第三节　初等函数

- 一、指数函数
- 二、对数函数
- 三、乘幂 a^b 与幂函数
- 四、三角函数和双曲函数
- 五、反三角函数和反双曲函数
- 六、小结与思考

我们期望指数函数满足的性质：

1. $f(z)=\exp z$ 在复平面内处处解析；
2. $f'(z)=f(z)$;
3. 当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，$f(z)=e^x$,其中 $x=\operatorname{Im} z$.

$$\boxed{\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

一、指数函数

1.指数函数的定义:

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

指数函数的定义等价于关系式:

$$\left.\begin{aligned} &|\exp z| = e^x, \\ &\mathrm{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi, \end{aligned}\right\}(\text{其中}k\text{为任何整数})$$

指数函数 $\exp z$ 可以用 e^z 来表示.

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

注意 e^z 没有幂的意义,只是代替 $\exp z$ 的符号.

2. 加法定理 $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

证 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

左端 $= \exp z_1 \cdot \exp z_2$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)]$$
$$+ i[(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

$= \exp(z_1 + z_2) =$ 右端.

$\exp z$ 的周期是 $2k\pi i$,

即 $e^{z+2k\pi i}=e^{z}\cdot e^{2k\pi i}=e^{z}$. (其中$k$为任何整数)

该性质是实变指数函数 e^{x}所没有的.

Rolle 定理不再成立：因为 $(e^{z})'=e^{z}\neq 0.$

例1 设 $z=x+iy$, 求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 因为 $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

所以其模 $\left|e^{z}\right|=e^{x}$, 实部 $\mathrm{Re}(e^{z})=e^{x}\cos y$.

$$(1)\ e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)},$$

$$\left|e^{i-2z}\right|=e^{-2x};$$

$$(2)\ e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi},$$

$$\left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2};$$

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+yi}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}},$$

$$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

二、对数函数

1. 定义

满足方程 $e^w = z\ (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数，记为 $w = \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z.$

由于 $\mathrm{Arg}z$ 为多值函数，所以对数函数 $w = f(z)$ 也是多值函数，并且每两值相差 $2\pi i$ 的整数倍.

令 $w = u + iv,\ z = re^{i\theta}$. 则 $e^u = r, v = \theta.$

如果将 $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z$ 中 $\mathrm{Arg}z$ 取主值 $\arg z$,

那末 $\mathrm{Ln}z$ 为一单值函数, 记为 $\ln z$, 称为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值.

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

其余各值为 $\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

对于每一个固定的 k, 上式确定一个单值函数,

称为 $\mathrm{Ln}z$ 的一个分支.

特殊地, 当 $z = x > 0$ 时, $\mathrm{Ln}z$ 的主值 $\ln z = \ln x$,

是实变数对数函数.

例2 求 $\mathrm{Ln}2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及与它们相应的主值.

解 因为 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i$,

所以 $\mathrm{Ln}2$ 的主值就是 $\ln 2$.

因为 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1)$

$$= (2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

所以 $\mathrm{Ln}(-1)$ 的主值就是 πi.

注意: 在实变函数中, 负数无对数, 而复变数对数函数是实变数对数函数的拓广.

例3 解方程 $e^z-1-\sqrt{3}i=0.$

解 因为 $e^z=1+\sqrt{3}i,$

所以 $z=\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$

$$=\ln\left|1+\sqrt{3}i\right|+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

例4 求下列各式的值：

$$(1)\mathrm{Ln}(-2+3i);\quad (2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i);\quad (3)\mathrm{Ln}(-3).$$

解 $(1)\mathrm{Ln}(-2+3i)$

$$=\ln\left|-2+3i\right|+i\mathrm{Arg}(-2+3i)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}+2k\pi\right).$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln\left|3-\sqrt{3}i\right|+i\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(\arctan\frac{-\sqrt{3}}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right). \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(3)\mathrm{Ln}(-3)=\ln\left|-3\right|+i\mathrm{Arg}(-3)$$

$$=\ln 3+(2k+1)\pi i. \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

2. 性质

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$,

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$,

(3) 在除去负实轴(包括原点)的复平面内,主值支和其它各分支处处连续,处处可导,且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}.$$

证 (3) 设 $z = x + iy$， 当 $x < 0$ 时,

$$\lim_{y \to 0^-} \arg z = -\pi, \qquad \lim_{y \to 0^+} \arg z = \pi,$$

所以,除原点与负实轴,在复平面内其它点 $\ln z$ 处处连续.

$z = e^w$ 在区域 $-\pi < \arg z < \pi$ 内的反函数 $w = \ln z$ 是单值的,

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}e^w}{\mathrm{d}w}} = \frac{1}{z}.$$

[证毕]

三、乘幂 a^b 与幂函数

1. 乘幂的定义

设 a 为不等于零的一个复数, b 为任意一个复数, 乘幂 a^b 定义为 $e^{b\text{Ln}a}$, 即 $a^b = e^{b\text{Ln}a}$.

注意:

由于 $\text{Ln}a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$ 是多值的, 因而 a^b 也是多值的.

(1) 当 b 为整数时, $a^b = e^{b\text{Ln}a} = e^{b[\ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]}$

$$= e^{b(\ln|a| + i\arg a) + 2kb\pi i} \boxed{= e^{b\ln a},} \quad a^b \text{具有单一的值.}$$

(2) 当 $b = \dfrac{p}{q}$ (p与q为互质的整数, $q > 0$)时,

$$a^b = e^{\frac{p}{q}[\ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|a| + i\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)\right]$$

a^b具有 q 个值, 即取 $k = 0,1,2,\cdots,(q-1)$时相应的值.

(3) b为其它复数值时,

$$a^{b} = e^{b[\ln|a| + i(\arg a + 2kp)]} = e^{b\ln|a| + ib(\arg a + 2kp)}$$

a^b具有 无穷多个 值。

$$a^{b} = e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]}$$

特殊情况:

1) 当 $b = n$ (正整数)时,

$$a^n = e^{n\mathrm{Ln}a} = e^{\mathrm{Ln}a+\mathrm{Ln}a+\cdots+\mathrm{Ln}a} \qquad \text{(指数 } n \text{ 项)}$$

$$= e^{\mathrm{Ln}a} \cdot e^{\mathrm{Ln}a} \cdot \cdots \cdot e^{\mathrm{Ln}a} \qquad \text{(因子 } n \text{ 个)}$$

$$= a \cdot a \cdot \cdots \cdot a. \qquad \text{(因子 } n \text{ 个)}$$

2) 当 $b = \frac{1}{n}$ (分数)时,

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}a} = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a + 2k\pi}{n}\right]$$

$$=|a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{a},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(n-1).$

如果 $a=z$ 为一复变数,就得到一般的幂函数

$w=z^{b}$;

当 $b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 时,就分别得到通常的幂函 数 $w=z^{n}$

及 $z=w^{n}$ 的反函数 $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}.$

例5 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 其中 $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots.$

$i^i = e^{i\mathrm{Ln}i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)} \boxed{= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}$ 其中 $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots.$

i^i 的值全是实数，其主值是 $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

例6 求 $(1+i)^i$ 的辐角的主值.

解 $(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i)]}$

$$= e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4}i + 2k\pi i\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

故 $(1+i)^i$ 的辐角的主值为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

2. 幂函数的解析性

(1) 幂函数 z^n 在复平面内是单值解析的,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数, 具有n个分支.

它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z}\right)' = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

(3) 幂函数 $w = z^b$ (除去 $b = n$ 与 $\frac{1}{n}$ 两种情况外)

也是一个多值函数,

当 b 非有理数时,a^b是无穷多值的.

它的 各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,且

$$(z^b)' = bz^{b-1}.$$

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy} = \cos y + i\sin y,\qquad e^{-iy} = \cos y - i\sin y,$

将两式相加与相减, 得

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},\qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

现在把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

定义余弦函数为： $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

正弦函数为： $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

容易证明, $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

正弦函数和余弦函数都以 2π 为周期.

$$\sin(z + 2p) = \sin z, \quad \cos(z + 2p) = \cos z.$$

正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi, \\ \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi. \end{cases}$$

当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y,$$

$$\sin yi = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\sinh y.$$

(3) $$\begin{cases} \cos(x+yi) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y, \\ \sin(x+yi) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y. \end{cases}$$

当 $y\to\infty$时, $|\sin yi|\to\infty$, $|\cos yi|\to\infty$.

(注意：这是与实变函数完全不同的)

其他复变数三角函数的定义

正切函数 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, 余切函数 $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$, 余割函数 $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

与 $\sin z$ 和 $\cos z$ 类似,我们可以讨论它们的周期性,奇偶性,解析性.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

例7 确定 $\tan z$ 的实部与虚部.

解 设 $z = x + iy$, $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$= \frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)} = \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + i \cosh y \sinh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y}$$

$$= \boxed{\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x + 2\sinh^2 y}} + i \boxed{\frac{\sinh 2y}{2\cos^2 x + 2\sinh^2 y}}.$$

$= \mathrm{Re}(\tan z)$ $= \mathrm{Im}(\tan z)$

例8 解方程 $\sin z = i\sinh 1.$

解 设 $z = x + iy$, $\sin z = \sin(x + yi)$

$$\sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = i\sinh 1,$$

故有 $\sin x\cosh y = 0$, $\cos x\sinh y = \sinh 1$

因为 $\cosh y \neq 0$, 所以 $\sin x = 0$, $x = k\pi$,

将 $x = k\pi$ 代入$\cos x\sinh y = \sinh 1$

$\sinh y = (-1)^k \sinh 1$, $y = (-1)^k.$

即 $z = k\pi + (-1)^k i, k \in \mathrm{N}.$

例9 求 $\cos(1+i)$ 和 $\tan(3-i)$ 的值.

解 $$\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1$$

$$=\cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1.$$

$$\tan(3-i)=\frac{\sin(3-i)}{\cos(3-i)}=\frac{\sin 3\cos i-\cos 3\sin i}{\cos 3\cos i+\sin 3\sin i}$$

$$=\frac{\sin 3\cosh 1 - i\cos 3\sinh 1}{\cos 3\cosh 1 + i\sin 3\sinh 1}$$

$$=\frac{(\sin 3\cosh 1 - i\cos 3\sinh 1)(\cos 3\cosh 1 - i\sin 3\sinh 1)}{(\cos 3\cosh 1)^2 + (\sin 3\sinh 1)^2}$$

$$=\frac{\sin 3\cos 3 - i\cosh 1\sinh 1}{\cos^2 3\cosh^2 1 + \sin^2 3\cosh^2 1 - \sin^2 3\cosh^2 1 + \sin^2 3\sinh^2 1}$$

$$=\frac{\sin 6 - i\sinh 2}{2(\cosh 1)^2 - 2(\sin 3)^2}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. 双曲函数的定义

我们定义双曲余弦函数 为 $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数为 $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,

双曲正切函数为 $\tanh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

当 z 为实数 x 时, 它与高等数学中的双曲 函数的定义完全一致.

容易证明, $\sinh z$ 是奇函数, $\cosh z$ 是偶函数.

它们都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数,

它们的导数分别为

$$(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi = \cos y, \qquad \sinh yi = i \sin y.$$

$$\begin{cases} \cosh(x + yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ \sinh(x + yi) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \end{cases}$$

例10 解方程 $\left|\tanh z\right| = 1.$

解 $\tanh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$, $\left|e^{2z} - 1\right| = \left|e^{2z} + 1\right|$,

两边平方，并令 $e^{2z} = u + iv$,

$$(u-1)^2 + v^2 = (u+1)^2 + v^2 \Rightarrow u = 0,$$

因为 $u = \mathrm{Re}(e^{2z}) = e^{2x}\cos 2y$,

所以 $\cos 2y = 0 \Rightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

故 $\left|\tanh z\right| = 1$ 的解是$y = \dfrac{p}{4} + \dfrac{kp}{2}$ 的所有复数z.

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

五、反三角函数和反双曲函数

1. 反三角函数的定义

设 $z=\cos w$, 那么称 w 为 z 的反余弦函数，

记作 $w=\text{Arc}\cos z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$,

方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$, 两端取对数得

$$\text{Arc}\cos z=-i\text{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

同样可以定义反正弦函数和反正切函数, 重复以上步骤, 可以得到它们的表达式:

$$\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\mathrm{Arctan}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

2. 反双曲函数的定义

反双曲正弦 $\mathrm{Arsinh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

反双曲余弦 $\mathrm{Arcosh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

反双曲正切 $\mathrm{Artanh}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}.$

例11 求函数值 $\operatorname{Arctan}(2+3i)$.

解 $\operatorname{Arctan}(2+3i)=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+i(2+3i)}{1-i(2+3i)}$

$$=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{-3+i}{5}$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+i\left(\pi-\arctan\frac{1}{3}+2k\pi\right)\right]$$

$$=-\frac{i}{4}\ln\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}.$$

其中 $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$.

六、小结与思考

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了后者的某些基本性质，又有一些与后者不同的特性. 如:

1. 指数函数具有周期性 (周期为 $2\pi i$)

2. 负数无对数的结论不再成立

3. 三角正弦与余弦不再具有有界性

4. 双曲正弦与余弦都是周期函数

思考题

实变三角函数与复变三角函数在性质上有哪些异同?

思考题答案

两者在函数的奇偶性、周期性、可导性上是类似的, 而且导数的形式、加法定理、正余弦函数的平方和等公式也有相同的形式.

最大的区别是, 实变三角函数中, 正余弦函数都是有界函数, 但在复变三角函数中,

$|\sin z| \leq 1$ 与 $|\cos z| \leq 1$ 不再成立.