放苹果

1 题目描述

把 M 个同样的苹果放在 N 个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放，问共有多少种不同的分法？

注意：5、1、1 和 1、5、1 是同一种分法，即顺序无关。

1.1 输入描述:

输入包含多组数据。

每组数据包含两个正整数 m 和 n（1≤m，n≤20）。

1.2 输出描述:

对应每组数据，输出一个整数 k，表示有 k 种不同的分法。

1.3 输入例子:

73

1.4 输出例子:

8

2 解题思路

2.1 解法一

放苹果，后一个盘子不能比前一个盘子放的平果数多。可以用动态规划算法实现，但是存在子问题重叠，时间复杂度高。

2.2 解法二

设 f(m,n)为 m 个苹果，n 个盘子的放法数目，则先对 n 作讨论，

- 当 n>m：必定有 n-m 个盘子永远空着，去掉它们对摆放苹果方法数目不产生影响。即 if(n>m)f(m,n)=f(m,m)
- 当 n<=m：不同的放法可以分成两类：

1） 有至少一个盘子空着，即相当于 f(m,n)=f(m,n-1);

2） 所有盘子都有苹果，相当于可以从每个盘子中拿掉一个苹果，不影响不同放法的数目，即 f(m,n)=f(m-n,n). 而总的放苹果的放法数目等于两者的和，即 f(m,n)=f(m,n-1)+f(m-n,n)递归出口条件说明：当 n=1 时，所有苹果都必须放在一个盘子里，所以返回 1；当没有苹果可放时，定义为 1 种放法；递归的两条路，第一条 n 会逐渐减少，终会到达出口 n==1;第二条 m 会逐渐减少，因为 n>m 时，我们会 returnf(m,m) 所以终会到达出口 m==0.

综上递推公式为：

$$f(m,n)=\begin{cases} 1 & m=0\ or\ n=1 \\ f(m,m) & n>m>0 \\ f(m,n-1)+f(m-n,n) & m\geq n>1 \end{cases}$$

2.2 解法三

该问题可以变形为：求将一个整数 m 划分成 n 个数有多少种情况

dp[m][n]=dp[m-n][n]+dp[m-1][n-1];

对于变形后的问题，存在两种情况：

1） n 份中不包含 1 的分法，为保证每份都>=2，可以先拿出 n 个 1 分到每一份，然后再把剩下的 m-n 分成 n 份即可，分法有:dp[m-n][n]

2） n 份中至少有一份为 1 的分法，可以先那出一个 1 作为单独的 1 份，剩下的 m-1 再分成 n-1 份即可，分法有：dp[m-1][n-1]

3） 要求可以放苹果的数，m 可以被划分为 1 到 k(k=min{n,m})，所以总的方置方法数有 dp[m][1]+...+dp[m][k]

这种方式和解法二非常相似，只是思考的角度不一样。