第一节 离散型随机变量及其分布律 (2)

- 一、离散型随机变量的分布律
- 二、常见离散型随机变量的概率分布
- 三、内容小结

一、离散型随机变量的分布律

1.定义 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k\ (k=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率, 为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

称此式为离散型随机变量 X 的分布律.

分布律可记为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

或记为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

其中　(1) $p_k \geq 0, \quad k = 1,2,\cdots;$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

注. 1^{o}分布律中的 p_k 必须满足:

$$(1)\quad 0 \le p_k \le 1 \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

2^{o}若X 是离散型随机变量,则其分布函数为:

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\}$$

其中“$\sum\limits_{x_k \le x}$”是对于一切满足 $x_k \le x$ 的k而言.

例1 设随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{a}{3^k k!}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

试确定常数a.

解 由 $0\le p_k \le 1(k=0,1,2,\cdots)$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

得 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{3^k k!}=1$ 即 $a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{3})^k}{k!}=1$

$\because \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{3})^k}{k!}=e^{\frac{1}{3}}$ $\therefore\ a=e^{-\frac{1}{3}}$

2. 离散型随机变量分布律与分布函数及事件概率的关系

(1) 若已知 X 的分布律：

$$p_k = P\{X = x_k\} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

则X的分布函数：

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\} \quad (x \in R)$$

事件 $\{a < X \le b\}$的概率：

$$P\{a < X \le b\} = \sum_{a < x_k \le b} P\{X = x_k\}$$

(2) 若已知 X的分布函数$F(x)$，则X的分布律：

$$\begin{aligned} p_k &= P\{X = x_k\} \\ &= F(x_k) - F(x_k - 0) \\ &= F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad (k = 1,2,\cdots) \end{aligned}$$

$$(\because \quad P\{X = x_k\} = P\{x_{k-1} < X \le x_k\} \quad)$$

注： $P\{a \le X < b\}$

$$= P\{a < X \le b\} + P\{X = a\} - P\{X = b\}$$

$$= [\cancel{F(b)} - \cancel{F(a)}] + [\cancel{F(a)} - F(a-0)] - [\cancel{F(b)} - F(b-0)]$$

$$= F(b-0) - F(a-0)$$

$$\ne F(b) - F(a)$$

例2 一盒内装有5个乒乓球，其中2个旧的，3个新的，从中任取2个，求取得的新球个数X的分布律与分布函数，并计算：

$$P\{0 < X \le 2\},\quad P\{0 \le X < 2\}.$$

解 X={ 取得的新球个数 }，其分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_3^k \cdot C_2^{2-k}}{C_5^2} \qquad (k = 0, 1, 2)$$

或

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

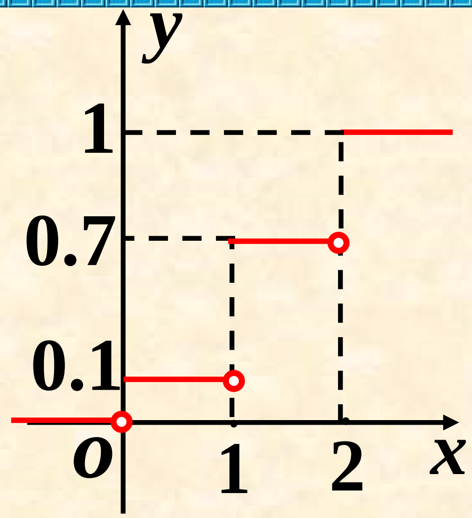
X的分布函数为

$$F(x) = P\{X \le x\} \qquad (x \in R)$$

$$= \sum_{k \le x} P\{X = k\}$$

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \le x < 1 \\ 0.7, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$



方法1. $P\{0 < X \le 2\}$

$$= P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$

$$= 0.6 + 0.3 = 0.9$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \le x < 1 \\ 0.7, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$P\{0 \le X < 2\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= 0.1 + 0.6 = 0.7$$

方法2. $P\{0 < X \le 2\} = F(2) - F(0) = 1 - 0.1 = 0.9$

$$P\{0 \le X < 2\} = F(2-0) - F(0-0)$$

$$= 0.7 - 0 = 0.7$$

二、常见离散型随机变量的概率分布

1.退化分布

若随机变量X取常数值C的概率为1,即

$$P(X=C)=1$$

则称X服从退化分布.

2.两点分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值 , 它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从 (0-1) 分布或两点分布.记为$X \sim B(1,p)$

实例1 “抛硬币”试验,观察正、反两面情况.

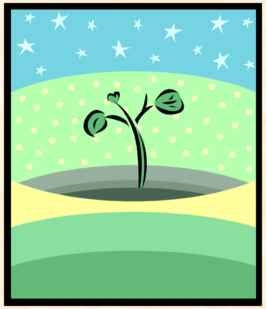
$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & 当 e = 正面, \\ 1, & 当 e = 反面. \end{cases}$$

随机变量 X 服从 (0-1) 分布.

其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



说明

两点分布是最简单的一种分布,任何一个只有两种可能结果的随机现象, 比如新生婴儿是男还是女、明天是否下雨、种籽是否发芽等, 都属于两点分布.

目录 上页 下页 返回 结束

3.均匀分布

如果随机变量 X 的分布律为

X	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

其中 $(a_i \neq a_j), (i \neq j)$,则称 X 服从均匀分布.

实例 抛掷骰子并记出现的点数为随机变量 X,

则有

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

4.二项分布

若X的分布律为: $P\{X=k\}=$

$$C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记}\ q=1-p} C_n^k\ p^k q^{n-k}$$

或为:

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
p_k	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	p^n

称这样的分布为二项分布.记为 $X \sim B(n,p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

例如 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击,每次射击时击中目标的概率为 0.6 ,则击中目标的次数 X 服从 $B(5,0.6)$ 的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$(0.4)^5$	$C_5^1 0.6\cdot 0.4^4$	$C_5^2 0.6^2\cdot 0.4^3$	$C_5^3 0.6^3\cdot 0.4^2$	$C_5^4 0.6^4\cdot 0.4$	0.6^5

5. 泊松分布

设随机变量所有可能取的值为 0, 1, 2, $\cdots$, 而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数.则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.

λ：为单位时间内随机事件的平均发生率，比如汽车站台单位时间内平均候客人数。

泊松资料

泊松分布的背景及应用

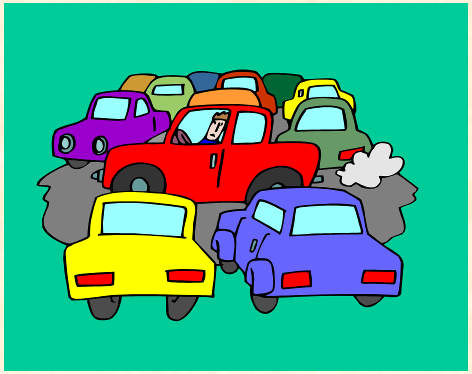
二十世纪初罗瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的 α 粒子个数的情况时，他们做了2608 次观察(每次时间为7.5 秒)发现放射性物质在规定的一段时间内，其放射的粒子数X 服从泊松分布.

在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的. 例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等, 都服从泊松分布.

地震 火山爆发 特大洪水

在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的. 例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等, 都服从泊松分布.

商场接待的顾客数　电话呼唤次数　交通事故次数



泊松分布与二项分布的关系

泊松定理 设 $X_n \sim B(n, p_n)$ $(n=1,2,\ldots)$

$$P\{X_n = k\} = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$(k = 0,1,\cdots,n)$$

且满足：$\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda(>0)$

则 $$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

注. 1° 条件 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda(>0)$，意味着：

当 $n >> 1$ 时， $0 < \underline{p_n} << 1$.

很小

2° 当n很大时，泊松分布可以视为二项分布的极限分布，即

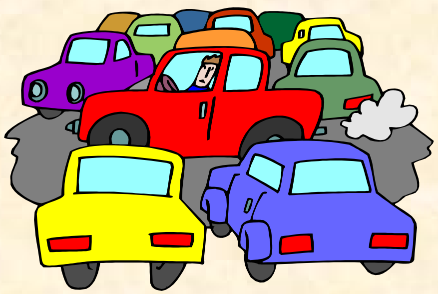
$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$(k = 0,1,\cdots,n)$$

其中 $\lambda \approx np_n$.

例4 有一繁忙的汽车站,每天有大量汽车通过,设每辆汽车在一天的某段时间内,出事故的概率为 0.0001,在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过,问出事故的次数不小于2的概率是多少?

解 设 1000 辆车通过,出事故的次数为 X, 则



$$X \sim B(1000, 0.0001),$$

故所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - C_{1000}^{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999} = ?$$

$$\text{二项分布} \xrightarrow{n\text{很大}, p\text{ 很小}} \text{泊松分布}$$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1,$

$P\{X \geq 2\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - C_{1000}^{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

$$\approx 1 - \frac{1}{0!} \cdot e^{-0.1} - \frac{0.1}{1!} \cdot e^{-0.1} = 0.0047.$$

$$C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n)$$

6. 几何分布

若随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
p_k	p	qp	$\cdots$	$q^{k-1}p$	$\cdots$

$, \ p+q=1,$

则称 X 服从**几何分布**.

实例 设某批产品的次品率为 p,对该批产品做有放回的抽样检查，直到第一次抽到一只次品为止(在此之前抽到的全是正品), 那么所抽到的产品数目 X 是一个随机变量，求X 的分布律.

解 X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \cdots.$

设 A_i 表示"抽到的第 i 个产品是正品",

$$P\{X=k\}=P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A_k})$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \cdots \cdot P(A_{k-1})\cdot P(\overline{A_k})$$

$$=\underbrace{(1-p)(1-p)\cdot \cdots \cdot(1-p)}_{(k-1)}\cdot p=q^{k-1}p.$$

所以 X 服从几何分布. $(k=1,2,\cdots)$

说明 几何分布可作为描述某个试验 "**首次成功**" 的概率模型.

7.超几何分布

设X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\})$$

这里$n<N, \mathrm{k}<M, M<N$,则称X服从超几何分布.

说明 超几何分布在关于**废品率的计件检验**中常用到.

三、内容小结

离散型随机变量的分布

- 退化分布
- 两点分布
- 均匀分布
- 二项分布
- 泊松分布
- 几何分布
- 超几何分布

两点分布

$\uparrow \; n = 1$

二项分布

$\downarrow \; n > 10, \; p < 0.1$

泊松分布

几类常见的离散型分布

	分布名称	记号	分布律	背景
①	退化分布 (单点分布)		$P\{X = c\} = 1$	必然事件
②	两点分布 (或 0–1分布)	$X \sim B(1,p)$ $(0<p<1)$	$P\{X = k\}$ $= p^k(1-p)^{1-k}$ $(k = 0,1)$	贝努里概型

	分布名称	记号	分布律	背景
③	离散型均匀分布		$P\{X=k\}=\frac{1}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$	古典概型
④	二项分布	$X\sim B(n,p)$ $(0<p<1)$	$P\{X=k\}$ $=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$	n重贝努里概型
⑤	泊松分布	$X\sim P(\lambda)$ $(\lambda>0)$	$P\{X=k\}$ $=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	稀有事件

	分布名称	记号	分布律	背景
⑥	几何分布		$P\{X=k\}$ $=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots,n)$	在n重独立试验中，A首次发生的试验次数为X.
⑦	超几何分布		$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots,l)$ $l=\min\{M,n\})$ $n\le N, M<N$	设N件产品中有M件次品，从中任取n件，其中的次品数为X.

伯努利资料

Jacob Bernoulli

Born: 27 Dec 1654 in Basel, Switzerland

Died: 16 Aug 1705 in Basel, Switzerland

泊松资料

Siméon Poisson

Born: **21 June 1781 in Pithiviers, France**

Died: **25 April 1840 in Sceaux (near Paris), France**