第四节 原函数与不定积分

- 一、主要定理和定义
- 二、典型例题
- 三、小结与思考

一、主要定理和定义

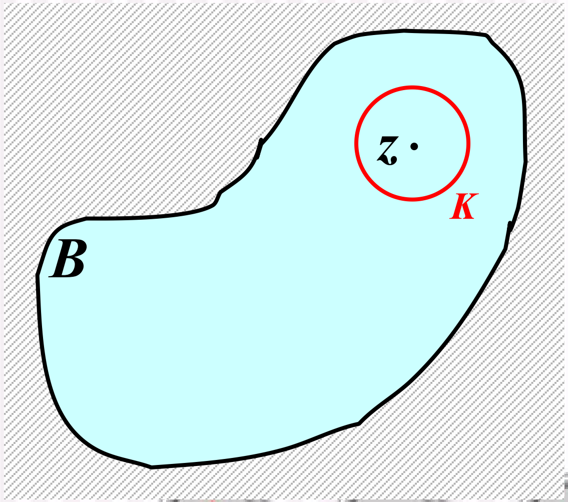
定理一

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 B 内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$.

分析: 利用导数的定义来证.

设 z 为 B 内任一点，

以 z 为中心作一含于 B 内的小圆 K，



取 $|\Delta z|$ 充分小使 $z+\Delta z$ 在 K 内, 由 $F(z)$ 的定义,

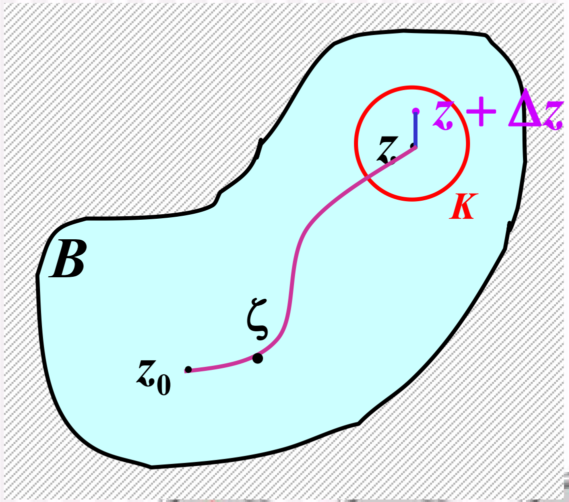
$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

由于积分与路线无关,

$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取 z_0 到 z,

(注意: 这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同)

然后从 z 沿直线到 $z+\Delta z$,



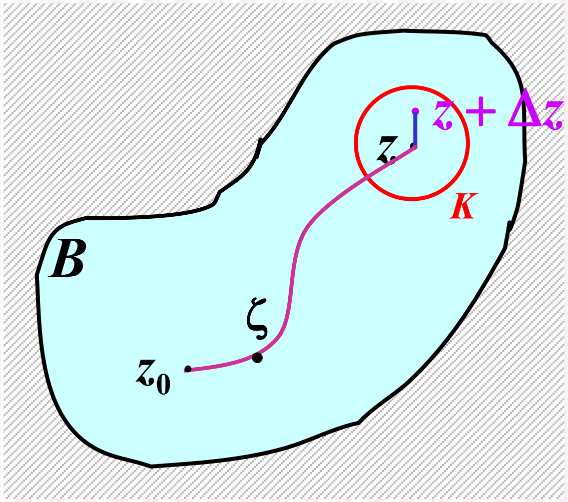
于是 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\mathrm{d}s$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon.$$



因为 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z,$

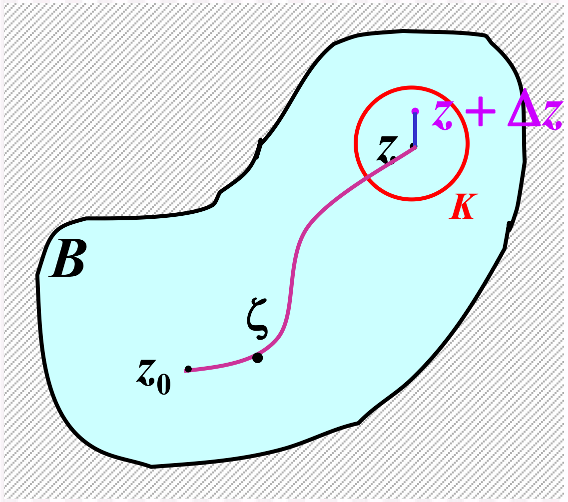
证明:

因为 $f(z)$ 在 B 内解析，所以 $f(z)$ 在 B 内连续，

故 $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$

使得满足 $|\zeta - z| < \delta$ 的一切 ζ 都在 K 内,

总有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon,$



由积分的估值性质,即 $|\Delta z| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right|$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}S\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0,$

即 $F'(z)=f(z).$ [证毕]

此定理与微积分学中的对变上限积分的求导定理完全类似.

2. 原函数的定义:

如果函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数为 $f(z)$, 即 $\varphi'(z)=f(z)$, 那末称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 B 内的原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系:

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

证 设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的任何两个原函数,

那末 $[G(z)-H(z)]' = G'(z) - H'(z)$

$$= f(z) - f(z) \equiv 0$$

于是 $G(z)-H(z)=c.$ (c 为任意常数) [证毕]

根据以上讨论可知:

如果 $f(z)$ 在区域 B 内有一个原函数 $F(z)$,

那末它就有无穷多个原函数,

一般表达式为 $F(z)+c$ (c为任意常数).

3. 不定积分的定义:

称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c 为任意常数)为 $f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c.$$

定理三　(牛顿-莱布尼兹公式)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.

证 因为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 也是 $f(z)$ 的原函数,

所以 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) + c$,

当 $z = z_0$ 时, 根据柯西-古萨基本定理,

得 $c = -G(z_0)$, 所以 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) - G(z_0)$,

或 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$. [证毕]

说明: 有了以上定理, 复变函数的积分就可以用跟微积分学中类似的方法去计算.

二、典型例题

例1 求 $\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z$ 的值.

解 因为 z 是解析函数，它的原函数是 $\dfrac{1}{2}z^2$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例2 求 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z$ 的值.

解 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 \mathrm{d}z^2$

$$= \frac{1}{2}\sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin \pi^2.$$

(使用了微积分学中的“凑微分”法)

例3　求 $\int_{1}^{1+i} ze^{z}\mathrm{d}z$ 的值.

解　利用分部积分法可得

ze^{z} 的一个原函数为 $(z-1)e^{z}$,

$$\int_{1}^{1+i} ze^{z}\mathrm{d}z = (z-1)e^{z}\Big|_{1}^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

例4 试沿区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$,

求 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,

它的一个原函数为 $\frac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} \mathrm{d}z = \left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i.$$

三、小结与思考

本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式.

在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本课内容.（主要是不定积分）

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad \int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c$$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$

思考题

解析函数在单连通域内积分的牛顿–莱布尼兹公式与实函数定积分的牛顿–莱布尼兹公式有何异同?

思考题答案

两者的提法和结果是类似的.

但在复积分中要求 $f(z)$ 为单连通区域中的解析函数, 且积分路线是曲线 C, 因而 z_0, z都是复数;

在实积分中要求 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续实函数, a, x都是实数.

两者对函数的要求差异很大.