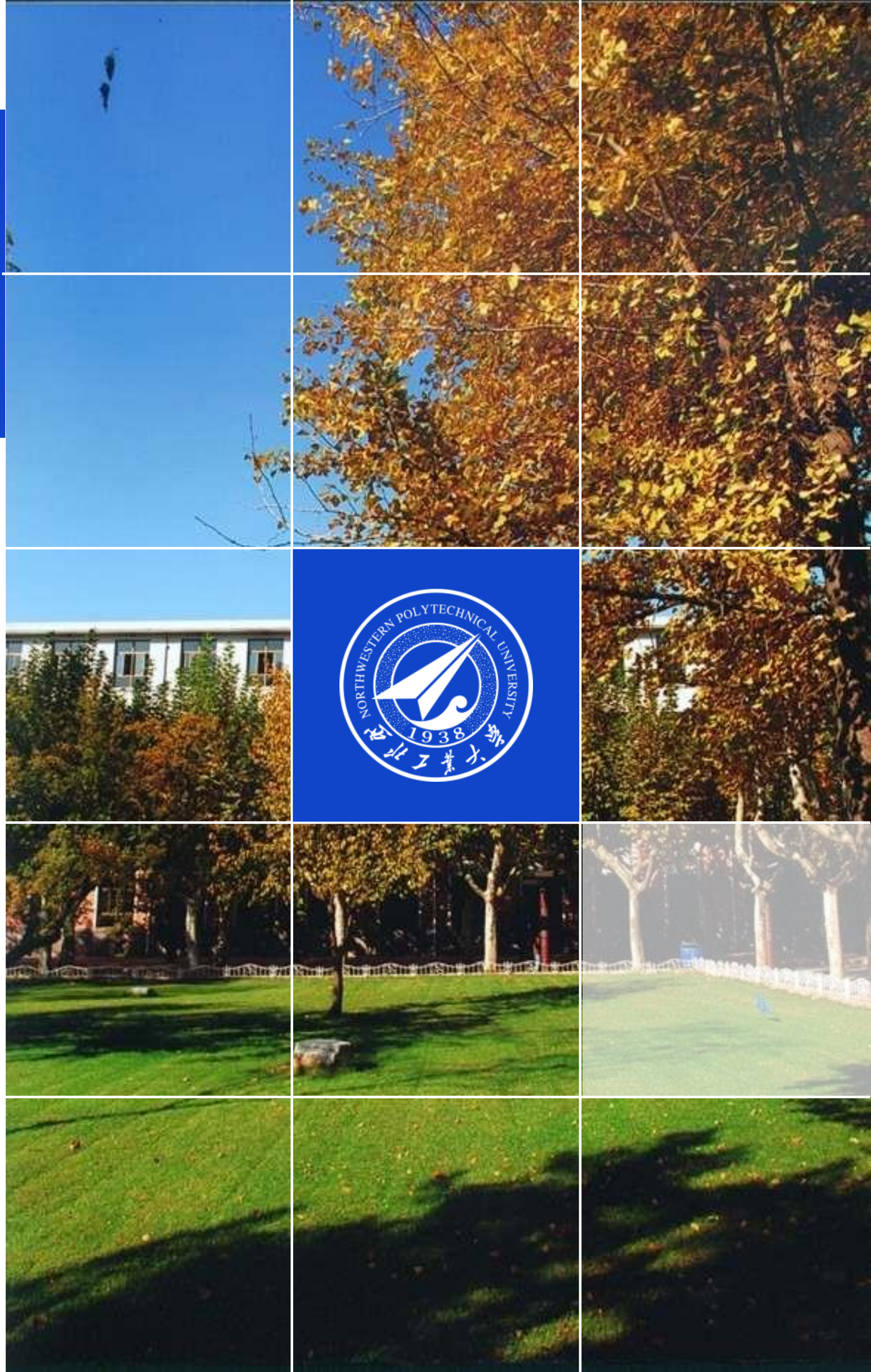
目 录 | contents



1. 概述

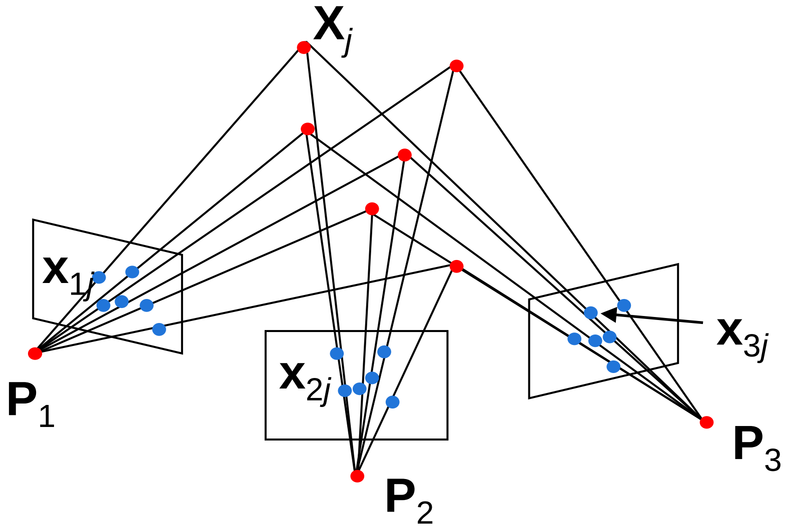
➢ 多视几何问题

- 场景几何（结构）：给定两个或多个图像中的匹配点，3D 空间中的对应点在哪里?
- 相关性（立体匹配）：给定一个图像中的一个点，它如何约束另一个图像中对应点的位置?
- 相机几何（运动）：给定两个或多个图像中的一组对应点，这些视图的相机矩阵是什么

1. 概述

➢ 多视几何问题

- 有: m 张图像拍摄n 个固定的三维空间点
  - $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$
- 问题:通过这mn 个相关性关系 $\mathbf{x}_{ij}$,估计出 m 个投射矩阵 $\mathbf{P}_i$ 和n 个 3D 点位置 $\mathbf{X}_j$



1. 概述

- SFM歧义问题

  - 如果我们按缩放因子 k 放大整个场景，同时按缩放因子 1/k 缩放相机矩阵，则图像中场景点的投影保持完全相同：

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \left(\frac{1}{k}\mathbf{P}\right)(k\mathbf{X})$$

无法恢复三维场景的绝对尺度

1. 概述

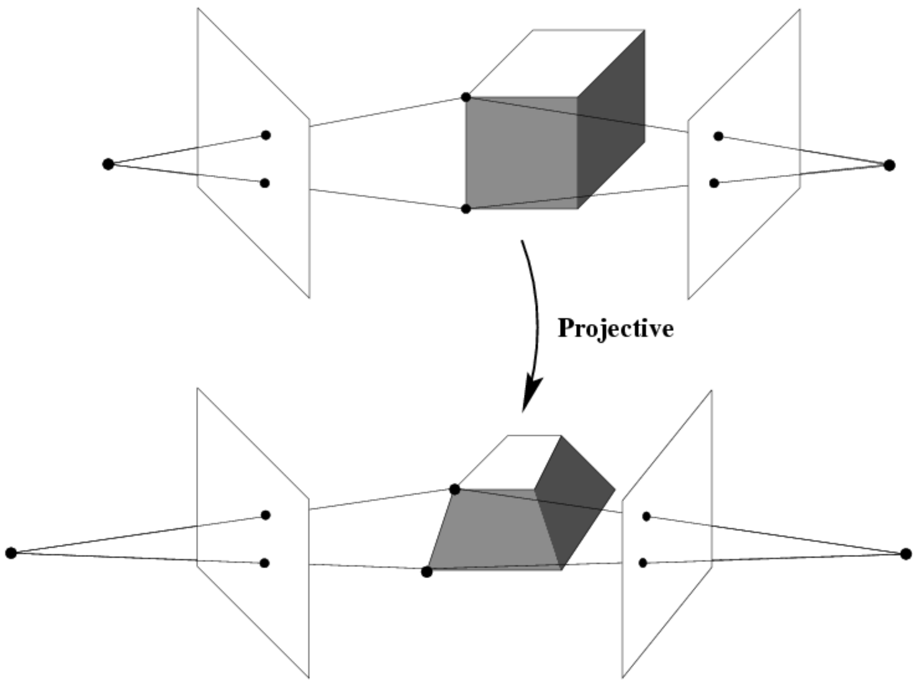
- SFM歧义问题

  - 如果我们按缩放因子 k 放大整个场景，同时按缩放因子 1/k 缩放相机矩阵，则图像中场景点的投影保持完全相同：
  - 更一般地说：如果我们使用转换矩阵 Q 变换场景并将其逆变换矩阵用于变换相机矩阵，那么图像也不会改变

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \left(\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\right)\left(\mathbf{Q}\mathbf{X}\right)$$

1. 概述

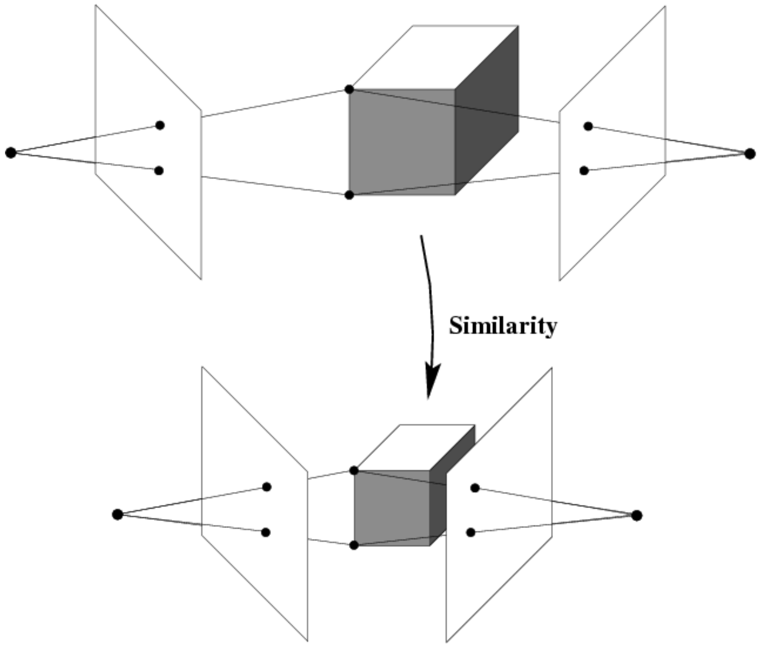
➢ SFM歧义问题



$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_P^{-1}\right)\left(\mathbf{Q}_P\mathbf{X}\right)$$

1. 概述

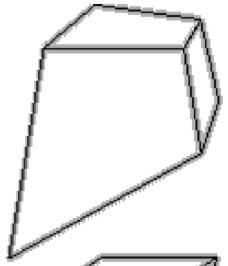
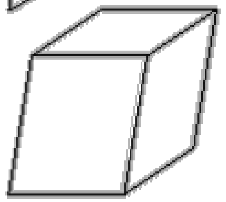
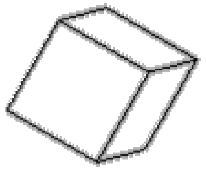
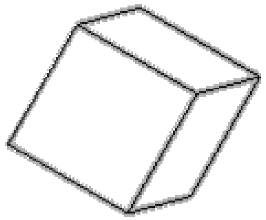
- SFM歧义问题



$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_S^{-1}\right)\left(\mathbf{Q}_S\mathbf{X}\right)$$

2. 原理

➢ 3D变换

Projective 15dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ v^T & v \end{bmatrix}$		Preserves intersection and tangency
Affine 12dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		Preserves parallellism, volume ratios
Similarity 7dof	$\begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		Preserves angles, ratios of length
Euclidean 6dof	$\begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		Preserves angles, lengths

- 对于相机参数和场景没有限制的情况下，用投射变换进行重建
- 需要附加信息将重建升级为仿射、相似或欧几里得

2. 原理

- 3D变换

- 欧式结构恢复（摄像机内参数已知，外参数未知）
- 仿射结构恢复（摄像机为仿射相机，内、外参数均未知）
- 透视结构恢复（摄像机为透视相机，内、外参数均未知）

- 对于相机参数和场景没有限制的情况下，用投射变换进行重建
- 需要附加信息将重建升级为仿射、相似或欧几里得

2.欧氏SFM

- 有: *m* 张图像拍摄*n* 个固定的三维空间点

  - $\boxed{\mathbf{x}_{ij}} = \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j = \boxed{K_i}\boxed{[R_i, T_i]}\boxed{\mathbf{X}_j}$ $\quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$

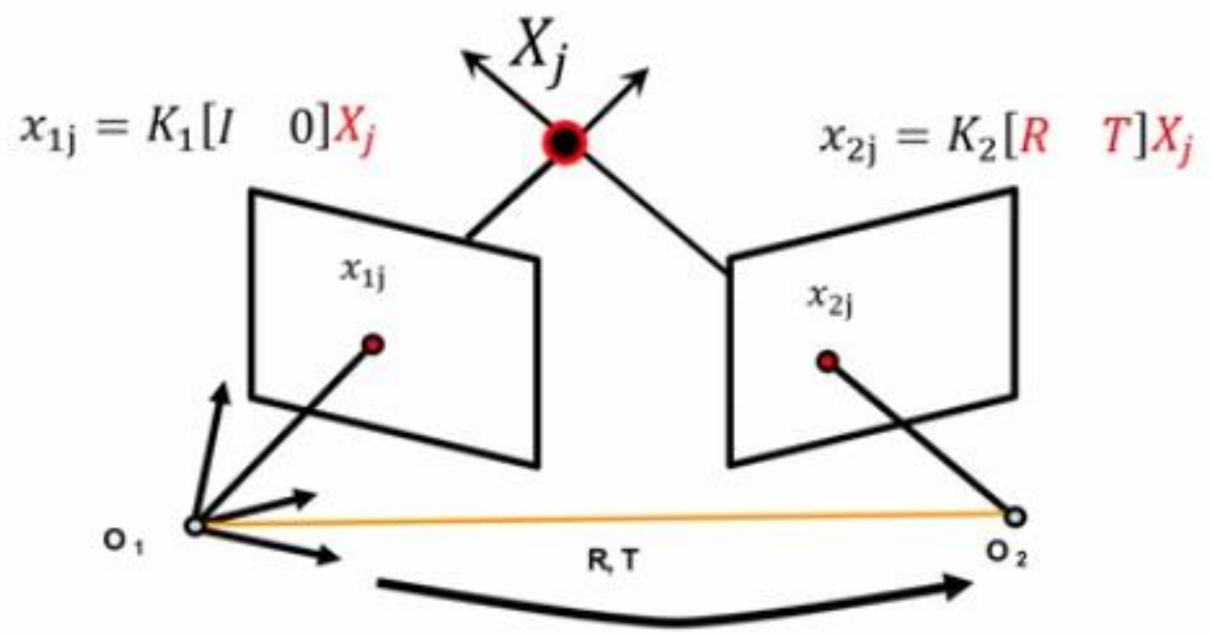
  已知：像素坐标，相机内参

  未知：空间点坐标，相机外参

- 问题:通过这*mn* 个相关性关系 $\mathbf{x}_{ij}$,估计出 *m* 个外参R_i, T_i和*n* 个 3D 点位置 $\mathbf{X}_j$

2.欧氏SFM

可将其中一个相机的相机坐标设为世界坐标，
只需求另一个外参



2.欧氏SFM

问题：

$$x_{1j} = M_1 X_j = K_1 [I \quad 0] X_j$$

$$j = 1 \ldots, n$$

$$x_{2j} = M_2 X_j = K_2 [R \quad T] X_j$$

求解：1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$$E = K_2^T F K_1$$

3. 分解本质矩阵获得R与T

$$E \rightarrow R、T$$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}} \left(d(x_{1j}, M_1 X_j) + d(x_{2j}, M_2 X_j) \right)$$

2.欧氏SFM

分解本征矩阵E

$$E = [T_\times]R$$

找到一个策略把 E 因式分解为两个组成部分……

重要说明：

$$x_2^T F x_1 = 0 \Longrightarrow E = K_2^T F K_1$$

无法确定F的符号及尺度；

$-F$或者kF都满足上式

所以，也无法确定E的符号及尺度

2.欧氏SFM

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质： 相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$可以写成：$[T_\times] = kUZU^T$

其中，U 是单位正交矩阵。

知道这个结论，不用知道如何推导

2.欧氏SFM

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质： 相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$可以写成：$[T_\times] = kUZU^T$

其中，U 是单位正交矩阵。

$\xrightarrow{\text{不考虑符号、尺度}}$

$$[T_\times] = UZU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

：

2.欧氏SFM

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$

$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

$$V^T = WU^TR$$

$$R = UW^TV^T$$

同理：

$$R = UWV^T$$

2.欧氏SFM

$$R = UWV^T \text{ or } UW^TV^T$$

注意: E 的这个因式分解只保证了矩阵 UWV^T 或 UW^TV^T 是正交的。其为旋转矩阵还需确保行列式的值为正：

$$R = (\det UWV^T)UWV^T \quad \text{或} \quad (\det UW^TV^T)UW^TV^T$$

矩阵乘以自己的行列式以保证处理后矩阵的行列式为正

$$T \times T = [T_\times]T = UZU^TT = 0$$

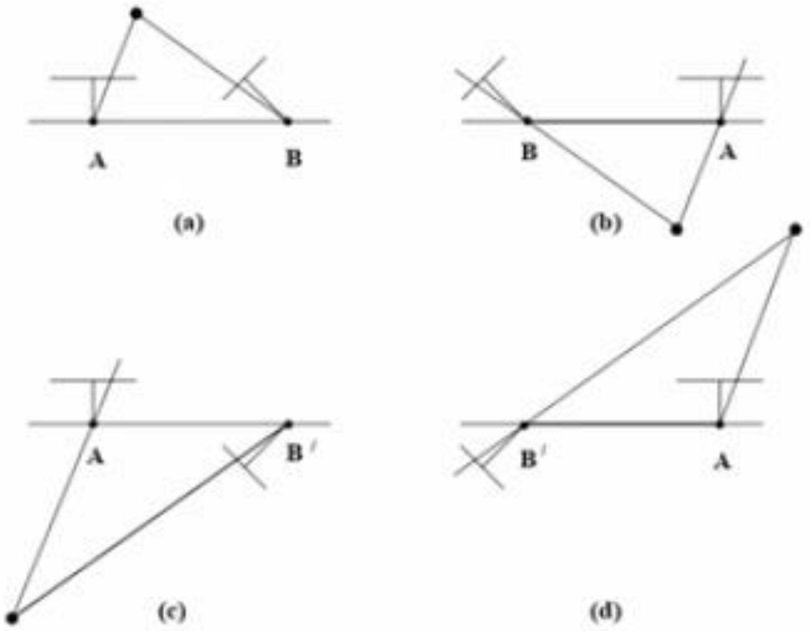
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{T} = \pm u_3 \quad (U\text{的第三列})$$

2.欧氏SFM

四种潜在 R,T 对：

$$\begin{cases} R=(\det UWV^T)UWV^T & T=u_3 \\ R=(\det UWV^T)UWV^T & T=-u_3 \\ R=(\det UW^TV^T)UW^TV^T & T=u_3 \\ R=(\det UW^TV^T)UW^TV^T & T=-u_3 \end{cases}$$



（图片来自于 Hartley and Zisserman 书第 260 页）

- 选择一个点三角化，正确的一组解能保证该点在两个摄像机的z坐标均为正。
- 对多个点进行三角化，选择在两个摄像机系下z坐标均为正的个数最多的那组R、T。（更鲁棒）

2.欧氏SFM

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤1：SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

步骤2： $R = (\det UWV^T)UWV^T$ 或 $(\det UW^TV^T)UW^TV^T$

$\mathrm{T} = \pm u_3$

步骤3：

$$\begin{cases} R = (\det UWV^T)UWV^T & T = u_3 \\ R = (\det UWV^T)UWV^T & T = -u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = -u_3 \end{cases}$$

步骤4：通过重建单个或多个点找出正确解

2.欧氏SFM

问题：

$$x_{1j} = M_1 X_j = K_1[I \quad 0]X_j$$

$$j = 1 \ldots, n$$

$$x_{2j} = M_2 X_j = K_2[R \quad T]X_j$$

求解：1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$$E = K_2^T F K_1$$

3. 分解本质矩阵获得R与T

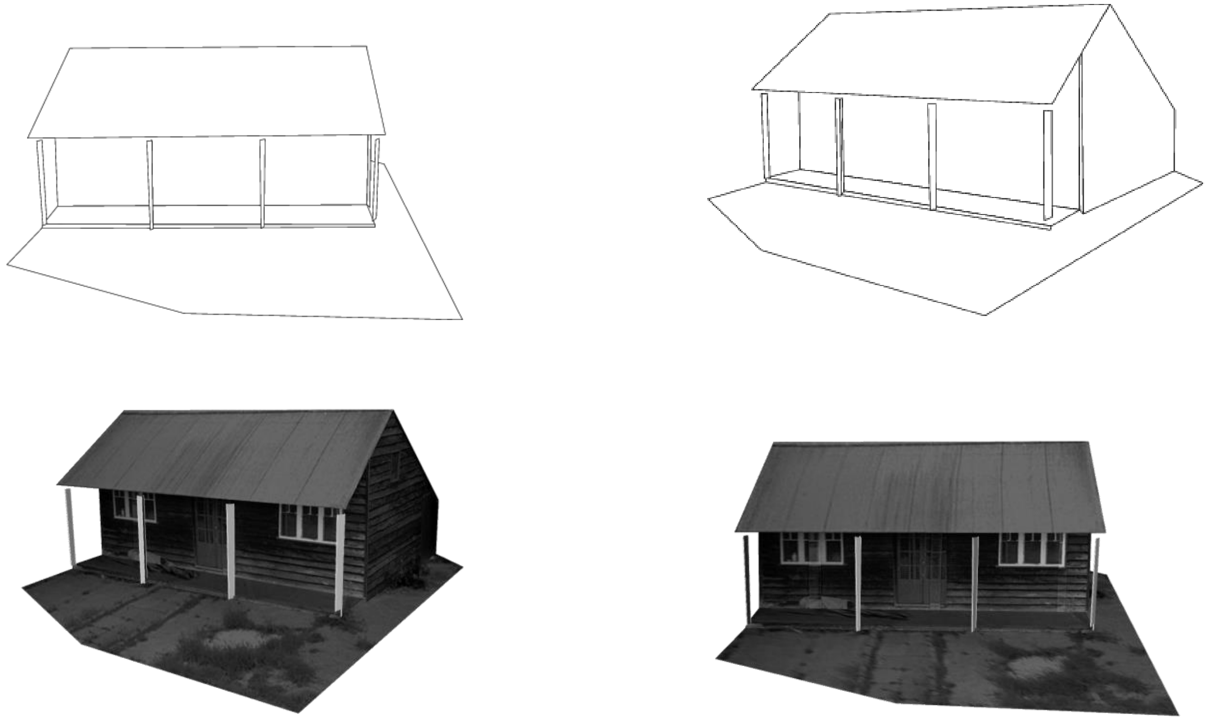
$$E \rightarrow R、T \rightarrow M_2$$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d(x_{1j}, M_1 X_j) + d(x_{2j}, M_2 X_j)\right)$$

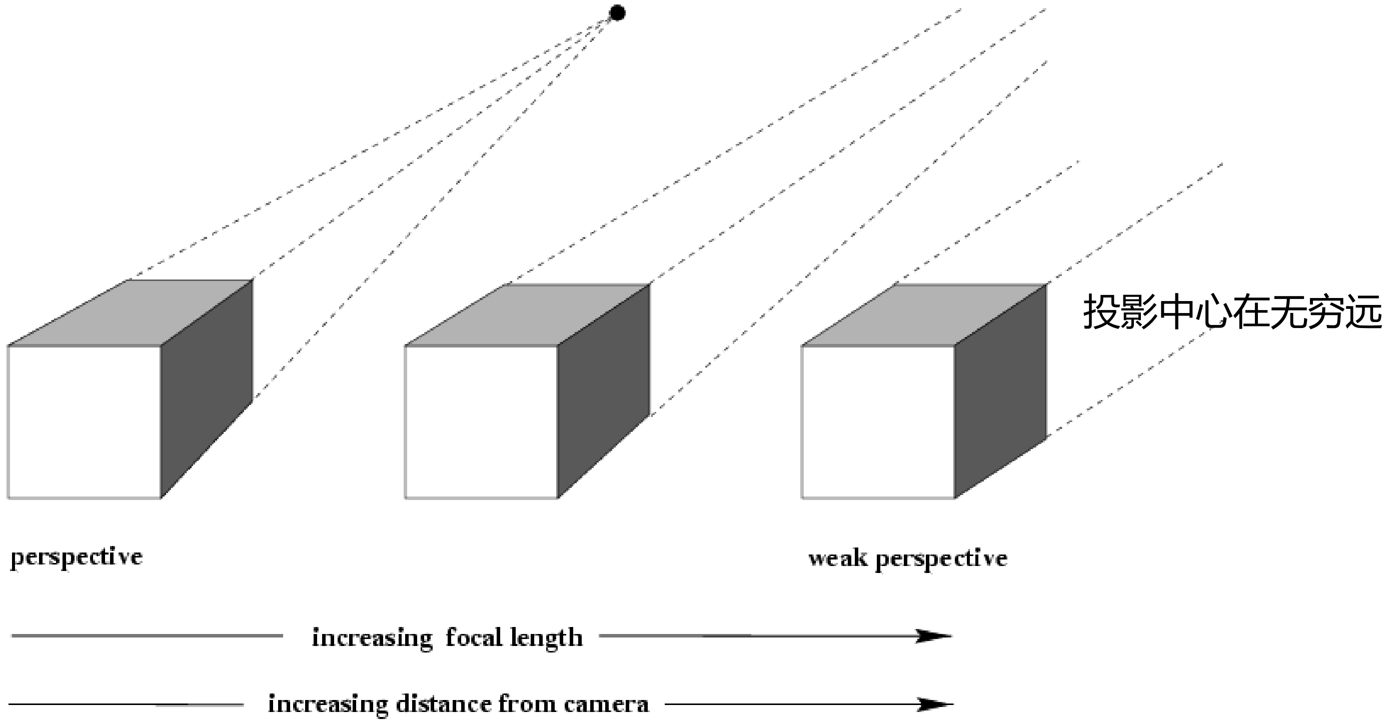
2.欧氏SFM

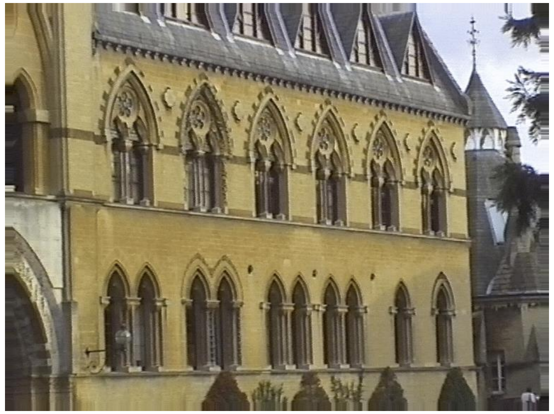
- 恢复出来的欧式结构与真实场景之间相差一个相似变换（旋转，平移，缩放）
- 恢复的场景与真实场景之间仅存在相似变换的重构称为**度量重构**



3. 仿射SFM

➢ 仿射变换

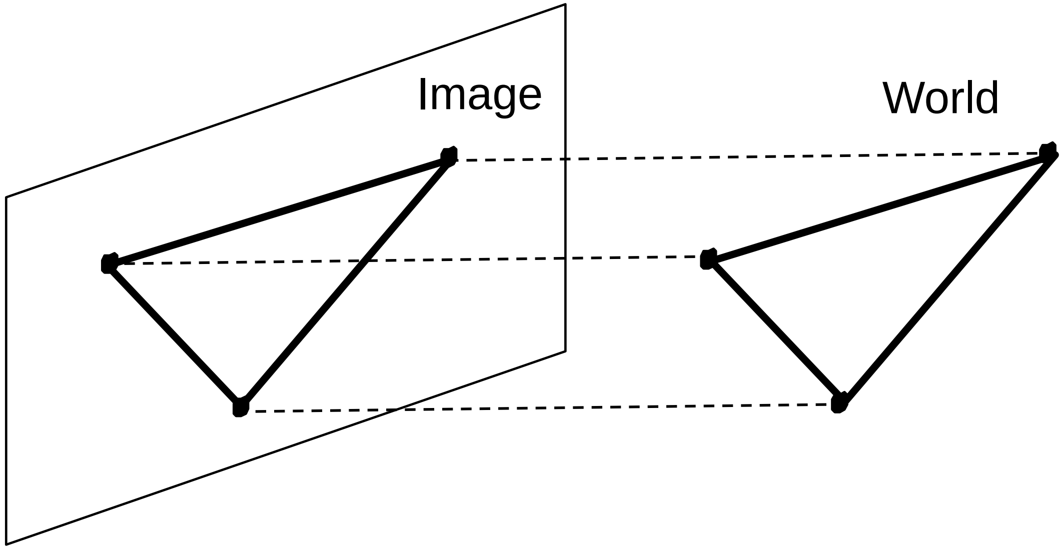

投影中心在无穷远
perspective
weak perspective
increasing focal length
increasing distance from camera



3. 仿射SFM

➢ 仿射变换

- 正投影变换是投射点到投影面的距离是无穷远



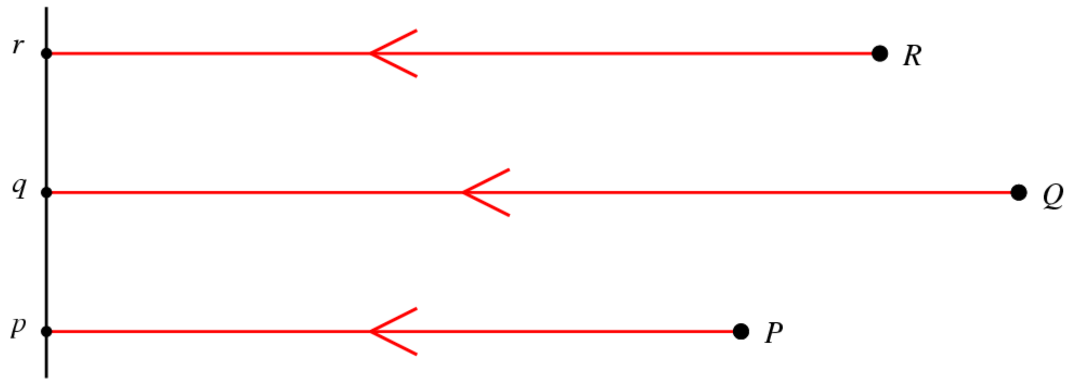
- 投射矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y)$$

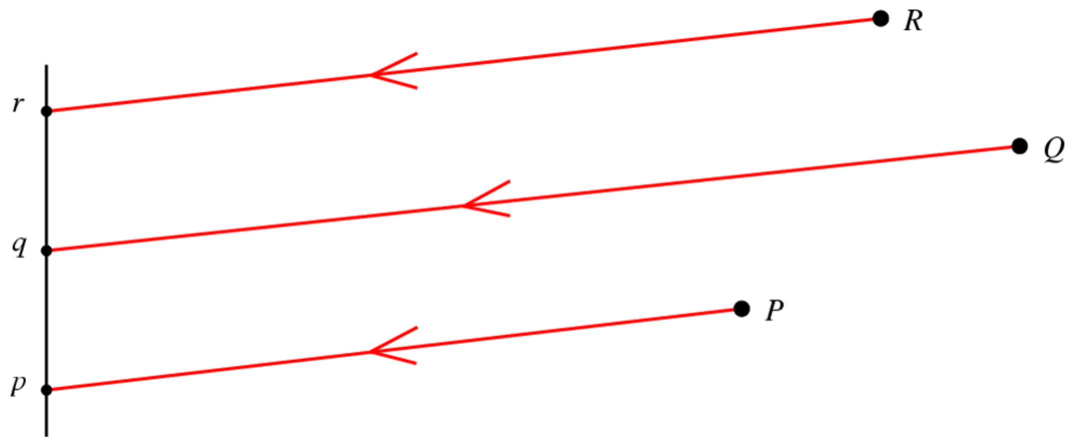
3. 仿射SFM

➢ 仿射相机

正交投影



平行投影



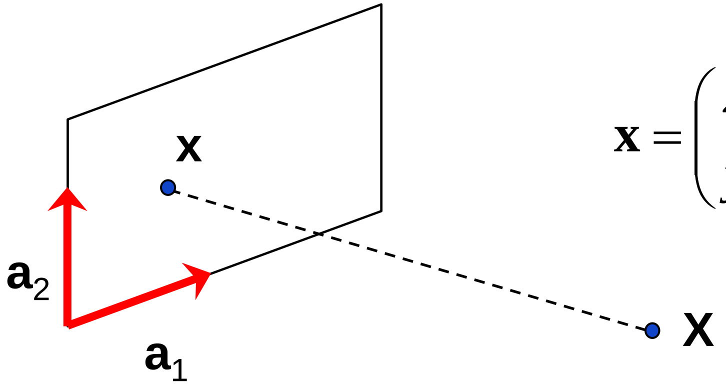
3. 仿射SFM

➢ 仿射相机

- 普适的仿射相机集合了3D空间的仿射变换、正交投影以及二维图像的仿射变换:

$$\mathbf{P}=[3\times 3\,\text{affine}]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}[4\times 4\,\text{affine}]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{b}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

- 仿射投影是非齐次坐标中的线性映射+平移



$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\mathbf{AX}+\mathbf{b}$$

世界坐标原点的投影

3. 仿射SFM

- 有: *n* 个 3D 点的*m* 张图像:
  - $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{A}_i \mathbf{X}_j + \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$
- 问题: 用*mn* 个相关性来计算*m* 个投射矩阵$\mathbf{A}_i$ 、平移矩阵 $\mathbf{b}_i$, 以及 *n* 个空间点坐标 $\mathbf{X}_j$
- 根据任意仿射变换 Q（12 个自由度）进行重建:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 我们有 2*mn* 个等式 以及 8*m* + 3*n* 个未知 (减去 12 自由度的仿射歧义)
- 因此, 必须有： $2mn >= 8m + 3n – 12$
- 对于两张图像，必须要有四对点才能计算

3. 仿射SFM

- 中心化: 减去图像点的质心

$$\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_{ik} = \mathbf{A}_i\mathbf{X}_j + \mathbf{b}_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{b}_i\right)$$

$$= \mathbf{A}_i\left(\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_k\right) = \mathbf{A}_i\hat{\mathbf{X}}_j$$

- 为简单起见，假设世界坐标系的原点位于 3D 点的质心
- 中心化后，每一个中心化点 $\mathbf{x}_{ij}$ 与3D点 $\mathbf{X}_i$ 有以下关系：

$$\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{A}_i\mathbf{X}_j$$

3. 仿射SFM

- 用中心化后的2$m \times n$ 个点 组成测量矩阵:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{11} & \hat{\mathbf{x}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{1n} \\ \hat{\mathbf{x}}_{21} & \hat{\mathbf{x}}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{\mathbf{x}}_{m1} & \hat{\mathbf{x}}_{m2} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{mn} \end{bmatrix}$$

cameras ($2m$)

points (n)

C. Tomasi and T. Kanade. Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method. *IJCV*, 9(2):137-154, November 1992.

3. 仿射SFM

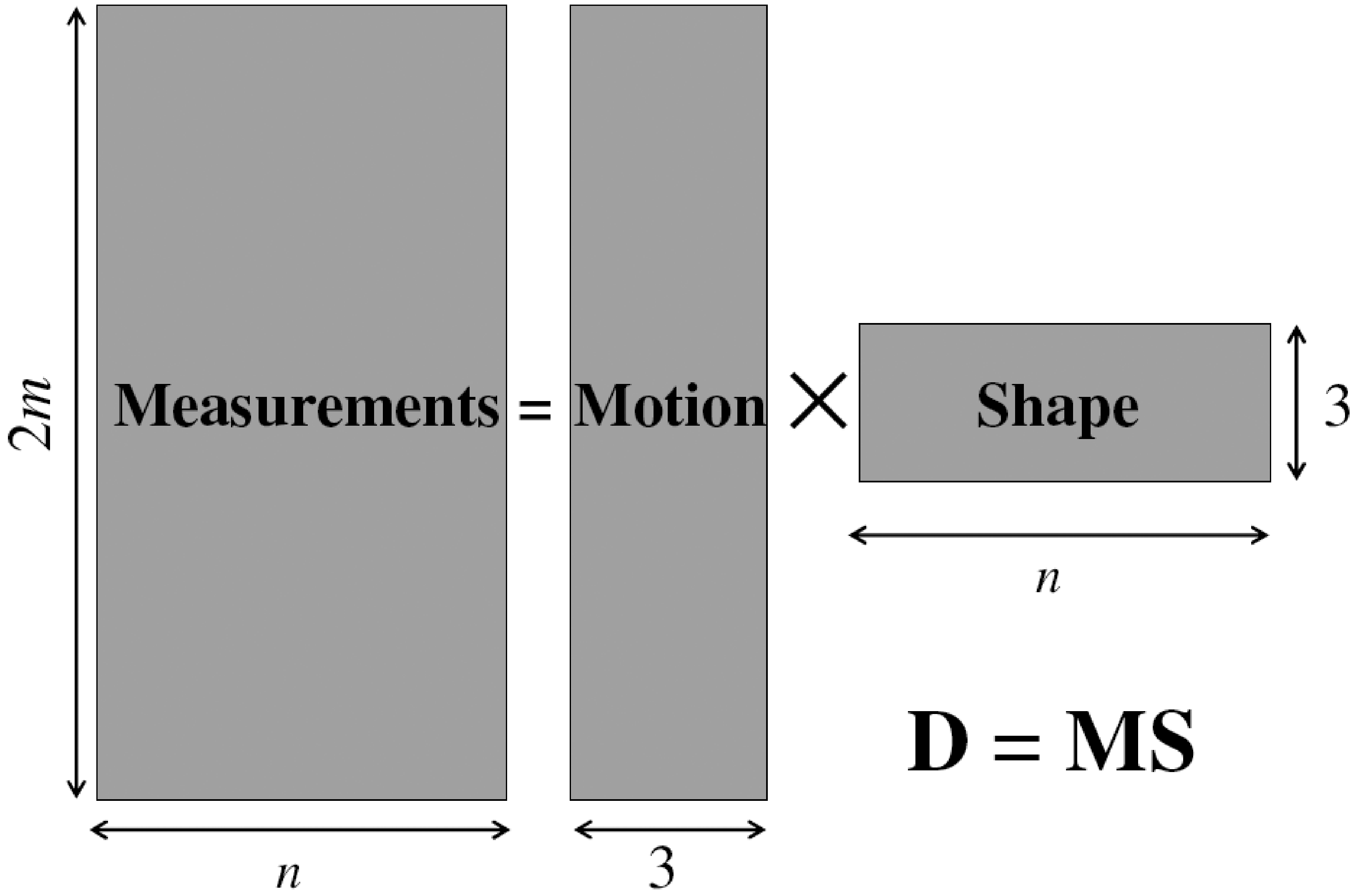
- 用中心化后的2m × n 个点 组成测量矩阵:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{11} & \hat{\mathbf{x}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{1n} \\ \hat{\mathbf{x}}_{21} & \hat{\mathbf{x}}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{\mathbf{x}}_{m1} & \hat{\mathbf{x}}_{m2} & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_{mn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}}_{\text{cameras } (2m \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \end{bmatrix}}_{\text{points } (3 \times n)}$$

测量矩阵$\mathbf{D} = \mathbf{MS}$ 的秩必为 3!

3. 仿射SFM

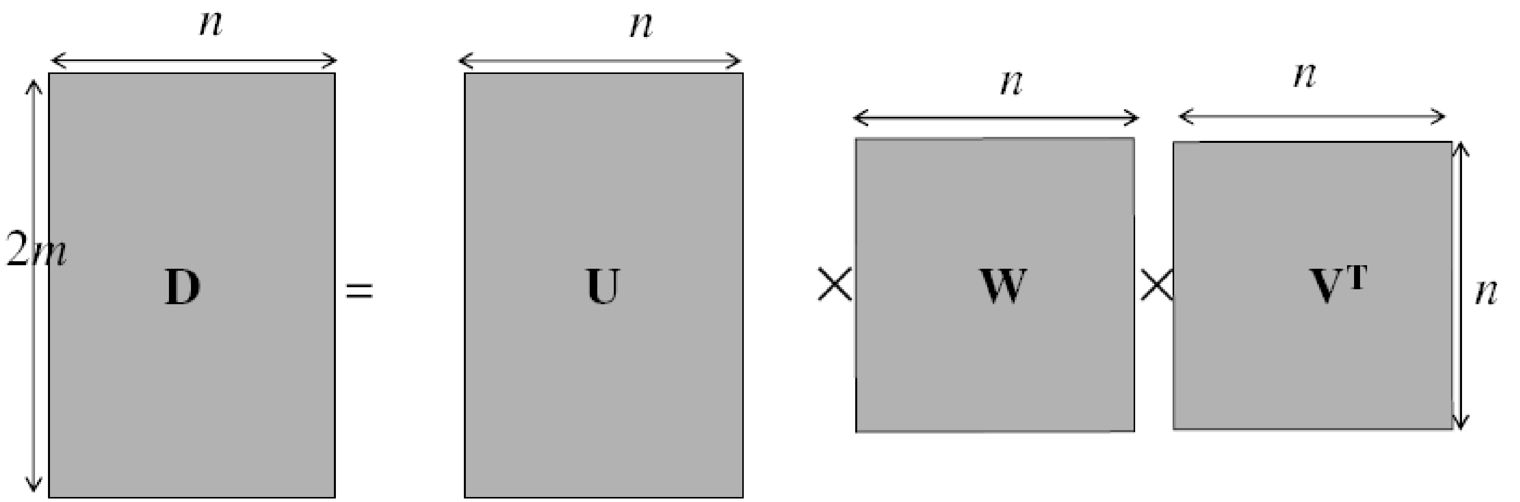
- 分解测量矩阵:

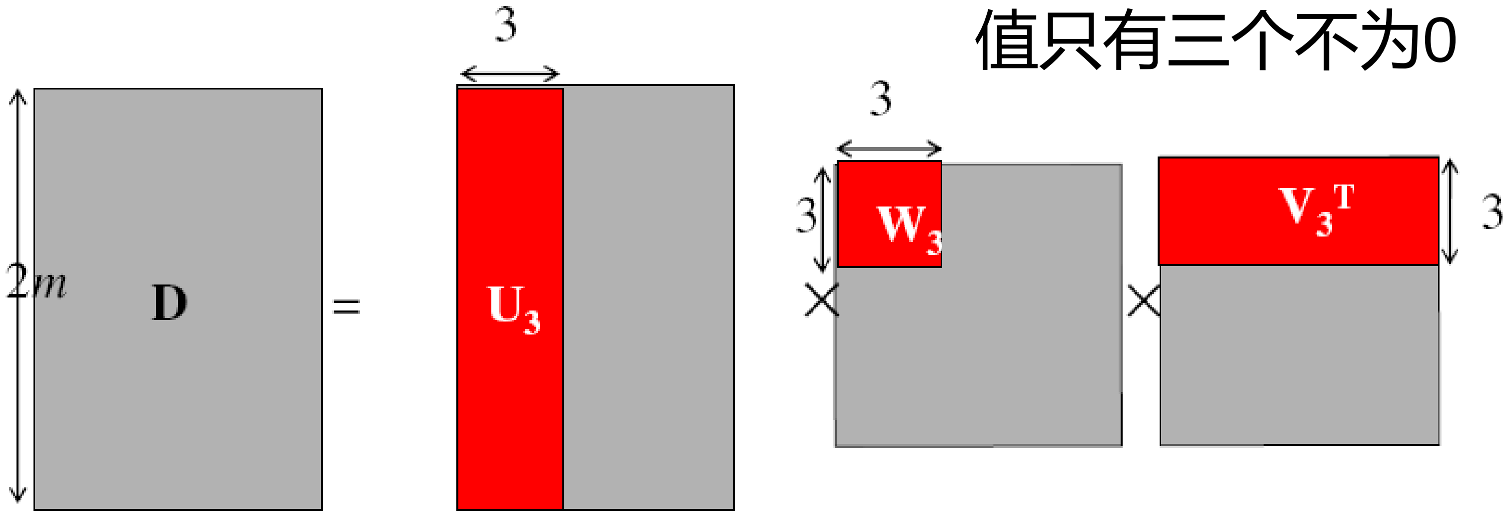


$$\mathbf{D} = \mathbf{MS}$$

3. 仿射SFM

- 矩阵D的SVD分解:

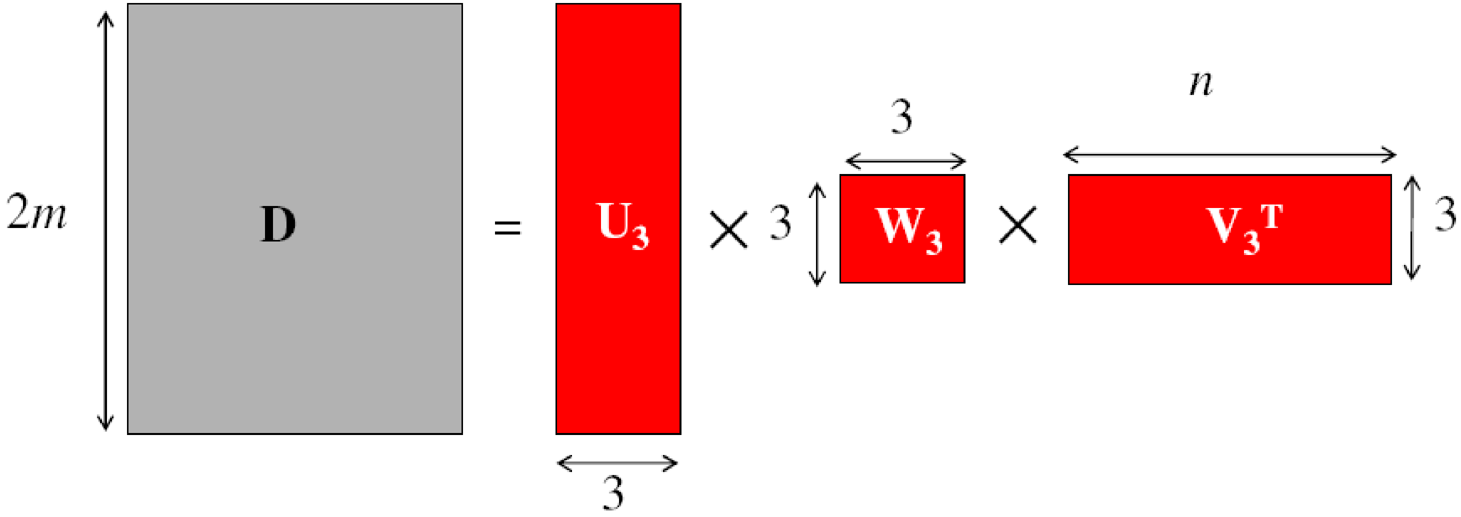




理想情况下，算得奇异值只有三个不为0

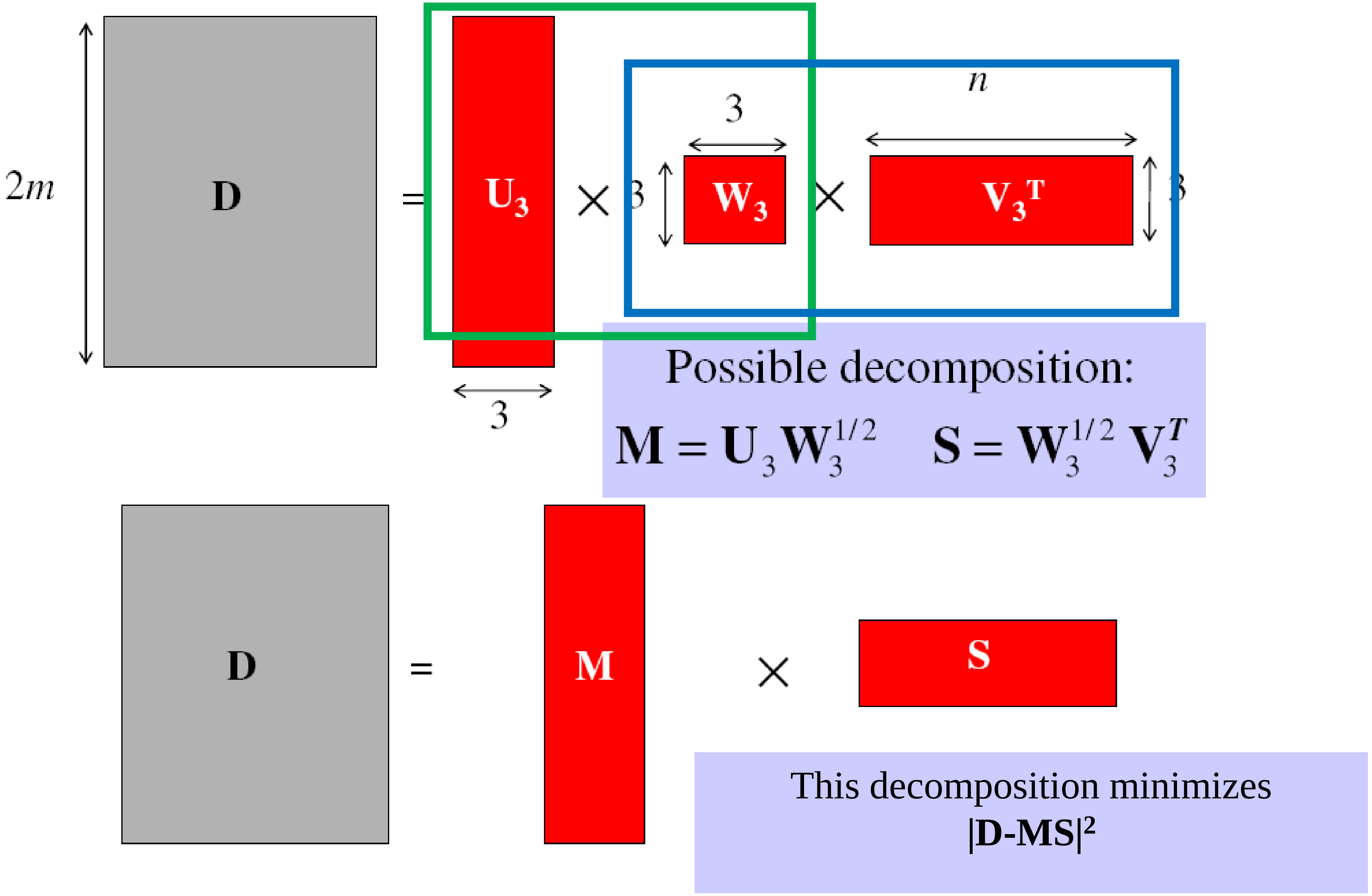
3. 仿射SFM

- 矩阵D的SVD分解:



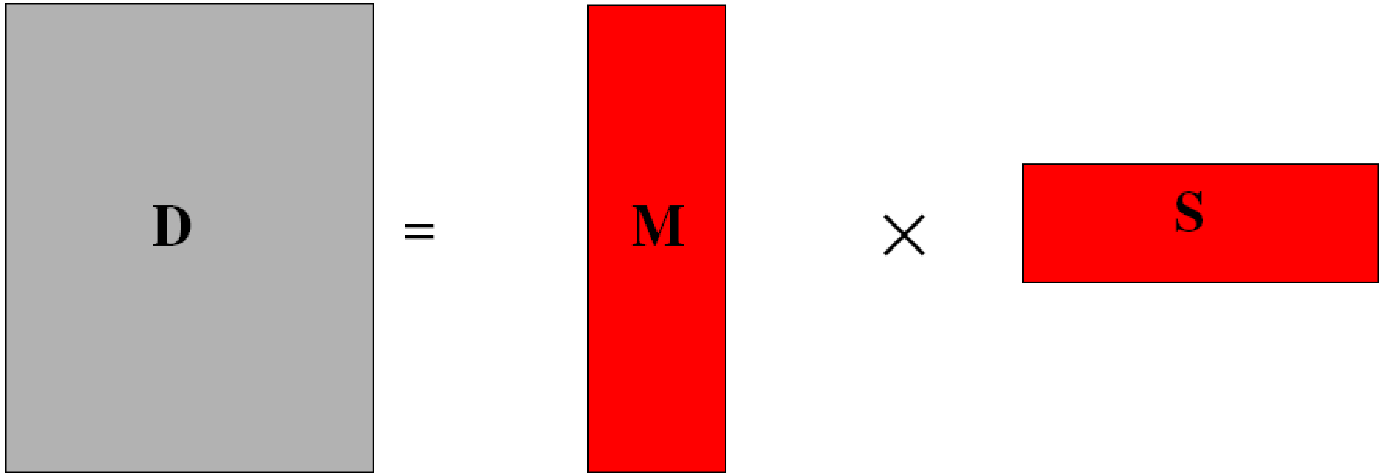
3. 仿射SFM

- 矩阵D的SVD分解:



3. 仿射SFM

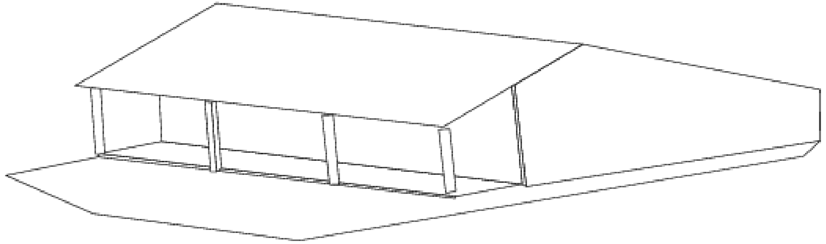
➢ 仿射歧义

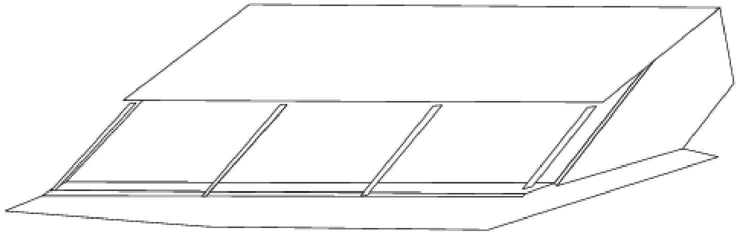


- 这种分解不是唯一的. 我们可以获得同样的矩阵D 通过一个3×3 的矩阵 C 即其的逆来对M ， S 进行变换。M → MC, S →C^{-1}S
- 这是因为我们仅仅根据仿射变换求得，而没有施加任何欧几里得约束(比如，约束图像的轴必须垂直)

3. 仿射SFM

➢ 仿射歧义



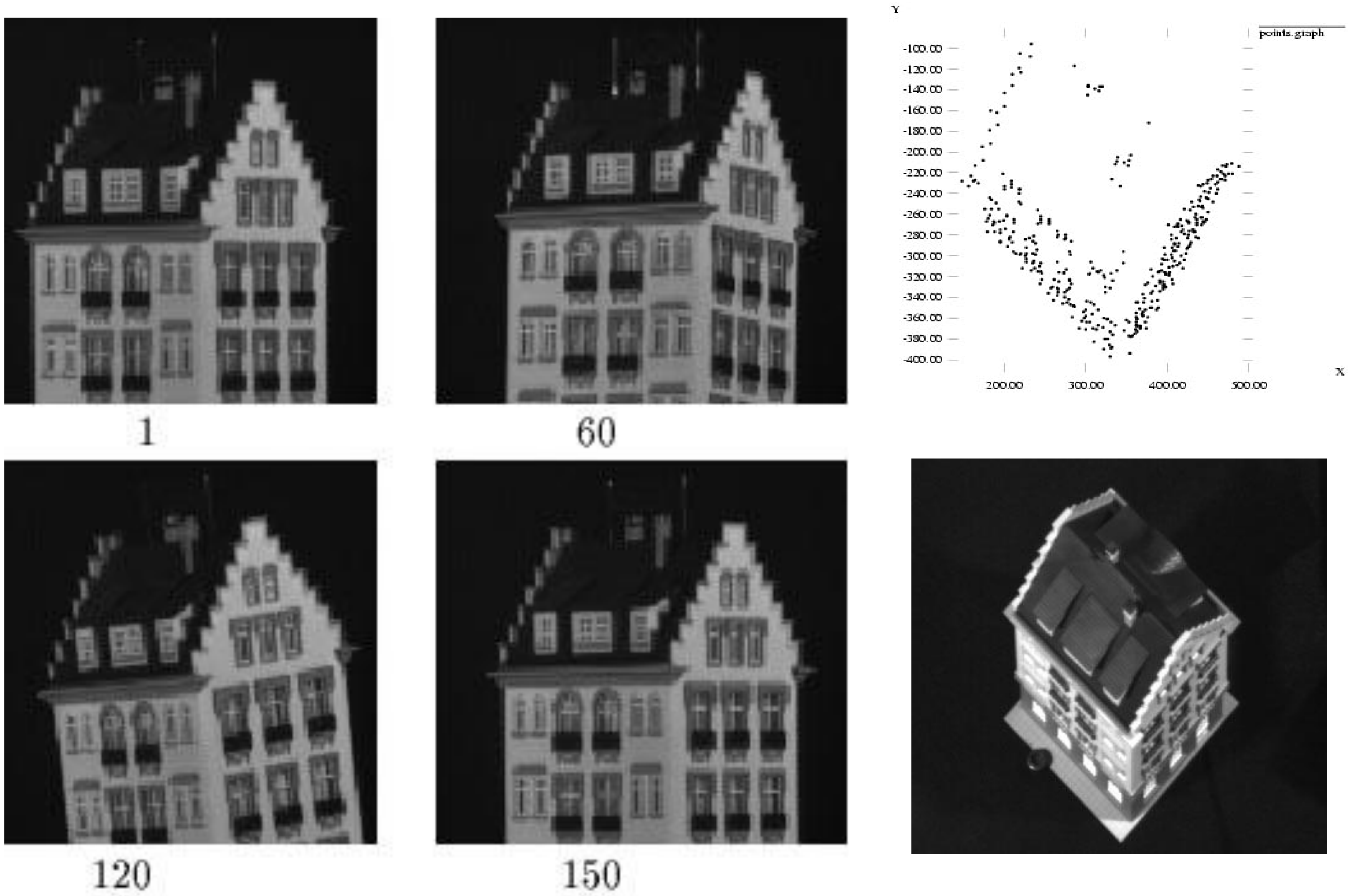


3. 仿射SFM

- 算法总结:
  - 有: n 个三维点 $\mathbf{x}_{ij}$ 的m个图像
  - 对于每个图像i, 中心化所有特征点
  - 构建了 $2m \times n$ 测量矩阵**D**:
    - j 列代表点 j 在不同图像上的投影点
    - i 行代表所有点在图像 n上的投影坐标
  - 分解 **D**:
    - 计算 SVD: $\mathbf{D} = \mathbf{U}\,\mathbf{W}\,\mathbf{V}^T$
    - 得到 $\mathbf{U}_3$ 通过取**U**的前3 列
    - 得到 $\mathbf{V}_3$ 通过取**V**的前3 列
    - 得到 $\mathbf{W}_3$通过取**W**的左上3 × 3 块
  - 得到运动矩阵M和形状矩阵**S**:
    - $\mathbf{M} = \mathbf{U}_3\mathbf{W}_3^{½}$ 和 $\mathbf{S} = \mathbf{W}_3^{½}\,\mathbf{V}_3^{T}$ (**或** $\mathbf{M} = \mathbf{U}_3$ ， $\mathbf{S} = \mathbf{W}_3\mathbf{V}_3^{T}$)

3. 仿射SFM

- 重建结果:



C. Tomasi and T. Kanade. Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method. *IJCV*, 9(2):137-154, November 1992.

4. 投射SFM

➢ 投射变换

透视

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} m_1X \\ m_2X \\ m_3X \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = \left(\frac{m_1X}{m_3X}, \frac{m_2X}{m_3X}\right)^T$$

仿射

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = (m_1X, m_2X)^T = [A \;\; b]X = [A \;\; b] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = AX^E + b$$

放大率

$$\boxed{X^E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

4. 投射SFM

问题：已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}；

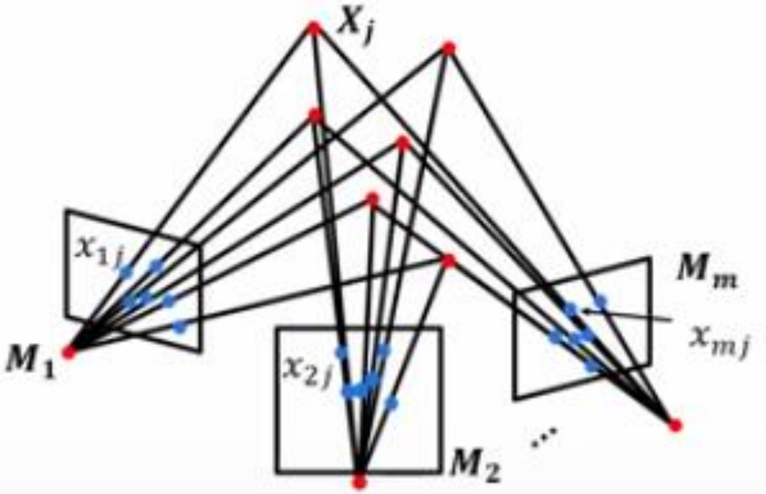
且 $x_{ij}=M_iX_j$ $\quad i=1,\ldots\boxed{m}$; $j=1\ldots,\boxed{n}$

图像个数 3D点个数

其中，M_i 为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵

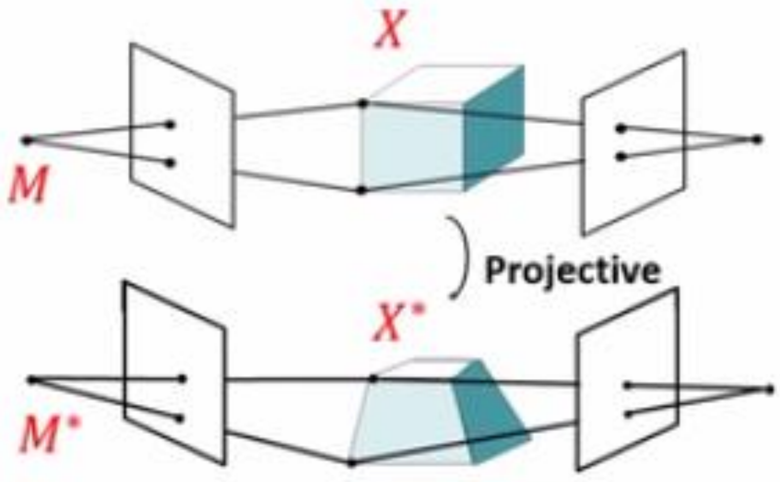
求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机投影矩阵M_i $(i=1,\cdots,m)$。



4. 投射SFM

➢ 歧义性:



- 歧义由任意可逆4×4变换表示

$$x_{ij} = M_i \boxed{X_j} \qquad \boxed{M_i} = K_i[R_i \quad T_i]$$

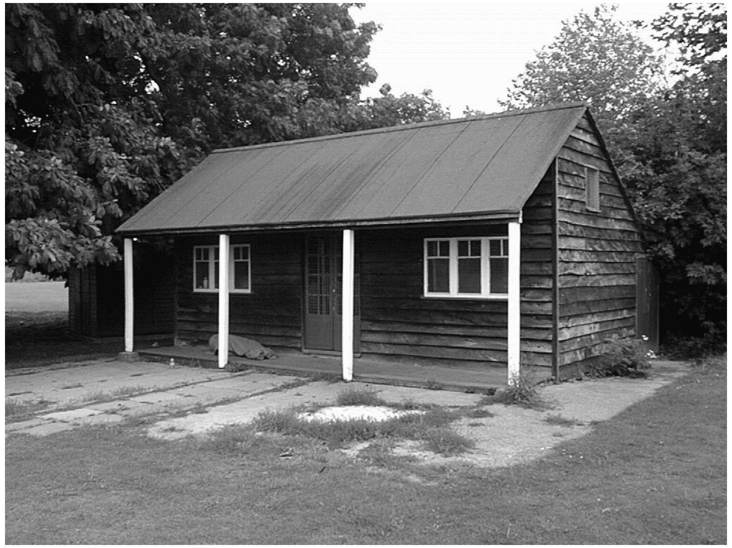
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

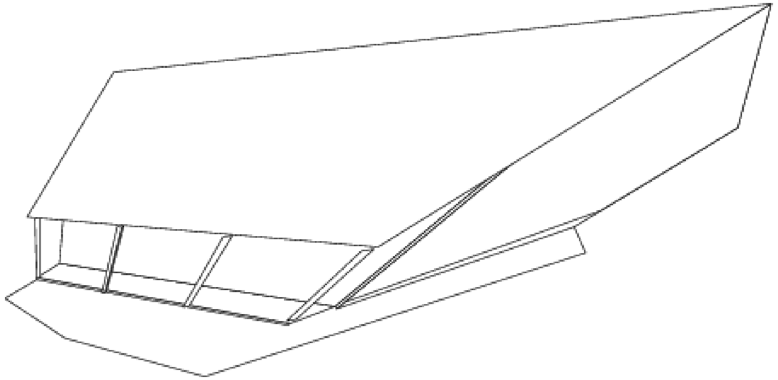
$$\boxed{HX_j} \qquad \boxed{M_i H^{-1}}$$

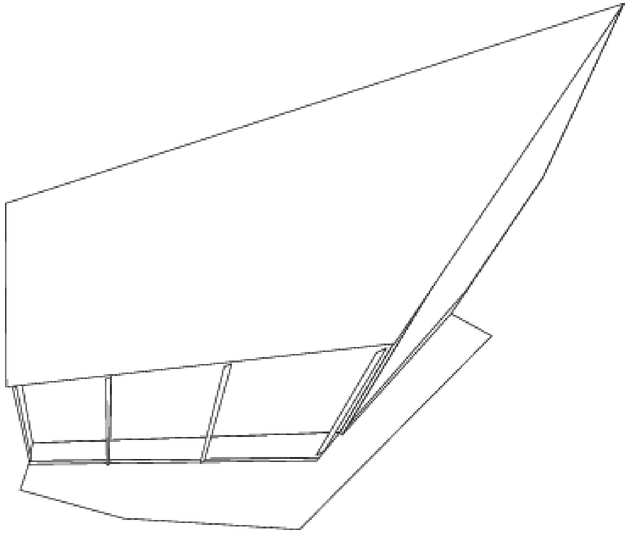
$$x_{ij} = M_i X_j = \underbrace{(M_i H^{-1})}_{M^*}\underbrace{(HX_j)}_{X^*} = M^* X^*$$

4. 投射SFM

➢ 歧义性:







4. 投射SFM

➢ 方法分类

在相差一个4×4的可逆变换的情况下恢复摄像机运动与场景结构

- 代数方法（通过基础矩阵）
- 因式分解法（通过SVD）
- 捆绑调整

仿射SFM已经讲过

4. 投射SFM

- 代数方法

1. 求解基础矩阵 F

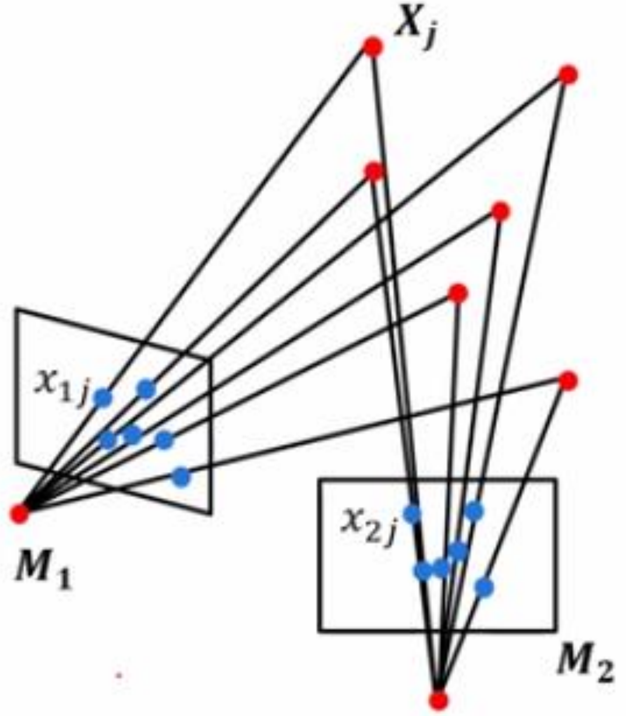
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $F \rightarrow M_1, M_2$

3. 三角化计算三维点坐标

   $$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right)\right)$$

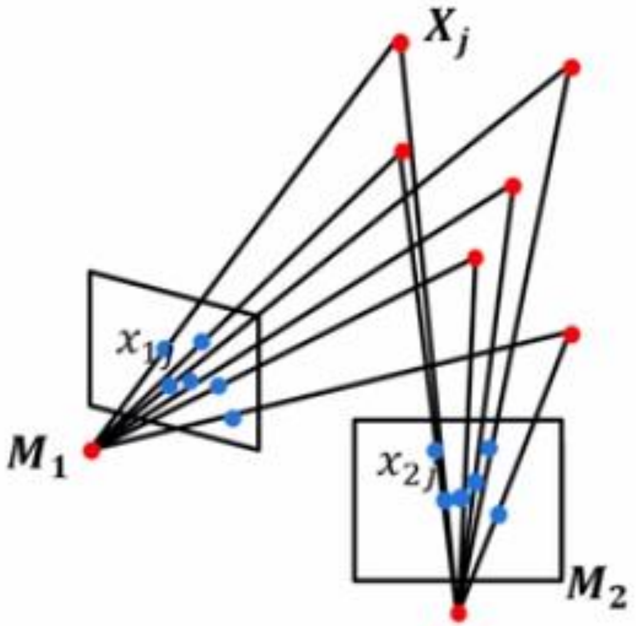


$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

4. 投射SFM

- 代数方法



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

$j = 1 \ldots, \boxed{n}$

3D点个数

由于透视歧义存在，我们总是可以找到一个可逆矩阵 H ，使得：

$$M_1 H^{-1} = [I|0] \qquad M_2 H^{-1} = [A|b]$$

4. 投射SFM

➢ 代数方法

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I\ \ 0\ ] \\ \tilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A\ \ b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X} \\ x' &= M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X} \end{aligned}}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

$$x' \times b = (Ax + b) \times b = Ax \times b$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}}$$

$$x'^T \cdot (x' \times b) = x'^T \cdot (Ax \times b) = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

$$x'^T (b \times Ax) = 0 \implies \boldsymbol{x}'^T [\boldsymbol{b}_\times] \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

基本矩阵！

4. 投射SFM

➢ 代数方法

已知: $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

问题：这里b是什么？

1. 计算b:

➢ 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$

➢ b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

b: epipole ($\mathbf{F}^T\mathbf{b} = 0$), $\mathbf{A} = -[\mathbf{b}_\times]\mathbf{F}$

b就是极点,则可以直接根据两个极线确定极点，得到结果

2. 计算 A:

- 定义：$A' = -[b_\times]F$
- 验证 $[b_\times]A'$ 等于 F :

$$\boxed{[b_\times]A' = -[b_\times][b_\times]F = -\left(bb^T - |b|^2 I\right)F = -bb^T F + |b|^2 F = 0 + 1 \cdot F = F}$$

- 因此， $A = A' = -[b_\times]F$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I\ \ 0\ ]$ $\widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F\ \ b]$

4. 投射SFM

- 代数方法

1. 求解基础矩阵 F

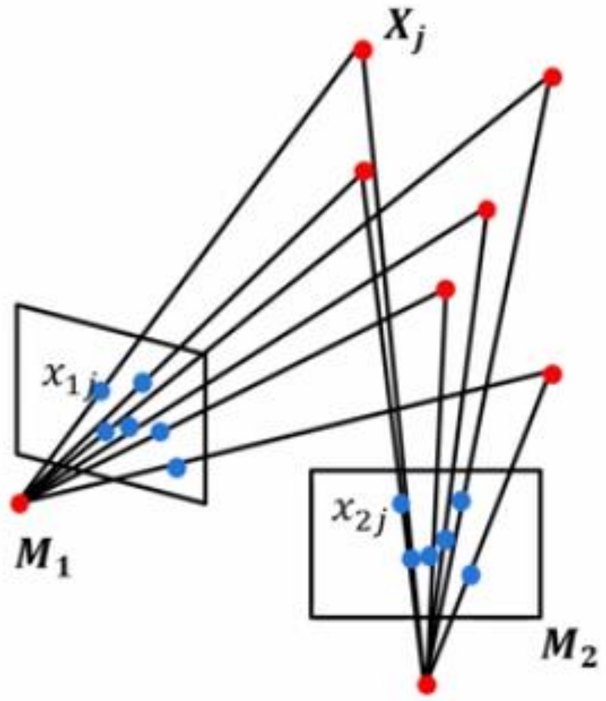
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $$\widetilde{M}_1 = [\ I\ \ 0\ ] \qquad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F\ \ b]$$

3. 三角化计算三维点坐标

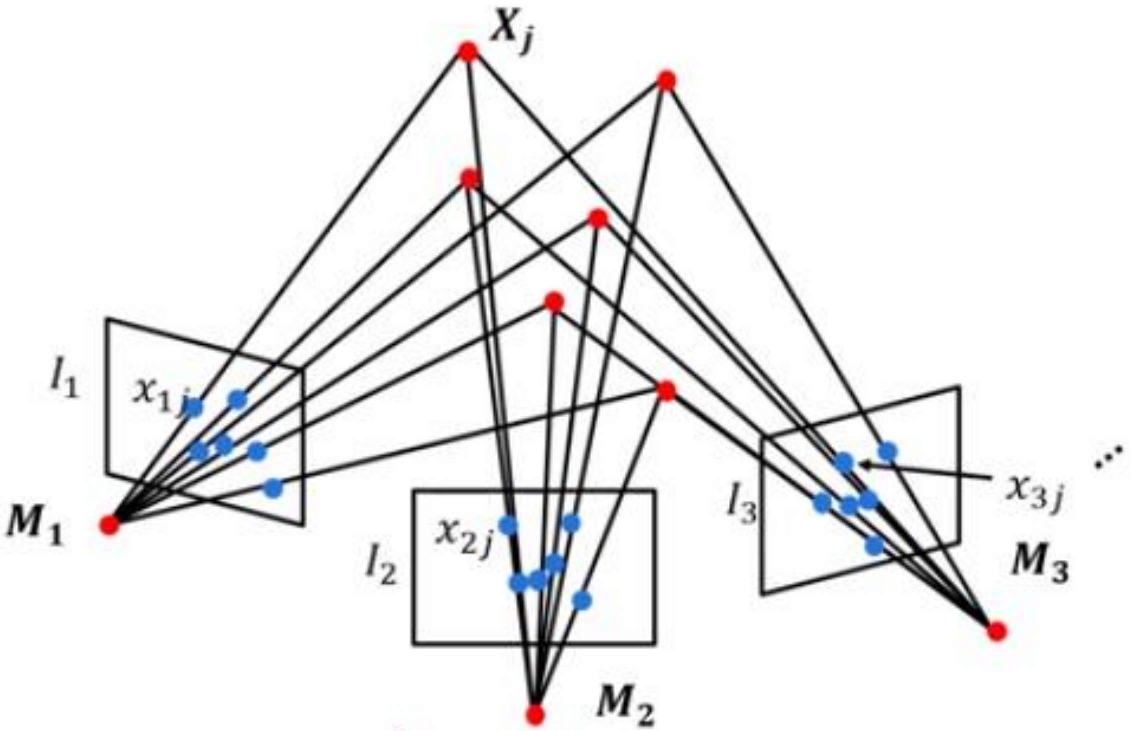
   $$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right)\right)$$



$$x_{1j} = M_1 X_j$$
$$x_{2j} = M_2 X_j$$

4. 投射SFM

➤ 代数方法



分别对每一个图像对I_k与I_h计算运动与结构

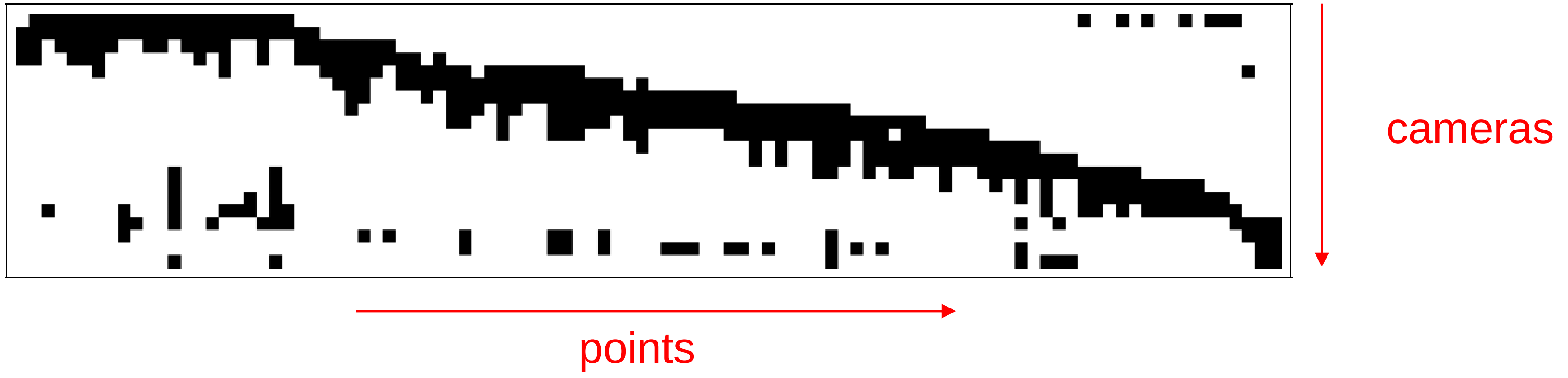
I_k与I_h $\rightarrow \widetilde{M}_k, \widetilde{M}_h, \widetilde{X}_{[k,h]}$

增量法!

4. 投射SFM

➢ 捆绑调整

到目前为止，我们假设所有点在所有视图中都是可见的 实际上，测量矩阵通常如下所示：



4. 投射SFM

➢ 捆绑调整

•**因式分解法**假定所有点都是可见的，所以下述场合不可用：

- 存在遮挡
- 建立对应点关系失败

能够用于构建观测矩阵D的点少，重建点数少！

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

•**代数法**应用于2视图重建

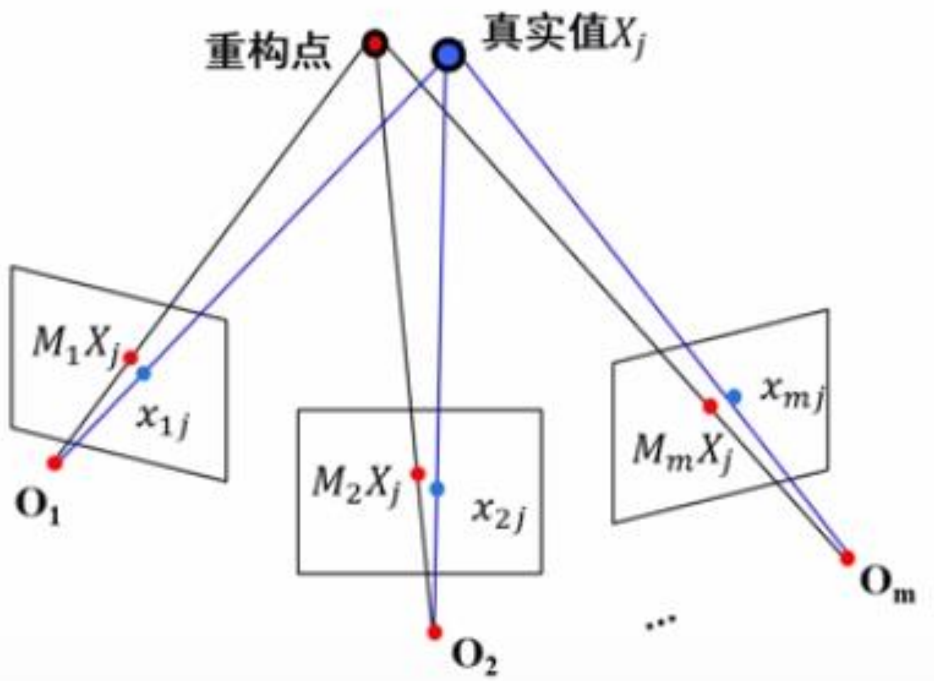
易出现误差累积！

4. 投射SFM

➢ 捆绑调整

- 恢复结构和运动的非线性方法

最小化重投影误差： $E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_iX_j)^2$



4. 投射SFM

➢ 捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ X_j\ )^2$$

测量值

参数

非线性最小化问题

· 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- ➢ 同时处理大量视图
- ➢ 处理丢失的数据

局限性

- ➢ 大量参数的最小化问题
- ➢ 需要良好的初始条件

实际操作：

- ➢ 常用作SFM的最后一步，分解或代数方法可作为优化问题的初始解

4. 投射SFM

推荐SfM开源系统

- ENFT-SFM or LS-ACTS
  - http://www.zjucvg.net/ls-acts/ls-acts.html
  - https://github.com/ZJUCVG/ENFT-SfM
- OpenMVG
  - https://github.com/openMVG/openMV
- VisualSFM
  - http://ccwu.me/vsfm/

4. 投射SFM