第五节　柯西积分公式

- 一、问题的提出
- 二、柯西积分公式
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、问题的提出

设 B 为一单连通域，z_0 为 B 中一点.

如果 $f(z)$ 在 B 内解析，那末 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析.

所以 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ 一般不为零，其中，C 是 B 内围绕 z_0 的闭曲线.

根据闭路变形原理知，

该积分值不随闭曲线 C 的变化而改变，求这个值.

积分曲线 C 取作以 z_0 为中心，半径为很小的 δ 的正向圆周 $|z-z_0|=\delta$，

由 $f(z)$ 的连续性，

在 C 上函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它在圆心 z_0 处的值，

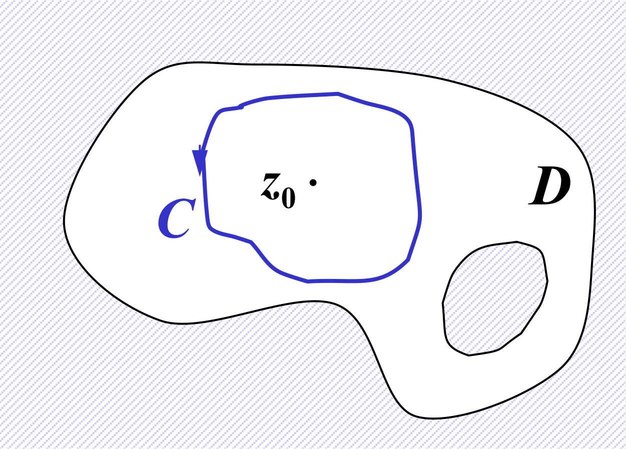
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \text{ 将接近于 } \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \quad (\delta \text{ 缩小})$$

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \boxed{2\pi i f(z_0)}.$$

二、柯西积分公式

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D, z_0 为 C 内任一点, 那末

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z.$$



证 因为 $f(z)$ 在 z_0 连续,

则 $\forall \varepsilon>0,\quad \exists\delta(\varepsilon)>0,$

当 $|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

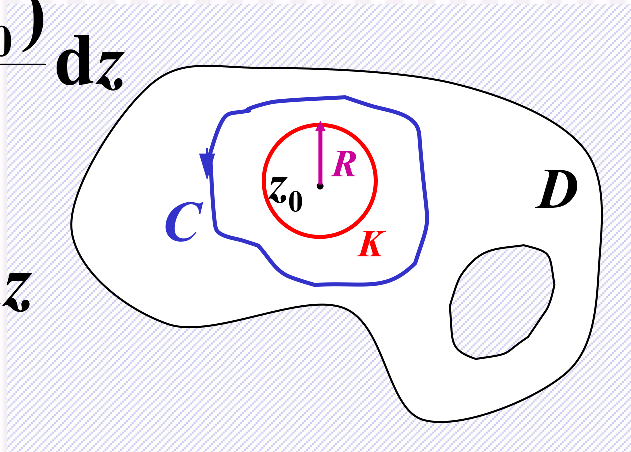
设以 z_0 为中心,半径为 $R\,(R<\delta)$ 的正向圆周 K:

$|z-z_0|=R$ 全在 C 的内部,

则 $$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i f(z_0)+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$



$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s$$

$$< \frac{\varepsilon}{R}\oint_K \mathrm{d}s = 2\pi\varepsilon.$$

上不等式表明, 只要 ε 足够小, 左端积分的模就可以任意小,

根据闭路变形原理知, 左端积分的值与 R 无关,

所以只有在对所有的 R 积分值为零时才有可能.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$ 柯西积分公式 [证毕]

关于柯西积分公式的说明:

(1) 把函数在C内部任一点的值用它在边界上的值表示. (这是解析函数的又一特征)

(2) 公式不但提供了计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法, 而且给出了解析函数的一个积分表达式. (这是研究解析函数的有力工具)

(3) 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 如果 C 是圆周 $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

三、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz.$

解 因为 $f(z) = e^z$ 在复平面内解析，

$z = 1$ 位于 $|z| < 2$ 内,

由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=1} = 2e\pi i.$$

例2 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{\boxed{\frac{1}{z(z+i)}}}{z-i}$ $= f(z)$ $z_0 = i,$

因为 $f(z)$ 在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 内解析，由柯西积分公式

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{z(z+i)}\right|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i^2} = -\pi i.$$

比较3.2节Cauchy定理的计算方法.

例3 设 C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$,

$$f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$ 求 $f'(1+i)$.

解 根据柯西积分公式知，当 z 在 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而 $1+i$ 在 C 内,

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例4 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C:(1)\ |z+1|=\dfrac{1}{2};$

解 (1) $$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

例4 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 C : (2) $|z-1|=\dfrac{1}{2}$;

解 (2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

例4 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C:(3)\ |z|=2.$

解 (3) $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$ 由复合闭路定理, 得

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i = \sqrt{2}\pi i.$$

例5 求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) \mathrm{d}\theta = \pi$.

解 根据柯西积分公式知,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

令 $z = re^{i\theta}$, $(-\pi \le \theta \le \pi)$ $\quad |z| = r = 1$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{\cos\theta+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因为 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i,$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

比较两式得 $\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi.$

四、小结与思考

柯西积分公式: $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

换个视角，将 z_0也动起来 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-\mathrm{z}}\mathrm{d}\xi.$$

f 对z的导函数 $$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-\mathrm{z})^{n+1}}\mathrm{d}\xi.$$