WQO 入門2 — ヒグマンの補題

齊藤哲平

May 12, 2024

概要

1. WQO の復習
2. 補題の主張 (文字列上の埋め込み順序は WQO)
3. 補題の証明 (極小悪列論法)

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

Example

自然数上の順序は WQO;

WQO の復習

Definition
擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

Example
自然数上の順序は WQO; その整数への最小の拡張は WQO でない

WQO の復習

Definition
擬順序 $\leqslant$ を考える
- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

Example
自然数上の順序は WQO; その整数への最小の拡張は WQO でない

命題
以下は同値
- $\leqslant$ は WQO
- $\leqslant$ の任意の拡張 $\leqslant'$ が整礎 (無限降下列 $a_0 >' a_1 >' \cdots$ がない)

WQO の復習

Definition

擬順序 $\leqslant$ を考える

- 無限列 $a_0, a_1, \ldots$ が良列とはある $i < j$ について $a_i \leqslant a_j$ となること
- そうでない無限列 (すなわち比較不能列) は悪列と呼ぶ
- $\leqslant$ の悪列が存在しないとき $\leqslant$ をWQOと呼ぶ

Example

自然数上の順序は WQO; その整数への最小の拡張は WQO でない

命題

以下は同値

- $\leqslant$ は WQO
- $\leqslant$ の任意の拡張 $\leqslant'$ が整礎 (無限降下列 $a_0 >' a_1 >' \cdots$ がない)
- 任意の無限列 $a_0, a_1, \ldots$ は単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \cdots$ を含む

文字列上の埋め込み順序

擬順序集合 $(\Sigma, \leqslant)$ 上の文字列の集合 Σ^* を考える

文字列上の埋め込み順序

擬順序集合 $(\Sigma, \leqslant)$ 上の文字列の集合 Σ^* を考える

Definition

以下の性質をもつ最小の擬順序を文字列の 埋め込み順序 $\leqslant_{\mathsf{emb}}$ と呼ぶ

除去性: $u \leqslant_{\mathsf{emb}} au$

文字列上の埋め込み順序

擬順序集合 $(\Sigma, \leqslant)$ 上の文字列の集合 Σ^* を考える

Definition

以下の性質をもつ最小の擬順序を文字列の 埋め込み順序 $\leqslant_{\mathsf{emb}}$ と呼ぶ

除去性: $u \leqslant_{\mathsf{emb}} au$

単調性: $a \leqslant b$ ならば $uav \leqslant_{\mathsf{emb}} ubv$

ここで $a, b \in \Sigma$ と $u, v \in \Sigma^*$ は任意

文字列上の埋め込み順序

擬順序集合 $(\Sigma, \leqslant)$ 上の文字列の集合 Σ^* を考える

Definition

以下の性質をもつ最小の擬順序を文字列の 埋め込み順序 $\leqslant_{\text{emb}}$ と呼ぶ

除去性: $u \leqslant_{\text{emb}} au$

単調性: $a \leqslant b$ ならば $uav \leqslant_{\text{emb}} ubv$

ここで $a, b \in \Sigma$ と $u, v \in \Sigma^*$ は任意

Example

擬順序として自然数を考えると

$$\varepsilon \leqslant_{\text{emb}} 0 \leqslant_{\text{emb}} 00 \leqslant_{\text{emb}} 000 \leqslant_{\text{emb}} 010 \leqslant_{\text{emb}} 020 \leqslant_{\text{emb}} 021$$

であり、さらに

文字列上の埋め込み順序

擬順序集合 $(\Sigma, \leqslant)$ 上の文字列の集合 Σ^* を考える

Definition

以下の性質をもつ最小の擬順序を文字列の 埋め込み順序 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ と呼ぶ

除去性: $u \leqslant_{\mathrm{emb}} au$

単調性: $a \leqslant b$ ならば $uav \leqslant_{\mathrm{emb}} ubv$

ここで $a, b \in \Sigma$ と $u, v \in \Sigma^*$ は任意

Example

擬順序として自然数を考えると

$$\varepsilon \leqslant_{\mathrm{emb}} 0 \leqslant_{\mathrm{emb}} 00 \leqslant_{\mathrm{emb}} 000 \leqslant_{\mathrm{emb}} 010 \leqslant_{\mathrm{emb}} 020 \leqslant_{\mathrm{emb}} 021$$

であり、さらに 01 と 10 は比較不能である

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

$|s|$ で文字列 s の長さを表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $s_0, \ldots, s_{i-1}, t$ で始まり $|t| < |s_i|$ を満たす悪列はない

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

$|s|$ で文字列 s の長さを表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $s_0, \ldots, s_{i-1}, t$ で始まり $|t| < |s_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $s_0, s_1, \ldots$ のこと

$(i = 0)$ 悪列 $t_0, t_1, \ldots$ で $|t_0| < |s_0|$ となるものは存在しない

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)
$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

$|s|$ で文字列 s の長さを表すとする

Lemma (極小悪列補題)
$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $s_0, \ldots, s_{i-1}, t$ で始まり $|t| < |s_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $s_0, s_1, \ldots$ のこと

$(i = 0)$ 悪列 $t_0, t_1, \ldots$ で $|t_0| < |s_0|$ となるものは存在しない

$(i = 1)$ 悪列 $s_0, t_1, t_2, \ldots$ で $|t_1| < |s_1|$ となるものは存在しない

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

$|s|$ で文字列 s の長さを表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $s_0, \ldots, s_{i-1}, t$ で始まり $|t| < |s_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $s_0, s_1, \ldots$ のこと

(i = 0) 悪列 $t_0, t_1, \ldots$ で $|t_0| < |s_0|$ となるものは存在しない

(i = 1) 悪列 $s_0, t_1, t_2, \ldots$ で $|t_1| < |s_1|$ となるものは存在しない

(i = 2) 悪列 $s_0, s_1, t_2, t_3, \ldots$ で $|t_2| < |s_2|$ となるものは存在しない

ヒグマンの補題と極小悪列補題

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

$|s|$ で文字列 s の長さを表すとする

Lemma (極小悪列補題)

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在するならば、以下の極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ が存在する:
任意の i について $s_0, \ldots, s_{i-1}, t$ で始まり $|t| < |s_i|$ を満たす悪列はない

任意の prefix に関する最小性を満たす悪列 $s_0, s_1, \ldots$ のこと

- ($i = 0$) 悪列 $t_0, t_1, \ldots$ で $|t_0| < |s_0|$ となるものは存在しない
- ($i = 1$) 悪列 $s_0, t_1, t_2, \ldots$ で $|t_1| < |s_1|$ となるものは存在しない
- ($i = 2$) 悪列 $s_0, s_1, t_2, t_3, \ldots$ で $|t_2| < |s_2|$ となるものは存在しない
- (以下同様)

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s_i'$

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\mathrm{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s_i'$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる

命題 (Higman 1952)
$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.
$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s_i'$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s'_i$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$
4. 単調性から $s_{\phi(i)} = a_{\phi(i)} s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s'_i$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$
4. 単調性から $s_{\phi(i)} = a_{\phi(i)} s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$ となり矛盾

命題 (Higman 1952)

$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.

$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s'_i$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$
4. 単調性から $s_{\phi(i)} = a_{\phi(i)} s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$ となり矛盾

ステップ3の詳細: $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ が悪列だとして矛盾を導く

1. 任意の $0 \leqslant i \leqslant \phi(0) - 1$ と j について、もし $s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$ なら矛盾:

$$s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$$

命題 (Higman 1952)
$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.
$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s'_i$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$
4. 単調性から $s_{\phi(i)} = a_{\phi(i)} s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$ となり矛盾

ステップ3の詳細: $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ が悪列だとして矛盾を導く

1. 任意の $0 \leqslant i \leqslant \phi(0) - 1$ と j について、もし $s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$ なら矛盾:
$$s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$$
2. $s_0, \ldots, s_{\phi(0)-1}, s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ は悪列;

命題 (Higman 1952)
$\leqslant$ が WQO ならば $\leqslant_{\text{emb}}$ も WQO

証明.
$\leqslant_{\text{emb}}$ の悪列が存在すると仮定して矛盾を導く

1. 極小悪列 $s_0, s_1, \ldots$ をとると空文字は現れないので $s_i = a_i s'_i$
2. $\leqslant$ が WQO だから単調部分列 $a_{\phi(0)} \leqslant a_{\phi(1)} \leqslant \ldots$ が取れる
3. 実は $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ も良列: ある $i < j$ について $s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$
4. 単調性から $s_{\phi(i)} = a_{\phi(i)} s'_{\phi(i)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$ となり矛盾

ステップ3の詳細: $s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ が悪列だとして矛盾を導く

1. 任意の $0 \leqslant i \leqslant \phi(0) - 1$ と j について、もし $s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)}$ なら矛盾:
$$s_i \leqslant_{\text{emb}} s'_{\phi(j)} \leqslant_{\text{emb}} a_{\phi(j)} s'_{\phi(j)} = s_{\phi(j)}$$
2. $s_0, \ldots, s_{\phi(0)-1}, s'_{\phi(0)}, s'_{\phi(1)}, \ldots$ は悪列; $|s'_{\phi(0)}| < |s_{\phi(0)}|$ で矛盾