复变函数与积分变换

主讲人：夏健康

Email ：jiankangxia@nwpu.edu.cn

助　教：王靖靖

课程Q群:951654357

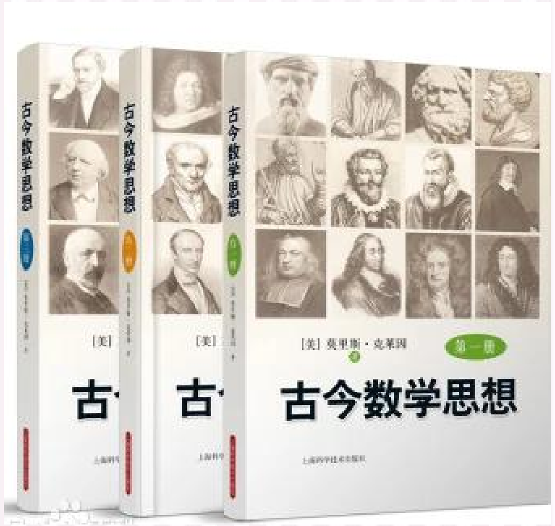
2021 秋

Introduction

The theory of functions of a complex variable, is the branch of mathematical analysis that investigates functions of complex numbers. It is useful in many branches of mathematics, including algebraic geometry, number theory, analytic combinatorics, applied mathematics; as well as in physics, including the branches of hydrodynamics(流体动力学), thermodynamics(热力学), and particularly quantum mechanics(量子力学). By extension, use of complex analysis also has applications in engineering fields such as nuclear, aerospace, mechanical and electrical engineering.

从技术观点来看,十九世纪最独特的创造是单复变函数的理论.这个新的数学分支统治了十九世纪,几乎像微积分的直接扩展统治了十八世纪那样.这一丰饶的数学分支,一直被称为这个世纪的数学享受.它也被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一.

——Morris·Kline



研究对象:

定义在复平面上的复值函数

复变函数的萌芽与初创

代数方程求根 $x^2+2px+q=0$

$$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-q}$$

公元前400年，已被古巴比伦人发现和使用。

《九章算术》少广篇就记载了开平方、开立方的方法。

三次方程求根

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

1545年，意大利学者Cardano在《大术》首先给出了一类三次方程的求根公式

$$x^3 + px + q = 0$$

一元三次方程都可化为x³+px+q=0。它的解是：

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_3 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 。

对负数开方的思想得以萌发。**虚构的数，不真实。**

1 复变函数理论的萌芽与诞生

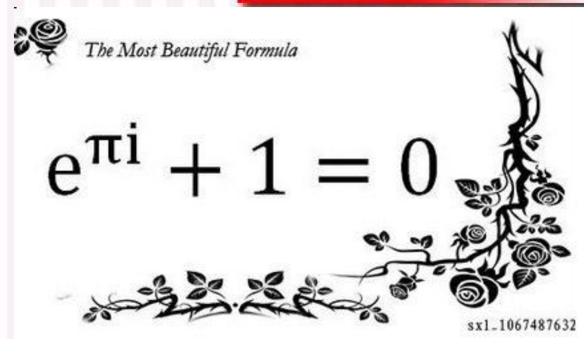
16至18世纪，是复数理论的形成与发展时期，也是复变函数论的酝酿、准备时期。

16世纪中期，意大利数学家卡尔丹(*H. Cardan*)在代数方程论中首次(1545年)产生了负数开平方的思想。这实际上已标志了复数的萌芽。

使得复数被数学界普遍接受的一个决定性因素是复数几何意义的发现。期间，许多人——*Cotes*、*De. Moivre*、*Euler*，还有*Vandermonde*等，都曾把复数看作是平面上的点。1797年，挪威人测量员*Caspar Wessel*(1745～1818)发表了题为《关于方向的分析表示：一个尝试》的论文。文中引入了虚轴(正向)，以$e=\sqrt{-1}$作单位。同时期，瑞士人*Jean－Robert Argand*(1768～1882)进一步给出复数的几何解释，他在《试论几何作图中虚量的表示法》这本小册子中给出了虚轴的负方向；*Causs*的工作更为有效，他把复数与直角坐标平面上的点一一对应起来，从而使得复数有了合理的代数表示：$a+bi$(a、b为实数)。

瑞士数学家欧拉

系统建立了复数理论



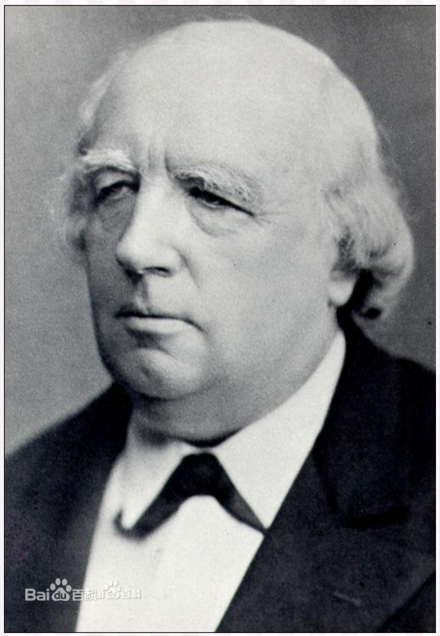
1777年，Euler首次用符号i表示虚数单位，发现了复指数函数和三角函数之间的关系（欧拉公式），创立了复变函数论的一些基本定理，并应用到水力学和地图制图学上。（复数有了用武之地）

自此之后，**虚数不“虚”！**

19世纪，复变函数理论蓬勃发展

Cauchy

Riemann



Weierstrass

2 复变函数理论的形成与发展

19 世纪，是复变函数论的形成与发展时期。

由于受到微积分思想和方法的启示，19 世纪的数学家们开始并集中地对复函数进行了分析学研究。以复平面的为基础的复极限理论成为这一研究的基本理论工具。

在整个这一世纪里，法国人柯西(*A. Cauchy*)德国人黎曼(*B. Riemann*)和外尔斯特拉斯(*K. Weierstrass*)，先后从不同的角度，采用各自的方法，对所谓的复变量解析函数(其中包括了整个的初等复函数类)进行了系统地研究，逐步建立起相对独立，互为补充，又彼此协调一致的单复变解析函数论。

柯西是对复函数的积分问题注意得最多，其研究成果也最为突出的一位开创性数学家。他先后发表了《关于定积分理论的报告》(1825 年)、《关于积分限为虚数的定积分的报告》，(1874 年)和《关于伸展到一个闭曲线的所有点的积分》(1846)等一系列重要的论文。他所关心的已不再是实积分及其值的计算，而是转到了考察复函数本身，并为复变函数论奠定了基础。为适应许多应用学科理论研究的需要，他提出并研究了复积分与路径无关的条件问题，给出并证明了用复积分形式表示一类复函数的现实可能性。针对求积分值的计算问题，柯西还曾给出过关于留数(或残数)计算方面的一些有益的结果。所有这些重要的思想和工作，经过许多人的努力，最终形成了作为解析函数论立论基础的至今被称为“柯西积分定理”、“柯西积分公式”等重要结论。应当强调指出的一点是，柯西是把积分作为研究初等复函数的理论工具来对待的。从这个意义上说来，柯西的工作实际上是建立起了解析函数论的积分理论的立论基础。

外尔斯特拉斯是一位博学勤勉的数学家，他对数学的不少领域都有过独立的思考和研究，受当时数学界算术化倾向的影响，偏爱于级数方法，对之达到了运用自如的程度。正当柯西等人以解析式表示的复函数为基础建立函数论的时候，外尔斯特拉斯开辟了以幂级数理论为基础研究复函数的新途径。鉴于柯西的理论是建立在几何的基础之上的，他转而借鉴实数构造论的思想，从事以级数理论为基础来建立解析函数的理论，并建立起解析开拓的思想与方法，这一工作大体是在十九世纪四十年代完成的。对于函数论的许多其他方面，外尔斯特拉斯同样作出过不少有益的工作。由他所开创的关于解析函数的级数理论，为解析函数某些孤立点的分类研究提供了十分有效的理论和方法。

黎曼是一位卓有成效的几何学家，他的不少理论性研究工作都是具有开创性的。黎曼在他的数学理论研究中，不仅能够自由地运用几何直观，而且常常注意到数学问题的物理论证。黎曼的函数论思想，很可能来自他研究平面电流的流动。位势方程及其理论正是复函数理论在此类应用学科中的具体运用和体现。为此，黎曼集中注意的是复函数的映射性质。黎曼映射定理揭示了解析函数的几何本质：单叶解析的复函数是从复平面区域到复平面区域的保形变换（或映射）。由黎曼首创的多叶曲面——黎曼曲面，使得单值初等复函数与多值初等复函数在映射的观点下实现了理论上的完美统一。应当肯定地说，主要的是由于黎曼的工作，奠定了解析函数论的几何理论的基础。

综上所述，在复变函数论兴起的十九世纪，柯西、黎曼和外尔斯特拉斯是函数论思想和方法的三个主要奠基人。嗣后，柯西和黎曼的思想融合了起来，而外尔斯特拉斯的思想被逐渐从柯西——黎曼的观点推演了出来，并且在这一过程中，理论及其观点的严密性、系统性与完整性也被充分地加以改进。于是，复变函数论的思想、内容和方法逐步趋于回归与统一。

20世纪

维尔斯特拉斯的学生瑞典数学家Leffler、法国数学家Poincaré、Hadamard等都作了大量的研究工作，开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献。

多复变函数在中国

华罗庚、陆启铿、周向宇、关启安

复变函数很有用

平面热传导问题、电(磁)场强度的计算

绕流问题： 儒柯夫斯基设计飞机机翼时计算机翼剖面压力，研究机翼的造型问题。

渗流问题：水在孔隙介质中流动问题（土壤）

例如：大坝、钻井的浸润曲线.

平面弹性理论：

…………

复变函数理论的主要内容：

单值解析函数理论 ： 微分、积分、级数理论, 留数理论

几何函数论 （共形映射）

黎曼曲面理论

广义解析函数

解析函数

Cauchy--Riemann方程

设$z=x+iy$. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析， 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

设$f(z)$在单连通区域B内解析，则对B内的任意封闭曲线C都有

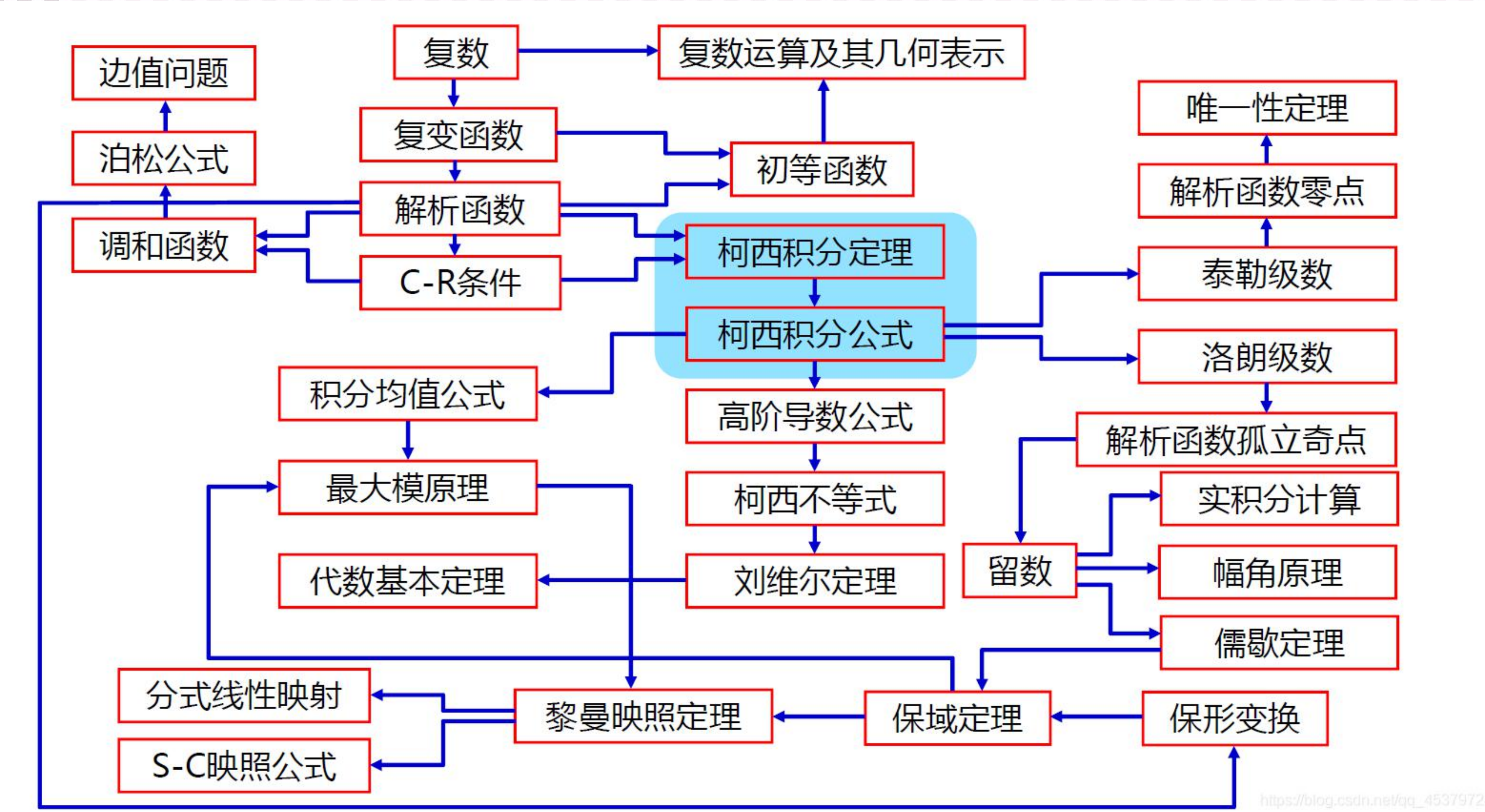
$$\oint_C f(z)dz=0.$$

解析函数一定可以展成幂级数。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<d.$$

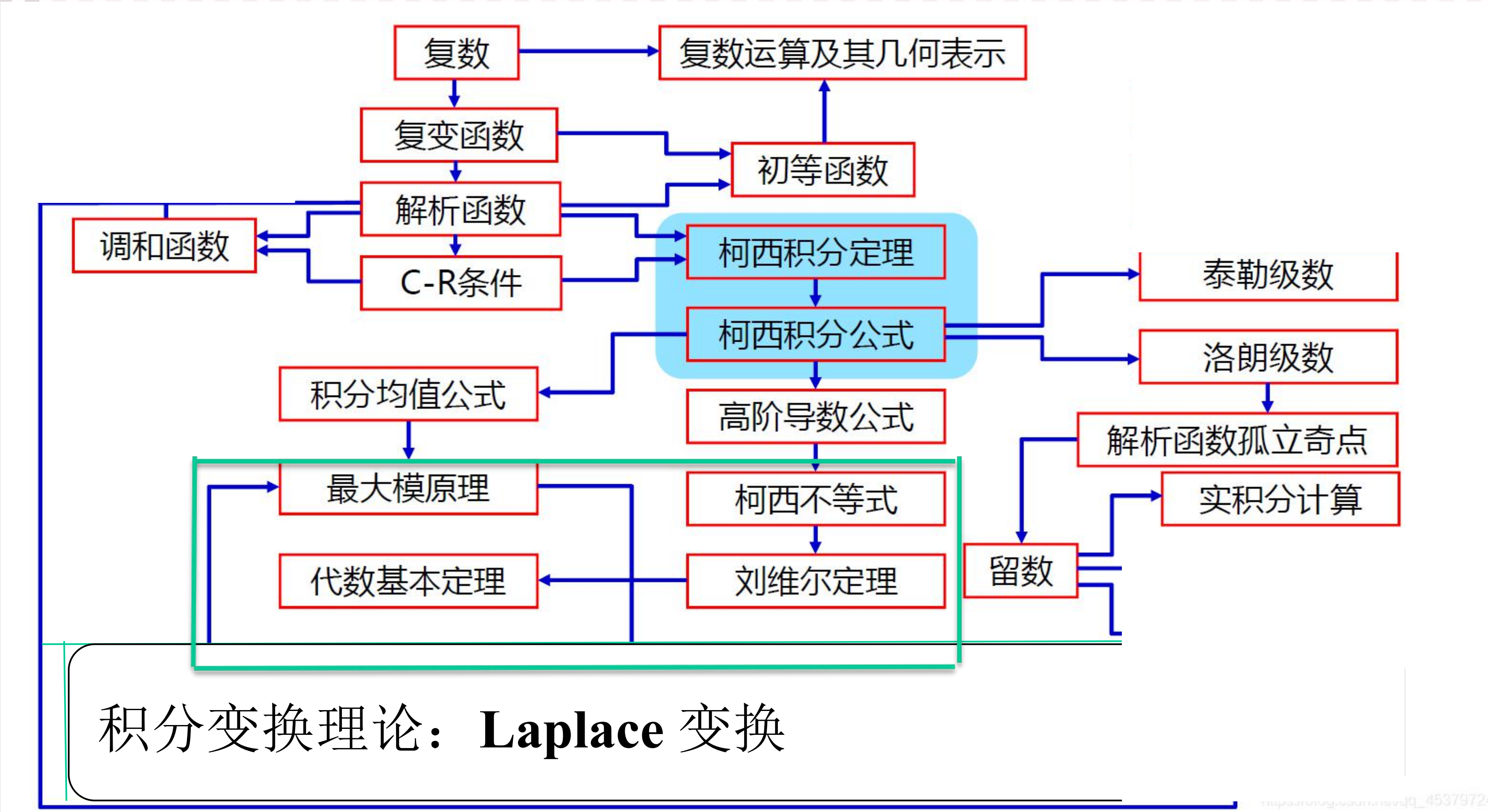
复周线定理、柯西积分公式、洛朗级数、留数

复变函数论的主要内容：


边值问题
泊松公式
调和函数
复数
复变函数
解析函数
C-R条件
复数运算及其几何表示
初等函数
柯西积分定理
柯西积分公式
积分均值公式
最大模原理
代数基本定理
高阶导数公式
柯西不等式
刘维尔定理
唯一性定理
解析函数零点
泰勒级数
洛朗级数
解析函数孤立奇点
留数
实积分计算
幅角原理
儒歇定理
分式线性映射
S-C映照公式
黎曼映照定理
保域定理
保形变换

复变函数

要学的内容



复数
复数运算及其几何表示
复变函数
初等函数
解析函数
调和函数
C-R条件
柯西积分定理
柯西积分公式
泰勒级数
洛朗级数
积分均值公式
高阶导数公式
解析函数孤立奇点
最大模原理
柯西不等式
实积分计算
留数
代数基本定理
刘维尔定理
积分变换理论：Laplace 变换

三、课程学习方法

比较学习法：注意联系高等数学中二元函数的相关知识，既要了解二者的相同之处，更须察其本质差异。

做点习题，熟悉相关理论，掌握积分、留数的计算。联系本学科的实际应用。

四、课程考核方式

复变函数与积分变换实行线上和线下混合式教学：线上（章节测试+章节作业+互动讨论+线上期末考试）占比 20%，线下（考勤+线下纸质作业+线下期末考试）占比 80%。具体比例如下：

线上部分：

线上章节测验（5%）

线上章节作业（包括作业**互评打分**，系统随机分配）（5%）

线上互动讨论（每章节内容发布后均需参与讨论）（2%）

线上期末考试（8%）

线下部分：

考勤（2%）+线下纸质作业（8%）+线下期末考试（70%）

线上通道：中国大学 mooc

（https://www.icourse163.org/course/NWPU-1460966164?tid=1465425575）

注意：每位学生加入课程和课堂的账号使用同一个账号，建议使用中国大学 MOOC APP 进行学习。

慕课堂课堂码：**8AZTZW**（复变函数与积分变换 08 大班）

一共8周，32课时，国庆放假4课时。

以下情形，欢迎下次再来！

作业不交4次及以上，或

考勤缺4次及以上

线上内容（测验，作业，讨论）是系统自动给分，错过没有成绩！

时间节点

各章节发布时间和截止时间具体如下：

08.30-09.19 第一章课时内容，测试，完成作业并提交；09.26 第一章作业互评截止；

09.05-09.26 第二章课时内容，测试，完成作业并提交；10.03 第二章作业互评截止；

09.12-10.03 第三章课时内容，测试，完成作业并提交；10.10 第三章作业互评截止；

09.20-10.10 第四章课时内容，测试，完成作业并提交；10.17 第四章作业互评截止；

09.27-10.17 第五章课时内容，测试，完成作业并提交；10.24 第五章作业互评截止；

10.04-10.24 第六章课时内容，测试，完成作业并提交；10.30 第六章作业互评截止；

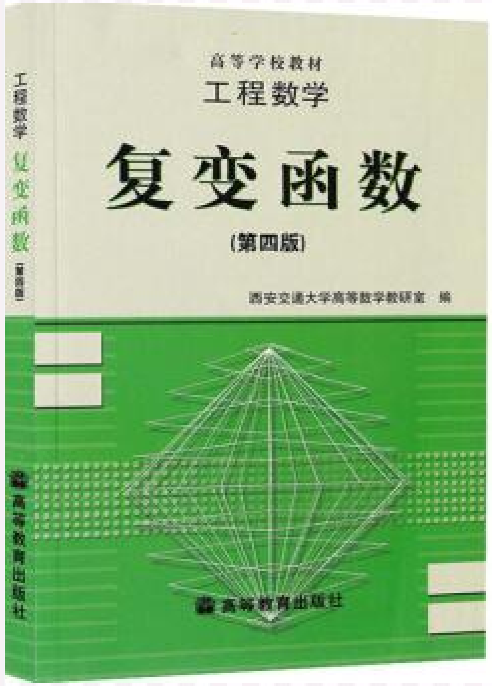
10.31 00：00-23：30 线上期末测试，当天完成并提交，限定连续 2 小时完成。

答疑安排

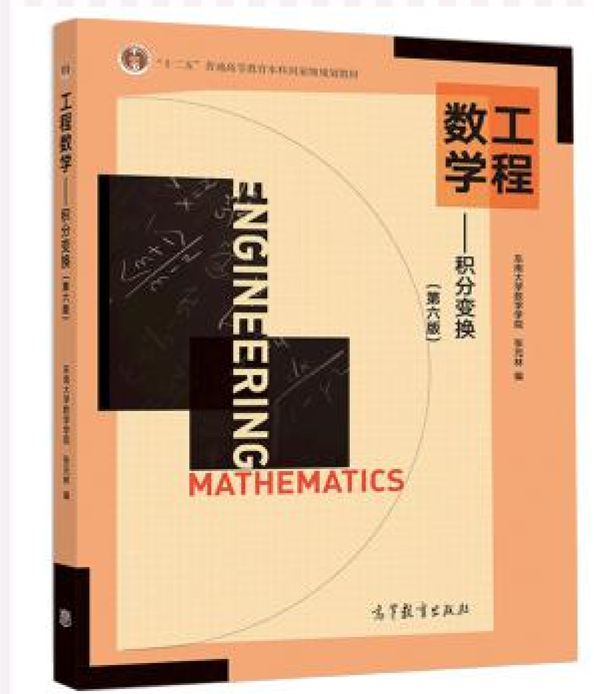
线上：登录中国大学 mooc—学校云平台—spoc 讨论区答疑

线下：从第二周开始，教西 D203，每五下午 3：30-5：30

教材

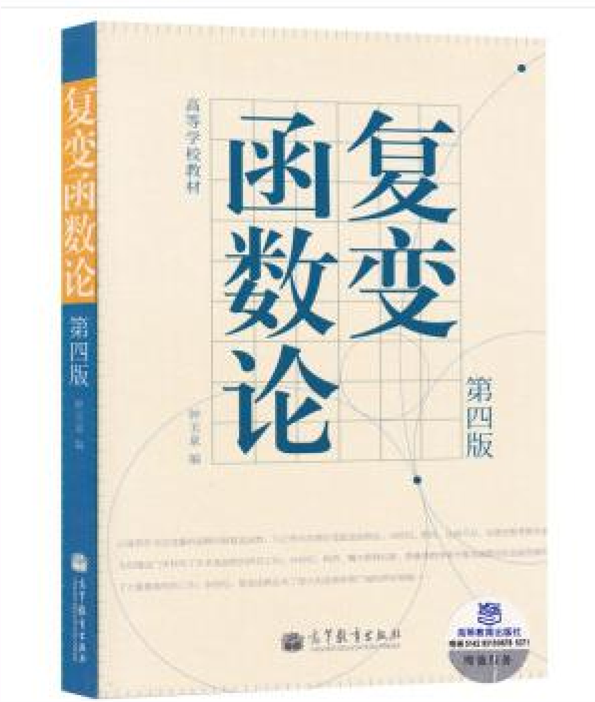


工程数学复变函数第四版，
西安交通大学高等数学教研室，
高等教育出版社，2011



工程数学积分变换第六版
东南大学数学系 张元林编，
高等教育出版社，2012

参考教材



钟玉泉著 复变函数论 第四版
北京：高等教育出版社 2013

收发作业：11，31，61，91，121，141负责收发作业。
每章交一次，交到教西A 304
课程Q群：951654357

复变函数课程08...

第一章 复数与复变函数

1.复数的代数运算和共轭运算

一、复数的基本概念

二、复数的代数运算

三、复数的共轭运算

一、复数的基本概念：

1、复数的定义：

形如 $z = x + iy$ 的数称之为复数，其中 i 为虚数单位，

x, y 为实数，分别称为 z 的实部和虚部，记作：

$$x = \mathrm{Re}\, z, \qquad y = \mathrm{Im}\, z$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

虚部为零，即为实数，实部为零，称为纯虚数。

复数的模：

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

2、复数相等：

设 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

即 实部和虚部均相等

复数本身无大小，
复数的模可比较大小

3、共轭复数

若 $z = x + iy$，它的共轭复数定义为：$\bar{z} = x - iy$

若两个复数实部相等，虚部互为相反数，则称这两个复数是共轭的。

二、复数的代数运算：

1、加减法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

2、乘除法：

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

三、复数的共轭运算：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(3) $\overline{\overline{z}} = z$

(4) $z \cdot \overline{z} = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 = |z|^2$

(5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$

2. 复数的几何表示

一、复平面：

1. 定义：

建立平面直角坐标系，让平面上的点 (x, y) 表示复数 $z = x + iy$,则复数的全体和平面上的点建立了一一对应关系，这样的平面称为复平面，其中 x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。

2. 复数的点表示法：

任意复数可用复平面上的点来表示。

3. 复数的向量表示：

复数 $z = x + iy$ 和从原点指向点(x, y)的向量是一一对应的，所以可以用从原点出发的向量来表示复数。

复数代数运算的几何意义：

1）加法：

z_1 和 z_2 相加即为以 z_1 、z_2 为边的平行四边形的对角线指的向量所对应的复数。

2）减法：

z_1 减 z_2 即为从 z_2端点指向 z_1 端点的向量。

4.复数的三角表示式:

1）模和辐角的定义

习惯上把表示式$z=x+iy$称为复数的直角坐标表示式或代数形式，利用直角坐标系和极坐标之间的联系

则 $x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

三角表示式

其中 r 表示 z 所对应向量的长度，称为 z 的模，记作 $r=|z|$，

θ 称为 z 的辐角，记作 $\theta=Argz$, 把其中落在 $(-\pi,\pi]$

之间的角 θ_0 称为主辐角，记为 $\theta_0=\arg z$，则有：

$$Argz=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

2）主辐角的计算

下面的公式给出了主辐角的计算方法：

$$
\text{当} z \neq 0 \text{时}, \arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & z\text{在第一、四象限} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & z\text{在第二象限} \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & z\text{在第三象限} \\ 0 & z\ \text{在正}x\text{轴} \\ \pi & z\ \text{在负}\ x\text{轴} \\ \dfrac{\pi}{2} & z\ \text{在正}\ y\text{轴} \\ -\dfrac{\pi}{2} & z\ \text{在负}\ y\ \text{轴} \end{cases}
$$

z=0 时
辐角无定义

例1. 将下列各复数表示为三角形式：

$$(1)\quad z=-2-2\sqrt{3}i$$

解：(1) 因 z 在第三象限，所以：

$$\arg z=\arctan\frac{-2\sqrt{3}}{-2}-\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

又 $|z|=\sqrt{4+12}=4$ 所以：

$$z=4[\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi)]$$

5. 复数的指数表示式:

利用欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,从复数的三角表示式即得

指数表示式 $z = re^{i\theta}$.

6. 几个重要不等式:

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \le |z|, \quad |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

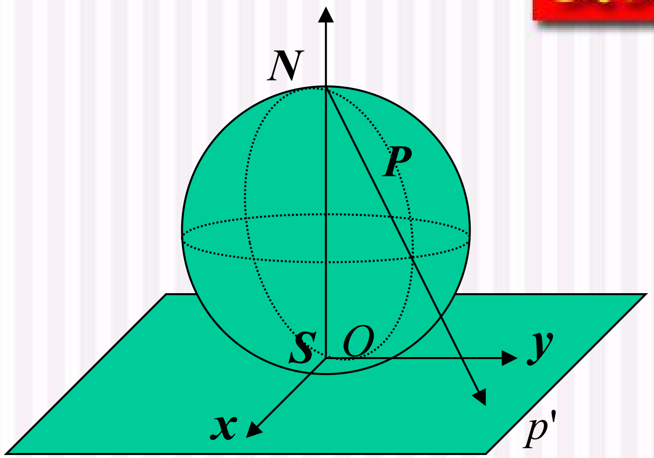
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

二、复球面

现在建立这样的对应关系：

$$o \rightleftarrows s$$

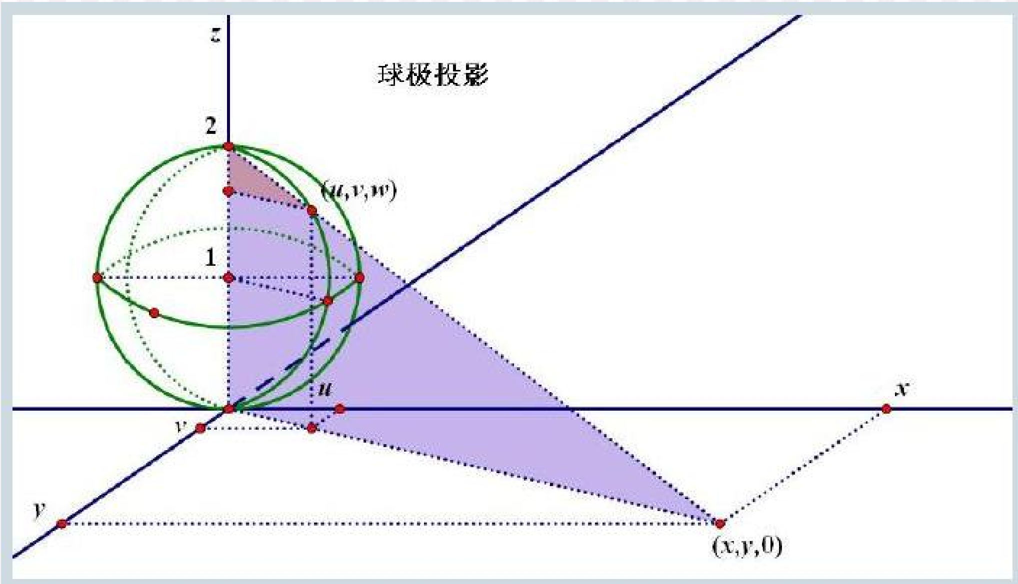
$$p \rightleftarrows p'$$



这样，除**N**点之外，球面上的所有点和复平面上的所有点之间建立了一一对应关系，该球面即称为<u>复球面</u>。

注意到当复数的模越大时，它所对应的复球面上的点越靠近N,因此我们可以认为***N***和复平面上一个模为∞的点相对应，这样的一个点成为无穷远点，记为 $z=\infty$. 若把无穷远点添加到复平面中，则称为<u>扩充复平面</u>，与其对应的球面称为<u>扩充复球面</u>。

球极投影坐标公式



$$\begin{cases} \dfrac{u}{x}=\dfrac{v}{y}, u^2+v^2+(w-1)^2=1. \\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{w}{2}. \end{cases}$$

关于∞运算的约定：

$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty. \ (\alpha \neq \infty)$

$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty. \quad (\alpha \neq 0)$

$\dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, \dfrac{\alpha}{\infty}=0. \quad (\alpha \neq \infty)$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2u}{2-w} \\ y=\dfrac{2v}{2-w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{4x}{4+x^2+y^2} \\ v=\dfrac{4y}{4+x^2+y^2} \\ w=\dfrac{2x^2+2y^2}{4+x^2+y^2} \end{cases}$$

例2 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$; (2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$,半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线. 设 $z=x+iy$,

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x$.

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$ 设 $z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3$.

3. 复数的乘幂与方根

一、乘积与商

1. 乘积:

1）表达式:

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

则:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

可以看出:

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ （k为特定整数）

$$Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2$$

证明三角形内角和

2）几何意义：

$z_1 z_2$ 即为把 z_1 旋转 θ_2 并将模伸长 r_2 倍所得向量。

(θ_2 为正，逆时针；θ_2为负，顺时针)

2. 商： 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

则：

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\left(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\right) = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|},\qquad Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Argz_2 - Argz_1$$

例1 已知 $z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i),\quad z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3},$

求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 因为 $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $z_1\cdot z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-i,$

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

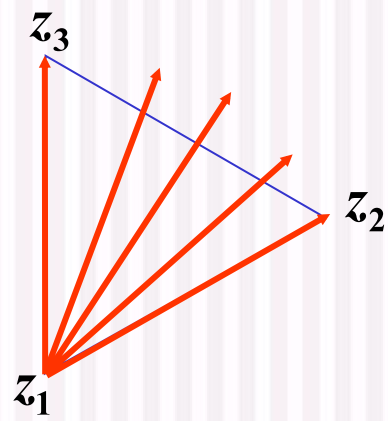
例2 证明：三个复数 z_1, z_2, z_3 成为等边三角形顶点的充要条件是 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

证 $\Delta z_1z_2z_3$ 是等边三角形的充要条件为：

向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 绕 z_1 旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{\pi}{3}$ 即得向量 $\overrightarrow{z_1z_3}$,

即 $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$,

或 $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,



$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$\frac{(\ )^2}{(\ )^2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{(\ )^2}{(\ )^2} = -1$$

两边平方, 并化简得

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

内容总结:

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in Z\}.$$

设$z = x + iy$.则 $\arg z = \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi$.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

其中$\theta_1 \in Argz_1, \theta_2 \in Argz_2$.

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad \theta \in \operatorname{Arg} z.$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

二、幂与根

1、幂：n个相同的复数z的乘积称为z的n次幂，记作z^n.

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$，则：

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

特别地,$r = 1$ 时：

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

称为棣莫弗（De Moivre）公式。

2、根：若 $w^n = z$ 则称 w 为z的n次方根，记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 。

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

由 $w^n = z$ 得:

ϕ

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

即得:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时, ϕ 有n个不同的值，即得n个

相异根:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

举个栗子

例3：求$\sqrt[4]{1+i}$

解：因 $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

所以：

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$

§4、平面点集的几个基本概念

1、点集：有限个或无限个点的集合称为点集。由于复平面上的点和复数全体是一一对应的，所以复平面上的点可看作复数。

2、δ -邻域：设 z_0 为复平面上一点，对于任意给定的正数 δ，满足$|z-z_0|<\delta$ 的点集称为点 z_0 的 δ -邻域，满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点集称为 z_0 的去心 δ-邻域。

若 $z_0=\infty, M$ 为任意正数，满足 $|z|>M$ 的点集称为 ∞ 的邻域，满足 $M<|z|<\infty$ 的点集称为∞ 的去心邻域。

3、聚点、孤立点、内点、边界点

1）聚点：对于点集E, 若 z_0 的任意邻域都有E的无穷多个点，称 z_0 为E的聚点或极限点。

2）孤立点：若 $z_0 \in$ E, 但非E的聚点，称为E的孤立点。

即存在一个邻域使得该邻域内只有 z_0

3）内点：若 $z_0 \in$ E，且有一邻域含于E内，则为E的内点。

4）边界点：E的异于内点的聚点或者E的孤立点

E的全部边界点称为E的边界,记为 ∂E。

4、开集、闭集

若点集E的点均为内点，则称E为开集。

若 $\partial E \subseteq E$ ，则称E为闭集。

5、区域：

1）区域：满足下面两条件的点集*D*称为区域。

I）*D*是一个开集。II）*D*是连通的。

P不属于D，但P的任何邻域内都存在含于D的点，称P为区域D的**边界点**。所有边界点的集合称为**边界**。

2）闭区域：区域加上边界称为闭区域。

3）有界区域：若一个区域D可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，则称D为有界的。否则，称为无界的。

考察圆环 $D: r_1 < |z - z_0| < r_2$

D 是区域；是有界区域；

边界： $|z - z_0| = r_1$ 和 $|z - z_0| = r_2$

圆环域D内去掉一个点，还是一个区域.

思考：此时区域的边界是什么？是否有界？去掉若干个点呢？

常用的区域：圆盘，圆的外部，上半平面，角型域，带形域

$|z - z_0| < r$ $|z - z_0| > r$ $\mathrm{Im}z > 0$ $0 < \arg z < \theta$ $a < \mathrm{Im}z < b$

6、简单曲线：

1）连续曲线：

设 $x(t), y(t)$ 是 t 的两个实函数，在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

确定了一条平面曲线，若令

$$z = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

则 $z = z(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$ 即为曲线参数方程的复数形式，

$z(\alpha)$和 $z(\beta)$ 分别称为该曲线的起点和终点。

2）重点：若对于 $\boxed{t_1\in(\alpha,\beta),t_2\in[\alpha,\beta],\ t_1\neq t_2,}$ 但 $z(t_1)=z(t_2),$
则称点 $z(t_1)$为曲线的重点。

3）凡没有重点的连续曲线，称为简单曲线或若尔当曲线。满足 $z(\alpha)=z(\beta)$的连续曲线，称为闭曲线。简单闭曲线将平面分为三个互不相交的集合。有界的称为内部，无界的为外部。

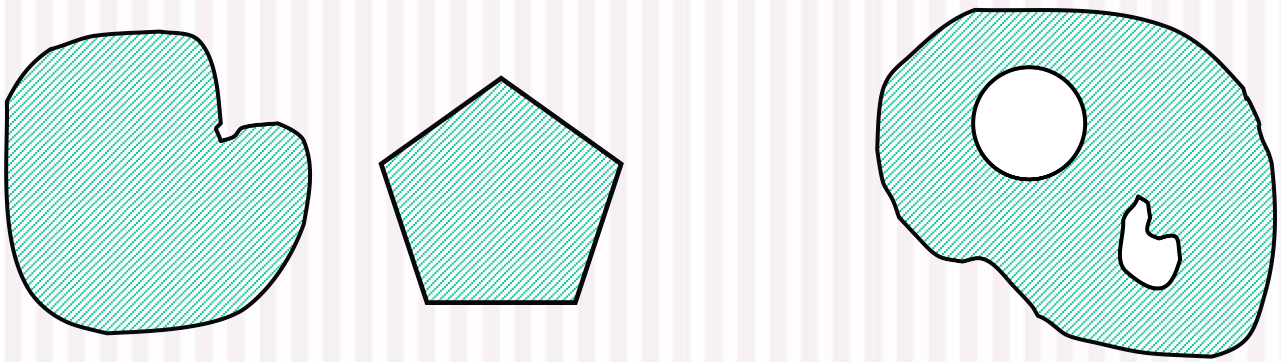
4）设连续曲线 C 的参数方程为 $\boxed{z=x(t)+iy(t)\qquad(\alpha\leq t\leq\beta)}$ 在 $\alpha\leq t\leq\beta$上，$x'(t)$ 及 $y'(t)$ 存在、连续且不全为零，则称该曲线为光滑曲线，由有限条光滑曲线依次相接而成的曲线称为分段光滑曲线。

5）对于光滑闭曲线或分段光滑闭曲线，我们称之为围道。
围道方向的规定：

假设一观察者沿围道而行，围道内部在观察者的左方，则规定该方向为围道正向，反之，为负向。

6）单连通区域：

若区域D的任意一条简单闭曲线的内部仍属于D，则D称为单连通区域，否则为多连通区域。



单连通域　　多连通域

单连通区域内的任何一条简单闭曲线可以连续的收缩成一点。

§5 复变函数

一、复变函数的定义：

1、单值函数：

设E为一复数集，若对E内每一复数z，按照一定的规则有唯一的复数 w 与之对应，则称在E上确定了一个单值函数 $w=f(z)\quad(z\in E)$.

2、多值函数：

若对于E内每一个复数z，有几个或（无穷）多个w与之对应，则称在E上确定了一个多值函数 $w=f(z)$,集合E称为定义集合, w 的全体称为函数值集合。

如无特别声明，定义集合通常是平面区域，函数一般是单值的。

3、复变函数的表示：

设$w=f(z)$是定义在点集E上的复变函数，设

$z=x+iy \xrightarrow{f} w=u+iv$, w 又可记为：

$$w=u(x,y)+iv(x,y)$$

例：函数 $w=z^2+2$ 可写为

$$w=(x+iy)^2+2=x^2-y^2+2+2xyi$$

这里 $u(x,y)=x^2-y^2+2 \qquad v(x,y)=2xy.$

二、复变函数的几何意义

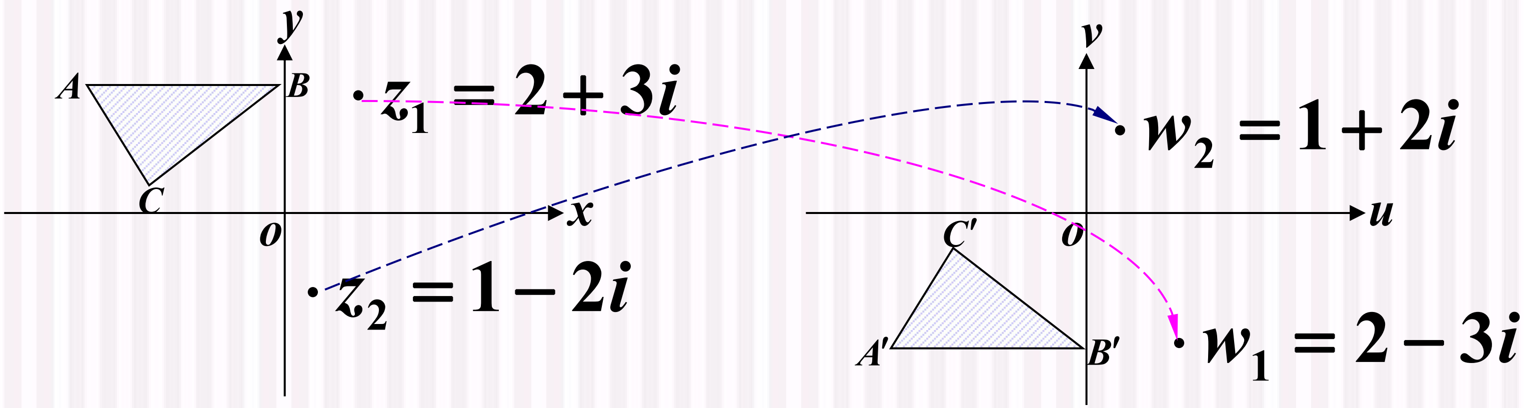
取两张复平面---- z 平面，w平面。

z 平面的点集 G 到w平面的点集 G' 的映射（变换）。

w称为 z 的象，而 z 称为 w 的原象。

例1 函数 $w = \bar{z}$ 构成的映射.

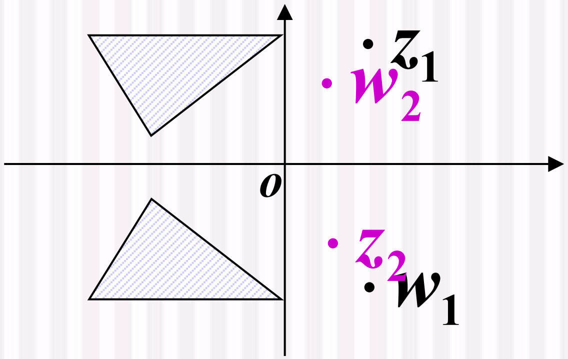
将 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a - ib$.



$z_1 \to w_1,\quad z_2 \to w_2,\qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'.$

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起,不难看出 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个对称映射.

且是全等图形.



例2　讨论函数 $w=z^2$ 把下列曲线映成何种曲线：

1）以原点为心，2为半径的第一象限的圆弧；

2）$x^2-y^2=c$

3）$x=\lambda$

其中c,λ 均为常数。

解：1）曲线可表示为：

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

则：

$$w=z^2=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\quad(0<2\theta<\pi)$$

表示的是以原点为心，4为半径的上半圆周。

2） 设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则：

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

所以 $u = c$，表示的是一条直线。

3） $x = \lambda$ 的象的参数方程为：

$$u = \lambda^2 - y^2 \qquad v = 2\lambda y$$

消去 y 得：

$$v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u)$$

表示的是以原点为焦点，向左开口的抛物线。

例3 对于映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$, 求圆周 $|z|=2$ 的象.

解 圆周 $|z|=2$ 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

即 $z = 2\cos\theta + i2\sin\theta$,

映射 $w = z + \dfrac{1}{z} = 2(\cos\theta + i\sin\theta) + \dfrac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$

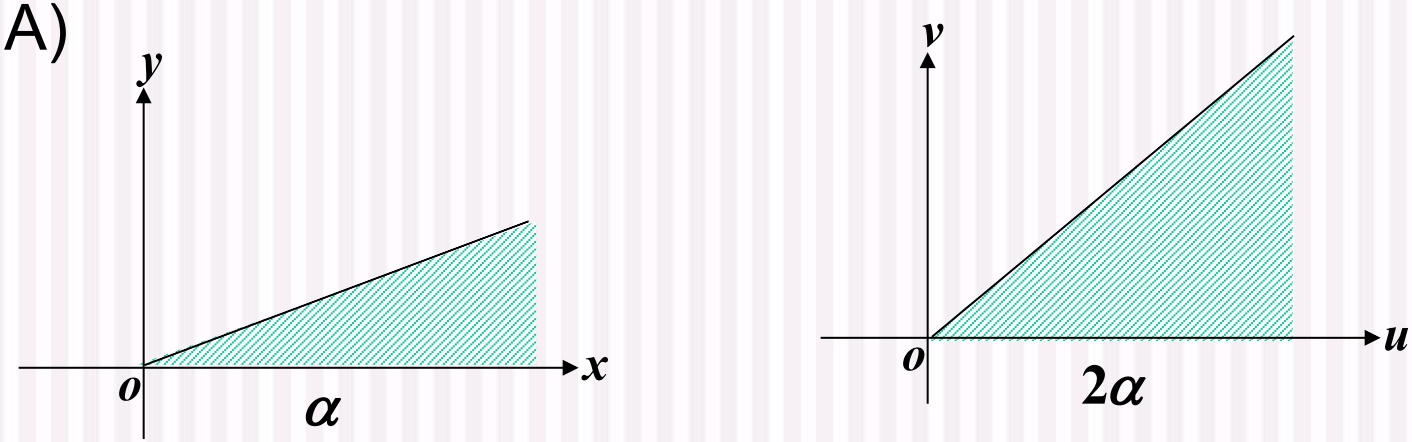
$$= \frac{5}{2}\cos\theta + i\frac{3}{2}\sin\theta$$

所以象的参数方程为 $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{2}\sin\theta, \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

表示 w 平面上的椭圆：$\dfrac{u^2}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = 1.$

例4 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

A)



将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

B)

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数：

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

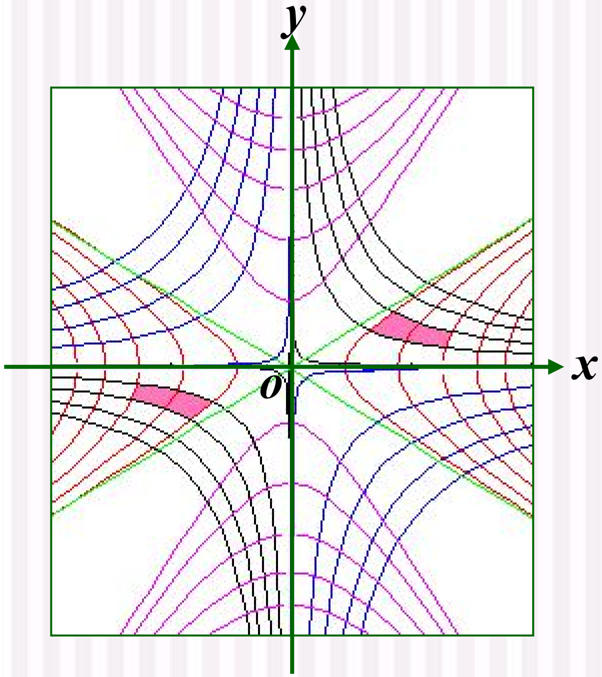
它把 z 平面上的两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

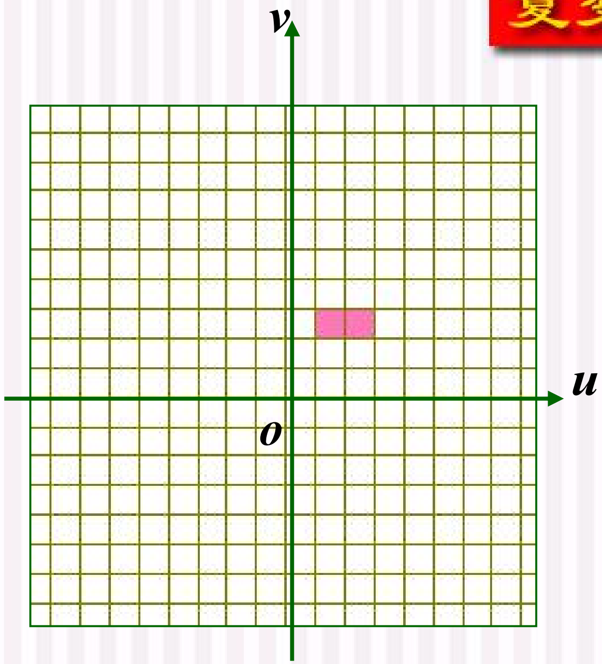
$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2,$$

分别映射成 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$

(如下页图)





反函数：设 $w=f(z)$ 是z平面上集合G到w平面上集合G'的映射，那么G'中的每一个点w必将对应着G中的一个或多个点。从而在G'上也确定了一个单值或多值的复变函数 $z=\varphi(w)$ ，称之为 $w=f(z)$ 的反函数。

$$w=f(\varphi(w)) \quad \forall w\in G'.$$

§6、复变函数的极限和连续性

一、极限：

1、定义：设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，如果存在一确定的数 A 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)\leq\rho$ 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总成立：

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

注1、极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 与 $z\to z_0$ 的方式无关。

注2、若已经证明一复变函数极限存在，可取一特殊路径来求出它的极限。

例1　设

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)\qquad (z\neq 0)$$

试证 $f(z)$ 在原点无极限。

证明：令$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则：

$$f(z)=\frac{1}{2i}\frac{z^2-\bar{z}^2}{|z|^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{1}{r^2}[r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)-r^2(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)]$$

$$=\sin 2\theta$$

沿 x 轴：　$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=0$

沿 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$：　$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=1$,

所以$f(z)$在原点处无极限。

2. 极限计算的定理

定理一

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ A=u_0+iv_0,\ z_0=x_0+iy_0,$

那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0.$$

说明

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题，转化为求两个二元实变 函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

证明：必要性：　因为 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+iv_0$,

对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时：

$$|f(z)-A|\le\varepsilon.$$

注意

$$|z-z_0|=|x-x_0+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

所以对 $\forall\varepsilon>0,$ 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时：

$$|u(x,y)-u_0|\le|f(z)-A|\le\varepsilon$$

同理

$$|v(x,y)-v_0|\le|f(z)-A|\le\varepsilon$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

充分性：因 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$

所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时：

$$|u(x,y)-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |v(x,y)-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时：

$$\left|f(z)-A\right|\le\left|u(x,y)-u_0\right|+\left|v(x,y)-v_0\right|<\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

3、运算法则：

定理2、如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$　$\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，则：

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B$

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB$

3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

二、函数的连续性

1. 连续的定义:

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),\quad z\in C.$$

注记：连续要求函数在 z_0 处有定义且等于函数当 $z\to z_0$ 时的极限值。

定理三

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例如, $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续,

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处 处连续.

定理四

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $h = g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w = f(h)$ 在 $h_0 = g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

特殊的:

(1) 有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

对复平面内的所有点 z 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式,

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

例3 证明:如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那末 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

则 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$,

由 $f(z)$ 在 z_0 连续,

知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)处都连续,

于是 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0)处连续,

故 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续.

例4、设 $f(z)=\overline{z}$，证明$f(z)$在 z 平面上处处连续。

证明：令$z=x+iy$, 则 $f(z)=x-iy$ ，

$$\operatorname{Re} f(z)=x, \qquad \operatorname{Im} f(z)=-y$$

均为连续函数，故 $f(z)$在 z 平面上处处连续。

本章要点

一、复变函数定义

二、特定的点、线、区域在给定某复变函数下的象.

三、复变函数极限与连续的定义

四、复变函数极限（连续）与实、虚部极限（连续）的关系