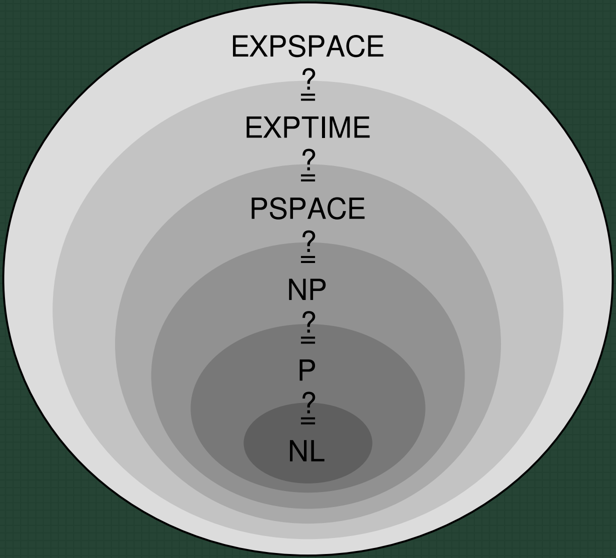
計算量クラス PSPACE

齊藤哲平

October 5, 2024


EXPSPACE
?=
EXPTIME
?=
PSPACE
?=
NP
?=
P
?=
NL

PSPACE

TM: チューリングマシン

Definition

PSPACE は決定性 TM で多項式領域で決定できる問題のクラス

命題

NP $\subseteq$ PSPACE; さらに coNP $\subseteq$ PSPACE

証明.

NP 完全問題 SAT と coNP 完全問題 TAUT は線形領域で決定可能

命題

PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

証明.

領域 $f(n)$ で動作する TM の計算状態はたかだか $f(n)2^{f(n)}$ 個

- $f(n)$: TM のヘッドの位置
- $2^{f(n)}$: 各テープ位置について、各アルファベットの可能性

停止する TM は同じ計算状態を取らないので $f(n)2^{f(n)}$ 時間で停止

PSPACE 完全性

Definition
決定問題 A が PSPACE 完全 とは、以下を満たすこと
- $A \in \mathrm{PSPACE}$
- 任意の $B \in \mathrm{PSPACE}$ について $B \leqslant A$

ここで $\leqslant$ は多項式時間還元

モチベーション: P $\subsetneq$ PSPACE ?

比較
- NP 完全性は多項式時間還元で定義 (P $\subsetneq$ NP ?)
- NL 完全性は対数領域還元で定義 (L $\subsetneq$ NL ?)

Definition
TQBF は量化付き命題論理の恒真性判定問題

Example

- $\forall x \exists y\,(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$ は恒真
- $\exists x \forall y\,(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$ は恒真でない

命題
以下の問題は PSPACE 完全

- TQBF
- 命題直観主義論理の妥当性問題
- (その他ある種の2人ゲームいろいろ)

Definition

非決定性 TM の領域計算量 $f(n)$ とは、
長さ n の入力に対する、いずれかの分岐で使用する領域の最大値

Theorem (Savitch の定理)

$O(f(n))$ 領域を利用する 非決定性 TM で決定できる問題は
$O(f(n)^2)$ 領域を利用する 決定性 TM で決定できる

Corollary

NPSPACE $=$ PSPACE

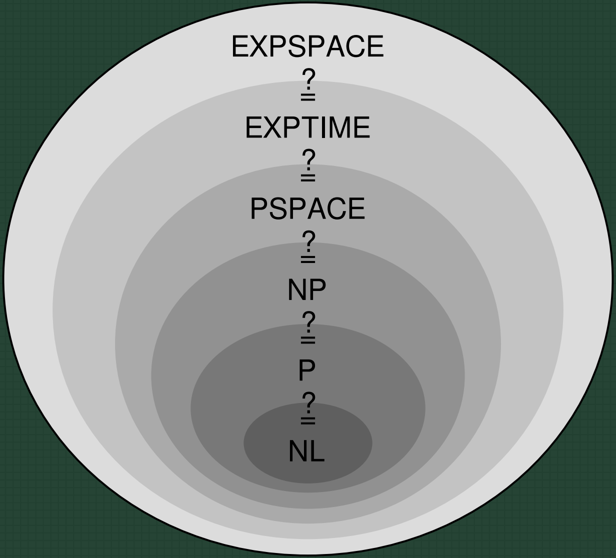
Theorem (Savitch の定理)

$O(f(n))$ 領域を利用する 非決定性 TM で決定できる問題は
$O(f(n)^2)$ 領域を利用する 決定性 TM で決定できる

証明のアイデア.

愚直にシミュレーションすると $f(n)2^{f(n)}$ 領域を使ってしまうので
サブルーチン「状況 c_1 から c_2 に t ステップで遷移できるか?」を使い
二分探索すると $f(n)\log_2(2^{f(n)}) = f(n)^2$ 領域で抑えられる

$2^{f(n)}$ は再帰の深さであり、また状況数でもあることに注意


EXPSPACE
$\stackrel{?}{=}$
EXPTIME
$\stackrel{?}{=}$
PSPACE
$\stackrel{?}{=}$
NP
$\stackrel{?}{=}$
P
$\stackrel{?}{=}$
NL