Laplace变换

§1 Laplace变换的概念

1. Laplace变换的定义

2.Laplace变换的存在定理

3.常见函数的Laplace变换

1. Laplace变换的定义

设 $f(t)$是$[0,+\infty)$上的实(或复)值函数，若对参数 $s=\beta+j\omega$, $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在s平面的某一区域内收敛，则称其为$f(t)$的Laplace变换，记为

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)$称为$F(s)$的Laplace逆变换，记为

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

$F(s)$称为像函数，$f(t)$称为原像函数.

例1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ 的拉氏变换.

解 根据**Laplace**变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

这个积分在Re(s)>0时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).}$$

例2 求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 的Laplace变换(k为实数).

解 根据Laplace变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\,\mathrm{d}t$$

这个积分在Re(s)>k时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-k}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{kt}]=\frac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k).}$$

k为复数时上式也成立, 只是收敛区间Re(s)>Re(k).

2.拉氏变换的存在定理

若函数$f(t)$满足:

(1) 在$t\geq 0$的任一有限区间上分段连续;

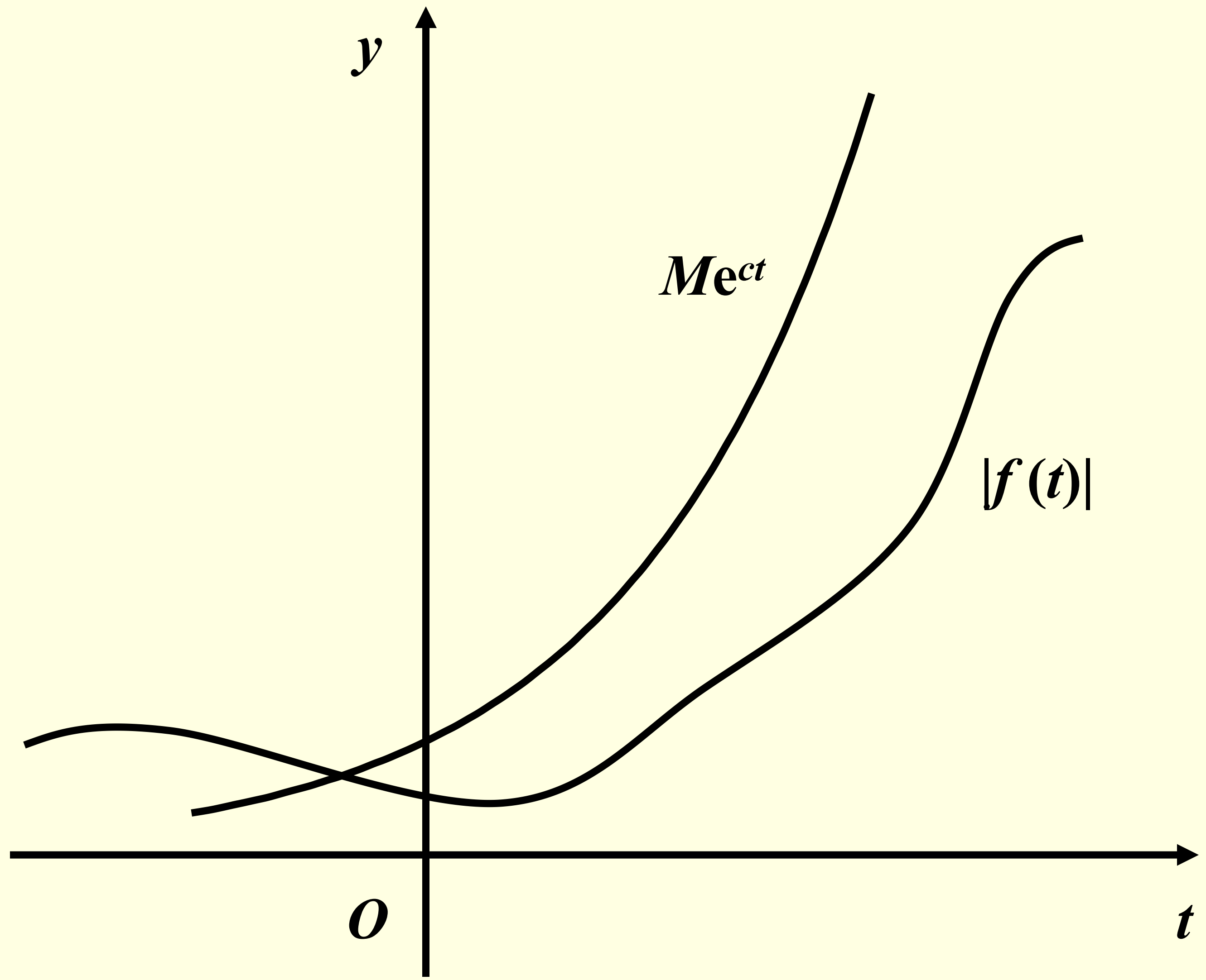
(2) 当$t\to+\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数函数,即存在常数 $M>0$及$c\geq 0$, 使得

$$|f(t)|\leq M\,\mathrm{e}^{ct},\ 0\leq t<+\infty.$$

则 $f(t)$的拉氏变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面$\mathrm{Re}(s)>c$上一定存在, 并且在$\mathrm{Re}(s)>c$的半平面内, $F(s)$为解析函数.



y
Me^ct
|f (t)|
O
t

说明： 由条件2 可知, 对于任何 t 值($0 \le t < +\infty$), 有

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-st}\right| = \left|f(t)\right|\mathrm{e}^{-\beta t} \le M\mathrm{e}^{-(\beta-c)t}, \mathrm{Re}(s)=\beta$$

若令 $(\beta - c) = \varepsilon > 0$，则

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le Me^{-\varepsilon t}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{-st}\right|\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\varepsilon}.$$

注1： 大部分常用函数的Laplace变换都存在(常义下);

注2： 存在定理的条件是充分但非必要条件.

3.常见函数的拉氏变换

(1) $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0).$

(2) $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{kt}] = \dfrac{1}{s-k} \quad (\mathrm{Re}(s) > k).$

(3) $\mathcal{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0).$

(4) $\mathcal{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0).$

(5) $\mathcal{L}\left[t^m\right] = \dfrac{m!}{s^{m+1}} \quad m \in Z^+, (\mathrm{Re}\, s > 0).$

(6)单位脉冲函数$\delta(t)$的拉氏变换

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Heaviside 函数

$$\delta(t)=H'(t).$$

$\delta(t)$的性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1.$$

(7)周期函数$f(t)=f(t+T)$的拉氏变换

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^T f(t)e^{-st}dt+\cdots+\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}dt+\cdots$$

$$=\int_0^T f(t)e^{-st}dt+\cdots+e^{-skT}\int_0^T f(t)e^{-st}dt+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt,\mathrm{Re(s)}>0$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]==\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt,\mathrm{Re(s)}>0.$$

例3 求 $\mathcal{L}[\cos t\delta(t)-\sin t u(t)]$.

解 $\mathcal{L}[\cos t\delta(t)-\sin t u(t)]$

$$=\int_{0^-}^{+\infty}\cos t\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\sin t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\cos t\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}.$$

§2 Laplace变换的性质

1.线性性质

2.微分性质

3.积分性质

4.平移性（延迟性）

5.位移性

假定在这些性质中, 凡是要求Laplace变换的函数都满足

$$|f(t)| \leq Me^{ct}.$$

1.线性性质

$\mathscr{L}\left[f_i(t)\right]=F_i(s)\ (i=1,2)$,则

$$\mathscr{L}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]=a_1F_1(s)+a_2F_2(s),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[b_1F_1(s)+b_2F_2(s)\right]=b_1 f_1(t)+b_2 f_2(t).$$

例4 求 $f(t)=\sin kt$ (k为实数) 的拉氏变换

解 $$\mathcal{L}[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kt\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kt})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-\mathrm{j}}{2}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}k)t}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}k)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{-\mathrm{j}}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}k}-\frac{1}{s+\mathrm{j}k}\right)=\frac{k}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}}$$

同理可得 $$\boxed{\mathcal{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}}$$

2.微分性质

原像函数的微分性质

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)\left(\operatorname{Re} s>c\right),\text{则}$$

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0)\quad\left(\operatorname{Re} s>c\right)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$\left(n=1,2,\cdots\right)\quad\left(\operatorname{Re} s>c\right)$$

特别当 $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=\cdots=f^{(n-1)}\left(0\right)=0$ 时，有

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\left(t\right)\right]=s^nF\left(s\right)$$

此性质可以将$f(t)$的微分方程转化为$F(s)$的代数方程.

证 $\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$= sF(s) - f(0).$

$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=\int_0^{+\infty} f''(t)e^{-st}dt = f'(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$

$= -f'(0) + s(sF(s) - f(0)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

例1 求 $f(t)=t^m$ 的拉氏变换（m为正整数）。

解 由于 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$, 而 $f^{(m)}(t)=m!$

一方面 $\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=\mathcal{L}[m!]=m!\mathcal{L}[u(t)]=m!\frac{1}{s}$;

另一方面 $\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=s^m\mathcal{L}\left[t^m\right]$;

$$s^m\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s}m!$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s^{m+1}}m! \quad (\mathrm{Re}\,s>0).}$$

例2 求 $f(t)=\sin kt$ (k为实数) 的拉氏变换（$\cos kt$）

解 $(\sin kt)''=-k^2\sin kt,$

$$L[(\sin kt)'']=s^2L[\sin kt]-k,$$

$$s^2L[\sin kt]-k=-k^2L[\sin kt],$$

$$L[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}.$$

$$\boxed{L[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}}$$

解 $(\cos kt)''=-k^2\cos kt,$

$$L[(\cos kt)'']=s^2L[\cos kt]-s,$$

$$s^2L[\cos kt]-s=-k^2L[\cos kt],$$

$$L[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}.$$

$$\boxed{L[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}}$$

象函数的微分性质:

$$\mathcal{L}\left[(-t)f(t)\right]=F'(s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]=(-t)f(t)\quad\left(\mathrm{Re}\,s>c\right).$$

$$\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right]=F^{(n)}(s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-t)^n f(t).$$

证 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,\ F'(s)=\int_0^{+\infty}(-t)f(t)e^{-st}dt,$

$$F''(s)=\int_0^{+\infty}(-t)^2 f(t)e^{-st}dt,\cdots,F^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}(-t)^n f(t)e^{-st}dt,$$

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}[(-t)^n f(t)].$$

例3 求 $f(t)=t^2\cos kt$ (k为实数) 的拉氏变换.

解

$$\mathcal{L}\left[t^2\cos kt\right]$$

$$=(-1)^2(\mathcal{L}\left[(-t)^2\cos kt\right])(s)$$

$$=(-1)^2(\mathcal{L}\left[\cos kt\right])''(s)$$

$$=\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)''=\frac{2s^3-6k^2s}{(s^2+k^2)^3}.$$

3. 积分性质:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)\quad(\operatorname{Re}s>c),\text{则}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}\quad(\operatorname{Re}s>\max(0,c))$$

$$\mathcal{L}\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t}_{n\text{次}}\}=\frac{1}{s^n}F(s)$$

证 令 $h(t)=\int_0^t f(t)dt,\ h(0)=0,\ h'(t)=f(t).$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[h'(t)]=sL[h(t)]-h(0)=sL[h(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}$$

例4 求 $f(t)=\int_0^t \cos t\,dt$ 的拉氏变换.

解

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t \cos t\,dt\right]=\frac{1}{s}\mathrm{L}\,[\cos t]=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}.$$

$$\mathrm{L}[\int_0^t \sin t\,dt]=\frac{1}{s}L[\sin t]=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=L[u(t)-\cos t]$$

象函数积分性质: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 则

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \int_s^{\infty}\{\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t\}\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\{\int_s^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}\mu\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{-1}{t}\mathrm{e}^{-\mu t}\bigg|_s^{\infty}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s.}$$

一般地,有 $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s}_{n\text{次}}$

例5 求函数$f(t)=\dfrac{\sin kt}{t}$的拉氏变换.

解 因 $L[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,

由积分性质：

$$L\left[\frac{\sin kt}{t}\right]=\int_s^\infty \frac{k}{s^2+k^2}ds=\arctan\frac{s}{k}\Big|_s^\infty=\operatorname{arccot}\frac{s}{k}.$$

注：如果积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$存在，L变换还可以用来计算积分.

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-0t}dt=L[\frac{f(t)}{t}]|_{s=0}=\int_0^{+\infty}L[f(t)]\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}e^{-0t}dt=L[\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}]|_{s=0}$$

$$=\int_0^{+\infty}L[e^{-t}-e^{-2t}]ds=\int_0^{+\infty}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}ds=\ln\frac{s+1}{s+2}|_0^{+\infty}=\ln 2.$$

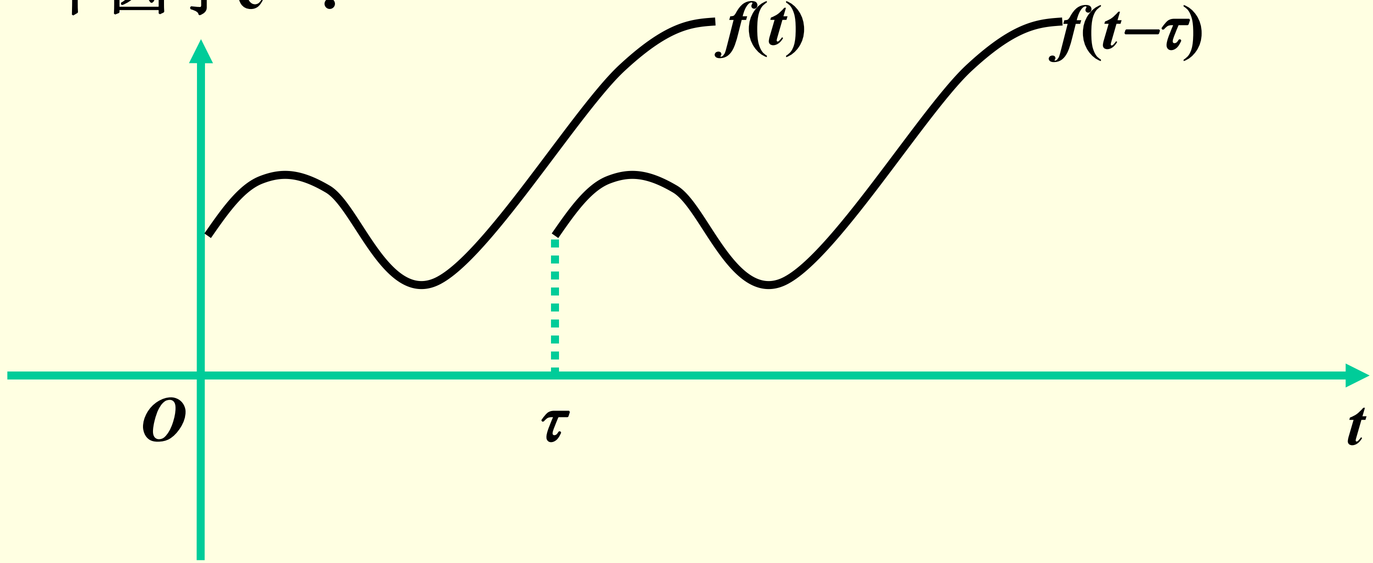
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-0t}dt=L(\frac{\sin t}{t})|_{s=0}=\int_0^{+\infty}L(\sin t)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

4.平移性(延迟性):

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)\ \left(t<0, f(t)=0\right)$,则

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-s\tau}F(s) \quad (\operatorname{Re} s > c)$$

函数$f(t-\tau)$与$f(t)$相比,$f(t)$从$t=0$开始有非零数值.而$f(t-\tau)$是从$t=\tau$开始才有非零数值. 即延迟了一个时间τ. 从它的图象讲,$f(t-\tau)$是由$f(t)$沿t轴向右平移τ而得, 其拉氏变换也多一个因子$e^{-s\tau}$.



证

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\tau} f(t-\tau)e^{-st}dt+\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt=e^{-s\tau}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}du$$

$$=e^{-s\tau}F(s)$$

$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,则对于任意非负实数 τ,

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)]=e^{-s\tau}F(s)\quad(\mathrm{Re}\,s>c)}$$

$$\boxed{\text{或}\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau)\quad(\mathrm{Re}\,s>c)}$$

例：求$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}]$.

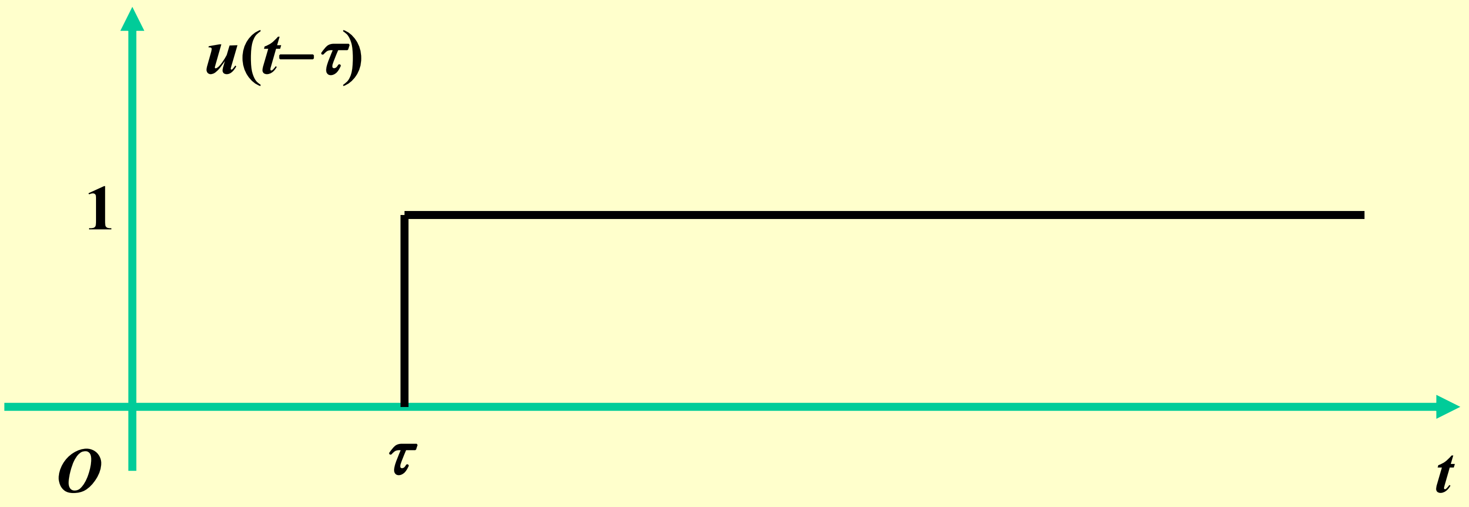
解:$\mathcal{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$,

故$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}]=\sin(t-2)u(t-2)$.

例6 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$ 的拉氏变换.

解 已知 $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,根据延迟性质

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}.$$



5.位移性：

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)\left(\mathrm{Re}\,s>c\right),$$ 则

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}f\left(t\right)\right]=F(s-\alpha)\quad\left(\mathrm{Re}(s-\alpha)>c\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-\alpha)\right]=e^{\alpha t}f\left(t\right)$$

证

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt=F(s-a).$$

例7 求 $f\left(t\right)=e^{\alpha t}\sin kt$ 的拉氏变换.

解　已知L $[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,由位移性质得

$$\mathrm{L}\,[\mathrm{e}^{at}\sin kt]=\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$$

例8 求 $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t$ 的拉氏变换.

解 $$\mathcal{L}[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t]=-\mathcal{L}[(-t)\int_0^t e^{-3t}\sin 2t]$$

$$=-(\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2t])'$$

$$=-(\frac{\mathcal{L}[e^{-3t}\sin 2t]}{s})'$$

$$=-(\frac{2}{s((s+3)^2+4)})'$$

$$=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2((s+3)^2+4)^2}.$$

例9 求函数 $f(t)=\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t}$ 的拉氏变换.

解 因 $\mathcal{L}[\mathrm{sh}\,t]=\dfrac{1}{s^2-1}$,

由积分性质:$\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}\,s$

$$=\int_s^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right]\mathrm{d}\,s=\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}\bigg|_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

§3 Laplace逆变换

1.Laplace反演积分

2.Laplace逆变换的计算

1）用留数计算

2）用Laplace逆变换的性质计算

1.Laplace反演积分

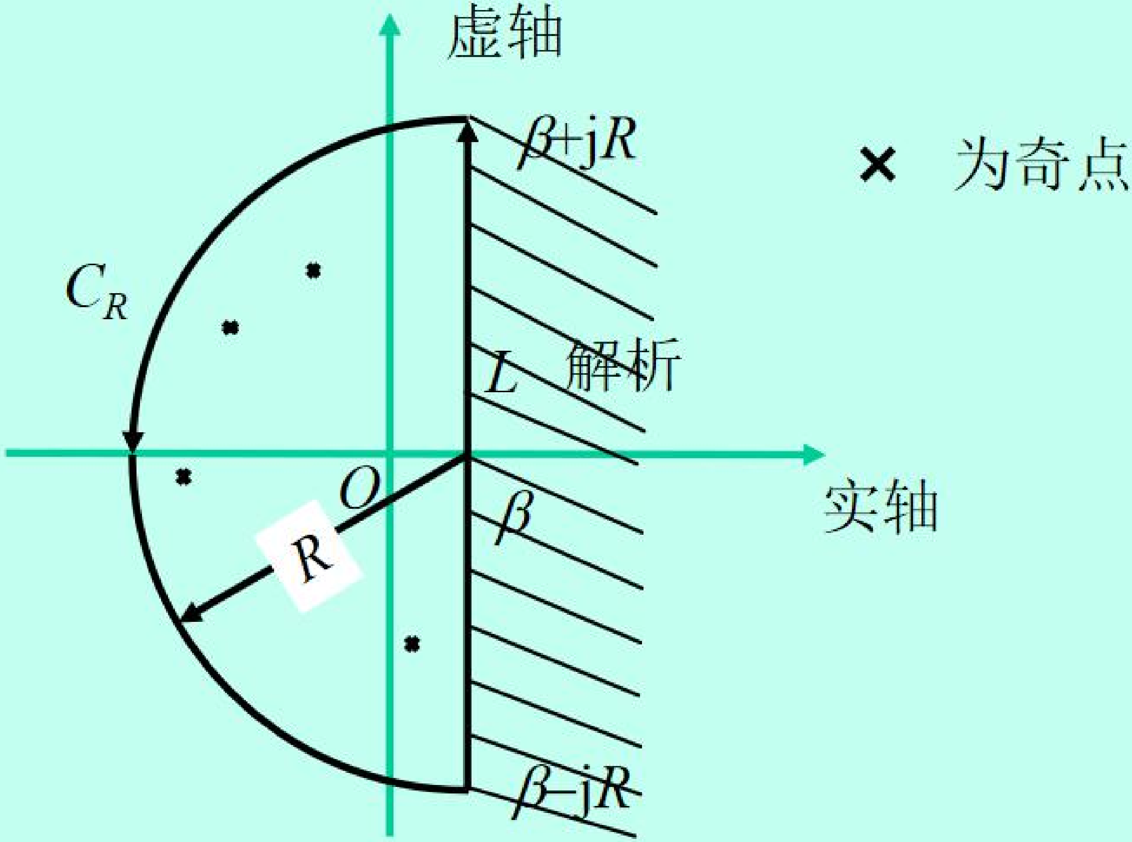
已知象函数$F(s)$求它的象原函数$f(t)$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ t>0.$$

右端的积分称为拉氏反演积分.

定理　若$F(s)$在全平面只有有限个奇点$s_1,\cdots,s_n$（均在$\mathrm{Re}\,s=\beta$左侧），且$\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$，则$t>0$时

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st},s_k\right].$$



虚轴
β+jR
× 为奇点
C_R
L 解析
O
R
β
实轴
β−jR

2.Laplace逆变换的计算

1）用留数计算

2）用Laplace逆变换的性质计算

$$\mathcal{L}^{-1}\left[b_1F_1(s)+b_2F_2(s)\right]=b_1f_1(t)+b_2f_2(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-t)^n f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(t)dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s\right]=\frac{f(t)}{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s\tau}F(s)\right]=f(t-\tau)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-\alpha)\right]=e^{\alpha t}f\left(t\right)$$

例1 求$F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换.

解 $s=0$为一级极点，$s=1$为二级极点，

$$f(t)=\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},0\right]+\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},1\right]$$

$$=\left.\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\right|_{s=0}+\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\left(\frac{t}{s}\mathrm{e}^{st}-\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{st}\right)$$

$$=1+(t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t})=1+\mathrm{e}^{t}(t-1)\quad(t>0).$$

例2 求$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$的逆变换.

解 $$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1},$$

所以 $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=t-1+e^{-t}\qquad (t>0).$$

§4 卷积

1. 卷积的概念

2. 卷积定理

1. 卷积的概念

1）两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果$f_1(t)$与$f_2(t)$都满足条件: 当$t<0$时, $f_1(t)=f_2(t)=0$, 则上式可以写成:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{0}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_t^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

2）性质

交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

分配律

$$f_1(t)*(f_2(t)+f_3(t))=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

结合律

$$(f_1(t)*f_2(t))*f_3(t)=f_1(t)*(f_2(t)*f_3(t))$$

例1 求$t*\mathrm{e}^{at}$.

解 $$t*\mathrm{e}^{at}=\int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{at}\int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{at}\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-a\tau}=\frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[\tau\,\mathrm{e}^{-a\tau}\Big|_0^t-\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$=\frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[t\,\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-a\tau}\Big|_0^t\right]$$

$$=\frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[t\,\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{a}(\mathrm{e}^{-at}-1)\right]$$

$$=-\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}(\mathrm{e}^{at}-1).$$

2.卷积定理

设$f_1(t), f_2(t)$满足Laplace变换存在定理条件，

且$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

(或：$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$.)

推广：$\mathcal{L}[f_k(t)] = F_k(s)$，$k = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * \cdots * f_n(t)] = F_1(s) \cdots F_n(s)$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdots F_n(s)] = f_1(t) * \cdots * f_n(t).$$

证 $$\mathrm{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty} f_1(t)*f_2(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)d\tau\int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)d\tau\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{-s(\tau+u)}du$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{-su}du \quad = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

例 1 $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s(s+a)}$ **求F(s)的Laplace 逆变换.**

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s}\cdot\frac{1}{s+a}\right]=L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s}\right]*L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]=u(t-\pi)*e^{-at}$$

$$=\int_0^t u(\tau-\pi)e^{-a(t-\tau)}d\tau=\int_\pi^t e^{-a(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{a}[1-e^{-a(t-\pi)}]u(t-\pi)$$

例2 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$,求$\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$

解法1 $\mathrm{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]-\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t-\sin t$

解法2 $\mathrm{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]*\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t*\sin t$

$$=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau\, d\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)d\tau$$

$$=t+\sin(t-\tau)\Big|_0^t=t-\sin t.$$

例3 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+5)^2}$，求$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

解

$$F(s)=\frac{1}{[(s+1)^2+2^2]^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]=e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t*\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t=\frac{1}{4}\int_0^t(e^{-\tau}\sin 2\tau)(e^{-(t-\tau)}\sin 2(t-\tau)d\tau$$

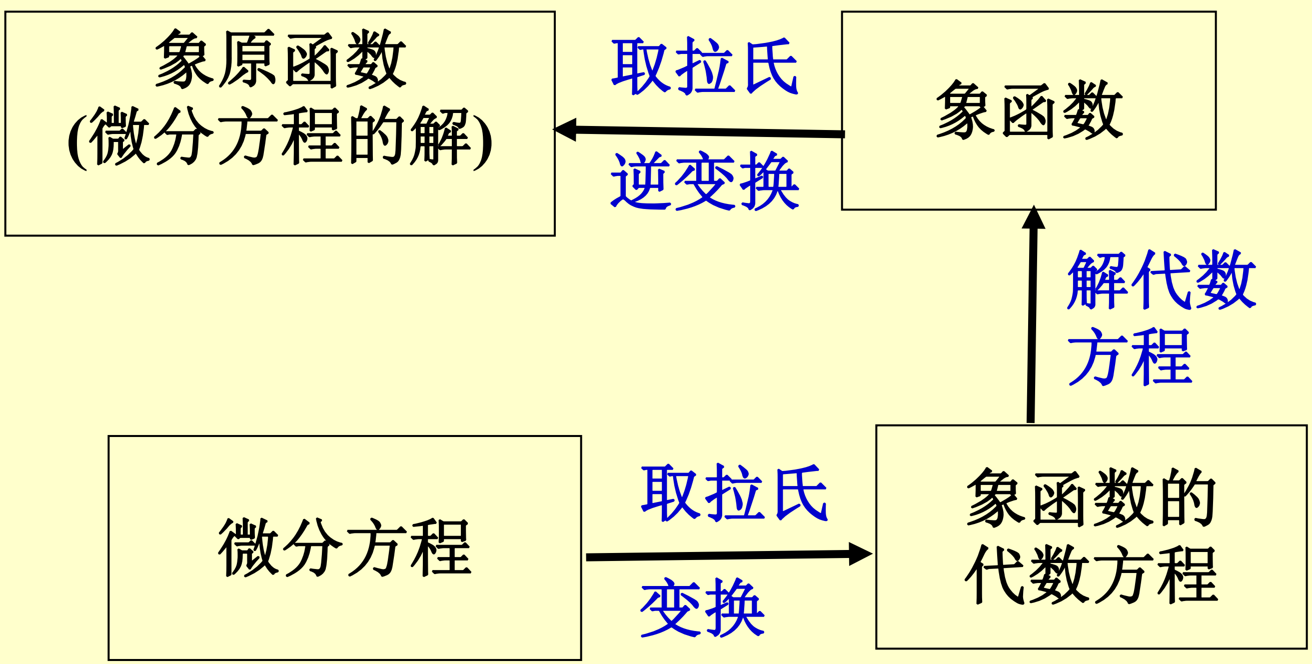
$$=\frac{1}{8}e^{-t}\int_0^t(\cos(4\tau-2t)-\cos 2t)d\tau=\frac{1}{16}e^{-t}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right).$$

§5 Laplace变换的应用

应用拉氏变换来解线性微(积)分方程（组）

微分方程的拉氏变换解法

首先取拉氏变换将微分方程化为象函数的代数方程,解代数方程求出象函数, 再取逆变换得最后的解.



例1 求解 $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2e^{t}\cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$

解

令$X(s)=\mathcal{L}\left[x(t)\right]$,方程两边取Laplace变换

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-2\left(sX(s)-x(0)\right)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}\Rightarrow X(s)=\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}\right]=e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{\left[s^2+1\right]^2}\right]$$

$$=-e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right]=te^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=te^t\ \sin t\ .$$

例2 求解 $\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t} \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t} \\ x(0)=1, y(0)=3 \end{cases}$

解　令 $X(s)=\mathcal{L}\left[x(t)\right], Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$,

$$\begin{cases} sX(s)-1+2X(s)+2Y(s)=\dfrac{10}{s-2} \\ -2X(s)+sY(s)-3+3Y(s)=\dfrac{13}{s-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ Y(s)=\dfrac{3}{s-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=e^{2t} \\ y(t)=3e^{2t} \end{cases}$$

例3 求解 $f(t)=at+\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$

解 令$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$,则

$$F(s)=\frac{a}{s^2}+F(s)\frac{1}{s^2+1},$$

$$F(s)=\frac{s^2+1}{s^2}\frac{a}{s^2}=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{s^4}=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{3!}\frac{3!}{s^4},$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{s^2}]+\mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{3!}\frac{3!}{s^4}]=at+\frac{a}{3!}t^3.$$

例4 求解 $y'(t)+\int_0^t y(\tau)d\tau = u(t-1)+1, y(0)=1.$

解　令$\mathcal{L}\left[y(t)\right]=Y(s)$,则

$$sY(s)-y(0)+\frac{Y(s)}{s}=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s},$$

$$Y(s)=\frac{e^{-s}+s+1}{s^2+1}=\frac{e^{-s}}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1},$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s^2+1}]+\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]+\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]$$

$$y(t)=\sin(t-1)u(t-1)+\cos t+\sin t$$

Thanks for your attention!