi_{k-1}) \geq \frac{k-2}{n-1}$

Lemma
任意の $n \geq 2$ について $\pi_n \notin L(G_{n+1})$

証明.
付置を $v(p_k) = \frac{k-1}{n}$ と定めれば、帰納法によって $v(\pi_k) = \frac{k-1}{n}$

$$v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) = \frac{1}{n}$$
$$v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) = \frac{k-1}{n}$$

Lemma
$n \geq k$ とすると、G_n の任意の付置 v について $v(\pi_k) \geq \frac{k-1}{n-1}$

証明.
$v(\phi \vee (\phi \to \psi)) > v(\psi)$ を用いて k に関する帰納法

- $v(\pi_2) = v(p_2 \vee (p_2 \to p_1)) > v(p_1)$ すなわち $v(\pi_2) \geq \frac{1}{n-1}$
- $v(\pi_k) = v(p_k \vee (p_k \to \pi_{k-1})) > v(\pi_{k-1}) \geq \frac{k-2}{n-1}$

したがって G_n において $v(\pi_n) = \frac{n-1}{n-1} = 1$ であり、すなわち $\pi_n \in L(G_n)$

まとめ

ゲーデル論理は以下の階層をなしている

$$\mathbf{Int} \subsetneq \mathbf{GD} \subsetneq \cdots \subsetneq L(G_4) \subsetneq L(G_3) \subsetneq \mathbf{CL}$$

ここで

- **Int** は直観主義命題論理
- $\mathbf{CL} = L(G_2)$ は古典命題論理
- $L(G_n)$ は n 値のゲーデル論理
- **GD** はゲーデル･ダメット論理 $\bigcap_{m \geq 2} L(G_m)$

まとめ

ゲーデル論理は以下の階層をなしている

$$\mathbf{Int} \subsetneq \mathbf{GD} \subsetneq \cdots \subsetneq L(G_4) \subsetneq L(G_3) \subsetneq \mathbf{CL}$$

ここで

- $\mathbf{Int}$ は直観主義命題論理
- $\mathbf{CL} = L(G_2)$ は古典命題論理
- $L(G_n)$ は n 値のゲーデル論理
- $\mathbf{GD}$ はゲーデル・ダメット論理 $\displaystyle\bigcap_{m\geq 2} L(G_m)$

参考文献: Proof Theory and Algebra in Logic (Ono, 2019)