第一节 复数项级数

- 一、复数列的极限
- 二、级数的概念
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、复数列的极限

1. 定义　设 $\{\alpha_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, 其中 $\alpha_n = a_n + ib_n$, 又设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数,

如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地都能找到一个正数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时总成立　$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$,

那末 α 称为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限,

记作　$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

此时也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α.

2.复数列收敛的条件

复数列 $\{\alpha_n\}\ (n=1,2,\cdots)$ 收敛于 α 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

证 如果 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，那末对于任意给定的 $\varepsilon>0$

就能找到一个正数N，当 $n>N$ 时，

$$\left|(a_n+ib_n)-(a+ib)\right|<\varepsilon,$$

从而有 $|a_n - a| \le |(a_n - a) + i(b_n - b)| < \varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ 同理 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

反之, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$

那末当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

从而有 $|\alpha_n - \alpha| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)|$

$$= |(a_n - a) + i(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$ [证毕]

定理一说明: 可将复数列的敛散性转化为判别两个实数列的敛散性.

二、级数的概念

1. 定义 设$\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$为一复数列,

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 n 项的和

$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 称为级数的部分和.

收敛与发散

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛，那末级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，

并且极限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 称为级数的和 .

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 不收敛，

那末级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散.

说明：与实数项级数相同，判别复数项级数敛散性的基本方法是：利用极限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

例如，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$:

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1),$$

由于当 $|z| < 1$ 时， $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$,

所以当 $|z| < 1$ 时级数收敛.

2.复数项级数收敛的条件

定理二 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)$ 收敛的充要条件

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

证 因为 $s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+i(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$=\sigma_n+i\tau_n,$$

根据 $\{s_n\}$ 极限存在的充要条件：

$\{\sigma_n\}$ 和 $\{\tau_n\}$ 的极限存在，

于是 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

说明 复数项级数的审敛问题

$\Downarrow$ (定理二)

实数项级数的审敛问题

课堂练习 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$ 是否收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以原级数发散.

必要条件

因为实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

重要结论: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散.

例如,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$:

因为$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{in} \neq 0,$

不满足必要条件,　　所以原级数发散.

启示: 判别级数的敛散性时, 可先考察 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \overset{?}{=} 0$

$$\text{如果}\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0, & \text{级数发散;} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, & \text{应进一步判断.} \end{cases}$$

3. 绝对收敛与条件收敛

定理三 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 也收敛.

且不等式 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 成立.

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 的各项都是非负的实数，

应用正项级数的审敛法则判定.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

而 $|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $|b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

根据实数项级数的比较准则, 知

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 都收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也都收敛.

由定理二可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 是收敛的.

又由 $\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,$

可知 $\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$

或 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|.$ [证毕]

定义

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 那末称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

说明 由 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le|a_n|+|b_n|,$

知 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k|,$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛时，

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 也绝对收敛.

综上:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{绝对收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{与} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{绝对收敛}.$$

三、典型例题

例1 下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

$$(1)\ \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}};\qquad (2)\ \alpha_n = n\cos in\,.$$

解 (1) 因为 $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$,

所以 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$, $\qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

所以数列$\alpha_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$收敛,

且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 1$.

解 (2) 由于$\alpha_n = n\cos in = n\cosh n$,

当$n\to\infty$时, $\alpha_n\to\infty$,

所以数列发散.

例2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛?

解 级数满足必要条件, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0,$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n}$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)-i(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,

原级数仍发散 .

例3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$,

所以由正项级数的比值判别法知:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,

故原级数收敛, 且为绝对收敛.

例4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛,

故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.

四、小结与思考

通过本课的学习, 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件;理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质.

思考题

如果复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 均发散，问：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$ 也发散吗？

思考题答案

否.