

猴子分桃

问题描述

老猴子辛苦了一辈子，给那群小猴子们留下了一笔巨大的财富——一大堆桃子。老猴子决定把这些桃子分给小猴子。

第一个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但还多出一个。它把剩下的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

第二个猴子来了，它把桃子分成五堆，五堆一样多，但又多出一个。它把多出的一个留给老猴子，自己拿走其中的一堆。

后来的小猴子都如此照办。最后剩下的桃子全部留给老猴子。

这里有 n 只小猴子，请你写个程序计算一下在开始时至少有多少个桃子，以及最后老猴子最少能得到几个桃子。

解题思路

求总的桃子数

假设桃子一起有 x 个，第 i 只猴子用 a_i 表示，第一只猴子拿走的桃子数为： $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ 。第二只猴子拿走的桃子数为： $a_2 = \frac{4a_1 - 1}{5}$ ，第三只猴子拿走的桃子数为： $a_3 = \frac{4a_2 - 1}{5}$ ，……以此类推。

根据分析有递推关系：

$$a_n = \frac{4a_{n-1} - 1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5a_n = 4a_{n-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 5(a_n + 1) = 4(a_{n-1} + 1)$$

得：

$$a_n + 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (a_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (a_1 + 1) - 1$$

又 $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ 代入可得：

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{5}(x - 1) + 1\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{4^{n-1}}{5^n} (x + 4) - 1$$

因为 a_n 为整数，所以 $x + 4$ 是 5^n 的倍数。要取 x 最小，令 $x + 4 = 5^n$ ，得：

$$x = 5^n - 4$$

即为所求的总的桃子数。

所有小猴子分得的桃子数

所有小猴子分得的桃子数：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n a_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{4}{5} \right)^{i-1} (a_1 + 1) - 1 \right) \\ \Leftrightarrow & (a_1 + 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{5} \right)^{i-1} - n \\ \Leftrightarrow & (a_1 + 1) \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n}{1 - \frac{4}{5}} \right) - n \end{aligned}$$

又， $a_1 = \frac{1}{5}(x - 1)$ ， $x = 5^n - 4$ ，得：

$$a_1 = 5^{n-1} - 1$$

再得：

$$\begin{aligned} & 5^{n-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n}{1 - \frac{4}{5}} \right) - n \\ \Leftrightarrow & 4 * 5^{n-1} - 4^n - n \end{aligned}$$

因此小猴子们分的桃子总数为：

$$5^n - 4^n - n$$

老猴子最后获得的桃子数

$$5^n - 4 - (5^n - 4^n - n)$$

$$4^n + n - 4$$