第二节 多维随机变量及其分布(1)

- 一、n 维随机变量及其分布函数
- 二、二维离散型随机变量
- 三、二维连续型随机变量
- 四、两个常用的分布
- 五、内容小结

一、n 维随机变量及其分布

1. n 维随机向量

定义 设随机试验E的样本空间为Ω，

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

是定义在Ω上的n 个随机变量，称它们构成的向量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为 n 维随机变量，亦称 n 维随机向量.

2. n 维随机向量的分布函数

定义 设 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$n$ 维随机向量，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是n个任意实数，函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1, X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

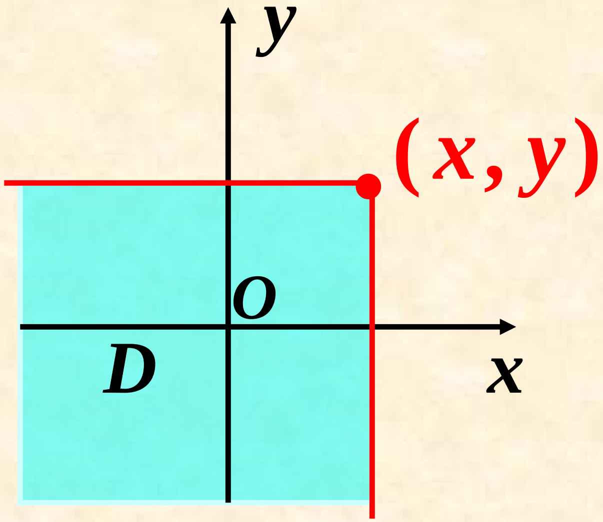
称为随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或联合分布函数. 其中

$$\{X_1\le x_1, X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega: X_i(\omega)\le x_i\}$$

注 1°当n=2时，二维分布函数 $F(x, y)$表示随机点 (X, Y)落在平面区域

$$D=(-\infty, x] \times(-\infty, y]$$
$$=\{(u, v) \mid u \leq x, v \leq y\}$$

内的概率.



2° 二维分布函数的定义域是整个实平面.

目录 上页 下页 返回 结束

实例1 炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地 区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H,W).

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X 、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

3. 二维分布函数 $F(x, y)$的性质

(1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

(2) $F(x, y)$分别对x, y为单调不减函数，即

当$x_1 < x_2$时，$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$,

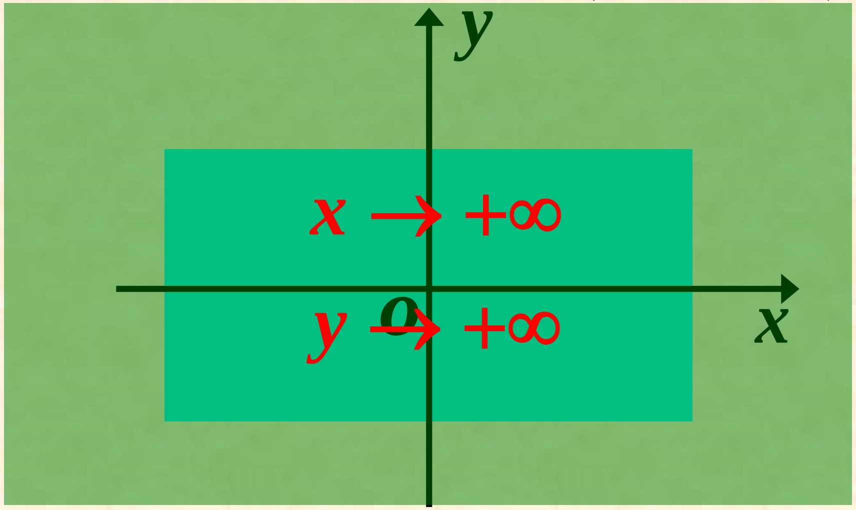
当$y_1 < y_2$时，$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$;

(3) $F(-\infty, y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$,

$F(x, -\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1;$$



(4) F(x, y)分别关于x, y右连续，即

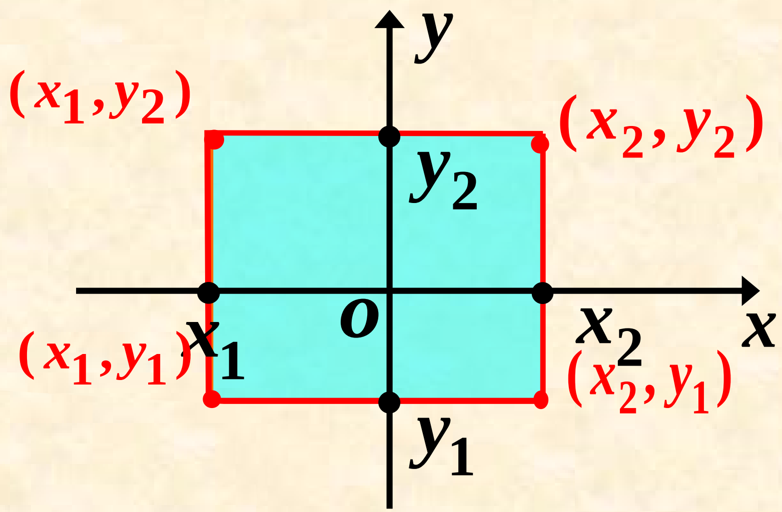
$$F(x+0,y)=F(x,y),$$

$$F(x,y+0)=F(x,y);$$

(5) 若 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,则

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

$$= P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} \ge 0$$



证明 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$

$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$

$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$

可以证明: 一个函数若具有上述性质, 则此函数一定是某二维随机向量的分布函数.

二、二维离散型随机变量

1. 定义 若二维随机变量 (X,Y),其**分量 X, Y 均是离散型随机变量**，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量，且称其分布为**离散型**分布.

2. 分布律

若(X,Y)的所有可能取值为

$$(x_i, y_j) \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

则称 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots)$

为(X,Y)的分布律，可记为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

其中p_{ij}满足：

(1) $p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1,2,\cdots)$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

例1 设袋中有三个球，分别标有数字1, 2, 2. 从袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球.以X，Y分别表示第一，第二次取得的球上所标的数字，求(X,Y)的分布律及分布函数.

1 2 2

解 X的可能取值: 1, 2

Y的可能取值: 1, 2

(X,Y)的可能取值: $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$

设 $A_i = \{X = i\}, B_j = \{Y = j\}$

$(i, j = 1,2)$

则 $\{X=i,Y=j\}=\{X=i\}\cap\{Y=j\}$

$$=A_iB_j$$

由乘法公式，得

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=P(A_iB_j)$$

$$=P(A_i)P(B_j|A_i)$$

$\because$ 摸球是无放回的

$\therefore$ $p_{11}=P(A_1)P(B_1|A_1)=\frac{1}{3}\times 0=0$

$$p_{12}=P(A_1)P(B_2|A_1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{3}$$

$$p_{21}=P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$p_{22}=P(A_2)P(B_2|A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ (X,Y)的分布律为：

Y \ X	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

注. 若为有放回摸取，则

(X,Y)的分布律为：

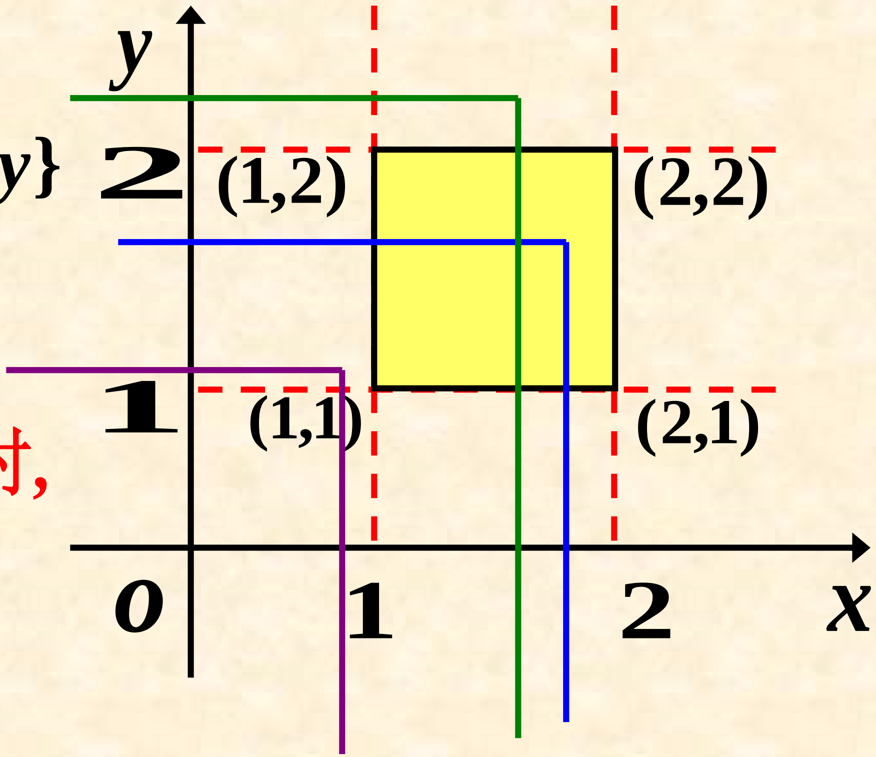
Y \ X	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

下面求分布函数:

(1)当 $x<1$ 或 $y<1$ 时,

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

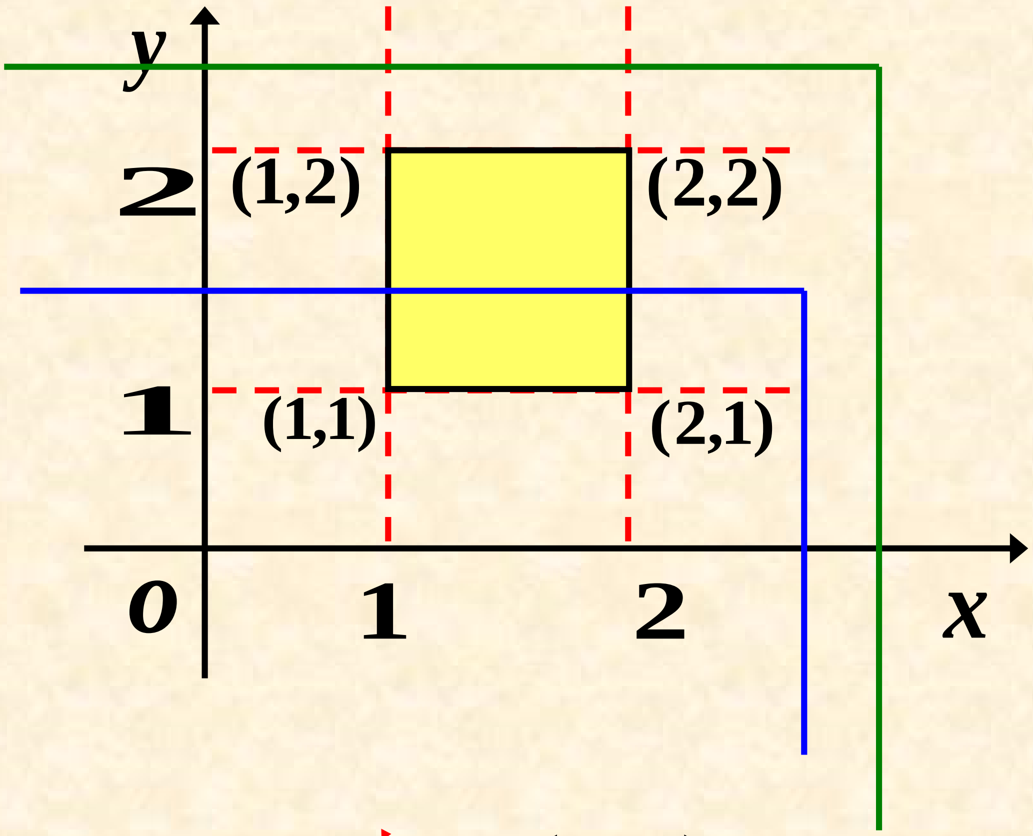
$=0;$



(2)当 $1\le x<2, 1\le y<2$ 时,

$F(x,y)=p_{11}=0;$

(3)当 $1\le x<2, y\ge 2$ 时, $F(x,y)=p_{11}+p_{12}=1/3;$



(4)当$x \ge 2, 1 \le y < 2$时, $F(x,y) = p_{11} + p_{21} = 1/3;$

(5)当$x \ge 2, y \ge 2$时, $F(x,y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1.$

所以(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1 \text{或} y<1,\\ \frac{1}{3}, & 1\le x<2, y\ge 2, \text{或} x\ge 2, 1\le y<2,\\ 1, & x\ge 2, y\ge 2.\end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i, j 求和.

三、二维连续型随机变量

1.定义2.5

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数$F(x, y)$, 如果存在非负的函数 $p(x, y)$ 使对于任意 x, y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(u,v)\,du\,dv$$

则称(X, Y)是连续型的二维随机变量,函数$p(x, y)$称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

(1) $p(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\ dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1.$

(3) 设G是xOy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G p(x,y)\,dxdy.$$

(4)若$p(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = p(x,y).$

3.说明

(1)几何上, $z = p(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $p(x, y)$和 xOy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

(2) $$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以G为底,以曲面 $z = p(x, y)$ 为顶面的柱体体积.

例2 设(X,Y)的分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}Ce^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：(1) 常数C；(2) 分布函数$F(x,y)$；

(3) $P\{(X,Y)\in D\}$，其中D：由$x=0, y=0$及$x+y=1$所围成的三角形区域.

解 (1) 由分布密度的规范性，得

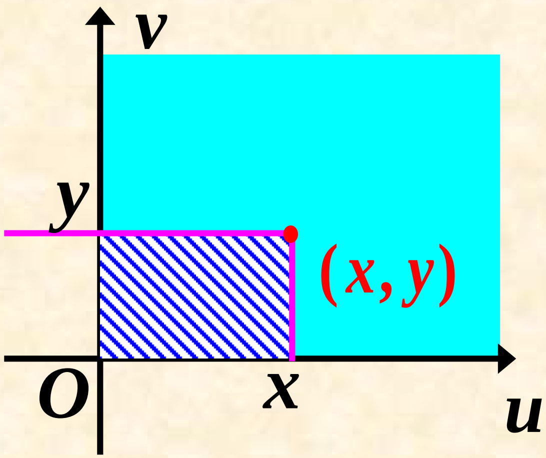
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx\,dy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}p(x,y)\,dx\,dy.$$

$$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ce^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

$$= C\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$= C(-e^{-x})_0^{+\infty}\cdot(-e^{-y})_0^{+\infty} = C\cdot 1$$

$$\therefore \quad C = 1$$



(2) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,du\,dv$$

$$= \begin{cases} \int_0^x\int_0^y p(u,v)\,du\,dv, & x > 0\, y > 0; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

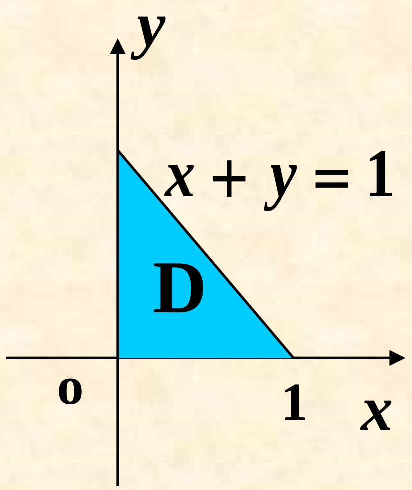
$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y p(u,v)\,du\,dv, & x>0\,y>0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y e^{-(u+v)}\,du\,dv, & x>0\,y>0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0\,y>0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x,y)\,dx\,dy.$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}dy.$$



$$=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{1-x} e^{-y}dy$$

$$=\int_0^1 e^{-x}(-e^{-y})\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1 e^{-x}(1-e^{x-1})\,dx=\int_0^1(e^{-x}-e^{-1})\,dx$$

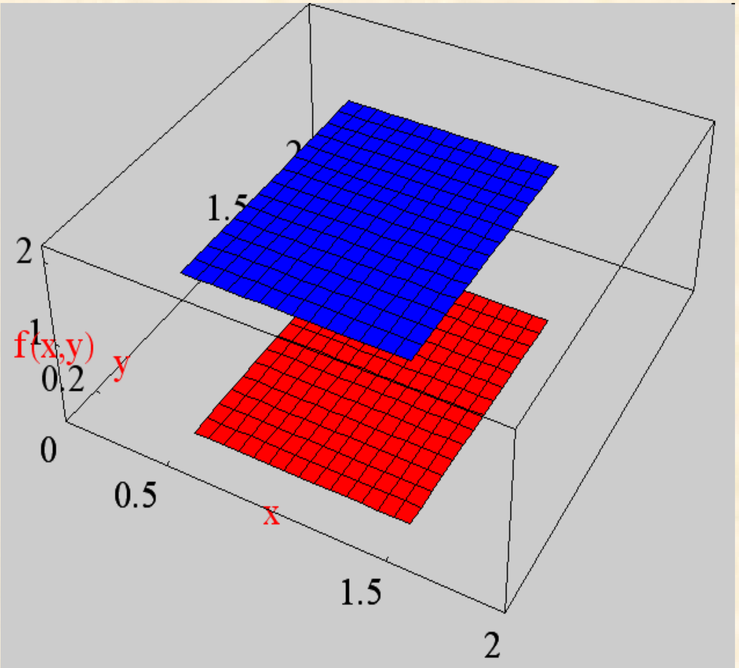
$$=1-2e^{-1}\approx 0.2642$$

四、两个常用的分布

1.均匀分布

定义 设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

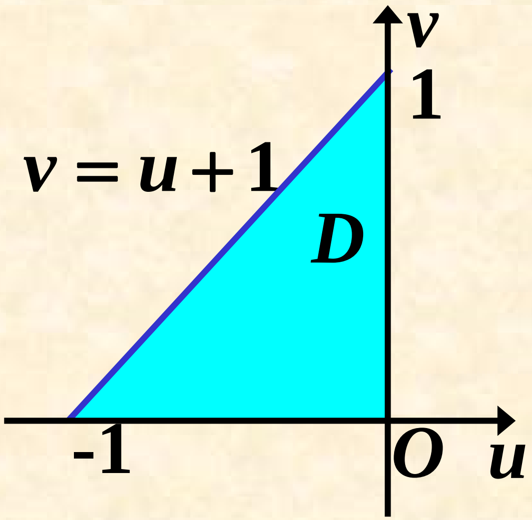


则称 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布.

目录 上页 下页 返回 结束

例3 已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，试求 (X, Y) 的分布密度及分布函数，其中 D 为 x 轴，y 轴及直线 $y = x+1$ 所围成的三角形区域.

解 由 $p(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$



得 $p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

或 $p(u,v)=\begin{cases}2, & (u,v)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

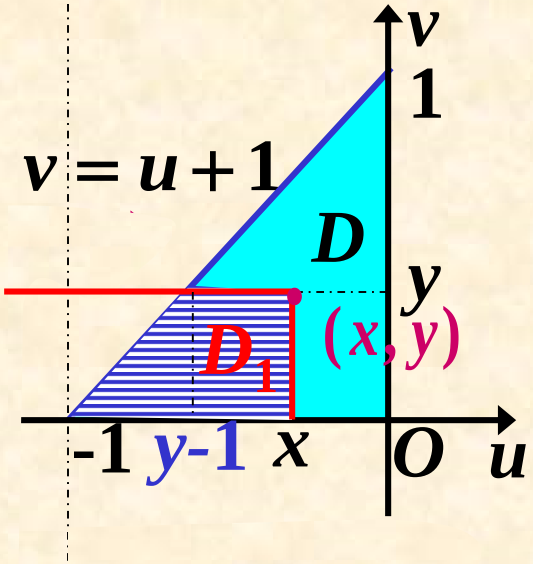
(1) 当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时,

$$p(u,v)=0,\ (u,v)\in D^*,\ \text{其中}$$

$$D^*=\{(u,v)\mid -\infty<u\le x,-\infty<v\le y\}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}0\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0;$$



(2) 当 $-1\le x<0, 0\le y<x+1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D_1}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

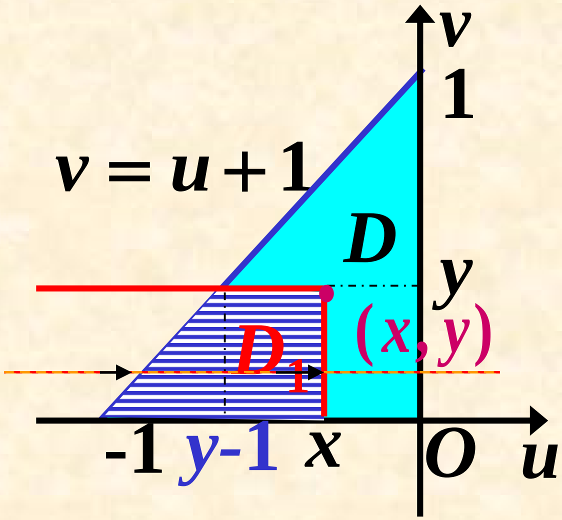
(2) 当 $-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$ 时,

$$F(x,y) = \iint_{D_1} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D_1} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\boxed{\iint_{D_1} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$ 梯形面积

或

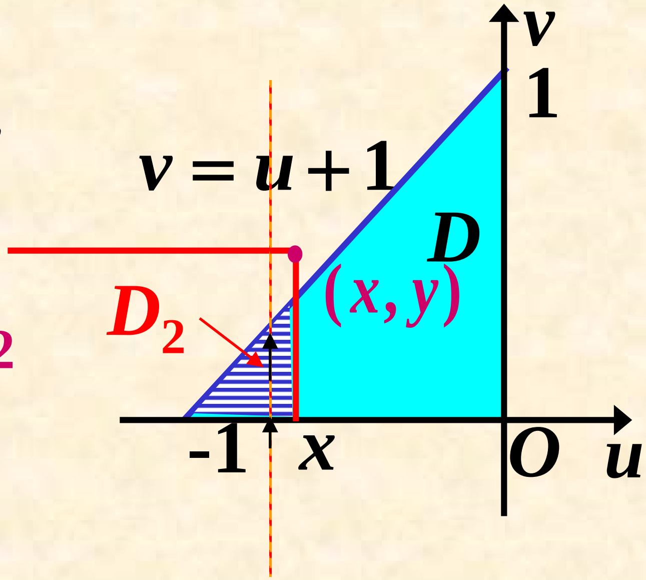
$$= 2\int_0^y \mathrm{d}v \int_{v-1}^{x} \mathrm{d}u = 2\int_0^y (x - v + 1)\,\mathrm{d}v$$



$$= (2x - y + 2)y;$$

(3) 当 $-1 \le x < 0,\ y \ge x+1$ 时，

（三角形）



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{D_2} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \overset{\text{或}}{=} 2\cdot\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$= \int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v = (x+1)^2;$$

(4) 当 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时，（梯形）

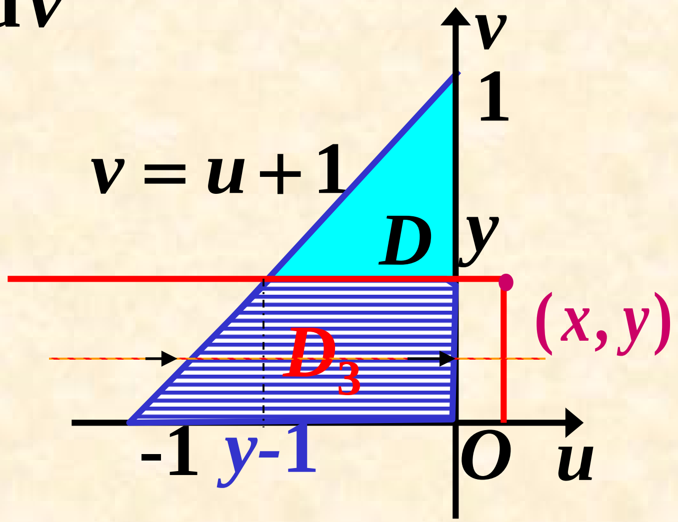
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D_3} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1}2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{y}2\,\mathrm{d}v$$

或

$$= 2\int_{0}^{y}\mathrm{d}v\int_{v-1}^{0}\mathrm{d}u$$

$$= (2-y)y;$$



(5) 当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, （整个三角形）

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<-1, \text{或 } y<0, \\ (2x-y+2)y, & -1\le x<0, 0\le y<x+1, \\ (x+1)^2, & -1\le x<0, y\ge x+1, \\ (2-y)y, & x\ge 0, 0\le y<1, \\ 1, & x\ge 0, y\ge 1. \end{cases}$$

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

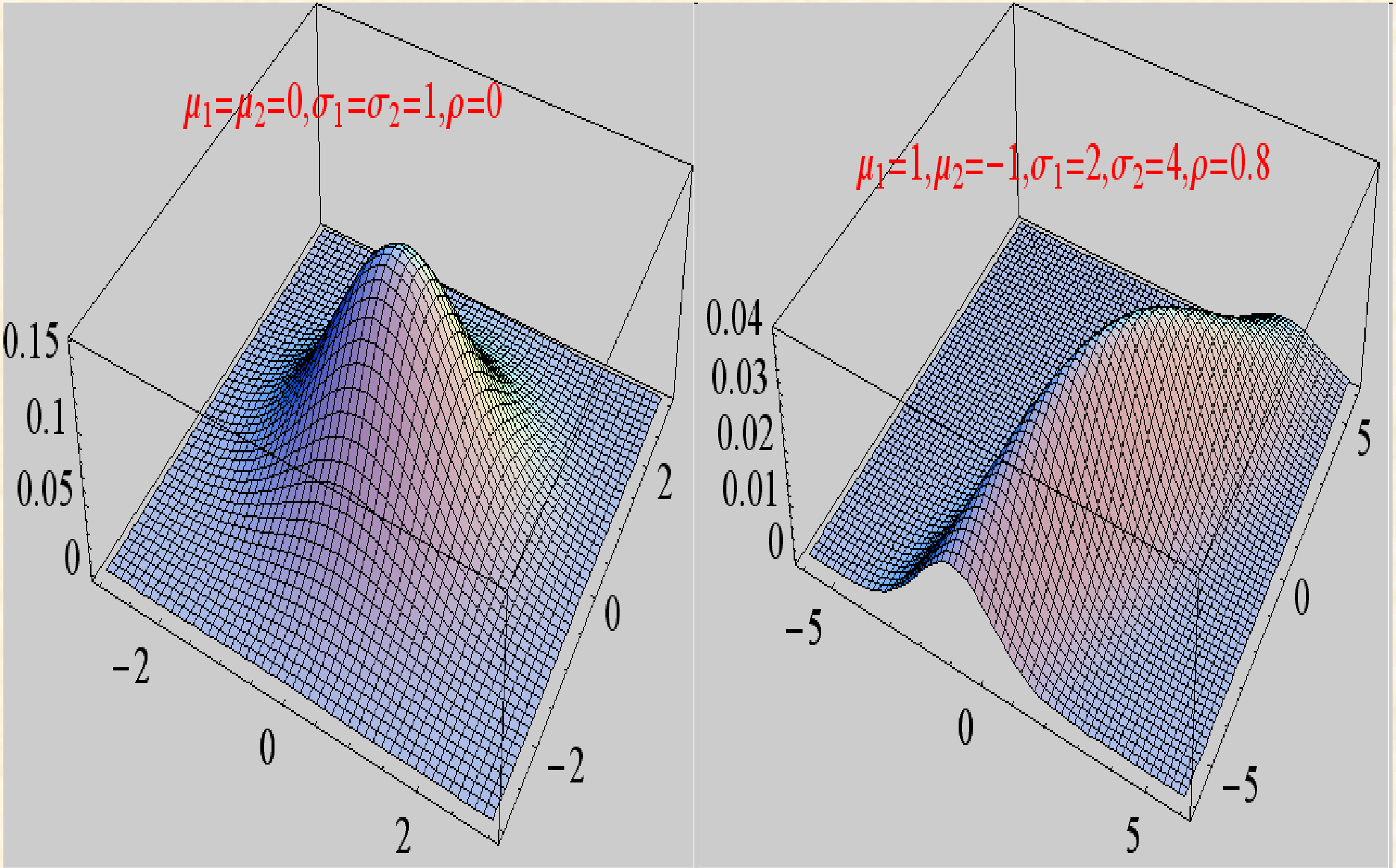
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数, 且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2
$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

五、内容小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}}p_{ij}.$$

3. 二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

备份题

例2-1 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

(1) 确定常数k;　(2) 求$P\{X<1, Y<3\}$;

(3) 求$P\{X<1.5\}$; (4) $P\{X+Y\le 4\}$.

解 (1) 因为$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$

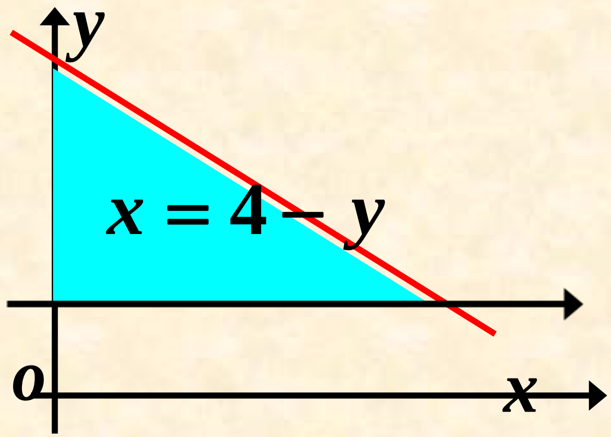
所以$\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow k=\frac{1}{8};$

$$(2)\ P\{X<1, Y<3\}=\int_0^1\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8};$$

$$(3)\ P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{27}{32};$$

$$(4)\ P\{X+Y\le 4\}=P\{X\le 4-Y\}$$

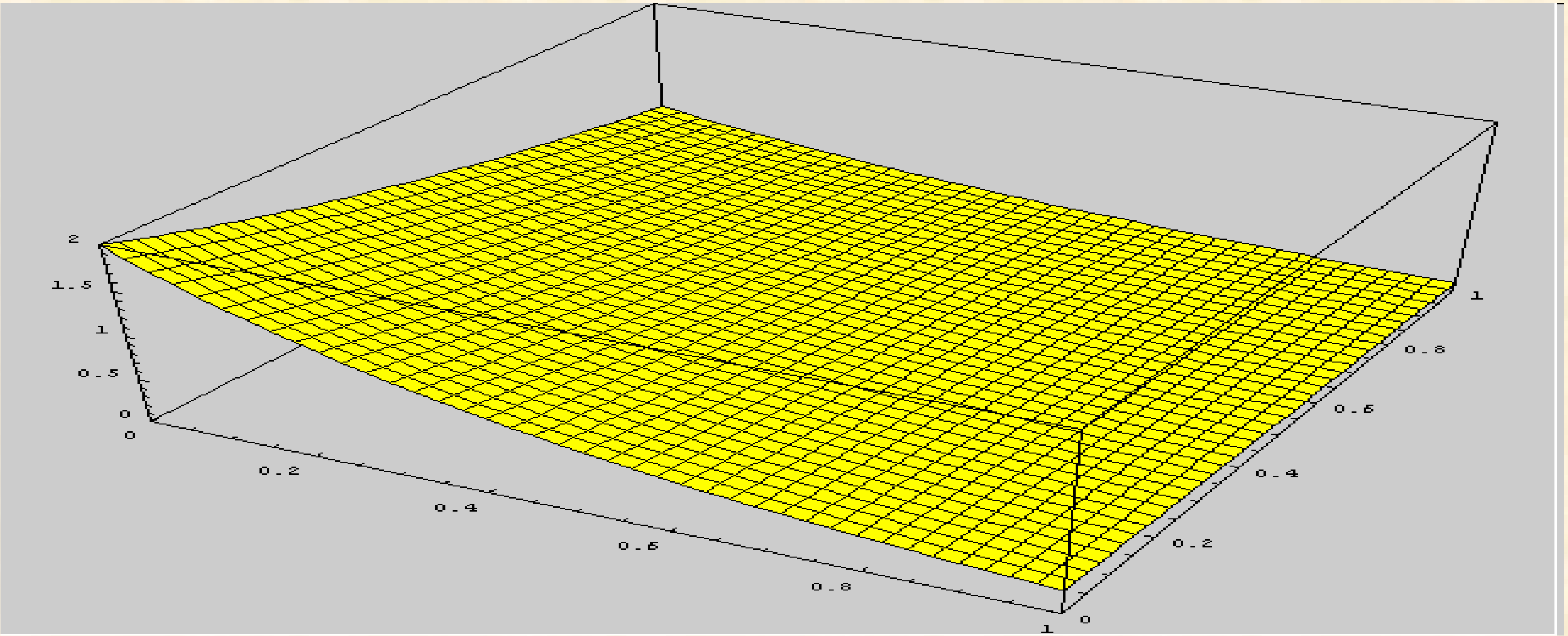
$$=\int_2^4\int_0^{4-y} \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{11}{2}.$$



例2-2 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

(1) 求分布函数$F(x,y)$;(2) 求概率$P\{Y\le X\}$.



解 (1)
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_y^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}.$$