第三节 留数在定积分计算上的应用

- 一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分
- 二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分
- 三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x \quad (a>0)$ 的积分
- 四、小结与思考

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

思想方法： 把定积分化为一个复变函数沿某条封闭路线的积分.

两个重要工作:

1) 积分区域的转化

2) 被积函数的转化

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$

令 $z = e^{i\theta} \longrightarrow \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

当 θ 历经变程 $[0, 2\pi]$ 时,

z 沿单位圆周 $|z| = 1$ 的正方向绕行一周.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

z的有理函数，且在单位圆周上分母不为零，满足留数定理的条件．

包围在单位圆周内的诸孤立奇点．

例1 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta \quad (a>b>0)$

解 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2zi},\quad \cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\ \mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-2iz^2(bz^2+2az+b)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,\mathrm{d}z}{-2iz^2 b\left(z-\dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z-\dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}$$

$$= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\big[f(z),0\big]+\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{(-a+\sqrt{a^2-b^2})}{b}\right]\right\}$$

$$= \frac{2a\pi}{b^2}-\frac{2\pi\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$= \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

例2 计算 $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}(a>0).$

解

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}2x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

令 $2x=t,$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a+\frac{1-\cos t}{2}}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/2z}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a+1)z+1}.$$

极点为： $z_1 = 2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$ (在单位圆内)

$z_2 = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$ (在单位圆外)

所以 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$

$$= 2\pi i\cdot 2i\mathrm{Res}[f(z),(2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1})].$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例3 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$的值.

解 由于 $0<p<1$,

$$1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$$

在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零, 故积分有意义.

由于 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})=\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})$,

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

被积函数的三个极点 $z=0,p,\dfrac{1}{p}$,

$z=0,p$,在圆周 $|z|=1$ 内,

且 $z=0$ 为二级极点, $z=p$ 为一级极点,

所以在圆周 $|z|=1$ 上被积函数无奇点,

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{2i(z-pz^2-p+p^2z)^2}$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

因此

$$I=2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^2}{2ip^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

若有理函数 $R(x)$的分母至少比分子高两次,

并且分母在实轴上不为零.

一般设 $R(z)=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},\ m-n\geq 2$

分析 可先讨论 $\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x$,

最后令 $R\to\infty$ 即可.

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

1. 被积函数的转化: 可取 $f(z)=R(z)$.

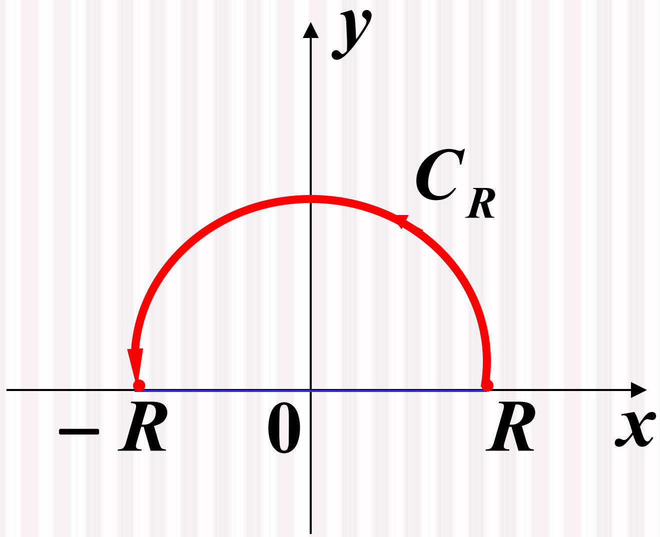
(当z在实轴上的区间内变动时 , $R(z)=R(x)$)

2. 积分区域的转化:

取一条连接区间两端的按段光滑曲线, 使与区间一起构成一条封闭曲线, 并使$R(z)$在其内部除有限孤立奇点外处处解析.

(此法常称为"围道积分法")

取R适当大, 使$R(z)$所有的在上半平面内的极点z_k都包在这积分路线内.



这里可补线C_R(以原点为中心, R为半径的在上半平面的半圆周)

C_R与$[-R, R]$一起构成封闭曲线C, $R(z)$在C及其内部(除去有限孤立奇点）处处解析.

根据留数定理得：

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

$$|R(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

当 $|z|$ 充分大时, 总可使

$$|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}| < \frac{1}{10}, \quad |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}| < \frac{1}{10},$$

因为 $m-n\geq 2,$

所以 $|R(z)|\leq \dfrac{1}{|z|^{m-n}}\cdot\dfrac{1+|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{1-|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}<\dfrac{2}{|z|^2}$

$$\left|\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z\right|\leq\int_{C_R}|R(z)|\mathrm{d}s\leq\frac{2}{R^2}\pi R=\frac{2\pi}{R},$$

$R\to+\infty:\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z\to 0;\quad \int_{-R}^{R} R(z)\mathrm{d}z\to\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{d}z,$

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k]$

例4 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}\quad (a>0,b>0,a\neq b)$$

解 $R(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$

在上半平面有二级极点 $z=ai$, 一级极点 $z=bi$.

$$\mathrm{Res}[R(z),ai]$$

$$=\left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\Bigg|_{z=ai}\quad=\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2},$$

$$\operatorname{Res}[R(z),bi]=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\right|_{z=bi}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)^2},$$

所以 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[R(z),bi]+\operatorname{Res}[R(z),ai]\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2}+\frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]$$

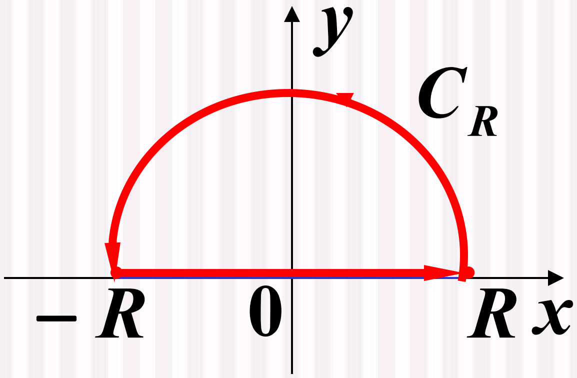
$$=\frac{(2a-b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x \ \ (a>0)$ 的积分

积分存在要求: $R(x)$是x的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且$R(z)$在实轴上无奇点.

同前一型: 补线C_R

C_R与$[-R, R]$一起构成封闭



曲线C ,使$R(z)$所有的在上半平面内的极点 z_k都

包在这积分路线内 .

对于充分大的 $|z|$，且 $m-n\geq 1$时，有 $|R(z)|<\dfrac{2}{|z|}$

$$\left|\int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R} |R(z)|\left|e^{aiz}\right|\mathrm{d}s < \frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{ai(x+iy)}\right|\mathrm{d}s$$

令 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$

则 $z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$

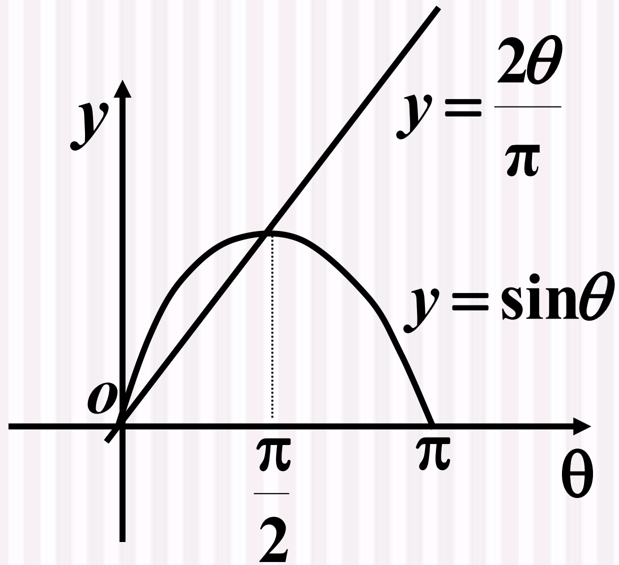
$0<\theta<\pi$

$$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}z|=\left|\mathrm{d}(Re^{i\theta})\right|$$

$$=R\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{ai(x+iy)}\right|\mathrm{d}s=\frac{2}{R}\int_{C_R}\left|e^{axi}\right|\left|e^{-ay}\right|\mathrm{d}s=2\int_0^{\pi}e^{-aR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \le 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{aR}(1-e^{-aR}).$$



$R \to +\infty$

0

从而 $$\left|\int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z\right| \le \frac{2\pi}{aR}(1-e^{-aR}) \to 0.$$

$$\int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z \to 0\,.$$

由留数定理:

$$\int_{-R}^{R} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)e^{aiz}\mathrm{d}z = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$R \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$$

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k].$$

例5 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,\quad (m>0,a>0).$

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}\mathrm{d}x\right]$$

又 $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz},$

在上半平面内只有二级极点 $z=ai,$

$$\operatorname{Res}(f(z),ai)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai}=\frac{m}{4a}e^{-ma},$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}\mathrm{d}x=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz},ai\right]$$

所以 $$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}[2\pi i\operatorname{Res}(f(z),ai)]$$

$$=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

注意 以上两型积分中被积函数中的$R(z)$在实轴上无奇点.

例6 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

分析 $\frac{\sin x}{x}$是偶函数，所以

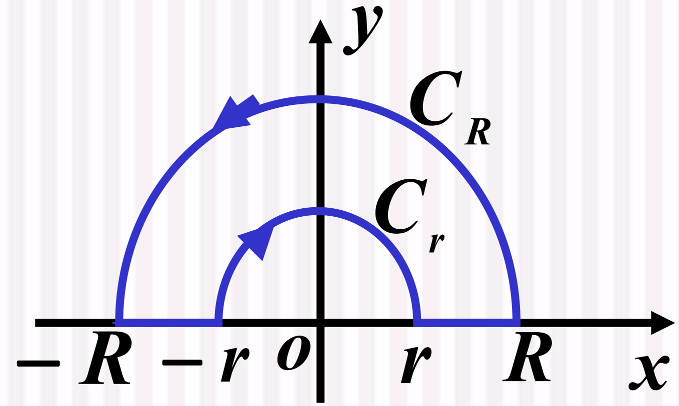
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x. \longrightarrow \frac{\sin z}{z}$$

$[-\infty,+\infty]\to$ 某封闭曲线

因 $\frac{\sin z}{z}$ 在实轴上有一级极点 $z=0$, 应使封闭路线不经过奇点, 所以可取图示路线:

解　封闭曲线C:

$$C_R + [-R, -r] + C_r + [r, R]$$



由柯西-古萨定理得:

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

令 $x = -t$, $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{R}^{r} \frac{e^{-it}}{t} dt = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx,$

由 $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$

知 $2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0,$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_R} \frac{\left|e^{iz}\right|}{|z|}\mathrm{d}s = \frac{1}{R}\int_{C_R} e^{-y}\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(2\theta/\pi)}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}),$$

于是 $R \to +\infty \Rightarrow \oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z \to 0$ 当r充分小时,

因为 $\dfrac{e^{iz}}{z}=\dfrac{1}{z}+i-\dfrac{z}{2!}+\cdots+\dfrac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots \quad =\dfrac{1}{z}+g(z)$,

$$g(z)=i-\frac{z}{2!}-\frac{iz^2}{3!}+\cdots+\frac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

当 $|z|$ 充分小时，总有 $|g(z)|\le 2$,

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{C_r}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_r}g(z)\mathrm{d}z,$$

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=-i\pi,$$

因为 $\left|\int_{C_r} g(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_r} |g(z)|\mathrm{d}s \le 2\int_{C_r}\mathrm{d}s = 2\pi r$,

$r \to 0 \Rightarrow \int_{C_r} g(z)\mathrm{d}z \to 0$, 即 $\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -\pi i + 0 = -\pi i$,

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0,$$

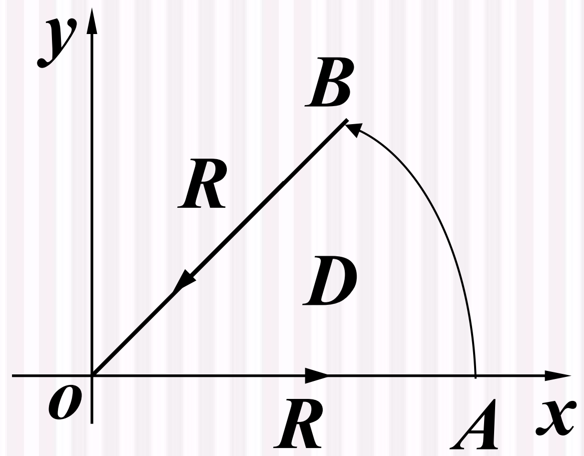
$$\longrightarrow \quad 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi i,$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$

例7 证明 $\int_0^{\infty}\sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

证 设函数 $e^{iz^2} \xrightarrow{\text{当} z = x \text{时}} e^{iz^2} = \cos x^2 + \sin x^2$

如图路径，$\oint_C e^{ir^2}\mathrm{d}z = 0,$



$$\int_{OA} e^{ix^2}\mathrm{d}z + \int_{\widehat{AB}} e^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{BO} e^{iz^2}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_0^R e^{ix^2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i}\mathrm{d}r = 0,$$

或 $\int_0^R (\cos x^2 + i\sin x^2)\mathrm{d}x$

$$= e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

当$R\to\infty$时，

$$e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin 2\theta} R\mathrm{d}\theta$$

$$\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}). \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_0^{\infty}(\cos x^2 + i\sin x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

令两端实部与虚部分别相等，得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

菲涅耳(fresnel)积分

四、小结与思考

本课我们应用“围道积分法”计算了三类实积分, 熟练掌握应用留数计算定积分是本章的难点.

思考题

计算积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\cos^2\theta}\ (a>0).$

思考题答案

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,2\theta}{1+2a^2+\cos 2\theta}\quad(令2\theta=t)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1+2a^2+\cos t}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{1+2a^2+\cos t}$$

$$=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}.$$