第六节　高阶导数

- 一、问题的提出
- 二、主要定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、主要定理

定理

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为：$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n=1,2,\cdots)$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部全含于 D.

证 设 z_0 为 D 内任一点，先证 $n=1$ 的情况，

根据导数的定义, $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

从柯西积分公式得 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,$

$$f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}\mathrm{d}z,$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{2\pi\Delta z i}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}\mathrm{d}z-\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right],$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z}}_{=I}$$

$$|I|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C\frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|\Delta z||f(z)|}{|z-z_0|^2|z-z_0-\Delta z|}\mathrm{d}s$$

因为 $f(z)$ 在 C 上解析，所以在 C 上连续，

故 $f(z)$ 在 C 上有界,于是 $\exists M>0$, 使得 $|f(z)|\le M$,

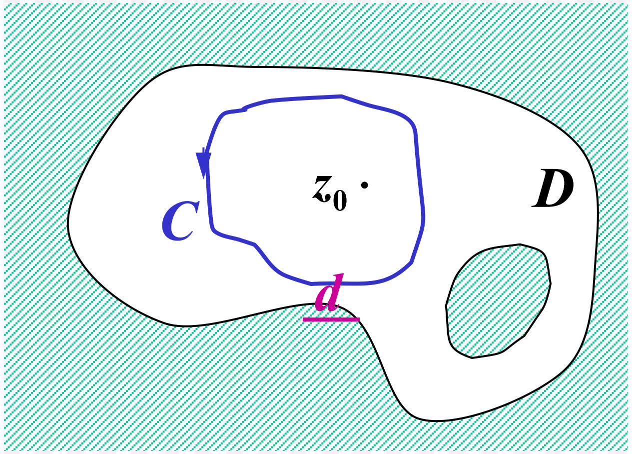
设 d 为从 z_0 到曲线 C 上各点的最短距离,

并取 $|\Delta z|$ 适当地小, 满足 $|\Delta z|<\frac{1}{2}d$,

则 $|z-z_0|\ge d$, $\frac{1}{|z-z_0|}\le\frac{1}{d}$,

$$|z-z_0-\Delta z|\ge|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},$$

$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}\le\frac{2}{d},\quad |I|<|\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3},$$



$|I| < |\Delta z| \dfrac{ML}{\pi d^3}$，这里 L 为 C 的长度.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\dfrac{d}{2}, \dfrac{\pi d^3 \varepsilon}{ML}\}$, 则当 $|\Delta z| < \delta$ 时，就有 $|I| \le \varepsilon$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \mathrm{d}z,$$

再利用以上方法求极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z}$

可得 $f''(z_0) = \dfrac{2!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^3} \mathrm{d}z.$

这表明一个解析函数的导数仍然是解析函数.

利用数学归纳法可证

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

[证毕]

高阶导数公式的作用:

不在于通过积分来求导，而在于通过求导来计算积分.

二、典型例题

例1 计算下列积分，其中 C 为正向圆周：$|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d}z$;　　(2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z$.

解 (1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析，

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

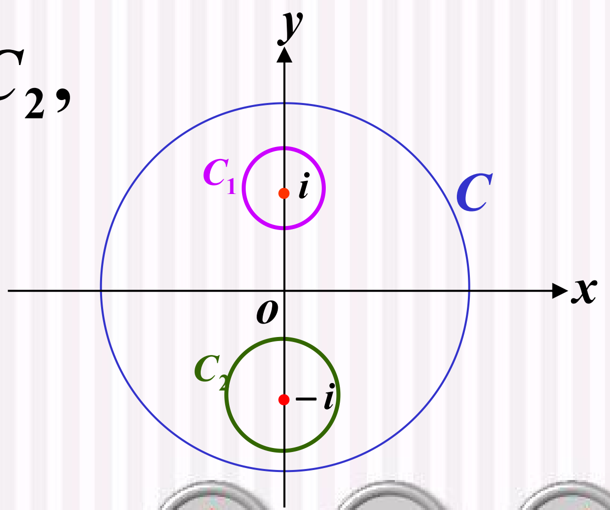
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

围成的区域内解析,

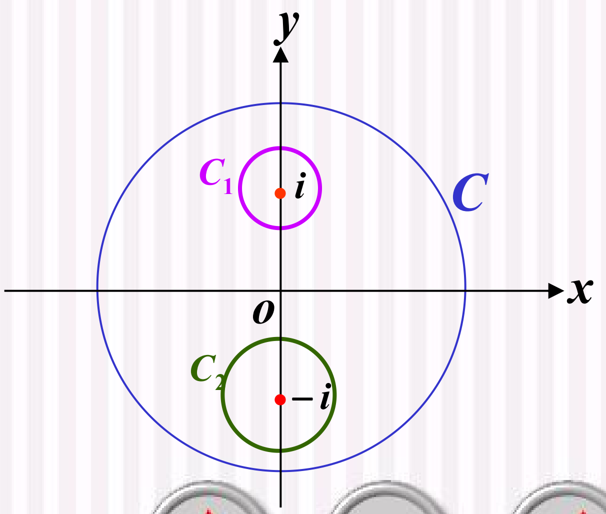


根据复合闭路定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'\Bigg|_{z=-i} = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$$

于是 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i}) = \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

例2 求积分 $\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \mathrm{d}z.$

其中 $C:(1)\ |z-3|=2;\quad (2)\ |z-1|=3.$

解 函数 $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 有两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$,

$(1)\ |z-3|=2$, 仅包含奇点 $z=2$, 取 $f(z)=\frac{1}{z^3}$,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \mathrm{d}z = \oint_C \frac{\frac{1}{z^3}}{(z-2)^2} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8};$$

(2) $|z-1|=3$

两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$ 都含在 C 内,

作简单闭曲线 C_1 和 C_2 分别包含 0 和 2,

C_1 和 C_2 互不包含且互不相交,

根据复合闭路定理和高阶导数公式,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{z^3} \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z^3}}{(z-2)^2} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Bigg|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{1}{z^3} \right]' \Bigg|_{z=2}$$

$$= \frac{3\pi i}{8} - \frac{3\pi i}{8} = 0.$$

例3 设函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续，且对于 B 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，证明 $f(z)$ 在 B 内解析. (Morera定理)

证 在 B 内取定一点 z_0, z 为 B 内任意一点,

依题意可知

$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的值与连接 z_0 和 z 的路线无关,

定义了一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$,

参照本章第四节定理二, 可证明

$$F'(z)=f(z),$$

所以 $F(z)$ 是 B 内一个解析函数,

因为解析函数的导数仍为解析函数,

故 $f(z)$ 为解析函数.

三、小结与思考

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了解析函数与实变函数的本质区别.

高阶导数公式 $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

思考题

解析函数的高阶导数公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同?

思考题答案

高阶导数公式说明,函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{G}$ 中处处可微,它就一定无限次可微,并且它的各阶导数均为闭区域 $\overline{G}$ 上的解析函数.

这一点与实变量函数有本质的区别.

在整个复平面上解析的函数称为整函数.
例如：多项式，指数函数，正弦、余弦函数等。

Liouville 定理：有界整函数必为常数

证明 设$|f(z)|\le M$.考察圆周：$K=\{\xi:|\xi-z|=R\}$.估计导数的模$|f'(z)|$.

由Cauchy导数公式，$f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_K\frac{f(z)}{(\xi-z)^2}d\xi.$

所以
$$|f'(z)|\le\frac{M}{2\pi}\frac{\int_K ds}{R^2}=\frac{M}{2\pi R}.$$

上式对任何R均成立，所以 $f'(z)=0$. $f(z)$是常值函数.

代数学基本定理：在复平面上，n 次多项式至少有一根.

证明 如果$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}\ldots+a_n(a_0\neq 0)$没有零点，则$\dfrac{1}{p(z)}$是解析函数.

而$\lim\limits_{|z|\to\infty}|p(z)|\geq\lim\limits_{|z|\to\infty}|z|^n\left(|a_0|-\left|\dfrac{a_1}{z}\right|-\ldots-\left|\dfrac{a_n}{z^n}\right|\right)\geq\lim\limits_{|z|\to\infty}|z|^n\dfrac{1}{2}|a_0|=+\infty.$

所以$\lim\limits_{|z|\to\infty}\dfrac{1}{p(z)}=0.$ 因而存在$R>0$,当$|z|>R$时,$\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<1.$

连续性导致$\dfrac{1}{p(z)}$在闭圆盘$|z|\leq R$上有界，从而在整个复平面上都有界，

由Liouville定理,$\dfrac{1}{p(z)}$是常数，这与$p(z)$是多项式矛盾.

设函数$f(z)$在闭圆$|z|\le R$上解析，如果存在$a>0$,使当$|z|=R$时$|f(z)|>a$,而且$|f(0)|<a$.证明：$f(z)$在$|z|<R$内至少有一个零点.

设 $f(z)$在$|z|<R$内无零点，则 $f(z)$在闭圆$|z|\le R$内无零点，

因而$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$在闭圆内解析.由Cauchy积分公式，

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(Re^{i\theta})d\theta.$$

一方面,$|F(0)|=\dfrac{1}{|f(0)|}>\dfrac{1}{a}$.另一方面$|F(Re^{i\theta})|=\dfrac{1}{|f(Re^{i\theta})|}<\dfrac{1}{a}$,

从而得到矛盾：$\dfrac{1}{a}<|F(0)|\le\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(Re^{i\theta})|d\theta\le\dfrac{1}{a}$.