

包含一

1 题目描述

NowCoder 总是力争上游，凡事都要拿第一，所以他对“1”这个数情有独钟。爱屋及乌，他也很喜欢包含 1 的数，例如 10、11、12……。你能帮他统计一下有多少个包含 1 的正整数吗？

1.1 输入描述：

输入有多组数据，每组数据包含一个正整数 n ，($1 \leq n \leq 2147483647$)。

1.2 输出描述：

对应每组输入，输出从 1 到 n （包含 1 和 n ）之间包含数字 1 的正整数的个数。

1.3 输入例子：

```
1
9
10
20
```

1.4 输出例子：

```
1
1
2
11
```

2 解题思路

假设有数字 $X(n) = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0$ ， x_i 上的权重是 10^i 。

先考虑 $0 \sim 9_n 9_{n-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ ，中出现 1 的数字个数，假设它是 $P(n)$ ，它由三部分组成：

- $0 \sim 9_{n-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ ，含有 1 的数字数目是 $P(n-1)$
- $1_n 0_{n-1} \dots 9_2 9_1 9_0 \sim 1_n 9_{n-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ ，含有 1 的数字数目是 10^{n-1}
- $1 < j_i < x_i$ ， $j_i 0_{i-1} \dots 0_2 0_1 0_0 \sim j_i 9_{i-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ 中含有 1 的数字数目是 $P(n-1)$ ， j_i 可以取 8 个数字。

所以 $P(n) = P(n-1) + 10^{n-1} + 8 * P(n-1) = 9 * P(n-1) + 10^{n-1}$ ，又 $n = 0$ 时， $P(n) = 1$ ，综上有：

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 9 * P(n-1) + 10^{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

再考虑 $X(n)$ ，从右到左处理 $X(n)$ 上的每一位，假设当前处理第 i 位。则要分三种情况：

第一种： $x_i = 0$ ，则 $x_i x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 与 $x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 含有 1 的数字个数相同，则 $F(i) = F(i-1)$ 。

第二种： $x_i = 1$ ，则 $x_i x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 包含 1 的由两部分组成：

- $0 \sim 9_{i-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ 中含有 1 的数字数，为 $P(i-1)$
- $x_i 0_{i-1} \dots 0_2 0_1 0_0 \sim x_i x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 中含有 1 的数字，为 $X(i-1) + 1$

则有 $F(i) = P(i-1) + X(i-1) + 1$

第三种： $x_i > 1$ ，则 $x_i x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 包含 1 的由四部分组成：

- $0 \sim x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 中含有 1 的数字数，为 $P(i-1)$
- $1_i 0_{i-1} \dots 0_2 0_1 0_0 \sim 1_i 9_{i-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ 中含有 1 的数字数，为 10^{i-1}
- $1 < j_i < x_i$ ， $j_i 0_{i-1} \dots 0_2 0_1 0_0 \sim j_i 9_{i-1} \dots 9_2 9_1 9_0$ 中含有 1 的数字数，为 $P(i-1)$ 。 j_i 可以取 $x_i - 2$ 个
- $x_i 0_{i-1} \dots 0_2 0_1 0_0 \sim x_i x_{i-1} \dots x_2 x_1 x_0$ 中含有 1 的数字，为 $F(i-1)$

则有 $F(i-1) = P(i-1) + 10^{i-1} + (x_i - 2)P(i-1) + F(i-1) = (x_i - 1)P(i-1) + 10^{i-1} + F(i-1)$

综合有：

当 $n = 0$ 时， $X(n) = x_0$

$$F(n) = 1$$

当 $n > 0$ 时， $X(n) = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0$

$$F(n) = \begin{cases} F(n-1) & x_n = 0 \\ P(n-1) + X(n-1) + 1 & x_n = 1 \\ (x_n - 1)P(n-1) + 10^{n-1} + F(n-1) & x_n > 1 \end{cases}$$