

# 線形論理とProof Net

# 概要

1. 乗法的線形論理の論理式 (multiplicative linear logic)
2. 乗法的線形論理の証明体系 (シーケント計算)
3. Proof net を使ったカット除去定理の証明

# 乗法的線形論理の論理式

# 乗法的線形論理の論理式

定義 (乗法的線形論理の論理式) —————

$AP$  を集合とする. 論理式 を以下のように帰納的に定める.

- $\varphi \in AP$  に対し、 $\varphi, \varphi^\perp$  は論理式.
- $A, B$  が論理式の時、 $A \otimes B, A \wp B$  は論理式.

例:  $(\varphi \otimes \psi) \otimes r, \varphi^\perp \wp \psi^\perp, r^\perp$  は論理式.

# 1の一般の論理式への拡張

定義

論理式から論理式への写像  
論理式に $\rightarrow$ の再帰で定める.

$$A \mapsto A^\perp$$

- $\varphi \in AP$  に対し  $\varphi \mapsto \varphi^\perp$ .
- $\varphi \in AP$  に対し  $\varphi^\perp \mapsto \varphi$ .
- 論理式  $A \otimes B$  に対し  $A \otimes B \mapsto A^\perp \wp B^\perp$ .
- 論理式  $A \wp B$  に対し  $A \wp B \mapsto A^\perp \otimes B^\perp$ .

# $\perp$ の一般の論理式への拡張: 具体例

例  $\varphi, \psi \in AP$  に対して

- $(\varphi^\perp)^\perp = \varphi$

- $(\varphi \otimes \psi)^\perp = \varphi^\perp \wp \psi^\perp$

- $(\varphi \wp \psi)^\perp = \varphi^\perp \otimes \psi^\perp$

- $(\varphi^\perp \otimes (\varphi \wp \psi^\perp))^\perp = \varphi \wp (\varphi^\perp \otimes \psi)$

ド・モルガニ則のよう  
ものが成り立つように  
定義している!

# 乗法的線形論理の証明体系



# 乗法的線形論理の証明体系

定義: 論理式の multiset  $\Gamma$  を シーケント と呼び、

$\vdash \Gamma$  とかく。シーケントを頂点とする根付木を、

- 葉が  $\vdash A, A^\perp$  ( $A$  は論理式) の形である

- 各分岐が次頁に定める規則の適用になっているもの

を 証明図 と呼ぶ。特に根が  $\vdash \Gamma$  のときは

$\vdash \Gamma$  の証明図 と呼ぶ。証明図をもつシーケントは 証明可能 であるといふ。



# 推論規則

定義: 以下を推論規則とす。

$$\frac{\Gamma, A \quad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \otimes B} (\otimes)$$

$$\frac{\Gamma, \boxed{A} \quad \Gamma, \boxed{A^\perp}, \Delta}{\Gamma, \Delta} (\text{cut})$$

( $A$ をカット論理式と呼ぶ)

$$\frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A \wp B} (\wp)$$

# 証明図の例 (cutなし)

例:  $\vdash (p \otimes q) \otimes r$ ,  $p^\perp \wp q^\perp$ ,  $r^\perp$  の証明図:

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash p, p^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \quad \frac{\vdash q, q^\perp}{\vdash r, r^\perp} \quad (\otimes) \\ \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp \quad (\otimes) \\ \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp \quad (\wp) \end{array}$$

# 証明図の例 (cutあり)

例:  $\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp$  の証明図:

$(p \otimes q)^\perp = p^\perp \wp q^\perp$  に注意.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\vdash p, p^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \quad \vdash r, r^\perp}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp} (\otimes) \quad \frac{\vdash p, p^\perp \quad \vdash q, q^\perp}{\vdash \boxed{p \otimes q}, p^\perp, q^\perp} (\otimes)}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, \boxed{p^\perp \wp q^\perp}, r^\perp} (\wp) \quad \text{(cut)} \\
 \hline
 \frac{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp} (\wp)
 \end{array}$$

# 証明可能性クイズ

例: 以下のシーケンスで証明可能なのはどれか?

- $\vdash p \otimes p^\perp$

- $\vdash p \otimes p^\perp, p \wp p^\perp$

- $\vdash p \wp p^\perp$

- $\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp$

- $\vdash p, q, p^\perp, q^\perp$

- $\vdash p \wp q, p^\perp, q^\perp$

Proof Netによるcut除去

# Cut除去定理

定理: 任意の証明可能な $\neg$ のエンタは

Cutの適用のない証明図をもつ。

アイデア: proof netというグラフと証明図を対応させ

Cut除去はグラフの変形に対応していることをいう。

# Proof Net

定義: proof net は、辺が論理式、  
頂点が  $\{ax, cut, \otimes, \oslash, \bullet, \vee\}$  である。

どうバリエーションをたがうことであり、次頁以降で

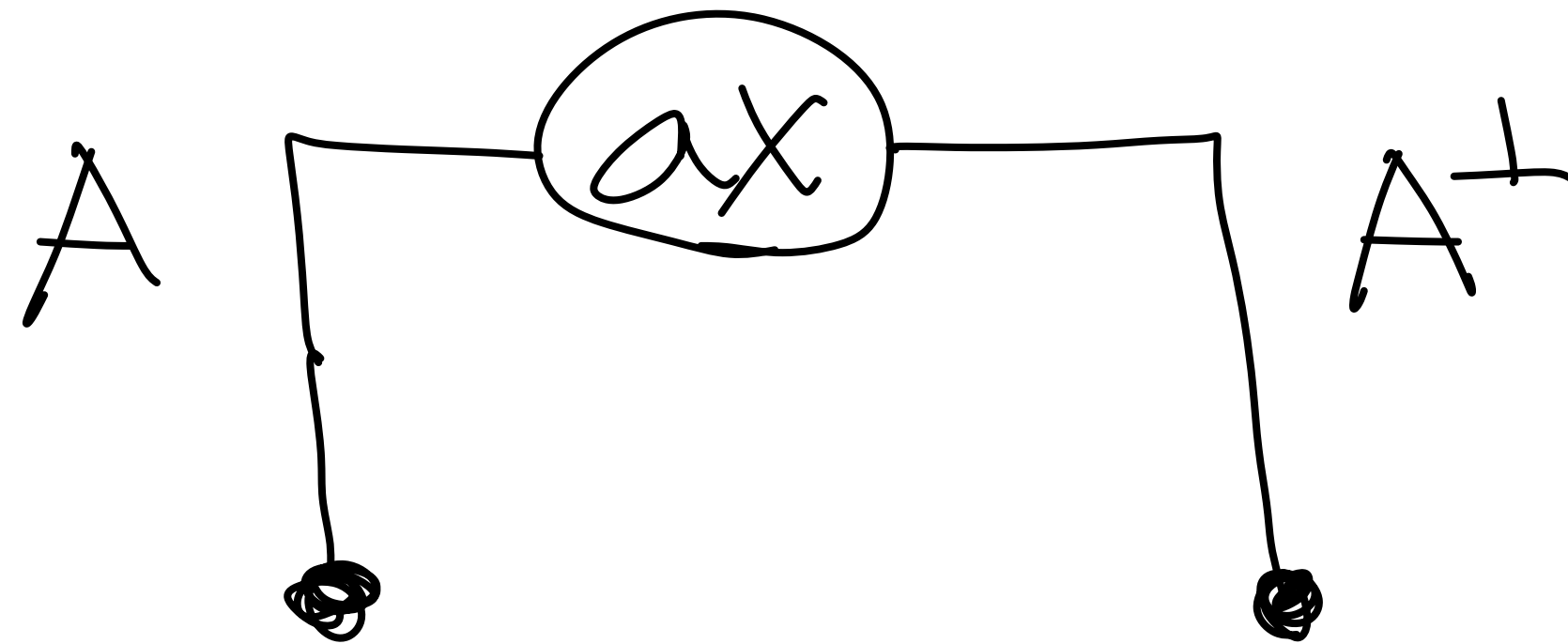
証明図に対し再帰的に定義される。



# 葉に対応するProof Net

証明図  $\vdash A, A^\perp$  に対応する

proof net は



とす。

# Cutに対応するProof Net

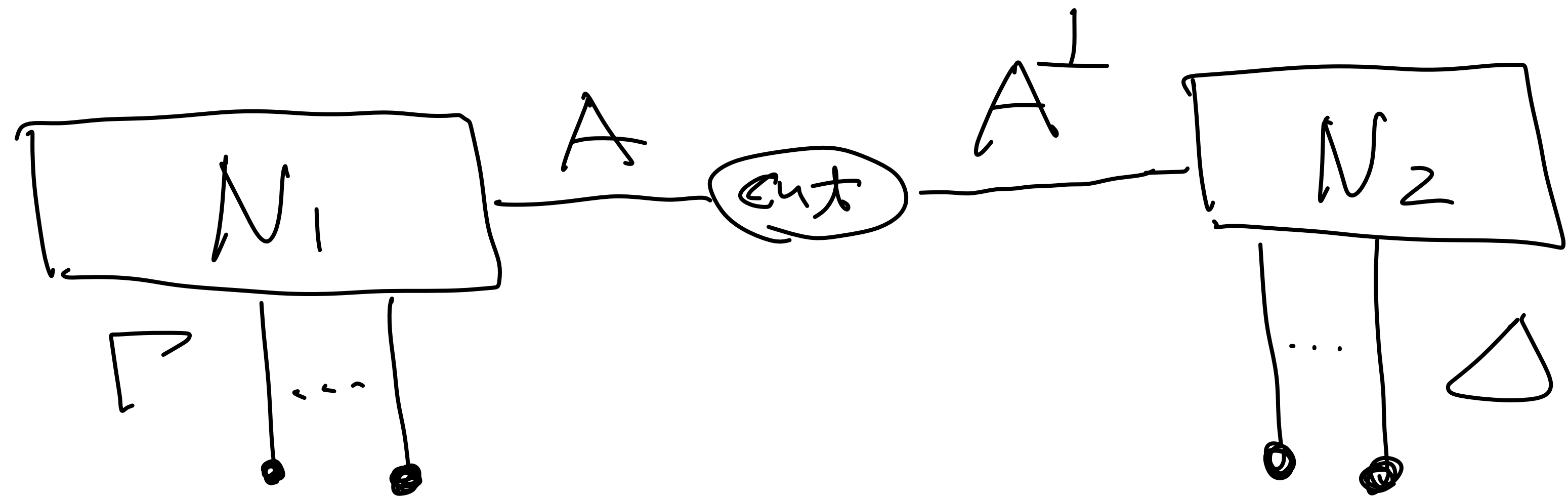
証明  $\boxed{\pi_1} \vdash \Gamma, A$      $\vdots$      $\boxed{\pi_2} \vdash A^\perp, \Delta$

---


$$\vdash \Gamma, \Delta$$

= 成り立つ

proof net は



==>

$N_1, N_2$  はそれぞれ  $\pi_1, \pi_2$  の proof net とする。

# ⊗に対応するProof Net

証明図

$\pi_1$

⋮

$\pi_2$

⋮

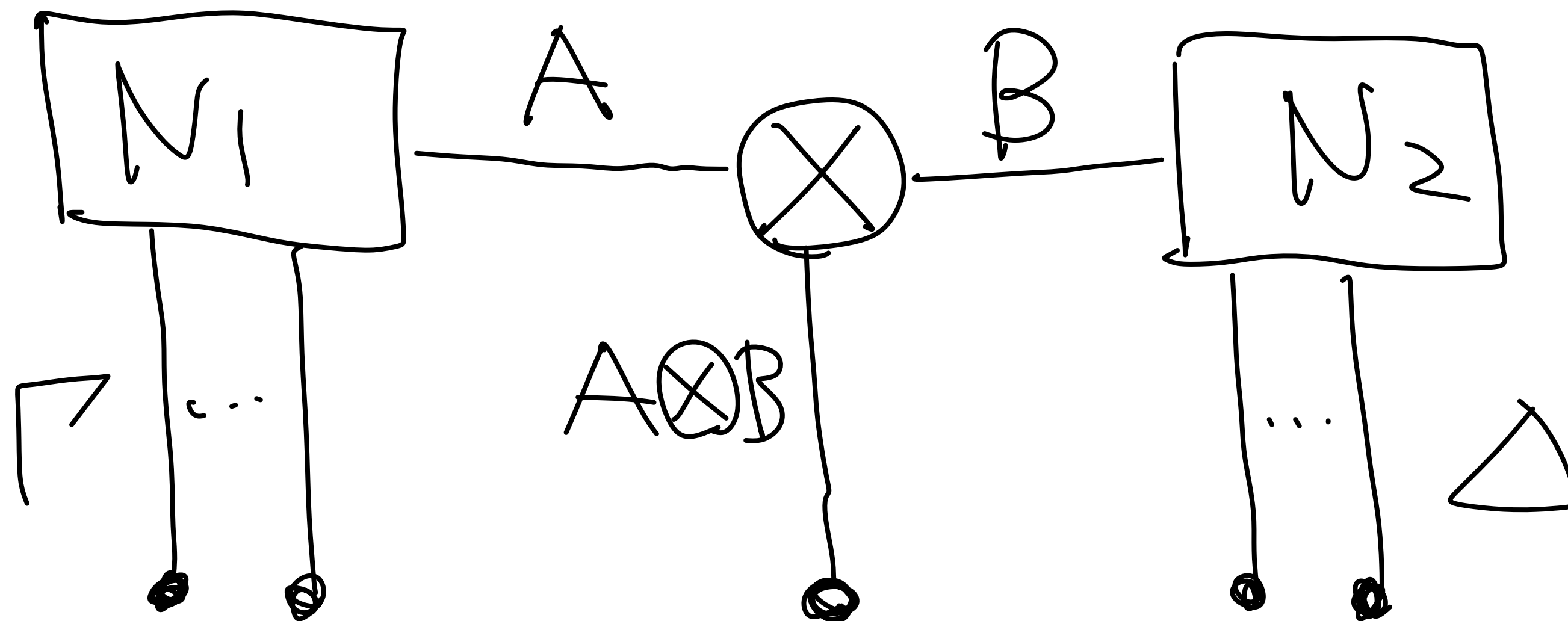
$\vdash P, A$

$\vdash \Delta, B$

$\vdash P, \Delta, A \otimes B$

に対応する

proof net は



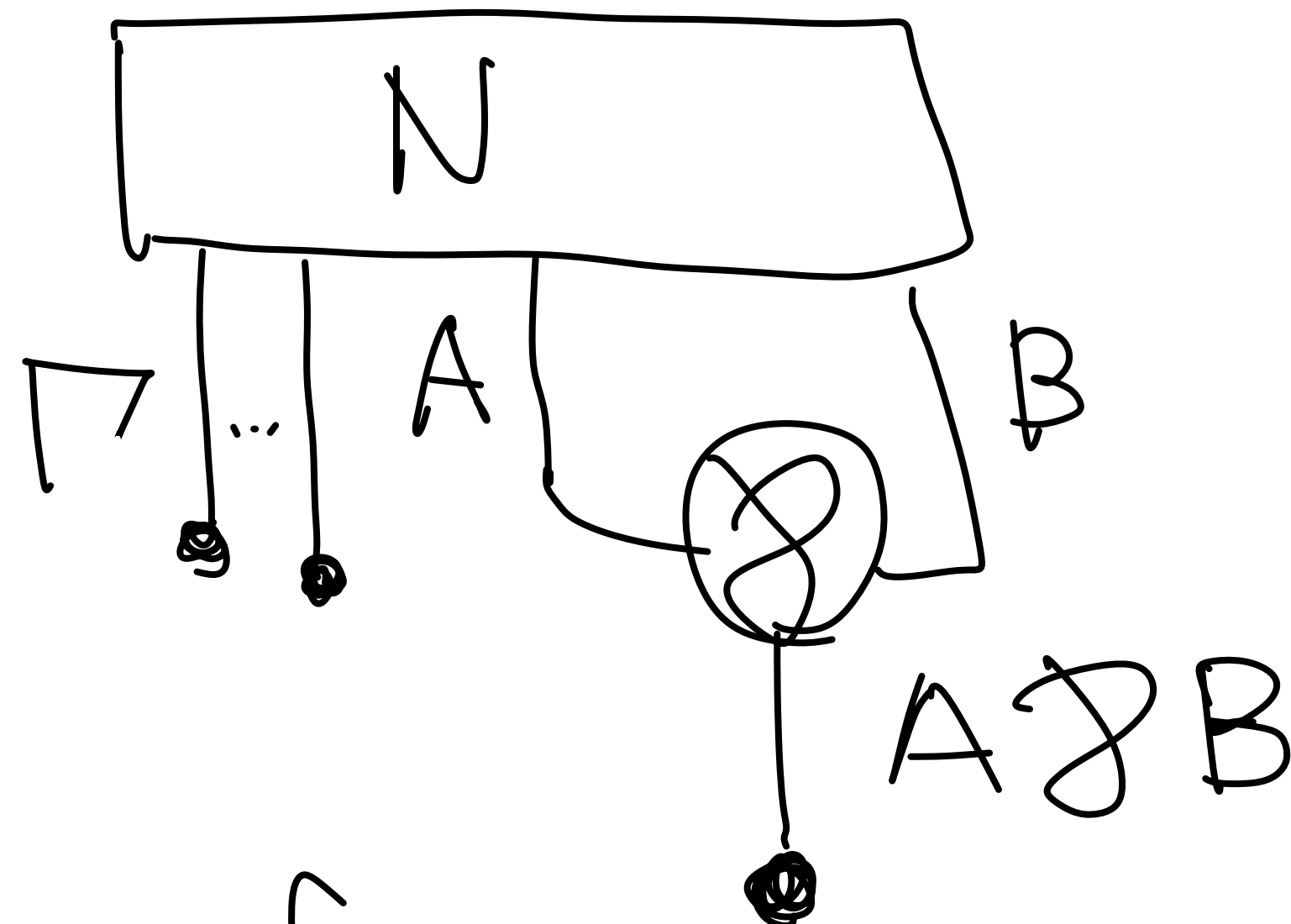
$\Rightarrow$   $N_1, N_2$  はそれぞれ  $\pi_1, \pi_2$  の proof net とする。

# 逆さま&に対応するProof Net

証明図

$$\frac{\boxed{\pi} \quad \vdash P, A, B}{\vdash P, A \wp B} \quad (\wp) \text{ に対応する}$$

proof netは



$\Rightarrow$  "Nは $\pi$  a proof net とする."

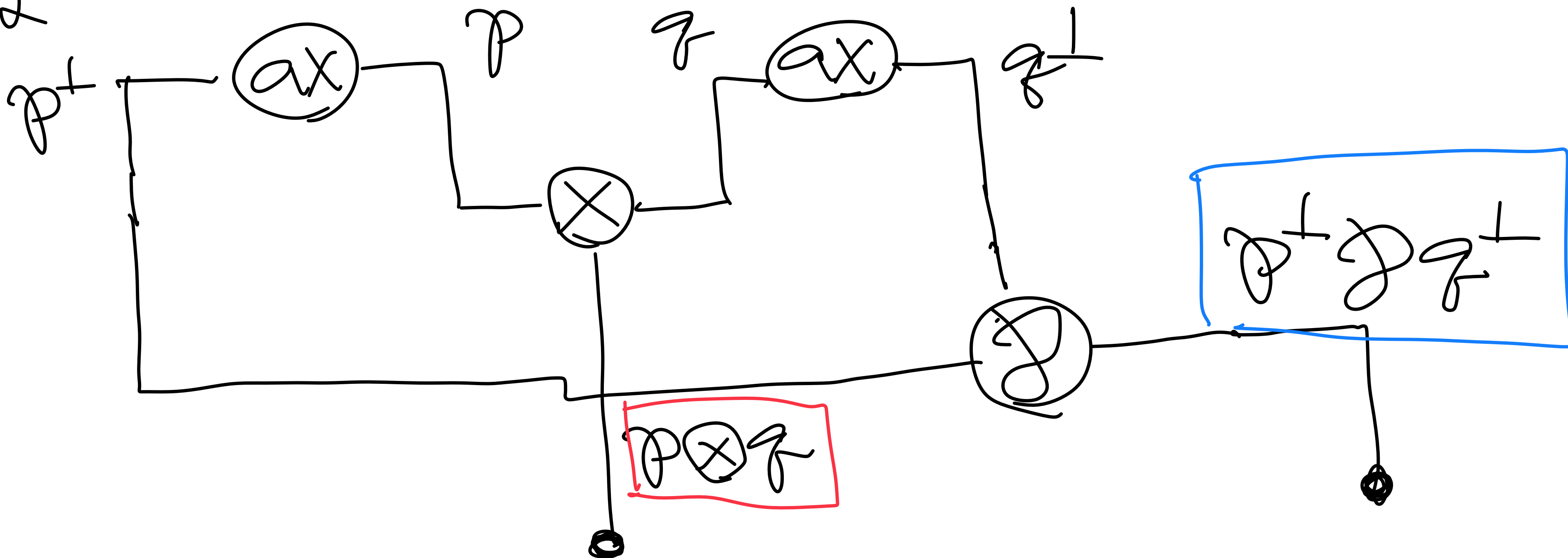
# Proof Netの例

証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash p, p^\perp} \quad \frac{}{\vdash q, q^\perp} \\
 \hline
 \vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp \quad (\otimes) \\
 \hline
 \vdash \boxed{p \otimes q}, \boxed{p^\perp \wp q^\perp} \quad (\wp)
 \end{array}$$

(=交換する)

proof netは



# 証明図とProof Netの対応

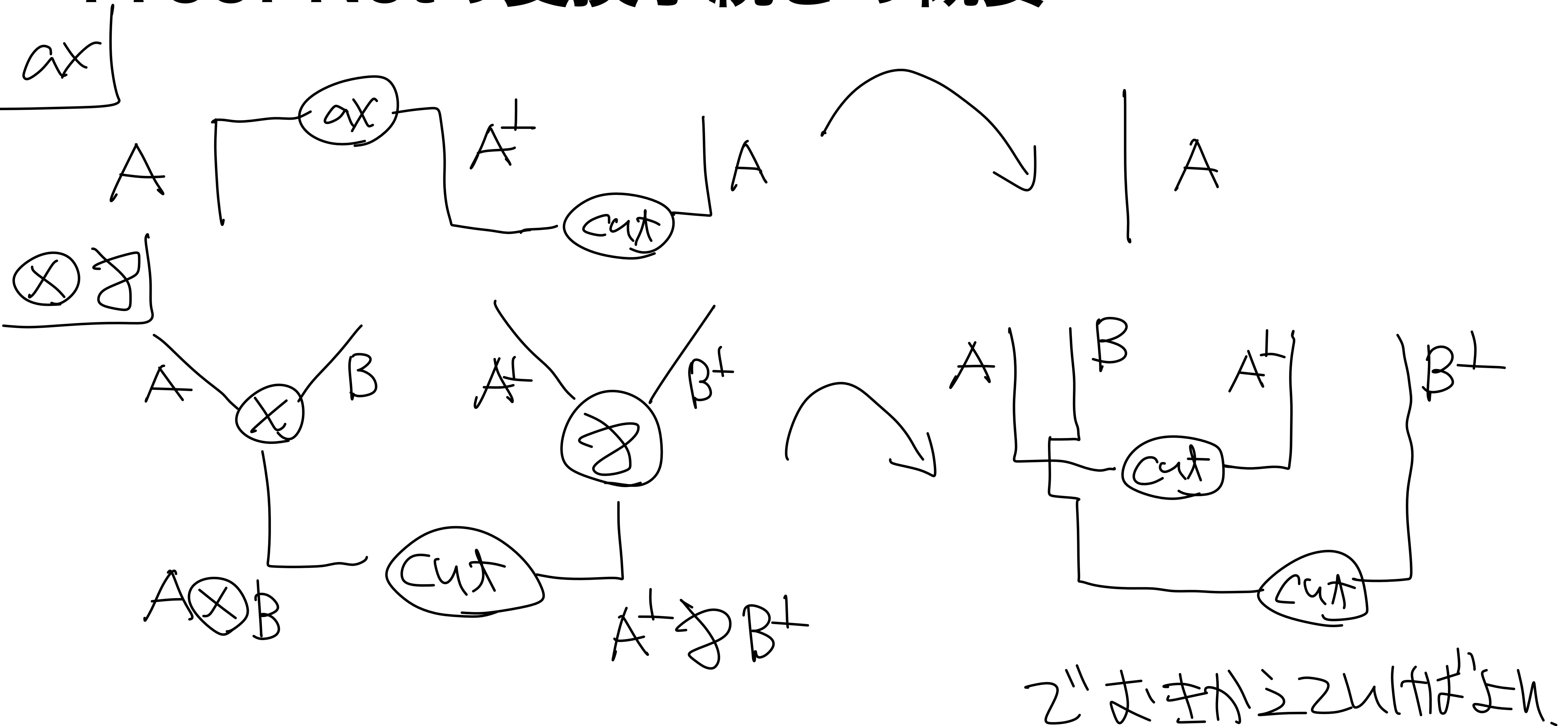
補題:

- 証明図と Proof Net は ~~一対一対応~~ し、
- 特に cut 子なしの証明図と  $\text{cut}$  の交差 proof net は ~~一対一対応~~ する。

補題:  $\vdash P$  ならば  $\vdash P$  の証明図の proof net から

$\vdash P$  の cut 子なしの証明図の proof net を得る  
手続きが存在する。

# Proof Netの変換手続きの概要





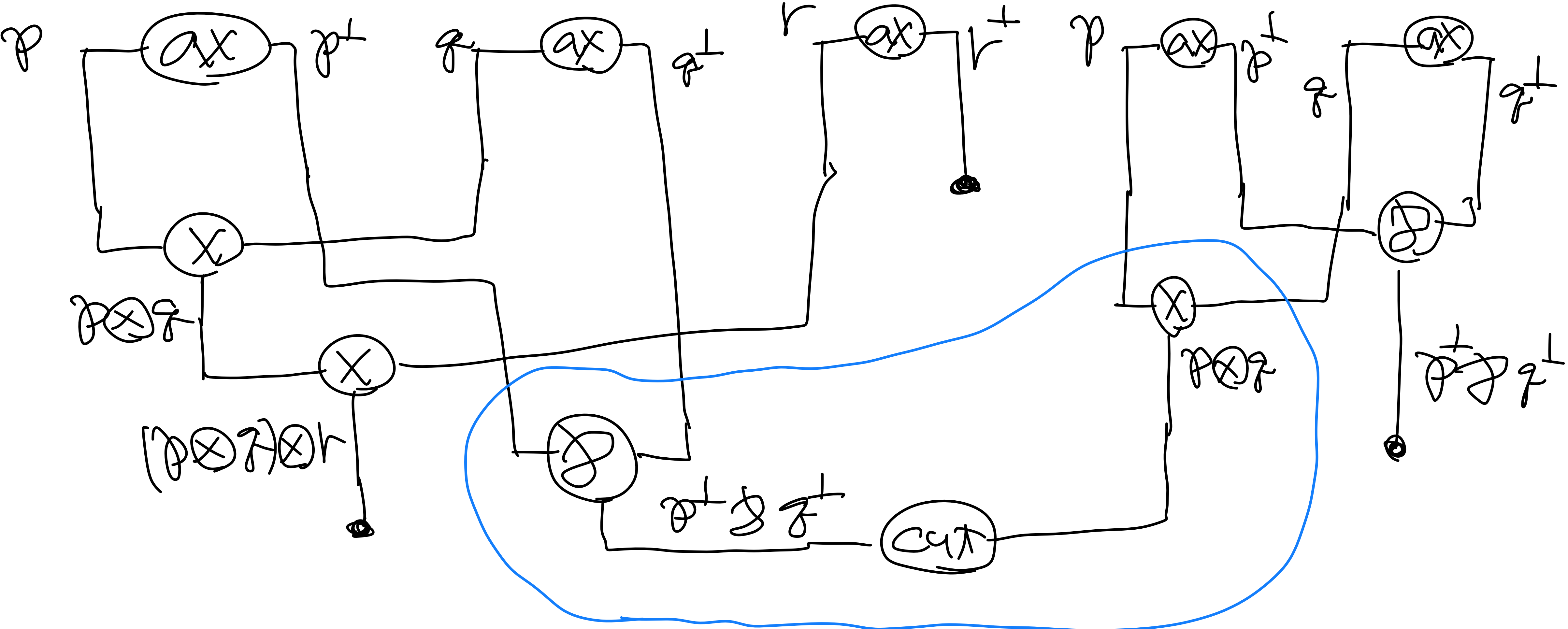
# 証明図の例 (cutあり) (再掲)

例:  $\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp$  の証明図:

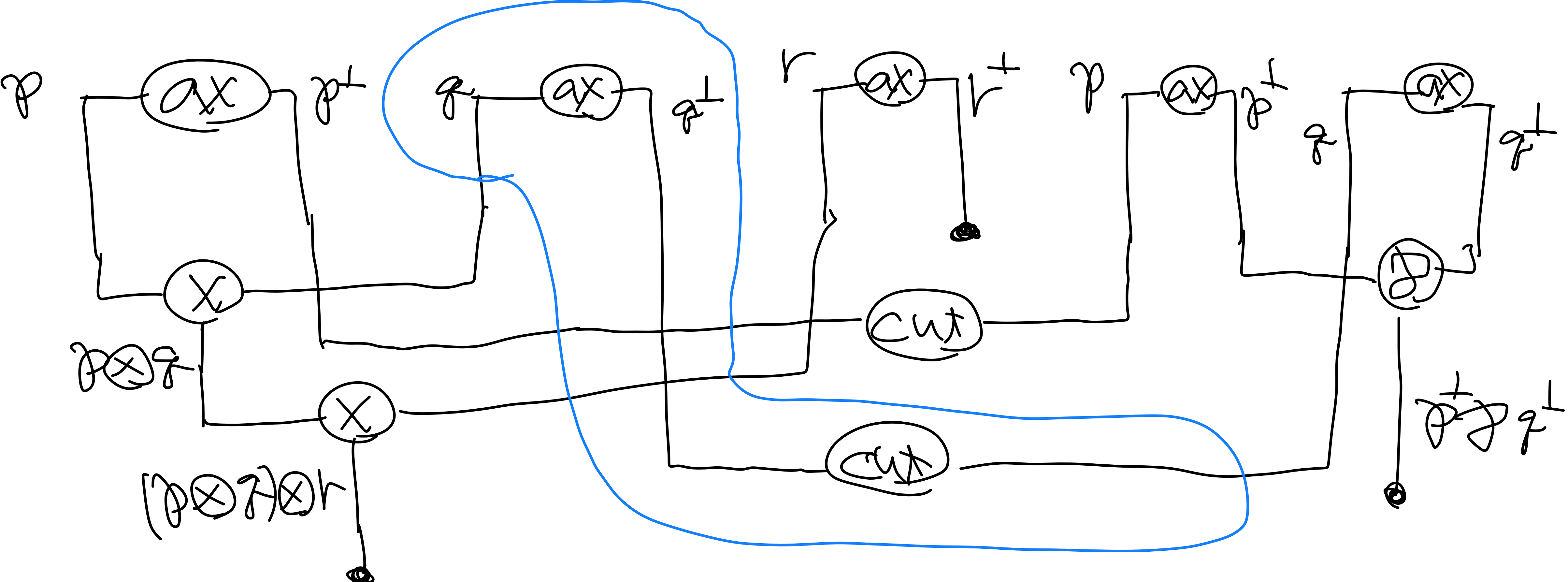
$(p \otimes q)^\perp = p^\perp \wp q^\perp$  に注意.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\vdash p, p^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \quad \vdash r, r^\perp}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp} (\otimes) \quad \frac{\vdash p, p^\perp \quad \vdash q, q^\perp}{\vdash \boxed{p \otimes q}, p^\perp, q^\perp} (\otimes)}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, \boxed{p^\perp \wp q^\perp}, r^\perp} (\wp) \quad \text{(cut)} \\
 \hline
 \frac{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp} (\wp)
 \end{array}$$

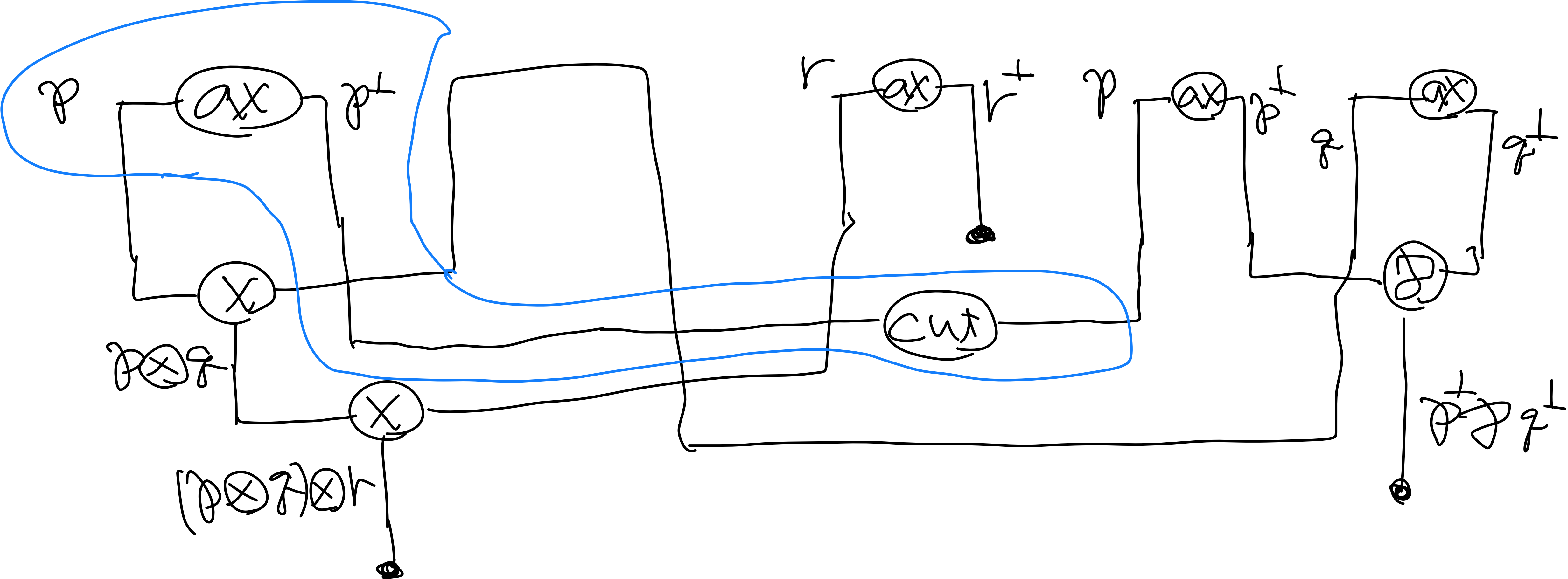
# Cut除去の適用例 (1)



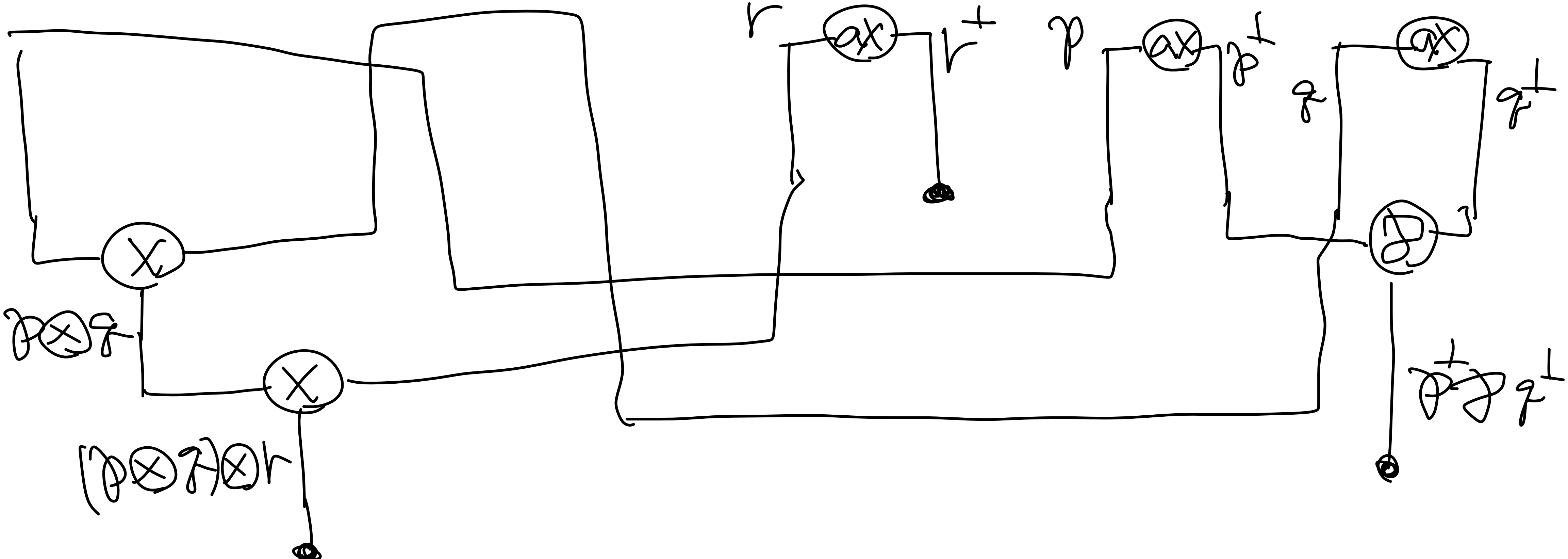
# Cut除去の適用例 (2)



# Cut除去の適用例 (3)



# Cut除去の適用例 (4)



あとは証明図にそれぞれ終り.

# 証明図の例 (cutなし) (再掲)

例:  $\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp$  の証明図:

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash p, p^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \quad \frac{\vdash q, q^\perp}{\vdash r, r^\perp} \quad (\otimes) \\ \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp \quad (\otimes) \\ \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \wp q^\perp, r^\perp \quad (\wp) \end{array}$$

証明図をproof netとして見ると  
カット除去が局所的な操作になって嬉しい！



# 参考文献

Olivier Laurent. An Introduction to Proof Nets. Unpublished manuscript (available online), 2013.

# 訂正: 証明図とProof Netは一対一対応しない

例としては  $\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \text{ } q^\perp, r^\perp$  の証明は2つ:

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash p, p^\perp \quad \vdash q, q^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \\ \frac{\vdash p \otimes q, p^\perp \text{ } q^\perp \quad \vdash r, r^\perp}{\vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \text{ } q^\perp, r^\perp} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash p, p^\perp \quad \vdash q, q^\perp}{\vdash p \otimes q, p^\perp, q^\perp} \quad \vdash r, r^\perp \\ \hline \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp, q^\perp, r^\perp \\ \hline \vdash (p \otimes q) \otimes r, p^\perp \text{ } q^\perp, r^\perp \end{array}$$

" $\vdash$ " " $\nVdash$ " = 2つの proof net は  $\nVdash$  かつ  $\nVdash$  (2回) 。