第五章

曲线拟合的最小二乘法

§5.1 引言

§5.2 线性方程组的最小二乘解

§5.3 曲线最小二乘拟合

§5.4 移动最小二乘近似

§5.1 引言

如果实际问题要求解在[a,b]区间的每一点都“很好地”逼近$f(x)$的话，运用插值函数有时就要失败。另外，插值所需的数据往往来源于观察测量，本身有一定的误差。要求插值曲线通过这些本身有误差的点，势必使插值结果更加不准确。

如果由试验提供的数据量比较大，又必然使得插值多项式的次数过高而效果不理想。

从给定的一组试验数据出发，寻求函数的一个近似表达式$y=\varphi(x)$，要求近似表达式能够反映数据的基本趋势而又不一定过全部的点(x_i,y_i)，这就是曲线拟合问题，函数的近似表达式$y=\varphi(x)$称为拟合曲线。本章介绍用最小二乘法求拟合曲线。

引例

已知某一铜棒的电阻-温度的函数关系为

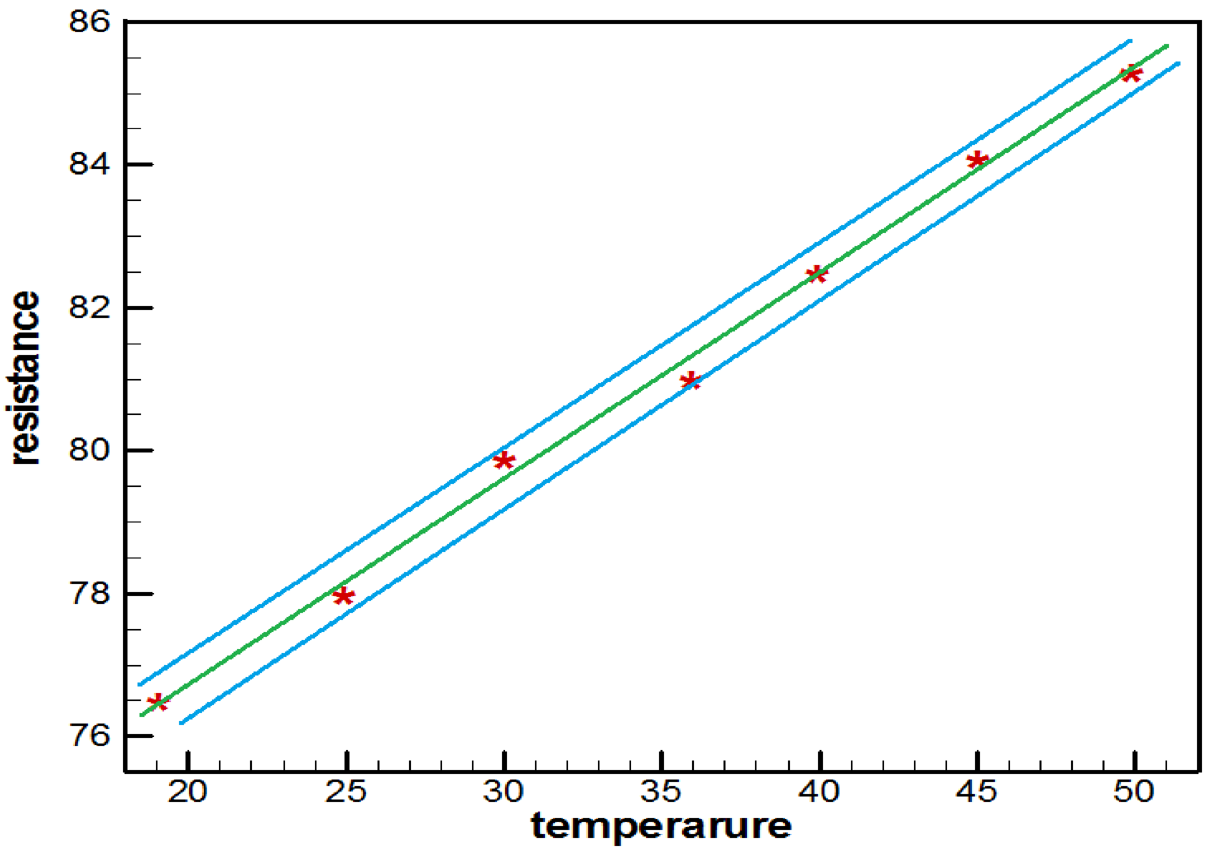
$R = a + bt$， 通过试验，得到在七种不同温度下的电阻值如下：

	1	2	3	4	5	6	7
t/ C	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R/ Ω	76.3	77.8	79.7	80.8	82.3	83.9	85.1

其中a和b是待定参数，**如何确定a和b?**

引例（续）

- 铜棒的电阻随着温度的增加而增加。
- 可以认为电阻和温度是线性关系。
- 从图上可以看出7个点大致分布在一条直线上。



引言（续）

事实上，确定一条直线只需要2个点，但为了找到温度和电阻之间的函数关系，实验数据会远远多于2个，另外由于观测带来的误差，这些点不可能全部分布在一条直线上。

如何从7组数据出发，设计一条直线来准确反映温度和电阻之间的关系？

我们希望这条直线 $R = a + bt$ 与所有的数据点 $\{(t_i, R_i)\}_{i=1}^{7}$ 越接近越好。必须找到一种度量标准来衡量那条直线最接近所有数据点。

引言（续）

曲线拟合

定义 从给定的一组试验数据出发，寻求函数的一个近似表达式 $y=\varphi(x)$，要求近似表达式能够反映数据的基本趋势而又不一定过全部的点，这就是**曲线拟合问题**，函数的近似表达式 $y=\varphi(x)$ 称为**拟合曲线**。

常用的方法是让拟合曲线$y=\varphi(x)$在采样点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$处的函数值$\{\varphi(x_i)\}_{i=0}^{n}$与实验数据 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$之间的误差最小。

引言（续）

最小二乘法的基本概念

度量误差的方法有很多，如记在 x_i 处函数值$\varphi(x_i)$与实验数据 y_i之间的残差

$$\delta_i = \varphi(x_i) - y_i$$

为了让每个残差都很小，可以选择合适的参数使得

$$I = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2$$

最小，这种选择拟合函数的方法称为曲线拟合的最小二乘法。

引言（续）

将问题一般化

设$(x_i, y_i)(i=0,1,\cdots,n)$为给定的一组数据。

假定x, y的关系为 $y=\varphi(x)$

其中$\varphi(x)$来自函数类Φ，设函数类Φ的基函数为

$\varphi_i(x)(i=0,1,\cdots,m)$。 一般要求$m \le n$，则

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x) \in \Phi \qquad \text{---------(1)}$$

定义平方误差

$$\|\delta\|_2^2=\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2=\sum_{i=0}^{n} (\varphi(x_i)-y_i)^2$$

引言（续）

在函数类Φ中选取一个函数$\varphi^*(x)$

$$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{m}c_j^*\varphi_j(x) \qquad \text{---------}(2)$$

$$=c_0{}^*\varphi_0(x)+c_1{}^*\varphi_1(x)+\cdots+c_m{}^*\varphi_m(x)$$

使得

$$\|\delta^*\|_2^2=\sum_{i=0}^{n}(\varphi^*(x_i)-y_i)^2$$

$$=\min_{\phi(x)\in\Phi}\|\delta\|_2^2=\min_{\varphi(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{n}(\varphi(x_i)-y_i)^2 \qquad \text{---------}(3)$$

其中$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m}c_j\varphi_j(x)$为Φ中的任意函数。

引言（续）

称满足条件(3)的求函数$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j^*\varphi_j(x)$的方法为数据拟合的最小二乘法。

$$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j^*\varphi_j(x)\text{为最小二乘解}$$

$$\|\delta^*\|_2^2\text{称为最小二乘解的平方 误差。}$$

在确定了拟合函数$\varphi(x)$后,如何求拟合系数$c_j(j=0,1,\cdots,m)$

使得$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j^*\varphi_j(x)$满足拟合条件(2)呢?

矛盾方程组

由于拟合函数(1)的待定系数个数$m+1$少于实验数据的个数$n+1$，将实验数据代入拟合函数会得到一个包含$m+1$个未知数却由$n+1$个方程组成的线性方程组。下面考虑更一般情形。

设有线性方程组 $$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{----------(4)}$$

线性方程组的最小二乘解(续)

其矩阵形式为 **AX=b**

当方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩不相等时，方程组无解，此时方程组称为矛盾方程组。

当(4)是矛盾方程组时，其精确解不存在，我们只好退而求其次，寻找未知数的一组取值，使矛盾方程组中的各式尽量好的近似满足。

对于一组数 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 式(4)中第i个方程的残差为 $\delta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i$，$\delta_i$ 越小，第i个方程近似满足的程度越好。

线性方程组的最小二乘解(续)

为了便于分析计算，常选择解向量使所有残差的平方和

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i]^2$$

达到最小，这一条件被称为**最小二乘原则**.

基于这一原则来确定未知解向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 的方法称为**求解矛盾方程组的最小二乘法**,

符合最小二乘原则的解向量被称为矛盾方程组的最小二乘解。

线性方程组的最小二乘解(续)

F是一个关于$(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$的二次函数，

使其取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} [2(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i) \cdot a_{ik}] = 0 \qquad \text{---------(5)}$$

$$(k = 1, 2, \cdots m)$$

将式(5)表示的m个方程联立得到方程组 $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{im} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 & \cdots & \sum a_{i2} a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{im} a_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{im} a_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{im}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{im} b_i \end{bmatrix} \qquad \text{-----(6)}$$

线性方程组的最小二乘解(续)

包含m个方程m个未知数的线性方程组(6)被称为对应于矛盾方程组(4)的正规方程组（法方程组）。对比方程组(4)和(6)的系数矩阵，发现

$$C = A^T A, \quad d = A^T b$$

如果系数矩阵A的m个列向量线性无关，可以证明正规方程组的系数矩阵C对称正定，这时正规方程组有惟一解，此解就是矛盾方程组的最小二乘解。

矛盾方程组的求解过程

$$Ax = b \longrightarrow A^T Ax = A^T b \longrightarrow Cx = d$$

$$C = A^T A, \quad d = A^T b$$

线性方程组的最小二乘解(续)

例　求下列矛盾方程组的最小二乘解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

解法1

假设 $\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 - 4 \\ \delta_2 = x_1 + 2x_2 - 7 \\ \delta_3 = x_1 - x_2 - 2 \end{cases}$

$$F(x_1, x_2) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = (x_1 + x_2 - 4)^2 + (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (x_1 - x_2 - 2)^2$$

由 $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2(3x_1 + 2x_2 - 13) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2(2x_1 + 6x_2 - 16) = 0 \end{cases}$

得法方程组　$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13 \\ 2x_1 + 6x_2 = 16 \end{cases}$　解得

$$x_1 = \frac{23}{7} \quad x_2 = \frac{11}{7}$$

线性方程组的最小二乘解(续)

解法2 矛盾方程组的矩阵形式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

由 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

得到正规方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13 \\ 2x_1 + 6x_2 = 16 \end{cases}$

解得

$$x_1 = \frac{23}{7} \qquad x_2 = \frac{11}{7}$$

§ 5.3 曲线的最小二乘拟合

重点精讲5.2
曲线最小二乘拟合

假定拟合曲线为

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) \qquad (m < n)$$

拟合的目标仍然为找一组$c_j^*(j = 0,1,\cdots,m)$,使得

$$\|\delta^*\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n}(\varphi^*(x_i) - y_i)^2$$

$$= \min_{\phi(x)\in\Phi}\|\delta\|_2^2 = \min_{\varphi(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2$$

最小。问题转化为

$$\text{求}F(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}c_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)^2 \qquad \text{-----(7)}$$

的最小值(极小值)点$c_0{}^*, c_1{}^*, \cdots, c_n{}^*$的问题。

显然(7)可以转化为一个关于$c_0, c_1, \cdots, c_m$的$m+1$元矛盾方程组。

引入记号

$$\varphi_r = (\varphi_r(x_0), \varphi_r(x_1), \cdots, \varphi_r(x_n))$$

$$f = (y_0, y_1, \cdots, y_n)$$

定义内积

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) \quad (\varphi_k, f) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i) y_i$$

显然内积满足交换律 $(\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_k)$

方程组(7)便可化为

$$c_0(\varphi_k,\varphi_0)+c_1(\varphi_k,\varphi_1)+\cdots+c_m(\varphi_k,\varphi_m)=(\varphi_k,f)$$

$$k=0,1,\cdots,m$$

这是一个系数为(φ_k,φ_j),常数项为(φ_k,f)的线性方程组,其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_m,f)\end{pmatrix} \quad \text{---(8)}$$

简单记为 $\mathbf{G_{m+1}a=b}$

称(8)式为函数序列$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$在点$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的法方程组。系数矩阵为对称阵。

由于$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$为函数类$\Phi$的线性无关的基函数，所以法方程组的系数矩阵非奇异,即根据Cramer法则，法方程组有唯一解。

$$F(c_0^*,c_1^*,\cdots,c_m^*) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} c_j^*\varphi_j(x_i)-y_i\right)^2$$ 是

$$F(c_0,c_1,\cdots,c_n) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x_i)-y_i\right)^2$$ 的最小值

因此 $\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{m}c_j^*\varphi_j(x)$为最小二乘解。

例：为了测定刀具的磨损速度，我们做这样的实验：经过一定时间(如每隔一小时)，测量一次刀具的厚度, 得到一组试验数据如下：

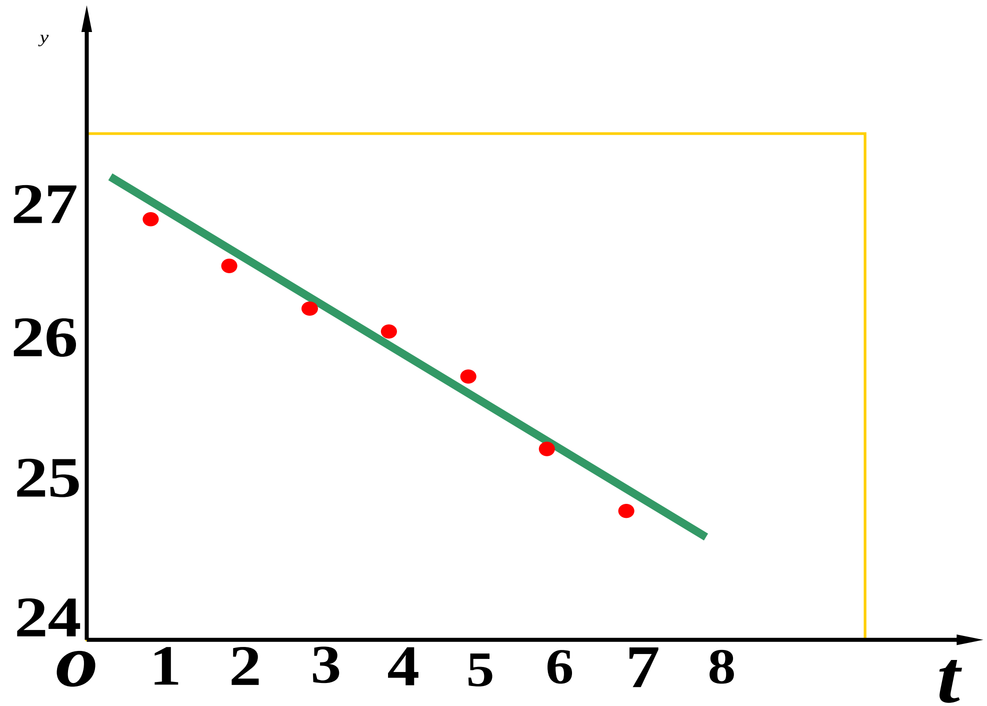
顺序编号 i	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 t_i(小时)	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i(毫米)	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.3

试根据上面的试验数据建立 y 和 t 之间的经验公式 $y= f(t)$.

解 首先确定 $f(t)$的类型.

如图，在坐标纸上画出这些点，经观察可以认为

$y=f(t)$服从线性关系。



$$y = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t)$$

$$\varphi_0(t) = 1$$

$$\varphi_1(t) = t$$

建立法方程组

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \end{bmatrix}$$

计算系数

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{7}1=8 \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{7}t_i=28,$$

$$(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{7}t_i=28, \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{7}t_i^{\,2}=140,$$

$$(\varphi_0,f)=\sum_{i=0}^{7}y_i=208.5, \quad (\varphi_1,f)=\sum_{i=0}^{7}y_it_i=717.0$$

代入方程组得

$$\begin{cases} 8c_0+28c_1=208.5 \\ 28c_0+140c_1=717 \end{cases}$$

解此方程组，得到

$$c_0=27.125, \quad c_1=-0.3036$$

这样便得到所求拟合曲线为

$$y = f(t) = 27.125 - 0.3036t$$

由上式算出的函数值 $f(t_i)$ 与实测 y_i 的有一定的偏差. 现列表比较如下：

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
实测 y_i	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.3
$f(t_i)$	27.125	26.821	26.518	26.214	25.91	25.607	25.303	25.0
偏差	-0.125	-0.021	-0.018	-0.086	0.189	0.093	-0.003	-0.20

偏差的平方和 $\|\delta\|_2^2 = 0.108165$

仿此可以完全类似的解决我们提出的引例

最小二乘法拟合曲线的步骤

1.通过观察、分析得到拟合曲线的数学模型，或根据经验公式确定数学模型。

2.将拟合曲线的数学模型转换为多项式。

3.写出矛盾方程组。

4.写出正则方程组。（可由多项式模型直接得到）

5.求解正则方程组，得到拟合曲线的待定系数。

6.将正则方程组的解带回到数学模型中，得到拟合曲线。

Remark

1.同一问题可以有不同的拟合曲线，通常根据均方误差 $\sqrt{\sum_{i=1}^{N}[\varphi(x_i)-y_i]^2}$ 和最大偏差 $\max_{1\le i\le N}|\varphi(x_i)-y_i|$

的大小来衡量拟合曲线的优劣。均方误差和最大偏差较小的拟合曲线为较优的拟合曲线。

2.在解决实际问题时，有时通过观察选择多个函数类型进行计算、分析、比较，最终获得较好的数学模型；有时把经验公式作为数学模型，只是用最小二乘法来确定公式中的待定常数。

Remark

3.当拟合曲线$\varphi(x)$中的待定常数是线性形式时，可直接根据矛盾方程组得到正则方程组而求解。当待定常数不是线性形式时，则应该先将待定常数线性化，再根据矛盾方程组写出正则方程组而求解。

例：$y = ae^{bx} \Longrightarrow \ln y = \ln a + bx \Longrightarrow$

$u = \ln y, A = \ln a, B = b \Longrightarrow u = A + Bx$

$$y = \frac{1}{a+bx} \Longrightarrow \frac{1}{y} = a + bx \Longrightarrow$$

$$u = \frac{1}{y} \Longrightarrow u = a + bx$$

§5.4 移动最小二乘法

移动最小二乘法，最早由Lancaster和Salkauskas在上世纪80年代初提出，主要用来进行曲线、曲面的拟合。近年来在工程计算领域，特别是偏微分方程数值解方面得到广泛应用。

曲线拟合最小二乘法的优缺点：

优点：模型一旦建立，一劳永逸，对所有的自变量x均适用。

缺点：

一是模型由于问题不同而千变万化，很难给出一个系统统一的方法。

二是当模型不是已知函数的线性组合时，参数很难确定。

移动最小二乘法（续）

对于一个复杂的连续函数，在每一点的局部可以用简单的函数如一次函数、二次函数等的线性组合来近似，其参数可以用最小二乘法确定。由于每一点的局部都是用最小二乘法确定参数，故称这一方法为移动最小二乘法。

下面在一维情形下对这种方法作简单介绍.

已知函数 $y = f(x)$ 上n个节点$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 处的函数值$\{y_i\}_{i=1}^{n}$

在点$x \in [a,b]$附近的近似函数$\phi(x)$ 可表示为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x)\,\mathbf{a}(x) \qquad \text{---}(1)$$

这里 $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x)$ 表示一组基函数，m为基函数的个数，$\mathbf{a}(x) = (a_1(x), a_2(x), \cdots, a_m(x))^{\mathrm{T}}$为待定系数。

移动最小二乘法（续）

- 这里的参数向量**a**(x)不是常数向量，而是随坐标x的变化而变化。

- 引入紧支（Compact Support）概念，认为点x处的值y只受x附近子域内节点影响，这个子域称作点x的影响区域，影响区域外的节点对x的取值没有影响。在影响区域上定义一个权函数w(x)，如果权函数在整个区域取为常数，就得到传统的最小二乘法。

一维基函数常选用如下的完全单项式基函数

线性基函数： $p^T(x) = (1, x)$

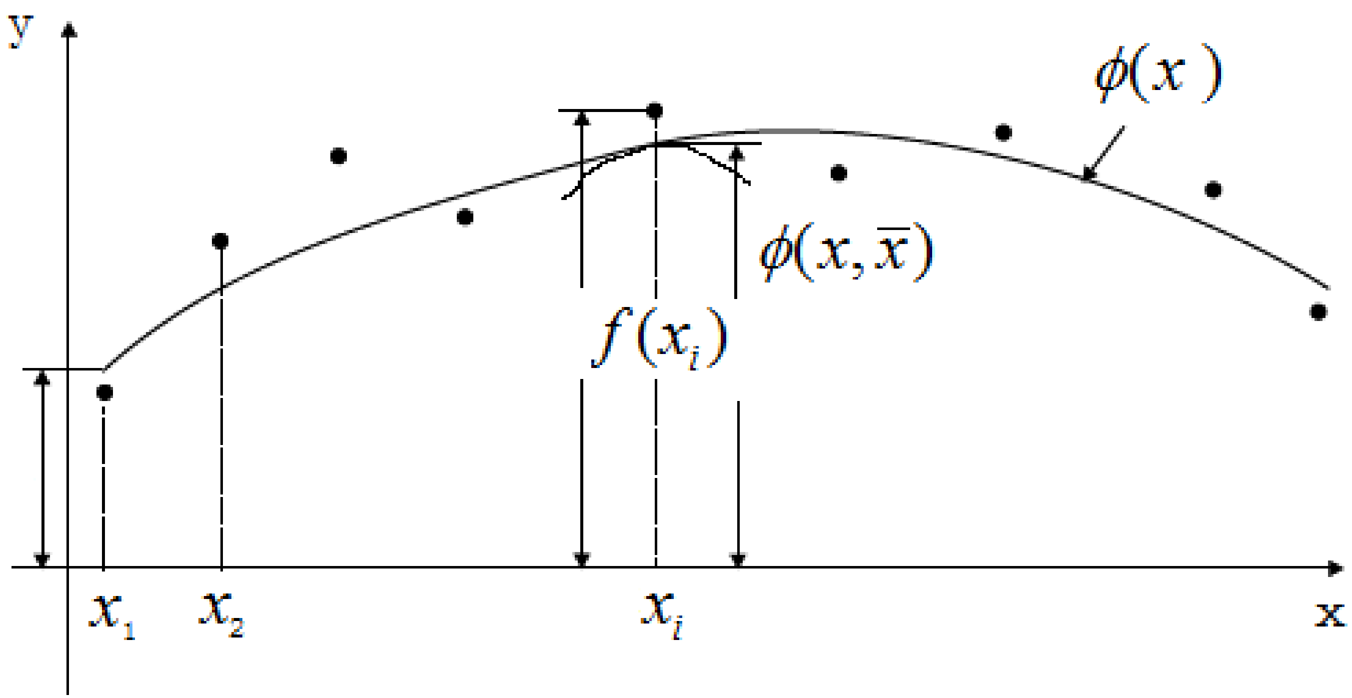
二次基函数： $p^T(x) = (1, x, x^2)$

移动最小二乘法（续）

式(1)对应的局部近似为

$$\phi(x,\overline{x})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\overline{x})a_i(x)=\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\overline{x})\,\mathbf{a}(x) \qquad \text{---(2)}$$

这里 $\overline{x}$ 表示 x 的邻域内的点的坐标。



移动最小二乘法（续）

将 x 的影响区域内的节点进行编号，无妨依然记为 $\{x_i\}_{i=1}^{N}(N \le n)$，用最小二乘法确定式中的系数 $\mathbf{a}(x)$ 使得近似函数$\phi(x,\bar{x})$在这N个节点处的函数值与 f(x)的函数值误差的加权平方和最小

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} w_i(x)\left[\phi(x_i) - f(x_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i(x)\left[\sum_{j=1}^{m} p_j(x_i)a_j(x) - f(x_i)\right]^2 \qquad \text{---(3)}$$

所以有

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_k(x)} = 2\sum_{i=1}^{N} w_i(x)\left[\sum_{j=1}^{m} p_j(x_i)a_j(x) - f(x_i)\right]p_k(x_i) = 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots m)$$

移动最小二乘法（续）

由此得到

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{N} w_i(x)p_j(x_i)p_k(x_i)\right]a_j(x)=\left[\sum_{i=1}^{N} w_i(x)p_k(x_i)\right]f(x_i) \quad \text{---(4)}$$

将式(4)表示的方程组表示成矩阵形式为

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x)=\mathbf{B}(x)\mathbf{f}$$

其中

$$\mathbf{A}(x)=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(x)\mathbf{P},\mathbf{B}(x)=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(x)$$

$$\mathbf{a}(x)=(\ a_1(x)\ ,a_2(x),\cdots,a_m(x)\ )^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{f}=(\ f(x_1)\ ,f(x_2),\cdots,f(x_N)\ )^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ p_1(x_N) & p_2(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W}(x)=\begin{bmatrix} w_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N(x) \end{bmatrix}$$

移动最小二乘法（续）

由式 (4)可知

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)\mathbf{f} \qquad \text{---(5)}$$

为保证 $\mathbf{A}(x)$ 可逆，x的影响区域要包含足够的节点。

将式(5)代入式得(2)

$$\phi(x,\bar{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\bar{x})\,\mathbf{a}(x) = [\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\bar{x})\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)]\cdot\mathbf{f}$$

取 $\phi(x) = \phi(x,\bar{x})\big|_{\bar{x}=x}$，即对任意计算点x采用如上相同的计算过程进行近似，于是对求解域 $[a,b]$ 中的所有点都可以建立相应的近似。