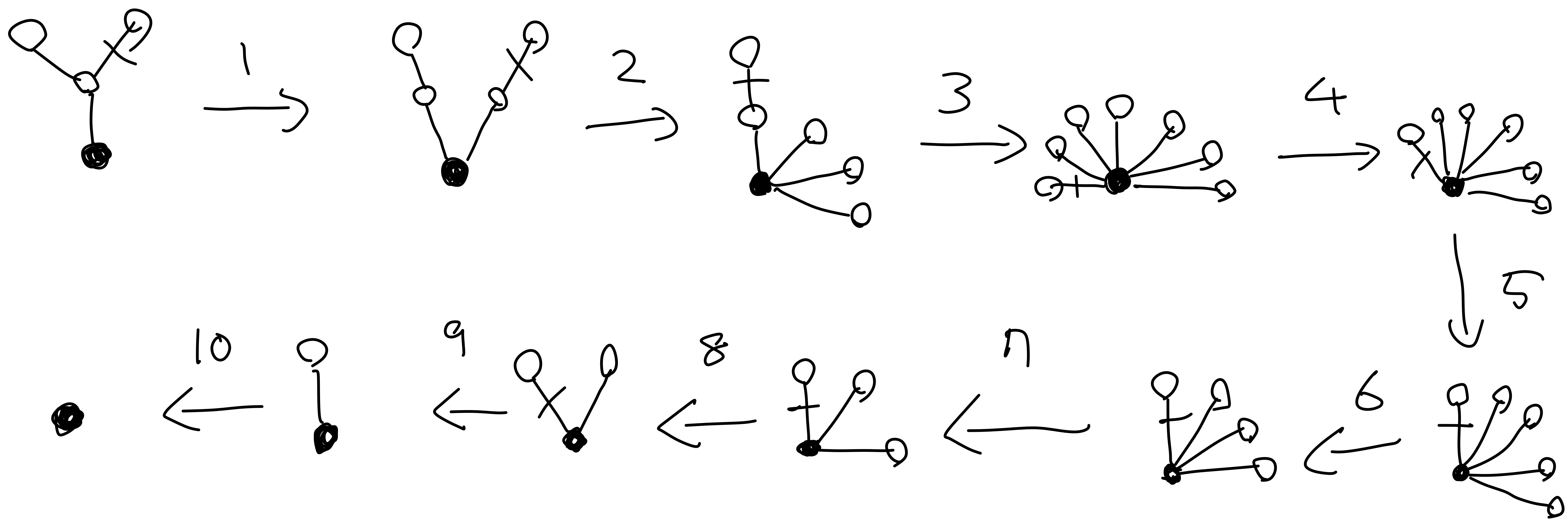
ヒドラゲームを
マルチセットで攻略

筋書き

- ヒドラゲーム (6 min)
- 埋め込みによる停止性証明 (7 min)
  - 高さ1以下のヒドラゲームの停止性証明（自然数への埋め込み）
  - 高さ2以下のヒドラゲームは自然数へ埋め込み不可能
- Multiset (7 min)
  - 高さ2以下のヒドラゲームの停止性証明（Multisetへの埋め込み）
  - 一般の場合の停止性証明

ヒドラゲーム

ヒドラゲームの例



ヒドラゲームの定義

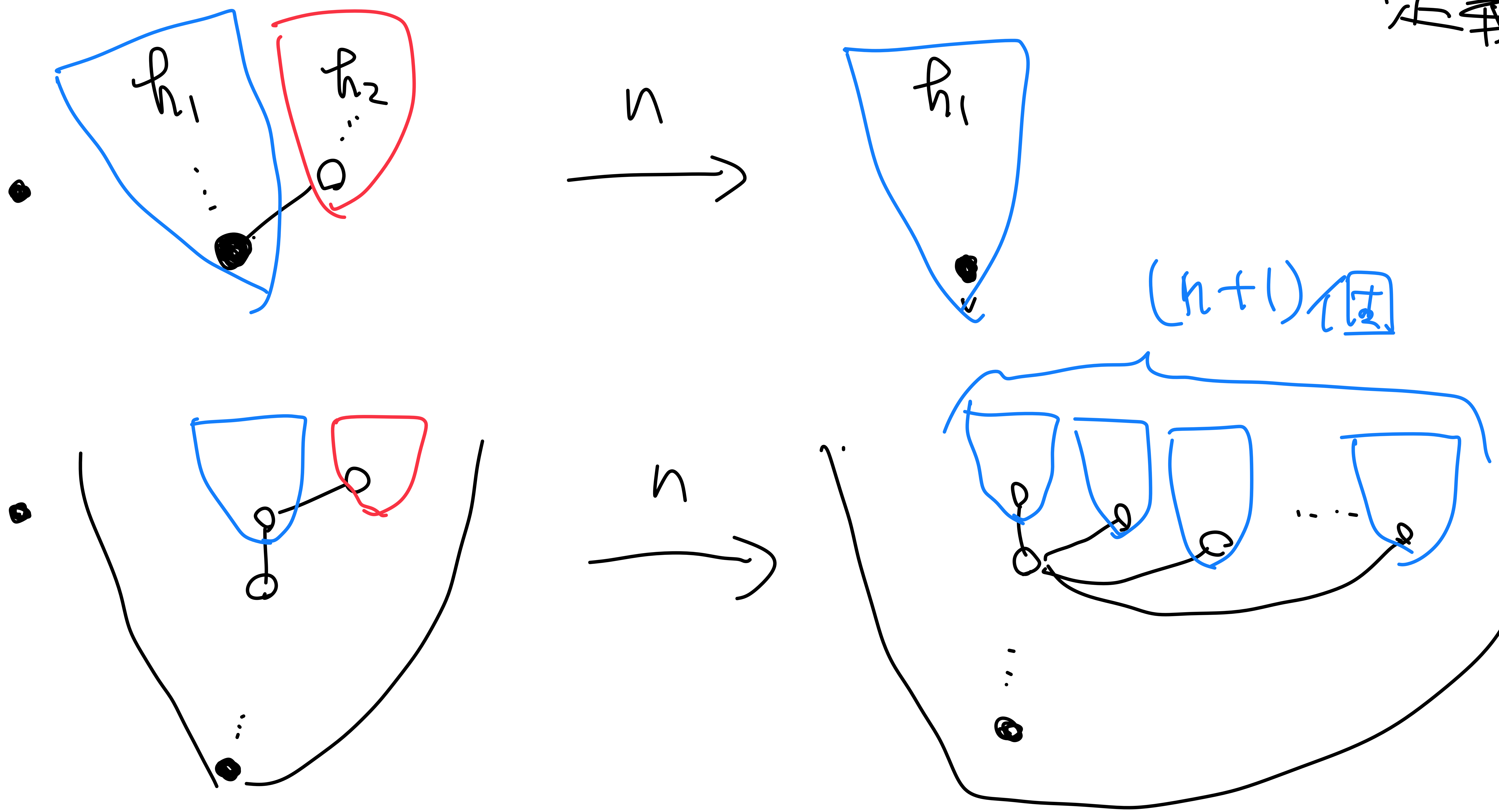
def (ヒドラゲーム)

- 高さ $k \in \mathbb{N}$ の根付き木を高さ k のヒドラと呼ぶ。
- 高さ k 以下のヒドラの集合を H_k とかく。
- $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$
- ヒドラの根は ● で、それ以外のnodeは ○ でかく。

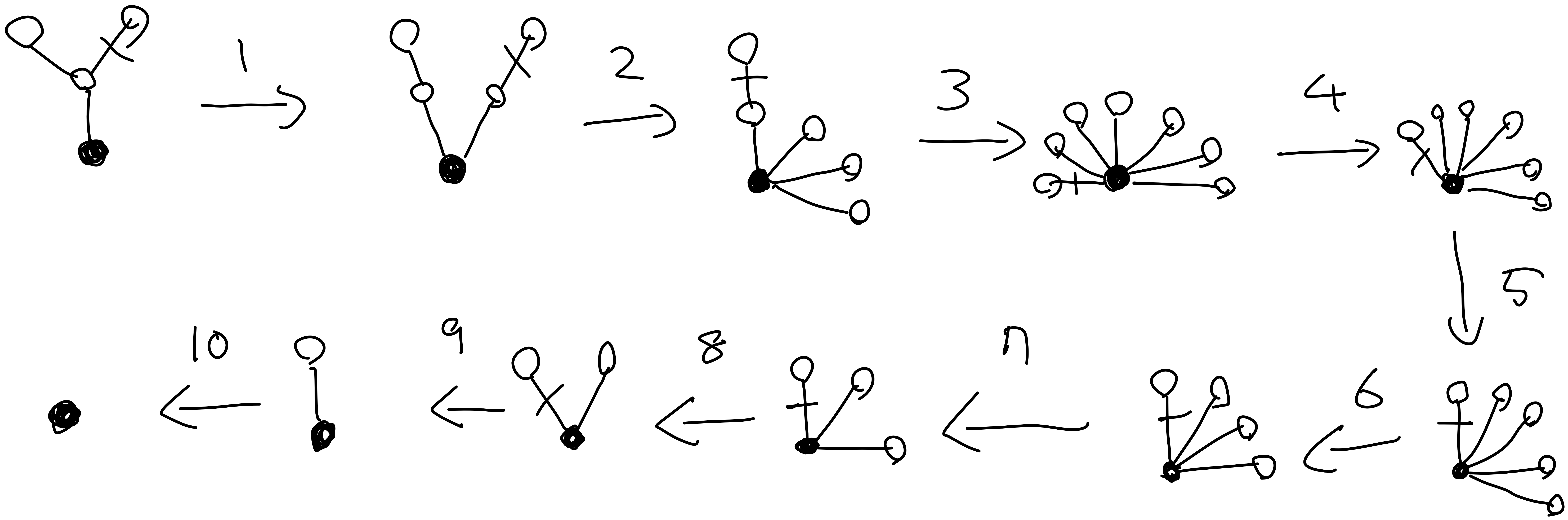
(つづく)

ヒドラゲームの定義 (2)

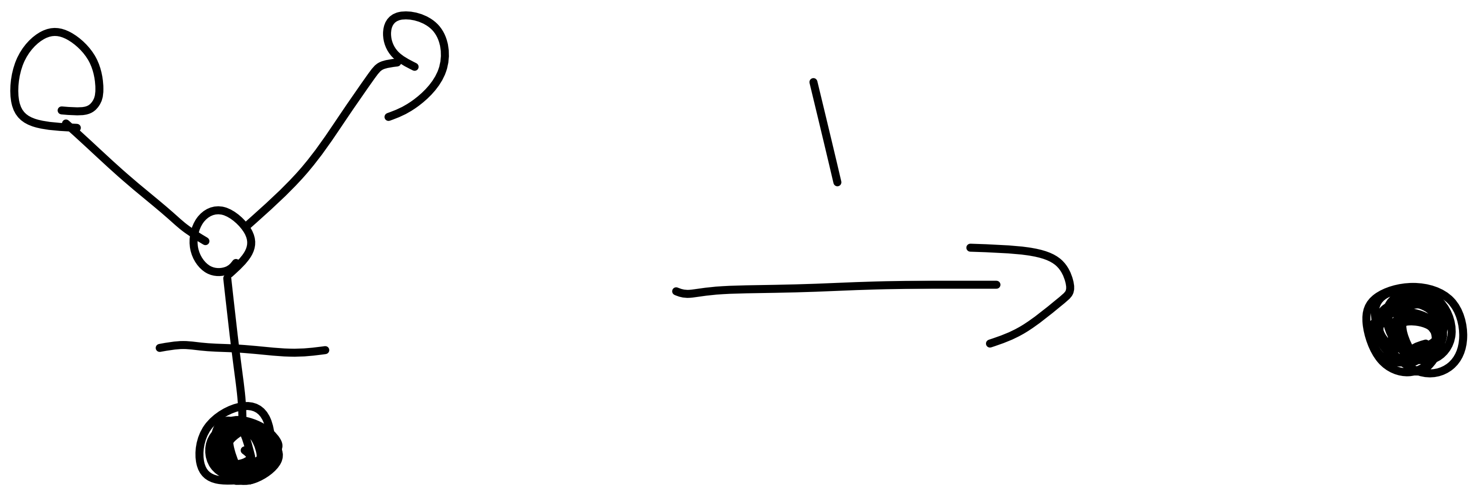
各自然数nに対し、H上の関係 $\xrightarrow{n}$ を以下のように定義する.

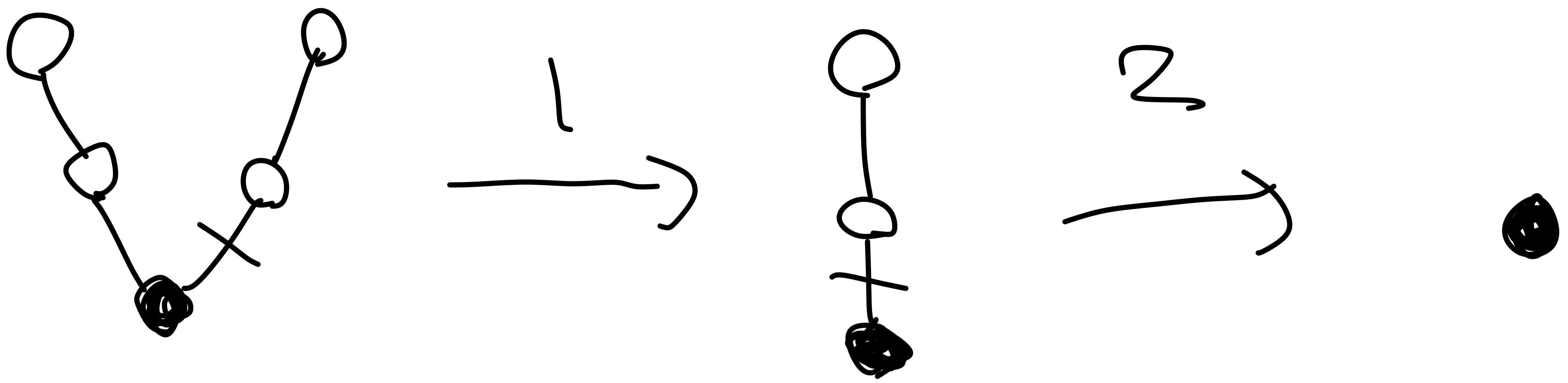


ヒドラゲームの例（再掲）

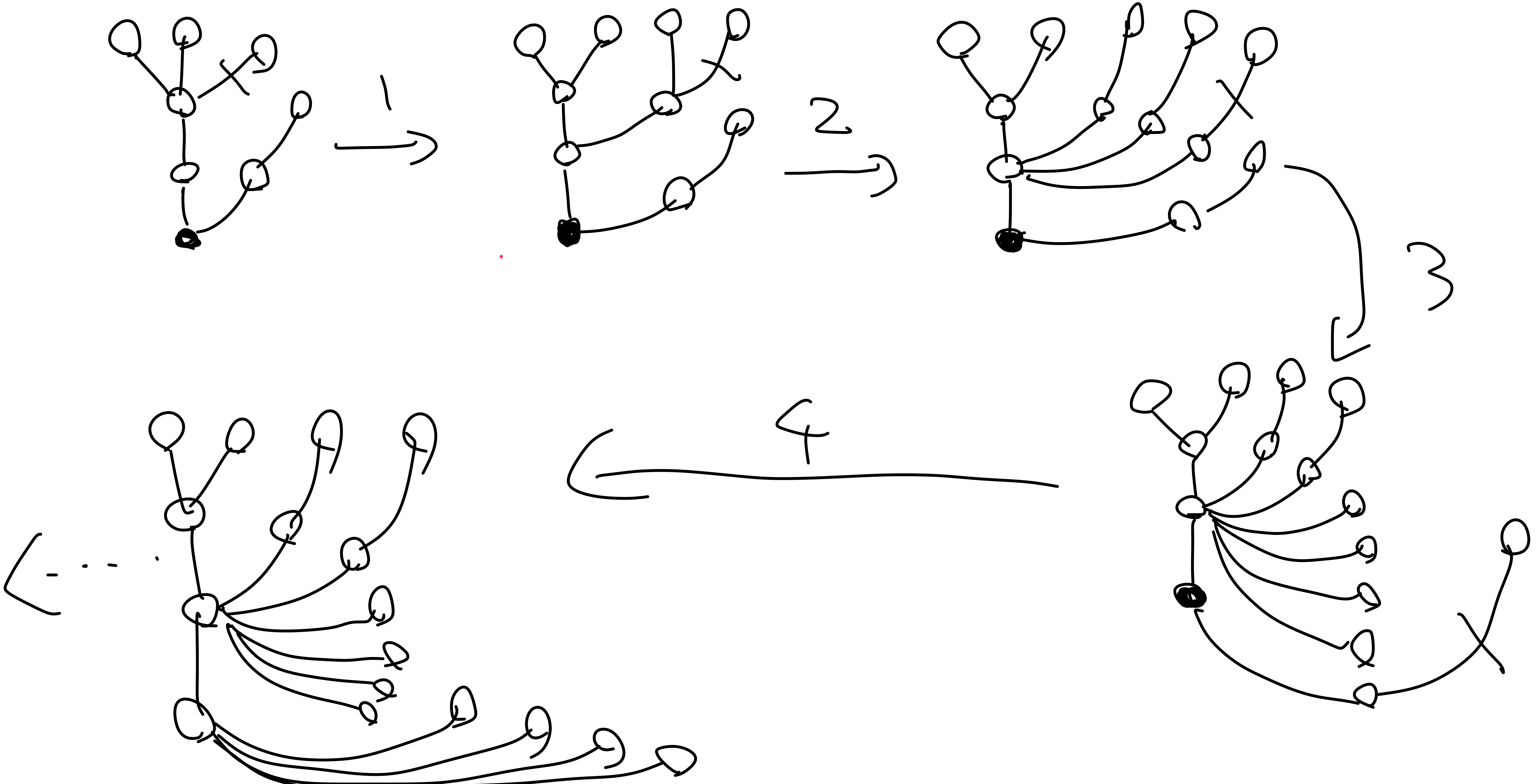


ヒドラゲームの例（いきなり下から切る）





例: 高さ3のヒドラゲーム



埋め込みによる停止性証明

抽象書き換え系の停止性の定義

def (抽象書き換え系)

- A: 集合
- $\to$: A 上の二項関係 とする.

に対し $\langle A, \to \rangle$ を抽象書き換え系と呼ぶ.

def (停止性)

抽象書き換え系 $\langle A, \to \rangle$ に対し、A 上の列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \cdots$ となる列が存在しないとき、$\langle A, \to \rangle$ は停止するという。

抽象書き換え系と停止性の例

- 自然数 $\mathbb{N}$ 上の通常の順序を $>_{\mathbb{N}}$ とかく。

  $\langle \mathbb{N}, >_{\mathbb{N}} \rangle$ は抽象書き換え系で、停止する。

(列の例)

$5 >_{\mathbb{N}} 4 >_{\mathbb{N}} 2 >_{\mathbb{N}} 1 >_{\mathbb{N}} 0$.

- 任意の順序集合は抽象書き換え系。
- ヒドラゲーム $\langle H, \rightarrow \rangle$ は抽象書き換え系。

ヒドラゲームの停止性

Th. $\boxed{\text{ヒドラゲームは停止性を持つ.}}$

(め?証明) 下から切れば必勝できるから?

埋め込みによる停止性証明

Th. $\langle A, \to_A \rangle$と$\langle B, \to_B \rangle$を抽象書き換え系で、$\langle B, \to_B \rangle$は停止するとする。

このとき、写像$f: A \to B$で、任意の$a_1, a_2 \in A$に対し

$a_1 \to_A a_2$ ならば $f(a_1) \to_B f(a_2)$

を満たすものが存在すれば、$\langle A, \to_A \rangle$は停止する。

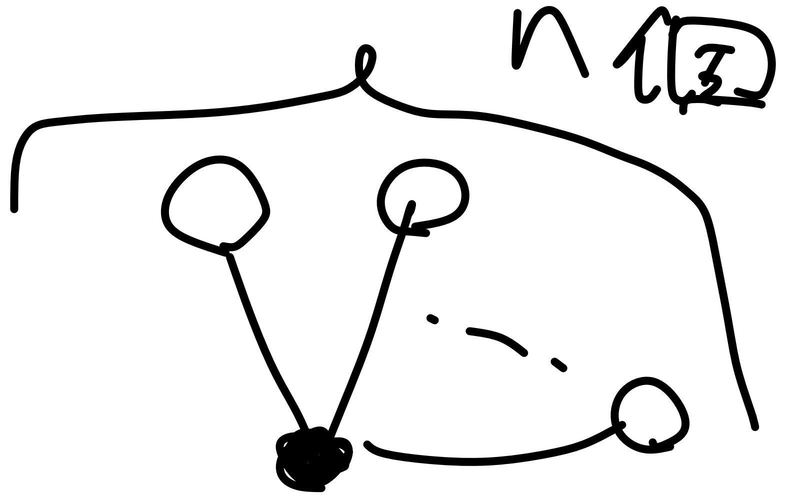
def

______の条件をみたすfを$\langle A, \to_A \rangle$から$\langle B, \to_B \rangle$への埋めこみと呼ぶ!!

高さ1のヒドラゲームの停止性証明

Th. 高さ1以下のヒドラゲーム $\langle H_1, \to \rangle$ は停止する.

(証明) 写像 $f : H_1 \to \mathbb{N}$ を



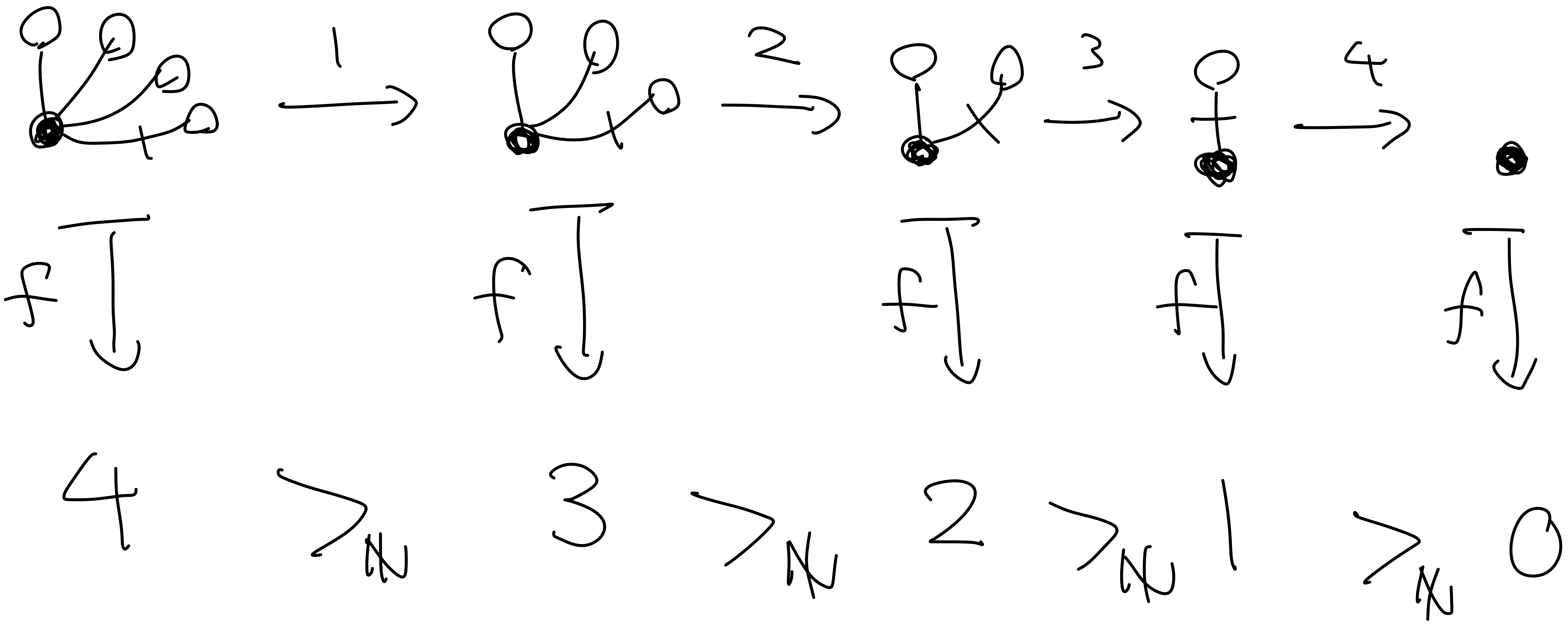
$\longmapsto n$ と定義する.

これは $\langle H_1, \to \rangle$ から $\langle \mathbb{N}, >_{\mathbb{N}} \rangle$ への埋めこみで

$\langle \mathbb{N}, >_{\mathbb{N}} \rangle$ は停止性を持つから、$\langle H_1, \to \rangle$ は停止性をもつ.

$\square$

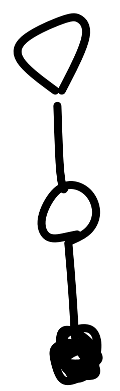
例: 高さ1以下のヒドラの埋め込み

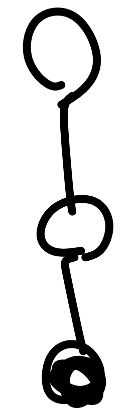


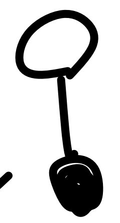
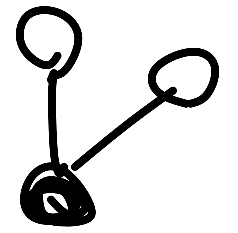
高さ2以下のヒドラゲームの埋め込み不可能性

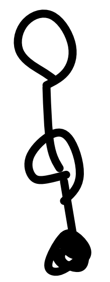
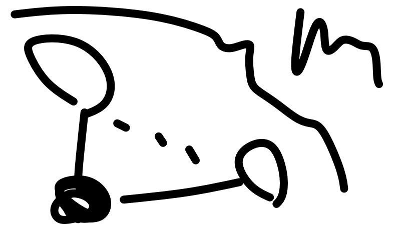
Th. $\langle H_2, \rightarrow \rangle$ から $\langle \mathbb{N}, >_{\mathbb{N}} \rangle$ への埋めこみは存在しない。

(証明) 埋めこみが存在したと仮定し、それを $f: H_2 \rightarrow \mathbb{N}$ とする。

ヒドラ  に着目する。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、 

であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f($  $) >_{\mathbb{N}} f($  $)$.

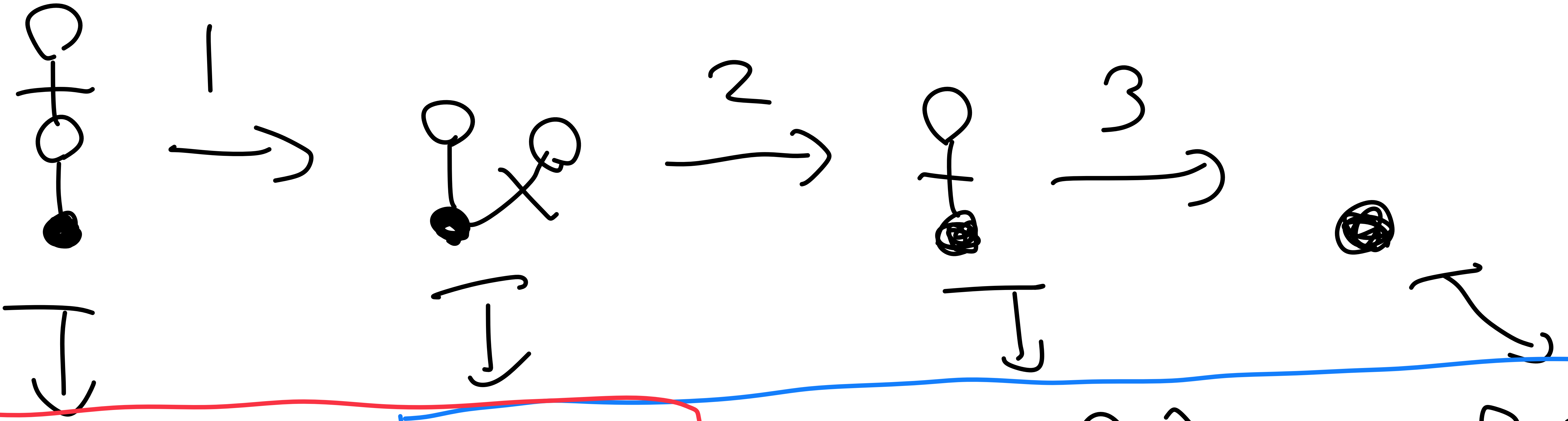
一方で $f(\bullet) <_{\mathbb{N}} f($  $) <_{\mathbb{N}} f($  $) <_{\mathbb{N}} \cdots$ であるはずなので

$m = f($  $)$ をとれば  個から矛盾が出る。□

高さ2以下のヒドラゲームの埋め込みができない例

$f : \mathcal{H} \to \mathbb{N}$ が、$f(\ ) = 2$ である埋め込みとしよう。

ヒドラの列



から、

$\boxed{2 = f(\ ) >_{\mathbb{N}} \boxed{f(\ )} >_{\mathbb{N}} f(\ ) >_{\mathbb{N}} f(\bullet)}$ を得る。

一方 $\boxed{}$ より $f(\ ) \geq_{\mathbb{N}} f(\ ) + 1 \geq_{\mathbb{N}} (f(\bullet) + 1) + 1 \geq 2$ となり、

$\boxed{}$ と合わせて $2 > 2$。これは矛盾。よって $f(\ ) = 2$ の埋め込みは存在しない。

Multiset

Multiset

def (multiset)

Xを集合とする. 関数$A: X \to \mathbb{N}$で、

$A(x) > 0$なるxが有限個のものをX上のmultisetと呼ぶ。

X上のmultiset全体の集合を$\mathcal{M}(X)$とかく。

さらに、記法として$A: X \to \mathbb{N}$が有限個の条件でかけるとき:

$$A(x) = \begin{cases} n_1 & (x = x_1) \\ n_2 & (x = x_2) \\ \vdots & \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

Aを$\{\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1\text{個}}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2\text{個}}, \dots\}$とかく。

Multisetの例

- 自然数上の関数 $A:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を

$$A(n)=\begin{cases}2 & (n=2)\\ 1 & (n=1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$ とすると、

$$A=\{2,2,1\}\in\mathcal{M}(\mathbb{N}).$$

- $B:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を常に0をとる恒等写像とすると、

$$B=\{\}\in\mathcal{M}(\mathbb{N}).$$

集合の記法をMultisetに拡張

def (multiset の $\in$, $\cup$, $\setminus$).

$A, B \in \mathcal{M}(X)$, $x \in X$ とする.

- $A(x) > 0$ のとき $x \in A$ とかく.
- $A \cup B \in \mathcal{M}(X)$ を $(A \cup B)(x) = A(x) + B(x)$ で定める.
- $A \setminus B \in \mathcal{M}(X)$ を $(A \setminus B)(x) = \begin{cases} A(x) - B(x) & (A(x) \geq B(x) \text{ のとき}) \\ 0 & (A(x) < B(x) \text{ のとき}) \end{cases}$ で定める.

集合の記法をMultisetに拡張 (2)

def (multiset の Φ, $\subseteq$)。

- $\Phi = \{\}$
- 任意の $x \in X$ について $A(x) \leq_{\mathbb{N}} B(x)$ のとき、

  $A \subseteq B$ とかく。

Multisetの演算の例

例:

- $2 \in \{2,2,1\}$
- $0 \notin \{2,2,1\}$
- $\{2,2,1\} \cup \{3,2\} = \{3,2,2,2,1\}$
- $\{2,2,1\} \setminus \{2,1\} = \{2\}$
- $\{2,2,1\} \setminus \{2,2,2\} = \{1\}$
- $\{2,2\} \subseteq \{2,2,1\}$
- $\{3,2,2\} \not\subseteq \{4,2,2\}$

Multisetへの順序拡張

def ($>^{mul}$)

$(X, >)$を順序集合とする.($>$はstrict order.)

$\mathcal{M}(X)$上の関係 $>^{mul}$ を以下のように定義:

$A >^{mul} B$ とは、以下をみたす $A', B' \in \mathcal{M}(X)$ が存在すること.

- $\emptyset \neq A' \subseteq A$
- $B = (A \setminus A') \cup B'$
- 任意の $b \in B'$ に対して、$a > b$ をみたす $a \in A'$ が存在する.

順序拡張の例

$(\mathbb{N}, >_{\mathbb{N}})$ の multiset 拡張 $(\mathcal{M}(\mathbb{N}), >_{\mathbb{N}}^{mul})$ を考える.

- $\{2\} >_{\mathbb{N}}^{mul} \{1, 1\}$
- $\{2\} >_{\mathbb{N}}^{mul} \{\}$
- $\{3, 2, 1\} >_{\mathbb{N}}^{mul} \{3, 1, 1, 1\}$

Multiset拡張は停止性を保存する

Th. $(X, >)$を停止性をもつ順序集合とする.

($>$: strict order)

このとき、

$(M(X), >^{mul})$は停止性をもつ順序集合である.

(おまけでやるかも? Königの補題をつかう)

Multiset拡張の停止性の例

$$\{2\} >^{mul} \{1,1\} >^{mul} \{1,0,0,0\} >^{mul} \{0,0,0,0,0\}.$$

ここで何個1を入れようがとまる!!

こうなってたら
要素はふえるより!

$$\{0,0,0,0,0\} \vee^{mul} \{0,0,0,0\} \vee^{mul} \{0,0,0\} \vee^{mul} \{0,0\} \vee^{mul} \{0\}$$

$$\{\emptyset\} <^{mul} \{0\}$$

高さ2以下のヒドラゲームの停止性証明

$\boxed{\textbf{Thm.}\ \langle H_2, \to \rangle \text{は停止する.}}$

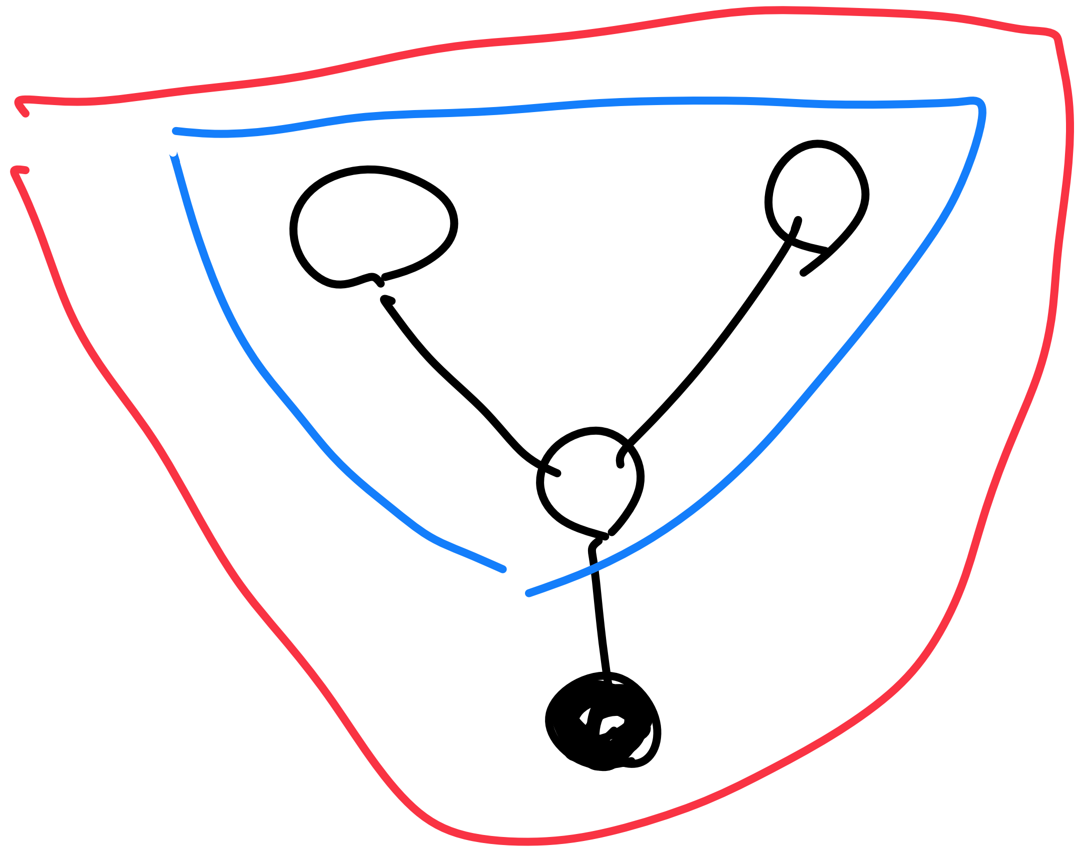
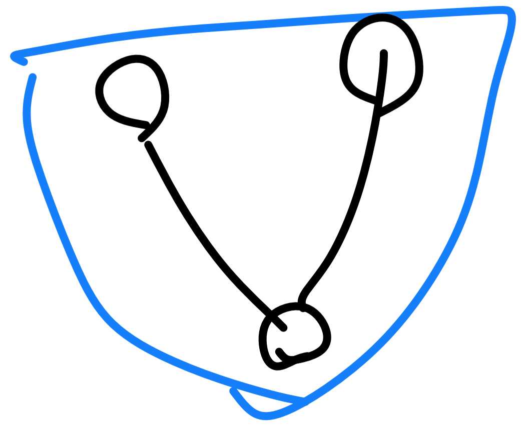
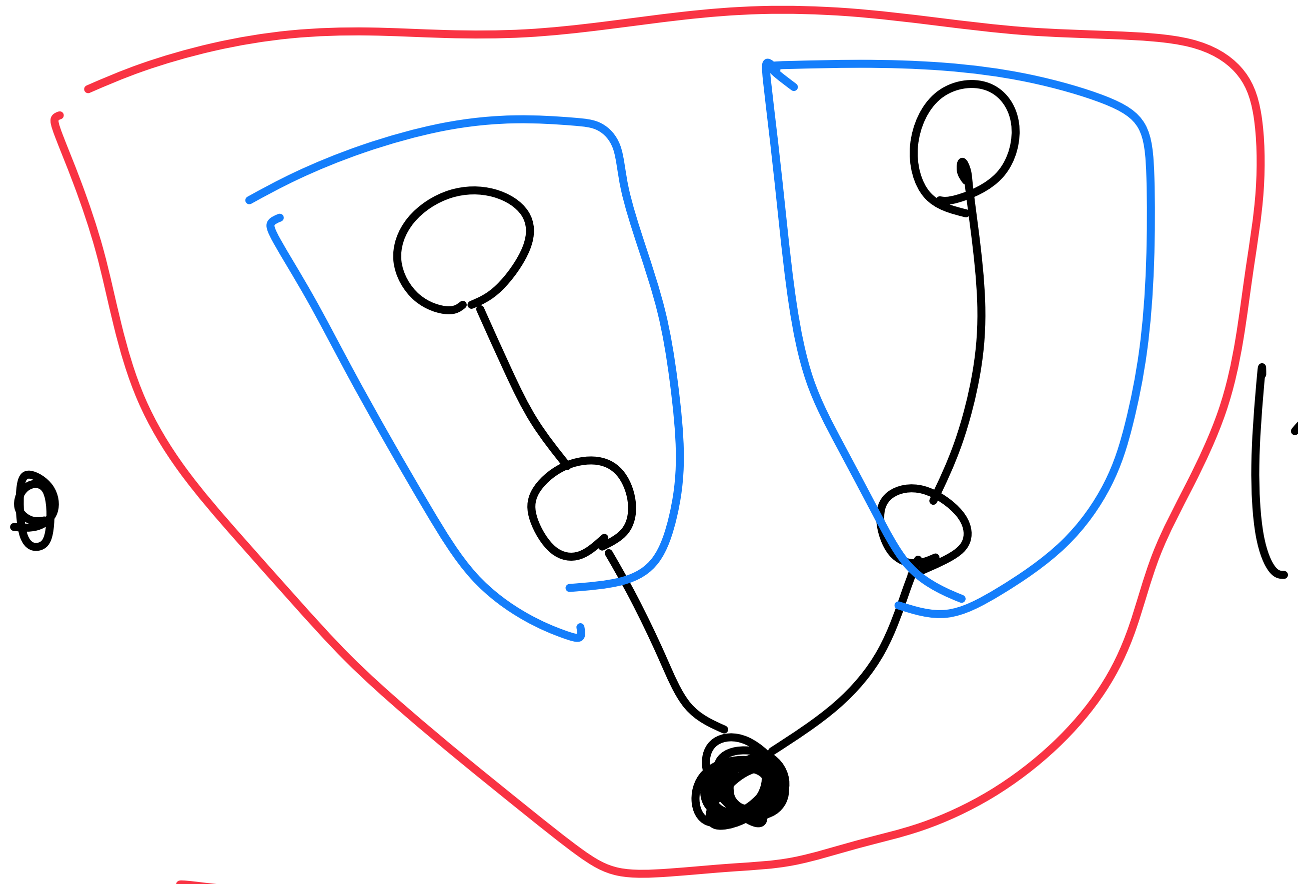
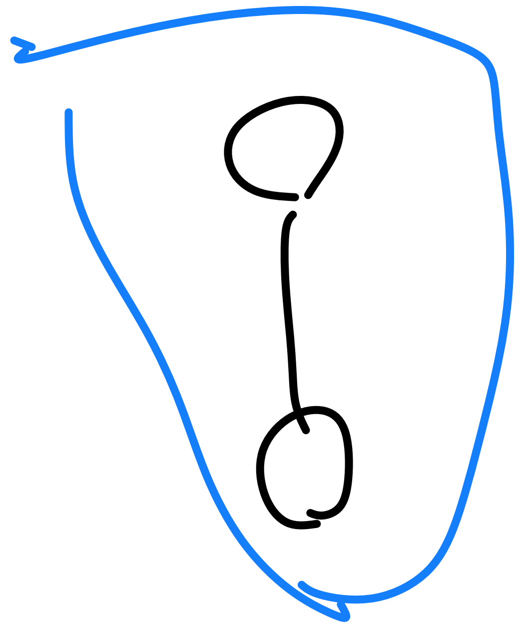
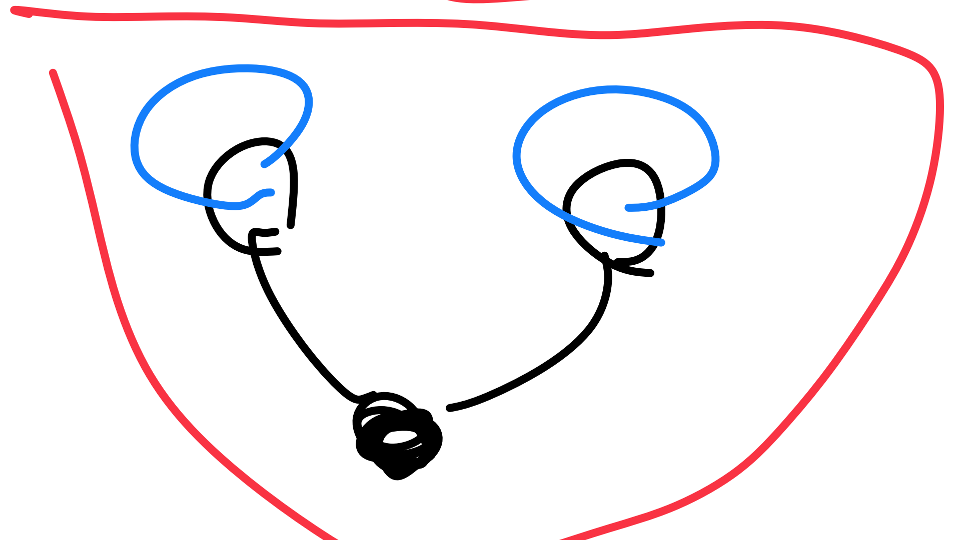
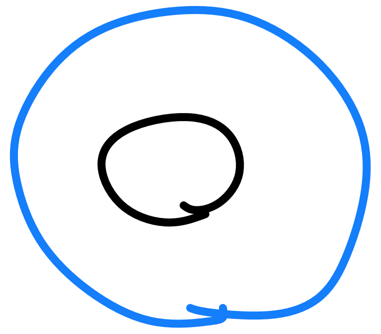
(証明) $\langle H_2, \to \rangle$を $\langle \mathcal{M}(\mathbb{N}), >_{\mathbb{N}}^{mul} \rangle$に埋めこめばよい。

$\langle H_1, \to \rangle$から $\langle \mathbb{N}, >_{\mathbb{N}} \rangle$への埋め込み fを用いる.

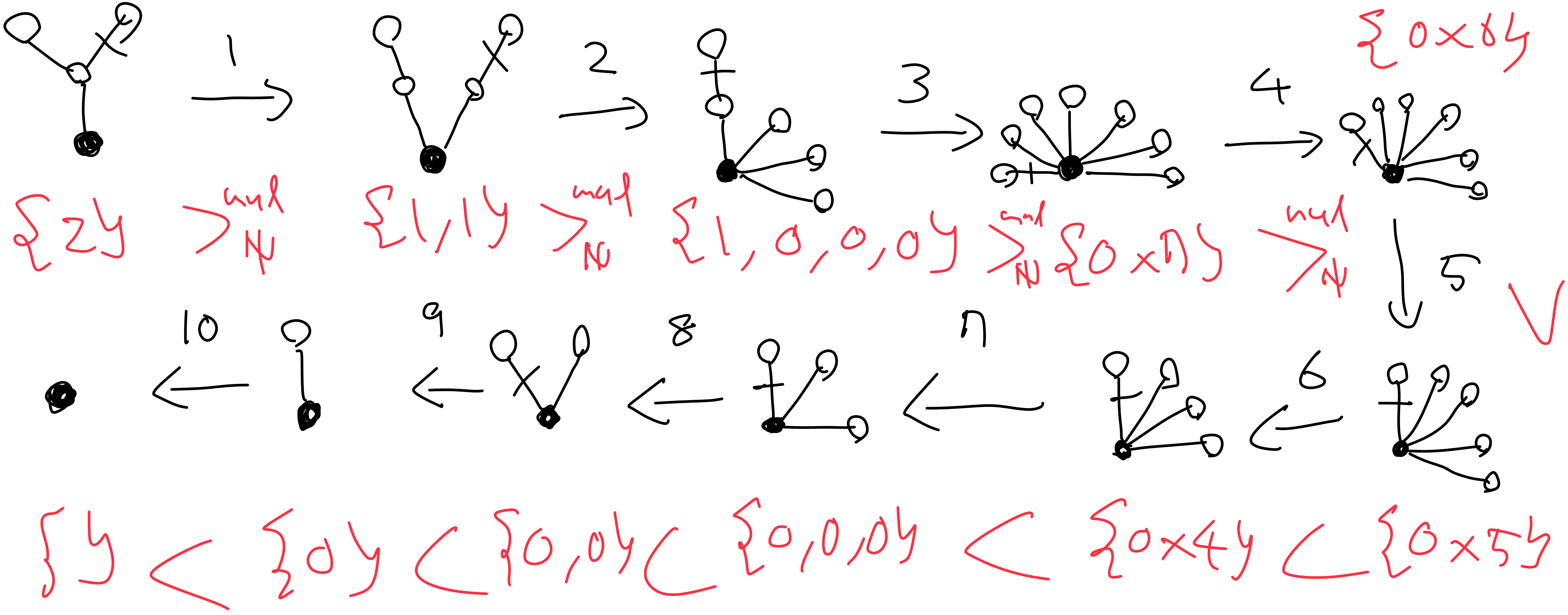
$\longmapsto \{ f(h_1), f(h_2), \ldots, f(h_m) \} \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$.

$(h_1, \ldots, h_m \in H_1)$

高さ2以下のヒドラの埋め込み例

-  は、 $\mapsto 2$ より $\{2\}$.
-  は、 $\mapsto 1$ より $\{1, 1\}$
-  は、 $\mapsto 0$ より $\{0, 0\}$

高さ2以下のハイドラの埋め込み例 (2)



Multiset拡張の繰り返し適用

def $(\mathcal{M}^n(X), >^{mul^n})$

順序集合 $(X, >)$ と自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$(\mathcal{M}^n(X), >^{mul^n})$ を n について再帰で定義する.

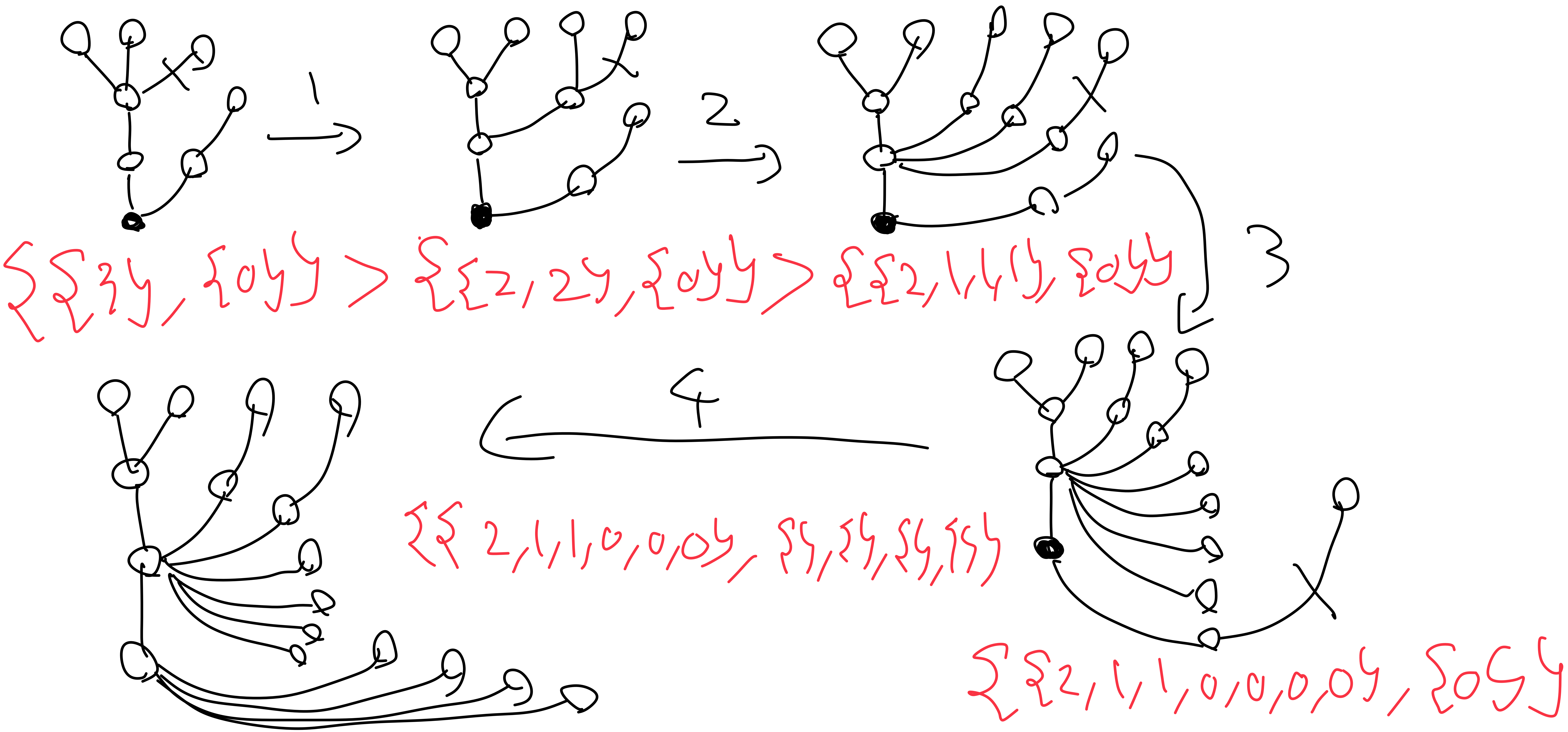
- $\mathcal{M}^0(X) = X$
- $>^{mul^0} = >$
- $\mathcal{M}^{n+1}(X) = \mathcal{M}(\mathcal{M}^n(X))$
- $>^{mul^{n+1}} = (>^{mul^n})^{mul}$

一般の高さのヒドラの停止性

Thm. 高さ k のヒドラゲーム $\langle H_k, \to \rangle$ は $(M^k(\mathbb{N}), >^{mul^k}_{\mathbb{N}})$ に埋め込める.

Col. ヒドラゲーム $\langle H, \to \rangle$ は停止する.

例: 高さ3のヒドラゲームの埋め込み



ヒドラゲームの停止性を
Multisetに埋め込んで遊んだ

おまけ: Multiset拡張が停止性を保存する証明

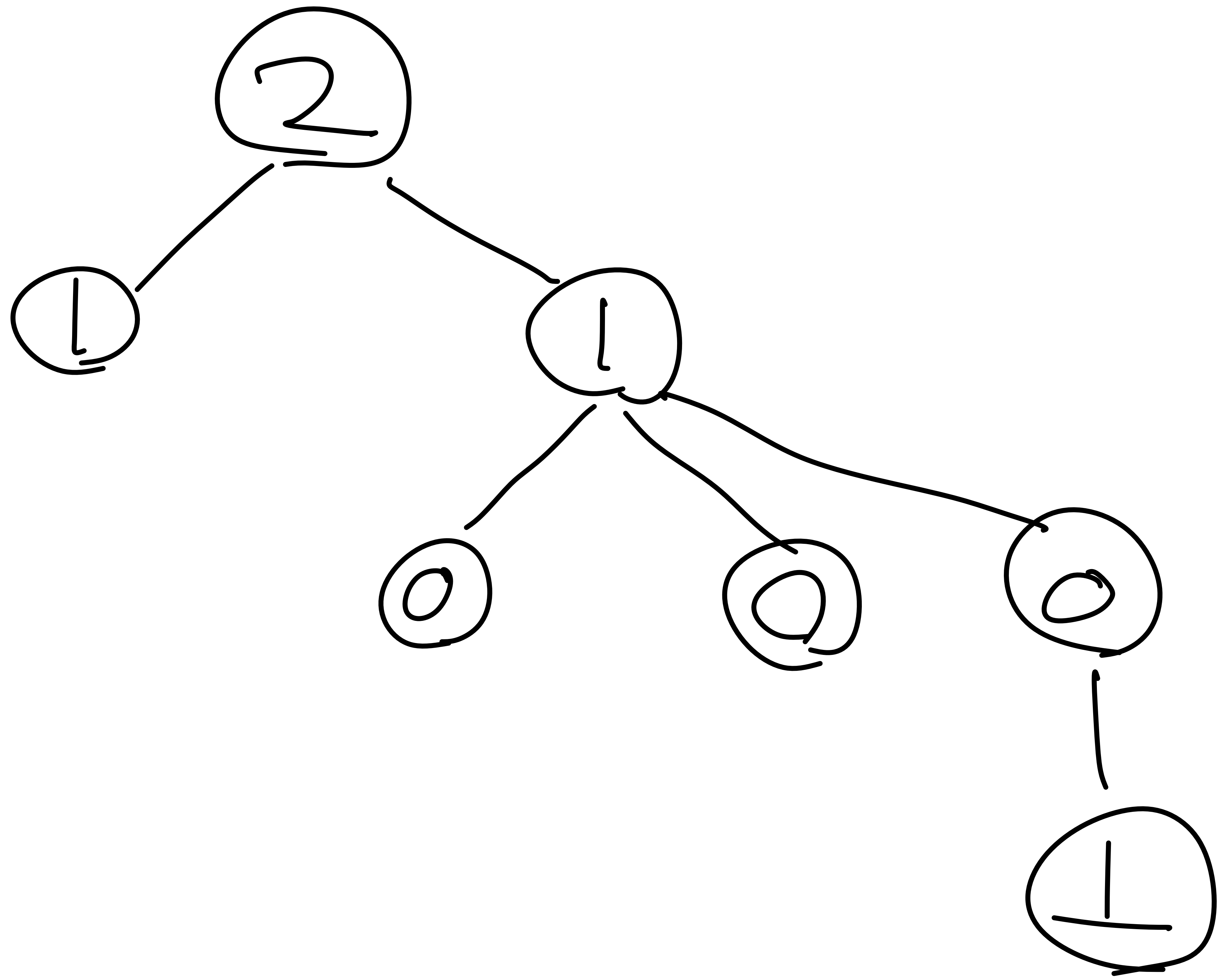
(証明) アイデア: multisetの降下列から木をつくる.

$>^{mul}$の無限降下列があったとすると、有限分岐で
サイズが無限の木ができる. Königの補題から
無限長のパスがとれ、もとの$(X, >)$の停止性に
矛盾. □

例: Multisetの降下列から木を作る

$$\{2\} >^{mul} \{1, 1\} >^{mul} \{1, 0, 0, 0\} >^{mul} \{1, 0, 0\}$$

に対応する木.



参考文献

- F. Baader and T. Nipkow. Term Rewriting and All That. Cambridge University Press, 1998.
- 田中一之. 数学基礎論講義. 日本評論社, 1997.