猴子分桃

问题描述

老猴子辛苦了一辈子，给那群小猴子们留下了一笔巨大的财富——一大堆桃子。老猴子决定把这些桃子分给小猴子。

第一个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但还多出一个。它把剩下的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

第二个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但又多出一个。它把多出的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

后来的小猴子都如此照办。最后剩下的桃子全部留给老猴子。

这里有 n 只小猴子，请你写个程序计算一下在开始时至少有多少个桃子，以及最后老猴子最少能得到几个桃子。

解题思路

求总的桃子数

假设桃子一起有 x 个，第 i 只猴子用a_i表示，第一只儿子拿走的桃子数为：$a_1 = \frac{1}{5}(x-1)$。第二只儿子拿走的桃子数为：$a_2 = \frac{4a_1-1}{5}$，第三只猴子拿走的桃子数为：$a_3 = \frac{4a_2-1}{5}$，••••••以此类推。

根据分析有递推关系：

$$a_n = \frac{4a_{n-1}-1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5a_n = 4a_{n-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 5(a_n + 1) = 4(a_{n-1} + 1)$$

得：

$$a_n + 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}(a_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}(a_1 + 1) - 1$$

又$a_1 = \frac{1}{5}(x-1)$代入可得：

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5}(x-1) + 1\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{4^{n-1}}{5^n}(x+4) - 1$$

因为a_n为整数，所以$x+4$是5^n的倍数。要取 x 最小，令$x+4=5^n$，得：

$$\boldsymbol{x = 5^n - 4}$$

即为所求的总的桃子数。

所有小猴子分得的桃子数

所有小猴子分得的桃子数：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}(a_1+1) - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (a_1+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} - n$$

$$\Leftrightarrow (a_1+1)\left(\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}\right) - n$$

又，$a_1 = \frac{1}{5}(x-1)$，$x = 5^n - 4$，得：

$$a_1 = 5^{n-1} - 1$$

再得：

$$5^{n-1}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}\right) - n$$

$$\Leftrightarrow 4 * 5^{n-1} - 4^n - n$$

因此小猴子们分的桃子总数为：

$$\boldsymbol{5^n - 4^n - n}$$

老猴子最后获得的桃子数

$$5^n - 4 - (5^n - 4^n - n)$$

$$\boldsymbol{4^n + n - 4}$$