

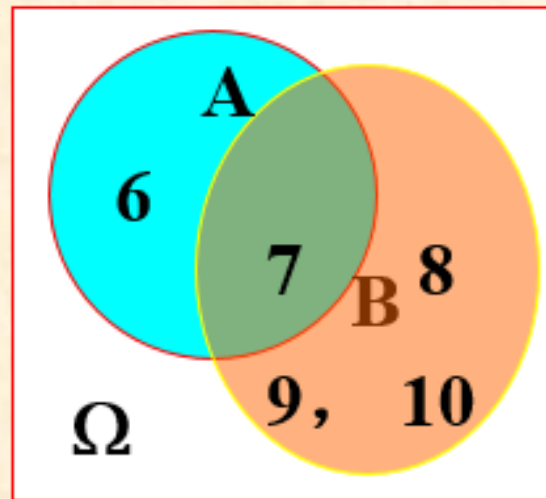
第四节 条件概率、 全概率公式与贝叶斯公式

- 一、条件概率
- 二、全概率公式与贝叶斯公式
- 三、内容小结

一、条件概率

1. 引例1

从1,2, ..., 10个数字中取数，已知每个数字等可能的取出。



(1) A: 取数大于5且小于8, $P(A)=?$ 2/10

(2) B: 取数大于6, 则求 $P(B)$? 4/10

(3) 已知取数大于6的条件下, 求取数大于5小于8的概率?

即已知B发生的条件下, A发生的概率?

$C = A|B$: “事件B发生的条件下, 事件A发生”

(3) 已知取数大于6的条件下，求取数大于5小于8的概率？

即已知B发生的条件下，A发生的概率？

$C = A|B$ ：“事件B发生的条件下，事件A发生”

\Leftrightarrow “样本空间 Ω 中属于B的样本点必然出现的

条件下，属于A的样本点出现”。

此时，样本空间已不再是原来区间[1...10]中样本点的 Ω ，而缩减为{7,8,9,10}中样本点的 $\Omega_B=B$ 。

$$\therefore P(C) = P(A|B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{注}^\circ P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{1/10}{4/10} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



这是巧合吗？

A: 取数大于5且小于8,

B: 取数大于6

注.

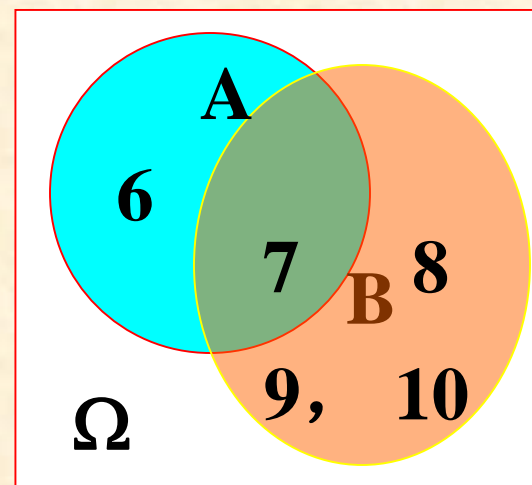
$$P(AB) = \frac{1}{10} \neq P(A|B) = \frac{1}{4}$$

$P(AB)$: 以 Ω 为样本空间

$P(A|B)$: 以 $\Omega_B = B$ 为样本空间

$$3^\circ \quad \underline{P(A|B)} = \frac{1}{4} = \frac{1/10}{4/10} = \frac{\underline{P(AB)}}{\underline{P(B)}}$$

这是巧合吗? 不是.



一、条件概率

引例2. 甲乙两台车床加工同一种机械零件，质量表如下：

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总 计	85	15	100

从这100个零件中任取一个，求下列事件的概率：

- (1) 取出的一个为正品; A
- (2) 取出的一个为甲车床加工的零件; B
- (3) 取出的一个为甲车床加工的正品; AB
- (4) 已知取出的一个为甲车床加工的零件,
其为正品. C

解 (1) $P(A) = \frac{85}{100} = 0.85$

(2) $P(B) = \frac{40}{100} = 0.40$

(3) $P(AB) = \frac{35}{100} = 0.35$

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总 计	85	15	100

(4) 已知取出的一个为甲车床加工的零件，
其为正品. **A** **附加条件B**

$C = A|B$ ：“事件**B**发生的条件下，事件**A**发生”
 \Leftrightarrow “样本空间 Ω 中属于**B**的样本点必然出现的
条件下，属于**A**的样本点出现”。

此时，样本空间已不再是原来包含100个样本点的 Ω ，而缩减为只包含40个样本点的 $\Omega_B=B$ 。

$$\therefore P(C) = P(A|B) = \frac{35}{40} = 0.875$$

注. 1° $P(A) = 0.85 \neq P(A|B)$

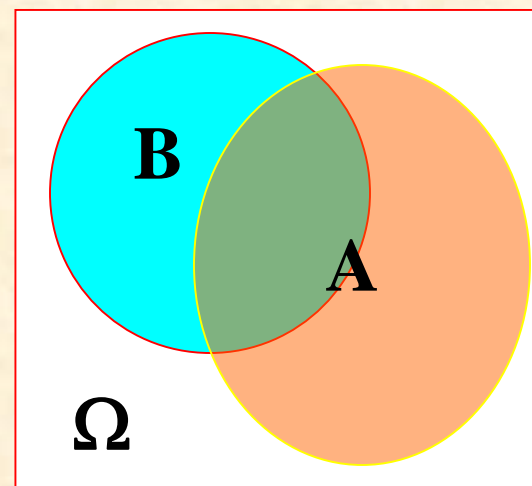
2° $P(AB) = 0.35 \neq P(A|B)$

$P(AB)$: 以 Ω 为样本空间

$P(A|B)$: 以 $\Omega_B = B$ 为样本空间

$$3^\circ \quad \underline{P(A|B)} = \frac{35}{40} = \frac{35 / 100}{40 / 100} = \frac{P(AB)}{\underline{P(B)}}$$

这是巧合吗？ 不是.



引例2. 将一枚硬币抛掷两次,观察其出现正反两方面的情况,设事件 A 为“至少有一次为正面”,事件 B 为“两次掷出同一面”.现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

分析 设 H 为正面, T 为反面.

$$\Omega = \{ HH, HT, TH, TT \}.$$

$$A = \{ HH, HT, TH \}, \quad B = \{ HH, TT \}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率,记为

$$P(B|A), \quad \text{则} \quad P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)} \neq P(B).$$

2. 定义1.8 (条件概率)

设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的
条件概率.

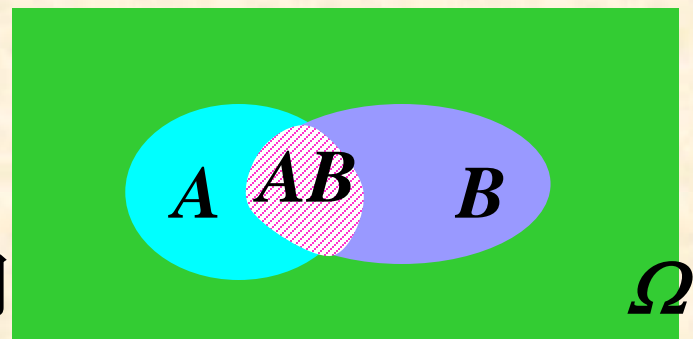
注. 1° 计算 $P(A|B)$ 的两种方法

- ① 样本空间缩减法;
- ② 用定义.

2° $P(AB)$ 与 $P(A|B)$ 的区别:

$P(AB)$: 以 Ω 为样本空间

$P(A|B)$: 以 $\Omega_B = B$ 为样本空间



如: 对于古典概型,

$$P(AB) = \frac{AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本空间} \Omega \text{ 包含的样本点数}}$$

$$P(A|B) = \frac{AB \text{ 包含的样本点数}}{B \text{ 包含的样本点数}}$$

例1 (1)求在有**3个小孩**的家庭中，至少有一个女孩的概率(设男孩与女孩是等可能的).

解 小孩→人， 性别→房， $N=2$

$n=3$ 样本点总数: 2^3 .

A = “3个中至少有一个女孩”

\bar{A} = “3个全是男孩”， $m=3$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n} = \frac{C_3^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$



(2) 在有3个小孩的家庭中，已知至少有1个女孩，求该家庭至少有1个男孩的概率。

解 $A = \text{“3个小孩中至少有一个女孩”}$

再设 $B = \text{“3个小孩中至少有一个男孩”}$

$$\text{则 } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_3^3}{2^3} = \frac{7}{8},$$

设 $A_1 = \text{“有一个男孩两个女孩”}$

$A_2 = \text{“有两个男孩一个女孩”}$

则 $AB = A_1 + A_2 \quad (A_1 A_2 = \emptyset)$

$$\therefore P(AB) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$= 2 \times \frac{C_3^2}{2^3} = \frac{6}{8}$$

从而 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$= \frac{6/8}{7/8} = \frac{6}{7}.$$

例2 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 A = “能活 20 岁以上” 的事件;
 B = “能活 25 岁以上” 的事件,

则有 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. $(\because B \subset A, \therefore AB = B)$

因为 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, $P(AB) = P(B)$,

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$.

3. 条件概率的性质

(1) 非负性： $0 \leq P(A|B) \leq 1$;

证 $\because AB \subset B \quad \therefore 0 \leq P(AB) \leq P(B)$

又 $\because P(B) > 0 \quad \therefore 0 \leq \frac{P(AB)}{P(B)} \leq 1$

即 $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

(2) 规范性： $P(\Omega|B) = 1$;

证 $\because \Omega B = B$

$$\therefore P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

(3) 可列可加性:

对于两两互斥的事件序列: A_1, A_2, \dots ,

$$\text{有 } P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B)$$

$$\begin{aligned} \text{证 } P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) &= \frac{P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B) \end{aligned}$$

(4) 加法公式:

$$\begin{aligned} & P((A_1 \cup A_2)|B) \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B) \end{aligned}$$

证 因为分母相同,只证明等式两端分子相等

$$\begin{aligned} & P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1B \cup A_2B) \\ &= P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B) \end{aligned}$$

(5) 逆事件的条件概率:

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B).$$

4.乘法公式

若 $P(B) > 0$,则有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$

若 $P(A) > 0$,则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

意义： 两事件积的概率等于其中的某一事件的概率乘以另一事件在该事件已发生的条件下的条件概率.

推广： 设 A, B, C 为事件,且 $P(AB) > 0$, 则有

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般地, 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件, 若

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0,$$

则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots \\ \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

摸球试验(卜里耶模型)

例3 设袋中装有 r 只红球, t 只白球. 每次自袋中任取一只球, 观察其颜色然后放回, 并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球, 若在袋中连续取球四次, 试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 设 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为事件“第 i 次取到红球”

则 $\overline{A_3}$ 、 $\overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球

因此所求概率为

$$\begin{aligned} & P(A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(\overline{A_3} | A_1 A_2) P(\overline{A_4} | A_1 A_2 \overline{A_3}) \\ &= \frac{r}{r+t} \cdot \frac{r+a}{r+t+a} \cdot \frac{t}{r+t+2a} \cdot \frac{t+a}{r+t+3a} \end{aligned}$$

此模型被卜里耶用来作为描述传染病的数学模型.

二、全概率公式与贝叶斯公式

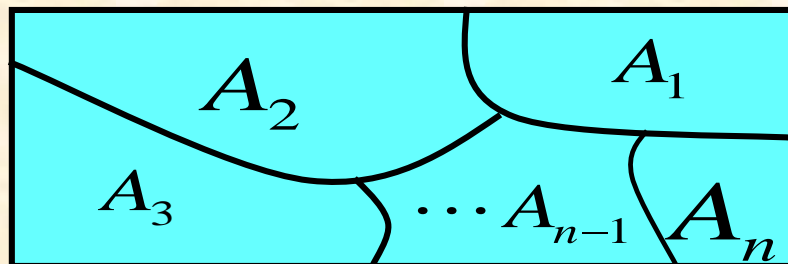
1. 样本空间的划分

定义 设 Ω 为试验 E 的样本空间, A_1, A_2, \dots, A_n 为 E 的一组事件, 若

$$(1) \quad A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega,$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为**样本空间** Ω 的一个**划分**.



2. 全概率公式

定理 设 Ω 为试验 E 的样本空间, B 为 E 的事件,
 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个划分,且 $P(A_i) > 0$
($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) \\ &\quad + \dots + P(B | A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i) \end{aligned}$$



全概率公式

证

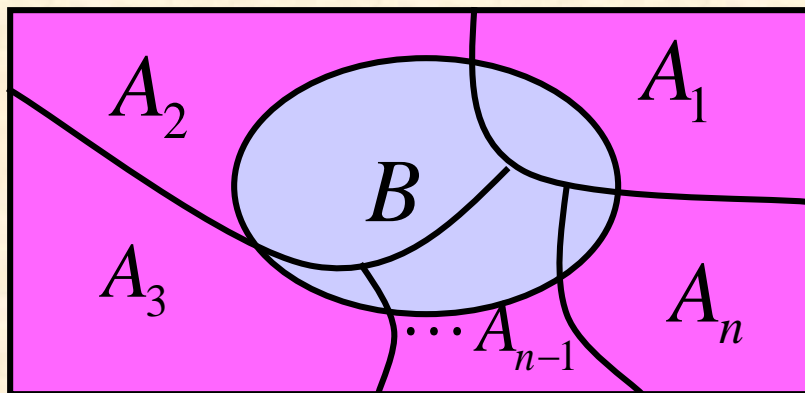
$$\begin{aligned} B &= B\Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n. \end{aligned}$$

$$\text{由 } A_i A_j = \emptyset \Rightarrow (BA_i)(BA_j) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) &= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \cdots \\ &+ P(A_n)P(B | A_n) \end{aligned}$$

图示



化整为零
各个击破

注. 全概率公式中的条件:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$$

可换为

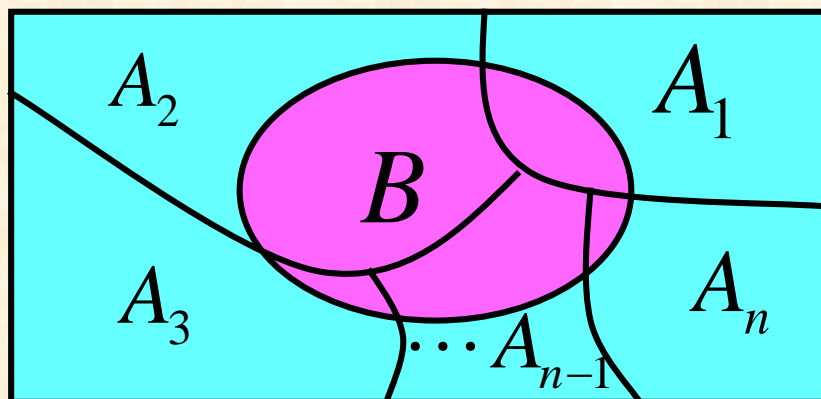
$$B \subset \sum_{i=1}^n A_i.$$

3.全概率公式的意义

直观意义：某事件 B 的发生由各种可能的“原因”

A_i ($i=1,2,\dots,n$)引起，而 A_i 与 A_j ($i \neq j$) 互斥，
则 B 发生的概率与 $P(BA_i)$ ($i=1,2,\dots,n$)有关，
且等于它们的总和：

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i).$$



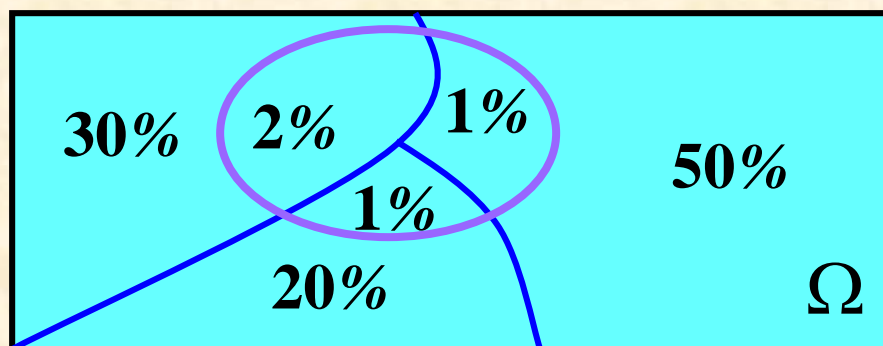
例4 有一批同一型号的产品,已知其中由一厂生产的占 **30%**, 二厂生产的占 **50%**, 三厂生产的占 **20%**, 又知这三个厂的产品次品率分别为**2%**, **1%**, **1%**, 问从这批产品中任取一件**是次品的概率**是多少?

解 设事件 **A** 为“任取一件为次品”,

事件 B_i 为“任取一件为 i 厂的产品”, $i = 1, 2, 3$.

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,$$

$$B_i B_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, 3.$$



由全概率公式得

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3).$$

$$P(B_1) = 0.3, \quad P(B_2) = 0.5, \quad P(B_3) = 0.2,$$

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.01,$$

故 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$

$$= 0.02 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 + 0.01 \times 0.2 = 0.013.$$

4. 贝叶斯公式

定理 设 Ω 为试验 E 的样本空间, B 为 E 的事件,
 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个划分,且 $P(B) > 0$,
 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

称此为**贝叶斯公式**.

证 $P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$$= \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

[证毕]

例5 盒中放有12个乒乓球，其中9个是新的。
第1次比赛时从中选取3个来用，比赛后仍放回
盒中，第2次比赛时再从盒中任取3个。

- (1) 求第2次取出的球都是新球的概率；
- (2) 又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率；

解 设 $A_i =$ “第1次比赛时用了*i*个新球”

$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

$B =$ “第2次取出的全是新球”

(1) 求第2次取出的球都是新球的概率;

A_i = “第1次比赛时用了*i*个新球”

B = “第2次取出的全是新球”

$$\therefore P(A_i) = \frac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$P(B|A_i) = \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= \sum_{i=0}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^3 \frac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3} \\ &= 0.146. \end{aligned}$$

第二次

新球: $9-i$ 个

旧球: $3+i$ 个

(比赛后放回
的球变为旧球)

(2) 又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率；

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)}$$

$$\therefore P(A_3B) = P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{C_9^3 \cdot C_3^0}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_6^3}{C_{12}^3}$$

$$\therefore P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{5}{21} = 0.24$$

若第一次取出的全是新球，则第二次

新球： 9-3 个
旧球： 3+3 个
(比赛后放回的球变为旧球)

三、内容小结

1. 条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ \longrightarrow 乘法定理

\downarrow
全概率公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

\downarrow
贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

$P(AB)$ 表示在样本空间 Ω 中, 计算 AB 发生的概率, 而 $P(B|A)$ 表示在缩小的样本空间 Ω_A 中, 计算 B 发生的概率. 用古典概率公式, 则

$$P(B|A) = \frac{AB \text{ 中基本事件数}}{\Omega_A \text{ 中基本事件数}},$$

$$P(AB) = \frac{AB \text{ 中基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件数}}$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.

贝叶斯资料



Thomas Bayes

**Born: 1702 in London,
England**

**Died: 17 April 1761 in
Tunbridge Wells, Kent,
England**

备用题

例3-1 设袋中有4只白球, 2只红球, (1) 无放回随机地抽取两次, 每次取一球, 求在两次抽取中至多抽到一个红球的概率? (2) 若无放回的抽取 3次, 每次抽取一球, 求 (a) 第一次是白球的情况下, 第二次与第三次均是白球的概率? (b) 第一次与第二次均是白球的情况下, 第三次是白球的概率?

解 (1) 设 A 为事件“两次抽取中至多抽到一个红球” 事件 A_1 为“第一次抽取到红球” A_2 为“第二次抽取到红球”.

$$\text{则有 } A = \overline{A_1} \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 + A_1 \overline{A_2},$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) + P(A_1 \overline{A_2}) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) + P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1) \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

(2) 设事件 A_i 为“第 i 次取出的是白球”, $i = 1, 2, 3$.

$$(a) P(A_2A_3|A_1) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)},$$

$$\text{因为 } P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A_1A_2A_3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } P(A_2A_3|A_1) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)} = \frac{1/5}{2/3} = \frac{3}{10}.$$

$$(b) P(A_3|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)},$$

$$\text{因为 } P(A_1A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } P(A_3|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}.$$

例3-2 某人忘记了电话号码的**最后一个数字**，
因而他随意地拨号. 求他拨号不超过3次
而接通电话的概率.

解 设 A = “拨号不超过3次接通电话”

A_i = “拨号 i 次接通电话”($i = 1, 2, 3$), 则

$$A = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$$

$$\therefore \bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \quad (\text{拨号3次都未接通})$$

$$\therefore P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$\begin{aligned}\therefore P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}\end{aligned}$$

$$\text{故 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

例3-3 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 $1/2$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $7/10$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $9/10$. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件“透镜第 i 次落下打破”, 以 B 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(B) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{7}{10})(1 - \frac{9}{10}) = \frac{3}{200}. \end{aligned}$$

例4-1 设一仓库中有10 箱同种规格的产品, 其中
由甲、乙、丙三厂生产的分别有5箱, 3箱, 2 箱,
三厂产品的废品率依次为 0.1, 0.2, 0.3 从这 10
箱产品中任取一箱, 再从这箱中任取一件产品,
求取得的正品概率.

解 设 A 为事件“取得的产品为正品” B_1, B_2, B_3 ,
分别表示“任取一件产品是甲、乙、丙生产的”,

$$\text{由题设知 } P(B_1) = \frac{5}{10}, \quad P(B_2) = \frac{3}{10}, \quad P(B_3) = \frac{2}{10}.$$

$$P(A|B_1) = 0.9, P(A|B_2) = 0.8, P(A|B_3) = 0.7,$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10} \\ &= 0.83. \end{aligned}$$

抓阄是否与次序有关?

例4-2 五个阄, 其中两个阄内写着“有”字, 三个阄内不写字, 五人依次抓取, 问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

解 设 A_i 表示“第 i 人抓到有字阄”的事件,

$$i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad \text{则有 } P(A_1) = \frac{2}{5},$$

$$P(A_2) = P(A_2 \Omega) = P(A_2 \cap (A_1 \cup \bar{A}_1))$$



$$= P(A_1 A_2 + \overline{A_1} A_2) = P(A_1 A_2) + P(\overline{A_1} A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_3) = P(A_3 \Omega) = P(A_3 (A_1 \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2 \cup \overline{A_1} \overline{A_2}))$$

$$= P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2) \\
 &\quad + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\overline{A_2}) \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5},
 \end{aligned}$$

依此类推 $P(A_4) = P(A_5) = \frac{2}{5}$.

故抓阄与次序无关.

例5-1 根据以往的临床记录,某种诊断癌症的试验具有如下的效果:若以 A 表示事件“试验反应为阳性”,以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”,则有 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$.现在对自然人群进行普查,设被试验的人患有癌症的概率为0.005,即 $P(C) = 0.005$,试求 $P(C|A)$.

解 因为 $P(A|C) = 0.95$,
 $P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.05$,
 $P(C) = 0.005$, $P(\bar{C}) = 0.995$,



由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$
$$= 0.087.$$

即平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人患有癌症.

例5-2某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志

(1) 在仓库中随机地取一只元件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂,需求出此次品出由三家工厂生产的概率分别是多少.试求这些概率.

解 设 A 表示 "取到的是一只次品", B_i ($i = 1, 2, 3$)

表示 "所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 Ω 的一个划分,

且 $P(B_1) = 0.15$, $P(B_2) = 0.80$, $P(B_3) = 0.05$,

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.0125. \end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24.$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = 0.64,$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = 0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大.

例5-3对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为55%.每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为95%.试求已知某日早上第一件产品是合格时,机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A 为事件 "产品合格".

B 为事件 "机器调整良好".

则有

$$P(A|B) = 0.98, \quad P(A|\bar{B}) = 0.55,$$



$$P(B) = 0.95, \quad P(\bar{B}) = 0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} = 0.97. \end{aligned}$$

即当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为0.97.

先验概率与后验概率

上题中概率 0.95 是由以往的数据分析得到的, 叫做先验概率.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 0.97 叫做后验概率.