## 诚信保证

**本人知晓我校考场规则和违纪处分条例的有关规定，保证遵守考场规则，诚实做人．　　本人签字：＿＿＿＿＿＿**

**任课教师：＿＿＿＿＿　大班号：＿＿＿＿　班内序号：＿＿＿＿**

**姓　　名：＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿**

# 西北工业大学考试试题（A卷）

**2020－ 2021 学年　春　学期**

开课学院：数学与统计学院　　课　程：计算方法　　学　时：32

考试日期：2021 年 5 月 15 日　　考试时间：2 小时　　考试形式：闭卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | | | | |

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）．

1. 近似数 $x^*=3.142$ 相对于真值 $x=\pi$ 具有＿＿＿＿＿位有效数字；

2. 使用二分法对某非线性方程 $f(x)=0$ 求根时，得到该问题的隔根区间为 $[0,1]$，且有 $f(0)=1$，$f(0.5)=3$，$f(1)=-2$，则新的隔根区间应取为＿＿＿＿＿；

3. 求积公式 $\int_0^2 f(x)dx \approx 2f(1)$ 具有＿＿＿＿次代数精确度；

4. 假设在 $n+1(n\ge 1)$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 上的 Lagrange 基函数分别为 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$，则在任意点 $x\in[x_0,x_n]$ 上，$l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)=$＿＿＿＿＿；

5. 有效数 $x_1^*=0.5$，$x_2^*=-1.5$，依据误差传播原理，函数值 $x_1+x_2$ 的近似值 $x_1^*+x_2^*$ 的最小相对误差限近似为＿＿＿＿＿；

6. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 的 Doolittle 分解为＿＿＿＿＿＿；

7. 已知向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的某范数定义为 $\|x\|=\max\limits_i |x_i|$，向量 $a=(-5,1,2)^T$ 的该范数 $\|a\|=$__________；

8. 函数 $f(x)=x^2+1$ 在点 0，1，2 处的两阶差商 $f[0,1,2]=$__________；

9. 针对某实验数据

| $x$ | 0 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 | 2 |

某同学用最小二乘法得到两组拟合方程：①$x=2$ 和② $y=2$，你认为第________种拟合曲线效果更好？（填写"①"或"②"）；

10. 只要插值多项式的次数足够高，其对被插值函数的逼近效果一定足够好。该说法是否正确？____________（填写"正确"或"错误"）。

二、（10 分）用乘幂法求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 的按摸最大的特征值及其相应的特征向量，要求取 $\mathbf{u}^{(0)}=(1\quad 1\quad 1)^T$，且 $\left|\lambda_1^{(k+1)}-\lambda_1^{(k)}\right|\le 10^{-1}$。

解：计算结果列表如下

| $k$ | $\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)^T=\left(\mathbf{A}\mathbf{u}^{(k-1)}\right)^T$ | $\lambda_1^{(k)}=(\mathrm{u}^{(k)})_1/(\mathrm{u}^{(k-1)})_1$ |
|---|---|---|
| 0 | (1　1　1) | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

则矩阵 A 按摸最大的特征值为 $\lambda_1\approx$____________，

相应的近似特征向量为：$\mathbf{x}=($____________$)^T$

三、（15 分）给定积分 $I=\int_1^2 \ln x dx$，

（1）取定 7 个等距节点（包括端点 1 和 2），列出被积函数在这些节点上的函数值表（小数点后至少保留 5 位）；

（2）根据此表用复化 Simpson 求积公式求 $I$ 的近似值（小数点后保留 5 位）；

（3）为使复化 Simpson 公式所求近似值的绝对误差限小于 $0.5\times10^{-4}$，试估计需要用到多少个节点处的函数值？

解：（1）列出被积函数在这些等距节点上的函数值表（小数点后至少保留 5 位）；

| $x_i$ | 1 | 7/6 | 8/6 | 9/6 | 10/6 | 11/6 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | | | | | | |

（2）根据此表用复化 Simpson 求积公式求 $I$ 的近似值（小数点后保留 5 位）；

（3）节点数目估计

四、(10 分) 用最小二乘法求一个多项式 $y=a+bx$，使之与下列数据拟合（结果保留 3 位小数）。

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 27.0 | 26.8 | 26.5 | 26.3 |

解：将数据代入拟合曲线 $y=a+bx$，得矛盾方程组为

利用最小二乘法得正则方程组为

该方程组的最小二乘解为 $a=$________________，

$b=$ ________________。

拟合的多项式方程为：________________________

五、（10 分）取步长 $h$=0.1，试用欧拉预估一校正公式，求常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = 1 + x + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

并计算在 $x$=0.1, 0.2 处的近似值，要求过程至少保留 3 位小数。

解：欧拉预估一校正公式可写作

将 $f(x,y) = 1 + x + y^2$ 代入欧拉预估校正公式，得

将 $h = 0.1, x_0 = 0, y_0 = 1$ 代入上述公式，得

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = \\ y_1 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^{(0)} = \\ y_2 = \end{cases}$$

六、（5分）构造迭代法求解$\mathbf{x}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ 的近似值。

解：（1）通过观察点列$x_0=\sqrt{2},x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$

可知，此点列的迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$可写为 ______________________

（2） 下面验证上述迭代函数$\varphi(x)$在区间$[0,2]$的收敛性：

1）迭代函数在区间$[0,2]$是否可导？

2）对任意的$x\in[0,2]$，$\varphi(x)\in[0,2]$？

3）对任意的$x\in[0,2]$，$|\varphi'(x)|\leq L<1$？

因此，此迭代格式关于任意的初值$x_0\in[0,2]$__________（填写收敛或不一定收敛）

七、(**10** 分)构造三次多项式 $p_3(x)$,使曲线 $y = p_3(x)$ 满足如下表格所示的插值条件。

| $x$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | $-2$ |
| $f'(x)$ | | 1 | |

解:

八、（10 分）对于线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，且 $a_{11}a_{22} \neq 0$，利用$\boxed{\text{迭代矩阵的谱半径}}$证明：如果对于任意的初始向量，**Jacobi** 迭代法收敛，那么 **Gauss-Seidel** 迭代法也收敛。

证明：（1）写出 **Jacobi** 迭代法的$\boxed{\text{迭代矩阵}}$，并求其$\boxed{\text{谱半径}}$

（2）写出 **Gauss-Seidel** 迭代法的$\boxed{\text{迭代矩阵}}$，并求其$\boxed{\text{谱半径}}$

（3）根据两种迭代法的谱半径关系及 **Jacobi** 迭代法收敛进行证明