グラフの
ホモロジー群

「ひらがな」を分類したい。
例えば

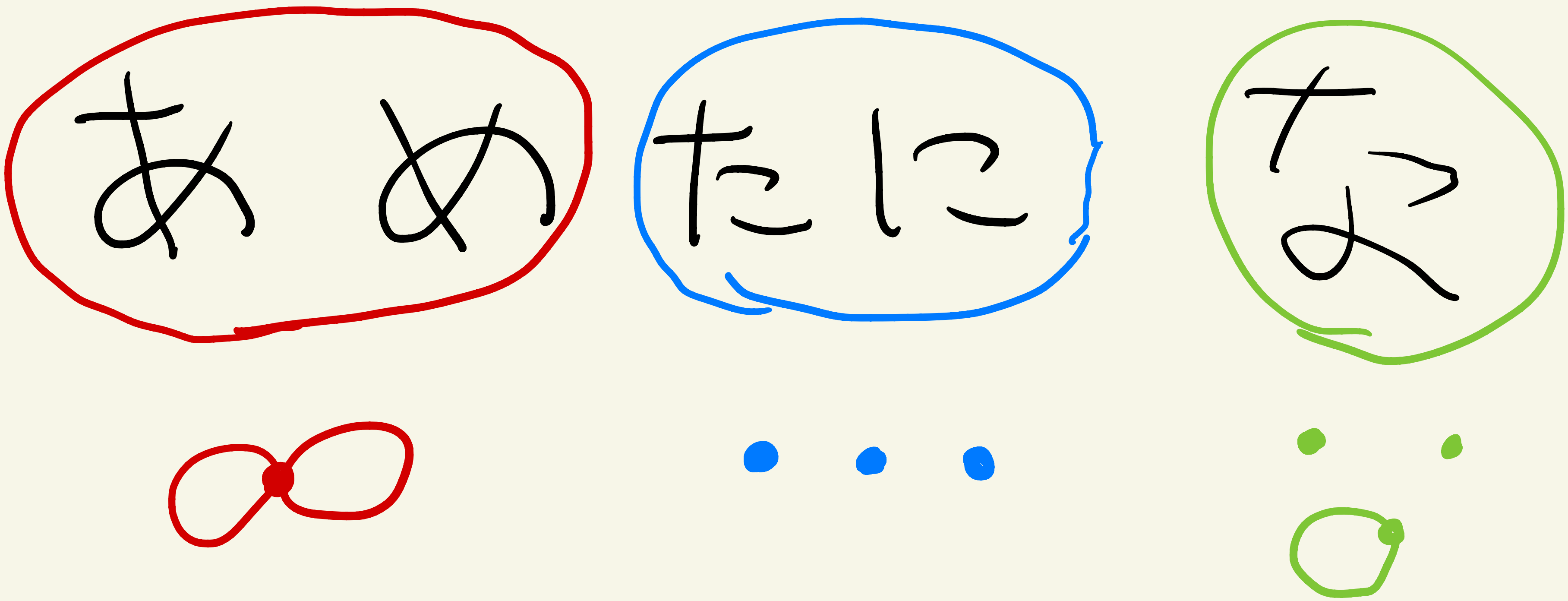
あ た な に め

を以下のようにグループ分けしたい。

あめ たに な

これらはグラフのレトラクションによる分類

レトラクションによる分類



これらの分類とホモロジー群 $H_0(G)$, $H_1(G)$

の関係をながめる。

def. 有向グラフ $G=(V, E, s, t)$ は

集合 V, E と写像 $s, t: E \to V$ の組。

example. $V=\{v_1, v_2, v_3\}$

$E=\{e_1, e_2\}$

$s(e_1)=v_1, \quad t(e_1)=v_1$

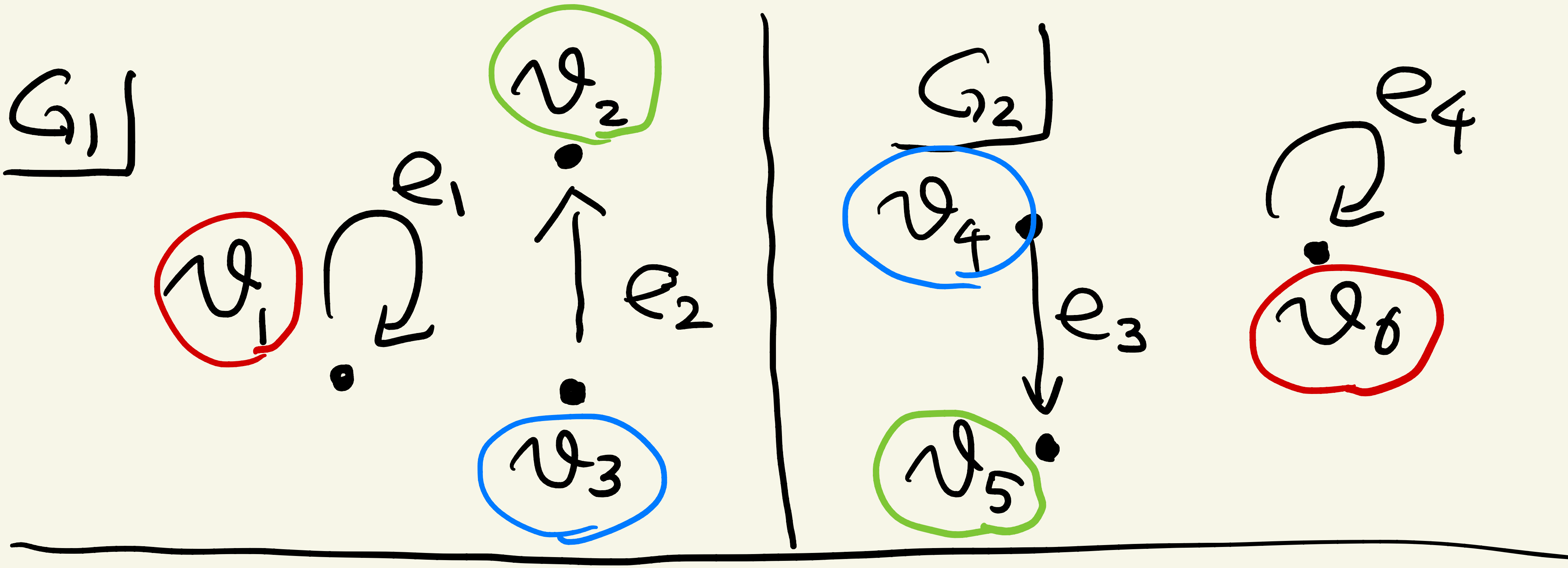
$s(e_2)=v_2, \quad t(e_2)=v_3$

notation. 上のグラフを以下のように図示する。

$$\begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} \arrow[loop above, "e_1"] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r, bend left, "e_2"] & \underset{v_3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

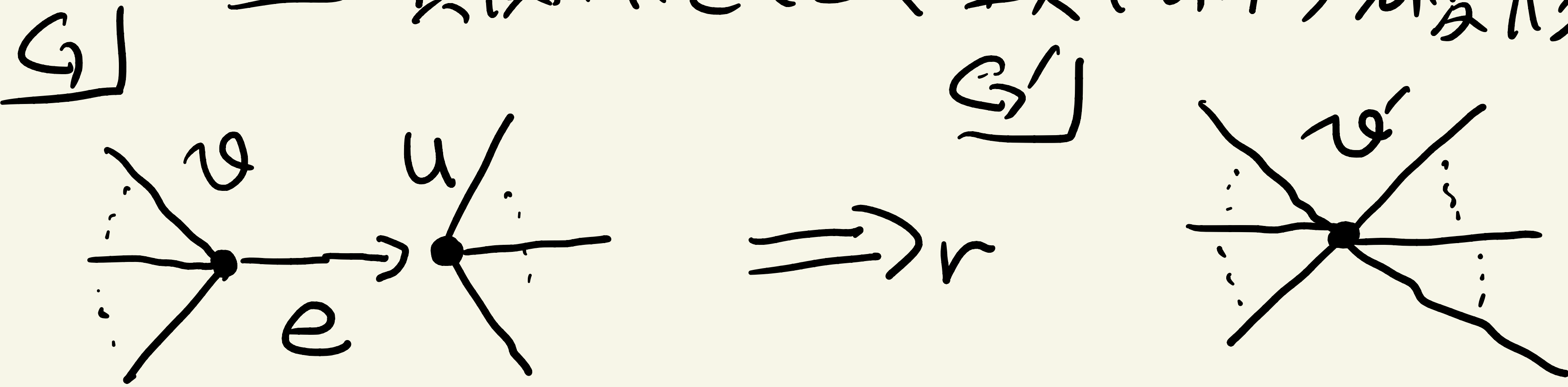
注. グラフの「同型」(名前のつけ替え)は同一視してギロンする.

example.



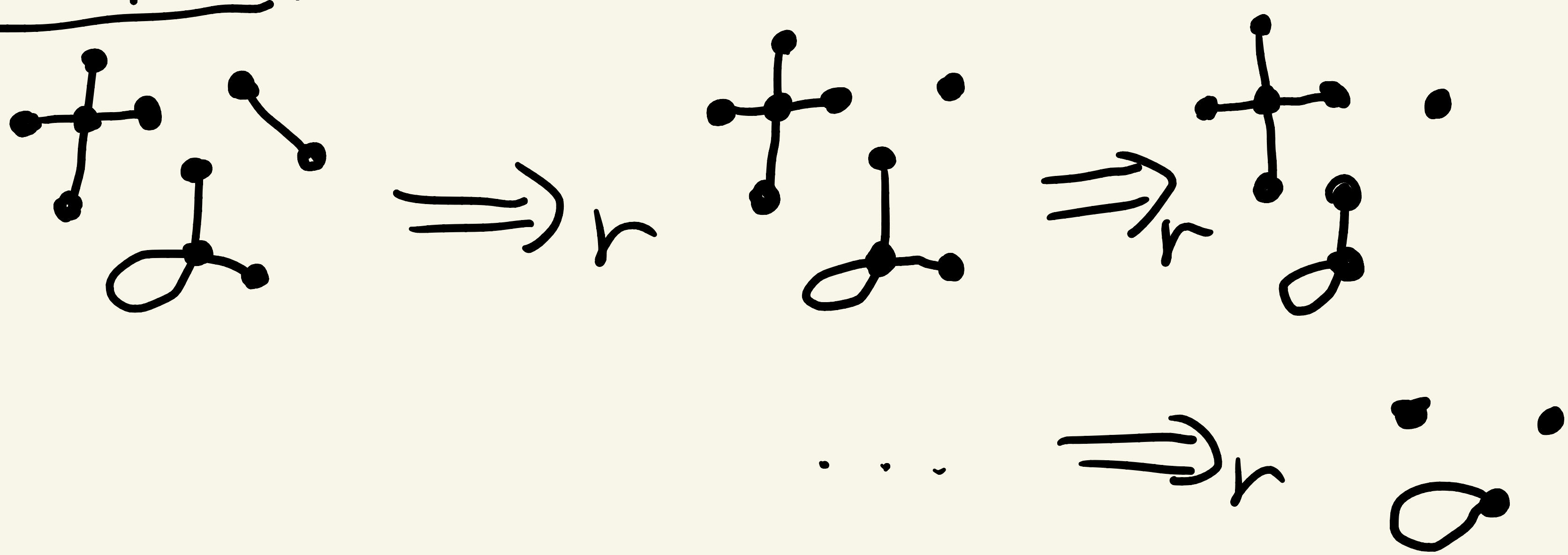
G_1とG_2は区別しない。

def: レトラクション $\Rightarrow_r$ はグラフの集まりの上の二項関係として、以下のグラフの変形で定義する。

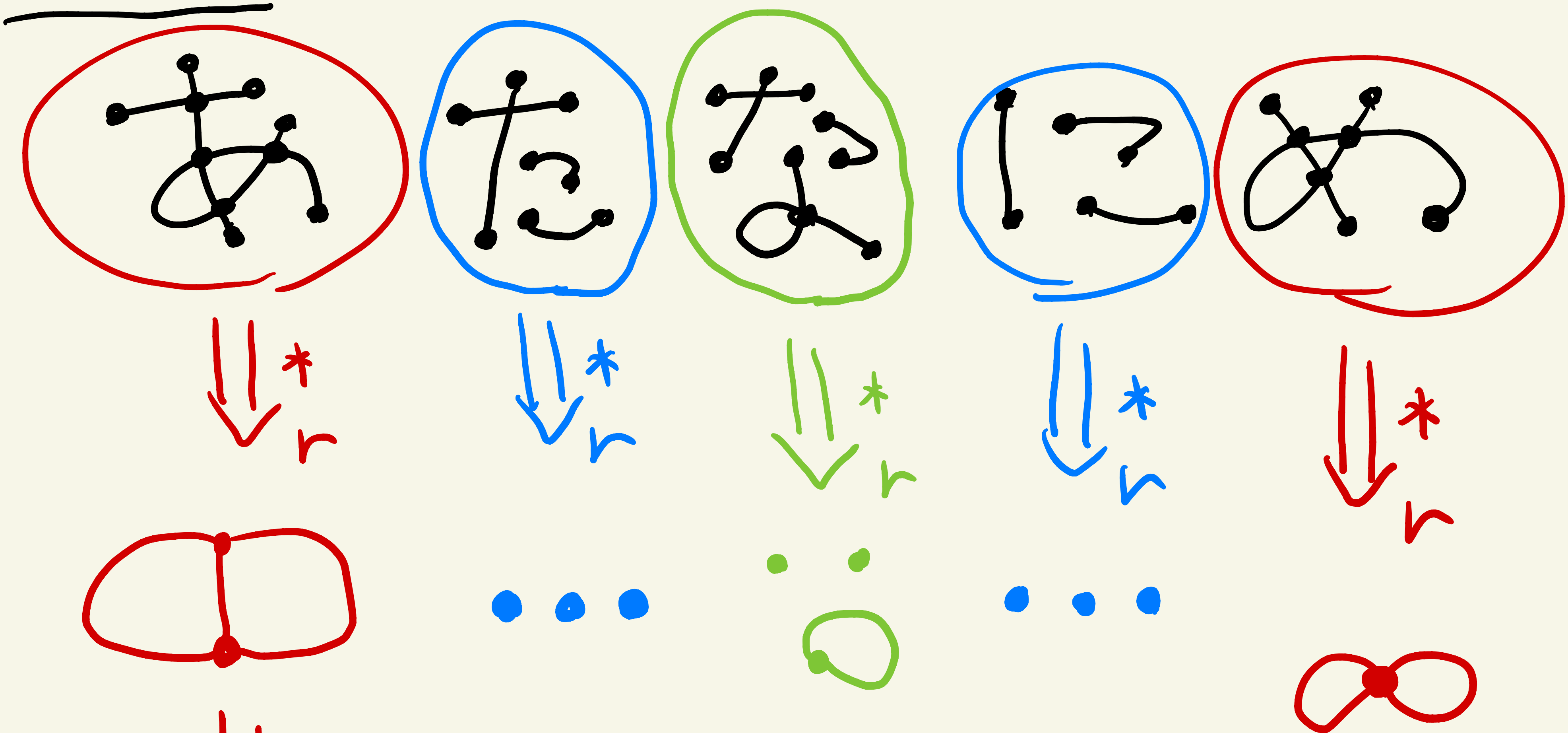


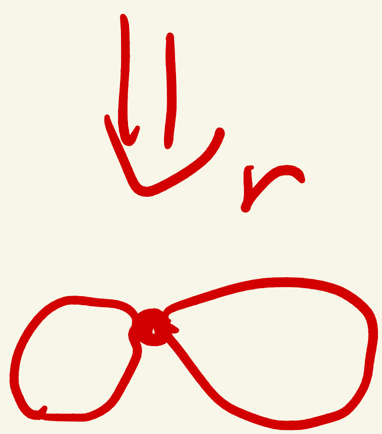
ただし、v と u は異なる頂点。

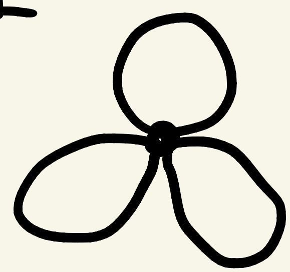
example. (辺の向きは省略)



example.





（注:  ではない）

グラフ G にホモロジー群 $H_0(G), H_1(G)$ を対応させることができ以下が成立。

<u>prop.</u> ホモロジー群はレトラクションで不変:

$G \Rightarrow_r G'$ ならば $H_0(G) \cong H_0(G')$
$H_1(G) \cong H_1(G')$.

<u>prop.</u> ホモロジー群は辺の向きの反転で不変。

<u>prop.</u> グラフ G が n 個の連結成分をもつとき

$$H_0(G) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n\text{個の直積}}.$$

<u>example</u>. ・「あ」のグラフ$G_{あ}$について$H_0(G_{あ}) \cong \mathbb{Z}$.

・「た」のグラフ$G_{た}$について

$$H_0(G_{た}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

・「な」のグラフ$G_{な}$について

$$H_0(G_{な}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

「た」と「な」を「区別」するには$H_1(G)$をくらべる必要がある。

def. Sを有限集合とする.

Sから$\mathbb{Z}$への関数の集合 $\mathbb{Z}^S$ に各元$s \in S$について

$(f+g)(s) = f(s)+g(s)$で演算$+$を入れた

$(\mathbb{Z}^S, +)$を <u>S上の$\mathbb{Z}$自由加群</u>と呼び

<u>$\mathbb{Z}\langle S\rangle$</u>とかく.

notation. $\mathbb{Z}\langle S\rangle$の元は$S$の線形多項式のようにかく.

example. $S=\{x, y\}$で

$$(3x+y)+(x-2y)=4x-y$$

$$(3x+y)+(-3x-y)=0x+0y=0.$$

def.（加群）

集合 G と　G 上の二項演算 $+: G\times G\to G$ が以下をみたすとき $(G,+)$ を加群とよぶ：

- 単位元の存在
- $+$ の結合性・可換性
- 逆元の存在

prop. 任意の集合 S について $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ は加群.
（$\mathbb{Z}$ 自由加群）

def. 加群の間の写像 $f: G \to G'$ が

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたすとき

f を準同型写像と呼ぶ。

さらに f が全単射であるようなとき、f を同型写像と呼ぶ。

同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき、

$G \simeq G'$ とかく。

example. $S = \{x, y\}$ $T = \{z, v, w\}$ とする。

$f(x) = z + 2v$ $f(y) = 3z + w$ をみたす

準同型 $f: \mathbb{Z}\langle S\rangle \to \mathbb{Z}\langle T\rangle$ は一意に定まる。

$f(2x+y) = 2f(x) + f(y) = 2(z+2v) + (3z+w)$

$= 5z + 4v + w$.

def. グラフ $G=(V,E,s,t)$ について

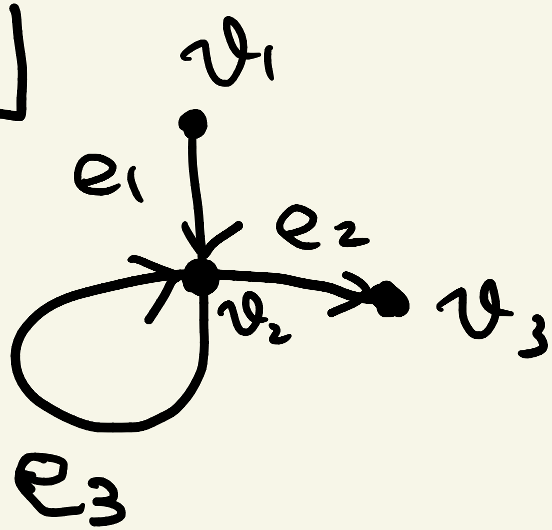
<u>境界準同型</u> $\partial_1 : \mathbb{Z}\langle E\rangle \to \mathbb{Z}\langle V\rangle$ は

各 $e\in E$ に対して

$$\partial_1(e) = t(e) - s(e)$$ で決まる準同型.

example.

G



- $\partial_1(e_1+e_2)$
  $= \partial_1(e_1)+\partial_1(e_2)$
  $= (v_2-v_1)+(v_3-v_2)$
  $= v_3-v_1$
- $\partial_1(e_1+e_2+e_3) = v_3-v_1$
- $\partial_1(-e_1+e_3) = v_1-2v_2+v_3$.

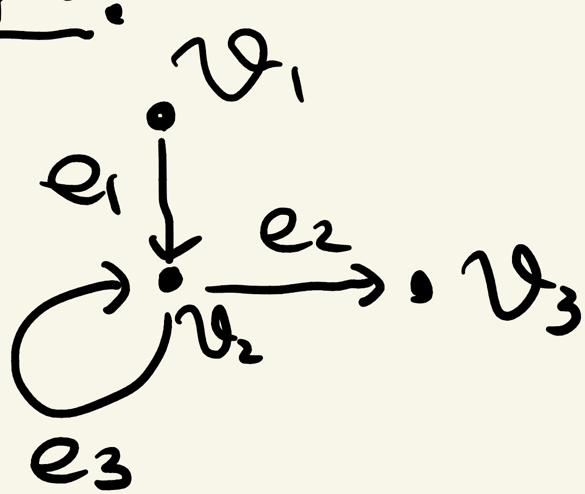
def. グラフ G に対して一輪体 $Z_1(G)$ を

$$Z_1(G)=\{x\in\mathbb{Z}\langle E\rangle \mid \partial_1(x)=0\}$$

で定義.

example.

G



$Z_1(G)$ を求める.

$a_1, a_2, a_3\in\mathbb{Z}$ として

$$\partial_1(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)=0$$

を解けばよい。

$$\partial_1(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)=a_1(v_2-v_1)+a_2(v_3-v_2)+\underbrace{a_3(v_2-v_2)}_{=0}$$

$$=-a_1v_1+(a_1-a_2)v_2+a_2v_3$$

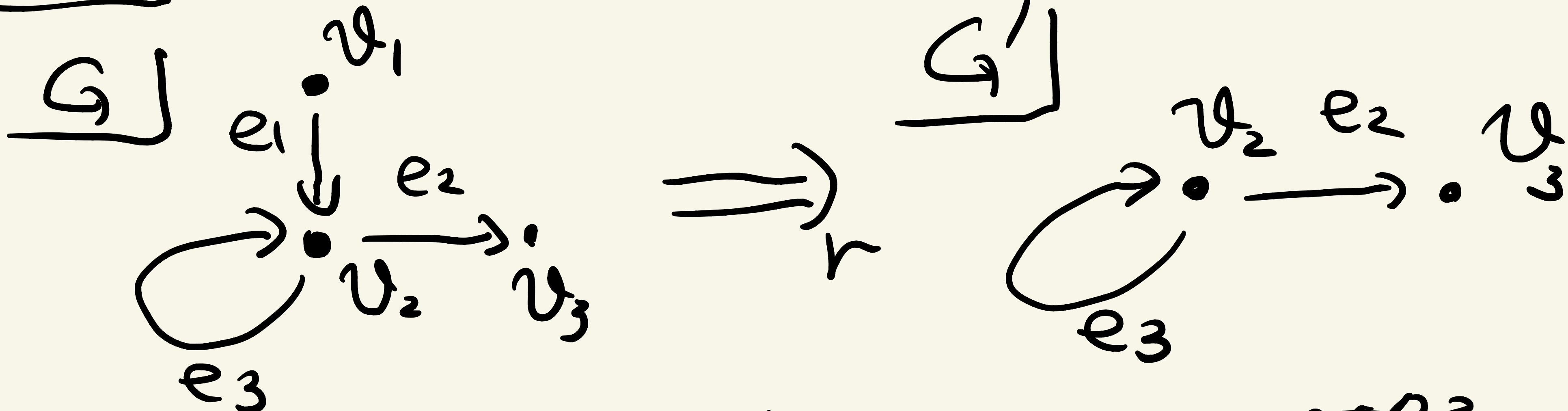
よって解は $a_1=a_2=0$ (a_3 は任意).

$$Z_1(G)=\{a_3e_3 \mid a_3\in\mathbb{Z}\}$$

prop. $H_1(G) \cong Z_1(G)$.

prop. レトラクションで一輪体は不変.

example.



$Z_1(G')$を求めるため $\partial_1(a_2e_2+a_3e_3)=0$を解く.

$\partial_1(a_2e_2+a_3e_3) = -a_2v_2 + a_2v_3$より

$a_2=0$でa_3は任意.

$Z_1(G') = \{a_3e_3 \mid a_3 \in \mathbb{Z}\} \cong Z_1(G)$.

example. レトラクションによる

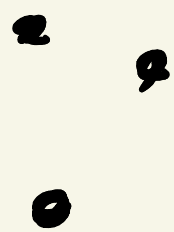
な $\overset{*}{\Longleftrightarrow}_r$ に の変換は不可能。

な $\overset{*}{\Longrightarrow}_r$  より

$Z_1(G_{な}) \cong \{ae \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\cong \mathbb{Z}$

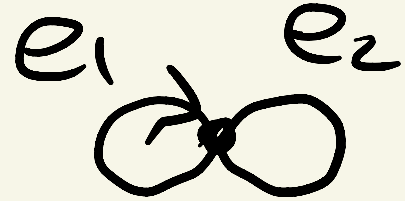
一方

た $\overset{*}{\Longrightarrow}_r$  より

$Z_1(G_{た}) \cong \{0\}.$

一輪体が同型でない。

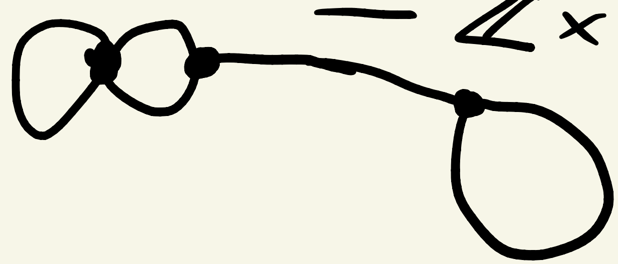
example

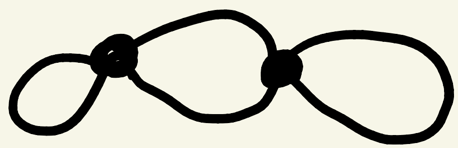
あ $\overset{*}{\Longrightarrow}_r$ 

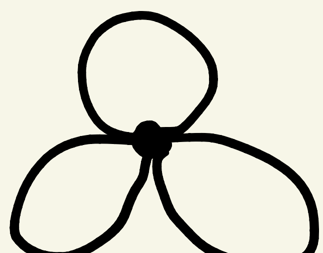
より

$Z_1(G_{\text{あ}}) \cong \{a_1e_1 + a_2e_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$

$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

ぬ $\overset{*}{\Longrightarrow}_r$ 

$\Longrightarrow_r$ 

$\Longrightarrow_r$ 

$Z_1(G_{\text{ぬ}})$は?

まとめ：レトラクションでホモロジー群 $H_0(G)$
$H_1(G)$
が不変なことを認めて
$H_1(G)$ と同型な $Z_1(G)$ の計算を
やってみた。

参考文献

阿原一志「計算で身につくトポロジー」
共立出版 (2013)