第七章 假设检验

简介

假设检验
- 参数检验
  - 数学期望
    - σ^2已知 (U检验法)
    - σ^2未知 (t检验法)
  - 方差
    - χ^2检验法 (单正态总体)
    - F检验法 (双正态总体)
- 非参数检验
  - 分布检验
  - 独立性检验

第一节　假设检验的基本概念

- 一、假设检验的基本原理
- 二、假设检验的相关概念
- 三、假设检验的一般步骤
- 四、内容小结

一、假设检验的基本原理

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下, 为了推断总体的某些性质, 提出某些关于总体的假设.

例如, 提出总体服从泊松分布的假设;

又如, 对于正态总体提出数学期望等于 μ_0 的假设等.

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断: 是接受, 还是拒绝.

1. 基本原理

$0 < \alpha \leq 0.05$

小概率推断原理： 小概率事件(概率接近0的事件)，在一次试验中，实际上可认为不会发生.

2. 基本思想方法

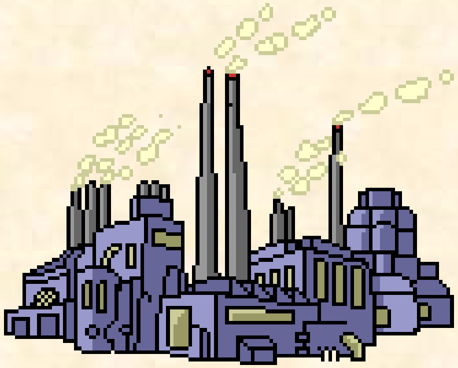
采用概率性质的反证法： 先提出假设H_0，再根据一次抽样所得到的样本值进行计算. 若导致小概率事件发生，则否认假设H_0；否则，接受假设H_0.

下面结合实例来说明假设检验的基本思想.

例　某车间用一台包装机包装葡萄糖, 包得的袋装糖重是一个随机变量, 它服从正态分布.当机器正常时, 其均值为0.5公斤, 标准差为0.015公斤.某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖9袋, 称得净重为(公斤):

0.497, 0.506, 0.518, 0.524 , 0.498, 0.511, 0.520, 0.515 , 0.512, 问机器是否正常(已知标准差稳定)?

分析: 用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 的均值和标准差,



由长期实践可知, 标准差较稳定, 设 $\sigma = 0.015$,

则 $X \sim N(\mu,\ 0.015^2)$, 其中 μ 未知.

问题: 根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$?

解 1°提出两个对立假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5 \text{ 和 } H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

2° $\because$ $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量,

$\therefore$ 若 H_0 为真, 则 $|\overline{x} - \mu_0|$ 不应太大,

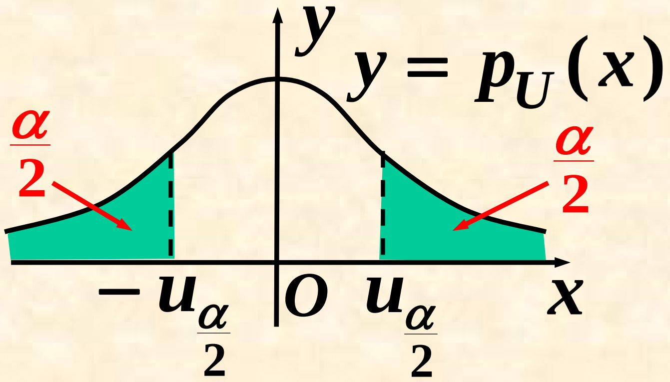
衡量 $|\overline{x} - \mu_0|$ 的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}}$ 的大小,

$\boxed{\text{重要}}$

当H_0为真时, $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\because \quad P\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$

当$\alpha > 0$很小时,



$\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$是小概率事件

根据小概率原理，可以认为如果H_0为真，则由一次试验得到满足不等式 $|u| = \left|\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \geq u_{\alpha/2}$ 的观察值$\overline{x}$,几乎不会发生.

若在一次试验中,得到了满足不等式

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\alpha/2}$$

的观察值$\overline{x}$，则我们有理由怀疑原来的假设H_0的正确性，因而拒绝H_0.

若出现观察值$\overline{x}$满足不等式

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|< u_{\alpha/2},$$

则没有理由拒绝假设H_0, 因而只能接受H_0.

当 $\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0;

当 $\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\alpha/2}$ 时, 接受 H_0.

如：若取定 $\alpha = 0.05$, 则 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$,

3° 在假设 H_0 成立的条件下，由样本计算

$$|u| = \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.2 > u_{\alpha/2} = 1.96,$$

于是拒绝假设 H_0, 认为包装机工作不正常.

二、假设检验的相关概念

1. 显著性水平

$$\alpha = P\{\text{拒绝原假设}H_0 \mid H_0\text{为真}\}$$

数 α 称为显著性水平.

如：对于例2,

当H_0：$\mu = 0.5$为真时，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$P\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}} \mid H_0\text{为真}\} = \alpha$$

如果$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$,则称$\bar{x}$与$\mu_0$的差异是显著的,

则我们拒绝 H_0,

反之,如果$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}$, 则称$\bar{x}$与$\mu_0$的差异是

不显著的,则我们接受H_0,

上述关于$\bar{x}$与μ_0有无显著差异的判断是在显著性水平α之下作出的.

2. 检验统计量

用于检验假设的统计量，称为检验统计量.

如：对于例2,

$$\text{统计量 } U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{— 检验统计量.}$$

3. 原假设与备择假设

假设检验问题通常叙述为：在显著性水平α下,

检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0.$

或称为"在显著性水平α下,针对 H_1检验 H_0".

H_0称为原假设或零假设, H_1 称为备择假设.

4. 拒绝域与临界点

拒绝域 W_1：拒绝原假设H_0的所有样本值$(x_1, x_2, \cdots; x_n)$所组成的集合.

$W_1 \leftrightarrow W_1'$：拒绝原假设H_0的检验统计量的取值范围.

临界点(值)：拒绝域的边界点(处的检验统计量的值).

如: 在前面例2中,

拒绝域为 $|u| \geq u_{\alpha/2}$,

临界值为 $u = -u_{\alpha/2}$, $u = u_{\alpha/2}$.

5. 两类错误及记号

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生, 但“很难发生”不等于“不发生”, 因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝H_0的判断, 称为**第一类错误**, 又叫**弃真错误**, 这类错误是“以真为假”. 犯第一类错误的概率是显著性水平α.

$$\alpha = P\{拒绝原假设H_0 \mid H_0为真\}$$

(2) 当原假设H_0不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受H_0的判断, 称为**第二类错误**, 又叫**取伪错误**, 这类错误是“以假为真”.

犯第二类错误的概率记为

$$\beta = P\{接受\ H_0 \mid H_0不真\}.$$

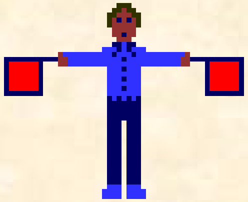
注 1°当样本容量 n 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

2°若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

6. **显著性检验**

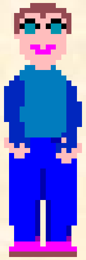
只对犯第一类错误的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误的概率的检验, 称为**显著性检验**.

7. **双侧备择假设与双侧假设检验**



在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中, 备择假设 H_1 表示 μ 可能大于 μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双边备择假设, 形如 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双边假设检验.

8. 单侧检验(右侧检验与左侧检验) (了解)



形如 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 的假设检验称为右侧检验.

形如 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 的假设检验称为左侧检验.

右侧检验与左侧检验统称为**单侧检验**.

三、假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求, 提出原假设 H_0 及备择假设 H_1 ;

2. 选择检验统计量,在H_0成立的条件下,确定它的概率分布;

3. 给定显著性水平 α ,确定拒绝域 W_1 ;

4. 根据样本观察值计算统计量的值;

5. 根据统计量值是否落入拒绝域W_1中, 作出拒绝或者接受H_0的判断.

四、内容小结

假设检验的基本原理、相关概念和一般步骤.

假设检验的两类错误

真实情况(未知)	所作决策	
	接受H_0	拒绝H_0
H_0为真	正确	犯第I类错误
H_0不真	犯第II类错误	正确

典型例题

例3 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自正态总体$N(\mu,100)$的一个样本,要检验$H_0: \mu = 0\ (H_1: \mu \neq 0)$,在下列两种情况下,分别确定常数$d$,使得以$W_1$为拒绝域的检验犯第一类错误的概率为0.05 .

(1) $n = 1, W_1 = \{x_1 \mid |x_1| > d\}$;

(2) $n = 25, W_1 = \{(x_1, \cdots, x_{25}) \mid |\bar{x}| > d\}$其中$\bar{x} = \dfrac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i$.

解 (1) $n = 1$时,若H_0成立, 则$\dfrac{X_1}{10} \sim N(0,1)$,

$$P\left(X_1 \in W_1\right) = P\left(\left|X_1\right| > d\right)$$

$$= P\left(\left|\frac{X_1}{10}\right| > \frac{d}{10}\right) = \Phi\left(-\frac{d}{10}\right) - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)\right) = 0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{d}{10}\right) = 0.975, \qquad \frac{d}{10} = 1.96, \qquad d = 19.6;$$

(2) $n=25$时，若H_0成立， 则 $\sqrt{25}\,\dfrac{\overline{X}}{10}\sim N(0,1)$,

$$P\left(\left(X_1,\cdots X_{25}\right)\in W_1\right)=P\left(\left|\overline{X}\right|>d\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{\overline{X}}{2}\right|>\frac{d}{2}\right)=\varPhi\left(-\frac{d}{2}\right)-\varPhi\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$=2\left(1-\varPhi\left(\frac{d}{2}\right)\right)=0.05,$$

$\varPhi\left(\dfrac{d}{2}\right)=0.975,\qquad \dfrac{d}{2}=1.96,\qquad d=3.92\,.$