直観主義論理

齊藤　哲平

October 21, 2023

概要

大西琢朗による教科書「論理学」の直観主義論理のところを読む。

1. 直観主義論理の特徴: 構成性
2. クリプキ意味論
3. 多値論理との関係(次回予告)

以下、命題論理で考える。

構成的でない証明の例

命題

x^y が有理数になるような無理数 x, y が存在する。

構成的でない証明の例

命題

x^y が有理数になるような無理数 x, y が存在する。

非構成的証明.

排中律により $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数か、無理数であるかのどちらかである。

- 有理数ならば $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ がそのような x, y である。

構成的でない証明の例

命題

x^y が有理数になるような無理数 x, y が存在する。

非構成的証明.

排中律により $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数か、無理数であるかのどちらかである。

- 有理数ならば $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ がそのような x, y である。
- 無理数ならば $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$ がそのような x, y である。

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

構成的でない証明の例

命題

x^y が有理数になるような無理数 x, y が存在する。

非構成的証明.

排中律により $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数か、無理数であるかのどちらかである。

- 有理数ならば $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ がそのような x, y である。
- 無理数ならば $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$ がそのような x, y である。

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

構成的証明 **(cf. Bauer 2016).**

$$(\sqrt{2})^{\log_2 9} = \sqrt{2^{\log_2 9}} = \sqrt{9} = 3$$

選言特性と排中律

命題 (選言特性)
直観主義論理では $A \vee B$ が妥当ならば A または B が妥当である。

選言特性と排中律

命題 (選言特性)

直観主義論理では $A \vee B$ が妥当ならば A または B が妥当である。

命題

古典論理は選言特性を持たない。

選言特性と排中律

命題 (選言特性)
直観主義論理では $A \vee B$ が妥当ならば A または B が妥当である。

命題
古典論理は選言特性を持たない。

証明.
古典論理で排中律は妥当であるから、適当な命題変数 p について $p \vee \neg p$ は妥当。一方で p も $\neg p$ のいずれも妥当でない。

クリプキ意味論

Definition
$\langle W, \leqslant \rangle$ が フレーム であるとは以下の三つが成立することである。

- W は空でない
- 反射性: 任意の $x \in W$ について $x \leqslant x$
- 推移性: 任意の $x, y, z \in W$ について

$$x \leqslant y \text{ かつ } y \leqslant z \quad \text{ならば} \quad x \leqslant z$$

クリプキ意味論

Definition

$\langle W, \leqslant \rangle$ が フレーム であるとは以下の三つが成立することである。

- W は空でない
- 反射性: 任意の $x \in W$ について $x \leqslant x$
- 推移性: 任意の $x, y, z \in W$ について

$$x \leqslant y \text{ かつ } y \leqslant z \quad \text{ならば} \quad x \leqslant z$$

関数 $v : (W \times PV) \to \{0, 1\}$ が付置であるとは、v が遺伝的であること、すなわち任意の $x, y \in W, p \in PV$ について以下が成立することである。

$$x \leqslant y \text{ かつ } v(x, p) = 1 \quad \text{ならば} \quad v(y, p) = 1$$

論理式の解釈

Definition

論理式についての付置を以下のように帰納的に定義する。

$$
\begin{aligned}
v(x, A \wedge B) = 1 &\iff v(x, A) = 1 \text{ かつ } v(x, B) = 1 \\
v(x, A \vee B) = 1 &\iff v(x, A) = 1 \text{ または } v(x, B) = 1 \\
v(x, \neg A) = 1 &\iff x \leqslant y \text{ なる任意の } y \text{ について} \\
&\qquad v(y, A) = 0 \\
v(x, A \to B) = 1 &\iff x \leqslant y \text{ なる任意の } y \text{ について} \\
&\qquad v(y, A) = 0 \text{ または } v(x, B) = 1 \\
v(x, A \leftrightarrow B) = 1 &\iff v(x, A \to B) = 1 \text{ かつ } v(x, B \to A) = 1
\end{aligned}
$$

妥当性

Definition

論理式の集合 X から論理式 A への推論が妥当でないとは、
あるフレーム $\langle W, \leqslant \rangle$、付置 v と $x \in W$ が存在して

- すべての $B \in X$ について $v(x, B) = 1$ であり、かつ
- $v(x, A) = 0$ であることである。

妥当性

Definition

論理式の集合 X から論理式 A への推論が妥当でないとは、
あるフレーム $\langle W, \leqslant \rangle$、付置 v と $x \in W$ が存在して

- すべての $B \in X$ について $v(x, B) = 1$ であり、かつ
- $v(x, A) = 0$ であることである。

$\emptyset$ から A への推論が妥当なとき、単に A が妥当であるという。

妥当性

Definition

論理式の集合 X から論理式 A への推論が妥当でないとは、
あるフレーム $\langle W, \leqslant\rangle$、付置 v と $x \in W$ が存在して

- すべての $B \in X$ について $v(x, B) = 1$ であり、かつ
- $v(x, A) = 0$ であることである。

$\emptyset$ から A への推論が妥当なとき、単に A が妥当であるという。

Example

妥当でない論理式

- $A \vee \neg A$
- $p \leftrightarrow q$ (p と q は異なる変数)

妥当な推論

- $\{A\}$ から $\neg\neg A$ への推論
- $\{A \vee B, \neg B\}$ から A への推論

排中律は妥当でない

フレーム $W = \langle \{x, y\}, \leqslant \rangle$ を以下のように定める。

$$x \leqslant y$$

排中律は妥当でない

フレーム $W = \langle \{x, y\}, \leqslant \rangle$ を以下のように定める。

$$x \leqslant y$$

ここで原子論理式 p について、付置 v を以下のように定めれば

$$v(x, p) = 0 \qquad v(y, p) = 1$$

$v(x, \neg p) = 0$ であり、

排中律は妥当でない

フレーム $W = \langle \{x, y\}, \leqslant \rangle$ を以下のように定める。

$$x \ \leqslant \ y$$

ここで原子論理式 p について、付置 v を以下のように定めれば

$$v(x, p) = 0 \qquad\qquad v(y, p) = 1$$

$v(x, \neg p) = 0$ であり、したがって $v(x, p \vee \neg p) = 0$ である。

排中律は妥当でない

フレーム $W = \langle \{x, y\}, \leqslant \rangle$ を以下のように定める。

$$x \ \leqslant \ y$$

ここで原子論理式 p について、付置 v を以下のように定めれば

$$v(x, p) = 0 \qquad\qquad v(y, p) = 1$$

$v(x, \neg p) = 0$ であり、したがって $v(x, p \vee \neg p) = 0$ である。

命題 (選言特性)
$A \vee B$ が妥当ならば A または B が妥当である。

命題

直観主義論理は三値論理ではない。

命題

直観主義論理は三値論理ではない。

証明のようなもの.

直観主義論理が三値論理だったとする。

$$\begin{aligned}(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \leftrightarrow p_4) \\ \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee (p_3 \leftrightarrow p_4)\end{aligned}$$

は、三値論理においては鳩の巣原理から妥当なはずである。

命題
直観主義論理は三値論理ではない。

証明のようなもの.
直観主義論理が三値論理だったとする。

$$\begin{aligned}(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \leftrightarrow p_4) \\ \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee (p_3 \leftrightarrow p_4)\end{aligned}$$

は、三値論理においては鳩の巣原理から妥当なはずである。
一方で直観主義論理の選言特性からある $p_i \leftrightarrow p_j$ が妥当になり矛盾。

命題
直観主義論理は三値論理ではない。

証明のようなもの.
直観主義論理が三値論理だったとする。

$$\begin{aligned}(p_1 \leftrightarrow p_2) \lor (p_1 \leftrightarrow p_3) \lor (p_1 \leftrightarrow p_4)\\ \lor (p_2 \leftrightarrow p_3) \lor (p_2 \leftrightarrow p_4) \lor (p_3 \leftrightarrow p_4)\end{aligned}$$

は、三値論理においては鳩の巣原理から妥当なはずである。
一方で直観主義論理の選言特性からある $p_i \leftrightarrow p_j$ が妥当になり矛盾。

次回は細かいところを詰める予定 (Salehi, 2021)