信号与系统：连续时间系统的频域分析

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

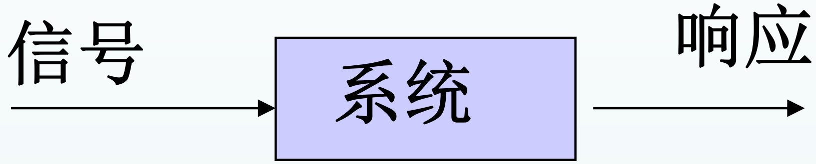
本章内容：

- 分析周期信号的系统响应
- 分析非周期信号的系统响应
- 无失真传输与滤波

本章内容：

- ◈分析周期信号的系统响应
- ◈分析非周期信号的系统响应
- ◈无失真传输与滤波

引言：



$$r(t) = ae(t) + b$$

系统的全响应=零状态响应+零输入响应

LTI系统

零状态响应$r_{zs}(t)$的求解

1. 时域分析法

(1) 先把任意信号分解为冲激函数积分的形式。

(2) 再把冲激函数作为输入，求解系统的微分方程，得到冲激响应。

(3) 最后利用输入信号与冲激响应的卷积得到$r_{zs}(t)$。

2. 频域分析法??

LTIS对周期信号的零状态响应

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)$$

系统的冲激响应为$h(t)$

$$\boxed{H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}$$

系统频谱

$$r_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}*h(t)=?\text{推导！}$$

$$r_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}*h(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega)$$

$$?\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega_0)$$

$$r_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}*h(t)=e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)$$

LTIS对周期信号的零状态响应

$$r_{zs}(t) = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0)$$

$$e^{jn\Omega t} \to e^{jn\Omega t} H(jn\Omega)$$

由齐次性： $F_n e^{jn\Omega t} \to F_n e^{jn\Omega t} H(jn\Omega)$

根据可加性：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\Omega) e^{jn\Omega t} = r_{zs}(t)$$

系统可视为一个改变输入信号频谱特性的频谱变换器。

LTIS对周期信号的零状态响应求解可归纳为：

Step1　展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

Step2　根据$h(t)$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Step3

$$r_{zs}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n H(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$

例 1 一个LTIS的单位冲激响应为 $h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

求它对正弦信号$f(t)=\sin\omega_0 t$ 的零状态响应。

$\varepsilon(t)$为单位阶跃信号

例 1 一个LTIS的单位冲激响应为 $h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

求它对正弦信号 $e(t)=\sin\omega_0 t$ 的零状态响应

解：

$$f(t)=\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}\varepsilon(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+j\omega)\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{1+j\omega}$$

$$e(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$r_{zs}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n H(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$

$$r_{zs}(t)=\frac{1}{2j}\frac{1}{1+j\omega_0}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}\frac{1}{1-j\omega_0}e^{-j\omega_0 t}$$

$$=\frac{-\omega_0}{1+\omega_0^2}\cos\omega_0 t+\frac{1}{1+\omega_0^2}\sin\omega_0 t$$

本章内容：

- 分析周期信号的系统响应
- 分析非周期信号的系统响应
- 无失真传输与滤波

LTIS对非周期信号的响应

Ch2. 时域分析⇒ $r_{zs}(t)=h(t)*f(t)$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

Ch4. 频域分析⇒ $R_{zs}(j\omega)=H(j\omega)\cdot F(j\omega)$

$$\text{系统} \xleftrightarrow[\text{Ch2}]{\text{一一对应}} h(t) \xleftrightarrow[\text{Ch4}]{\text{一一对应}} H(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \mathscr{F}[h(t)]$$

$H(j\omega)$存在的条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$ 狄利克雷Dirichlet条件

$$\boxed{\text{频域分析方法适合于分析稳定系统。}}$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}\,[h(t)]$$

频谱
变换器

$$H(j\omega)=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}\overset{\Delta}{=}H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$H(j\omega)$ 反映了系统对输入信号频谱特性的改变。

$$R_{zs}(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)=H(\omega)\left|F(j\omega)\right|e^{j[\varphi(\omega)+\varphi_f(\omega)]}$$

$$\left|F(j\omega)\right|\rightarrow H(\omega)\left|F(j\omega)\right|$$

$$\varphi_f(\omega)\rightarrow\varphi(\omega)+\varphi_f(\omega)$$

$H(\omega)$表示系统对输入各频率分量相对大小的改变，称为系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$表示系统对输入各频率分量相对位置的改变，称为系统的相频特性。合起来称为系统的**频率响应**，简称系统频响。

$$R_{zs}(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = H(\omega)\left|F(j\omega)\right|e^{j[\varphi(\omega)+\varphi_f(\omega)]}$$

$$\left|F(j\omega)\right| \to H(\omega)\left|F(j\omega)\right|$$

$$\varphi_f(\omega) \to \varphi(\omega) + \varphi_f(\omega)$$

$H(j\omega)$的意义

1、$H(j\omega)$是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的FT

2、$H(j\omega)$是系统零状态频率响应和系统输入信号的傅里叶变换之比

即 $H(j\omega) = R_{zs}(j\omega) / F(j\omega)$

求 $H(j\omega)$ 的方法

1、 $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

2、 $H(j\omega) = R_{zs}(j\omega) / F(j\omega)$

$$r_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}[R_{zs}(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)F(j\omega)]$$

高阶微分方程的算子表示与频域表示

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$D(j\omega)R_{zs}(j\omega) = N(j\omega)E(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{R_{zs}(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}}$$

例2:LTIS $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$ ，$e(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ ，求 $r_{zs}(t)$

解：$\boxed{r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta(t)}$

$$h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$$

频域求解？ $r_{zs}(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)E(j\omega)]$

$$H(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{1}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}$$

$$\boxed{e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}}$$

$$h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)\leftrightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)\leftrightarrow H(j\omega)E(j\omega)=\left(\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right)\frac{1}{3+j\omega}=\frac{0.5}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}+\frac{0.5}{3+j\omega}}$$

频率响应的进一步分析

时域分析： $r_{zs}(t) = h(t) * f(t)$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r_{zs}(t)$$

频域分析： $R_{zs}(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

其中： $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

$$F(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow R_{zs}(j\omega)$$

$H(j\omega)$称为系统的频率响应，简称频响。

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r_{zs}(t)$$

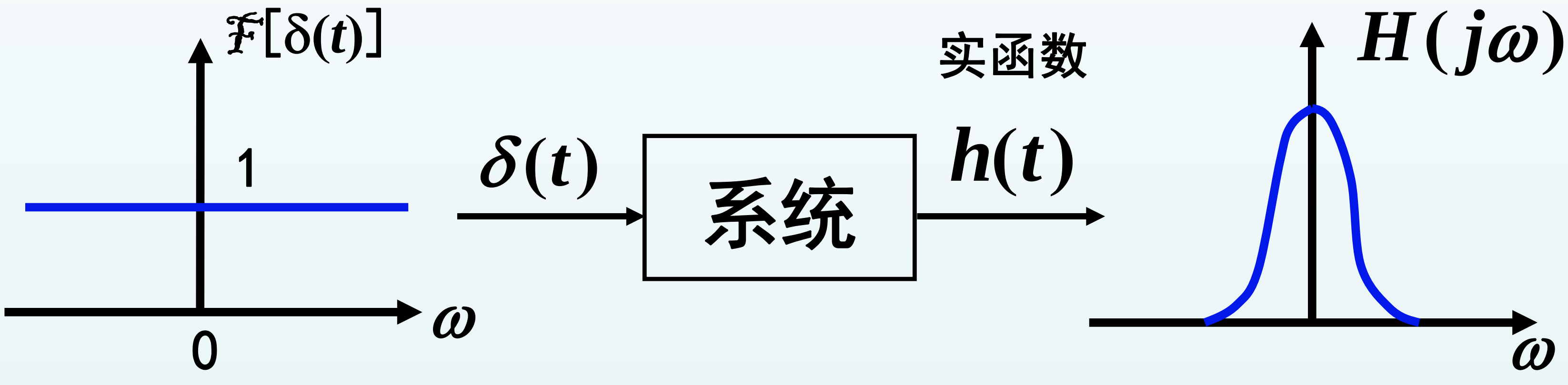
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

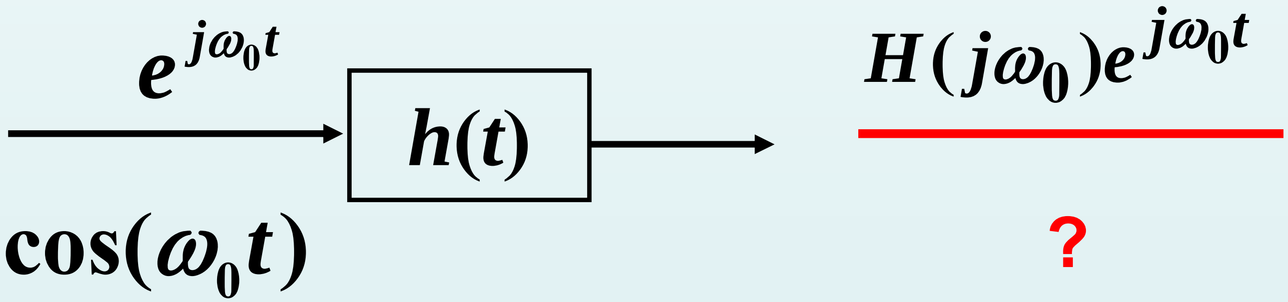
$H(j\omega)$称为系统的频率响应，简称频响。

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$F(j\omega)$称为信号$f(t)$的频谱，包含幅度频谱和相位频谱。

频率响应的进一步分析



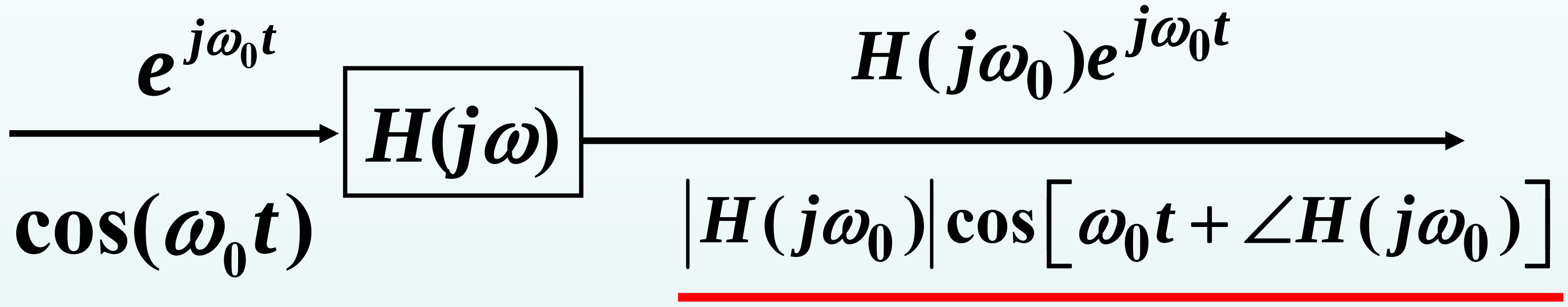


$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} \rightarrow \frac{H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} + H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}{2}$$

$$\frac{H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} + H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}{2} = \frac{|H(-j\omega_0)|e^{j\varphi(-\omega_0)}e^{-j\omega_0 t} + |H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 t}}{2} = |H(j\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\right)$$

$$\cos(\omega_0 t) \rightarrow |H(j\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\right)$$

频率响应的进一步分析



系统对正弦信号的响应为：

$$\cos(\omega_0 t+\theta)\rightarrow\left|H(j\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t+\theta+\angle H(j\omega_0)]$$

$\cos(\omega_0 t)$ 输入到LTI系统产生的输出：

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

实函数的共轭对称特性

$$H(j\omega_0) = H^*(-j\omega_0)$$

$$r_{zs}(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\cdot H(-j\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2}\left|H(j\omega_0)\right|e^{j\left[\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)\right]} + \frac{1}{2}\left|H(-j\omega_0)\right|e^{-j\left[\omega_0 t-\angle H(-j\omega_0)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left|H(j\omega_0)\right|\left\{e^{j\left[\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)\right]} + e^{-j\left[\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)\right]}\right\}$$

$$\cos(\omega_0 t) \to \left|H(j\omega_0)\right|\cos\left[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)\right]$$

例3 已知因果LTIS微分方程 $r'(t)+10\sqrt{3}r(t)=40e(t)$

当 $e(t)=5\cos(10t+50^0)$ 时，求输出响应$r_{zs}(t)$

解：

系统频响：$H(j\omega)=\dfrac{40}{j\omega+10\sqrt{3}}$

当$\omega=10$ 时，有 $\begin{cases} |H(j10)|=2 \\ \angle|H(j10)|=-30^0 \end{cases}$

由 $\cos(\omega_0 t+\theta)\rightarrow|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\theta+\angle H(j\omega_0)]$

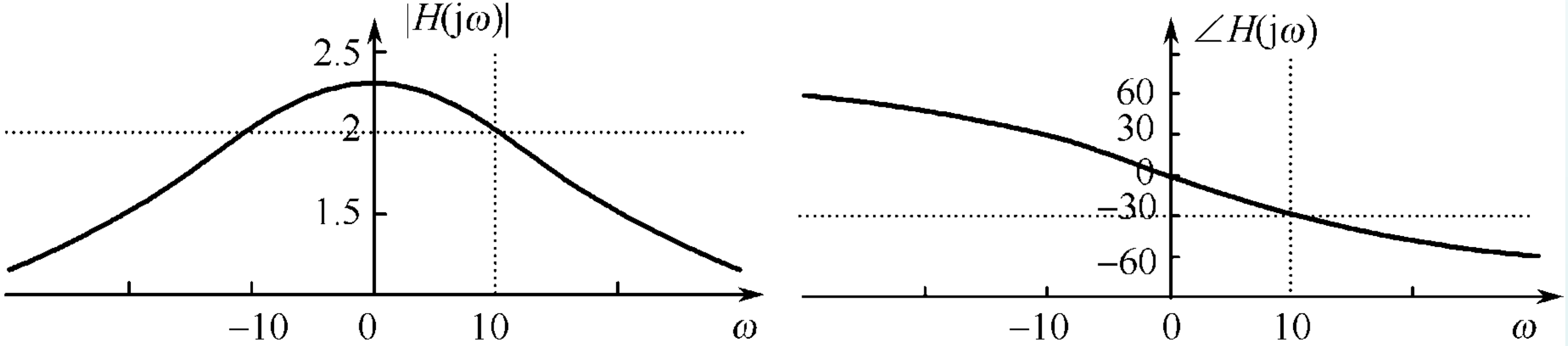
$$r_{zs}(t)=5|H(j10)|\cos[10t+50^0+\angle H(j10)]$$

$$r_{zs}(t)=10\cos(10t+20^0)$$

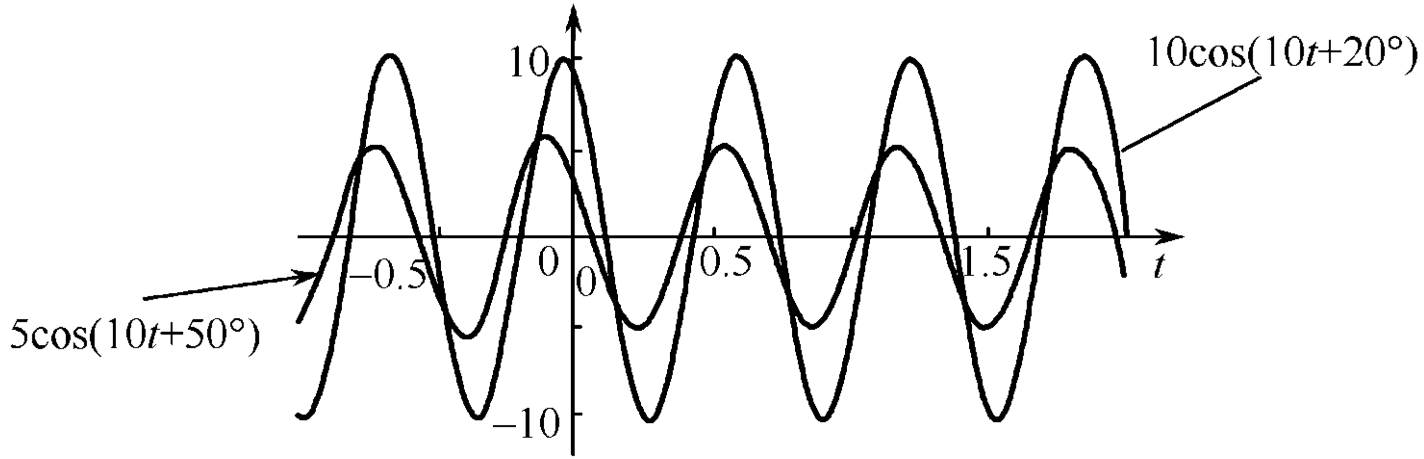
LTI系统频响示例

$$H(j\omega)=\frac{40}{j\omega+10\sqrt{3}}$$

$$5\cos(10t+50^0)\rightarrow 10\cos(10t+20^0)$$



(a)附加增益| H(j10)| =2 和附加相移∠H(j10) = −30°



(b)激励信号与输出响应

例4 已知系统 $H(j\omega)=j\omega$，当 $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ 时，求输出响应 $r_{zs}(t)$

解：

$$\cos(\omega_0 t+\theta)\rightarrow\left|H(j\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t+\theta+\angle H(j\omega_0)]$$

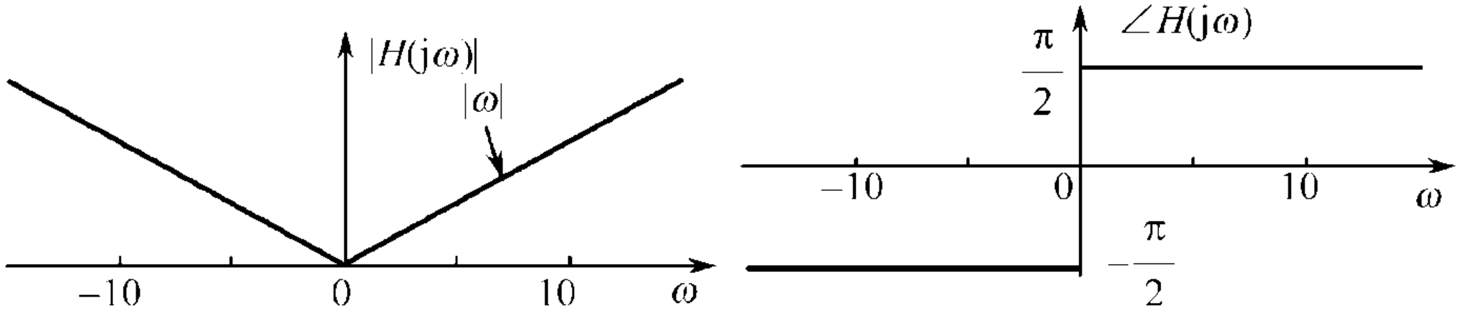
$$\left|H(j\omega)\right|=\left|\omega\right|$$

$$\angle\left|H(j\omega)\right|=\begin{cases}90^0 & \omega>0\\ -90^0 & \omega<0\end{cases}$$

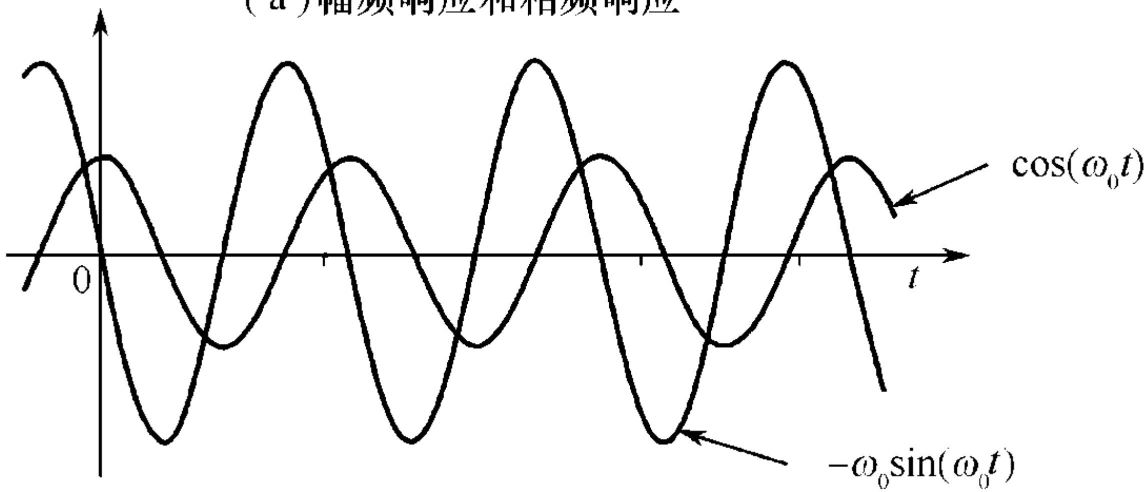
$$x(t)=\cos\omega_0 t\rightarrow\quad r_{zs}(t)=\omega_0\cos(\omega_0 t+\frac{\pi}{2})=-\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

jw: 微分系统

LTI系统频响示例



(a)幅频响应和相频响应



(b)单频信号通过线性时不变系统$H(s)=s$

例5 已知LTIS的系统频响

$$H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)}$$

求系统对激励信号 $e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$ 的稳态响应。

解：

$$e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)\overset{FT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{j\omega-j\omega_0}+\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$$

$$R_{zs}(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)(j\omega-j\omega_0)}+\pi H(j\omega_0)$$

$$=\frac{A}{j\omega+2}+\frac{B}{j\omega+1}+\frac{H(j\omega_0)}{j\omega-j\omega_0}$$

$$r_{zs}(t)=Ae^{-2t}\varepsilon(t)+Be^{-t}\varepsilon(t)+H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$$

例6 已知LTIS的系统频响

$$H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)}$$

求系统对激励信号 $e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$ 的稳态响应。

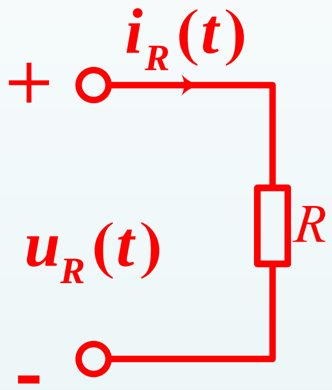
解： 系统对激励信号 $e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$ 的稳态响应为:

$$r_{zs}(t)=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)$$

系统对激励信号 $\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$ 的稳态响应为:

$$y(t)=\left|H(j\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t+\angle H(j\omega_0)]\varepsilon(t)$$

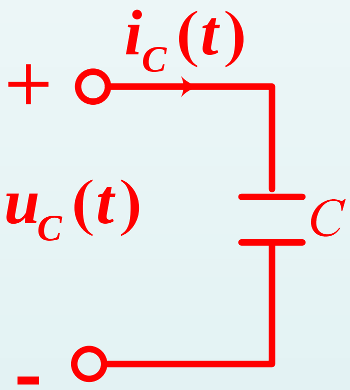
实例：电路系统的频谱分析



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$H_R(j\omega) = \frac{U_R(j\omega)}{I_R(j\omega)} = R$$

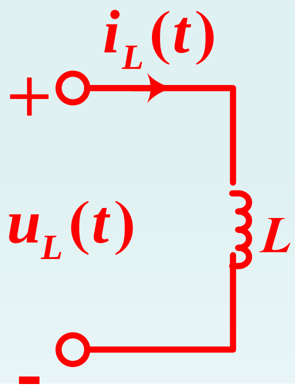
电阻复阻抗



$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad I_C(j\omega) = j\omega C U_C(j\omega)$$

$$H_C(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{I_C(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C}$$

电容复阻抗

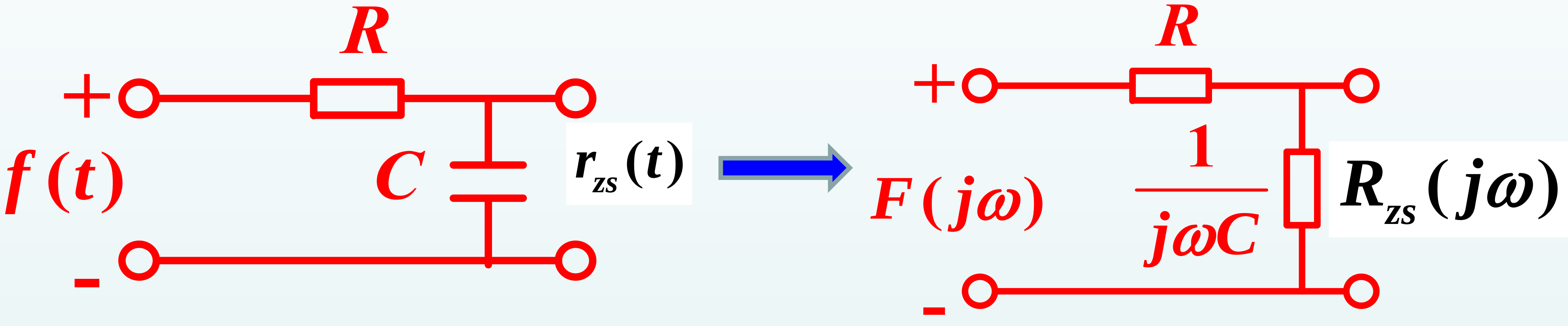


$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad U_L(j\omega) = j\omega L I_L(j\omega)$$

$$H_L(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = j\omega L$$

电感复阻抗

例7： RC电路 $f(t)=\varepsilon(t)$，求电容两端的电压 $r_{zs}(t)$

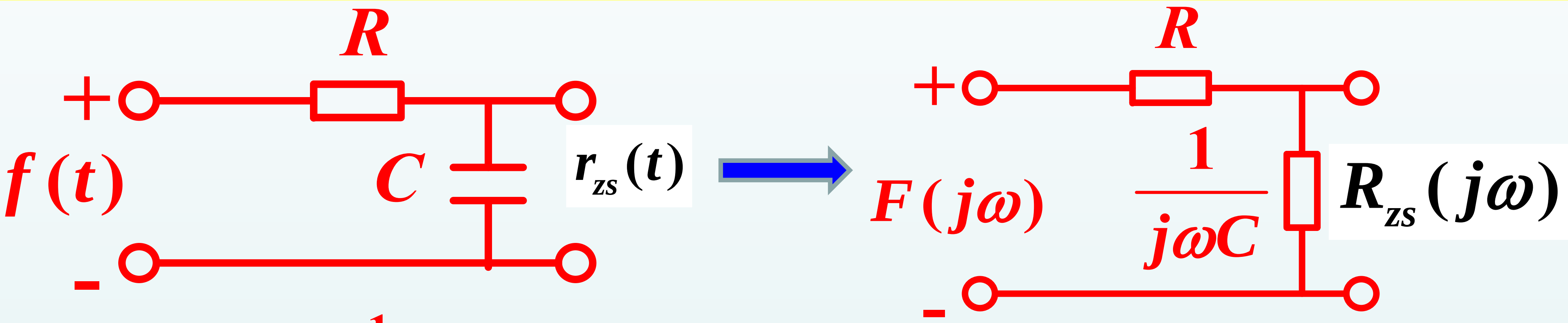


$$R_{zs}(j\omega)=F(j\omega)\frac{1/(j\omega c)}{R+1/(j\omega c)}=F(j\omega)\frac{1}{1+j\omega Rc}=\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)\frac{1}{1+j\omega Rc}$$

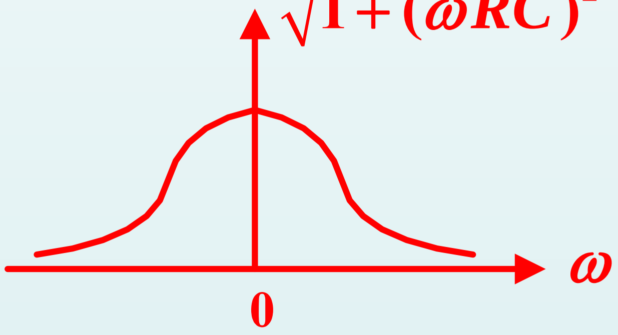
$$=\left(\pi\delta(\omega)\frac{1}{1+j\omega Rc}+\frac{1}{j\omega}\times\frac{1}{1+j\omega Rc}\right)$$

$$=\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\times\frac{1}{1+j\omega Rc}\right)$$

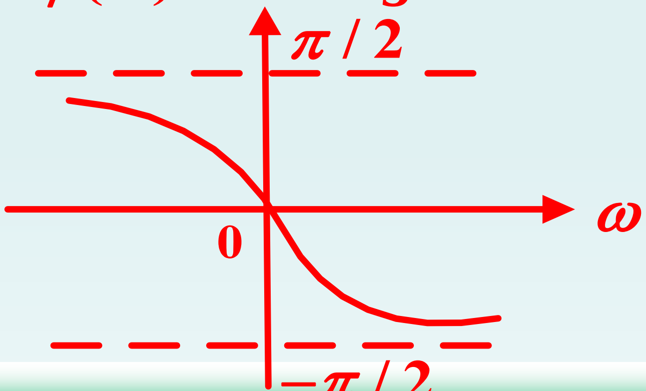
例7： RC电路 $f(t)=\varepsilon(t)$，求电容两端的电压 $r_{zs}(t)$



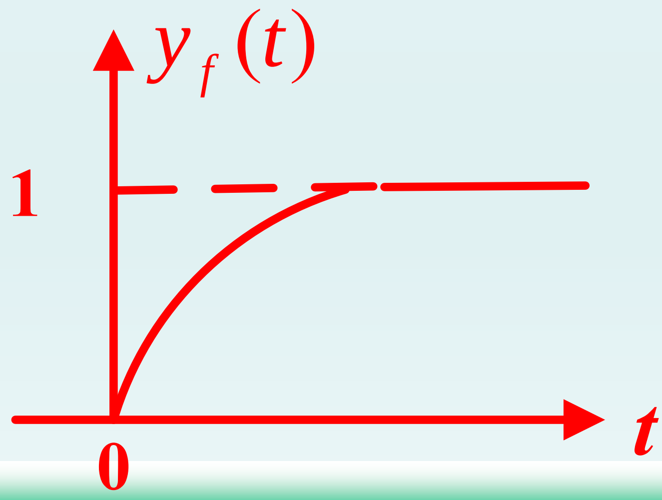
$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$



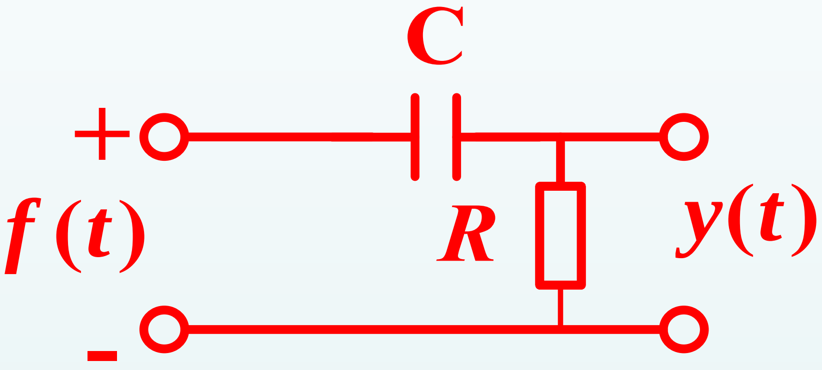
$$\varphi(\omega)=-arctg\,\omega RC$$

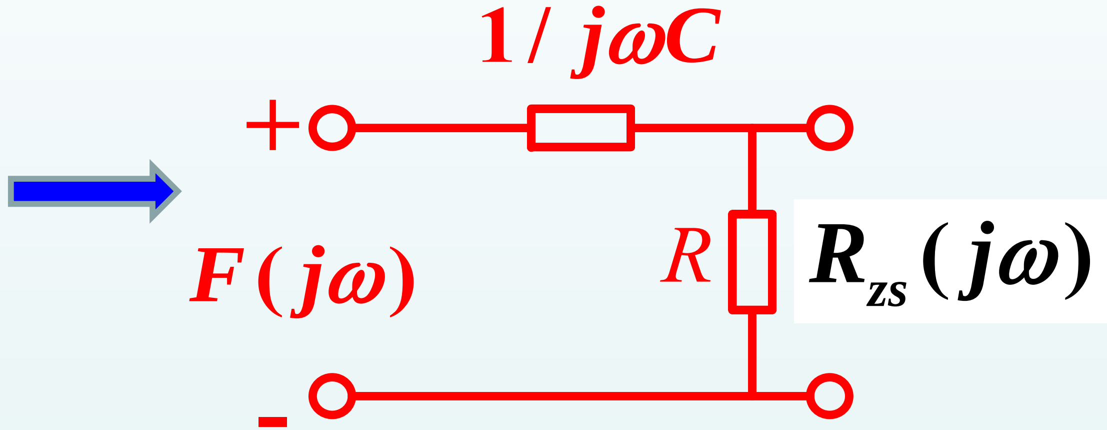


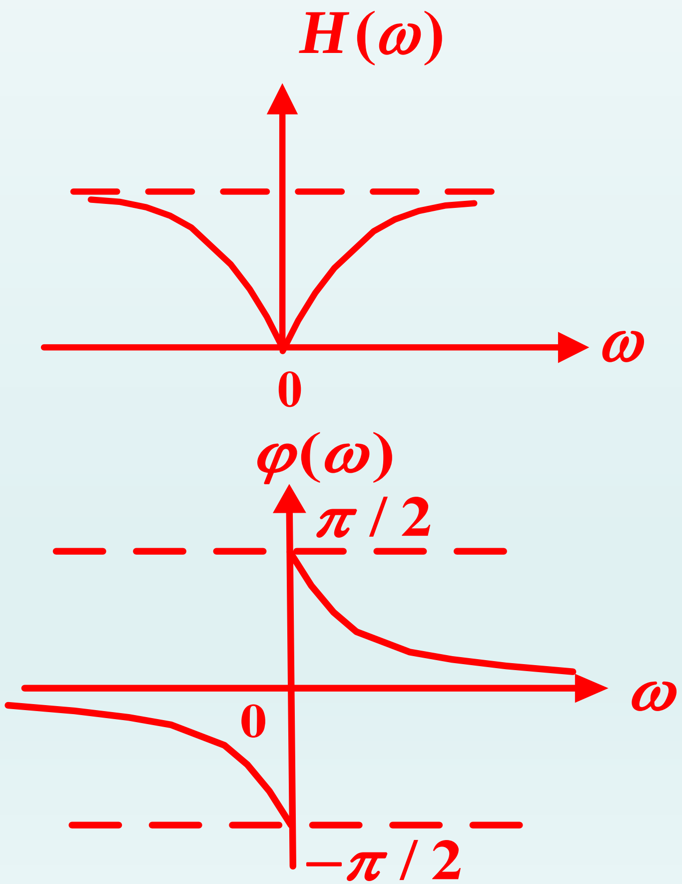
$$r_{zs}(t)=(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t)$$



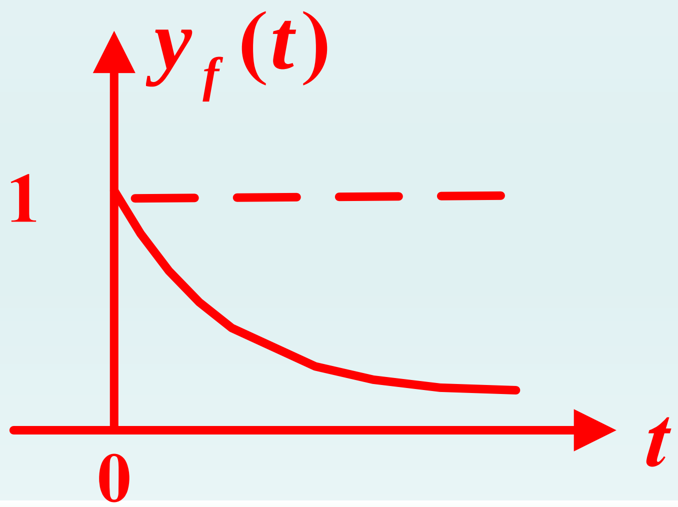
例8： CR电路 $f(t)=\varepsilon(t)$，求 $r_{zs}(t)$







$$r_{zs}(t)=e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$



LTIS对周期信号的响应

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t} \qquad H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$r_{zs}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n H(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$

LTIS对非周期信号的响应

Ch2. 时域分析$\Rightarrow$ $r_{zs}(t)=h(t)*f(t)$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

Ch4. 频域分析$\Rightarrow$ $R_{zs}(j\omega)=H(j\omega)\cdot F(j\omega)$

$H(j\omega)$为系统频响

系统可视为一个改变输入信号频谱特性的频谱变换器。

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)$$

$$e(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$r_{zs}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$