

换零钱

1 题目描述

考虑仅用 1 分、5 分、10 分、25 分和 50 分这 5 种硬币支付某一个给定的金额。例如需要支付 11 分钱，有一个 1 分和一个 10 分、一个 1 分和一个 5 分、六个 1 分和一个 5 分、十一个 1 分这 4 种方式。请写一个程序，计算一个给定的金额有几种支付方式。注：假定支付 0 元有 1 种方式。

1.1 输入描述：

输入包含多组数据。每组数据包含一个正整数 n ($1 \leq n \leq 10000$)，即需要支付的金额。

1.2 输出描述：

对应每一组数据，输出一个正整数，表示替换方式的种数。

1.3 输入例子：

```
11
26
```

1.4 输出例子：

```
4
13
```

2 解题思路

假设硬币的种类数组 $t=\{1,5,10,25,50\}$ ，按大小排序。 m 表示选择有 $0 \sim m$ 种硬币可以选择，面值是 $t[0]$ 、 \dots 、 $t[m-1]$ 。要换的钱的数目是 n 。本题可以使用动态规划算法解决。

2.1 递归方式

假设有 n 钱待找零，当前可以供选择的方式为 m 种， $f(n,m)$ 表示共的待找零方案，则有递推公式：

$$f(n,m) \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \text{ or } m \leq 0 \\ f(n - t[m-1], m) + f(n, m-1) & n > 0 \text{ and } m > 0 \end{cases}$$

当 $n=0$, $f(n,m)=1$, 表示已经找零完毕, 再找 0 元只有一种方案。

当 $n<0$ 表示这种方案找零不合理, 不能完成找零操作, 而 $m\leq 0$ 说明找零还没有完成, 但是已经没有可以供选择的硬币了。所以 $f(n,m)=0$ 。

对于可以找零, 并且还有硬币选择的情况找零有两种方案。第一种是: 选择一个可以选择的最大面值的, 剩下的钱再进行找零操作, 同时硬币种类的选择方案没有变化, 即为: $f(n-t[m-1],m)$ 。第二种是: 现在和以后都不选择本次可以选择的最大的硬币面值, 然后再进行找零操作。即 $f(n,m-1)$ 。

2.2 非递归方式

假设有 n 钱待找零, 当前可以供选择的方式为 m 种, 创建一个长度为 $n+1$ 的数组 r , $r[i]$ 表示找零为 i 的找零方法为 $r[i]$ 。初始时 r 的第一个元素为 1, 其它元素都为 0, 即 $r[0]=1$, $r[i \neq 0]=0$ 。

步骤一、因为硬币的面值都按大小排序, 从最小的面值开始选择, 先选择最小的一个 $t[0]$ 。对于找零为大于 0 的情况只有从 $t[0]$ 开始才可能有找零的情况。对于 $i \geq t[0]$ 有 $r[i]=r[i]+r[i-t[0]]$ 。这是只有一种硬币可以选择的情况。

步骤二、当有 2 种硬币可以选择, 在步骤一已经求出了只有一种硬币可供选择的情况, 现在可以选择第二种硬币, 那么只有找零数 $i \geq t[0]$ 时才可以选择第二种硬币, 所以有 $r[i]=r[i]+r[i-t[1]]$ 。

同理可以求得有 3、4、...。具体实现详见代码。