

# 猴子分桃

## 1 问题描述

老猴子辛苦了一辈子，给那群小猴子们留下了一笔巨大的财富——一大堆桃子。老猴子决定把这些桃子分给小猴子。

第一个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但还多出一个。它把剩下的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

第二个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但又多出一个。它把多出的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

后来的小猴子都如此照办。最后剩下的桃子全部留给老猴子。

这里有  $n$  只小猴子，请你写个程序计算一下在开始时至少有多少个桃子，以及最后老猴子最少能得到几个桃子。

### 1.1 输入描述：

输入包括多组测试数据。

每组测试数据包括一个整数  $n(1 \leq n \leq 20)$ 。

输入以 0 结束，该行不做处理。

### 1.2 输出描述：

每组测试数据对应一行输出。

包括两个整数  $a, b$ 。

分别代表开始时最小需要的桃子数，和结束后老猴子最少能得到的桃子数。

### 1.3 输入例子：

```
5
1
0
```

### 1.4 输出例子：

```
3121 1025
1 1
```

## 2 解题思路

### 2.1 求总的桃子数

假设桃子一起有  $x$  个，第  $i$  只猴子用  $a_i$  表示，第一只猴子拿走的桃子数为： $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ 。第二只猴子拿走的桃子数为： $a_2 = \frac{4a_1 - 1}{5}$ ，第三只猴子拿走的桃子数为： $a_3 = \frac{4a_2 - 1}{5}$ ，……以此类推。

根据分析有递推关系：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4a_{n-1} - 1}{5} \\ \Leftrightarrow 5a_n &= 4a_{n-1} - 1 \\ \Leftrightarrow 5(a_n + 1) &= 4(a_{n-1} + 1) \end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (a_1 + 1) \\ \Leftrightarrow a_n &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (a_1 + 1) - 1 \end{aligned}$$

又  $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$  代入可得：

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{5}(x - 1) + 1\right) - 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{4^{n-1}}{5^n} (x + 4) - 1 \end{aligned}$$

因为  $a_n$  为整数，所以  $x + 4$  是  $5^n$  的倍数。要取  $x$  最小，令  $x + 4 = 5^n$ ，得：

$$x = 5^n - 4$$

即为所求的总的桃子数。

### 2.2 所有小猴子分得的桃子数

所有小猴子分得的桃子数：

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n a_i \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^n \left( \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} (a_1 + 1) - 1 \right) \\ \Leftrightarrow &(a_1 + 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} - n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + 1) \left( \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}} \right) - n$$

又,  $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ ,  $x = 5^n - 4$ , 得:

$$a_1 = 5^{n-1} - 1$$

再得:

$$5^{n-1} \left( \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}} \right) - n$$

$$\Leftrightarrow 4 * 5^{n-1} - 4^n - n$$

因此小猴子们分的桃子总数为:

$$5^n - 4^n - n$$

### 2.3 老猴子最后获得的桃子数

$$5^n - 4 - (5^n - 4^n - n)$$

$$4^n + n - 4$$