第九章：线性系统的状态变量分析法

汪彦婷
西北工业大学 软件学院
Email: yantingwang@nwpu.edu.cn

本章内容

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9.1 引言

■ 系统的数学描述方法

➢ 输入输出方程（IO）法

✓ 按照系统输入、输出之间的关系，系统一般可描述为：单变量（高阶）微分或者差分方程；

如：$r'''(t)+2r''(t)+3r'(t)+r(t)=e''(t)+e(t)$

只有一个方程，但是这是高阶方程；只含有一个变量$r(t)$；

$r(k-3)+2r(k-2)+3r(k-1)+r(k)=e(k-2)+e(k)$

✓ 系统按其输入和输出的情况，可以分成两类：

① 单输入单输出系统（SISO）

② 多输入多输出系统（MIMO）

如：一个3阶2输入2输出的系统，就需要2个3阶微分（差分）方程描述：

如 $\begin{cases} r_1'''(t)+2r_1''(t)+3r_1'(t)+r_1(t)=e_1(t)+e_2(t) \\ r_2'''(t)+3r_2''(t)+2r_2'(t)+r_2(t)=2e_1'(t)+e_2(t) \end{cases}$

9.1 引言

■ 系统的数学描述方法

- ➢ 输入输出方程（IO）法
  - ✓ IO法描述SISO系统，比较简单、直观，方程求解简单；但是，无法了解到系统内部状态，仅能看到输入输出关系；
  - ✓ 在求解MIMO系统时不方便；

- ➢ 状态变量描述法
  - ✓ 将系统用状态方程（多个一阶微分/差分构成的方程组）和输出方程描述；

9.1 引言

- 系统的数学描述方法
  - 状态变量描述法

    ① 提供系统内部特性以便研究；
    ② 有利于MIMO系统分析；
    ③ 方程构成和求解比较规则，一阶方程组有利于计算机辅助分析；
    ④ 容易得到系统的更多特性，如可观测性和可控制性等；
    ⑤ 容易推广到时变系统和非线性系统；
    ⑥ 可以用于求解方程的数值解。

  - ✓ 该方法一般适合于大型复杂系统的分析（如自动控制、监测等），对于一般简单SISO系统，有时会显得麻烦。

（本章介绍连续时间系统的状态变量描述法，对于离散时间系统可以类推）

本章内容

9.2 系统的状态变量描述法

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 状态变量与状态方程

例：在外力作用下一维运动物体的状态方程描述问题：假设物理的质量为m，在t时刻的位置为$x(t)$，所受外力为$f(t)$。

➢ 原来的数学模型--IO形式：

$$m \cdot x''(t) = f(t)$$ 二阶微分方程

➢ 状态变量描述

首先，假设两个变量--状态变量：$x_1 = x$，$x_2 = x'$

由此得到系统的状态方程：$\begin{cases} x_1{}' = x_2 \\ x_2{}' = \frac{1}{m} f \end{cases}$

✓ 观察发现：状态方程是一阶微分/差分方程组；
✓ 用数量换阶数；

■ 状态变量与状态方程

为何要有这些要求？

- ➢ 状态方程的基本要求：
  - ✓ 每个方程左边是某个状态变量的一阶微分；
    -----有几个状态变量就有几个方程；
    -----或：状态方程的个数等于系统阶数
  - ✓ 每个方程右边只能包含：激励信号和状态变量；
  - ✓ 每个方程右边只含有基本函数计算（加、减、乘、除、平方、开方等），不允许有微积分运算。

状态变量与状态方程

- 状态变量：描述系统在某时刻的内部状态所必须的一组最少的物理量或函数，利用这些物理量或函数和激励信号，可以唯一确定系统中其他的物理量或函数在该时刻的值。
  - ✓ 何为“必须”、“最少”？
    （能够建立状态方程和输出方程即可）
  - ✓ “其他的物理量”指什么？
    （一般只要包含我们关心的输出物理量即可）
- 状态变量不一定直接是我们关心的输出物理量。
- 状态变量个数等于系统的阶数。
- 系统的状态变量一般和系统储能有关。例如，电系统中，选择电容上的电压或者电感上的电流。

9.2 系统的状态变量描述法

■ 状态变量与状态方程

- 状态方程：由系统的**状态变量**、**激励信号**和**系统参数**构成的、决定系统状态随时间（或空间等其他变量）变化规律的**一组一阶微分（或差分）方程组**。
- 状态方程的基本形式：

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; e_1, e_2, \ldots e_m) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; e_1, e_2, \ldots e_m) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(\underbrace{\boxed{x_1, x_2, \ldots, x_n}}_{\text{状态变量}}; \underbrace{\boxed{e_1, e_2, \ldots e_m}}_{\text{激励信号}}) \end{cases}$$

这是一个m输入n阶的MIMO系统；

状态变量与状态方程

➢ 对于线性系统，状态方程的一般表达式为：

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \ldots + b_{1m}e_m \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots + b_{2m}e_m \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \ldots + b_{nm}e_m \end{cases}$$

用矩阵方程表示为 $\boxed{x(\dot{t}) = A \cdot x(t) + B \cdot e(t)}$

$x(\dot{t})$ 状态矢量一阶微分

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

$e(t)$ 激励矢量

参数矩阵A　　$x(t)$状态矢量　　参数矩阵B

9.2 系统的状态变量描述法

例如，上面的一维物体运动方程：

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{1}{m} f \end{cases}$$

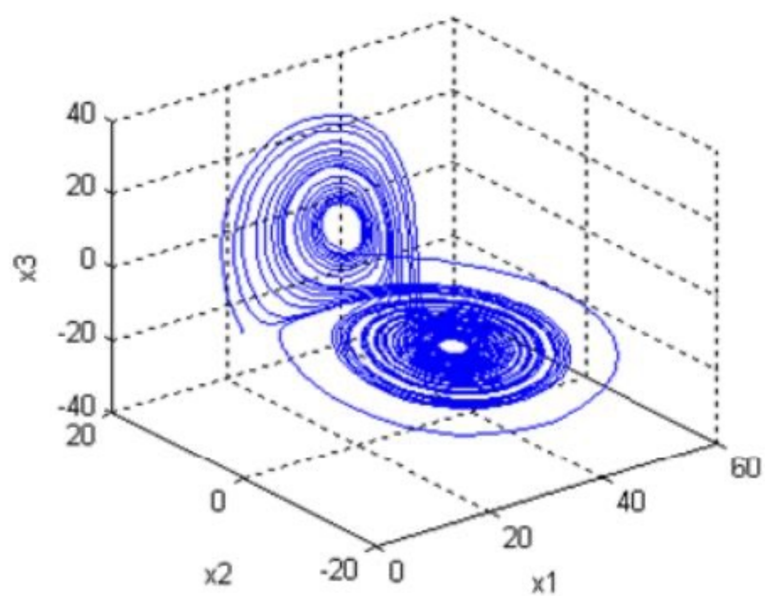
可以表示为：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f$$

■ 状态空间

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot e(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- 状态矢量$x(t)$在某个时刻的取值可以用一个多维空间的点表示，由此构成的多维空间称作状态空间或相空间。
- 随着时间变换，状态矢量$x(t)$在状态空间中的位置也会随之变换，由此产生的轨迹称为状态空间轨迹或者相空间轨迹。（研究非线性系统的重要工具）



劳伦兹蝴蝶图（三个状态变量）

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 输出变量与输出方程

- 输出变量：系统输出的（或我们关心的）物理量称为系统的输出变量。
- 输出方程：描述系统的输出与状态变量、激励信号之间关系的一组方程。
  - ✓ 如果系统的输出有多个，那么输出方程也有多个。

例：一维运动物体轨迹问题中，我们需要或者直接观测到的是物体的轨迹，其输出变量即为物体的位置。
输出方程为：

$$y(t) = x_1(t)$$

输出变量与输出方程

- 输出方程的要求：
  - ✓ 方程的左边是某个输出变量，每个输出变量都应该有一个输出方程；
  - ✓ 方程的右边只能包含已知的激励信号与状态变量；
  - ✓ 方程的右边只能含有基本函数计算，不允许有微积分运算（特别对状态变量而言）。
- 输出方程的基本形式：

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; e_1, e_2, \ldots e_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; e_1, e_2, \ldots e_m) \\ \quad\vdots \\ y_r = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n; e_1, e_2, \ldots e_m) \end{cases}$$

观察：如果能够求解出状态变量，那么输出变量可直接得到。

■ 输出变量与输出方程

➢ 如果系统是线性系统，则输出方程的一般表达式为：

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + \ldots + d_{1m}e_m \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + \ldots + d_{2m}e_m \\ \vdots \\ y_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n + d_{r1}e_1 + d_{r2}e_2 + \ldots + d_{rm}e_m \end{cases}$$

用矩阵方程表示为： $\boxed{y = C \cdot x + D \cdot e}$

$y(t)$ 输出矢量

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

参数矩阵 C　　　　参数矩阵 D

9.2 系统的状态变量描述法

系统的状态变量描述法

- 状态方程和输出方程构成了系统状态变量描述法：
  - ✓ 状态方程：$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot e$
  - ✓ 输出方程：$y = C \cdot x + D \cdot e$
- 构成这样的方程后，就可以用状态变量分析法求解系统响应。
- 只要知道了A、B、C、D矩阵，就可以描述系统，这种方法对于计算机而言特别有效。

状态变量分析的关键：状态变量的选取以及状态方程的建立！

本章内容

9.3 由IO方程求状态方程

- 状态方程的建立步骤
  - Step1:确定状态变量
  - Step2:建立状态方程
  - Step3:建立输出方程

- 已有系统IO方程，如何列出等价的状态方程?
  - 直接模拟法
  - 并联模拟法
  - …

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 直接模拟法

例1：$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=e(t)$　　简单微分系统

解：设状态变量：

$$x_1(t)=r(t),\ x_2(t)=r'(t),\ x_3(t)=r''(t)$$

则可以得到状态方程：

$$\begin{cases} x_1{}'(t)=x_2(t) \\ x_2{}'(t)=x_3(t) \\ x_3{}'(t)=-12x_1(t)-19x_2(t)-8x_3(t)+e(t) \end{cases}$$

输出方程：$r(t)=x_1(t)$

或：用矩阵方式：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

9.3 由IO方程求状态方程

■ 直接模拟法

例2：$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=(4p+10)e(t)$ —一般微分系统

解：设状态变量：

$$x_1(t)=r(t),\quad x_2(t)=r'(t),\quad x_3(t)=r''(t)$$

则可以得到状态方程：

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2(t) \\ x_2'(t)=x_3(t) \\ x_3'(t)=-12x_1(t)-19x_2(t)-8x_3(t)+\boxed{4e'(t)}+10e(t) \end{cases}$$

输出方程：$r(t)=x_1(t)$

◆状态方程中出现了激励信号的导数，不标准！

9.3 由IO方程求状态方程

状态方程形式2：

例2：$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=(4p+10)e(t)$

解：引入中间变量$q(t)$，将微分方程变成：

$$\begin{cases}(p^3+8p^2+19p+12)q(t)=e(t)\\ y(t)=(4p+10)q(t)\end{cases}$$

设状态变量：

$$x_1(t)=q(t),\quad x_2(t)=q'(t),\quad x_3(t)=q''(t)$$ 相变量

则可以得到状态方程：

$$\begin{cases}{x_1}'(t)=x_2(t)\\ {x_2}'(t)=x_3(t)\\ {x_3}'(t)=-12x_1(t)-19x_2(t)-8x_3(t)+e(t)\end{cases}$$

输出方程：$y(t)=10x_1(t)+4x_2(t)$

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

或：用矩阵方式：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\cdot\mathbf{e}(t)$$

9.3 由IO方程求状态方程

观察原方程：

$$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=(4p+10)e(t)$$

可见，ABCD 矩阵与微分方程系数的对应关系：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t)=\boxed{\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

➢ 微分方程$m<n$时，根据微分方程可以直接写状态方程！

9.3 由IO方程求状态方程

■ 直接模拟法

- 如果$m = n$，如何处理？
  - ✓ 状态方程

    依然遵从相变量描述法进行列写，不受影响。

  - ✓ 输出方程

$$y(t) = b_3 x_3'(t) + b_2 x_3(t) + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t)$$

其中$x_3'(t)$项不合要求。此时，将状态方程中关于$x_3'(t)$的方程带入，可以消去该项，得到满足要求的输出方程。

例3：$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=(p^3+10)e(t)$

解：引入中间变量$q(t)$，将微分方程变成：

$$\begin{cases}(p^3+8p^2+19p+12)q(t)=e(t)\\ y(t)=(p^3+10)q(t)\end{cases}$$

设状态变量：

$$x_1(t)=q(t),\quad x_2(t)=q'(t),\quad x_3(t)=q''(t)$$

则可以得到状态方程：

$$\begin{cases}x_1{}'(t)=x_2(t)\\ x_2{}'(t)=x_3(t)\\ x_3{}'(t)=-12x_1(t)-19x_2(t)-8x_3(t)+e(t)\end{cases}$$

输出方程：$y(t)=x_3{}'(t)+10x_1(t)$

$$=-2x_1(t)-19x_2(t)-8x_3(t)+e(t)$$

9.3 由IO方程求状态方程

■ 并联模拟法

- ➢ 复杂系统通过部分分式分解，转化为多个简单系统的并联

例：$(p^3+8p^2+19p+12)r(t)=(4p+10)e(t)$

解：

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}+\frac{-2}{s+4}$$

对于每一个简单的一阶系统，有：

$$y'(t)-\lambda y(t)=e(t)\longrightarrow y'(t)=\lambda y(t)+e(t)$$

将每个一阶微分方程的输出$y(t)$直接看作状态变量，可得：

$$\begin{cases} x_1'(t)=-x_1(t)+e(t) \\ x_2{}'(t)=-3x_2(t)+e(t) \\ x_3{}'(t)=-4x_3(t)+e(t) \end{cases}$$

输出方程：$y(t)=x_1(t)+x_2(t)-2x_3(t)$

或：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

观察规律

9.3 由IO方程求状态方程

更一般地，有：

状态方程：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程：

$$y(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- A矩阵是对角线矩阵，所以，这种状态变量称为**对角线变量**。

9.3 由IO方程求状态方程

- 状态变量的多样性
  - 从以上例子可以看出，同一个系统，状态变量有不同的选取方式，从而得到不同的状态方程和输出方程。
  - 可以证明，只要G^{-1}存在，状态变量的线性组合$z = G \cdot x$一定可以作为另外一组状态变量。

离散时间系统的状态方程

- 通过与连续时间系统类似的方法，可以得到离散时间系统的状态方程。它同样有直接模拟、并联模拟等多种模拟方法。基本形式为：

  状态方程：$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot e(k)$

  输出方程：$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot e(k)$

本章内容

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

◈9.1 引言
◈9.2 系统的状态变量描述法
◈9.3 由输入-输出方程求状态方程
◈9.4 电系统的状态方程的建立
◈9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法
◈9.6 状态方程的数值解法

9.4 电系统状态方程

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

如何从电原理图建立状态方程

- 理论上，可以按照：电系统 → IO方程 → 状态方程
  - ✓ 缺点：此时状态变量的物理含义模糊
- 通常，直接采用KCL或者KVL定理进行状态变量描述

回忆：状态方程建立步骤

① 确定状态变量
② 建立状态方程
③ 建立输出方程

■ 确定状态变量

- 状态变量应该在电系统的物理量，如电压、电流中选取；而且，由于在状态方程中会出现状态变量的导数，因此，状态变量的导数最好也有物理含义。
  - ✓ 电感L（或互感M）上的电流i_L（或i_M）和电容C上的电压u_C可以满足该要求，通常作为状态变量的选取对象。
- 每个状态变量必须是相互独立的，不可以用其他状态变量求出。
  - ✓ 不独立的i_L、i_M和u_C的情况：串联电感、并联电容、纯电感节点、纯电容回路。
- 电系统状态变量的选取法则：取电路中全部独立的i_L、i_M和u_C。电系统状态变量的个数（系统的阶数）等于其独立电感、互感和电容数目之和。

■ 建立状态方程

➢ 从电路列状态方程的方法：找出每个含有i_L、i_M和u_C一阶导数的方程（组）。

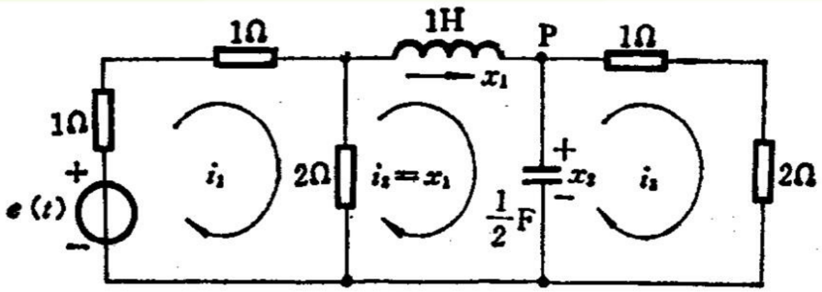
1. 电感或互感：$u_L = L\frac{d}{dt}i_L \rightarrow$ 列含有电感或互感的回路KVL
2. 电容：$i_C = C\frac{d}{dt}u_C \rightarrow$ 列含有电容的节点KCL
3. 整理方程，使其满足状态方程的标准形式；
   a） 方程左边只能含有一个状态变量的一阶导数，不能含有其他量，若有，要设法消去；
   b） 方程右边只能含有状态变量和激励信号，不能含有其他量，若有，也要设法消去；

■ 建立输出方程

➢ 用含有状态变量和激励的方程计算出其他的非状态变量。

9.4 电系统状态方程

例：



解：1）选电感电流和电容电压作为状态变量

2）列状态方程：

依据第二个回路（含电感）：$x_1' = -x_2 - 2x_1 + 2i_1$

依据P点（含电容）：$0.5x_2' = x_1 - i_3$

3）消除i_1和i_3：

依据第一个回路：$e = 4i_1 - 2x_1$，即$i_1 = \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}x_1$

依据第三个回路：$x_2 = 3i_3$，即$i_3 = \frac{1}{3}x_2$

整理得：$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + 0.5e \\ x_2' = 2x_1 - \frac{2}{3}x_2 \end{cases}$

- 输出方程为：$y = \frac{2}{3}x_2$

本章内容

◈9.1 引言

◈9.2 系统的状态变量描述法

◈9.3 由输入-输出方程求状态方程

◈9.4 电系统的状态方程的建立

◈9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

◈9.6 状态方程的数值解法

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

■ 复频域方法

➢ 矢量（或矩阵）的LT和$L^{-1}T$，定义为对矢量（或矩阵）的各个元素分别求LT和$L^{-1}T$

$$L\left\{\begin{bmatrix}\delta(t)\\ \varepsilon(t)\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}L\{\delta(t)\}\\ L\{\varepsilon(t)\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1/s\end{bmatrix}$$

➢ 求解过程步骤

① 求状态变量的解；
② 根据状态变量的解和输出方程，求输出变量的解

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

① 求状态变量的解；

状态方程： $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{e}(t)$

$$——>L\{\mathbf{x}'(t)\}=\mathbf{A}\cdot L\{\mathbf{x}(t)\}+\mathbf{B}\cdot L\{\mathbf{e}(t)\}$$

$$——>s\cdot\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

$$——>s\cdot\mathbf{X}(s)-\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}(s)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

$$——>(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}(s)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

$$——>\mathbf{X}(s)=(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0)+(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

从上式，可以看出：

$$\mathbf{X}_{zi}(s)=(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0),\quad \mathbf{X}_{zs}(s)=(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

对 $\mathbf{X}(s)$ 求 $L^{-1}T$ ，就可以得到 $\mathbf{x}(t)$ 。

② 求输出变量的解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}(t)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s)&=\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}(s)+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}(s)\\&=\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0)+\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}(s)\\&=\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0)+\left[\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\cdot\mathbf{E}(s)\end{aligned}$$

对 $\mathbf{Y}(s)$ 求 $L^{-1}T$ ，就可以得到 $\mathbf{y}(t)$ 。

从上式，可以看出：

$$\mathbf{Y}_{zi}(s)=\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{Y}_{zs}(s)=\left[\mathbf{C}\cdot(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\cdot\mathbf{E}(s)$$

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

■ 转移函数矩阵与自然频率

➢ 转移函数矩阵

系统的零状态响应可以表示为：

$$Y_{zs}(s) = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot E(s) = H(s) \cdot E(s)$$

这里，

$$H(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$

称为转移函数矩阵。其中第i行第j列元素表示第j个激励信号对第i个响应的作用。

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

■ 转移函数矩阵与自然频率

➢ 自然频率

✓ IO法中，系统的自然频率是系统转移函数特征方程的根，或者是系统转移函数的极点。

✓ 在状态变量法中，系统的自然频率是系统转移函数矩阵$H(s)$的极点，也就是使$H(s)$的元素为∞的s平面上的点。

注：$H(s)$的极点仅与$(s\cdot I-A)^{-1}$有关，而

$$(s\cdot I-A)^{-1}=\frac{adj(s\cdot I-A)}{|s\cdot I-A|}$$

当$|s\cdot I-A|=0$时，　$H(s)$的元素为∞

$\longrightarrow$使$|s\cdot I-A|=0$的s就是$H(s)$的极点

$\longrightarrow$矩阵A的特征值就是$H(s)$的极点

$\longrightarrow$矩阵A的特征值就是系统的自然频率。

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

■ 转移函数矩阵与自然频率

➢ 系统稳定性

✓ 系统所有的极点都在s平面的左半平面；

✓ 矩阵A的特征值的实部小于零；

注意：

✓ 如果矩阵A的特征值的实部小于零——→系统的各个物理量（状态变量和非状态变量）都有限——→系统一定稳定。

✓ 如果矩阵A的特征值的实部不全小于零——→系统状态变量一定不稳定，$X_{zi}(s)=(s\cdot I-A)^{-1}\cdot x(0)$。但是，其他物理量未必不稳定。此时：从IO方程看，系统可能似乎稳定；但是，系统内部实际上有不稳定因素，实际上不稳定。

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

例题 9-5 设一系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_1(t)+e(t) \\ x_2'(t)=x_1(t)-3x_2(t) \end{cases}$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}x_1(t)+x_2(t)$$

系统的初始状态为 $x_1(0)=1, x_2(0)=2$，输入激励为一单位阶跃函数 $e(t)=\varepsilon(t)$。

状态方程：$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$

输出方程：$y(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}(s)=(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{x}(0)+(s\cdot\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}(s)$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{x_1(0)}{s-1} \\ \frac{x_1(0)}{(s-1)(s+3)}+\frac{x_2(0)}{(s+3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} \\ \frac{1}{s(s-1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(s)=\frac{22}{12}\frac{1}{s+3}-\frac{1}{12s}$$

可见：此时，从输出上看是稳定的，但是从状态方程看是不稳定的。或者说：系统中有不稳定的因素。

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

系统稳定性

- 仅仅从IO方程判断系统是否稳定是不够的，应该全面考虑系统中的物理量。只有当矩阵A的特征值的实部全部小于零的时候，状态变量稳定，系统才稳定。

特征根的一致性

- 如前所述，系统的状态方程具有多样性，同一个系统可用不同的状态方程，相应的矩阵A也各不相同。但是，所有这些不同的状态方程将有一样的特征根。

9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法

■ 零输入响应与状态过渡矩阵

$$X_{zi}(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(0)$$

$$\begin{aligned} \therefore x_{zi}(t) &= L^{-1}\{X_{zi}(s)\} = L^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(0)\} \\ &= L^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1}\} \cdot x(0) = \emptyset(t) \cdot x(0) \end{aligned}$$

其中， $\emptyset(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = L^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1}\}$，称为**状态过渡矩阵**或者**基本矩阵**。

意义：体现了系统在没有激励信号时，响应是如何演化的。

本章内容

- 9.1 引言
- 9.2 系统的状态变量描述法
- 9.3 由输入-输出方程求状态方程
- 9.4 电系统的状态方程的建立
- 9.5 连续时间系统状态方程的复频域解法
- 9.6 状态方程的数值解法

■ 数值解法

- 利用状态变量分析法描述系统的优点之一，是状态方程非常便于利用计算机来解算出近似数值解，而且可以达到很高的精度。
- 方程近似数值解法，总是每隔一定间隔求出一个函数值，而求解函数的每个数值的步骤都是相同的。如果把这种解算步骤编成程序，就可利用计算机来完成重复计算工作。
- 由于状态方程都是简单的一阶微分方程，进行数值计算也特别方便。应用数值法解算，还可以求得非线性系统和时变系统的状态方程的近似解，这是目前分析这些系统的切实有效的方法。

9.6 状态方程的数值解法

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 线性非时变系统的数值解法

- ➢ 微分方程常用的数值计算方法有很多，我们选择最简单的尤拉（Euler）近似法。
- ➢ 尤拉近似法实际上是一个“分割求近似”的过程，如果分割区间足够细，就可以保证计算精度。

例：某二阶线性非时变系统的两个状态方程和一个输出方程如下

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 e \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 e \end{cases}$$

$$y = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + de$$

设系统的初始状态为$x_1(0)$和$x_2(0)$，并且已知输入激励函数$e(t)$

9.6 状态方程的数值解法

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

解：数值解法步骤如下：

① 将$t=0$时的$x_1(0)$、$x_2(0)$和$e(0)$值带入输出方程，即可得到$y(0)$；

② 当$t=\Delta t$时，有如下近似：

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t}=\frac{dx_1}{dt}\Big|_{t=0}=x_1'(0)$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t}=\frac{dx_2}{dt}\Big|_{t=0}=x_2'(0)$$

其中，$x_1'(0)$和$x_2'(0)$可由将$x_1(0)$、$x_2(0)$和 $e(0)$ 代入状态方程得到。

有了这二数值，就可求出$t=\Delta t$时x_1和x_2的增量，为：

$$\Delta x_1(\Delta t)=x_1'(0)\Delta t$$

$$\Delta x_2(\Delta t)=x_2'(0)\Delta t$$

进一步，可得：

$$x_1(\Delta t) = x_1(0) + \Delta x_1(\Delta t) = x_1(0) + x_1'(0)\Delta t$$

$$x_2(\Delta t) = x_2(0) + \Delta x_2(\Delta t) = x_2(0) + x_2'(0)\Delta t$$

③ 再用此二状态变量值和$e(\Delta t)$代入输出方程，可以计算出$y(\Delta t)$。

④ 重复以上方法可以计算再下一个时间间隔。不断重复此过程，可以算到任意所需的时间为止。

注1：显然这里计算出的结果是有一定误差的，但如果时间间隔Δt取得足够小，它可以达到很高的计算精度。

注2：这里讨论的二阶单输入-输出系统的计算法，但是可以推广到高阶MIMO系统。而且，该方法不仅适用于线性非时变系统，还可用于时变和非线性系统。

9.6 状态方程的数值解法

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 尤拉法的计算过程

Δt越小，计算精度越高，但计算工作量越大---需要权衡

① 根据实际需要，确定时间间隔Δt；

② 根据系统条件，确定系统的初始状态$x(0)$；同时，通过输出方程，可以得到系统初始状态下的输出$y(0)$；

③ 令时间间隔数$N=0$；

④ 根据状态方程，计算状态变量在$t=N\Delta t$时刻的导数

$$\dot{x}(N\Delta t)=f(x(N\Delta t),e(N\Delta t))$$

⑤ 计算$t=(N+1)\Delta t$时刻系统的状态变量的数值：

$$\boxed{x[(N+1)\Delta t]\approx x(N\Delta t)+\Delta t\cdot \dot{x}(N\Delta t)}$$

修改该式，形成尤格-库塔算法

⑥ 根据输出方程，计算$t=(N+1)\Delta t$时刻系统的输出：

$$y[(N+1)\Delta t]=g(x[(N+1)\Delta t],e[(N+1)\Delta t])$$

⑦ 令$N=N+1$, 回到步骤④，继续计算下一个时刻的状态和输出，知道完成指定时间内全部点上的计算。

■ 非线性系统的数值计算

➢ 非线性微分方程的数值计算的常用方法依然是前面介绍的尤拉法和龙格-库塔方法。为了使用这些方法，首先，需要将非线性微分方程改成状态方程的形式，即：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=f\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{e}(t)\big)\quad,\quad \mathbf{y}(t)=g\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{e}(t)\big)$$

例：凡德波尔方程：$y(t)''-\lambda[1-y(t)^2]y(t)'+y(t)=0$可表示为状态方程：

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2(t) \\ x_1'(t)=\lambda[1-x_1(t)^2]x_2(t)-x_1(t) \end{cases}$$

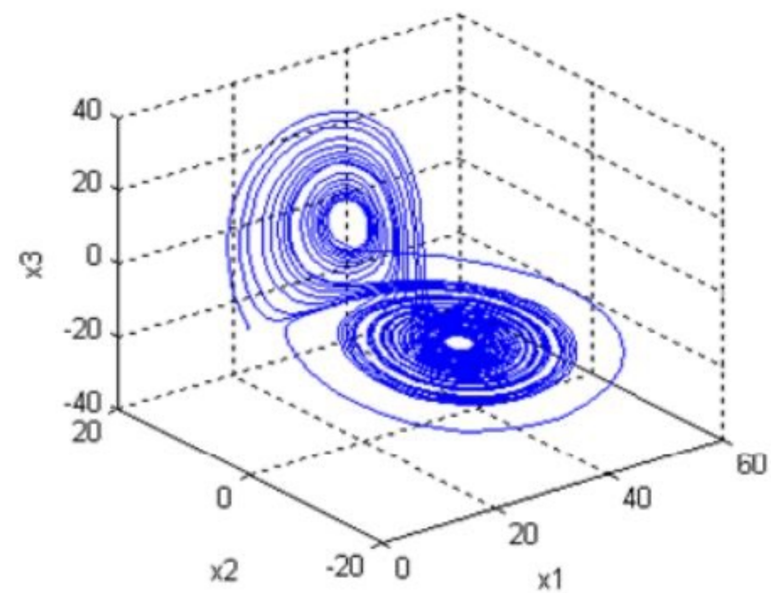
这里，状态变量为： $x_1(t)=y(t)$， $x_2(t)=y'(t)$。

假设已知系统的初始状态$y(0)$和$y'(0)$，就可以得到状态变量的初始值$x_1(0)=y(0)$， $x_2(0)=y'(0)$。确定步长Δt后，通过递推计算即可求得其他时间点上的系统状态。

■ 非线性系统的数值计算

例：劳伦兹方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x(t)=\sigma\left[y(t)-x(t)\right] \\
\dfrac{d}{dt}y(t)=\left[r-z(t)\right]x(t)-y(t) \\
\dfrac{d}{dt}z(t)=x(t)y(t)-b\cdot z(t)
\end{cases}
$$



➢ 除了奇怪吸引子外，非线性系统还表现了其他许多与线性系统截然不同的特性，例如混沌、极限环、孤立子，分形维等。

课后练习

- 9-4、9-6、9-7、9-16、9-17、9-18、9-19（仅求自然频率）