第三节 随机事件的概率

- 一、频率的定义与性质
- 二、概率的统计定义
- 三、古典概型
- 四、几何概型
- 五、概率的公理化定义

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，

- 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**.

- 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记成 $f_n(A)$.

2. 性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件, 则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(\Omega) = 1, \quad f(\varnothing) = 0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	262	0.524
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

随n的增大, 频率 f 呈现出稳定性

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性, 即对于同样的 n, 所得的 f 不一定相同;

(2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 f 的随机波动幅度较大, 但随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 0.5 附近摆动, 且逐渐稳定于 0.5.

实验者	n	n_H	f
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f_n(A) \xrightarrow{n\text{的增大}} \frac{1}{2}.$$

重要结论

频率当 n 较小时波动幅度比较大,当 n 逐渐增大时，频率趋于稳定值 $p, 0 \le p \le 1$ 这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小.它就是事件的概率. 记作 $P(A) = p$

注. 1° $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 与*P*(A)的区别

$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$是一个随机数，是变数,它

与随机试验有关; *P*(A)是一个确定的数!

2° 当试验次数*n*很大时，有 $P(A)\approx f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

3° 概率统计定义的缺陷

(1) 不便于理论研究

需要作大量的试验，才能观察出 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

的稳定值.

(2) 在数学上不够严谨.

请同学们思考?

医生在检查完病人的时候摇摇头“你的病很重,在十个得这种病的人中只有一个能救活.”当病人被这个消息吓得够呛时,医生继续说“但你是幸运的.因为你找到了我,我已经看过九个病人了,他们都死于此病.”

医生的说法对吗?

二、概率的统计定义

1.定义1.2

在随机试验中，若事件A出现的频率m/n随着试验次数n的增加，趋于某一常数 p，$0 \le p \le 1$ 则定义事件A的概率为 p，记作$P(A)=p$.

性质1.1 (概率统计定义的性质)

(1) 对任一事件A，有$0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) 对于两两互斥的有限多个事件$A_1, A_2, \cdots, A_m$,

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_m)$$

证明 (1) 显然成立;

(2) 由于Ω是必然事件，每次试验均必然发生，则，频率恒等于1，自然 $p=1$;

对于∅，由于它是不可能事件，每次试验均不可能发生，则频率恒等于0，$p=0$.

(3) 由于$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互斥，所以$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$的频率$\frac{r}{n}$与$A_1, A_2, \cdots, A_m$的频率$\frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \cdots, \frac{r_m}{n}$

满足等式 $$\frac{r}{n}=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}+\cdots\frac{r_n}{n}$$

根据定义1.2**知**

$$P(A_1+\cdots A_m)=P(A_1)+\cdots P(A_m)$$

说明

概率的统计定义直观地描述了事件发生的可能性大小，反映了概率的本质内容，但也有不足，即无法根据此定义计算某事件的概率.

三、古典概型

古典概型随机试验

1.古典概型定义

若随机试验 E 具有下列**两个**特征：

1) 有限性

样本空间Ω中，只有有限个样本点：$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$

即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$

2) 等可能性

$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 发生的可能性相等，

则称 E 所描述的概率模型为**古典概型**.

2. 古典概型中事件概率的计算公式(定义1.3)

设试验 E 的样本空间Ω由n 个样本点构成, A 为 E 的任意一个事件,且包含 m 个样本点, 则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本空间}\Omega\text{所含样本点的总数}}.$$

称此为概率的古典定义.

例1 滨江宾馆共有职工200人，其中女性有160人. 现从所有职工任选一人，选得男性的概率是多少？

解 样本点总数：$n = 200$(人)

事件$A=$“选得男性”

A所包含的样本点数(即男性职工数)

为：$m = 200-160=40$(人)

$$\therefore \quad P(A)=\frac{m}{n}=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}=0.2$$

3. 常见的三种古典概型基本模型

(1) 摸球模型；

(2) 分房问题；

(3) 随机取数问题.

例5 摸球模型

(1) 无放回地摸球

问题1　设袋中有M只白球和N只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出$m+n$只球,求所取球恰好含m个白球, n个黑球的概率?

解　设 $A=\{$所取球恰好含m个白球, n个黑球$\}$

样本空间包含样本点个数为: C_{M+N}^{m+n}

A 所包含基本事件的个数为: $C_M^m \cdot C_N^n$

故　$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_N^n}{C_{M+N}^{m+n}}.$$

同类型的问题还有：

1) 中彩问题；

2) 抽签问题；

3) 分组问题；

4) 产品检验问题；

5) 鞋子配对问题；

6) 扑克牌花色问题；

7) 英文单词、书、报及电话号码等排列问题.

(2) 有放回地摸球

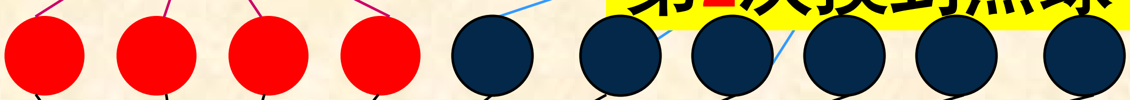
问题2 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2 次摸到黑球、第3 次摸到红球的概率.

解 设 $A=\{$前2次摸到黑球,第三次摸到红球$\}$

第3次摸到红球 4种

第1次摸到黑球 6种

第2次摸到黑球 6种



样本空间包含样本点总数为 $10\times10\times10=10^3$

第1次摸球 —— 10种

第2次摸球 —— 10种

第3次摸球 —— 10种

目录 上页 下页 返回 结束

样本空间包含样本点总数为 $10\times10\times10=10^3$,

A 所包含基本事件的个数为 $6\times6\times4$,

故 $P(A)=\dfrac{6\times6\times4}{10^3}=0.144.$

同类型的问题还有:

1) 电话号码问题;

2) 骰子问题.

3) 英文单词、书、报等排列问题.

例6 **分房模型**

有n个人，每个人都以同样的概率 $1/N$ 被分配在$N(n\le N)$间房中的每一间中，试求下列各事件的概率：

(1) 某指定n间房中各有一人；

(2) 恰有n间房，其中各有一人；

(3) 某指定房中恰有$m(m\le n)$人.

解 1°先求样本空间Ω所含的样本点总数.

分析 把n个人随机地分到N个房间中去，每一种分法就对应着一个样本点(基本事件)，由于每个人都可以住进N间房中的任一间，所以每一个人有N种分法，n个人共有 $N \times N \times \cdots \times N = N^n$ 种分法，即

样本点总数： N^n

2° (1) 设 A=“某指定n间房中各有一人”

则 A所含样本点数：$P_n^n = n!$ $\quad \therefore \quad P(A) = \dfrac{n!}{N^n}$

(2) 设 B=“恰有n间房，其中各有一人”

分析: •对于事件B，由于未指定哪n个房间，所以这n间房可以从N个房间中任意选取，共有 C_N^n 种分法.

•对于每一选定的n间房，其中各有一人的分法有 $n!$种，所以事件B所含的样本点数： $C_N^n \cdot n!$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

(3) 设 C =“某指定房中恰有m $(m \le n)$人”．

分析 “某指定房中恰有$m(m \le n)$人”,这m个人可以从n个人中任意选出，共有 C_n^m 种选法，而其他的n-m个人可以任意地被分到余下的N-1间房中去，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种分法，所以事件C所含的样本点数：

$$C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}$$

$$\therefore \quad P(C) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

同类型的问题还有：

1) 球在杯中的分配问题；(球→人，杯→房)

2) 生日问题；(日 → 房，N=365天)

(或 月 → 房，N=12月)

3) 旅客下站问题；(站→房)

4) 印刷错误问题；(印刷错误→人，页→房)

5) 性别问题 (性别→房，N=2)

等等.

四、几何概型

1. 几何概型定义

若试验E具有下列特征：

1) 无限性：E的样本空间Ω是某几何空间中的一个区域，其包含无穷多个样本点，每个样本点由区域Ω内的点的随机位置所确定；

2) 等可能性：每个样本点的出现是等可能的，即样本点落在Ω内几何度量相同的子区域是等可能的，

则称E所描述的概率模型为几何概型，并称

E为几何概型随机试验.

注.

几何空间	一维	二维	三维	…
几何度量	长度	面积	体积	…

2. 几何概率

定义. 对于随机试验E，以$m(A)$表示的几何度量，Ω为样本空间. 若 $0< m(\Omega)<+\infty$, 则对于任一事件A，定义其概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

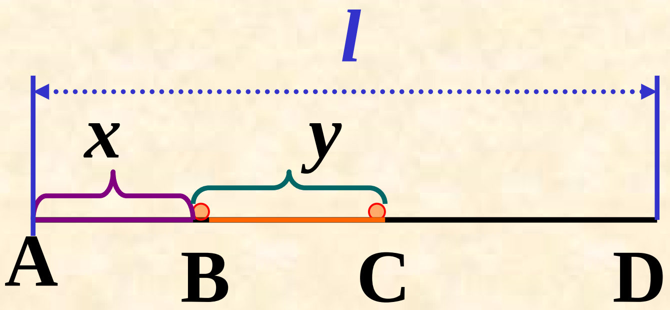
注.

一维： $P(A)=\dfrac{A\text{的长度}}{\Omega\text{的长度}}$;

二维： $P(A)=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}$;

三维： $P(A)=\dfrac{A\text{的体积}}{\Omega\text{的体积}}$.

例8 在线段AD上任取两点B, C.在B, C处折断得三条线段，求“这三条线段能构成三角形”的概率.



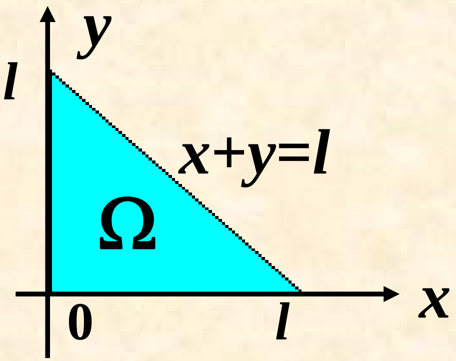
解 依题意，有

$$\begin{cases} 0 < x < l, 0 < y < l \\ 0 < l - (x + y) < l \end{cases}$$

样本空间Ω:

$$0 < x < l, \quad 0 < y < l$$

$$0 < x + y < l$$



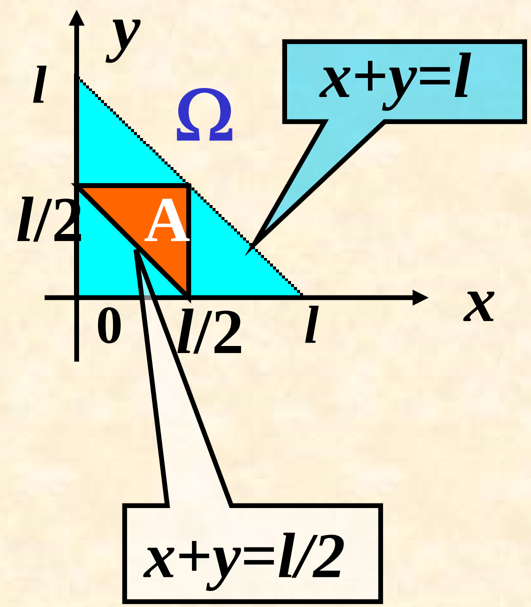
$\because$ 三线段能构成三角形

$\Leftrightarrow$ 其中任一线段之长小于其余两线段之和.

$\therefore \quad 0 < x < l - x,\ 0 < y < l - y$

且 $0 < l - (x + y) < x + y$

设 $A =$ “三线段能构成三角形”



则 $A:\ 0 < x < \dfrac{l}{2},\ 0 < y < \dfrac{l}{2},$

$$\frac{l}{2} < x + y < l$$

$$\therefore P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2} = \frac{1}{4}$$

五、概率的公理化定义

1.定义. 设E是随机试验，Ω是它的样本空间，对于E的**每一事件A赋予一个实数**，记作$P(A)$，若$P(A)$满足下列三条公理：

(1) **非负性**：对于每一事件A，有 $P(A) \geq 0$;

(2) **规范性**：$P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性**：对于**两两互斥**的事件 A_1，$A_2, \cdots$，即$i \neq j$时，$A_i A_j = \varnothing \ (i, j = 1, 2, \ \cdots)$,则有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \cdots)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + \cdots$$

则称$P(A)$为事件A的概率.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$

证 $\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \cdots$

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

$$P(\Omega)=1 \qquad \therefore\ P(\varnothing)=0$$

(2) **有限可加性:**

设A_1，$A_2,\cdots,A_m$为有限个两两互斥事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

证 $A_1+A_2+\cdots+A_m=A_1+A_2+\cdots+A_m+\varnothing+$

$+\varnothing+\varnothing+\cdots$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$

$$=P(A_1+A_2+\cdots+A_m+\varnothing+\varnothing+\cdots)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)$$

(3) 逆事件的概率：对于任意事件A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

证 $\because A + \overline{A} = \Omega,\ A\overline{A} = \varnothing$

$\therefore P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$

即 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(4) 若$B \subset A$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

证 $\because B \subset A \quad \therefore A = A \cup B = B + (A - B)$

又$\because \quad B(A - B) = BA\overline{B} = \varnothing$

$$\therefore \quad P(A)=P(B)+P(A-B)$$

即 $$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论1(单调性) 若$B\subset A$，则$P(B)\le P(A)$

证 由性质4，及 $P(A-B)\ge 0$，知命题成立.

(5) **概率的加法公式:**

对于任意两个事件A, B，有

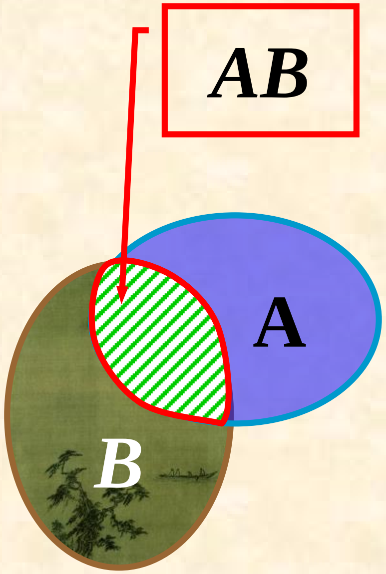
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证$\because$ $A \cup B = A + (B - A)$

$$B - AB = B\overline{AB} = B(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$= B\bar{A} \cup B\bar{B} = B\bar{A} \cup \varnothing$$

$$= B\bar{A} = B - A$$



$\therefore$ $A \cup B = A + (B - AB)$

又$\because$ $A(B - AB) = AB\bar{A} = \varnothing$

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB)$

$\because AB \subset B$

$\therefore$ $P(B - AB) = P(B) - P(AB)$

从而 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

推论2. $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

一般地，(次可加性) $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\le\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

多退少补原理:

推论3. 对于任意n个事件A_1，$A_2,\cdots$，A_n,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

注. 1°古典概率满足概率的公理化定义；

验证：(1) $\because 0 \le m \le n$

$$\therefore \quad 0 \le P(A) = \frac{m}{n} \le 1$$

(2) $\because$ 对于$\Omega, m = n \quad \therefore \quad P(\Omega) = \frac{m}{n} = 1$

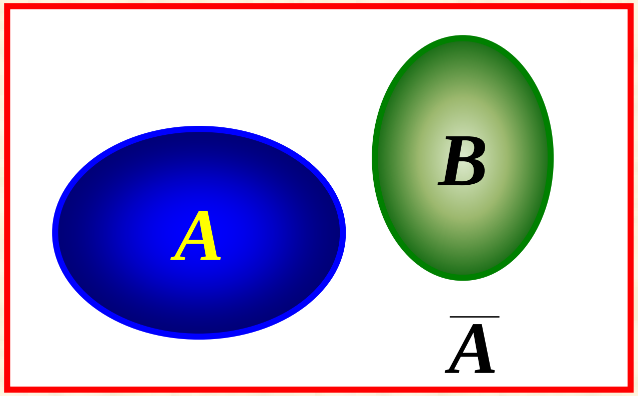
2°几何概率满足概率的公理化定义.

例10 已知 $P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{2}$,分别在下列三种情形下，求$P(B\overline{A})$的值.

(1) A与B互斥;

(2) $A\subset B$;

(3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$.



解 (1) $AB=\varnothing$,$B\subset \overline{A}$ $\therefore B\overline{A}=B$

故 $P(B\overline{A})=P(B)=\dfrac{1}{2}$

(2) $A \subset B$;

$$P(B\overline{A}) = P(B - A)$$

$$= P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(3) $P(AB) = \dfrac{1}{8}.$

$\because B\overline{A} = B - A = B - AB \quad AB \subset B$

$\therefore \quad P(B\overline{A}) = P(B - AB) = P(B) - P(AB)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$