诚信保证

本人知晓我校考场规则和违纪处分条例的有关规定，保证遵守考场规则，诚实做人。 本人签字：__________

编号：__________

西北工业大学考试试题（卷）

2022－2023 学年第一学期

成绩	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

开课学院 数学与统计学院 课程 复变函数与积分变换 学时 32

考试日期 2022 年 11 月 19 日 考试时间 2 小时 考试形式（闭 ）（A）卷

考生班级		学号		姓名		课程序号—所在序号	

一、填空题 （共 10 小题，每小题 3 分， 共 30 分）

1.复数在 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$的辐角主值为$\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$。

2. 设 $f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y^2)$, 则 $f'(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=i$。

3. $(-3)^{\sqrt{5}}=3^{\sqrt{5}}\left(\cos\sqrt{5}\left(2k+1\right)\pi+i\sin\sqrt{5}\left(2k+1\right)\pi\right)$。

4. **连接 1+i 与-1-4i 的直线段的参数方程的复数形式为**$z=(1+i)+(-2-5i)t$，$0\le t\le 1$.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}z^{2n-1}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$。

6.级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$的敛散性是 发散。

7.函数 $f\left(z\right)=z^2\sin\frac{1}{z}$ 在 0 处的留数为 $-\frac{1}{3!}$ 。

8. $z=0$ 是函数 $\csc z-\frac{1}{z}$ 的孤立奇点的类型是可去奇点。(若是极点，指出级数)

9.方程 $\left(\frac{1+z}{1-2z}\right)^2=1$ 的解为 0 和 2 。

10.（二选一）（1）在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，z 平面上的圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射成 w 平面上的曲线方程为 $|w|=|1-w|$ 或 $u=\frac{1}{2}$ 。

（2）映射 $w=f(z)=z^2+4z$ 将 z 平面放大的部分为 $|z+2|>\frac{1}{2}$.。

二、(8 分) 函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}, z\neq 0\\ i, \qquad z=0\end{cases}$ 在 0 处是否极限存在，是否连续，是否可导。

证明：令 $z=x+iy$, 当 $z\neq 0$ 时, 则

$$f(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, \text{..............................(2 分)}$$

由此得 $u(x,y)=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, v(x,y)=0.$ ....(3 分)

由 $0\le\left|\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|y|\to 0$, 因此, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}=0$, ...(5 分)

而 $f(0)=i$, 则 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)\neq f(0)$, 函数 $f(z)$ 在 0 处极限存在，

……………(8 分)

但不连续，所以导数不存在.

三、计算题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $I=\int_C (x-y+ix^2)dz$，其中 C 为连接 **0** 到 $1+i$ 的直线段。

解：直线 C 的参数方程可写作

$$z(t)=(1+i)t,\ t\in[0,1].\text{......................(2 分)}$$

所以 $I=\int_C (x-y+ix^2)\mathrm{d}z=\int_0^1 it^2(1+i)\mathrm{d}t=(i-1)\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i.$ ....(6 分)

2. $I=\oint_C \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z$, C为正向圆周$|z|=2$

解：$f(z)=\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z(z-1)}$ 在正向圆周 $|z|=2$ 内有两个奇点 $z=0,1$. 分别作以

0，1 为中心的圆周 C_1,C_2,C_1与C_2互不包含，互不相交，则...(2 分)

$$I=\int_C \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z=\int_{C_1}\frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\int_{C_2}\frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z\text{..............................(6 分)}$$

$$=2\pi i\frac{1}{z-1}\Big|_{z=0}+2\pi i\frac{1}{z}\Big|_{z=1}=0.$$

3. $I=\oint_C \frac{1}{e^z-1}\mathrm{d}z$, C为正向圆周$|z|=7$.

解：$\frac{1}{e^z-1}$ 在 C 内的奇点有 $z=0, z=2\pi i, z=-2\pi i$，均一级极点，(2 分)

$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{e^z-1},0]=1.$..............................(3 分)

$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{e^z-1},2\pi i]=\lim_{z\to 2\pi i}\frac{z-2\pi i}{e^z-1}=\lim_{z'\to 0}\frac{z'}{e^{z'+2\pi i}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=1,$ ....(4 分)

同理, $\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{e^z-1},-2\pi i]=\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=1,$............(5 分)

由留数定理可得

$$\boldsymbol{I}=\oint_{C}\frac{1}{\boldsymbol{e}^{z}-1}\mathrm{d}\boldsymbol{z}=2\pi\boldsymbol{i}\{\operatorname{Re}\boldsymbol{s}[\frac{1}{\boldsymbol{e}^{z}-1},0]+\operatorname{Re}\boldsymbol{s}[\frac{1}{\boldsymbol{e}^{z}-1},2\pi\boldsymbol{i}]+\operatorname{Re}\boldsymbol{s}[\frac{1}{\boldsymbol{e}^{z}-1},-2\pi\boldsymbol{i}]\}$$

$=6\pi\boldsymbol{i}$.................................**(6 分)**

4. $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z\sin z}\,\mathrm{d}z.$

$\dfrac{1}{z\sin z}$在 C 内的奇点为 $z=0$,且 $z=0$ 为$\dfrac{1}{z\sin z}$的二级极点………**(2 分)**

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z\sin z},0]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{z\sin z}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-(\cos z-z\sin z)}{2z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=0.$$

……………………………**(5 分)**

由留数定理可得

$$I=\oint_C\frac{1}{z\sin z}\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z\sin z},0]=0.$$ ……………………………**(6 分)**

5. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx\ \left(a>0,b>0\right).$

设 $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$，其在上半平面奇点为 $z=bi$，且为一级极点，**(2 分)**

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2},bi]=\frac{ze^{iaz}}{z+bi}\Big|_{z=bi}=\frac{e^{-ab}}{2}.$$ ……………………………**(4 分)**

由留数定理可得

$$I=\mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx)=\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(x),bi]\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{e^{-ab}}{2}\right)=\pi e^{-ab}.$$ … **(6 分)**

四、（16 分）（共 **2** 小题，每小题 **8** 分，共 **16** 分）

（1）求函数 $f(z)=e^{z}\sin z$ 关于 z 的幂级数展开式（需要写出通项表达式）。

解：当 $|z|<+\infty$ 时，……………………………**(1 分)**

$$e^{z}\sin z=e^{z}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{n}}{n!}z^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^{n}}{n!}z^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{n}-(1-i)^{n}}{n!}z^{n}$$ ……………**(8 分)**

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{n}.$$

（2）求函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^{2}(z-1)}$ 关于 $1<|z|<+\infty$ 的洛朗展开式。

解：当 $1<|z|<+\infty$ 时，……………………………**(1 分)**

$$f(z)=-\frac{1}{z^{2}}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}=-\frac{1}{z^{2}}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z^{2}}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}=\frac{1}{z^{2}}+2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}.$$

五、（8 分）已知$u(x,y)=x^2-y^2$，证明$u(x,y)$为调和函数，并求$v(x,y)$使得$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析.

解：由于$u_x=2x,\ u_y=-2y\ u_{xx}=2,\ u_{yy}=-2,$

$u_{xx}+u_{yy}=2-2=0,$ ……………………(2 分)

故$u(x,y)=x^2-y^2$为调和函数。…………………(3 分)

因为$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，则有$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$，…(4 分)

$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=2x+2yi=2z,$ ……(6 分)

因此$f(z)=z^2+ci$， 其中c为实常数。 ………………………(7 分)

所以$v(x,y)=2xy+c.$ ………………………(8 分)

六、（8 分）（二选一）

（1）利用拉氏变换解方程

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t},\ x(0)=x'(0)=1.$$

（2） 设$F(\omega)=F[f(t)]$,证明：函数$f(t)$是实值函数的充要条件为$\overline{F(\omega)}=F(-\omega)$.

（1）解：令$L(x(t))=X(s)$，对方程两边同时做 Laplace 变换得：

$$s^2X(s)-s-1+4(X(s)-1)+3X(s)=\frac{1}{s+1},$$ ………………………(2 分)

则$$X(s)=\frac{\frac{1}{s+1}+s+5}{s^2+4s+3}=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{7}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{3}{4(s+3)},$$

(6 分)

取逆变换得：

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=\frac{7}{4}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]+\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]-\frac{3}{4}L^{-1}[\frac{1}{s+3}]$$

……(8 分)

$$=\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}.$$

（2）

必要性：若函数$f(t)$为实值函数，有

$$\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(t)e^{-j\omega t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j(-\omega)t}dt=F(-\omega).$$

充分性：若函数$\overline{F(\omega)}=F(-\omega)$，有

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F(\omega)e^{j\omega t}}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$\overset{u=-\omega}{=}-\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}F(u)e^{jut}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{jut}du=f(t),$$

则$f(t)$是实值函数.