Banach-Tarski paradox 入門 1

一倉海斗

令和 6 年 4 月 6 日

群とその作用

定義 1 (群)

　集合 G とその上の二項演算 $\cdot : G \times G \to G$ の組 $\langle G, \cdot \rangle$ が群であるとは、以下の三つの条件を満たすことをいう。

1. (結合律) 任意の G の元 g, h, k に対して以下を満たす。

$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$$

2. (単位元の存在) 任意の G の元 g に対して以下を満たす G の元 e が存在する。

$$e \cdot g = g \cdot e = g$$

この単位元は一意的に定まるので、1_G で G の単位元を表す。

群とその作用

3. (逆元の存在) 任意の G 元の g に対して以下を満たすような G の元 h が存在する。

$$g \cdot h = h \cdot g = 1_G$$

逆元は存在すれば一意なので、任意の G の元 g に対してその逆元を g^{-1} で表す。

二項演算を表す「$\cdot$」は誤解の恐れがない場合適宜省略する。

群とその作用

定義 2 (作用)

群 G の空でない集合 X への作用とは、直積集合 $G \times X$ から X への写像 $\langle g, x\rangle \mapsto g(x)$ であって、任意の $x \in X$ と $g_1, g_2 \in G$ に対して、以下の等式が成り立つもののことをいう。

$$g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$$

$$1_G(x) = x$$

「群 G が集合 X に作用している」ということを $G \curvearrowright X$ で表す。
誤解のない限り括弧は適宜外して表記する。

群とその作用

例 3

実数全体の加法に関する群 $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ は $\langle g, x \rangle \mapsto x + g$ によって $\mathbb{R}$ 自身に作用する。

群とその作用

例 4

実 3 次正方行列 A のうち

$$detA = 1,\ {}^tAA = I_3$$

を満たすものを回転行列、その全体を回転群といい $SO(3)$ で表す。
($(\because)$ 転置と行列式の性質から回転行列の積と逆行列、単位行列も回転行列であることから分かる。)
このことから $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $\langle A, r\rangle \mapsto Ar$ でもって $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ となる。

例 5

S^2 で単位球面を表すと、回転行列は内積を保つので、単位球面上の点を単位球面上の点に写す。この意味で $SO(3) \curvearrowright S^2$ である。

群とその作用

定義 6

三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における平行移動と回転の合成として得られる変換の全体を三次元の運動群といい、$M(3)$ と書く。二次元の運動群 $M(2)$ についても同様に定義する。

群とその作用

補題 7

G を群、X を空でない集合とする。この時、$G \curvearrowright X$ を仮定し、作用を一つを固定する。この時、任意の $g \in G$ に対して、X から X への写像 $x \mapsto g(x)$ が全単射となり、その逆写像は $x \mapsto g^{-1}(x)$ で与えられる。

証明. 作用と群の定義から分かる。□

群とその作用

定義 8 (G-合同)

群 G が集合 X に作用している時、部分集合 $A \subset X$ に対して、

$$gA := \{g(a) \ : \ a \in A\}$$

を定める。$B \subset X$ に対して、$B = gA$ なる $g \in G$ が存在する時、集合 A と B は互いに G-合同であるといい、$A \equiv_G B$ で表す。

この G-合同関係は群と作用の定義から X の部分集合の間の同値関係になっていることが分かる。

群とその作用

定義 9 (G-分割合同)

群 G が集合 X に作用しているものとする。集合 $A \subset X$ が集合 $B \subset X$ に G-分割合同であるとは、A と B を同じ個数の有限個の部分集合に

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n, \ B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

と分割して (ここで $\sqcup$ は互いに交わりのない部分集合の和となることを意味する)、

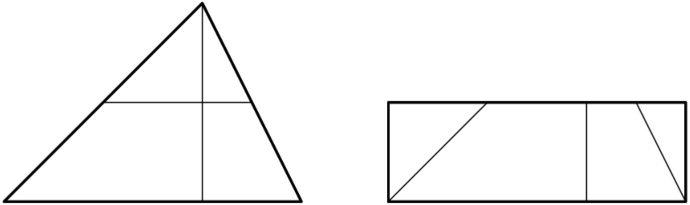
$$A_i \equiv_G B_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

となるようにできることをいう。A が B に G-分割合同であることを $A \sim_G B$ で表す。

群と作用

例 10

次の二つの図形は $M(2)$-分割合同である。



群とその作用

例 11

数直線 $\mathbb{R}$ 上の平行移動の群を $T(1)$ と書くとき、$\mathbb{R}$ と無理数全体 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ は $T(1)$-分割合同である。

証明. なにか無理数 α を固定し、

$$X = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q}+\alpha) \cup (\mathbb{Q}+2\alpha) \cup \cdots$$

とおくと、

$$X\backslash\mathbb{Q} = X + \alpha \subset X$$

となるので、有理数 $+$ 無理数 $=$ 無理数であることから、

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}\backslash X) \sqcup X, \ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = (\mathbb{R}\backslash X) \sqcup (X+\alpha)$$

であり、$X \equiv_{T(1)} X + \alpha$ となります。$\square$

補題 12

群 G が集合 X に作用しているものとする。$A, B \subset X$ で

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n,\ B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

かつ

$$A_i \sim_G B_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

であるならば、$A \sim_G B$ である。$\square$

群とその作用

G が X に作用するものとし、$A \sim_G B$ なる $A, B \subset X$ をとる。$A \sim_G B$ から

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n,\ B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n,\ B_i = g_i A_i\ (i = 1, \ldots, n)$$

となるような分割 $\{A_i \ : \ i = 1, \ldots, n\}$, $\{B_i \ : \ i = 1, \ldots, n\}$ と $g_i \in G$ $(i = 1, \ldots, n)$ がとれる。この時、各 $x \in X$ に対して、

$$f(x) = g_i x\ (\text{但し}i\text{は}x \in A_i\text{となる自然数})$$

によって A から B への写像 f が定義される。この写像 f は作用と群の定義から全単射となることがわかる。

群とその作用

補題 13

$f : A \to B$ を上記のものとした時、$E \subset A$ とすれば、$E \sim_G f(E)$ であり、特に $E \sim_G f(E)$ の分割の数は $A \sim_G B$ のそれ以下である。

証明. $A \sim_G B$ から

$$E = (E \cap A_1) \sqcup \cdots \sqcup (E \cap A_n), \; f(E) = (f(E) \cap B_1) \sqcup \cdots \sqcup (f(E) \cap B_n)$$

かつ各 $1 \leq i \leq n$ に対して、

$$f(E) \cap B_i = g_i(E \cap A_i)$$

が成り立つ。□

群とその作用

定理 14

群 G が集合 X に作用しているとする。このとき、G-分割合同であるという関係「$\sim_G$」は X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 上の同値関係である。

群とその作用

証明. (c.f.[1]) 反射性と対称性は明らかなので推移性のみを確かめる。

先ず、$A \equiv_G B$ かつ $B \sim_G C$ ならば $A \sim_G C$ であることを確認する。

$A \equiv_G B$ よりある $g \in G$ が存在して、$B = gA$ となる。また、$B \sim_G C$ よりある自然数 n が存在して、

$$B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n,\ C = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n$$

となり、各 $1 \leq i \leq n$ に対して、

$$B_i \equiv_G C_i$$

つまり、

群とその作用

ある $g_1, \ldots, g_n \in G$ が存在して、

$$C_i = g_i B_i$$

となる。g は X から自身への全単射なので、

$$A = g^{-1}B_1 \sqcup \cdots \sqcup g^{-1}B_n$$

と書ける。よって各 $1 \leq i \leq n$ に対して、ある $g_1 g, \ldots, g_n g \in G$ が存在して、

$$C_i = g_i B = g_i g(g^{-1}B_i)$$

となり、$A \sim_G C$ を得る。$\square_{\text{主張}}$

群とその作用

$A \sim_G B$ かつ $B \sim_G C$ を仮定する。この時、$A \sim_G B$ であることの条件である A, B の分割の数に関する帰納法を用いて証明する。

$n = 1$ の時、先の主張から成り立つ。

$n > 1$ の時、定理の主張が成り立つとし、$A \sim_G B$ を示す分割の数を $n + 1$、$B \sim_G C$ とする。よって、

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_{n+1}, \ B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_{n+1},$$

かつ各 $1 \leq i \leq n$ に対して、

$$A_i \equiv_G B_i$$

群とその作用

となる。ここで

$$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_{n+1},\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_{n+1}$$

とおくと、

$$A = A_1' \sqcup A_2',\ B = B_1' \sqcup B_2'$$

かつ

$$A_1' \equiv_G B_1',\ A_2' \equiv_G B_2'$$

が成り立つ。

群とその作用

$f : B \to C$ を補題 13 の手前で構成されたものとすると、補題 13 より

$$B_1' \sim_G f(B_1'),\ B_2' \sim_G f(B_2')$$

が成り立つ。また、

$$A_1' = A_1 \equiv_G B_1 = B_1',\ B_1' \equiv_G f(B_1')$$

から

$$A_1' \equiv_G f(B_1')$$

となる。

群とその作用

一方、

$$A'_2 \sim_G B'_2,\ B'_2 \sim_G f(B'_2)$$

なので、帰納法の仮定より、

$$A'_2 \sim_G f(B'_2)$$

である。さらに、

$$A = A'_1 \sqcup A'_2,\ C = f(B'_1) \sqcup f(B'_2)$$

なので、補題 12 より $A \sim_G C$ が成り立つ。$\square$

参考文献

- 福田拓生, 集合への入門: 無限をかいま見る, 培風館, 2012.
- 藤田博司, 選択公理とバナッハ = タルスキの定理-講義のハンドアウト, 2011-2012.