

# 一笔画

## 1 题目描述

咱们来玩一笔画游戏吧,规则是这样的:有一个连通的图,能否找到一个恰好包含了所有的边,并且没有重复的路径。

### 1.1 输入描述:

输入包含多组数据。每组数据的第一行包含两个整数  $n$  和  $m$  ( $2 \leq n, m \leq 1000$ ), 其中  $n$  是顶点的个数,  $m$  是边的条数。紧接着有  $m$  行, 每行包含两个整数  $from$  和  $to$  ( $1 \leq from, to \leq n, from \neq to$ ), 分别代表边的两端顶点。边是双向的, 并且两个顶点之间可能不止一条边。

### 1.2 输出描述:

对应每一组输入, 如果能一笔画则输出 “Yes”; 否则输出 “No”。

### 1.3 输入例子:

```
3 3
1 2
2 3
1 3
4 7
1 2
2 1
1 3
1 4
1 4
2 3
4 3
```

### 1.4 输出例子:

```
Yes
No
```

## 2 解题思路

题目要求一个连通的有向图是否可以一笔画完。这是一个可行遍性问题, 即从图中一个顶点出发不重复地遍历完所有的边并回到起始顶点, 这种回路是欧拉回路。在解答该问题前先对欧拉回

路相关的内容进行介绍。

## 2.1 欧拉回路

### 2.1.1 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图

无向图：

- 1) 设  $G$  是连通无向图，则称经过  $G$  的每条边一次并且仅一次的路径为欧拉通路；
- 2) 如果欧拉通路是回路（起点和终点是同一个顶点），则称此回路为欧拉回路（Euler circuit）；
- 3) 具有欧拉回路的无向图  $G$  称为欧拉图（Euler graph）。

有向图：

- 1) 设  $D$  是有向图， $D$  的基图连通，则称经过  $D$  的每条边一次并且仅一次的有向路径为有向欧拉通路；
- 2) 如果有向欧拉通路是有向回路，则称此有向回路为有向欧拉回路（directed Euler circuit）；
- 3) 具有有向欧拉回路的有向图  $D$  称为有向欧拉图（directed Euler graph）。

图 1 是有向图和无向图。

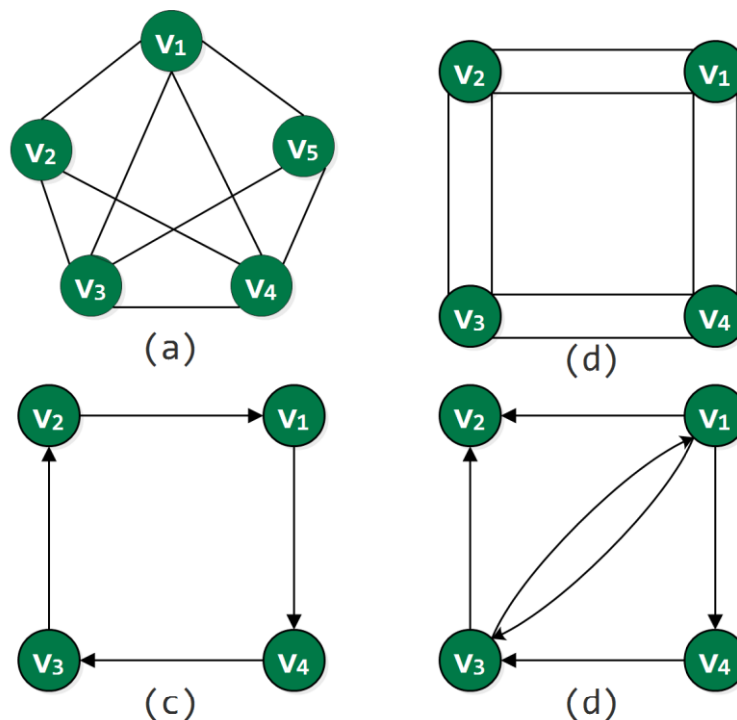


图 1 有向图和无向图

### 2.1.2 定理及推论

欧拉通路和欧拉回路的判定是很简单的，请看下面的定理及推论。

**定理 2.1** 无向图  $G$  存在欧拉通路的充要条件是：

$G$  为连通图，并且  $G$  仅有两个奇度结点（度数为奇数的顶点）或者无奇度结点。

**推论 2.1：**

- 1) 当  $G$  是仅有两个奇度结点的连通图时， $G$  的欧拉通路必以此两个结点为端点。
- 2) 当  $G$  是无奇度结点的连通图时， $G$  必有欧拉回路。
- 3)  $G$  为欧拉图（存在欧拉回路）的充分必要条件是  $G$  为无奇度结点的连通图。

例如图 2-1(a)所示的无向图，存在两个奇度顶点  $v_2$  和  $v_5$ ，所以存在欧拉通路，且欧拉通路必以这两个顶点为起始顶点和终止顶点；该无向图不存在欧拉回路。图 2-1(b)所示的无向图为欧拉图。

**定理 2.2** 有向图  $D$  存在欧拉通路的充要条件是：

$D$  为有向图， $D$  的基图连通，并且所有顶点的出度与入度都相等；或者除两个顶点外，其余顶点的出度与入度都相等，而这两个顶点中一个顶点的出度与入度之差为 1，另一个顶点的出度与入度之差为 -1。

**推论 2.2：**

- 1) 当  $D$  除出、入度之差为 1，-1 的两个顶点之外，其余顶点的出度与入度都相等时， $D$  的有向欧拉通路必以出、入度之差为 1 的顶点作为始点，以出、入度之差为 -1 的顶点作为终点。
- 2) 当  $D$  的所有顶点的出、入度都相等时， $D$  中存在有向欧拉回路。
- 3) 有向图  $D$  为有向欧拉图的充分必要条件是  $D$  的基图为连通图，并且所有顶点的出、入度都相等。

例如图 2-1(c)所示的有向图，顶点  $v_2$  和  $v_4$  入度和出度均为 1；顶点  $v_1$  的出度为 2、入度为 1，二者差值为 1；顶点  $v_3$  的出度为 1、入度为 2，二者相差为 -1；所以该有向图只存在有向欧拉通路，且必须以顶点  $v_1$  为始点，以顶点  $v_3$  为终点。图 2-1(d)所示的有向图不存在有向欧拉通路。

## 2.2 解题步骤

首先根据输入构造图的邻接矩阵，通过邻接矩阵判断图是否连通，不连通说明不可以一笔画完，如果连通，再判断图是否有奇度顶点，有就不能一笔画完，没有就说明可以一笔画完。