



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

连续时间系统的时域分析方法—卷积

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn



卷积计算步骤

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
- 零状态响应
 - 奇异函数
 - 信号的时域分解
 - 阶跃响应和冲激响应
 - 卷积定理
 - ◆ 叠加积分
 - ◆ 计算步骤
 - ◆ 卷积性质

叠加积分-》卷积定义

一、定义

卷积积分：

$$r(t) = \int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 称为 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分。

t 参变量(观察响应时刻)

τ 积分变量 (激励作用时刻)

简记 $f(t) * h(t)$

卷积和：

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



卷积计算步骤

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
- 零状态响应
 - 奇异函数
 - 信号的时域分解
 - 阶跃响应和冲激响应
 - 卷积定理
 - ✦ 叠加积分
 - ✦ 计算步骤
 - ✦ 卷积性质

2. 卷积步骤：

1) 改变自变量由t变为 τ

2) 翻转

翻转

$$h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$$

3) 平移

$$h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

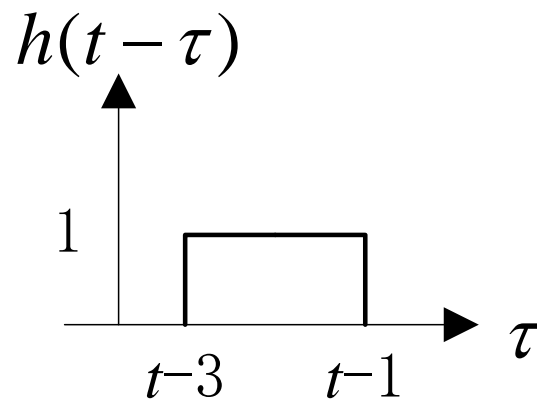
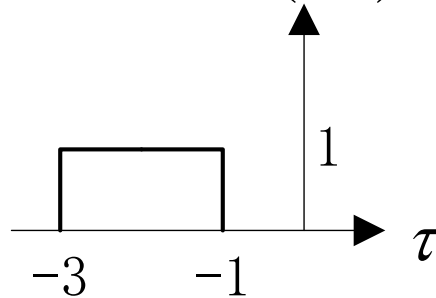
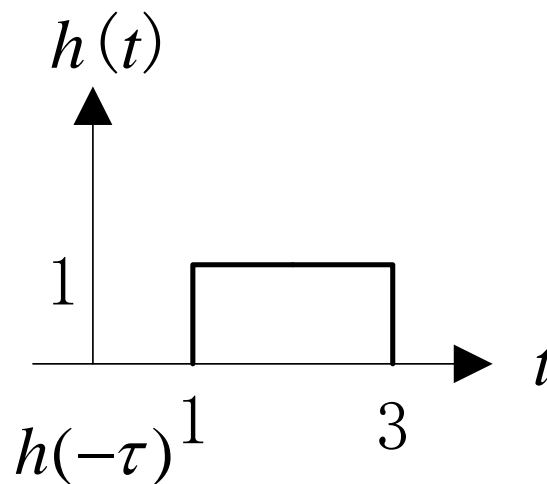
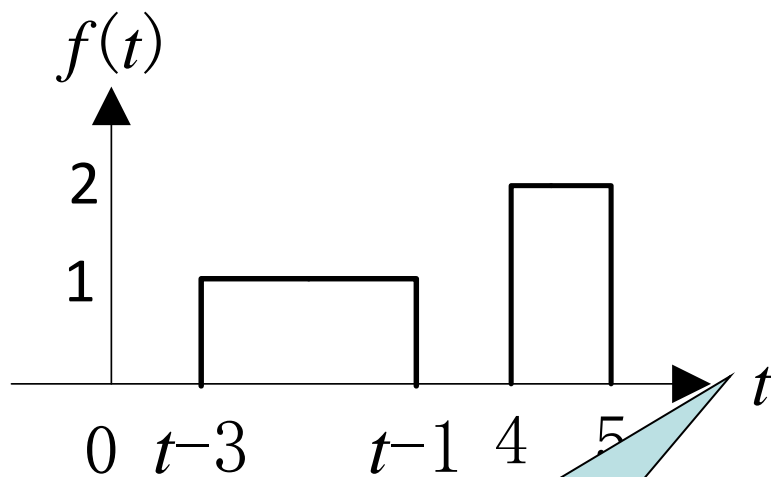
($t>0$, 右移, $t<0$ 左移)

4) 相乘积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

计算步骤



翻转

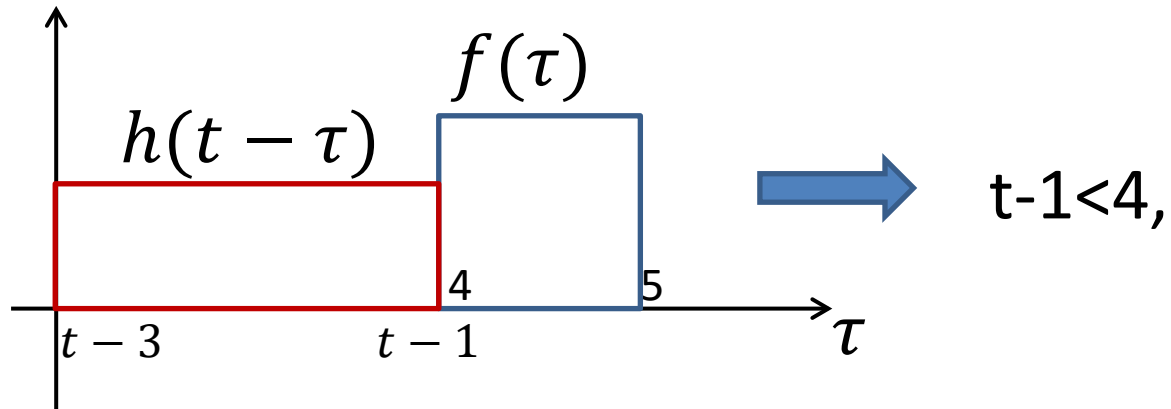
$$h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$$

$$h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

计算步骤

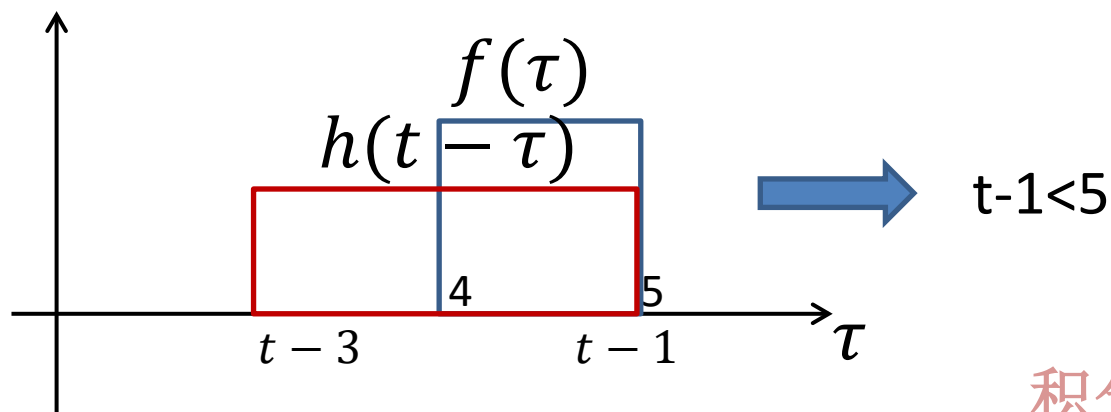
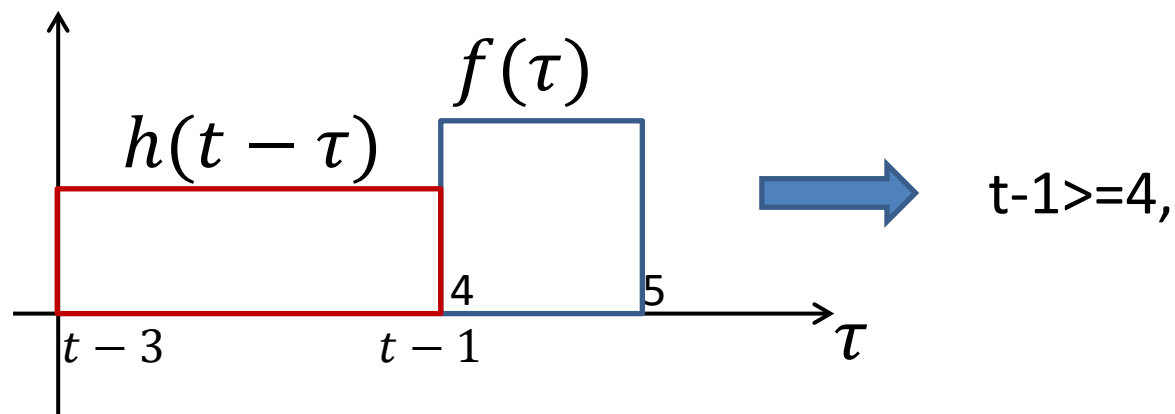
头部未进入，无重叠



$$t < 5, f(t) * h(t) = 0$$

计算步骤

头部开始进入并且部分重叠

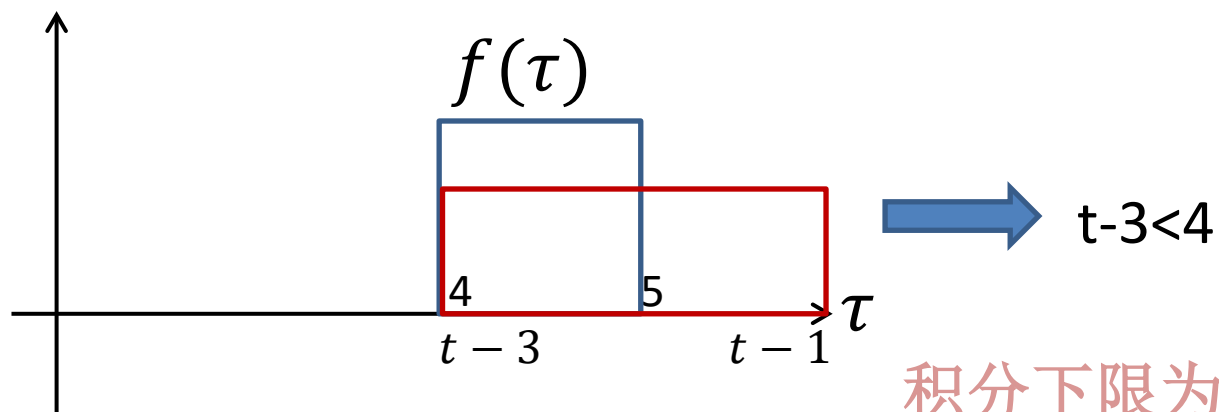
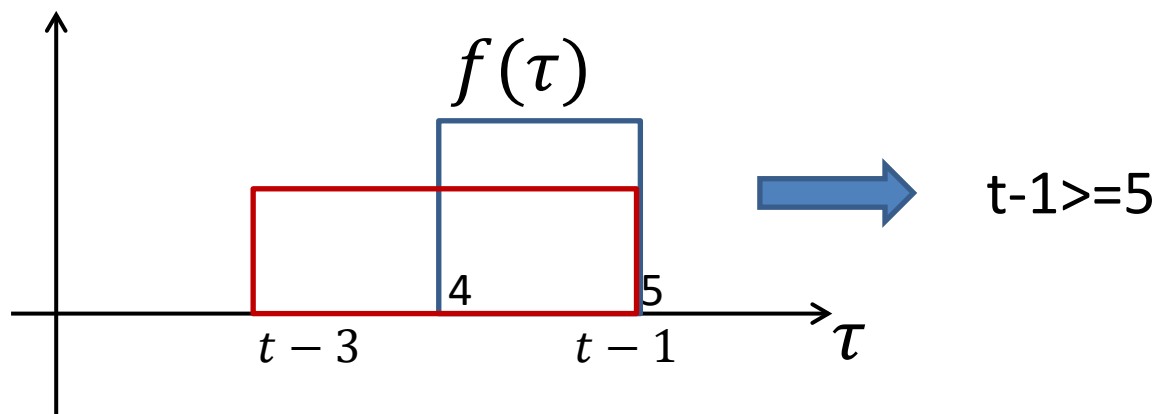


积分下限为4，上限为 $t-1$

$$5 \leq t < 6, f(t) * h(t) = 2t - 6$$

计算步骤

头部开始离开并且完全重叠

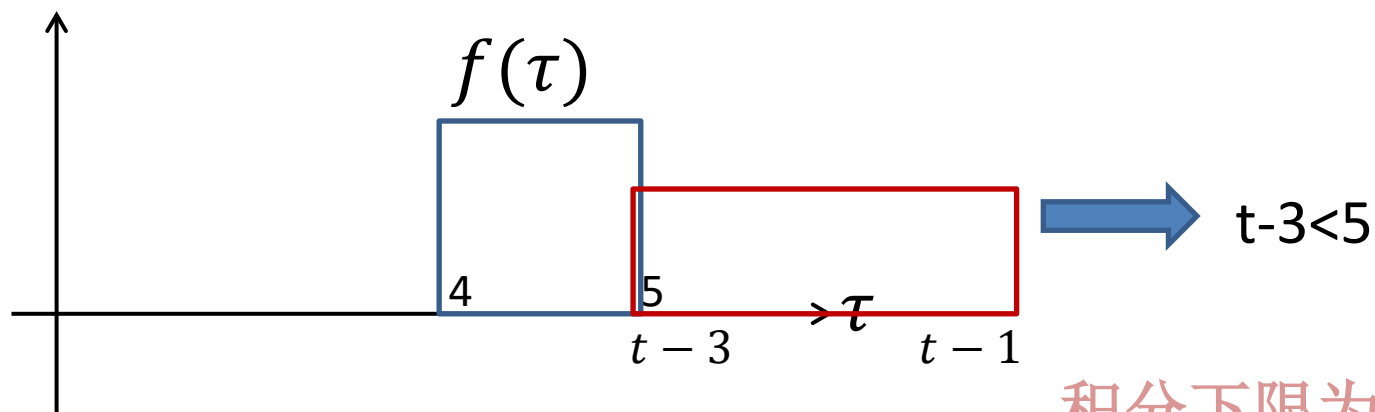
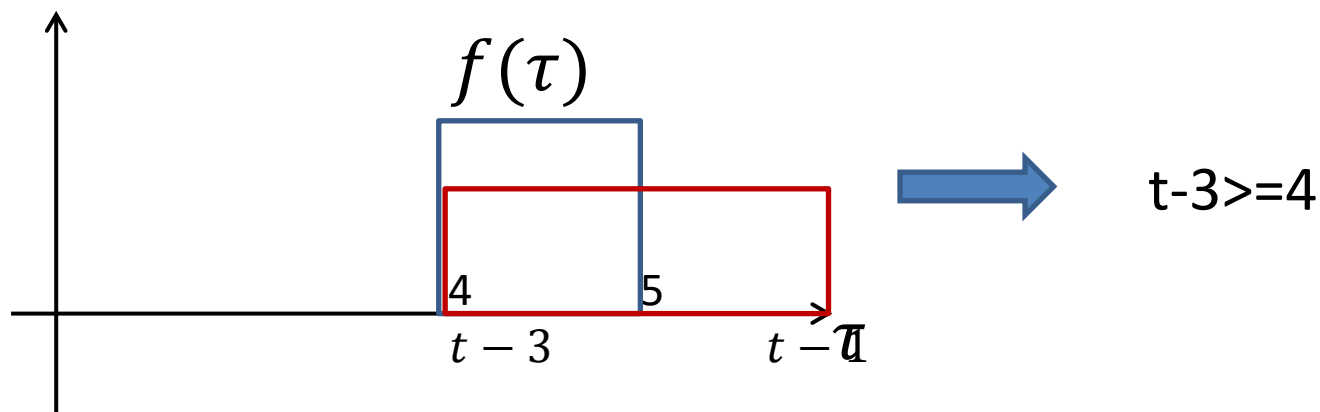


积分下限为4，上限为5

$$6 \leq t < 7, f(t) * h(t) = 2$$

计算步骤

尾部完全进入，并且部分重叠

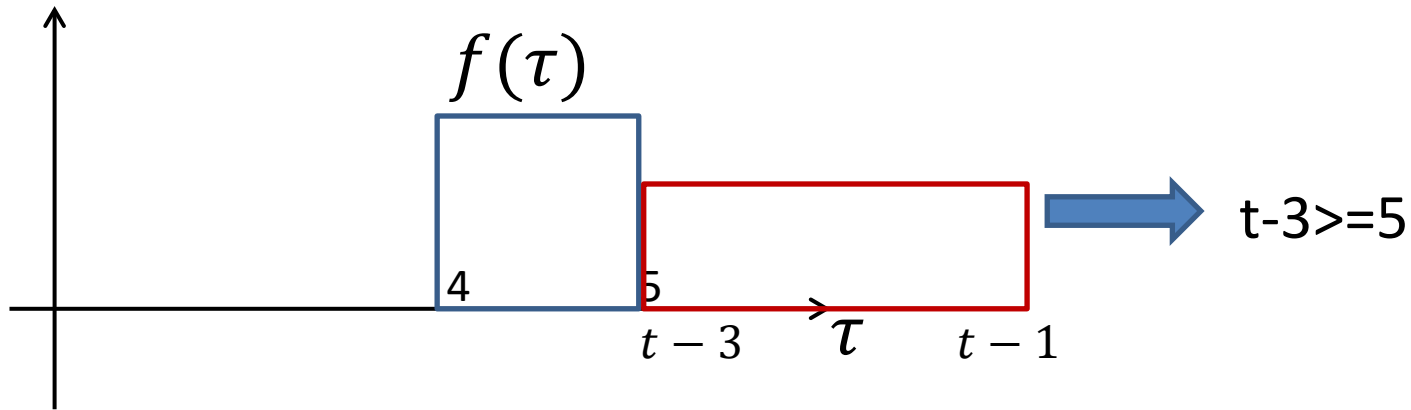


积分下限为 $t-3$ ，上限为5

$$7 \leq t < 8, f(t) * h(t) = 16 - 2t$$

计算步骤

尾部完全离开，无重叠



$$t \geq 8, f(t) * h(t) = 0$$

计算步骤

1、参数 t 不同时，卷积结果不同；

$$f(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ 2t - 10 & 5 \leq t < 6 \\ 2 & 6 \leq t < 7 \\ 16 - 2t & 7 \leq t < 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$

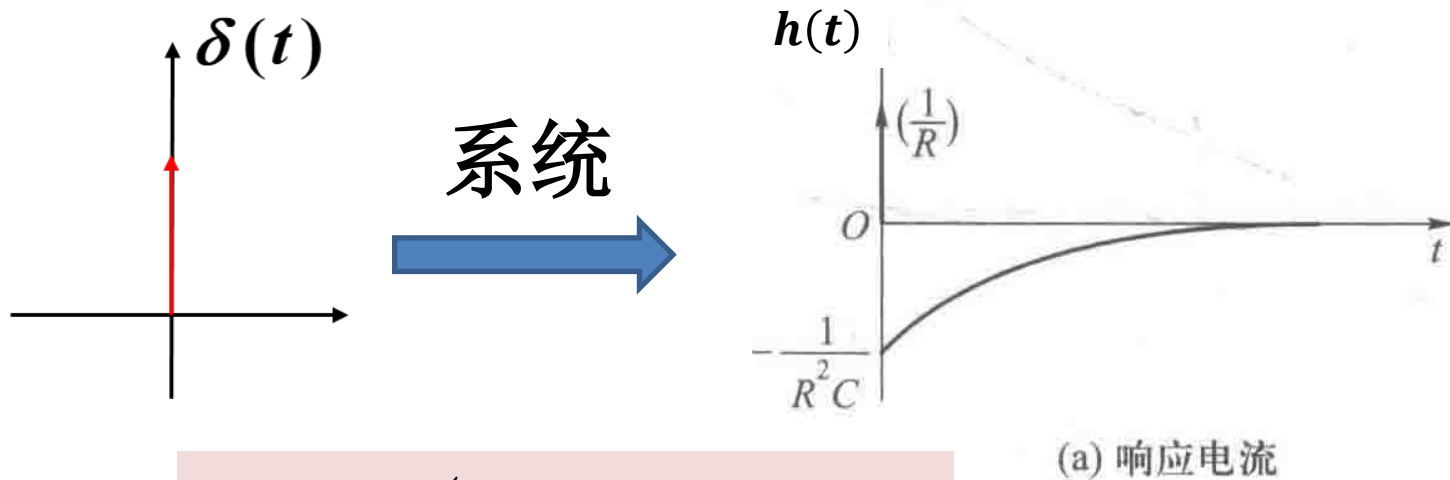
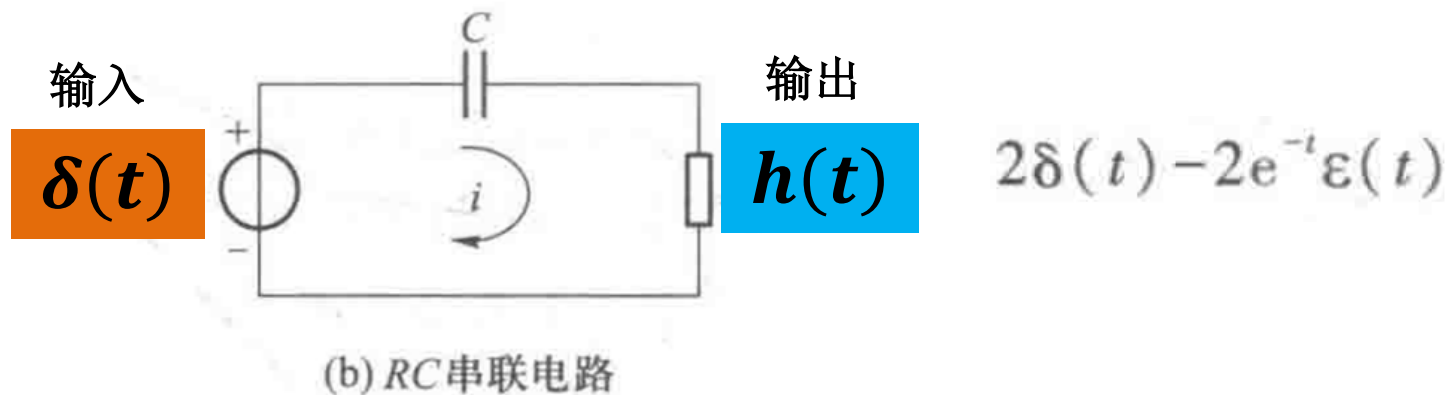
2、如果两个信号具有有限长度，长度分别是 T_1 、 T_2 ，则卷积信号的长度为 $T_1 + T_2$ ；

3、正确计算卷积的关键在于：

- 确定卷积结果的分段时限
- 确定每段积分的上下限

卷积的理解与应用

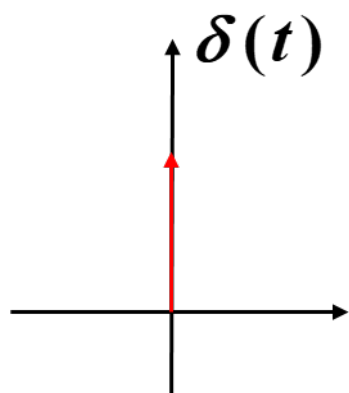
1、RC电路



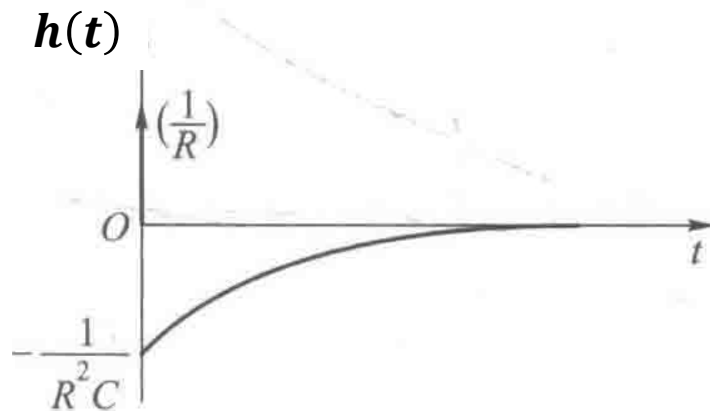
$$r(t) = \int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

卷积的理解与应用

1、RC电路



系统



(a) 响应电流

$$r(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

因果系统，因果信号！！

$$r(n) = \sum_{k=0}^n e(k) h(n - k)$$

设 $n=2$ ，举例说明 $r(n)$ 的成分

卷积的理解与应用

2、回声系统

思考：除了山谷里有回声，
哪里还有回声呢……

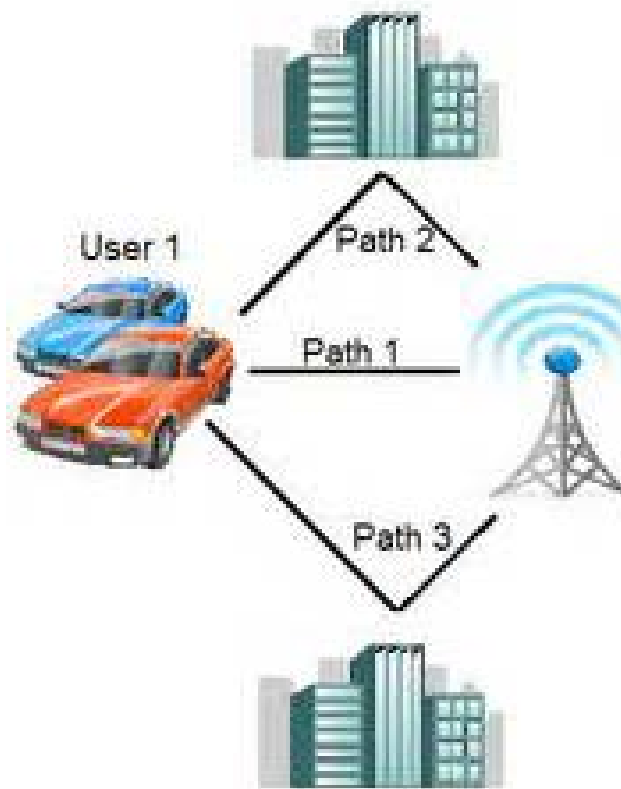


播放视频！！



$$h(t) = a_1\delta(t - t_1) + a_2\delta(t - t_2)$$

3. 无线通信信道系统



$$h(t) = a_1\delta(t - t_1) + a_2\delta(t - t_2)$$

信号处理算法执行时间要小于信道相干时间

计算步骤

$$[e^{\lambda_1 t} \varepsilon(t)] * [e^{\lambda_2 t} \varepsilon(t)] = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] \varepsilon(t)$$

解： $[e^{\lambda_1 t} \varepsilon(t)] * [e^{\lambda_2 t} \varepsilon(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\lambda_1 \tau} \varepsilon(\tau)] \cdot [e^{\lambda_2 (t-\tau)} \varepsilon(t-\tau)] d\tau$$

$$= \int_0^t [e^{\lambda_1 \tau}] \cdot [e^{\lambda_2 (t-\tau)}] d\tau \cdot \varepsilon(t-0)$$

$$= e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau} d\tau \cdot \varepsilon(t) = e^{\lambda_2 t} \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2} \Big|_0^t \cdot \varepsilon(t)$$

$$= e^{\lambda_2 t} \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \varepsilon(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}] \varepsilon(t)$$

卷积性质

(1) 卷积代数

■ 交换律

$$f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$$

推导

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$$

■ 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$$

■ 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

$$[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)]$$

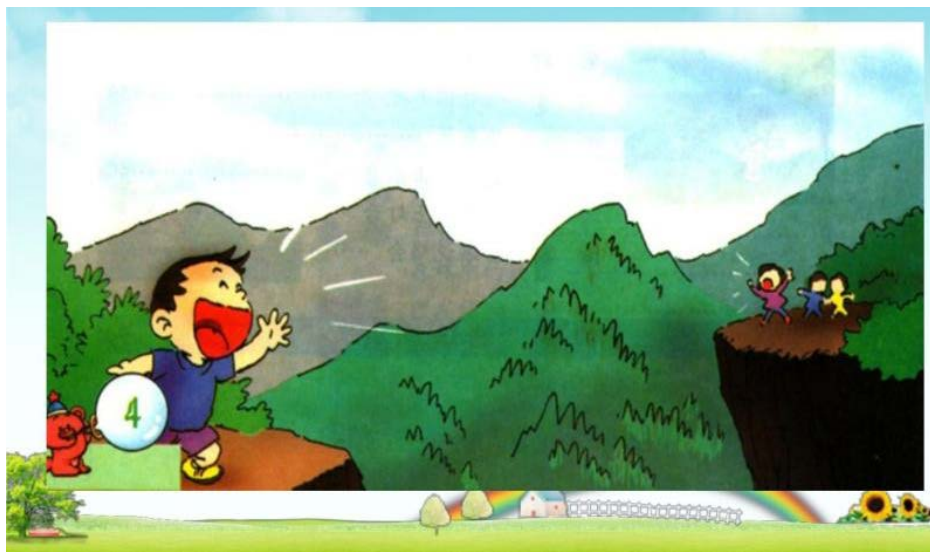
(2) 卷积的时不变性

■ $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ 称 $\delta(t - t_0)$ 是 t_0 秒的**延时器**

$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$ 称 $\delta(n - n_0)$ 是 n_0 秒的**延时器**

■ $\delta(t) * f(t) = f(t)$ 称 $\delta(t)$ 是卷积的**单位元**

$\delta(n) * x(n) = x(n)$ 称 $\delta(n)$ 是卷积的**单位元**

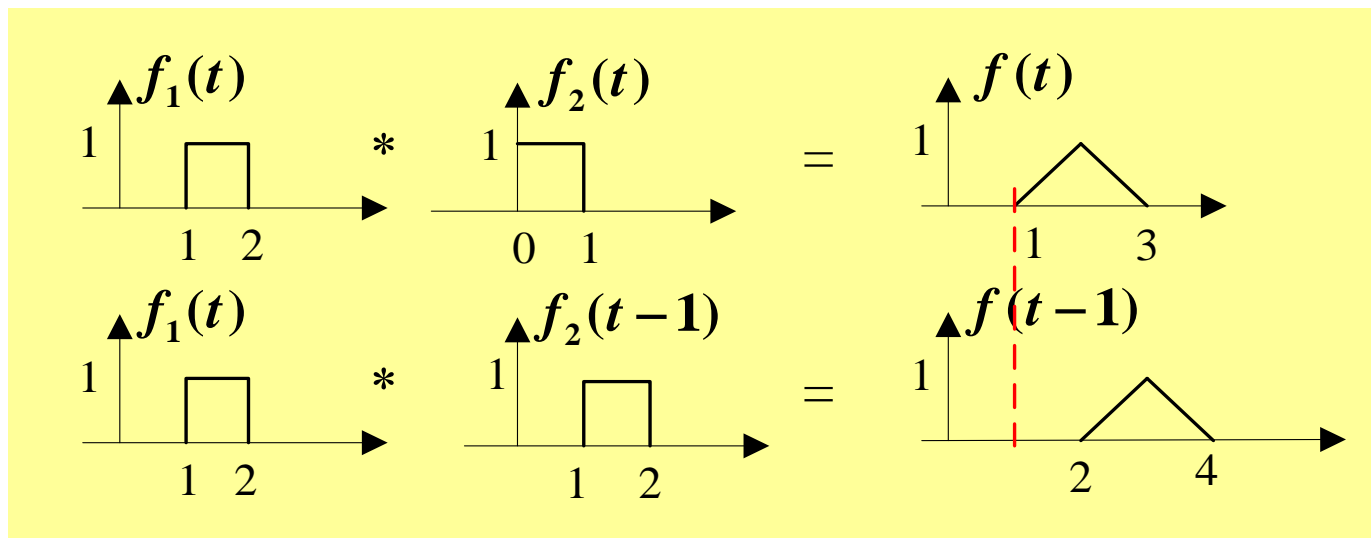


卷积性质

(2) 卷积的时不变性

■ 如果 $f_1(t) * f_2(t) = f(t)$ 则 $f_1(t) * f_2(t - t_0) = f(t - t_0)$

如果 $x_1(n) * x_2(n) = x(n)$ 则 $x_1(n) * x_2(n - n_0) = x(n - n_0)$



$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = ?$$

$$= f_1(t - t_1 - t_2) * f_2(t) = f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2)$$

(3) 卷积的微分及差分特性

$$\frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)]$$

* $\nabla \delta(n) * x(n) = \nabla x(n)$

* $\nabla x_1(n) * x_2(n) = x_1(n) * \nabla x_2(n) = \nabla[x_1(n) * x_2(n)]$

$$\delta'(t) * f(t) = f'(t) \quad \text{称 } \delta'(t) \text{ 是微分器}$$

推广：

$$\delta^{(n)}(t) * f(t) = f^{(n)}(t)$$

(4) 卷积的积分及求和特性

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

称 $\varepsilon(t)$ 是**模拟**积分器

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * \varepsilon(n)$$

称 $\varepsilon(n)$ 是**数字**积分器

卷积性质

(4) 卷积的积分及求和特性

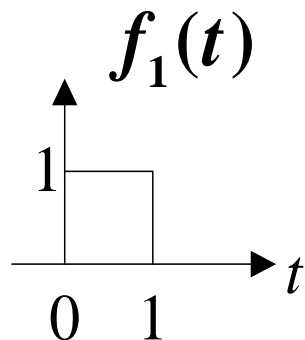
$$[\int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau] * f_2(t) = f_1(t) * [\int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau] = \int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau$$

$$[\sum_{k=-\infty}^n x_1(k)] * x_2(n) = x_1(n) * [\sum_{k=-\infty}^n x_2(k)] = \sum_{k=-\infty}^n [x_1(k) * x_2(k)]$$

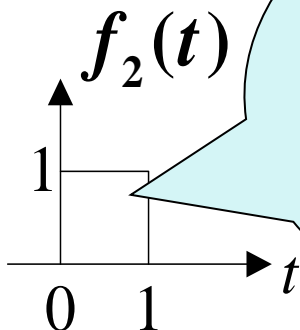
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau$$

卷积性质

利用性质计算卷积积分



*

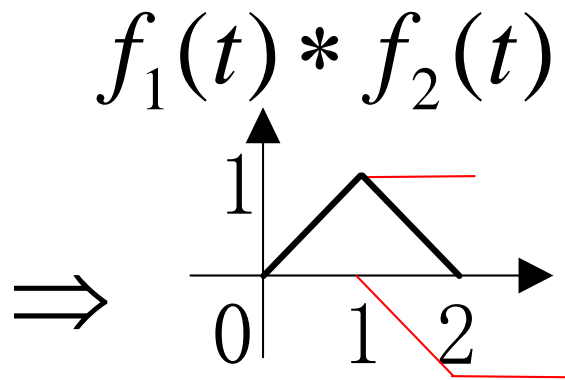
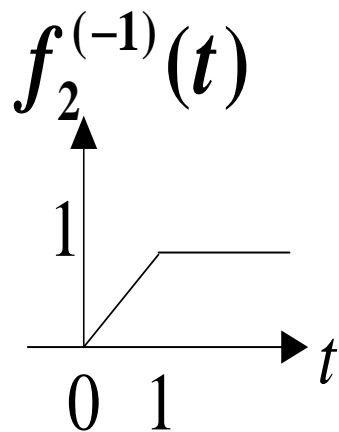
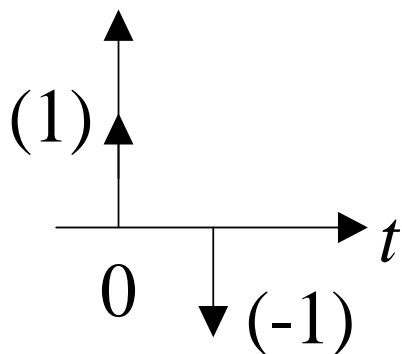


$$f'(t) * g^{(-1)}(t) = f(t) * g(t)$$

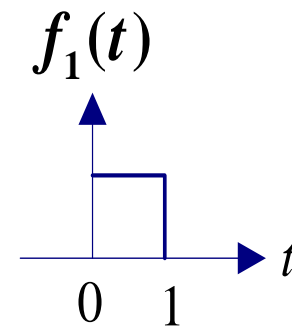
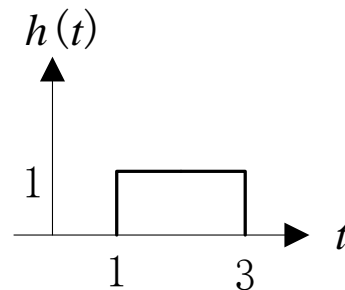
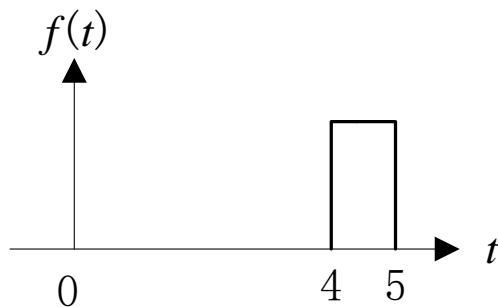
$$\delta(t) * f(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

解: $f_1'(t)$

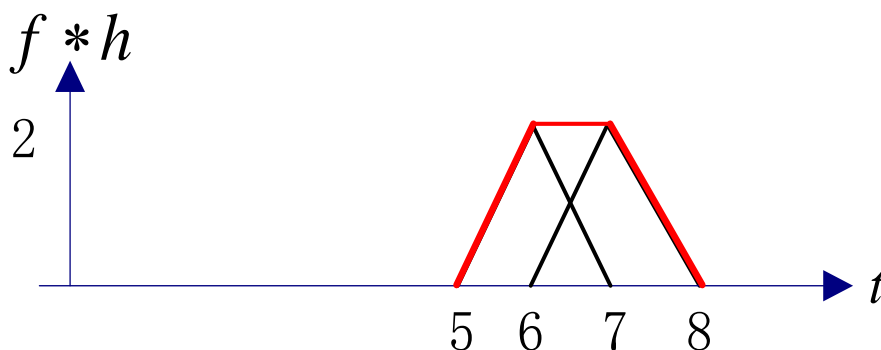
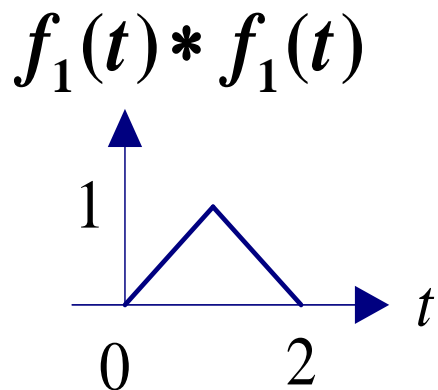


卷积性质



$$f(t) = 2f_1(t - 4) \quad h(t) = f_1(t - 1) + f_1(t - 2)$$

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) &= [2f_1(t - 4)] * [f_1(t - 1) + f_1(t - 2)] \\ &= 2f_1(t) * f_1(t) * [\delta(t - 5) + \delta(t - 6)] \end{aligned}$$



卷积小结1

卷积积分：
$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

卷积和：
$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$$

$\delta(t - t_0)$ / $\delta(n - n_0)$ 是 t_0 / n_0 秒的**延时器**

$\delta(t)$ $\delta(n)$

$\delta'(t)$ 是**微分器**

$\varepsilon(t)$ 是**模拟**积分器

$\varepsilon(n)$ 是**数字**积分器

求解卷积方法有：

- 1、定义
- 2、性质
- 3、图解法

卷积小结2

- 卷积代数：交换律、结合律、分配律
- 卷积时不变性：时延可以移动
- 卷积微分：微分符号可以移动
- 卷积积分：积分符号可以移动
- 微分与积分相互抵消

2.7 叠加积分与卷积：卷积

课堂练习：卷积积分

1、计算 $[e^{-2t}\varepsilon(t)] * \varepsilon(t-2)$