多値論理

齊藤　哲平

September 30, 2023

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則: A かつ A でないならば、B である。

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則：A かつ A でないならば、B である。

排中律：A または A でない。

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則: A かつ A でないならば、B である。

排中律: A または A でない。

これらの推論に対する批判の例

- (爆発則) 仮定と結論は「関連」しているべきだ。

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則：A かつ A でないならば、B である。

排中律：A または A でない。

これらの推論に対する批判の例

- （爆発則）仮定と結論は「関連」しているべきだ。
- （排中律）曖昧性を許したいこともあるのでは？

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則：A かつ A でないならば、B である。

排中律：A または A でない。

これらの推論に対する批判の例

- (爆発則)仮定と結論は「関連」しているべきだ。
- (排中律)曖昧性を許したいこともあるのでは？
- (排中律)嘘つきのパラドクスは排中律が原因では？

多値論理とはどのような論理か

多値論理では、一般には以下のような推論が真でない。

爆発則：A かつ A でないならば、B である。

排中律：A または A でない。

これらの推論に対する批判の例

- （爆発則）仮定と結論は「関連」しているべきだ。
- （排中律）曖昧性を許したいこともあるのでは？
- （排中律）嘘つきのパラドクスは排中律が原因では？

以下、命題論理の語彙 $\vee \wedge \neg$ で考えていく。

真理値の構造

b は both true and false で **n** は neither true nor false

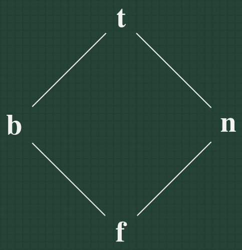

Figure: 真理値の構造

真理値の構造

$\mathbf{b}$ は both true and false で $\mathbf{n}$ は neither true nor false

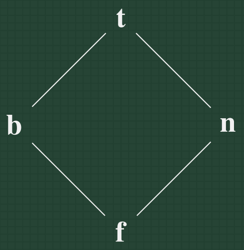

Figure: 真理値の構造

- $\wedge$ は下限を取る操作として見る。例：$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b}$ や $\mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{f}$

真理値の構造

$\mathbf{b}$ は both true and false で $\mathbf{n}$ は neither true nor false

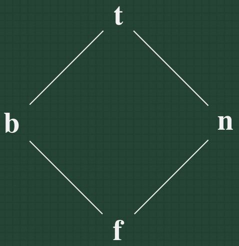

Figure: 真理値の構造

- $\wedge$ は下限を取る操作として見る。例：$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b}$ や $\mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{f}$
- $\vee$ は上限を取る操作として見る。例：$\mathbf{t} \vee \mathbf{b} = \mathbf{t}$ や $\mathbf{b} \vee \mathbf{n} = \mathbf{t}$

真理値の構造

$\mathbf{b}$ は both true and false で $\mathbf{n}$ は neither true nor false

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbf{t} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbf{b} \arrow[dr] & & \mathbf{n} \arrow[dl] \\
 & \mathbf{f} &
\end{tikzcd}
$$

Figure: 真理値の構造

- $\wedge$ は下限を取る操作として見る。例：$\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b}$ や $\mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{f}$
- $\vee$ は上限を取る操作として見る。例：$\mathbf{t} \vee \mathbf{b} = \mathbf{t}$ や $\mathbf{b} \vee \mathbf{n} = \mathbf{t}$
- $\neg$ は $\mathbf{t}$ と $\mathbf{f}$ を入れ替える。一方 $\mathbf{b}$ や $\mathbf{n}$ はそのまま。

真理値表

$\wedge$	t	f	b	n
t	t	f	b	n
f	f	f	f	f
b	b	f	b	f
n	n	f	f	n

Table: $\wedge$ の真理表

真理値表

$\wedge$	t	f	b	n
t	t	f	b	n
f	f	f	f	f
b	b	f	b	f
n	n	f	f	n

Table: $\wedge$ の真理表

$\vee$	t	f	b	n
t	t	t	t	t
f	t	f	b	n
b	t	b	b	t
n	t	n	t	n

Table: $\vee$ の真理表

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する<u>反例</u>と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は<u>妥当</u>であるという。

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当であるという。
妥当な推論の集合を論理 FDE (First Degree Entailment) と呼ぶ。

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当であるという。
妥当な推論の集合を論理 FDE (First Degree Entailment) と呼ぶ。

Example

命題変数 p, q について以下が成立。

- 前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当であるという。
妥当な推論の集合を論理 FDE (First Degree Entailment) と呼ぶ。

Example

命題変数 p, q について以下が成立。

- 前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない
- 前提 p から結論 $q \vee \neg q$ への推論は妥当でない

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当であるという。
妥当な推論の集合を論理 FDE (First Degree Entailment) と呼ぶ。

Example

命題変数 p, q について以下が成立。

- 前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない
- 前提 p から結論 $q \vee \neg q$ への推論は妥当でない
- 前提 $\neg\neg p$ から結論 p への推論は妥当（逆向きの推論も妥当）

妥当性

Definition (論理 FDE)

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ で、さらに
- $v(A) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{n}\}$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当であるという。
妥当な推論の集合を論理 FDE (First Degree Entailment) と呼ぶ。

Example

命題変数 p, q について以下が成立。

- 前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない
- 前提 p から結論 $q \vee \neg q$ への推論は妥当でない
- 前提 $\neg\neg p$ から結論 p への推論は妥当（逆向きの推論も妥当）
- 前提 $\neg(p \vee q)$ から結論 $\neg p \wedge \neg q$ への推論は妥当（逆向きも妥当）

爆発則・排中律が妥当でないこと

前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない。次の付置を考える。

$$v(p) = \mathbf{b} \qquad v(q) = \mathbf{f}$$

すると $v(p \wedge \neg p) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b}$ である。

爆発則・排中律が妥当でないこと

前提 $p \wedge \neg p$ から結論 q への推論は妥当でない。次の付置を考える。

$$v(p) = \mathbf{b} \qquad v(q) = \mathbf{f}$$

すると $v(p \wedge \neg p) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b}$ である。

前提 p から結論 $q \vee \neg q$ への推論は妥当でない。次の付置を考える。

$$v(p) = \mathbf{t} \qquad v(q) = \mathbf{n}$$

すると $v(q \vee \neg q) = \mathbf{n} \vee \mathbf{n} = \mathbf{n}$ である。

二重否定除去が妥当であること

前提 $\neg\neg p$ から結論 p への推論は妥当。

p	$\neg\neg p$
t	**t**
f	**f**
b	**b**
n	**n**

Table: 真理値表

二重否定除去が妥当であること

前提 $\neg\neg p$ から結論 p への推論は妥当。

p	$\neg\neg p$
t	**t**
f	**f**
b	**b**
n	**n**

Table: 真理値表

二変数になると $4 \times 4 = 16$ 行のテーブルになるのでやりたくない！

FDE が関連性論理であること

命題
任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

FDE が関連性論理であること

命題
任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

命題
任意の結論を帰結する論理式は存在しない。

証明.
そのような論理式 A があったとする。

FDE が関連性論理であること

命題

任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

命題

任意の結論を帰結する論理式は存在しない。

証明.

そのような論理式 A があったとする。A に現れない命題変数 p を取り、p に $\mathbf{f}$ を、それ以外には $\mathbf{b}$ を割りあてると $v(A) = \mathbf{b}$ となり矛盾。

FDE が関連性論理であること

命題

任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

命題

任意の結論を帰結する論理式は存在しない。

証明.

そのような論理式 A があったとする。A に現れない命題変数 p を取り、p に $\mathbf{f}$ を、それ以外には $\mathbf{b}$ を割りあてると $v(A) = \mathbf{b}$ となり矛盾。

命題 (FDE が関連性論理であること)

妥当な推論の前提と結論は、共有する命題変数を持つ。

FDE が関連性論理であること

命題
任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

命題
任意の結論を帰結する論理式は存在しない。

証明.
そのような論理式 A があったとする。A に現れない命題変数 p を取り、p に $\mathbf{f}$ を、それ以外には $\mathbf{b}$ を割りあてると $v(A) = \mathbf{b}$ となり矛盾。

命題 (FDE が関連性論理であること)
妥当な推論の前提と結論は、共有する命題変数を持つ。

証明.
共通な命題変数がなければ、前提に現れる変数に $\mathbf{b}$ を、結論に現れる変数に $\mathbf{n}$ を割り当てれば反例が構成できる。

三値論理 K3・LP

- Kleene の三値論理 K3 では $\mathbf{b}$ を除いて考える。
- Logic of Paradox LP では $\mathbf{n}$ を除いて考える。

推論	FDE	K3	LP
$A \wedge \neg A \vDash B$		妥当	
$A \vDash B \vee \neg B$			妥当
$\neg\neg A \vDash A$	妥当	妥当	妥当

Table: FDE・K3・LP 比較表

三値論理 K3･LP

- Kleene の三値論理 K3 では **b** を除いて考える。
- Logic of Paradox LP では **n** を除いて考える。

推論	FDE	K3	LP
$A \wedge \neg A \vDash B$		妥当	
$A \vDash B \vee \neg B$			妥当
$\neg\neg A \vDash A$	妥当	妥当	妥当

Table: FDE･K3･LP 比較表

命題

K3 では任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

三値論理 K3･LP

- Kleene の三値論理 K3 では **b** を除いて考える。
- Logic of Paradox LP では **n** を除いて考える。

推論	FDE	K3	LP
$A \wedge \neg A \vDash B$		妥当	
$A \vDash B \vee \neg B$			妥当
$\neg\neg A \vDash A$	妥当	妥当	妥当

Table: FDE･K3･LP 比較表

命題

K3 では任意の前提から帰結する論理式は存在しない。

命題

LP では任意の結論を帰結する論理式は存在しない。

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge : V \times V \to V$ と $f_\neg : V \to V$

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge : V \times V \to V$ と $f_\neg : V \to V$

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in D$ で、さらに
- $v(A) \notin D$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例 と呼ぶ。

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge : V \times V \to V$ と $f_\neg : V \to V$

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in D$ で、さらに
- $v(A) \notin D$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例 と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当 であるという。

一般の有限多値論理

Definition

以下の3つ組 $(V, D, \{f_\vee, f_\wedge, f_\neg\})$ を有限多値論理のモデルという。

- 真理値 の集合 V
- 指定値 $D \subseteq V$
- 真理値表 $f_\vee, f_\wedge : V \times V \to V$ と $f_\neg : V \to V$

$X \cup \{A\}$ を論理式の集合とする。付置 v（真理値割当）について

- すべての $B \in X$ に対して $v(B) \in D$ で、さらに
- $v(A) \notin D$

のとき、v を前提 X から A への推論に対する反例 と呼ぶ。
反例が存在しないとき、その推論は妥当 であるという。

直観主義論理は多値論理として特徴づけられない（第十章）。