位相意味論

宇田津 孝介

JAIST

Novenber 20, 2022

流れ

1. 近傍意味論とは何か
2. 近傍意味論の形式的定義
3. 近傍意味論によるモデルの例
4. 位相空間上で近傍意味論
5. 位相意味論における認識論理の解釈

近傍意味論

- 普通の様相論理の到達可能関係を，より一般化させたもの
  - 普通の様相論理の関係は，可能世界から可能世界へ到達するような関係であるのに対し，
    近傍意味論の関係は，可能世界から可能世界の集合へ到達するような関係である．
- 非正規な様相論理にも扱うことができる

近傍意味論における可能世界 w の**近傍**とは，w から到達可能な可能世界の集合のことである．

- 近傍意味論における w の「近傍」は，w を含んでいなくてもよい．
- 位相空間 X における x の「近傍」は，x を含む X の部分集合全てである．

近傍意味論の形式的定義 (1/2)

Definition (言語)

論理式 φ は以下のように定義される.

$$\varphi := p \mid \bot \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \land \psi) \mid (\varphi \lor \psi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi) \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \quad (p \in \mathbf{At})$$

At は原子論理式の集合.

Definition

Neighborhood model $\mathcal{M} = \langle W, N, V\rangle$ は, 以下の W, N, V からなる 3 つ組である.

- W は空でない可能世界の集合
- $N : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ は neighborhood function.
- $V : \mathbf{At} \to \mathcal{P}(W)$ は付置関数.
    - **At** は原子論理式の集合.

近傍意味論の形式的定義 (2/2)

Definition

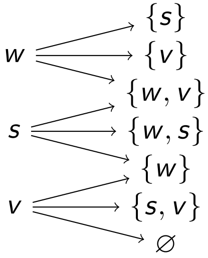
Neighborhood model $\mathcal{M}$ と任意の可能世界 $w \in W$ に対して，論理式 φ の真理値は以下のように帰納的に定義される．：

1. $\mathcal{M}, w \vDash p \iff w \in V(p) \quad (p \in \mathbf{At})$.
2. $\mathcal{M}, w \nvDash \bot$.
3. $\mathcal{M}, w \vDash \top$.
4. $\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi \iff \mathcal{M}, w \nvDash \varphi$.
5. $\mathcal{M}, w \vDash (\varphi \wedge \psi) \iff \mathcal{M}, w \vDash \varphi$ *and* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$.
6. $\mathcal{M}, w \vDash (\varphi \vee \psi) \iff \mathcal{M}, w \vDash \varphi$ *or* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$.
7. $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi \iff [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \in N(w)$.
8. $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi \iff W - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \notin N(w)$.

ただし，$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \{w \mid \mathcal{M}, w \vDash \varphi\}$ である．

近傍意味論の例 (1/2)

- $W = \{w, s, v\}$
- $N(w) = \{\{s\}, \{v\}, \{w, v\}\}.$
- $N(s) = \{\{w, v\}, \{w, s\}, \{w\}\}.$
- $N(v) = \{\{w\}, \{s, v\}, \varnothing\}.$
- $V(p) = \{w, s\}, V(q) = \{s, v\}$



- $[\![p]\!]_{\mathcal{M}} = V(p) = \{w, s\} \in N(s)$ より, $\mathcal{M}, s \models \Box p.$
- $[\![\neg p]\!]_{\mathcal{M}} = \{v\} \notin N(s)$ より, $\mathcal{M}, s \models \Diamond p.$
- $[\![\bot]\!]_{\mathcal{M}} = \varnothing \in N(v)$ より, $\mathcal{M}, v \models \Box\bot$

近傍意味論の例 (2/2)

$\Box T$ が成り立たない:

$$\begin{tikzcd} w \arrow[dr] & \{w\} \\ v \arrow[ur] & \{v\} \end{tikzcd}$$

$V(w) = \{p\}$ としたとき,

$\Box p \to \Diamond p$ が成り立たない:

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r] \arrow[dr] & \{w\} \\ v & \{v\} \end{tikzcd}$$

近傍を位相空間の近傍にしてみた

近傍意味論の「近傍」を位相空間における「近傍」にするにはどうすれば良いのか？

- 自己を含む集合全てに到達可能であり, かつそれにのみ到達可能であればよい.

Definition

W が非空集合, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(W)$ であるとする．このとき,

$$W \times \mathcal{O} = \{(w, U) \mid w \in W, U \in \mathcal{O}, w \in U\}$$

を **neighborhood situations** といい, $W, \mathcal{O}$ からなる 2 つ組 $(W, \mathcal{O})$ を **subset space** という.

K は様相演算子 $\Box$ に対応する認識論理の様相演算子である.
$K\varphi$ で "φ を知っている" を意味する.

Definition

位相空間 (X, τ)(位相構造 τ を持つ集合 X) と評価関数 $v : \mathbf{At} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ からなる 3 つ組 $\mathcal{M} = (X, \tau, v)$ を **topological model** といい, 様相論理の論理式に対して, 以下の意味論が帰納的に定義される.:

1. $[\![\bot]\!]_{\mathcal{M}} = \varnothing$.
2. $[\![p]\!]_{\mathcal{M}} = v(p)$.
3. $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \cap [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}$.
4. $[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \cup [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}$.
5. $[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = X - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.
6. $[\![K\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = Int_{\tau}([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$.

ただし, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \{w \mid \mathcal{M}, w \vDash \varphi\}$ である.

どう解釈すれば良いのか

- 位相空間の近傍
  - エージェントが直接観察できる証拠
- 開近傍が有限個の共通部分に関して閉じている
  - エージェントは証拠が有限個であれば，一つの証拠へ組み合わせることができる．
  - 無限個の証拠を，一つの証拠へ組み合わせるほどの能力はない．
- $w \in P$(命題 P は，可能世界 w において真) 開集合 $U \subseteq P$
  - P を証拠付ける真なる証拠 U
- 開集合
  - エージェントが立証可能な特性
- 閉集合
  - エージェントが反証可能な特性
  - $[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = X - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$

なぜ $[\![K\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = Int_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$ なのか

$Int_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$ に含まれる可能世界は, $\neg\varphi$ を真とするような全ての可能世界と区別できるから.

- $Int_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$ に含まれる現実世界から $Int_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$ に含まれない可能世界全てを区別することができるから,「φ を知っている」と言える.
- $Cl_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}})$ ならば, $\neg\varphi$ を真とするような可能世界を含む場合もあり得るようになる.
  $\Rightarrow$ 間違った情報を持つことがあり得るようになる.
- 逆に, Stalnaker の "信念" の定義には Cl を用いる
  (一般的に, 間違う可能性がある信念は, 良い信念の概念である, とされている.)

Definition

$[\![B\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = Cl_\tau(Int_\tau([\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}))$.

φ を知っているとは限らない.

Stalnaker の KB の公理

	Stalnaker's Epistemic-Doxastic Axiom	
(K)	$K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$	Knowledge is additive
(T)	$K\varphi \to \varphi$	Knowledge implies truth
(KK)	$K\varphi \to KK\varphi$	Positive introspection for K
(CB)	$B\varphi \to \neg B\neg\varphi.$	Consistency of belief
(PI)	$B\varphi \to KB\varphi.$	(Strong) positive introspection of B
(NI)	$\neg B\varphi \to K\neg B\varphi.$	(Strong) negative introspection of B
(KB)	$K\varphi \to B\varphi.$	Knowledge implies Belief
(FB)	$B\varphi \to BK\varphi.$	Full Belief
	Inference Rules	
(MP)	From φ and $\varphi \to \psi$ infer ψ	Modus Ponens
(K-nec)	From φ infer $K\varphi$	Necessitation