直観主義論理は有限多値論理でない

齊藤　哲平

November 25, 2023

概要

命題直観主義論理は有限多値論理として特徴づけられないこと

1. 直観主義論理（復習）
2. 有限多値論理（復習）
3. 前者は後者として特徴づけられないことの証明 (Salehi, 2021)

以下、命題論理の語彙 $\vee, \wedge, \neg, \to$ で考える。

直観主義論理

妥当性「X から A への推論は妥当である」はクリプキモデルで定義

直観主義論理

妥当性「X から A への推論は妥当である」はクリプキモデルで定義

以下の性質をメインの証明で使う。p と q を異なる原子論理式とする。

- $(p \to p) \lor q$ は妥当である。
- $p \to q$ は妥当でない。

直観主義論理

妥当性「X から A への推論は妥当である」はクリプキモデルで定義

以下の性質をメインの証明で使う。p と q を異なる原子論理式とする。
- $(p \to p) \vee q$ は妥当である。
- $p \to q$ は妥当でない。

命題 (選言特性)
直観主義論理では $A \vee B$ が妥当ならば A または B が妥当である。

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の有限集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow : V \times V \rightarrow V$ と $f_\neg : V \rightarrow V$

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\to, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の有限集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge, f_\to : V \times V \to V$ と $f_\neg : V \to V$

すべての付置 v について $v(A) \in D$ のとき、A は 妥当 であるという。

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の有限集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow : V \times V \rightarrow V$ と $f_\neg : V \rightarrow V$

すべての付置 v について $v(A) \in D$ のとき、A は 妥当 であるという。妥当な論理式全体の集合を($|V|$ 値)有限多値論理 と呼ぶ。

選言の可換性･結合性

以下､｢妥当な論理式の集合｣のことを｢論理｣と言ったりする。

Definition

論理 L が<u>選言について可換</u>であるとは､$A \vee B$ と $B \vee A$ の妥当性が同値であることである。

選言の可換性･結合性

以下､｢妥当な論理式の集合｣のことを｢論理｣と言ったりする。

Definition

論理 L が<u>選言について可換</u> であるとは､$A \vee B$ と $B \vee A$ の妥当性が同値であることである。また､L が<u>選言について結合的</u> であるとは､$A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ の妥当性が同値であることである。

選言の可換性・結合性

以下、「妥当な論理式の集合」のことを「論理」と言ったりする。

Definition

論理 L が選言について可換であるとは、$A \vee B$ と $B \vee A$ の妥当性が同値であることである。また、L が選言について結合的であるとは、$A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ の妥当性が同値であることである。そのような論理において

$$\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i \to p_j)$$

は以下の略記とする。

$$(p_1 \to p_2) \vee (p_1 \to p_3) \vee \cdots \vee (p_{n-1} \to p_n)$$

選言の可換性･結合性

以下､｢妥当な論理式の集合｣のことを｢論理｣と言ったりする。

Definition

論理 L が<u>選言について可換</u> であるとは､$A \vee B$ と $B \vee A$ の妥当性が同値であることである。また､L が<u>選言について結合的</u> であるとは､$A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ の妥当性が同値であることである。そのような論理において

$$\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i \to p_j)$$

は以下の略記とする。

$$(p_1 \to p_2) \vee (p_1 \to p_3) \vee \cdots \vee (p_{n-1} \to p_n)$$

Example

古典論理や直観主義論理は選言について可換かつ結合的である。

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。ただし $p_1, \ldots, p_{n+1}$ は異なる原子論理式で、また L で $(p \to p) \vee q$ は妥当 であるとする。

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。ただし $p_1, \ldots, p_{n+1}$ は異なる原子論理式で、また L で $(p \to p) \vee q$ は妥当 であるとする。

証明.
鳩の巣原理より、任意の付置 v について $v(p_i) = v(p_j)$ なる $i < j$ が存在する。

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。ただし $p_1, \ldots, p_{n+1}$ は異なる原子論理式で、また L で $(p \to p) \vee q$ は妥当 であるとする。

証明.
鳩の巣原理より、任意の付置 v について $v(p_i) = v(p_j)$ なる $i < j$ が存在する。A から $p_i \to p_j$ を取り除いた論理式を B とすると、

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。ただし $p_1, \ldots, p_{n+1}$ は異なる原子論理式で、また L で $(p \to p) \vee q$ は妥当 であるとする。

証明.
鳩の巣原理より、任意の付置 v について $v(p_i) = v(p_j)$ なる $i < j$ が存在する。A から $p_i \to p_j$ を取り除いた論理式を B とすると、仮定より $v((p_i \to p_j) \vee B) \in D$ で、

有限多値論理の性質

Lemma
選言について可換かつ結合的な n 値有限多値論理 L において

$$A = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

は妥当。ただし $p_1, \ldots, p_{n+1}$ は異なる原子論理式で、また L で
$(p \to p) \vee q$ は妥当 であるとする。

証明.
鳩の巣原理より、任意の付置 v について $v(p_i) = v(p_j)$ なる $i < j$ が存在する。A から $p_i \to p_j$ を取り除いた論理式を B とすると、仮定より $v((p_i \to p_j) \vee B) \in D$ で、可換性と結合性より $v(A) \in D$ となる。

命題

任意の自然数 n について、直観主義論理は n 値論理ではない。

命題
任意の自然数 n について、直観主義論理は n 値論理ではない。

証明.
直観主義論理が n 値論理であったとすると、先程の補題から

$$\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

が妥当。

命題
任意の自然数 n について、直観主義論理は n 値論理ではない。

証明.
直観主義論理が n 値論理であったとすると、先程の補題から

$$\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (p_i \to p_j)$$

が妥当。一方で選言特性からある $i<j$ について $p_i \to p_j$ が妥当であるから矛盾。

参考: 大西論理学での証明

命題

直観主義論理は三値論理ではない。

参考: 大西論理学での証明

命題

直観主義論理は三値論理ではない。

証明のようなもの.

直観主義論理が三値論理だったとする。

$$\begin{aligned}(p_1 \leftrightarrow p_2) \lor (p_1 \leftrightarrow p_3) \lor (p_1 \leftrightarrow p_4) \\ \lor (p_2 \leftrightarrow p_3) \lor (p_2 \leftrightarrow p_4) \lor (p_3 \leftrightarrow p_4)\end{aligned}$$

は、三値論理においては鳩の巣原理から妥当なはずである。

参考: 大西論理学での証明

命題
直観主義論理は三値論理ではない。

証明のようなもの.
直観主義論理が三値論理だったとする。

$$\begin{aligned}(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \leftrightarrow p_4)\\ \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee (p_3 \leftrightarrow p_4)\end{aligned}$$

は、三値論理においては鳩の巣原理から妥当なはずである。
一方で直観主義論理の選言特性からある $p_i \leftrightarrow p_j$ が妥当になり矛盾。