

过年回家

1 题目描述

NowCoder 今年买了一辆新车,他决定自己开车回家过年。回家过程中要经过 n 个大小收费站,每个收费站的费用不同,你能帮他计算一下最少需要给多少过路费吗?

1.1 输入描述:

输入包含多组数据,每组数据第一行包含两个正整数 m ($1 \leq m \leq 500$) 和 n ($1 \leq n \leq 30$),其中 m 表示接下来输入的行数, n 表示有 n 个收费站,编号依次为 $1, 2, \dots, n$ 。出发地的编号为 0 ,终点的编号为 n ,即需要从 0 到 n 。

紧接着 m 行,每行包含三个整数 f, t, c , ($0 \leq f, t \leq n; 1 \leq c \leq 10$),分别表示从编号为 f 的地方开到 t ,需要交 c 元的过路费。

1.2 输出描述:

对应每组数据,请输出至少需要交多少过路费。

1.3 输入例子:

```
8 4
0 1 10
0 2 5
1 2 2
1 3 1
2 1 3
2 3 9
2 4 2
3 4 4
```

1.4 输出例子:

```
7
```

2 解题思路

根据题意,可以根据输入构造一个有向图,其中出发地和收费站表示图的顶点,过路费表示有向边的权重。要求出发地到终点的最少收费,等价于求起点和终点向短路径,可以使用 Dijkstra

算法进行处理。

3 Dijkstra 算法

3.1 定义概览

Dijkstra(迪杰斯特拉)算法是典型的单源最短路径算法，用于计算一个节点到其他所有节点的最短路径。主要特点是以起始点为中心向外层层扩展，直到扩展到终点为止。**Dijkstra** 算法是很有代表性的最短路径算法，在很多专业课程中都作为基本内容有详细的介绍，如数据结构，图论，运筹学等等。**注意该算法要求图中不存在负权边。**

问题描述：在无（有）向图 $G=(V,E)$ 中，假设每条边 $E[i]$ 的长度为 $w[i]$ ，找到由顶点 V_0 到其余各点的最短路径。（单源最短路径）

3.2 算法描述

1) 算法思想：

设 $G=(V,E)$ 是一个带权有向图，把图中顶点集合 V 分成两组，第一组为已求出最短路径的顶点集合（用 S 表示，初始时 S 中只有一个源点，以后每求得一条最短路径，就将加入到集合 S 中，直到全部顶点都加入到 S 中，算法就结束了），第二组为其余未确定最短路径的顶点集合（用 U 表示），按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入 S 中。在加入的过程中，总保持从源点 v 到 S 中各顶点的最短路径长度不大于从源点 v 到 U 中任何顶点的最短路径长度。此外，每个顶点对应一个距离， S 中的顶点的距离就是从 v 到此顶点的最短路径长度， U 中的顶点的距离，是从 v 到此顶点只包括 S 中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。

2) 算法步骤：

- 初始时， S 只包含源点，即 $S=\{v\}$ ， v 的距离为 0。 U 包含除 v 外的其他顶点，即： $U=\{\text{其余顶点}\}$ ，若 v 与 U 中顶点 u 有边，则 $\langle u,v \rangle$ 正常有权值，若 u 不是 v 的出边邻接点，则 $\langle u,v \rangle$ 权值为 ∞ 。
- 从 U 中选取一个距离 v 最小的顶点 k ，把 k ，加入 S 中（该选定的距离就是 v 到 k 的最短路径长度）。
- 以 k 为新考虑的中间点，修改 U 中各顶点的距离；若从源点 v 到顶点 u 的距离（经过顶点 k ）比原来距离（不经过顶点 k ）短，则修改顶点 u 的距离值，修改后的距离值的顶点 k 的距离加上边上的权。
- 重复步骤 b 和 c 直到所有顶点都包含在 S 中。

3.3 举例说明

根据例子的输入构造有向图，然后使用 **Dijkstra** 算法求最短路径，路径的构造如图 1 所示。

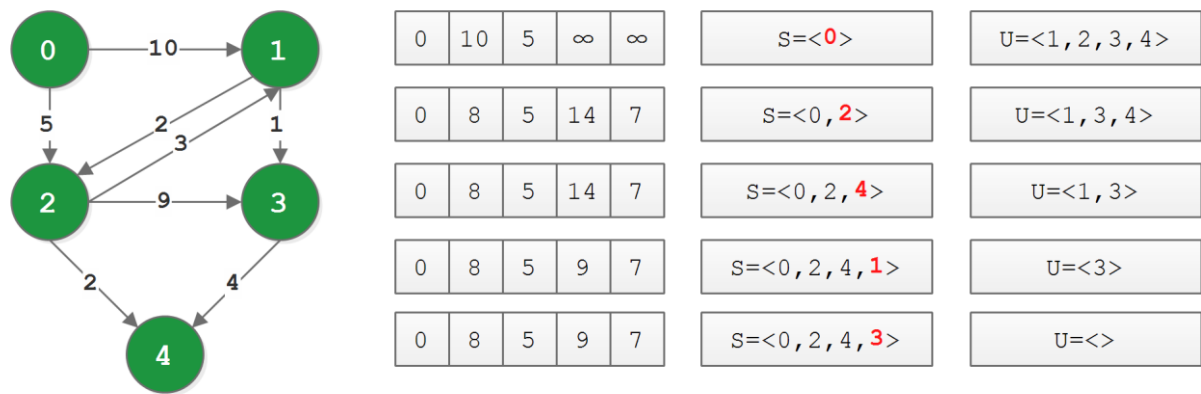


图 1 Dijkstra 构造最短路径