



第四章 函数插值

§ 4.1 引言

§ 4.2 Lagrange插值

§ 4.3 Newton插值

§ 4.4 等距节点插值

§ 4.5 Hermite插值

§ 4.6 分段插值

§ 4.7 三次样条插值



§ 4.1 引言

一、问题提出

- ❖ 1 函数表达式过于复杂不便于计算，而又需要计算许多点处的函数值。
- ❖ 2 仅有几个采样点处的函数值，而又需要知道非采样点处的函数值。
- ❖
- ❖ 上述问题的一种解决思路：建立复杂函数或者未知函数的一个便于计算的近似表达式。
- ❖ 解决方法—插值法

二、插值问题定义

已知定义于 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$ 。

若函数族 Φ 中的函数 $\varphi(x)$ 满足条件

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的一个插值函数。

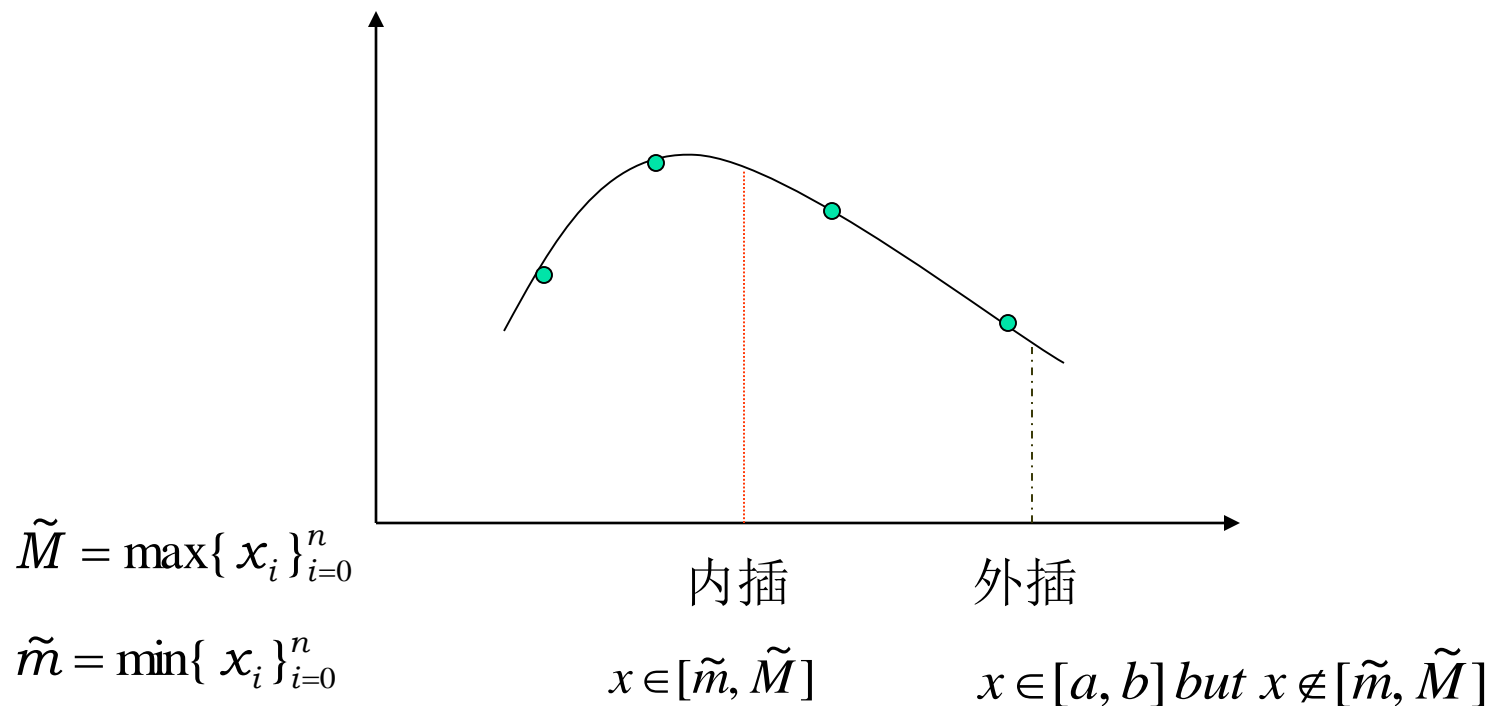
$f(x)$ ——被插值函数； $[a, b]$ ——插值区间；

$\{x_i\}_{i=0}^n$ ——插值节点； 式(1) ——插值条件。

求插值函数 $\varphi(x)$ 的问题称为插值问题。



三、几何意义、内插法、外插法





四、多项式插值问题

- 对于不同的函数族 Φ 的选择, 得到不同的插值问题
 - 当 Φ 为一些三角函数的多项式集合时: 三角插值;
 - 当 Φ 为一些有理分式集合时: 有理插值;
 - 当 Φ 为一些多项式集合时: 多项式插值 (代数插值)

特别的取 $\Phi = P_n \triangleq \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, 即

$$P_n = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_i \in R, 0 \leq i \leq n\}$$

五、插值多项式的存在惟一性

- **分析** 对于多项式插值问题，插值条件（1）等价于确定多项式的系数，使得满足如下的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- **定理1(存在惟一性)** 满足插值条件(1)的不超过 n 次的插值多项式是存在惟一的。



定理证明

多项式插值问题满足的线性方程组是关于多项式的系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的 $n+1$ 阶线性方程组，其系数矩阵的行列式 $V_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 称为范德蒙(Vandermonde)行列式。利用行列式的性质可以求得

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

由于假设 $i \neq j$ 时， $x_i \neq x_j$ ，故所有因子 $x_i - x_j \neq 0$ ，于是 $V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$ 。由克莱姆(Grammer)法则，方程组的解存在且唯一，从而插值多项式是存在唯一的。

证毕

六、插值余项

- **引理** 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $m-1$ 阶连续导函数, 且在 (a,b) 上存在 m 阶导数。若它在该区间上有 $m+1$ 个零点, 则它的 m 阶导函数在 (a,b) 内至少存在一个零点。



| | | | | | | |
|--------------|---------|----------|----------|--------------|--------------|-------|
| $f(x)$ | x_0 | x_1 | x_2 | \cdots | x_{m-1} | x_m |
| $f'(x)$ | ξ_0 | ξ_1 | \cdots | ξ_{m-2} | ξ_{m-1} | |
| $f''(x)$ | | η_0 | \cdots | η_{m-3} | η_{m-2} | |
| \cdots | | | | \cdots | | |
| $f^{(m)}(x)$ | | | | ξ | | |

- **插值余项:** $R_n(x) \triangleq f(x) - \varphi(x)$

插值余项(续)

分析: $R_n(x_i) = f(x_i) - \varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$
 $\Rightarrow R_n(x) = f(x) - \varphi(x) = k(x)\omega_{n+1}(x)$

$$\omega_{n+1}(x) \triangleq (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

当 x 为某一插值节点时, 对函数 $k(x)$ 无约束;

当点 x 与插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 互不相同, 构造以 t 为新自变量的函数

$$g(t) = f(t) - \varphi(t) - k(x)\omega_{n+1}(t)$$

$g(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 $n+2$ 个互异零点: x 、 $\{x_i\}_{i=0}^n$

当 $g(t)$ 充分光滑时, $g^{(n+1)}(t)$ 在开区间 (a, b) 内至少存在一个零点 ξ

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!k(x) \\ g^{(n+1)}(\xi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$



插值余项(续)

定理 2 (误差估计) 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在. $\varphi(x)$ 是满足插值条件(1)的不超过 n 次的插值多项式. 则对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$, 使得

$$R_n(x) = f(x) - \varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

成立, 式中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

进而当 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在区间 (a, b) 有上界 M_{n+1} 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$



插值余项(续)

- **Remark1** 插值误差与节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 和点 x 之间的距离有关, 节点距离 x 越近, 插值误差一般情况下越小。
- **Remark2** 若被插值函数 $f(x)$ 本身就是不超过 n 次的多项式, 则有 $f(x) \equiv \varphi(x)$ 。
- **Remark3** 可以通过求解线性方程组得到插值多项式。



七、插值方法

由于插值多项式的存在惟一性，无论是用何种方法构造出的插值多项式，它们均恒等，进而截断误差也都相同。

常用的插值方法有：

Lagrange插值法

Newton插值法

等距节点插值公式

带导数的插值问题（Hermite插值）

§ 4.2 Lagrange插值

重点精讲4.3 Lagrange插值

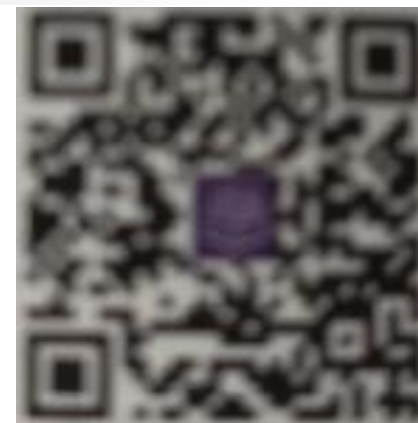
一、插值基函数

1.定义： 若 n 次多项式 $l_k(x)(k=0,1,\dots,n)$ 在 $n+1$ 个插值节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 上满足插值条件：

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, n)$$

则称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 为插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的 n 次插值基函数。

Remark： 容易验证， n 次插值基函数的线性组合在插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上满足插值条件，从而可以利用插值基函数来构造插值多项式。



2. 插值基函数的构造

由于 $i \neq k$ 时, $l_k(x_i)=0$, 故 $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ 为 $l_k(x)$ 的零点, 从而可以设

$$l_k(x) = A_k (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

由 $l_k(x_k)=1$ 可得

$$A_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

故

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

若记 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, 则有 $\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)$, 从而

$$l_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$



3. 插值基函数的性质

性质1:

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, n)$$

性质2: 插值基函数 $l_k(x) (k=0, 1, \dots, n)$ 为由插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 唯一确定的 n 次函数。

性质3: 基函数组所含的基函数个数与插值节点个数相同。



二、Lagrange型插值公式

$$L_n(x) \triangleq \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} y_k$$

上式是不超过 n 次的多项式，且满足所有的插值条件，因而就是我们所需构造的插值多项式，称之为**Lagrange**插值多项式。

当 $n=1$ 时，有

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$$

当 $n=2$ 时，有

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$



Lagrange型插值公式（续）

$L_1(x)$ 和 $L_2(x)$ 分别称为线性插值多项式和二次插值多项式，其几何意义分别表示通过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 的一条直线和通过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的一条抛物线。

类似地可以写出当 n 为其它值时的插值多项式，如 $n=3$ 时，有

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 \end{aligned}$$

三、Lagrange插值多项式的余项

设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的被插值函数， $L_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次Lagrange插值多项式，其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

定理： 如果 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续， $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在， $L_n(x)$ 为在节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 上满足插值条件的 n 次Lagrange插值多项式，则对任一 $x \in (a,b)$ ，其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x 。上式给出的余项通常称为Lagrange型余项。



Remark

一般情况下，余项表达式中的 $\xi \in (a, b)$ 的具体数值无法知道。但是，如果能够求出 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$ ，

则可以得出插值多项式的截断误差限为：

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$$

由此可以看出，误差大小除了与 M_{n+1} 有关外，还与插值节点有密切关系。当给定 m 个点处的函数值，但仅选用其中 $n+1$ ($n+1 < m$) 个作为插值条件而求某个点 \bar{x} 处函数值时， $n+1$ 个节点的选取应尽可能接近 \bar{x} ，以使得所计算的函数值的误差限尽可能小。



例题

已知 $f(-2) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(0.5) = 3$, 试选用合适的插值节点, 通过二次插值多项式计算 $f(-0.5)$ 的近似值, 使之精度尽可能高。

解 依据误差估计式, 选 $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ 为插值节点
拉格朗日插值基函数为:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(-1-0)(-1-0.5)} = \frac{2}{3}x(x-0.5)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-0.5)}{(0+1)(0-0.5)} = -2(x+1)(x-0.5)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(0.5+1)(0.5-0)} = \frac{4}{3}x(x+1)$$

二次插值多项式为

$$L_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) = l_0(x) + 2l_1(x) + 3l_2(x)$$

$$f(-0.5) \approx L_2(-0.5) = 1 \times l_0(-0.5) + 2 \times l_1(-0.5) + 3 \times l_2(-0.5) = 4/3$$

四、反插值法

已知单调连续函数 $y = f(x)$ 在如下采样点处的函数值

| | | | | |
|----------------|------|------|-----|-----|
| x_i | 1.0 | 1.4 | 1.8 | 2.0 |
| $y_i = f(x_i)$ | -2.0 | -0.8 | 0.4 | 1.2 |

求方程 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 内根的近似值 x^* ，使误差尽可能小

分析

| | | | | | |
|---------------------|------|------|-----|-----|---|
| y_i | -2.0 | -0.8 | 0.4 | 1.2 | 0 |
| $f^{-1}(y_i) = x_i$ | 1.0 | 1.4 | 1.8 | 2.0 | ? |

问题求解

解 对 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 进行三次插值, 插值多项式为

$$\begin{aligned} L_3(y) &= f^{-1}(y_0) \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_1) \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_2) \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} \\ &\quad + f^{-1}(y_3) \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \\ &= 1.675 + 0.3271y - 0.03125y^2 - 0.01302y^3 \end{aligned}$$

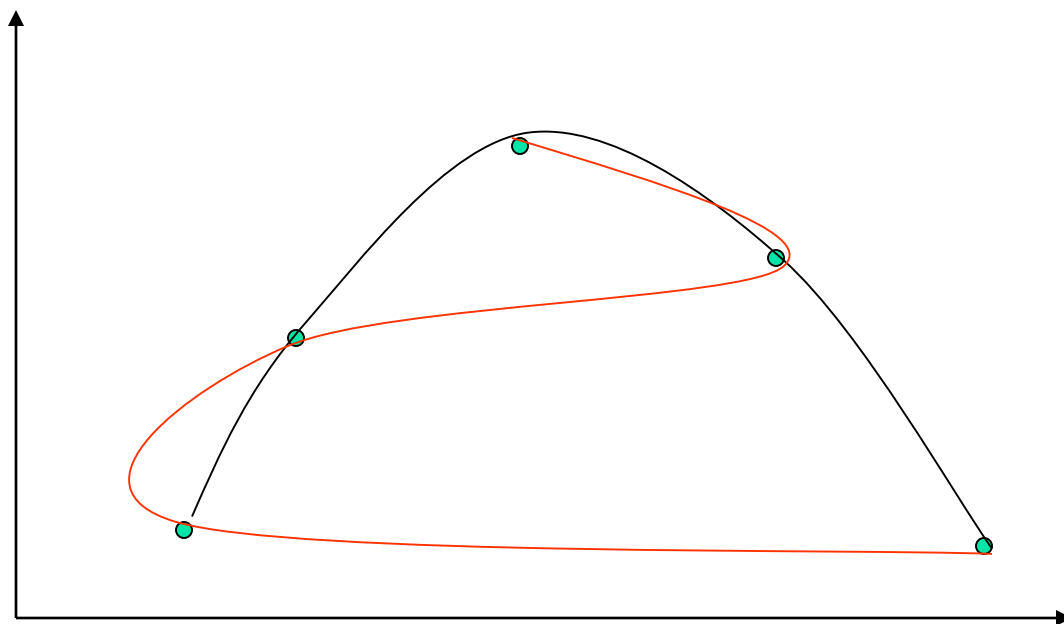
于是有

$$x^* = f^{-1}(0) \approx L_3(0) = 1.675$$

#

Remark

用反插值法时必须满足
单值性条件



§ 4.3 Newton插值

重点精讲4.4
Newton插值

■ Lagrange 插值公式的特点：

- 形式对称
- 通常用于理论分析
- 当增加插值节点时，在计算实践中不方便



问题： 想要构造一个更加方便灵活的插值格式，当增加插值节点时，只需在原有格式的基础上再增加一些项即可。

解决方法： Newton插值

一、差商的定义及性质

定义： 给定函数 $f(x)$ 在互异节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ，称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad i \neq j$$

为函数 $f(x)$ 在节点 x_i, x_j 处的一阶差商。

称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad i \neq j \neq k$$

为函数 $f(x)$ 在节点 x_i, x_j, x_k 处的二阶差商。

一般地， k 阶差商为：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

即 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶差商的差商称为 k 阶差商（均差）。

差商的性质

性质1:

由于
$$f'(x_j) = \lim_{x_i \rightarrow x_j} \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \lim_{x_i \rightarrow x_j} f[x_i, x_j]$$

故差商是微商的离散形式。

性质2: k 阶差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ 可以表示为函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$ 的线性组合, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \quad k=1, 2, \dots, n$$

性质3: 差商与插值节点的排列次序无关。

二、Newton插值多项式

1.Lagrange插值多项式间的关系

$$\left. \begin{aligned} L_k(x_i) &= f(x_i) \quad 0 \leq i \leq k \\ L_{k-1}(x_i) &= f(x_i) \quad 0 \leq i \leq k-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

$$\left. \begin{aligned} L_k(x) &= \sum_{i=0}^k f(x_i) l_i(x) \\ l_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)}$$

注：A是 $L_k(x)$ 的首项系数。

2. Newton型插值公式

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] \triangleq \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \quad \omega_k(x) \triangleq (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_k] \omega_k(x)$$

$$L_1(x) = L_0(x) + f[x_0, x_1] \omega_1(x) \quad = f(x_0) + f[x_0, x_1] \omega_1(x)$$

$$L_2(x) = L_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \omega_2(x) \\ = f(x_0) + f[x_0, x_1] \omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \omega_2(x)$$

.....

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \omega_n(x) \\ = f(x_0) + f[x_0, x_1] \omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \omega_2(x) + \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \omega_n(x)$$

Newton型插值公式（续）

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &\triangleq N_n(x) \end{aligned}$$

Newton 插值公式的关键是计算其系数：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \quad k=1, 2, \dots, n$$

Remark: 递推关系

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}]\omega_{n+1}(x)$$

3. 差商的计算

| x | $f(x)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | ... |
|-------|----------|---------------|--------------------|-------------------------|-----|
| x_0 | $f(x_0)$ | $f[x_0, x_1]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | ... |
| x_1 | $f(x_1)$ | $f[x_1, x_2]$ | $f[x_1, x_2, x_3]$ | | |
| x_2 | $f(x_2)$ | $f[x_2, x_3]$ | | | |
| x_3 | $f(x_3)$ | | | | |
| ... | ... | | | | |



三、Newton插值余项

根据插值多项式的存在唯一性知，如果 $f(x)$ 充分光滑，则有估计

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

导数型误差估计

$$|R_n(x)| = |f(x) - N_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

不足：

- 对函数的光滑性要求高；
- 需估计导函数的最值；
- 偏保守。

Newton插值余项（续）

假设 x 与 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 互异, $N_{n+1}(t)$ 是以 x 和 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为插值节点的不超过 $n+1$ 次的插值多项式。

$$\left. \begin{aligned} N_{n+1}(t) &= N_n(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(t) \\ N_{n+1}(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$

• 差商型误差估计

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$

• 导数和差商的关系

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

- 差商型误差估计特点：对被插值函数光滑性要求不高；但不适用于实际计算。

四、例题

已知 $f(x) = \sin x$ 的如下函数值表,

| x | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|----------|--------|--------|--------|
| $\sin x$ | 0.8415 | 0.9975 | 0.9093 |

请用二次插值多项式计算 $\sin 1.8$ 的近似值 $N_2(1.8)$ 。

解 1) 建立差商表

| | | | |
|-----|--------|---------|---------|
| 1.0 | 0.8415 | | |
| 1.5 | 0.9975 | 0.312 | |
| 2.0 | 0.9093 | -0.1764 | -0.4884 |

2) 插值
$$N_2(1.8) = 0.8415 + 0.312 \times (1.8 - 1.0) - 0.4884 \times (1.8 - 1.0) \times (1.8 - 1.5) = 0.973884$$



§ 4.4 等距节点插值

Newton插值多项式适用于节点任意分布的情形。但当节点等距分布时，可以简化**Newton**插值公式。

设 $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$, $y_i=f(x_i)$ 为等距节点 $x_i=x_0+ih(i=0,1,\dots,n)$ 上的函数值，其中 $h=(b-a)/n$ 称为步长。

在此基础上我们先定义差分，用差分表示**Newton**插值多项式，从而得到等距节点的插值公式。



一、差分的定义与性质

定义：称 $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i=0, 1, \dots, n-1)$

为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的一阶向前差分。

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i (i=0, 1, \dots, n-2)$$

称为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的二阶向前差分。

一般地， $\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i \quad (i=0, 1, \dots, n-m)$

称为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的 m 阶向前差分。

差分的性质

性质1: 各阶差分可用函数值线性表示, 其计算公式为:

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} + \cdots + (-1)^s C_n^s y_{n+i-s} + \cdots + (-1)^n y_i$$

其中
$$C_n^s = \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!}$$

性质2: 差分与差商满足下述关系:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}$$

证明: 利用数学归纳法

当 $k=1$ 时, 有
$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{1 \cdot h}$$

即结论成立。

差分的性质（续）

设 $k=m-1$ 时结论成立，即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] = \frac{\Delta^{m-1} y_0}{(m-1)! h^{m-1}}$$

$$f[x_1, x_2, \dots, x_m] = \frac{\Delta^{m-1} y_1}{(m-1)! h^{m-1}}$$

则当 $k=m$ 时，有

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_m] &= \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_m]}{x_0 - x_m} \\ &= \frac{\Delta^{m-1} y_0 - \Delta^{m-1} y_1}{(m-1)! h^{m-1} \cdot mh} = \frac{\Delta^m y_0}{m! h^m} \end{aligned}$$

由数学归纳法知，结论成立。

证毕



差分的性质（续）

性质3：差分与导数满足关系：

$$\Delta^n y_0 = h^n \cdot f^{(n)}(\xi) \quad (\xi \in (x_0, x_n))$$

证明：利用差商与导数、差分的关系，有：

$$\Delta^n y_0 = n! h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] = n! h^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (\xi \in (x_0, x_n))$$

证毕

Remark：类似地可以定义向后差分与中心差分：

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

二、Newton向前插值公式

将差商与差分的关系式带入Newton插值多项式，得

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \omega_k(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} \omega_k(x)$$

记 $x = a + th$, $x - x_i = (t - i)h$, 则有

$$\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) = h^k t(t-1) \cdots (t-k+1)$$

从而可得Newton向前插值多项式及其余项为:

$$\begin{aligned} N_n(a + th) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} h^k \prod_{i=0}^{k-1} (t - i) \right) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} t(t-1) \cdots (t-k+1) \end{aligned}$$

$$R_n(a + th) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \cdots (t-n)$$

三、差分表

| x | $f(x)$ | 一阶差分 | 二阶差分 | 三阶差分 | ... |
|-------|----------|-----------------|-------------------|-------------------|-----|
| x_0 | $f(x_0)$ | $\Delta f(x_0)$ | $\Delta^2 f(x_0)$ | $\Delta^3 f(x_0)$ | ... |
| x_1 | $f(x_1)$ | $\Delta f(x_1)$ | $\Delta^2 f(x_1)$ | | |
| x_2 | $f(x_2)$ | $\Delta f(x_2)$ | | | |
| x_3 | $f(x_3)$ | | | | |
| ... | | | | | |

Newton向前插值公式，又称**表初公式**，它利用差分表的最上面一个斜行的数值进行计算。

四、例题

已知函数 $y = \sin x$ 的如下函数值表，利用插值法计算 $\sin(0.42351)$ 的近似值.

| | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| x | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| $\sin x$ | 0.38942 | 0.47943 | 0.56464 |

解

$$x_0 = 0.4, h = 0.1, t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.42351 - 0.4}{0.1} = 0.2351$$

建立如下差分表

| x | $\sin(x)$ | 一阶差分 | 二阶差分 |
|-----|----------------|----------------|-----------------|
| 0.4 | <u>0.38942</u> | <u>0.09001</u> | <u>-0.00480</u> |
| 0.5 | 0.47943 | 0.08521 | |
| 0.6 | 0.56464 | | |



例题（续）

利用插值公式：

$$N_2(x_0 + th) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!}t + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)$$

$$\sin(0.42351) \approx N_2(0.42351)$$

$$= 0.38942 + 0.09001 \times 0.2351 - \frac{0.00480}{2} \times 0.2351 \times (0.2351 - 1)$$

$$= 0.41101$$

#

五、Newton向后插值公式

类似于向前差分，也可以得到差商与向后差分的关系：

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k f(x_n)}{k! \cdot h^k}$$

将插值节点从大到小排列，即

$$x_n, x_{n-1} = x_n - h, x_{n-2} = x_n - 2h, \dots, x_0 = x_n - nh,$$

类似于向前插值公式，可得到Newton向后插值公式，又称表末公式，它利用差分表的最下面一个斜行的数值进行计算。

同样，还可以利用中心差分，构造插值公式，称为贝塞尔（Bessel）插值公式。

§ 4.5 Hermite插值

重点精讲4.5 Hermite插值



一、问题

在实际问题中，对所构造的插值多项式，不仅要求函数值重合，而且要求若干阶**导数**也重合。

即：要求插值函数 $P(x)$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i) \\ \dots \\ p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i) \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

把此类插值多项式称为埃米尔特（Hermite）插值多项式，记为 $H(x)$ 。

问题（续）

注：☞ n 个条件可以确定 $n-1$ 阶多项式。

☞ 要求在1个节点 x_0 处直到 m_0 阶导数都重合的插值多项式即为Taylor多项式

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$$

其余项为

$$R(x) = f(x) - \varphi(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m_0 + 1)!} (x - x_0)^{(m+1)}$$



二、一般情形

函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$ 、导数值 $\{f'(x_i)\}_{i=0}^n$ 互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \\ H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

要求构造不超过 $2n+1$ 次的多项式 $H_{2n+1}(x)$ 满足上述 $2n+2$ 个插值条件。

这一类插值问题其几何意义是在插值点上插值曲线与被插值曲线有公共切线。由这 $2n+2$ 个条件可以唯一确定一个 $2n+1$ 次的插值多项式。具体我们采用基函数的方法来确定。

1.辅助问题及Hermit插值

设 $\alpha_i(x)$ 是满足如下插值条件的 $2n+1$ 次多项式

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = \delta_{ij} \\ \alpha_i'(x_j) = 0 \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

设 $\beta_i(x)$ 是满足如下插值条件的 $2n+1$ 次多项式

$$\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \alpha_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \beta_i(x)$$

2. 辅助问题的求解

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = \delta_{ij} \\ \alpha'_i(x_j) = 0 \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_i(x): \quad (x-x_0)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2$$

$$\alpha_i(x) = (A_i x + B_i) l_i^2(x)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} \alpha_i(x_i) = A_i x_i + B_i = 1 \\ \alpha'_i(x_i) = A_i + 2(A_i x_i + B_i) l'_i(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{得到} \quad \begin{cases} A_i = -2l'_i(x_i) = -2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \\ B_i = 1 - A_i x_i = 1 + 2x_i \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \end{cases}$$

辅助问题的求解（续）

$$\alpha_i(x) = \left[1 + 2(x_i - x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right] l_i^2(x)$$

$$\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\beta_i(x) = C_i(x - x_i) l_i^2(x)$$

$$\beta'_i(x) = C_i l_i^2(x) + C_i(x - x_i) \left[l_i^2(x) \right]',$$

$$\text{令 } \beta'_i(x_i) = C_i l_i^2(x_i) + C_i(x_i - x_i) \left[l_i^2(x_i) \right]' = 1$$

$$\Rightarrow C_i = 1$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

3.Hermite插值问题解的存在惟一性

- 存在性:
$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\alpha_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\beta_i(x)$$

- 惟一性: $H_{2n+1}(x)$ 以及 $\tilde{H}_{2n+1}(x)$ 是均满足插值条件的不超过 $2n+1$ 次的多项式

$$H_{2n+1}(x) - \tilde{H}_{2n+1}(x) = 0 \quad (x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

$$H_{2n+1}(x) \equiv \tilde{H}_{2n+1}(x)$$

4. 插值余项

定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 $2n+1$ 阶连续的导函数, $f^{(2n+2)}(x)$ 在 (a, b) 内存在. $H_{2n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$ 的满足插值条件的不超过 $2n+1$ 次的插值多项式.

则对任意 $x \in [a, b]$ 存在着 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ 使得如下插值误差估计成立

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$$

分析:

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = k(x) \omega_{n+1}^2(x)$$

$$x \notin \{x_i\}_{i=0}^n \quad g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - k(x) \omega_{n+1}^2(t)$$

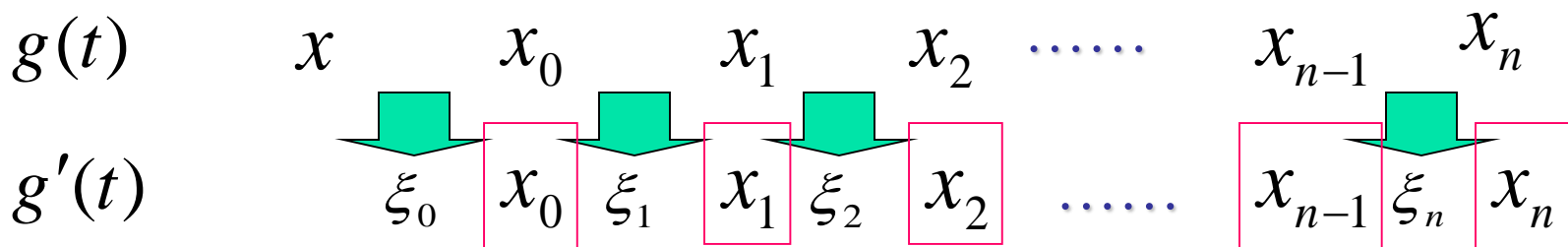
定理证明

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - k(x)\omega_{n+1}^2(t)$$

$$x \notin \{x_i\}_{i=0}^n$$

函数

零点（从小到大）



$g''(t)$ 至少 $2n+1$ 个零点

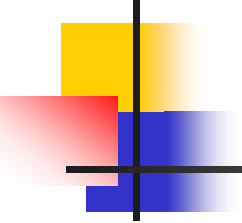
.....

$g^{(2n+2)}(t)$ 至少 1 个零点 ξ

$$g^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - k(x)(2n+2)!$$

$$k(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

证毕



三、特殊情形一带不完全导数的插值问题

例:建立插值多项式 $H_3(x)$, 使之满足插值条件

$$\begin{cases} H_3(x_i) = f(x_i) & i = 0, 1, 2 \\ H'_3(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

分析 (方法1) :

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$H_3(x) = N_2(x) + k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

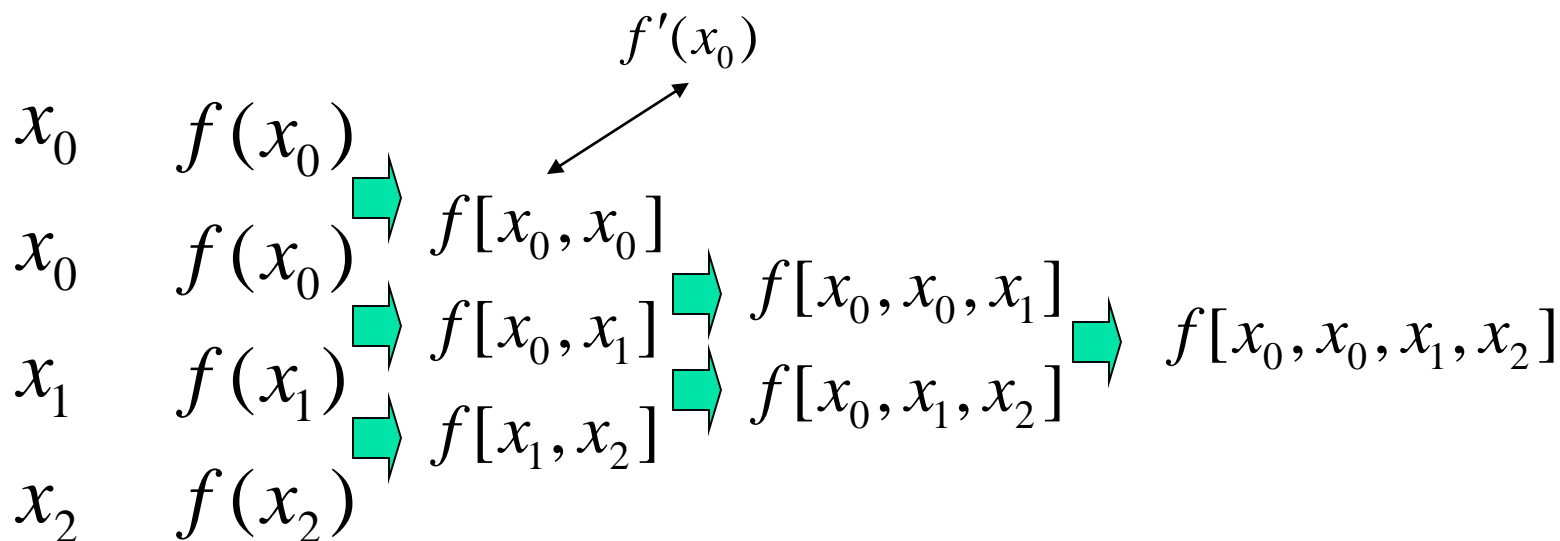
令 $H'_3(x_0) = f'(x_0)$ 求得参数 k

$$\text{误差: } f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_0)^2 (x - x_1)(x - x_2)$$

#

带不完全导数的插值问题举例（续）

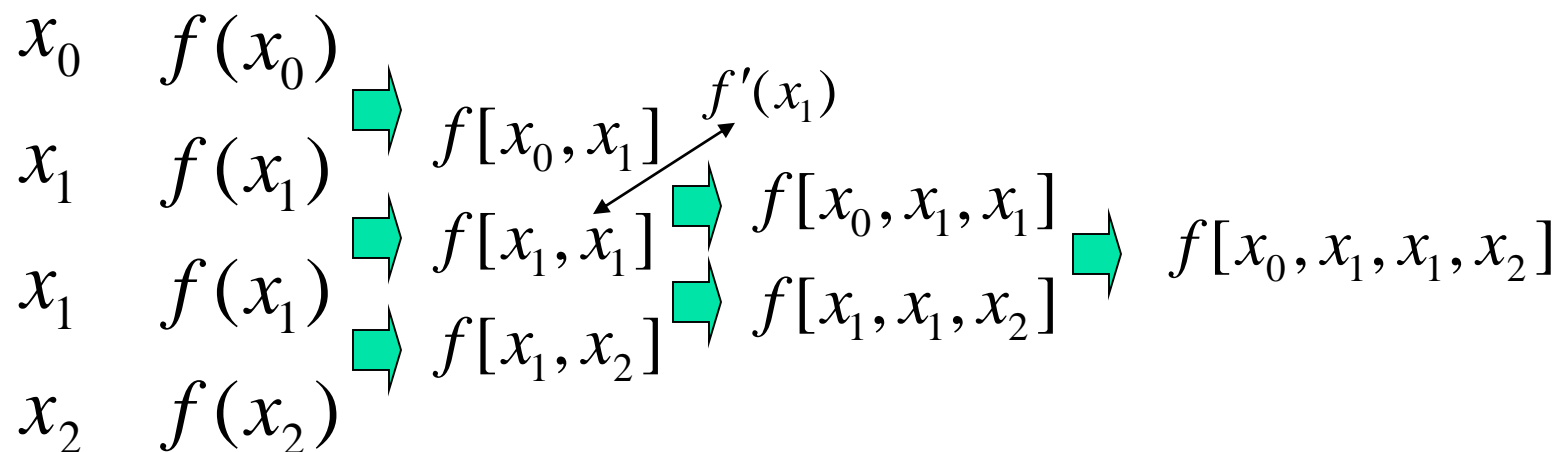
方法2：（用带有重节点的差商表）



$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_0)(x - x_1)$$

#

带不完全导数的插值问题举例（续）



$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_1](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_1)$$

#

§ 4.6 分段插值

重点精讲4.6
分段低次插值

高次插值的评述



在实际应用中, 很少采用高次插值。

①. 在两相邻插值节点间, 插值函数未必能够很好地近似被插值函数。

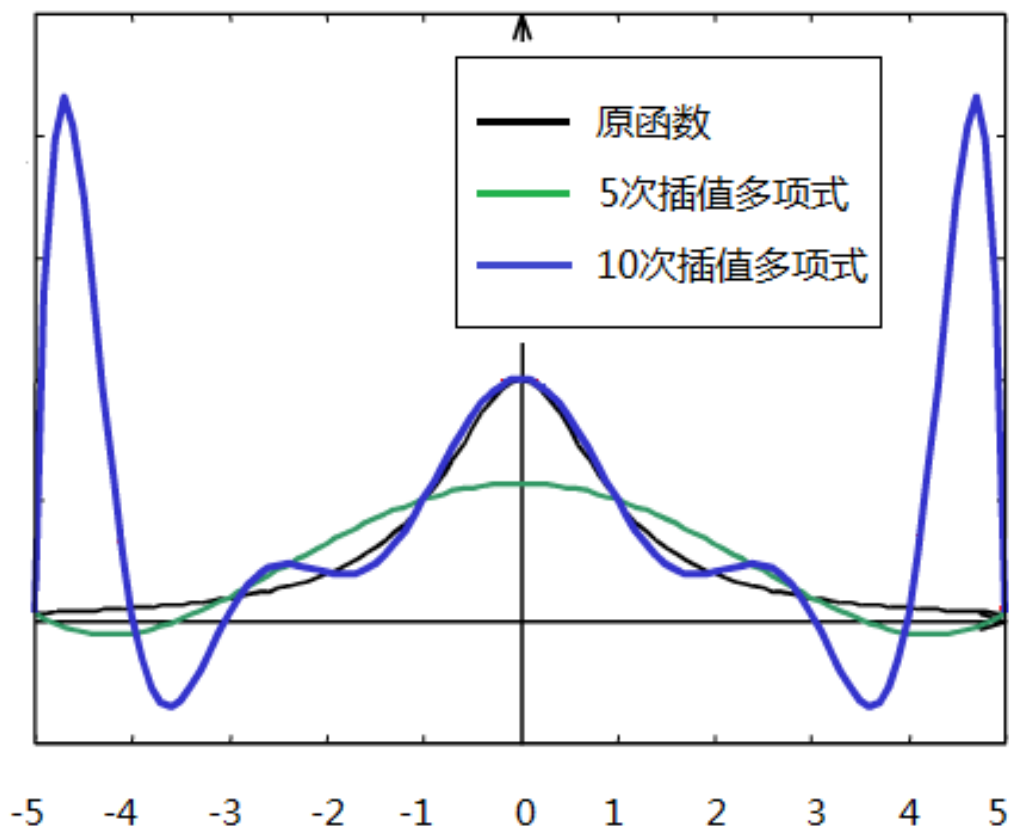
②. 对于等距节点的牛顿插值公式, 函数值的微小扰动可能引起高阶差分有很大的变化。



高次插值的评述(续)

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[-5, 5]$ 上用等距节点的插值问题是上世纪初Runge研究过的一个有名实例. 在区间上分别采用5次、10次的等距节点插值多项式。随着插值次数的提高, 在 $|x| > 3.63$ 范围内的近似程度并没有变好, 反而变坏. 高次插值并不一定带来更好的近似效果。

高次插值的评述(续)



高次插值不稳定现象示意图

分段Lagrange插值

为了避免高次插值的缺点，常采用分段插值，即将插值区间分成若干小区间，在每个小区间上利用前面介绍的插值方法构建低次插值多项式。

设 已知节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 上的函数值 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 若 $\varphi_h(x)$ 满足

①. $\varphi_h(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$

②. 在 $[x_i, x_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 上, $\varphi_h(x)$ 是低次多项式.

则称 $\varphi_h(x)$ 为分段插值函数。

$\varphi_h(x)$ 是整体插值区间上的连续函数, 随着子区间长度 h 变小, 不提高子区间上的插值幂次便可以满足给定的任意精度要求. 但一般说来, 在子区间的端点处导数是不存在的.



分段线性Lagrange插值

分段线性插值的构造

设插值节点为 x_i , 函数值为 y_i , $i = 0, 1, \dots, n$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad h = \max_i h_i$$

任取两个相邻的节点 x_k, x_{k+1} , 形成一个插值区间 $[x_k, x_{k+1}]$, 构造拉格朗日插值。

分段线性Lagrange插值（续）

$$\begin{aligned} L_1^{(k)}(x) &= y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ &= y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \end{aligned} \quad \text{-----}(1)$$

$$L_1(x) = \begin{cases} L_1^{(0)}(x) & x_0 \leq x < x_1 \\ L_1^{(1)}(x) & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ L_1^{(n-1)}(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad \text{-----}(2)$$

显然 $L_1(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

我们称由(1)(2)式构成的插值多项式 $L_1(x)$ 为
分段线性Lagrange插值多项式

分段线性Lagrange插值（续）

分段线性插值 $y = L_1(x)$ 的图象实际上是连接点 (x_k, y_k) ,

$i = 0, 1, \dots, n$ 的一条折线

也称折线插值, 如右图

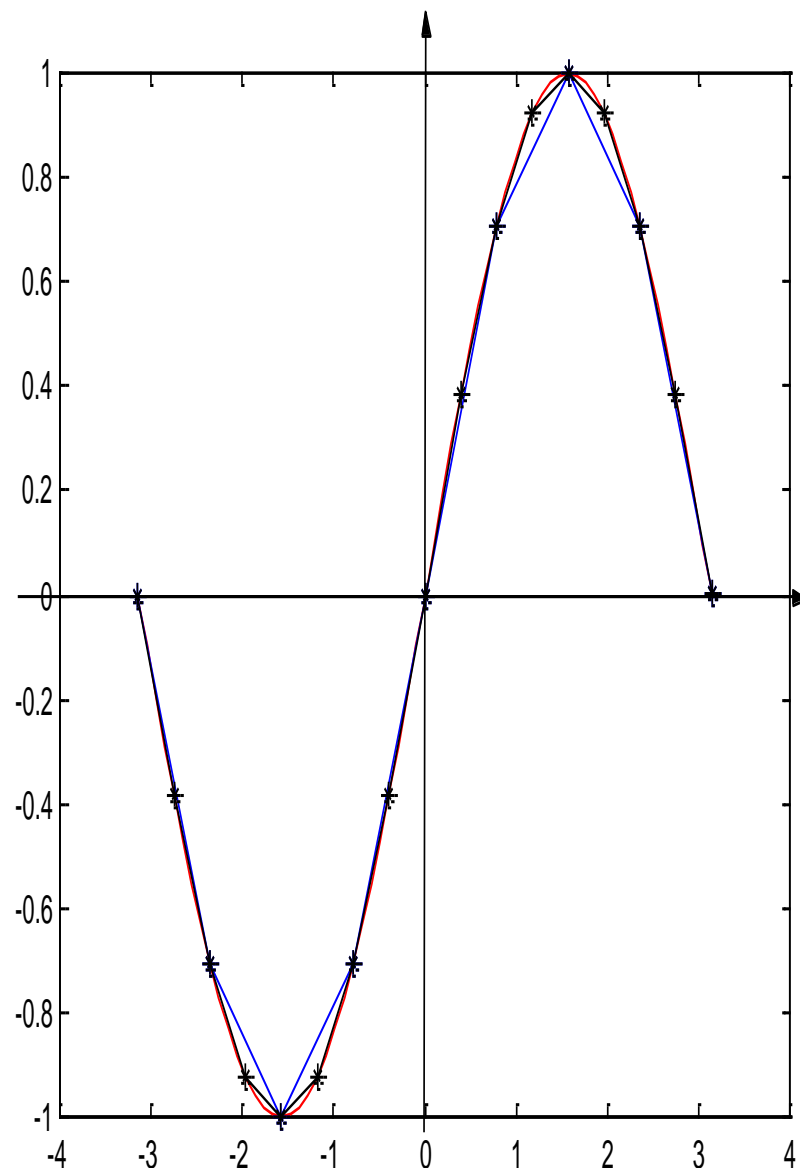
曲线的光滑性较差

在节点处有尖点

但如果增加节点的数量
减小步长, 会改善插值效果

因此 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

则
$$\lim_{h \rightarrow 0} L_1(x) = f(x)$$



分段线性插值的误差估计

由定理4.2可知, n 次Lagrange插值多项式的余项为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

那么分段线性插值 $L_1(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的余项为

$$R_k(x) = f(x) - L_1^{(k)}(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$\xi, x \in [x_k, x_{k+1}]$, 且 ξ 与 x 有关

$$\begin{aligned} |R_1(x)| &\leq \frac{1}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \cdot \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |(x - x_k)(x - x_{k+1})| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{8} M_2 h^2 \end{aligned}$$

分段二次插值的构造

将整个区间 $[a, b]$ 分成 n (n 为偶数) 个小区间,
在区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$) 上, $g_2(x)$ 的表达式

$$g_2(x) = \frac{(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i} - x_{2i+1})(x_{2i} - x_{2i+2})} y_{2i} + \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i+1} - x_{2i})(x_{2i+1} - x_{2i+2})} y_{2i+1} \\ + \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})}{(x_{2i+2} - x_{2i})(x_{2i+2} - x_{2i+1})} y_{2i+2}$$

分段二次插值的插值余项为

$$|R(x)| = |f(x) - g_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}h^3}{27} M_3$$

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|, M_3 = \max_{a \leq x \leq b} |f'''(x)|$$



分段低次Lagrange插值的特点

优点： 计算较容易，可以解决Runge现象。

缺点： 插值多项式分段，插值曲线在节点处会出现尖点，插值多项式在节点处不可导。

➤ 如果节点上的函数值和导数值都已知，则可以构造分段Hermite插值。

分段Hermite插值

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上构造两点三次Hermite插值 $S_3(x)$ 。

插值条件为
$$\begin{cases} S_3(x_i) = y_i \\ S'_3(x_i) = m_i \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上,三次Hermite插值 $S_3(x)$ 为

$$\begin{aligned} S_3(x) = & \left(1 - 2 \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right)^2 y_{i-1} + \left(1 - 2 \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 y_i \\ & + (x - x_{i-1}) \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right)^2 m_{i-1} + (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 m_i \end{aligned}$$



分段Hermite插值的性质

$S_3(x)$ 具有以下性质

- ✓ $S_3(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续函数;
- ✓ 在插值节点 x_i 上, $S_3(x_i) = y_i$, $S_3'(x_i) = m_i$;
- ✓ 在每个小区间上, $S_3(x)$ 是不超过三次的多项式.

优点: 近似效果比分段低次拉格朗日插值好。

缺点: 需要知道节点处的函数值和导数值, 过多的数据要求限制了它在工程中的应用。



§ 4.7 三次样条插值

分段插值法具有一致的收敛性,但它只保证插值函数整体的连续性,但在连接处不一定光滑,不能够满足精密机械设计(如船体、飞机、汽车等的外形曲线设计)对函数光滑性的要求。

早期的工程技术人员在绘制给定点的曲线时,使用一种具有弹性的细长木条(或金属条),称之为样条(Spline),强迫它弯曲通过已知点。弹性力学理论指出样条的挠度曲线具有二阶连续的导函数,并且在相邻给定点之间为三次多项式,即为数学上的三次样条插值曲线。



1.三次样条插值函数的定义

定义 给定区间 $[a, b]$ 的一个分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

若实值函数 $S(x)$ 满足

- ①. 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 上是3次多项式.
- ②. 在节点 x_i ($i = 1, 2, \cdots, n-1$) 处具有2阶连续的导数;
则称 $S(x)$ 是关于分划 Δ 的3次**样条函数**.

若还满足

- ③. $S(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$), 则称 $S(x)$ 是 $f(x)$ 关于分划 Δ 的3次**样条插值函数**。



样条插值的定义 (续)

三次样条插值函数 $s(x)$ 在每一个小区间上是3次的多项式, 在整个插值区间上有 $4n$ 个系数. 且有 $4n-2$ 个约束:

$$\text{内节点} \quad \begin{cases} s(x_i - 0) = s(x_i + 0) = f(x_i) \\ s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0) \\ s''(x_i - 0) = s''(x_i + 0) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{边界节点} \quad \begin{cases} s(x_0 + 0) = f(x_0) \\ s(x_n - 0) = f(x_n) \end{cases}$$

样条插值的定义（续）

要确定 $4n$ 个系数，还需附加2个约束条件. 常用的约束条件有以下三类：

①. 转角边界条件 $s'(x_0 + 0) = m_0, s'(x_n - 0) = m_n$

②. 弯矩边界条件 $s''(x_0 + 0) = M_0, s''(x_n - 0) = M_n$

特别的称 $s''(x_0 + 0) = 0, s''(x_n - 0) = 0$

为自然边界条件.

③. 周期性边界条件
$$\begin{cases} s'(x_0 + 0) = s'(x_n - 0) \\ s''(x_0 + 0) = s''(x_n - 0) \end{cases}$$

此时一般有 $f(x_0) = f(x_n)$ 成立.



2. 三弯矩构造法

记 $s''(x_i) = M_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) , 基本步骤如下:

- ①. 取 M_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 为待定参数, 并用 $S(x)$ 的插值条件写出 M_i 的表达式。
- ②. 用 $S'(x)$ 在内节点 x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 的连续条件及边界条件导出关于 M_i 的方程组。
- ③. 求解后得到 M_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 。
- ④. 代入 $S(x)$ 的表达式, 得各个区间上的表达式。

三弯矩构造法（续）

$$\begin{aligned} \text{由 } s''(x) &= M_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \end{aligned}$$

式中 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 。

对 $s''(x)$ 积分两次, 并利用插值条件 $s(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $s(x_i) = f(x_i)$ 确定两个积分常数, 得到

$$\begin{aligned} s(x) &= M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} \\ &\quad + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \end{aligned}$$

三弯矩构造法（续）

计算 $s'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}$
$$- \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s'(x_i - 0) = \frac{h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1} + f[x_{i-1}, x_i]$$

$$s'(x_{i-1} + 0) = -\frac{h_i}{3} M_{i-1} - \frac{h_i}{6} M_i + f[x_{i-1}, x_i]$$

类似可以得到 $s'(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + f[x_i, x_{i+1}]$

三弯矩构造法（续）

令 $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$, 有

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

两边同乘以 $\frac{6}{h_i + h_{i+1}}$, 得

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\text{式中 } \lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}.$$

三弯矩构造法（续）

若附加弯矩约束条件, 得

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \lambda_3 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6f[x_0, x_1, x_2] - \lambda_1 M_0 \\ 6f[x_1, x_2, x_3] \\ 6f[x_2, x_3, x_4] \\ \dots\dots\dots \\ 6f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] - \mu_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优, 故系数矩阵非奇异, 上述线性方程组有唯一解, 可用追赶法求解。将解带回到子区间上的表达式中（用二阶导表示），即有 $s(x)$ 在每个区间上的表达式。

三弯矩构造法（续）

若附加转角边界条件, 得

$$2M_0 + M_1 = 6 \frac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} \quad M_{n-1} + 2M_n = 6 \frac{m_n - f[x_{n-1}, x_n]}{h_n}$$

线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \dots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ \frac{m_n - f[x_{n-1}, x_n]}{h_n} \end{bmatrix}$$

三弯矩构造法（续）

对于周期性边界条件, 得:

$$\begin{cases} \frac{h_1}{3}M_0 + \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n] \\ M_0 = M_n \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 + \mu_0 M_{n-1} = 6 \frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_1 + h_n} \\ M_0 = M_n \end{cases}$$

$$\text{式中} \lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_n}, \mu_0 = \frac{h_n}{h_1 + h_n}.$$

三弯矩构造法（续）

线性方程组为:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \mu_0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_1 + h_n} \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \dots \\ f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}$$

将 M_0 当作已知参数, 从后 $n-1$ 个方程中求解出用 M_0 表示的后 $n-1$ 个参数, 然后将它们代入第一个方程解得 M_0 , 最终得到其它参数.



Remark:

1. 类似地，可以使用节点处的一阶导数来表示三次样条插值函数。---三转角构造法

2. 对三次样条插值函数来说，当插值节点逐渐加密时，可以证明，不但样条插值函数收敛于函数本身，而且其导数也收敛于函数的导数。