一笔画

1 题目描述

咱们来玩一笔画游戏吧，规则是这样的：有一个连通的图，能否找到一个恰好包含了所有的边，并且没有重复的路径。

1.1 输入描述：

输入包含多组数据。每组数据的第一行包含两个整数 n 和 m (2≤n, m≤1000)，其中 n 是顶点的个数，m 是边的条数。紧接着有 m 行，每行包含两个整数 from 和 to (1 ≤ from, to ≤ n, from != to)，分别代表边的两端顶点。**边是双向的，并且两个顶点之间可能不止一条边**。

1.2 输出描述：

对应每一组输入，如果能一笔画则输出“Yes”；否则输出“No”。

1.3 输入例子：

```
3 3
1 2
2 3
1 3
4 7
1 2
2 1
1 3
1 4
1 4
2 3
4 3
```

1.4 输出例子：

```
Yes
No
```

2 解题思路

题目要求一个连通的有向图是否可以一笔画完。这是一个**可行遍性问题**，即从图中一个顶点出发不重复地遍历完所有的边并回到起始顶点，这种回路是**欧拉回路**。在解答该问题前先对欧拉回

路相关的内容进行介绍。

2.1 欧拉回路

2.1.1 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图

无向图：

1）设 G 是连通无向图，则称经过 G 的每条边一次并且仅一次的路径为欧拉通路；

2）如果欧拉通路是回路（起点和终点是同一个顶点），则称此回路为欧拉回路（Euler circuit）；

3）具有欧拉回路的无向图 G 称为欧拉图（Euler graph）。

有向图：

1）设 D 是有向图，D 的基图连通，则称经过 D 的每条边一次并且仅一次的有向路径为有向欧拉通路；

2）如果有向欧拉通路是有向回路，则称此有向回路为有向欧拉回路（directed Euler circuit）；

3）具有有向欧拉回路的有向图 D 称为有向欧拉图（directed Euler graph）。

图 2.1 是有向图。可以根据定义判定它们是否是有向图。

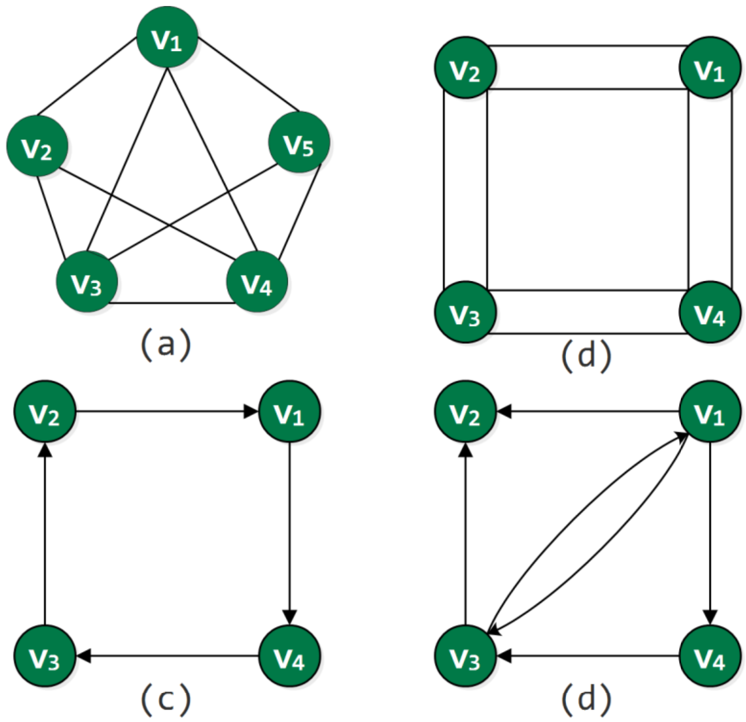

图 2-1　有向欧拉图

2.1.2 定理及推论

欧拉通路和欧拉回路的判定是很简单的，请看下面的定理及推论。

定理 2.1　无向图 G 存在欧拉通路的充要条件是：

G 为连通图，并且 G 仅有两个奇度结点（度数为奇数的顶点）或者无奇度结点。

推论 2.1：

1） 当 G 是仅有两个奇度结点的连通图时，G 的欧拉通路必以此两个结点为端点。
2） 当 G 是无奇度结点的连通图时，G 必有欧拉回路。
3） G 为欧拉图（存在欧拉回路）的充分必要条件是 G 为无奇度结点的连通图。

例如图 2-1(a)所示的无向图，存在两个奇度顶点 v2 和 v5，所以存在欧拉通路，且欧拉通路必以这两个顶点为起始顶点和终止顶点；该无向图不存在欧拉回路。图 2-1(b)所示的无向图为欧拉图。

定理 2.2　有向图 D 存在欧拉通路的充要条件是：

D 为有向图，D 的基图连通，并且所有顶点的出度与入度都相等；或者除两个顶点外，其余顶点的出度与入度都相等，而这两个顶点中一个顶点的出度与入度之差为 1，另一个顶点的出度与入度之差为-1。

推论 2.2：

1） 当 D 除出、入度之差为 1，-1 的两个顶点之外，其余顶点的出度与入度都相等时，D 的有向欧拉通路必以出、入度之差为 1 的顶点作为始点，以出、入度之差为-1 的顶点作为终点。
2） 当 D 的所有顶点的出、入度都相等时，D 中存在有向欧拉回路。
3） 有向图 D 为有向欧拉图的充分必要条件是 D 的基图为连通图，并且所有顶点的出、入度都相等。

例如图 2-1(c)所示的有向图，顶点 v2 和 v4 入度和出度均为 1；顶点 v1 的出度为 2、入度为 1，二者差值为 1；顶点 v3 的出度为 1、入度为 2，二者相差为-1；所以该有向图只存在有向欧拉通路，且必须以顶点 v1 为始点，以顶点 v3 为终点。图 2-1(d)所示的有向图不存在有向欧拉通路。

2.2　解题步骤

首先根据输入构造图的邻接矩阵，通过邻接矩阵判断图是否连通，不连通说明不可以一笔画完，如果连通，再判断图是否有奇度顶点，有就不能一笔画完，没有就说明可以一笔画完。