WQO 入門3 — クラスカルの木定理

齊藤哲平

August 3, 2024

概要

1. WQO の復習
2. クラスカルの木定理の主張 (項上の埋め込み順序は WQO)
3. 証明 (極小悪列論法)

WQO の復習

Definition
擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (例えば比較不能列など) は悪列と呼ぶ

WQO の復習

Definition
擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (例えば比較不能列など) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (例えば比較不能列など) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

命題

以下は同値

- $\leqslant$ は WQO
- $\leqslant$ の任意の拡張 $\leqslant'$ が整礎 (無限降下列 $a_0 >' a_1 >' \cdots$ がない)

WQO の復習

Definition
擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (例えば比較不能列など) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

命題
以下は同値

- $\leqslant$ は WQO
- $\leqslant$ の任意の拡張 $\leqslant'$ が整礎 (無限降下列 $a_0 >' a_1 >' \cdots$ がない)
- 任意の無限列 $a_0, a_1, \ldots$ は単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \cdots$ を含む

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (例えば比較不能列など) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

命題

以下は同値

- $\leqslant$ は WQO
- $\leqslant$ の任意の拡張 $\leqslant'$ が整礎 (無限降下列 $a_0 >' a_1 >' \cdots$ がない)
- 任意の無限列 $a_0, a_1, \ldots$ は単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \cdots$ を含む

命題 (Dickson, 1912)

2つの WQO $\leqslant_A, \leqslant_B$ の積 $\leqslant_{A\times B}$ は WQO

項の埋め込み順序

Definition

Σ を関数記号の集合として、項の集合を帰納的に定義

- 引数が 0 個の関数記号 c は項
- f が引数が $n > 0$ 個の関数記号で $t_1, \ldots, t_n$ が項のとき $f(t_1, \ldots, t_n)$ も項

また、以下の関係 $\rightsquigarrow$ の反射推移閉包を埋め込み $\geqslant_{\mathsf{emb}}$ という

$$f(t_1, \ldots, t_n) \rightsquigarrow t_i$$

Example

$\Sigma = \{\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{a}^{(0)}\}$ のとき

$$\mathbf{f}(\underline{\mathbf{g}(\mathbf{a})}, \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{a})) \geqslant_{\mathsf{emb}} \mathbf{f}(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{a})}) \geqslant_{\mathsf{emb}} \mathbf{f}(\underline{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \geqslant_{\mathsf{emb}} \mathbf{a}$$

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)

項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は WQO

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)

項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathsf{emb}}$ は WQO

$|t|$ で項 t に現れる関数記号の数（項のサイズ）を表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\mathsf{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $t_0, \ldots, t_{i-1}, t'$ で始まり $|t'| < |t_i|$ を満たす悪列はない

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)

項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathsf{emb}}$ は WQO

$|t|$ で項 t に現れる関数記号の数（項のサイズ）を表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\mathsf{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $t_0, \ldots, t_{i-1}, t'$ で始まり $|t'| < |t_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $t_0, t_1, \ldots$ のこと

$(i = 0)$ 悪列 $t'_0, t'_1, \ldots$ で $|t'_0| < |t_0|$ となるものは存在しない

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)

項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は WQO

$|t|$ で項 t に現れる関数記号の数（項のサイズ）を表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $t_0, \ldots, t_{i-1}, t'$ で始まり $|t'| < |t_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $t_0, t_1, \ldots$ のこと

- ($i = 0$) 悪列 $t'_0, t'_1, \ldots$ で $|t'_0| < |t_0|$ となるものは存在しない
- ($i = 1$) 悪列 $t_0, t'_1, t'_2, \ldots$ で $|t'_1| < |t_1|$ となるものは存在しない

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)
項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は WQO

$|t|$ で項 t に現れる関数記号の数（項のサイズ）を表すとする

Lemma (極小悪列補題)
$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $t_0, \ldots, t_{i-1}, t'$ で始まり $|t'| < |t_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $t_0, t_1, \ldots$ のこと

- $(i = 0)$ 悪列 $t'_0, t'_1, \ldots$ で $|t'_0| < |t_0|$ となるものは存在しない
- $(i = 1)$ 悪列 $t_0, t'_1, t'_2, \ldots$ で $|t'_1| < |t_1|$ となるものは存在しない
- $(i = 2)$ 悪列 $t_0, t_1, t'_2, t'_3, \ldots$ で $|t'_2| < |t_2|$ となるものは存在しない

クラスカルの木定理と極小悪列補題

以下、関数記号の集合 Σ が有限だと仮定する

命題 (Kruskal)
項の埋め込み関係 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は WQO

$|t|$ で項 t に現れる関数記号の数（項のサイズ）を表すとする

Lemma (極小悪列補題)
$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $t_0, \ldots, t_{i-1}, t'$ で始まり $|t'| < |t_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $t_0, t_1, \ldots$ のこと

$(i = 0)$ 悪列 $t'_0, t'_1, \ldots$ で $|t'_0| < |t_0|$ となるものは存在しない

$(i = 1)$ 悪列 $t_0, t'_1, t'_2, \ldots$ で $|t'_1| < |t_1|$ となるものは存在しない

$(i = 2)$ 悪列 $t_0, t_1, t'_2, t'_3, \ldots$ で $|t'_2| < |t_2|$ となるものは存在しない

(以下同様)

命題 (Kruskal)

$\leqslant_{\text{emb}}$ は WQO

証明.

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$ をとる
2. $\leqslant_{\text{emb}}$ は $T = \bigcup_i T_i$ 上で WQO (T_i は t_i の引数の集合)
3. ある関数記号 $f^{(n)}$ $(n > 0)$ が頭部に無限回現れる

$$t_{\phi(i)} = f(t_1^{\phi(i)}, \ldots, t_n^{\phi(i)})$$

4. Dickson の補題からある $i < j$ について

$$t_1^{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} t_1^{\phi(j)}, \quad \cdots, \quad t_n^{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} t_n^{\phi(j)}$$

5. $t_{\phi(i)} = f(t_1^{\phi(i)}, \ldots, t_n^{\phi(i)}) \leqslant_{\text{emb}} f(t_1^{\phi(j)}, \ldots, t_n^{\phi(j)}) = t_{\phi(j)}$ ↯

ステップ2の詳細

- 極小悪列 $t_0, t_1, \ldots$
- $T = \bigcup_i T_i$ (T_i は t_i の引数の集合)
- $t'_0, t'_1, \ldots$ は T の悪列
- t'_0 は t_k の引数である
- 十分大きい $N \geqslant k$: 任意の $i \geqslant N$ について $t'_i \notin T_1 \cup \cdots \cup T_k$

$t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_0, t'_N, t'_{N+1}, \ldots$ は良列; いずれの場合も矛盾 ↯

- $t_i \leqslant_{\text{emb}} t_j$ ↯
- $t_i \leqslant_{\text{emb}} t'_0 \leqslant_{\text{emb}} t_0 \implies i = 0 \implies t_0 \leqslant_{\text{emb}} t'_0$ ↯
- $t_i \leqslant_{\text{emb}} t'_{N+j} \leqslant_{\text{emb}} t_{N+j}$ ↯
- $t'_0 \leqslant t'_{N+j}$ ↯
- $t'_{N+j} \leqslant t'_{N+j'}$ ↯

補足

クラスカルの木定理も「タネ」となる順序を取るようにできる

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO なら $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

Knuth「プログラムの停止性解析に応用できないか?」

補足

クラスカルの木定理も「タネ」となる順序を取るようにできる

命題 (Higman 1952)
$\leqslant$ が WQO なら $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

Knuth「プログラムの停止性解析に応用できないか?」
$\rightsquigarrow$ Dershowitz の recursive path order