第三节 基本定理的推广
——复合闭路定理

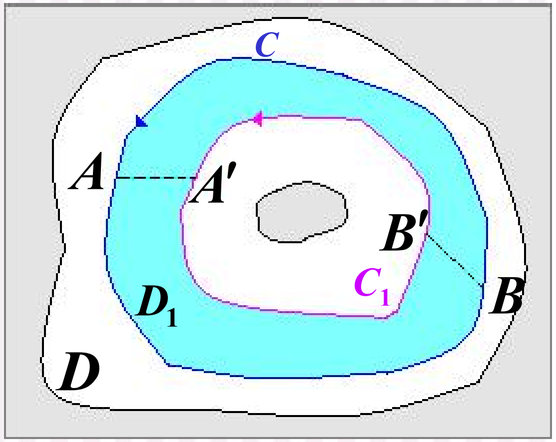
- 一、复合闭路定理
- 二、典型例题
- 三、小结与思考

一、复合闭路定理

1. 闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析，

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向)，



C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.

作两段不相交的弧段 $\overset{\frown}{AA'}$ 和 $\overset{\frown}{BB'}$,

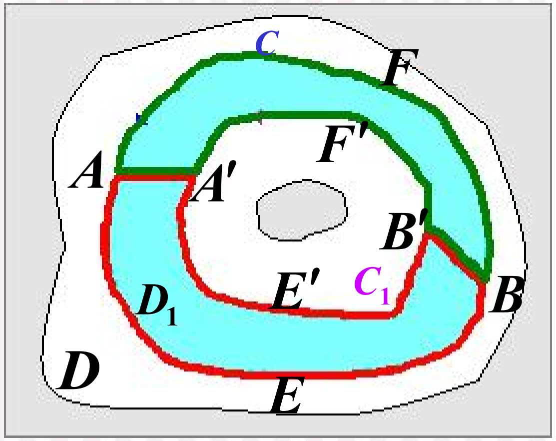
为了讨论方便,添加字符 E, E', F, F',

显然曲线 $AEBB'E'A'A, AA'F'B'BFA$ 均为封闭曲线.

因为它们的内部全含于 D,

故 $$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



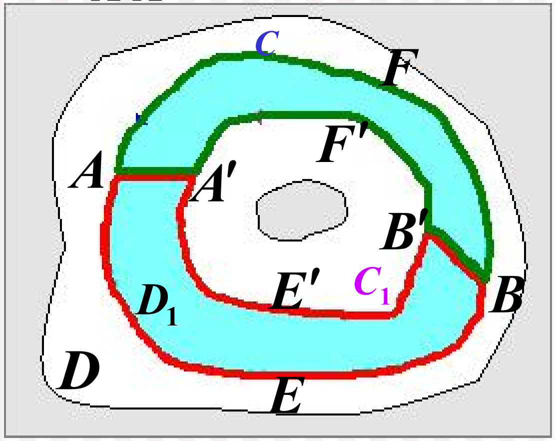
$$AEBB'E'A'A = \overset{\frown}{AEB} + \overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{B'E'A'} + \overset{\frown}{A'A},$$

$$AA'F'B'BFA = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'F'B'} + \overset{\frown}{B'B} + \overset{\frown}{BFA},$$

由 $\oint\limits_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\widehat{AA'}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\widehat{A'A}} f(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_{\widehat{B'B}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\widehat{BB'}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$



即 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0,$

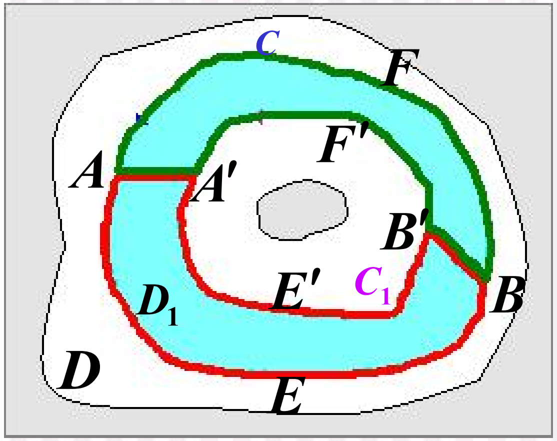
或 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z.$

如果我们把这两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ，Γ 的正方向为：

外面的闭曲线 C 按逆时针进行，

内部的闭曲线 C_1 按顺时针进行，

那末 $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$

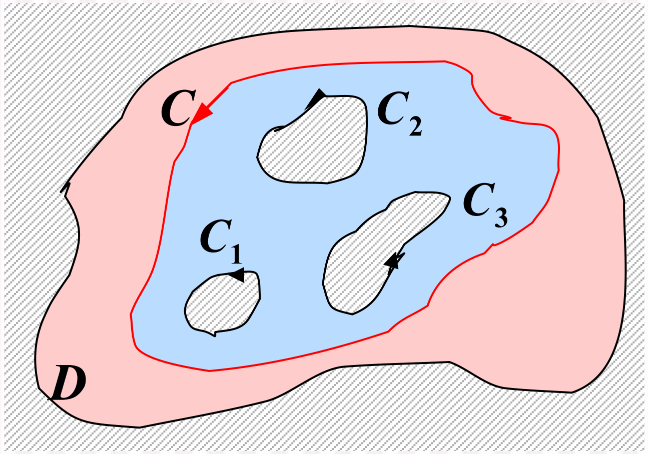


说明：在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的奇点.

解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值. 闭路变形原理

2. 复合闭路定理

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D，



如果 $f(z)$ 在 D 内解析，

那末

$$(1)\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

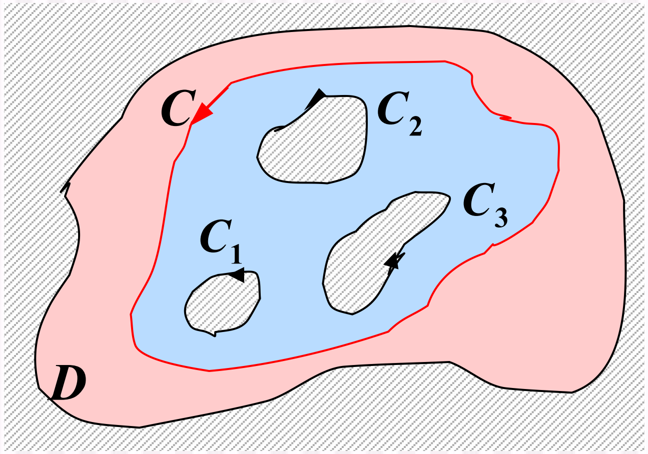
其中 C 及 C_k 均取正方向;

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

这里 Γ 为由 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成的复合闭路

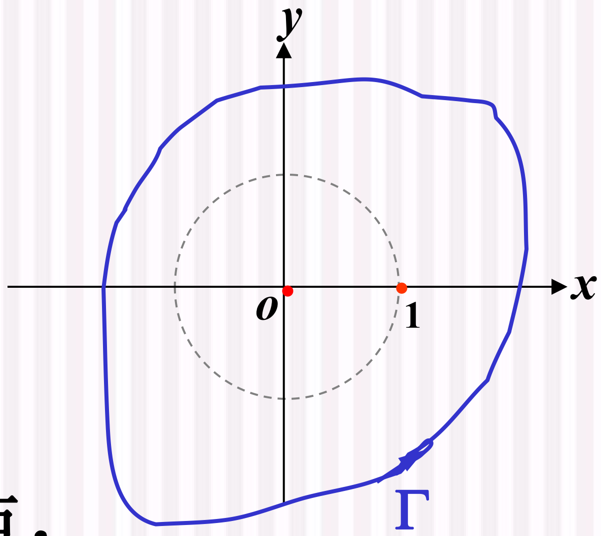
(其方向是：C 按逆时针进行，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按

顺时针进行).



二、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$, Γ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭 曲线.



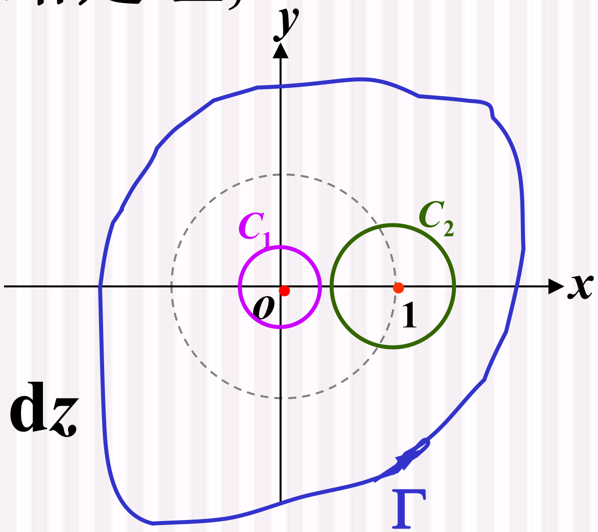
解 因为函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$,

依题意知, Γ 也包含这两个奇点,

在Γ内作两个互不包含也互 不相交的正向圆周

C_1 和 C_2， C_1 只包含奇点 $z=0$,

C_2 只包含奇点 $z=1$, 根据复合闭路定理,

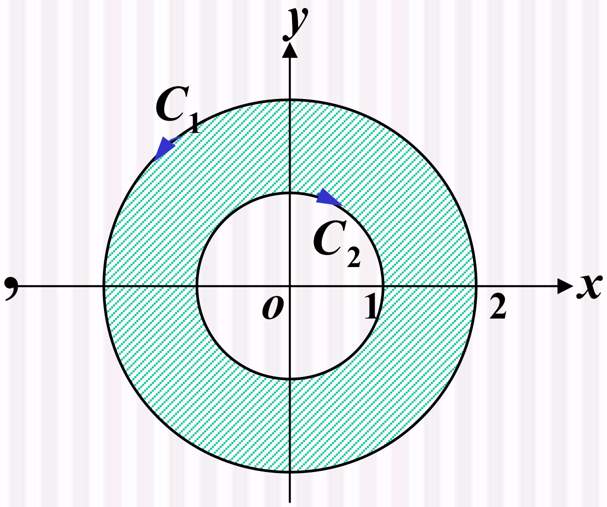


$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

$$=0+2\pi i+2\pi i+0=4\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z|=2$ 和负向圆周 $|z|=1$ 所组成.

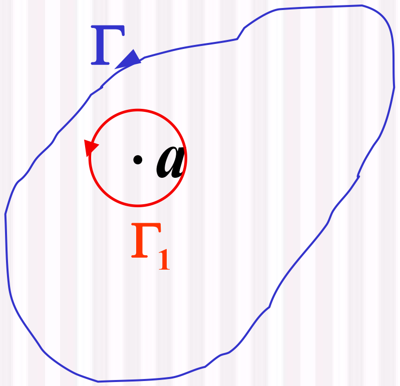


解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^{z}}{z}$ 在此圆环域和其边界上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合定理，$\oint_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z}\mathrm{d}z=0.$

例3 求 $\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为含 a 的任一简单闭路，n 为整数.



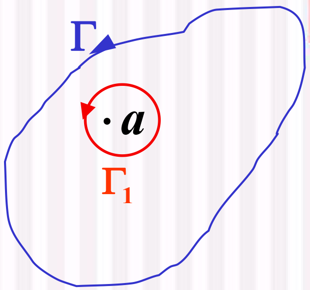
解 因为 a 在曲线 Γ 内部，

故可取很小的正数 ρ，

使 $\Gamma_1: |z-a|=\rho$ 含在 Γ 内部，

$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ 在以 $\Gamma+\Gamma_1^-$ 为边界的复连通域

内处处解析，



由复合闭路定理,

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

令 $z=a+\rho e^{i\theta}\quad 0<\theta\leq 2\pi$,

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{i\theta}}{(\rho e^{i\theta})^{n+1}}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{-in\theta}}{\rho^n}\mathrm{d}\theta$$

此结论非常重要, 用起来很方便, 因为区域不必是圆, a 也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线所围区域内即可.

故 $$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

三、小结与思考

本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理，掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

思考题

复合闭路定理在积分计算中有什么用? 要注意什么问题?

思考题答案

利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.（把不好的路径转化为好的路径）

使用复合闭路定理时, 要注意曲线的方向.