# LKのカット除去と証明のサイズ

齊藤哲平

LKのカット除去定理を
「証明の長さ」の観点から理解する

# 証明体系LK

# 述語論理の言語

- 自由変数 $a, b, c, \cdots$
- そくばく変数 $x, y, z, \cdots$
- 関数記号 $f^{(1)}, g^{(2)}, h^{(1)}, c^{(0)}, \cdots$
- 述語記号 $P^{(1)}, Q^{(2)}, \cdots$
- 論理結合子 $\wedge, \vee, \supset, \neg$
- 量化子 $\forall, \exists$

# 述語論理の論理式

- 項 $a,\ f(a),\ f^2(a),\ f^3(a),\ \ldots$

  $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f(f(a)))$

- 論理式 $\underbrace{P(a),\ P(f(a))}_{\text{atomic(原子論理式)}},\ P(a) \supset P(f(a)),\ P(a) \supset P(f^2(a))$

  $\forall x\,(P(x) \supset P(f(x))),\ \forall x\,(P(x) \supset P(f^2(x)))$.

- Sequent $P(a) \longrightarrow P(a),\ \forall x\,(P(x) \supset P(f(x))) \longrightarrow \forall x\,(P(x) \supset P(f^2(x)))$

# LKの証明

**def** LK proof

- Aをatomicとするとき $A \to A$ は(sequent) $A \to A$ の証明.
- $(\supset : R)$ $A, \Gamma \to \Delta, B$ の証明$\pi$があるとき、

$$\dfrac{\begin{array}{c}\boxed{\pi}\\ \vdots\\ A, \Gamma \to \Delta, B\end{array}}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}$$

は $\Gamma \to \Delta, A \supset B$ の証明。

- $(\supset : L)$

$\vdots$

# LKの推論規則

- Weak Structural Rules
- Propositional Rules
- Quantifier Rules
- Cut

strong inference rules

# Weak Structural Rules

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \to \Delta}\,(\mathrm{ExL}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Lambda}\,(\mathrm{ExR})$$

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathrm{ContL}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}\,(\mathrm{ContR})$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\,(\mathrm{WkL}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}\,(\mathrm{WkR})$$

# Propositional Rules (or, implication)

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} \; (\vee{:}L) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} \; (\vee{:}R)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta} \; \boxed{(\supset{:}L)} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B} \; \boxed{(\supset{:}R)}$$

# Propositional Rules (not, and)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}\ (\neg : L) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\ (\neg : R)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{A \land B, \Gamma \to \Delta}\ (\land : L) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \land B}\ (\land : R)$$

# Quantifier Rules

$$\frac{A(\boxed{t}), \Gamma \rightarrow \Delta}{(\forall x) A(x), \Gamma \rightarrow \Delta}\ (\forall : L) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(\boxed{b})}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\forall x) A(x)}\ (\forall : R)$$

$$\frac{A(\boxed{b}), \Gamma \rightarrow \Delta}{(\exists x) A(x), \Gamma \rightarrow \Delta}\ (\exists : L) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(\boxed{t})}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\exists x) A(x)}\ (\exists : R)$$

$\boxed{t}$: arbitrary term

$\boxed{b}$: fresh variable

# Cut Rule

cut formula

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \boxed{A} \qquad \boxed{A}, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}\ (\text{cut})$$

# 証明の長さ

def (証明の長さ)

LKの証明Pに対し、P中の strong inference rule の適用回数をPの長さと呼び、

$\|P\|$ で表わす。

# 証明の例 (1)

$P_n(x) \equiv P(f^n(x))$

$R_n(x) \equiv P_0(x) \supset P_n(x)$ と定める．$(n \in \mathbb{N})$.

例えば $R_0(x) \equiv P(x) \supset P(f(x))$, $R_4(x) \equiv P(x) \supset P(f^4(x))$。

sequent $\forall x R_0(x) \longrightarrow \forall x R_{2^n}(x)$ はLKで証明可能.

$(\forall x (P(x) \supset P(f(x))) \longrightarrow \forall x (P(x) \supset P(f^{2^n}(x)))$

# 証明の例 (2)

$\boxed{n = 2}$

$$(\supset L \times 4)$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{P(a),\ \boxed{P(a) \supset P(f(a))},\ \square,\ \square,\ \ldots,\ \boxed{P(f^3(a)) \supset P(f^4(a))} \rightarrow P(f^4(a))}{P(a),\ \forall x (P(x) \supset P(f(x))) \rightarrow P(f^4(a))}\ (\boxed{\forall L} \times 4)}{\dfrac{\forall x (P(x) \supset P(f(x))) \rightarrow P(a) \supset P(f^4(a))}{\forall x (P(x) \supset P(f(x))) \rightarrow \forall x (P(x) \supset P(f^4(x)))}\ (\forall R)}\ (\supset R)$$

# 証明の例 (3)

証明の長さは $\Theta(2^n)$

$$P(a), P(a)\supset P(f(a)), \ldots \to P(f^{2^n-1}(a)) \qquad \ldots \qquad P(f^{2^n}(a)) \to P(f^{2^n}(a))$$

$\supset$:L $\times 2^n$

$$P(a), \boxed{P(a)\supset P(f(a))}, \ldots, \boxed{P(f^{2^n-1}(a))\supset P(f^{2^n}(a))} \to P(f^{2^n}(a))$$

$$\vdots$$

$\forall$:L $\times 2^n$

$$P(a), \forall x(P(x)\supset P(f(x))) \to P(f^{2^n}(a))$$

$$\forall x(P(x)\supset P(f(x))) \to P(a)\supset P(f^{2^n}(a))$$

$$\forall x(P(x)\supset P(f(x))) \to \forall x(P(x)\supset P(f^{2^n}(x)))$$

# 例の証明をバイナリ法で短くする

アイデア: 2のべき乗でcutをとってやるとよい？

cut formula: $\forall x\,(P(x) \supset P(f^{\boxed{2}}(x))) \equiv \forall x\, R_2(x)$

$\forall x\,(P(x) \supset P(f^{\boxed{4}}(x))) \equiv \forall x\, R_4(x)$

$\vdots$

$\forall x\,(P(x) \supset P(f^{\boxed{2^n}}(x))) \equiv \forall x\, R_{2^n}(x)$

# バイナリ法の例

$$\left( \begin{array}{l} P_n(x) \equiv P(f^n(x)) \\ R_n(x) \equiv P_0(x) \supset P_n(x) \end{array} \right)$$

（$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_n(x)$ の証明を $\Pi_n$ とする。）

$\Pi_4$

$\Pi_2$

$$\vdots$$

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_2(x)$$

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x), \boxed{\forall_x R_2(x)}$$

$$\vdots$$

$$(x \mapsto a) \qquad (x \mapsto f^2(a))$$

$$P(a) \supset P(f^2(a)),\ P(f^2(a)) \supset P(f^4(a)) \to P(a) \supset P(f^4(a))$$

$$\forall_x (P(x) \supset P(f^2(x))) \to P(a) \supset P(f^4(a))$$

$$\boxed{\forall_x R_2(x)}, \forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$$

(cut)

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$$

# バイナリ法の例 (2)

$P_n(x) \equiv P(f^n(x))$

$R_n(x) = P_0(x) \supset P_n(x)$

証明の長さ $\Theta(n)$.

$\Pi_{2^n}$

$\Pi_{2^{n-1}}$

$\vdots$

$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_{2^{n-1}}(x)$

なんか2ーすー $\vdots$ $\begin{pmatrix} \supset L \times 2 \\ \supset R \times 1 \end{pmatrix}$

$P_0(a) \supset P_{2^{n-1}}(a),\ P_{2^{n-1}}(a) \supset P_{2^n}(a) \to P_0(a) \supset P_{2^n}(a)$

$\forall_x R_{2^{n-1}}(x) \to P_0(a) \supset P_{2^n}(a)$

$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_{2^n}(x),\ \boxed{\forall_x R_{2^{n-1}}(x)}$ $\quad$ $\boxed{\forall_x R_{2^{n-1}}(x)},\ \forall_x R_0(x) \to \forall_x R_{2^n}(x)$

$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_{2^n}(x)$

# カット除去アルゴリズム

# カット除去定理

Thm. $P$をLKの証明とする。

このとき、cutを使わない、同じ終式をもつLKの証明$P_*$が存在する。

$P$を$P_*$に変換するアルゴリズムを与える!!

# 論理式の深さ

def (depth)

論理式の深さ dp を論理式 A に対し
再帰的に定める.

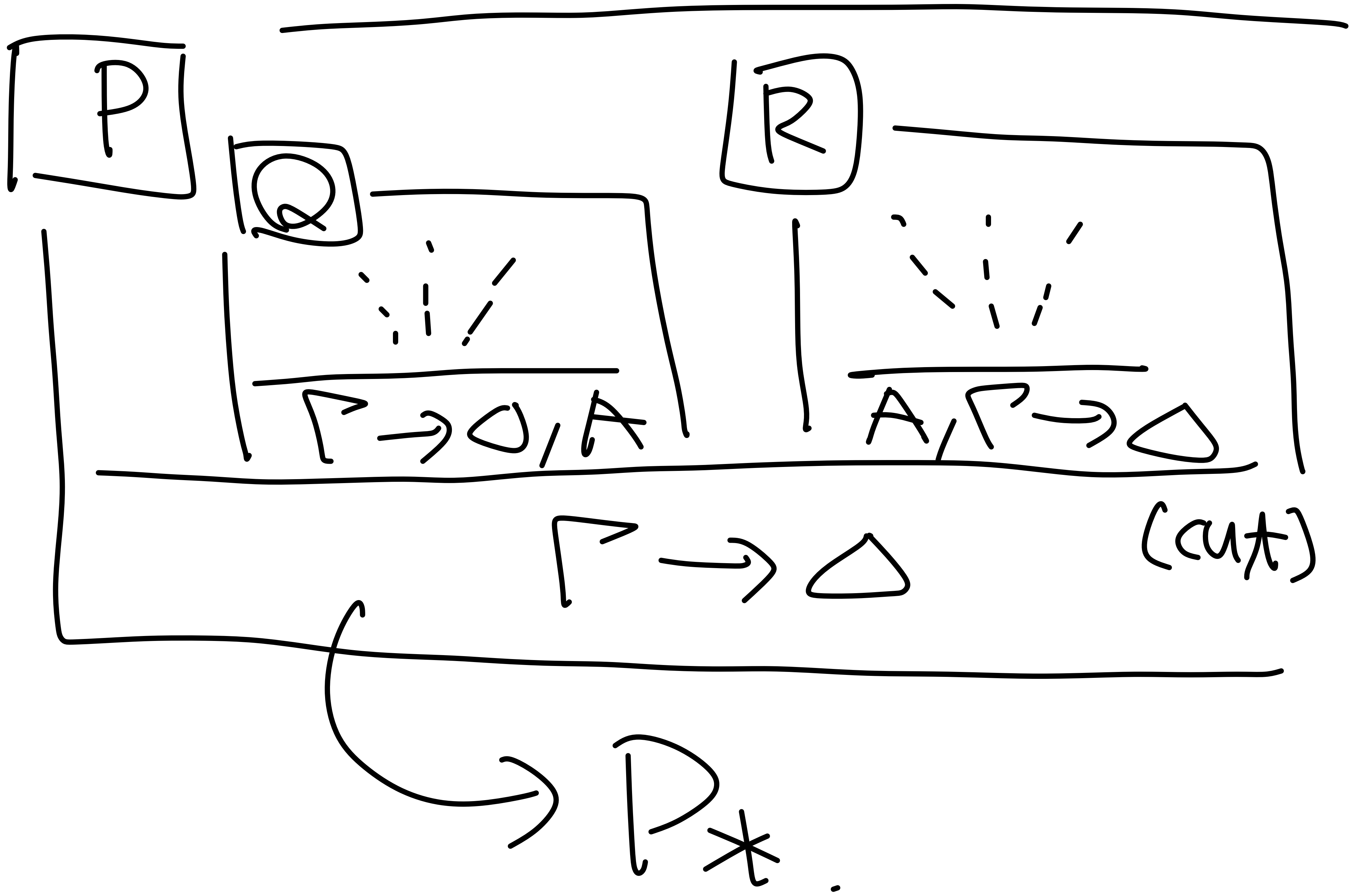
- $dp(A) = 0$ (A は原子論理式)
- $dp(B \supset C) = dp(B \vee C) = dp(B \wedge C) = dp(B) + dp(C) + 1$
- $dp(\neg B) = dp(\forall x B) = dp(\exists x B) = dp(B) + 1$.

例: $dp(\forall x (P(x) \supset P(f(x)))) = 2$

# Lemma1 for Cut Elimination

**Lemma 1.** 右図の証明Pに対し、証明Q,Rに現れるcut formulaの深さの最大値はdp(A)未満である。

このとき、Γ→Δの証明P*で、cut formulaの最大値がdp(A)未満のものが存在する。




cut formula Aの構成について場合分け。

# Case for-all

Q

$$\vdots$$

$$\dfrac{\Gamma' \to \Delta', A(a)}{\Gamma' \to \Delta', \forall x A(x)}\ (\forall{:}R)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)$$

R

$$\vdots$$

$$\dfrac{A(t_2), \forall x A(x), \Gamma''' \to \Delta''}{\forall x A(x), \Gamma'' \to \Delta'''}\ \left(\begin{array}{l}\forall{:}L \\ x \mapsto t_2\end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{A(t_1), \forall x A(x), \Gamma'' \to \Delta''}{\forall x A(x), \Gamma'' \to \Delta''}\ (\forall L)\ \ x \mapsto t_1$$

$$\vdots$$

$$\forall x A(x), \Gamma \to \Delta$$

$$\Gamma \to \Delta$$

# Case for-all (2)

$Q^*(a)$

$$\Gamma' \to \Delta', A(a) \quad \cancel{(\forall{:}R)}$$

$$\cancel{\Gamma' \to \Delta', \forall x A(x)}$$

$$\vdots \qquad \forall x A(x) \longmapsto A(a)$$

$$\Gamma \to \Delta, \cancel{\forall x A(x)}\, A(a)$$

$R'$

$$\vdots$$

$$A(t_2), \cancel{\forall x A(x)}, \Gamma'', \Gamma \to \Delta'', \Delta \quad \left(\begin{array}{l}\forall{:}L\\ x \mapsto t_2\end{array}\right) \text{ invalid}$$

$$\cancel{\forall x A(x)}, \Gamma'', \Gamma \to \Delta, \Delta''$$

$$\vdots$$

$$A(t_1), \cancel{\forall x A(x)}, \Gamma'', \Gamma \to \Delta'', \Delta \quad \left(\begin{array}{l}\forall L\\ x \mapsto t_1\end{array}\right) \text{ invalid.}$$

$$\cancel{\forall x A(x)}, \Gamma'', \Gamma \to \Delta'', \Delta$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\forall x A(x)}, \Gamma, \Gamma \to \Delta, \Delta$$

$$\Gamma \to \Delta$$

# Case for-all (3)

# For-all除去の例

$$R_n(x) \equiv P(x) \supset P(f^n(x))$$

Q

$$\vdots$$

$$R_0(a), R_0(f(a)) \to R_2(a)$$

$$\forall_x R_0(x) \to R_2(a)$$

$(\forall : R)$

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_2(x)$$

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x), \forall_x R_2(x)$$

R

$$\vdots$$

$$R_2(f^2(a)), R_2(a) \to R_4(a)$$

$(\forall : L$
$x \mapsto f^2(a))$

$$R_2(a), \forall_x R_2(x) \to R_4(a)$$

$(\forall : L$
$x \mapsto a)$

$$\forall_x R_2(x) \to R_4(a)$$

$(\forall R)$

$$\forall_x R_2(x), \forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$$

$(\text{cut})$

$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$$

# For-all除去の例 (2)

$R_n(x) \equiv P(x) > P(f^n(x))$

$Q^*(a)$

$\vdots$

$R_0(a), R_0(f(a)) \to R_2(a)$

$\forall_x R_0(x) \to R_2(a)$ ~~$(\forall L)$~~ $x \mapsto a$

$\cancel{\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_2(x)}$ $R_2(a)$

$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x), \cancel{\forall_x R_2(x)}$

$R'$

$\vdots$

$R_2(f^2(a)), R_2(a) \to R_4(a)$ (invalid) ~~$(\forall L$, $x \mapsto f^2(a))$~~

$R_2(a), \cancel{\forall_x R_2(x)} \to R_4(a)$ (invalid) ~~$(\forall L$, $x \mapsto a)$~~

$\cancel{\forall_x R_2(x)} \to R_4(a)$ $(\forall R)$

$\cancel{\forall_x R_2(x)}, \forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$ (cut)

$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)$

$(\Gamma \equiv)\ \forall_x R_0(x) \to \forall_x R_4(x)\ (\equiv \Delta)$

# For-all除去の例 (3)

$\boxed{R^*}$

$\boxed{Q^*(a)}$ $\qquad$ $\boxed{Q^*(f^2(a))}$

$$R_2(f^2(a)), R_2(a) \longrightarrow R_4(a)$$

$$\forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), R_2(a) \qquad \cdots \longrightarrow \cdots, R_2(f^2(a)) \qquad R_2(f^2(a)), R_2(a), \forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), R_4(a)$$

(cut)

$$\forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), R_4(a), R_2(a) \qquad R_2(a), \forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), R_4(a)$$

(cut)

$$\forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), R_4(a)$$

$$\forall_x R_0(x), \forall_x R_0(x) \longrightarrow \forall_x R_4(x), \forall_x R_4(x)$$

# For-all除去の例 (4)

(人手で整理すると…)

こっちはなんとかするとして…

$$\vdots$$

$$\forall_x R_0(x) \to R_1(f^2(a))$$

$$R_1(a), \forall_x R_0(x) \to R_2(a), R_1(f^2(a))$$

$$\vdots$$

$$R_1(f^2(a)), R_1(a) \to R_2(a)$$

$$R_1(f^2(a)), R_1(a), \forall_x R_0(x) \to R_2(a)$$

$$\vdots$$

$$\forall_x R_0(x) \to R_1(a)$$

$$\forall_x R_0(x) \to R_2(a), R_1(a)$$

$$R_1(a), \forall_x R_0(x) \to R_2(a)$$

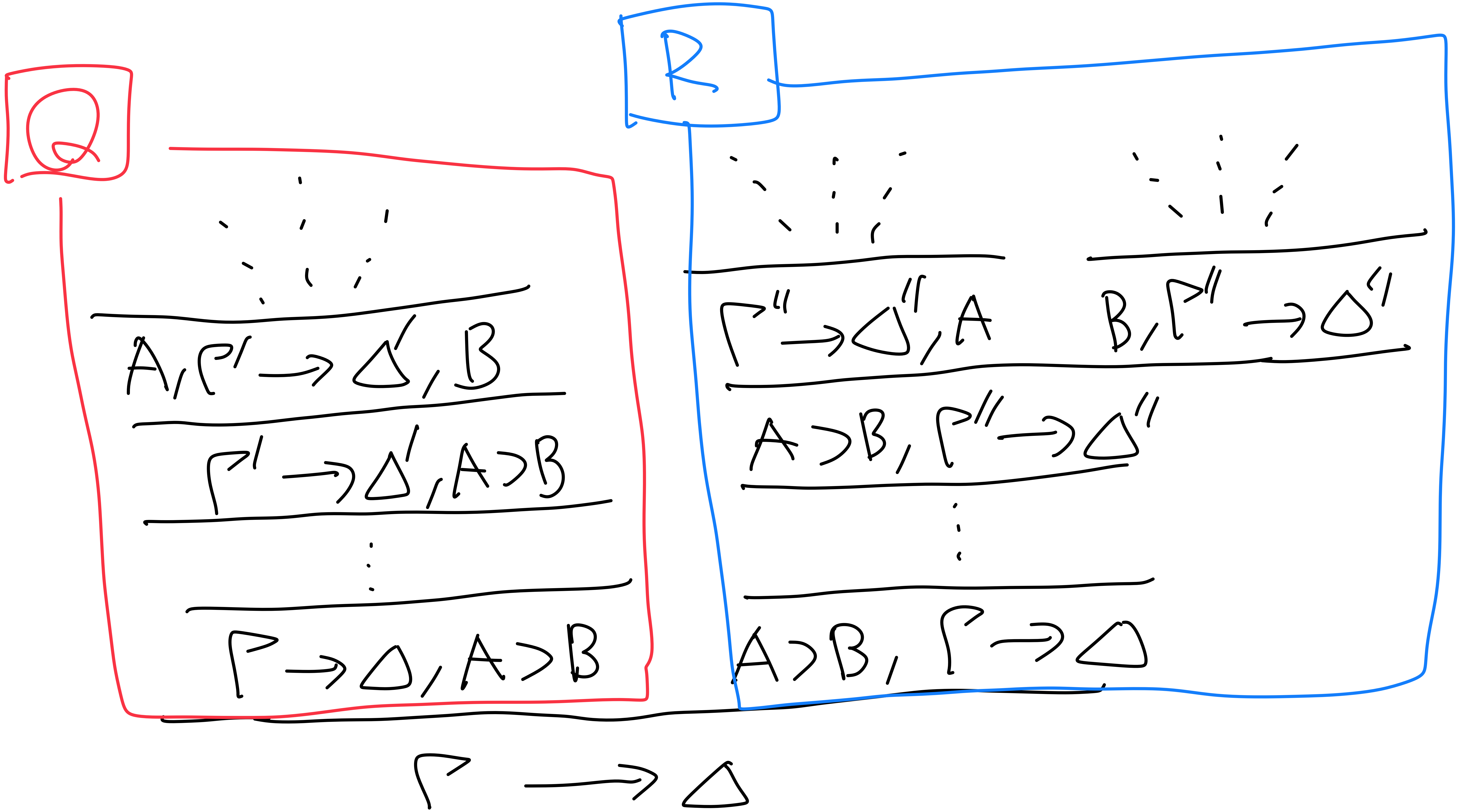
(cut)

$$\forall_x R_0(x) \to R_2(a)$$

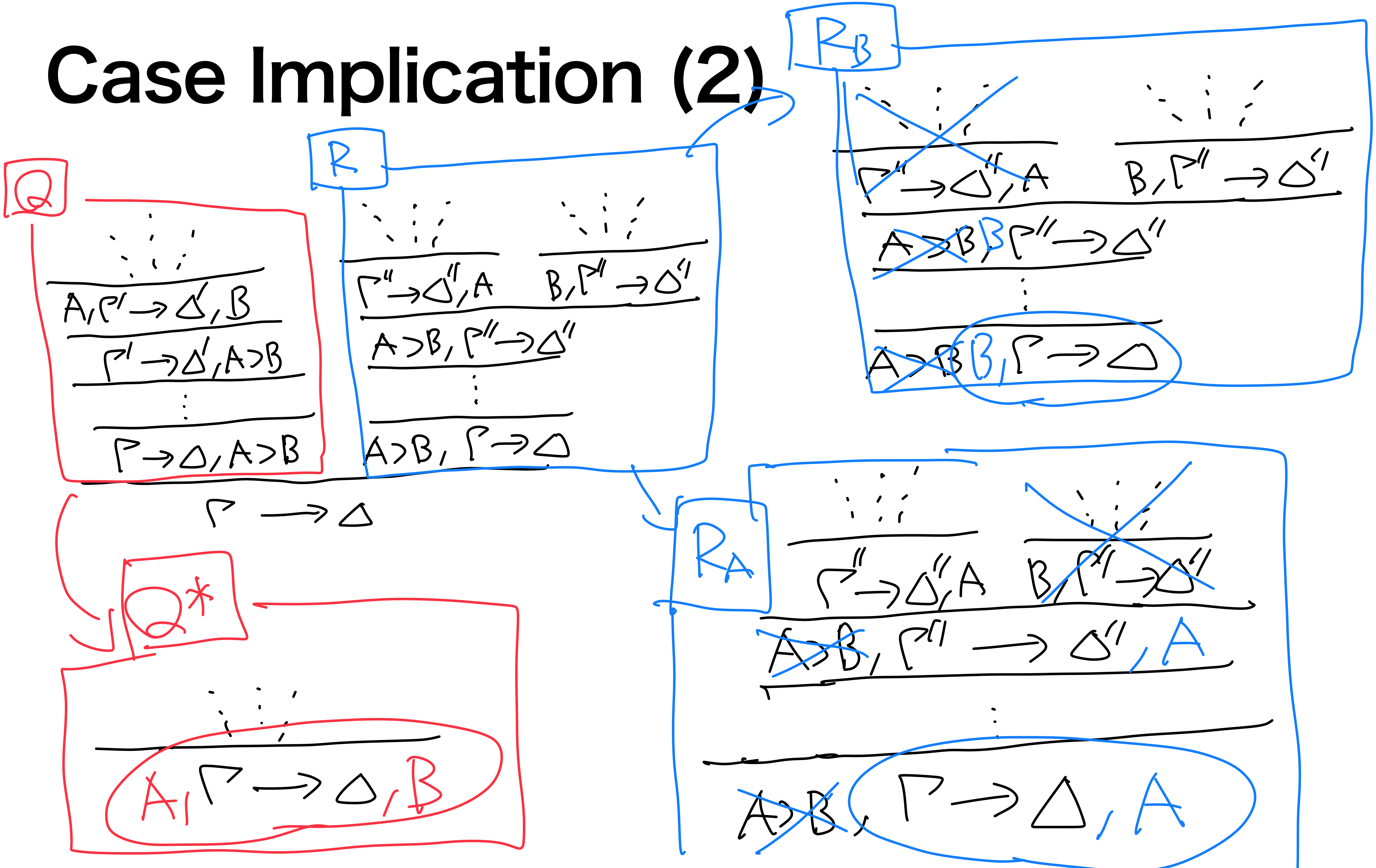
$$\forall_x R_0(x) \to \forall_x R_2(x)$$

$R_1(a) \equiv P(a) \supset P(f^2(a))$ をばらす.

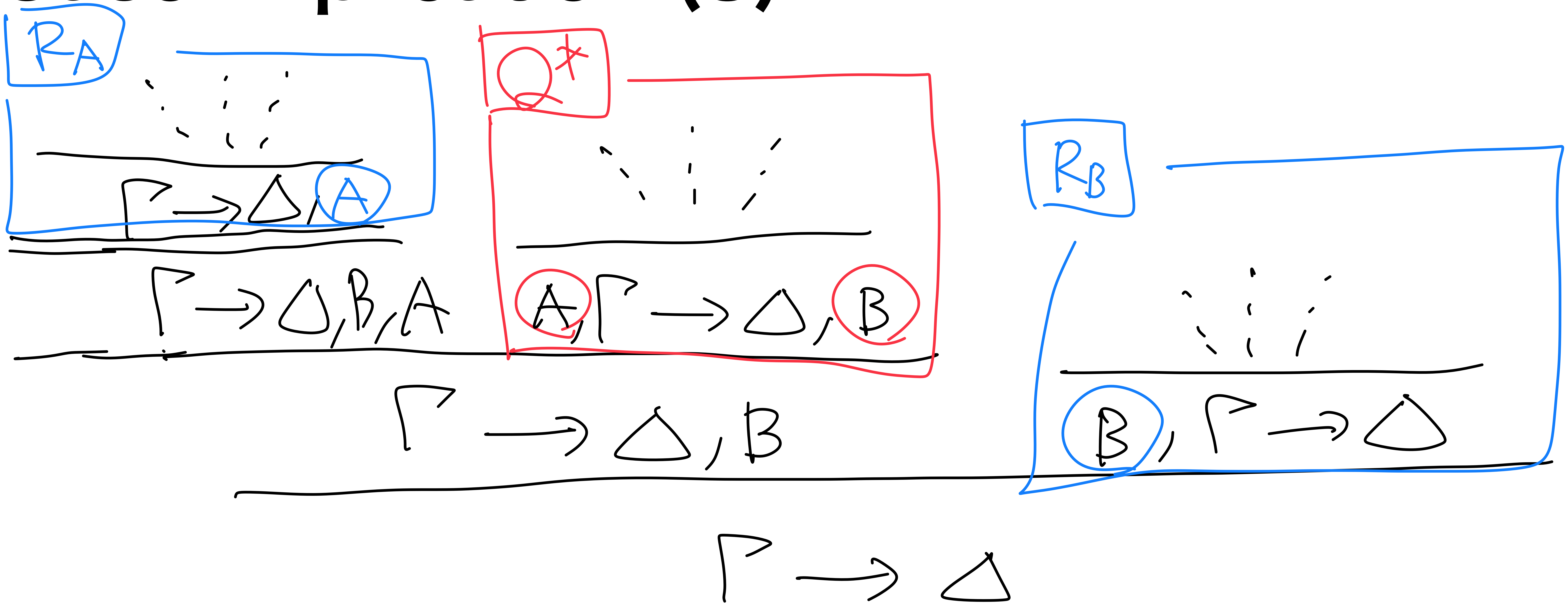
# Case Implication



# Case Implication (2)



# Case Implication (3)



# Implication除去の例

$Q$

$$\frac{\vdots}{\forall x R_0(x) \to P(a) \supset P(f^2(a))}$$

$$\forall x R_0(x) \to R_2(a),\ P(a) \supset P(f^2(a))$$

$$\forall x R_0(x) \to R_2(a)$$

$R$

$$\frac{\vdots}{P(a) \supset P(f^2(a)),\ \forall x R_0(x) \to R_2(a)}$$

$R_{P(a)}$

$$\frac{\vdots}{\forall x R_0(x) \to R_2(a),\ P(a)}$$

$$\forall x R_0(x) \to R_2(a),\ P(f^2(a)),\ P(a)$$

$Q^*$

$$\frac{\vdots}{P(a),\ \forall x R_0(x) \to R_2(a),\ P(f^2(a))}$$

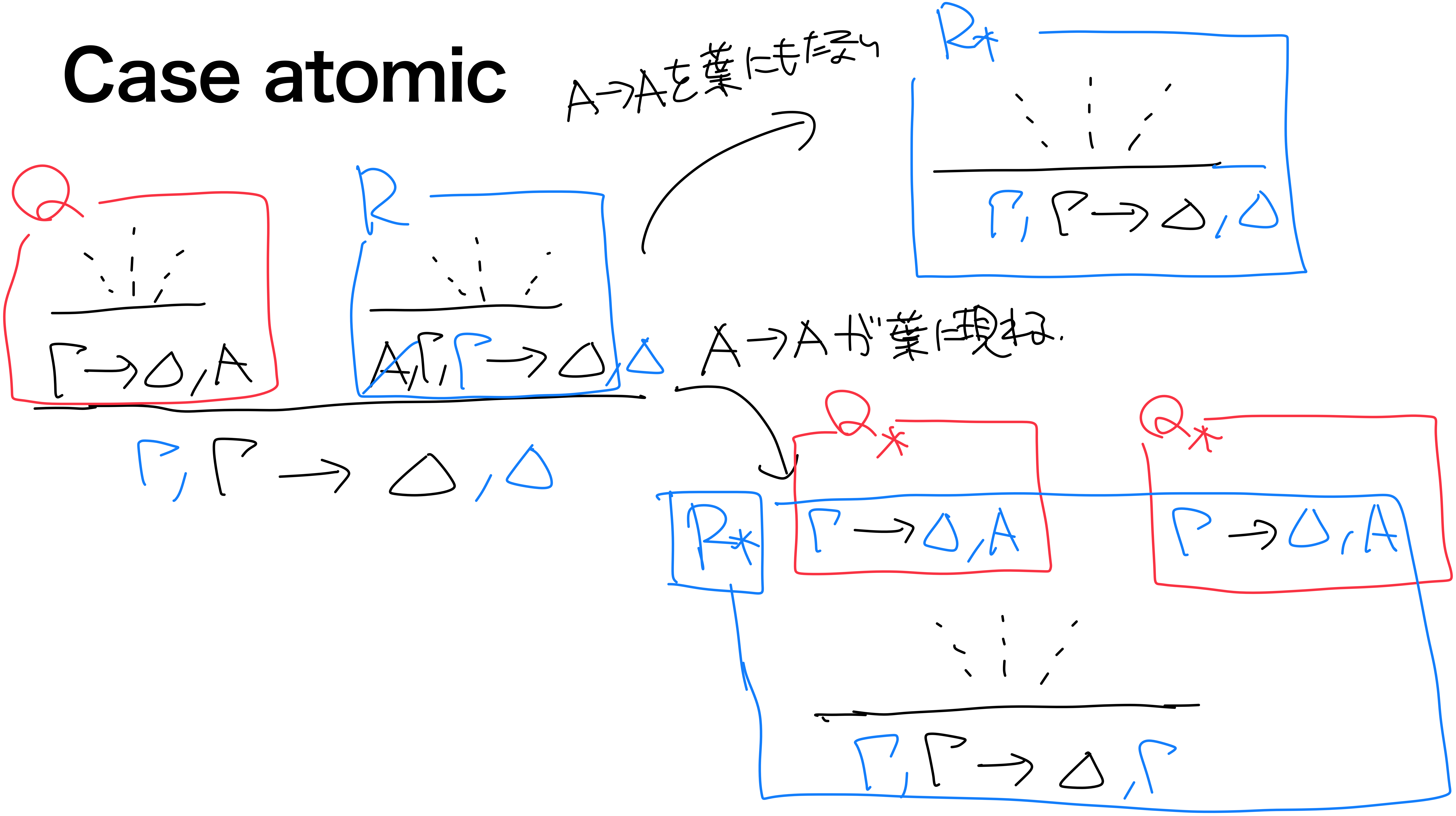
$$\forall x R_0(x) \to R_2(a),\ P(f^2(a))$$

$R_{P(f^2(a))}$

$$\frac{\vdots}{P(f^2(a)),\ \forall x R_0(x) \to R_2(a)}$$

$$\forall x R_0(x) \to R_2(a)$$

# Case atomic



# AtomicのCut除去の例

(A は atomic)

Q

$$A \to A$$

$$A \to B, A$$

$$\to A \supset B, A$$

$$\to (A \supset B) \vee (B \supset A), A$$

R

$$A \to A$$

$$B, A \to A$$

$$A \to B \supset A$$

$$A \to (A \supset B) \vee (B \supset A)$$

$$\to (A \supset B) \vee (B \supset A)$$

# AtomicのCut除去の例 (2)

(A は atomic)

Q

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to B, A}}{\to A \supset B, A}}{\to (A \supset B) \vee (B \supset A), A}$$

R

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{\cancel{A} \to A}}{B, \cancel{A} \to A}}{\cancel{A} \to B \supset A}}{\cancel{A} \to (A \supset B) \vee (B \supset A)}$$

$$\dfrac{\to (A \supset B) \vee (B \supset A), A \qquad A \to (A \supset B) \vee (B \supset A)}{\to (A \supset B) \vee (B \supset A)}$$

$$\equiv$$

$$\Delta$$

# AtomicのCut除去の例 (3)

(A は atomic)

$Q^*$

$A \to A$

$A \to B, A$

$\to A \supset B, A$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A), A$

$R^*$

$\cancel{A} \to A$

$B, \cancel{A} \to A$

$\cancel{A} \to B \supset A$

$\cancel{A} \to (A \supset B) \vee (B \supset A)$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A)$

$\equiv \Delta$

$Q^*$

$A \to A$

$A \to B, A$

$\to A \supset B, A$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A), A$

$R^*$

$B, \to (A \supset B) \vee (B \supset A), A$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A), B \supset A$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A), (A \supset B) \vee (B \supset A)$

$\to (A \supset B) \vee (B \supset A)$

Cutが消えた!!

# 証明の長さの評価 (上界）

# Hyper-exponential function

def (hyper-exponential $2^x_n$)

$n \in \mathbb{N}$に対し、$2^x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $n$についての再帰で定める.

$$2^x_0 = x$$

$$2^x_{n+1} = 2^{2^x_n}$$

例: $2^2_2 = 2^{2^2} = 16 \quad 2^2_3 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16}$.

# 証明の長さの上界付きのカット除去定理

Thm. (cut elimination)

LK proof $P$ に対し、cut-free LK proof $P^*$ が存在して

$$\|P^*\| < 2^{\|P\|}_{2(d+1)}.$$

ここで、$d$ は $P$ に表われる cut の depth の最大値。

例のバイナリ法の証明だと

$d = dp(\forall x(P(x) \supset P(f^{2^y}(x))) = 2$ なので

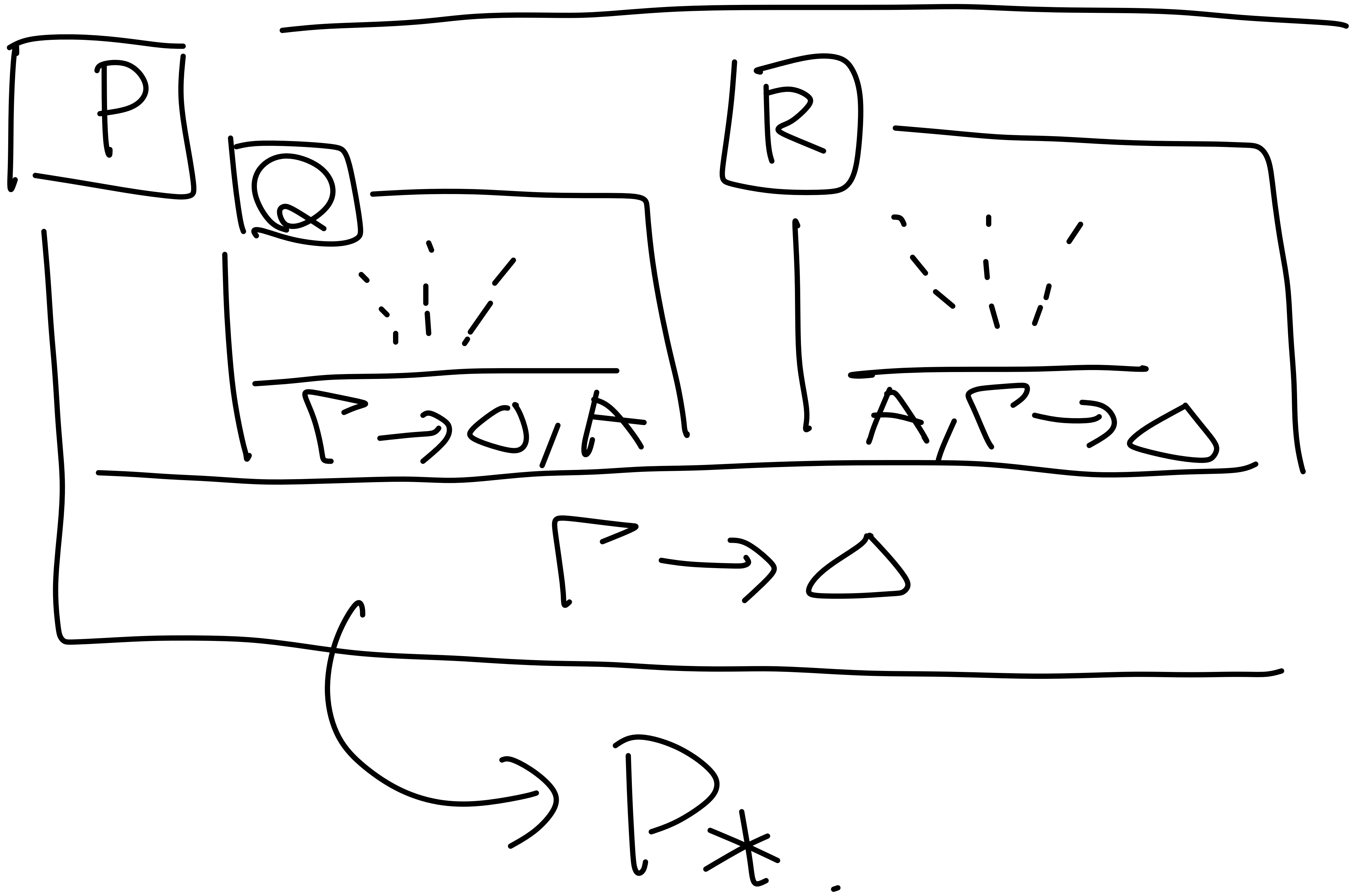
$$\|P^*\| < 2^{\|P\|}_{6} = 2^{2^{2^{2^{2^{2^{\|P\|}}}}}}.$$

# Lemma 1' for Cut Elimination

**Lemma 1.** 右図の証明Pに対し、証明Q, Rに現れるcut formulaの深さの最大値はdp(A)未満とする。

このとき、$\Gamma \to \Delta$の証明$P_*$で、cut formulaの最大値がdp(A)未満のものが存在し、

$$\|P^*\| < \|P\|^2.$$



# Case for-all が最悪ケース

# Lemma 2

Lemma 2

PをLK proofとし、Pのcutのdepthの最大値をdとする.

このとき

cutのdepthがd未満のLK proof $P_*$が存在して、

$$\|P_*\| < 2^{2^{\|P\|}}。$$

$$\left(2_2^{\|P\|}\right).$$

LK proofの構成に関する induction.

Lemma 2を(d+1)回適用すればThmが出る!!

# Lemma 2の最悪ケース

Lemma 3: $2^{2^n}+2^{2^m}-1 < 2^{2^{n+m}}$ for $n,m\geq 1$

① 最後がcutで、$\|Q\|,\|R\|\geq 1$なとき

$$P:\ \dfrac{\overset{Q}{\dfrac{\vdots}{\Gamma\to\Delta,A}} \qquad \overset{R}{\dfrac{\vdots}{A,\Gamma\to\Delta}}}{\Gamma\to\Delta}\,(\mathrm{cut}) \quad \xrightarrow{(\mathrm{I.H.})} \quad \dfrac{\overset{Q^*}{\dfrac{\vdots}{\Gamma\to\Delta,A}} \qquad \overset{R^*}{\dfrac{\vdots}{A,\Gamma\to\Delta}}}{\Gamma\to\Delta}\,[\mathrm{cut}]$$

$$\Downarrow (\mathrm{Lemma}\ 1')$$

$$P^*$$

$\|P\|=\|Q\|+\|R\|+1$ で、

$$\|P^*\|\leq\left(\left(2^{2^{\|Q\|}}-1\right)+\left(2^{2^{\|R\|}}-1\right)+1\right)^2$$

$$=\left(2^{2^{\|Q\|}}+2^{2^{\|R\|}}-1\right)^2$$

$$\overset{(\mathrm{Lem}\,3)}{<}\left(2^{2^{\|Q\|+\|R\|}}\right)^2=2^{2^{\|Q\|+\|R\|+1}}=2^{2^{\|P\|}}.$$

# 証明の長さの評価（上界の下界）

# より良いCut除去アルゴリズムはあるか？

主定理の不等式の上界が本質的かどうか？であるが、

歴史的には結構調べられており、

上界を（ある方法で）弱めた上界の主張は成立しないことが知られているらしい。（すなわち上界の下界）

(Buss, 2012)のintroを読むと良さそう。

# Cut除去の上界の下界 (Orevkov, Gerhardy)

Thm. ある $\underline{\varepsilon} > 0$ に対して以下が成立。

任意の $\underline{d} \in \mathbb{N}$ に対して、ある cut depth の最大値が $d$ の LK proof $\underline{\underline{P}}$ が存在して、

P と同じ終式を持つ任意の cut free proof Q について

$$2_{\varepsilon d}^{\|P\|} < \|Q\|.$$

具体的な $\varepsilon$ は
- $\varepsilon \fallingdotseq \frac{1}{4}$ (Orevkov, 1979) (※関数記号無しの場合)
- $\varepsilon \fallingdotseq \frac{1}{2}$ (Gerhardy, 2003)

# Cut除去の上界の下界 (Buss)

Thm. ある $c \in \mathbb{N}$ に対して以下が成立.

任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して、あるcut depthの最大値が $d$ のLK proof $P$ が存在して、

$P$ と同じ終式を持つ任意のcut free proof $Q$ について

$$2^{0}_{d-c} < \|Q\| . \qquad \text{(Buss, 2012)}$$

$$\|$$

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{0}}}}}}_{\text{長さ}(d-c)} .$$

Cutを消すと
証明の長さが爆発する！

# 参考文献


- Samuel Buss. “An Introduction to Proof Theory” in Handbook of Proof Theory, 1998. (PDF available from the author’s website)
- Samuel Buss. “SHARPENED LOWER BOUNDS FOR CUT ELIMINATION”, THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC, vol. 77, 2012.