第七章：离散时间系统的时域分析

汪彦婷
西北工业大学 软件学院
Email: yantingwang@nwpu.edu.cn

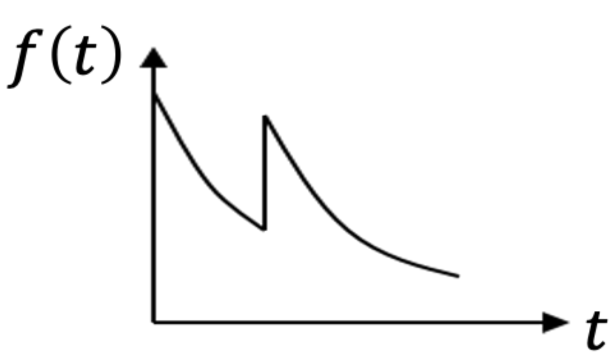
本章内容

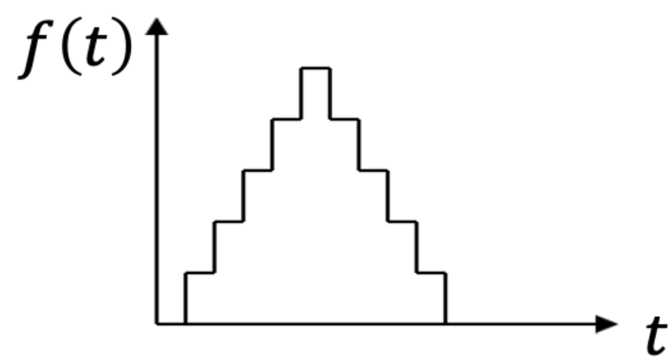
- 7.1 引言
- 7.2 抽样信号与抽样定理
- 7.3 离散时间系统的描述和模拟
- 7.4 离散时间系统的零输入响应
- 7.5 离散时间系统的零状态响应及全响应
- 7.6 离散时间系统与连续时间系统时域分析法比较

7.1 引言

■ 连续时间信号

- 在连续的时间范围内($-\infty<t<\infty$）有定义的信号称为连续时间信号，简称连续信号。实际中也常称为模拟信号。
- 这里的“连续”指函数的定义域—时间是连续的，但可含间断点，至于值域可连续也可不连续。

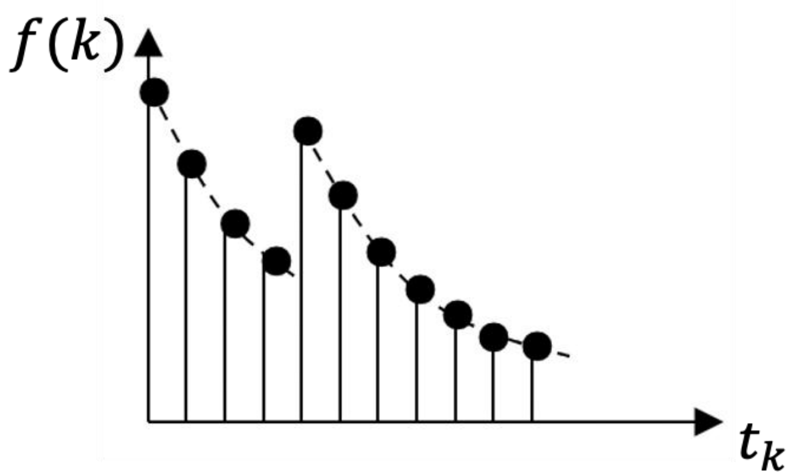




7.1 引言

■ 离散时间信号

- 仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。实际中也称数字信号（幅度离散）。
- 这里的“离散”指信号的定义域—时间是离散的，它只在某些规定的离散瞬间t_k有函数值，其余时间无定义。
- 相邻离散点的间隔可相等也可不等。通常取等间隔T，离散信号可表示为$f(kT)$，简写为$f(k)$。这种等间隔的离散信号也常称为序列。k称为序号。



注：简写忽略了时间间隔，更具一般性。

7.1 引言

■ 连续信号与离散信号关系

- 连续信号（模拟信号）可转换成离散信号（数字信号），从而可以用离散时间系统（DSP系统）进行处理；
- 为什么要进行模数转换？
  - ✓ 计算机、数字电路或者数字信号处理器只能处理离散时间序列；
  - ✓ 离散处理方式可以得到连续时间系统难以达到的效果，如抗干扰能力、高精度等。

■ 离散信号的表示形式

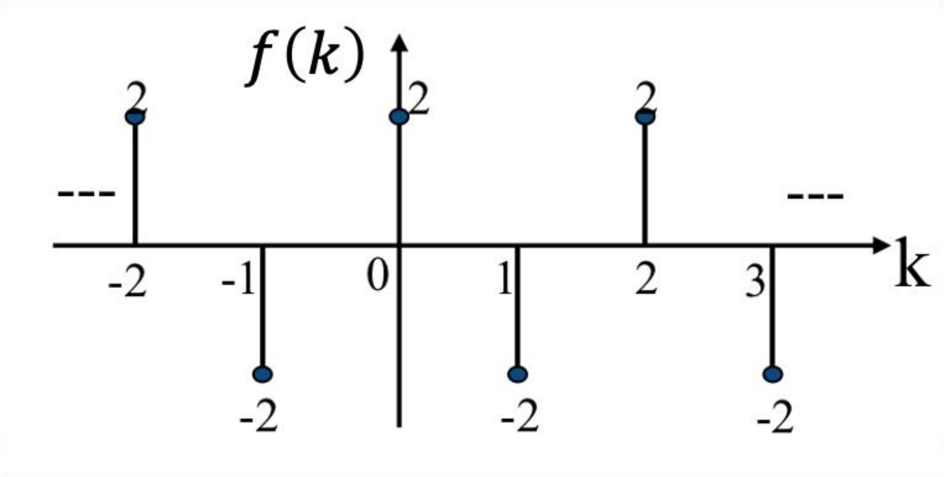
➢ 解析式（函数形式）：

例： $f(k)=2(-1)^k, k=0,\pm 1,\pm 2\cdots$

➢ （有序）数列形式：

例： $f(k)=\{\cdots-2,\underset{k=0}{2},-2,\cdots\}$

➢ 图形表示：

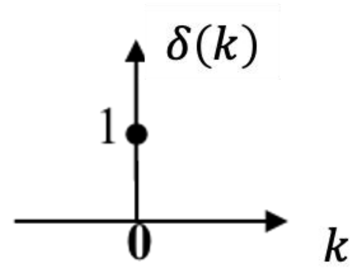


7.1 引言

■ 典型的离散时间信号

➢ 单位函数（单位样值函数）

$$\delta(k)=\begin{cases}1, k=0\\0, k\neq 0\end{cases}$$



✓ 注意：虽然单位函数使用了和冲激函数一样的符号$\delta(\cdot)$，但是定义完全不同。

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, t=0\\ \ 0,\ t\neq 0\end{cases}$$

$\delta(k)$不是$\delta(t)$抽样之后的函数！

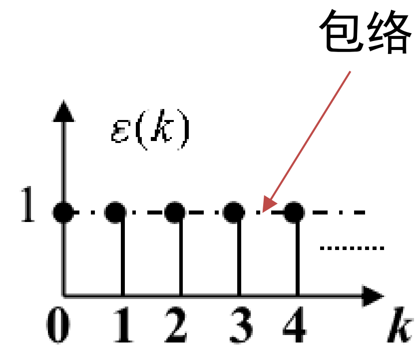
✓ 该函数与冲激函数$\delta(t)$有着相似的性质。比如：

$$f(k)\delta(k)=f(0)\delta(k)$$
$$f(k)\delta(k-k_0)=f(k_0)\delta(k-k_0)$$

■ 典型的离散时间信号

➢ 单位阶跃函数

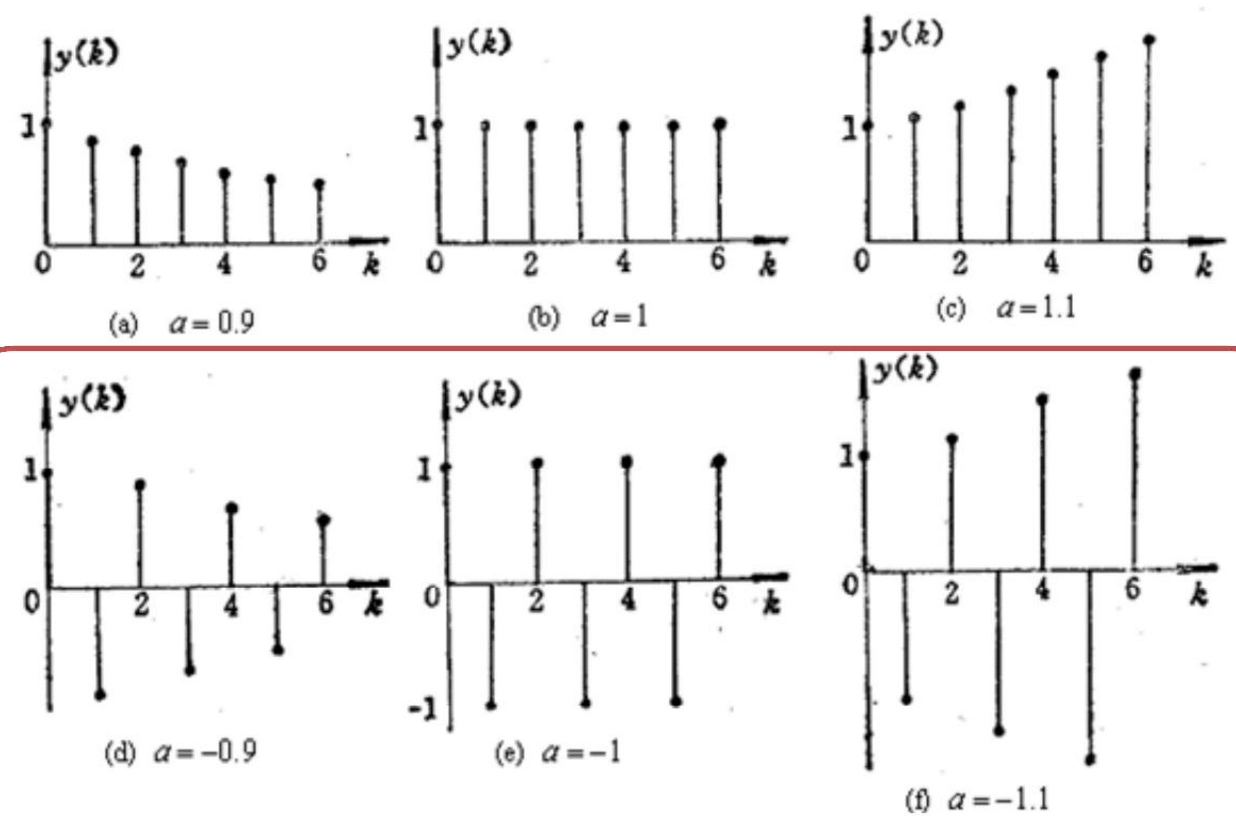
$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1, k\geq 0\\0, k<0\end{cases}$$



- ✓ 该函数是连续时间信号中阶跃函数$\varepsilon(t)$抽样后的函数；
- ✓ 该函数与$\varepsilon(t)$类似，可用它产生或表示单边信号（这里是单边序列）。

■ 典型离散时间信号

➢ 单边指数序列　　$\varepsilon(k)=a^k\varepsilon(t)$



Q：和单边连续指数函数 $e^{at}\varepsilon(t)$ 比较有何不同？

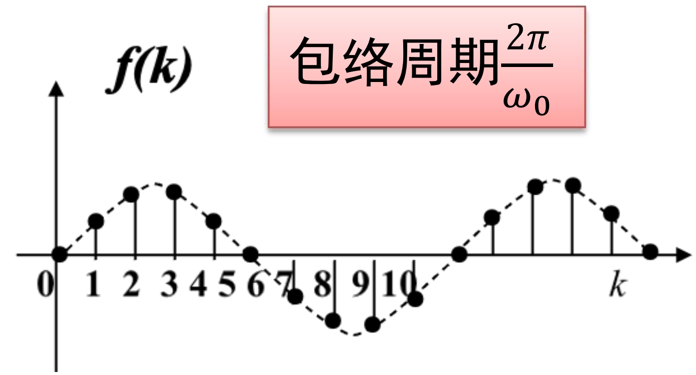
7.1 引言

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 典型离散时间信号

➢ 单边正（余）弦信号

$$f(k) = A\sin(k\omega_0 + \varphi)\,\varepsilon(k)$$



✓ 周期性条件:

$$f(k) = \sin(k\omega_0) = sin(k\omega_0 + 2m\pi) = sin\left(\omega_0\left(k + \boxed{m\frac{2\pi}{\omega_0}}\right)\right)$$

核心：若$m\frac{2\pi}{\omega_0} = nK$成立，则$K$为$f(k)$周期。

- 当$\frac{2\pi}{\omega_0}$为整数时，正（余）弦序列具有周期性，周期为$\frac{2\pi}{\omega_0}$；
- 当$\frac{2\pi}{\omega_0}$为有理数而非整数时，如$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{M}$($M, N$是没有公因子的整数)，正（余）弦序列具有周期性，周期为$M\frac{2\pi}{\omega_0}$；
- 当$\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数时，正（余）弦序列不具有周期性！

7.1 引言

■ 离散时间信号的基本运算

- 加法：$f(k)=f_1(k)+f_2(k)$ --- 序号相同的样值相加；
- 乘法：$f(k)=f_1(k)f_2(k)$ --- 序号相同的样值相乘；
- 标量乘法：$f(k)=af_1(k)$
  - ✓ $a=-1$（反褶）将 $f(k)$ 的图形以纵轴为对称轴翻转；
- 移序：$f(k)=f_1(k-n)$
  - ✓ 当$n>0$，信号右移（后移） ------- 减序；
  - ✓ 当$n<0$，信号左移（前移） ------- 增序；
  - ✓ 离散信号的移序计算相当于连续信号的平移计算，但在性质上与连续时间系统中的微分特性更加相似。（from Z变换性质）

7.1 引言

例：已知

$$x(k)=\begin{cases}0.5 & (k=-1)\\ 1.5 & (k=0)\\ 1 & (k=1)\\ -0.5 & (k=2)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$

求 $y(k)=x(k)+2x(k)x(k-2)$ 。

解:

$$x(k-2)=\begin{cases}0.5 & (k=1)\\ 1.5 & (k=2)\\ 1 & (k=3)\\ -0.5 & (k=4)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$

$$2x(k)x(k-2)=\begin{cases}1 & (k=1)\\ -1.5 & (k=2)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$

$$y(k)=\begin{cases}0.5 & (k=-1)\\ 1.5 & (k=0)\\ 2 & (k=1)\\ -2 & (k=2)\\ 0 & k\text{为其它值}\end{cases}$$

线性移不变离散时间系统

- 如果一个系统激励和响应信号都是离散时间函数，该系统就是离散时间系统。
- 线性离散时间系统：系统的激励和响应之间满足齐次性和叠加性关系的离散时间系统。

线性: 若 $e_1(k) \to y_1(k)$, $e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1e_1(k) + c_2 e_2(k) \to c_1y_1(k) + c_2 y_2(k)$

- 移不变离散时间系统：系统的激励和响应之间满足移不变关系的离散时间系统。

移不变：若 $e_1(k) \to y_1(k)$　　则 $e_1(k-i) \to y_1(k-i)$

- 线性移不变离散时间系统：同时满足线性和移不变特性。

线性移不变系统：若 $e_1(k) \to y_1(k)$, $e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1e_1(k-i) + c_2 e_2(k-j) \to c_1y_1(k-i) + c_2 y_2(k-j)$

本章内容

7.2 抽样信号与抽样定理

信号处理过程:

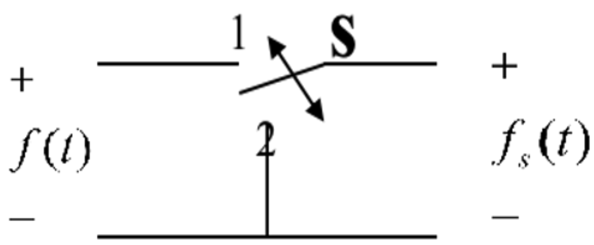
- 离散信号可以通过对连续信号抽样所得：连续信号可以通过抽样转化为离散信号，从而利用离散时间系统进行处理。这里，涉及关键问题：

  ✓ 用什么方法抽样？（“分时测量”思想，数学上？）
  ✓ 如何抽样才能不损失原来信号中的信息？（类比画图）

7.2 抽样信号与抽样定理

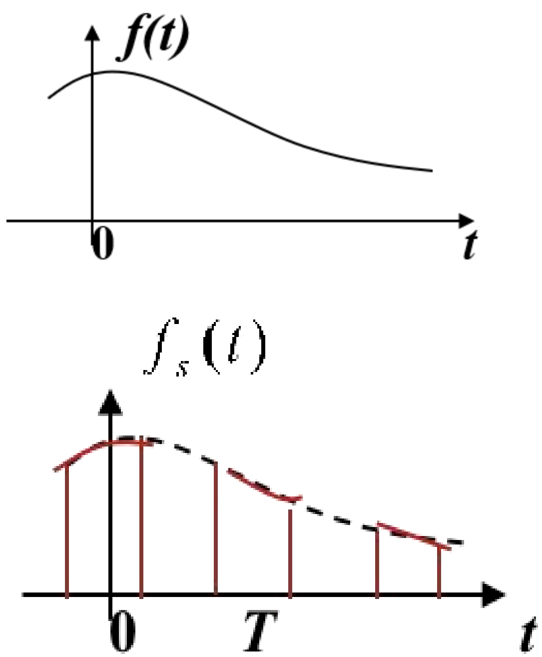
■ 抽样器

➢ 抽样：通过一定的装置（等间隔地）从连续时间信号$f(t)$中“抽取”一系列离散样本值的过程。



抽样器示意

- 单刀双置开关，在特定时间点接通1，其他时间置于2；
- 开关持续时间要短，以保证测的数据保持不变；



经过抽样所得的信号称为**抽样信号**$f_s(t)$。

■ 抽样过程的数学模型

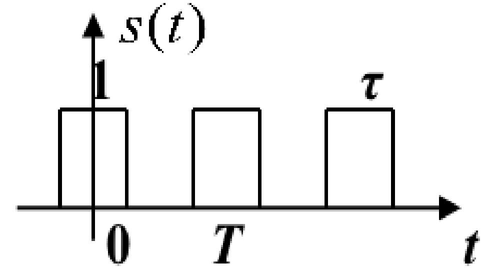
➢ 抽样过程的数学模型：

$$f_s(t) = f(t)s(t)$$

其中，$s(t)$为抽样（开关）函数：

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_\tau(t - kT)$$

抽样间隔



✓ 当$\tau \to 0$时，开关函数可近似为：

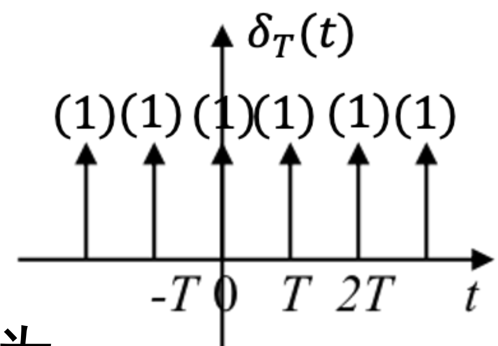
$$\lim_{\tau\to 0} s(t) = \lim_{\tau\to 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \lim_{\tau\to 0} \tau\delta_T(t)$$

幅度无穷小的周期性冲激序列

7.2 抽样信号与抽样定理

- 无穷小会给分析带来不便，一般情况下，我们用幅度为1的周期性冲激序列代替它，即：

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\delta_T(t)$$



- 这样，抽样后的信号（称理想抽样信号）为：

$$f_s(\;\cdots\;\sum^{+\infty}$$

思考：$f_s(t)$是否损失信息？何种条件下，可以从$f_s(t)$不失真的恢复出原信号$f(t)$呢？

$$=\sum_{k=-\infty}f(t)\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

- 抽样后的信号是一系列脉冲，脉冲值仅和原信号在某些离散时间点（kT点）上的取值有关系。
- $f(t)$ -- $f_s(t)$ -- $f(k)$

7.2 抽样信号与抽样定理

■ 信号抽样过程

$$f_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-kT)$$

$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$：抽样（角）频率；
T：抽样周期（间隔）

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\omega_s\delta(\omega-k\omega_s)$$

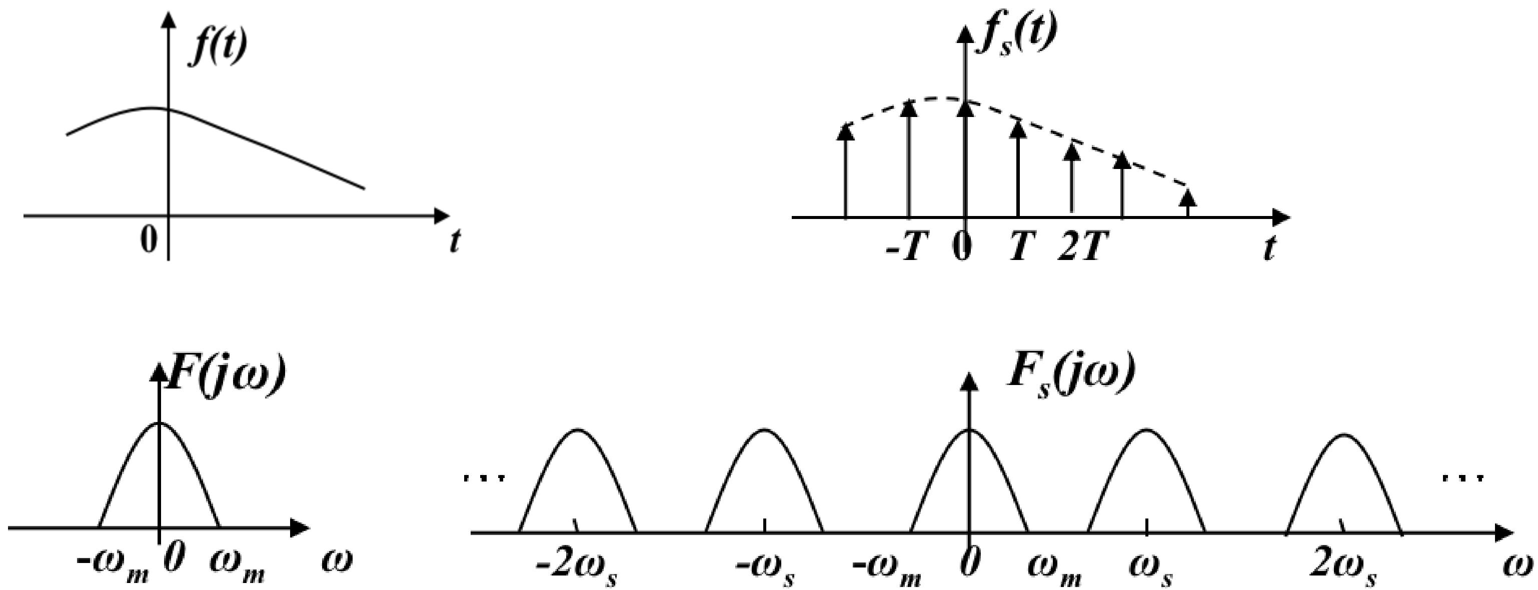
$$=\frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(j\omega)*\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(j\omega)*\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$=\boxed{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(j(\omega-k\omega_s))}$$

✓ 抽样后的信号频谱是原信号频谱按照抽样角频率周期化的结果！

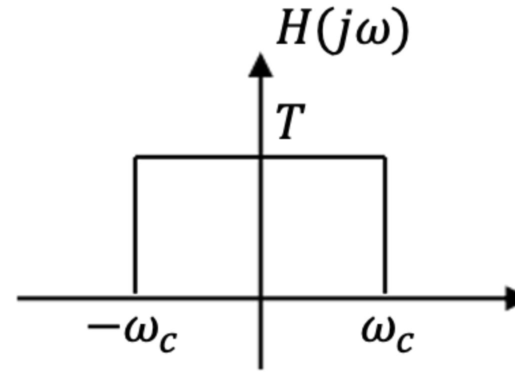
■ 信号抽样过程



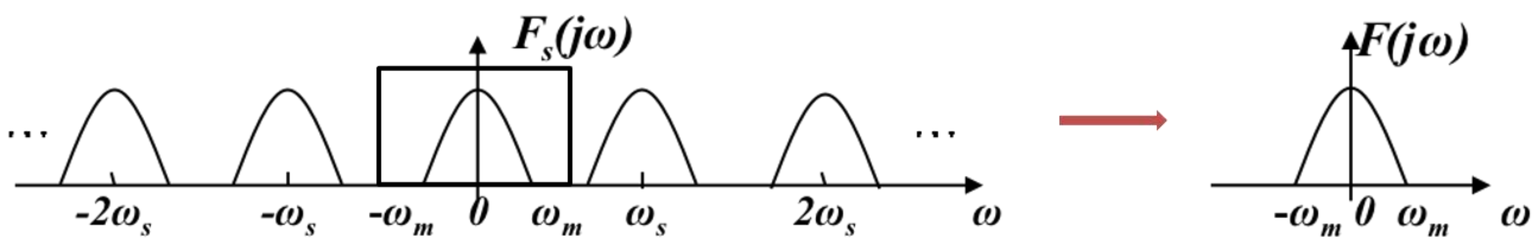
➢ 如果原来信号的最大频率分量为ω_m（频谱有限），并且抽样频率满足$\omega_s \geq 2\omega_m$，那么周期化后的各个频谱就不会混叠；

■ 信号恢复过程

➢ 将抽样信号$f_s(t)$通过一个截止频率为$\omega_c\ (\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m)$、增益为$T$的理想低通滤波器（Ideal Low-Pass Filter, ILPF），就可以不失真的复原出原信号。（通常取$\omega_c = \omega_s/2$）



理想低通滤波器



➢ ILPF的冲激响应$h(t) = T\dfrac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$，通过ILPF输出为：

$$f(t) = T\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\,\mathrm{Sa}(\omega_c(t-kT))$$

7.2 抽样信号与抽样定理

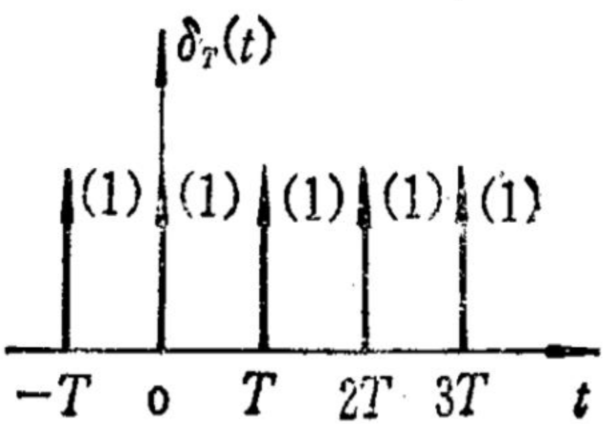
Nyquist抽样定理（Shannon抽样定理）

- 模拟信号可以<u>有条件</u>的由其无数个离散点上的数值恢复出来，即当1）模拟信号$f(t)$的信号频谱是有限的，并且2）以$\omega_s \geq 2\omega_m$进行抽样时，用该模拟信号的一些离散时间点上的数值来代替这个信号，可以不损失任何信息。

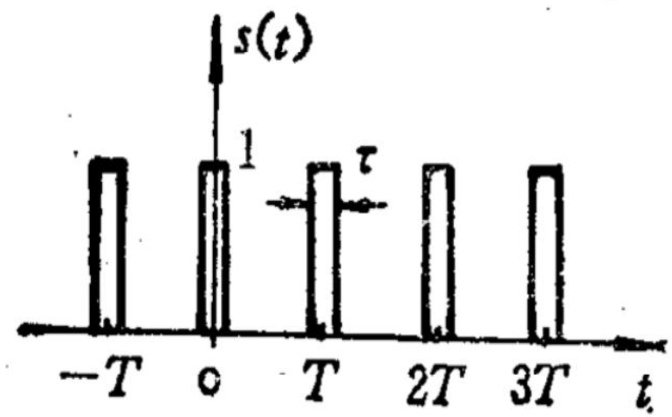
- 能够完全不失真的还原（重建）原连续信号所需的最小抽样频率$\omega_s = 2\omega_m$称为Nyquist抽样频率，或Shannon抽样频率。

■ 实际中的问题

- 信号抽样时：实际工程中，做法与抽样过程恰好相反。首先，测量得到$f(kT)$，然后再构造抽样信号。工程上的采样就是指测量到kT时刻的信号值。
- 构造抽样信号时，没办法产生冲激信号，多用任意**周期性脉冲信号**代替。



单位冲激序列

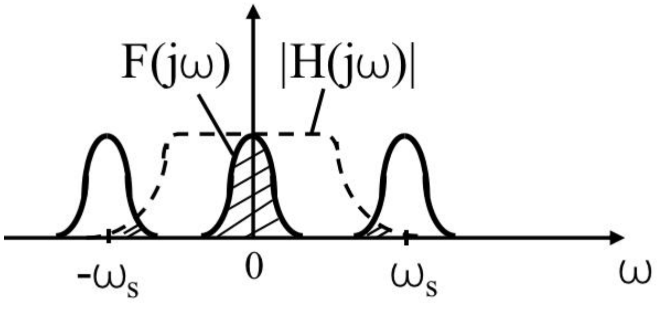


周期性脉冲信号

7.2 抽样信号与抽样定理

■ 实际中的问题

➢ 信号恢复时：ILPF是不可能实现的，只能用LPF，所以抽样频率必须进一步增加，通常取ω_m的3~5倍。



➢ 思考：对于带限信号，必须保证$\omega_s \geq 2\omega_m$才可以无失真恢复吗？

不失真的本质是周期化后的频谱不混叠！ref带限取样，窄带取样。

按照$\omega_s \geq 2\omega_m$抽样，一定可以无失真的恢复原信号；有时，依据信号特点，也可选择低于$2\omega_m$的抽样频率，同样实现无失真！

本章内容

7.3 离散时间系统的描述

- 离散时间系统描述方法
  - 数学模型 → 差分方程
  - 物理模型 → 框图
  - 系统函数 → *Z*变换 （Ch.8介绍）

7.3 离散时间系统的描述

■ 数学模型：差分方程

- 离散时间系统是处理离散时间信号的系统，因为离散信号只在若干时间点上存在，因此，不存在微分，系统也就无法用微分方程来进行描述；

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- 类似微分的思想，采用差分方程来描述离散信号相邻几个时间点之间的关系。

7.3 离散时间系统的描述

■ 数学模型：差分方程

例：人口问题：出生率为a，则第k年的人口$y(k)$和下一年人口数$y(k+1)$之间的关系。

解：$y(k+1)=(1+a)y(k)$ ← 前向（预测）形式

$y(k)=\frac{1}{1+a}y(k+1)$ ← 后向（滤波）形式

$y(k+1)-(1+a)y(k)=0$ ← 一般差分方程

$$\boxed{y(k)=(1+a)^k y(0)}$$

注：差分方程也可加激励，如每年引入人口$x(k)$，则

$$y(k+1)=(1+a)y(k)+x(k)$$

$$y(t)'-(1+a)y(t)=x(t)$$

离散时间信号的移序和连续时间信号微分性质相似！

■ 数学模型：差分方程

例：（Fibonacci）斐波那契数列问题：假设每对大兔子每个月生一对小兔子，而每一对小兔子一个月后才长成大兔子，而且不会死亡。在最初一个月内有一对小兔子，问第k个月时有多少对兔子。

解：假设$y(k)$代表第k个月兔子的总对数，那么：

1）这$y(k)$对兔子一定在$k+2$月生$y(k)$对小兔子，即$k+2$月必然有$y(k)$对小兔子；

2）除了小兔子，$k+1$月的兔子$y(k+1)$必然都长成了大兔子；

所以，$k+2$月的兔子总对数可以表示为：

$$y(k+2)=y(k)+y(k+1)$$

■ 数学模型：差分方程

➢ 差分方程的一般形式（增序形式）

$$a_n r(k+n) + a_{n-1} r(k+n-1) + \cdots a_1 r(k+1) + a_0 r(k)$$
$$= b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \cdots b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

或
$$\sum_{i=0}^{n} a_i r(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j e(k+j)$$

✓ 差分方程在形式上与微分方程类似，只不过微分变成了移序；

✓ 差分方程也有阶数，定义为差分方程中最大移序与最小移序之差；

$$\left.\begin{aligned} y(k+2) &= y(k) + y(k+1) \\ y(k+5) &= y(k+3) + y(k+4) \end{aligned}\right\}$$

相同阶数！

7.3 离散时间系统的描述

数学模型：差分方程

➢ 减序形式：

$$a_n r(k-n) + a_{n-1} r(k-n+1) + \cdots a_1 r(k-1) + a_0 r(k)$$
$$= b_m e(k-m) + b_{m-1} e(k-m+1) + \cdots b_1 e(k-1) + b_0 e(k)$$

注：增序和减序形式可以相互转化 （这两个公式里系数不同）

例:（Fibonacci）斐波那契数列问题：

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

其减序形式为：

$$y(k) - y(k-1) - y(k-2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y(k-2) + y(k-1) - y(k) = 0$$

7.3 离散时间系统的描述

数学模型：差分方程

- 求解差分方程同样需要初始条件，初始条件的个数必须等于差分方程的阶数；
- 类似连续时间系统中的结论，线性移不变离散时间系统可以用一个常系数差分方程描述；
- 差分方程可以很方便的用计算机求数值解。所以，很多微分方程可以近似为差分方程，求近似数值解。

7.3 离散时间系统的描述

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 物理模型：框图

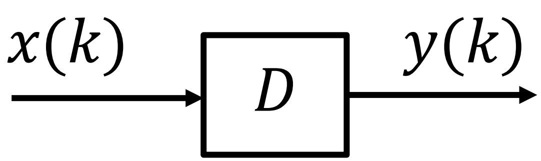
- ➢ 框图：用基本运算单元的组合来实现微分（差分）方程或系统函数所描述的线性系统；
- ➢ 作用：为实现系统提供基础；
  便于对系统特性进行深入研究；

- ➢ 要求掌握：
  - ✓ 依据差分方程画框图；
  - ✓ 根据框图写出差分方程；

7.3 离散时间系统的描述

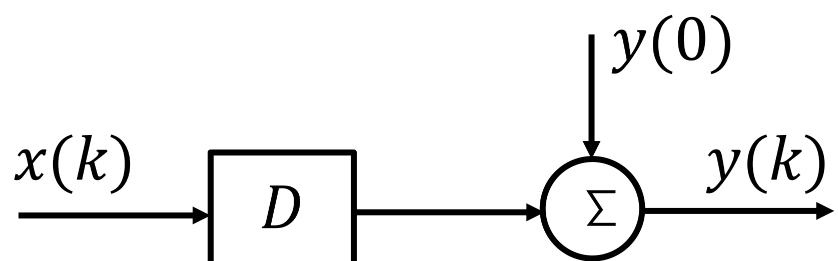
■ 物理模型：框图

- 实际应用中，很难从物理上直接观察到离散时间系统，它往往是人工用框图或利用框图原理用软件构成的；
- 基本运算单元有加法器、标量乘法器、和延时（移序）器。



$$y(k) = x(k-1)$$

(a) 初始状态为零



$$y(k) = x(k-1) + y(0)$$

(b) 初始状态不为零

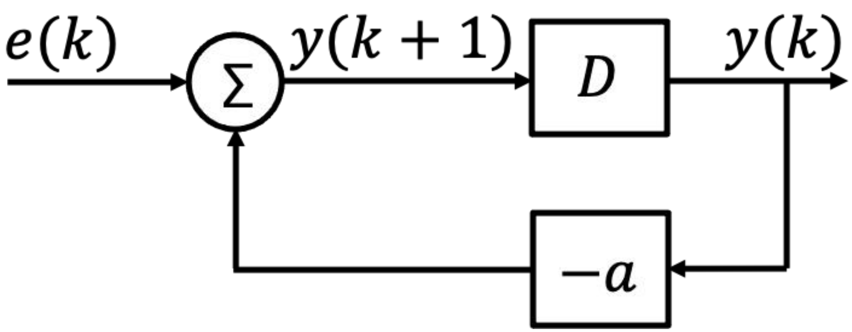
- 离散时间系统框图构成与连续时间系统非常相似，只不过将里面的积分器换成了延迟器。

■ 物理模型：框图

➢ 简单一阶离散时间系统

$$y(k+1) + ay(k) = e(k)$$

$$\longrightarrow\ y(k+1) = e(k) - ay(k)$$



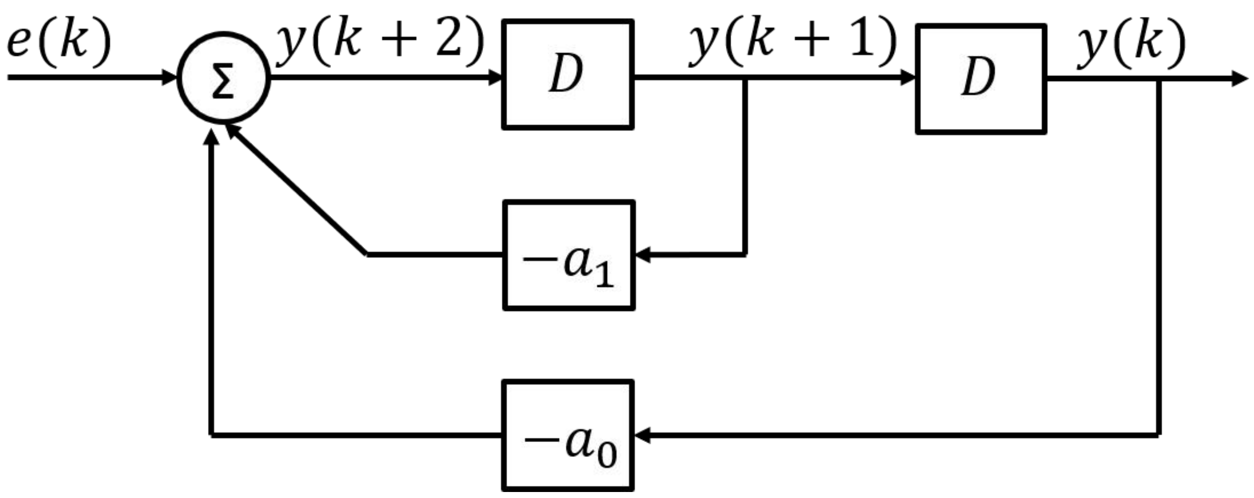
简单一阶离散时间系统的模拟框图

■ 物理模型：框图

➢ 简单二阶离散时间系统

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=e(k)$$

$$\longrightarrow y(k+2)=e(k)-a_1y(k+1)-a_0y(k)$$

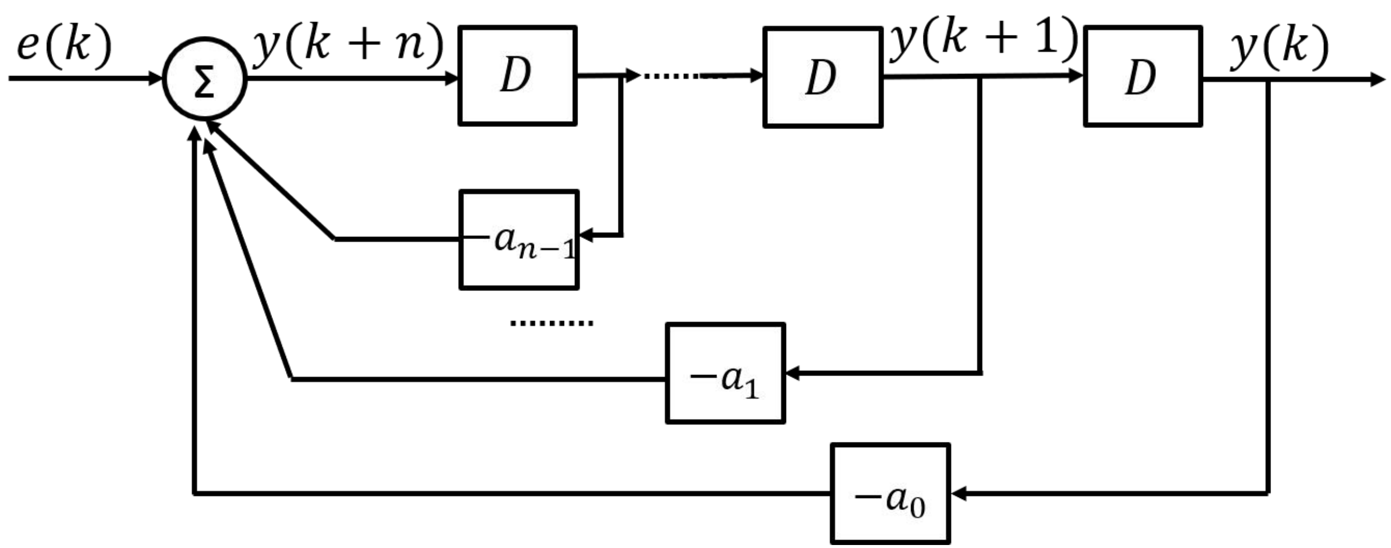


简单二阶离散时间系统的模拟框图

■ 物理模型：框图

➢ 简单 n 阶离散时间系统

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = e(k) \quad \dashrightarrow \quad y(k+n) = e(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y(k+i)$$



简单n阶离散时间系统的模拟框图

7.3 离散时间系统的描述

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 物理模型：框图

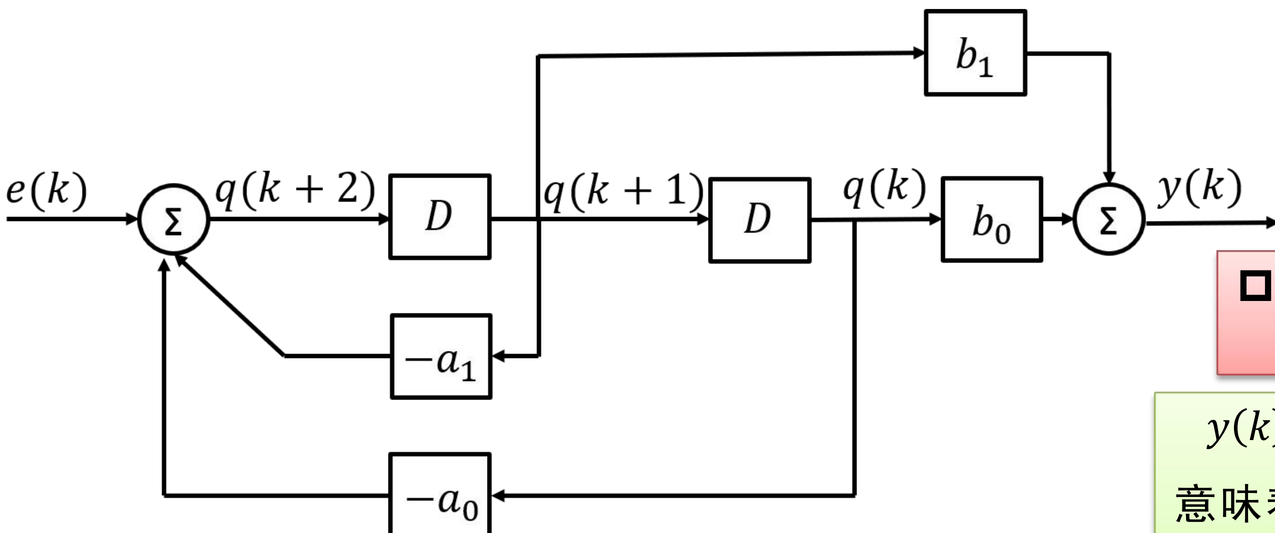
$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, e(k+j)$$

➢ 二阶离散时间系统

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

假设： $y(k) = b_1 q(k+1) + b_0 q(k)$

则： $q(k+2) + a_1 q(k+1) + a_0 q(k) = e(k)$



二阶离散时间系统的模拟框图

□ 注意：因果离散时间系统要求$m \leqslant n$；

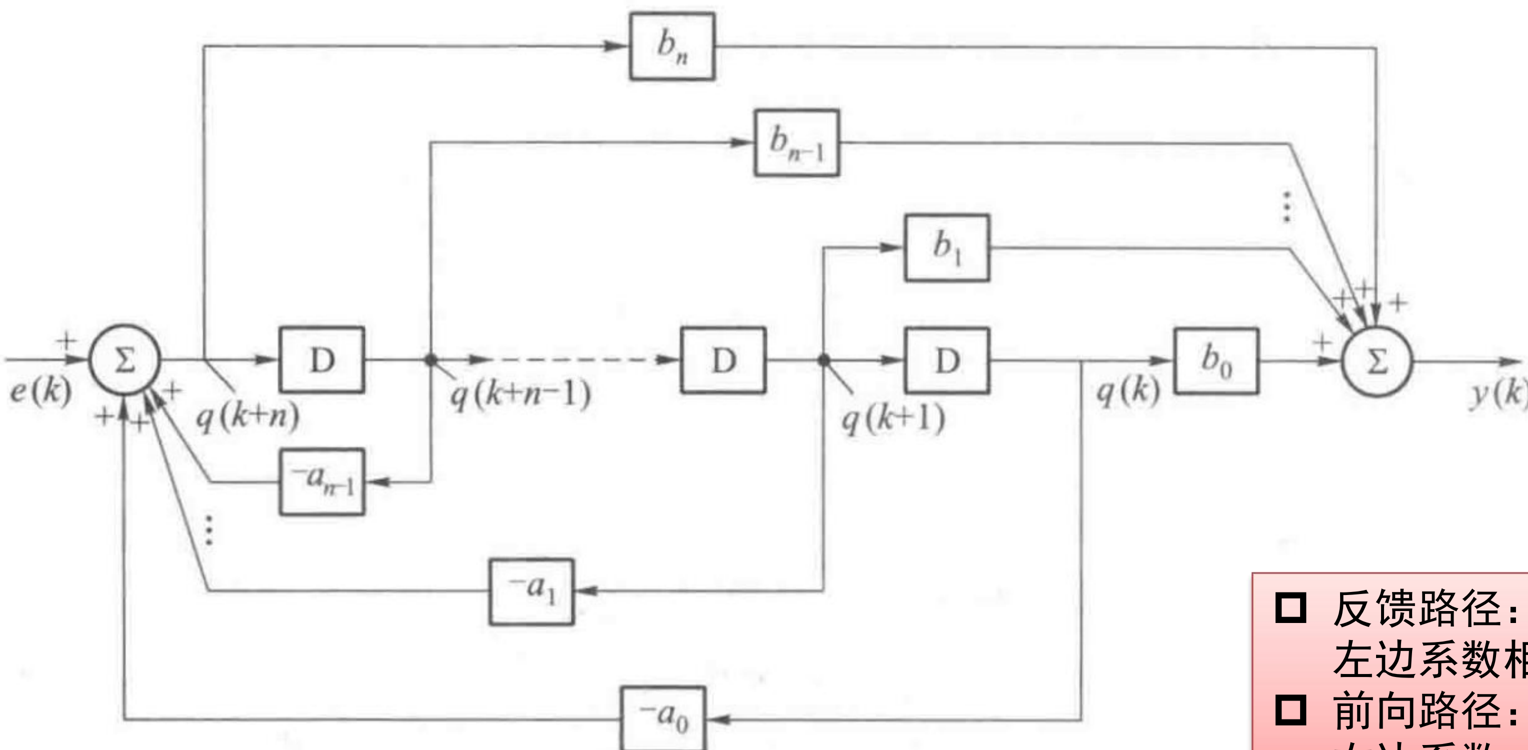
$$y(k) = b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

意味着：k时刻的响应依赖于$k+1$时刻的激励，这违背了因果性！

物理模型：框图

- n 阶离散时间系统

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j e(k+j)$$



n阶离散时间系统的模拟框图

- 反馈路径：差分方程左边系数相反数；
- 前向路径：差分方程右边系数；

7.3 离散时间系统的描述

■ 根据差分方程画框图

- 增序；
- 几阶系统就需要几个延迟器；

练习：7-14、7-15

7.3 离散时间系统的描述

■ 依据框图写出系统差分方程

- ➢ 依据方框写状态量；
- ➢ 根据加法器写方程；

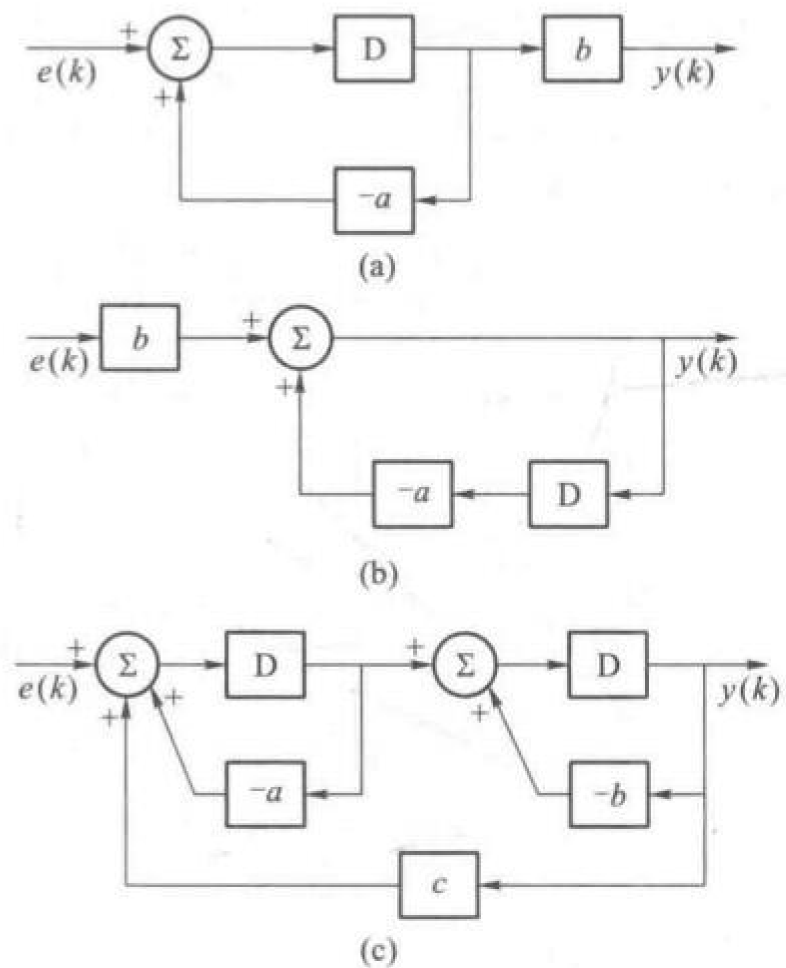


图 P7-13

本章内容

◈7.1 引言
◈7.2 抽样信号与抽样定理
◈7.3 离散时间系统的描述和模拟
◈7.4 离散时间系统的零输入响应
◈7.5 离散时间系统的零状态响应及全响应
◈7.6 离散时间系统与连续时间系统时域分析法比较

7.4 离散时间系统的零输入响应

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 差分方程的解法

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, e(k+j)$$

➢ 经典法

- ✓ 将解分为通解（系统带来）和特解（输入信号带来）；
- ✓ 优点：物理概念清晰，可以得到全部解；
- ✓ 缺点：特解有时难以求解，不实用；

➢ 近代时域法 重点掌握

- ✓ 将解分为零输入响应$r_{zi}(k)$和零状态响应$r_{zs}(k)$；
- ✓ 对于零输入响应$r_{zi}(k)$，采用经典法求解；
- ✓ 对于零状态响应$r_{zs}(k)$，采用卷积和求解。

➢ 变换域法

- ✓ Z变换（见Ch. 8），相当于连续时间系统中的LT变换法；
- ✓ 频域分析法；

■ 差分方程的解法

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, e(k+j)$$

➢ 数值求解法（迭代方法）

✓ 利用前向预测形式的差分方程，通过迭代计算的方法，得到数值解。

✓ 优点：利于计算机实现；

✓ 缺点：无法得到通式。

例：（Fibonacci）斐波那契数列

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

已知$y(0) = 0$，$y(1) = 1$，那么可得

$$y(2) = 1 \rightarrow y(3) = 2 \rightarrow y(4) = 3 \rightarrow y(5) = 5 \cdots$$

■ 差分方程的算子表示法

➢ 引入移位算子S:

$$Sy(k) = y(k+1)$$
$$S^n y(k) = y(k+n)$$
$$S^{-1} y(k) = y(k-1)$$

则差分方程的一般形式，如下

$$a_n r(k+n) + a_{n-1} r(k+n-1) + \cdots a_1 r(k+1) + a_0 r(k)$$
$$= b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \cdots b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

可以简单记为：

$$a_n S^n r(k) + a_{n-1} S^{n-1} r(k) + \cdots a_1 S r(k) + a_0 r(k)$$
$$= b_m S^m e(k) + b_{m-1} S^{m-1} e(k) + \cdots b_1 S e(k) + b_0 e(k)$$

$$r(k) = \boxed{\frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots a_1 S + a_0}} e(k)$$

■ 差分方程的算子表示法

➢ 定义离散时间系统的转移算子$H(S)$:

$$H(S)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1S+b_0}{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots a_1S+a_0}=\frac{N(S)}{D(S)}$$

则差分方程可进一步简写为:

$$r(k)=H(S)e(k)$$

✓ 当$a_n=1$时，转移算子$H(S)$为:

$$H(S)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1S+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots a_1S+a_0}$$

$H(S)$与$H(p)$作用类似: $H(p)$与$H(s)$; $H(S)$与$H(z)$

■ 零输入响应$r_{zi}(k)$的求解方法

➢ $r_{zi}(k)$对应齐次差分方程，即：

$$r_{zi}(k+n)+a_{n-1}r_{zi}(k+n-1)+\cdots a_1 r_{zi}(k+1)+a_0 r_{zi}(k)=0$$

➢ 一阶系统

$$r_{zi}(k+1)+a_0 r_{zi}(k)=0 \longleftrightarrow Sr_{zi}(k)+a_0 r_{zi}(k)=0$$

假设： $r_{zi}(0)$已知，则：

$r_{zi}(1)=-a_0 r_{zi}(0)$；

$r_{zi}(2)=(-a_0)^2 r_{zi}(0)$；

…

$\therefore r_{zi}(k)=(-a_0)^k r_{zi}(0)$

系统特征方程为：

$$S+a_0=0$$

其特征根v_1为$-a_0$。

区别1：指数&底

对比观察，猜想一般差分方程的零输入响应具有如下形式：

$$r_{zi}(k)=C_1 {v_1}^k+C_2 {v_2}^k+\cdots$$

7.4 离散时间系统的零输入响应

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 零输入响应$r_{zi}(k)$的求解方法

➢ n 阶系统

$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots a_1 S + a_0}$$

Step1：求特征方程的根，即$H(S)$的分母多项式$D(S) = 0$的根v_1、 v_2、⋯ v_n；

Step2：根据特征根，确定$r_{zi}(k)$的形式解：

✓ 若没有重根，则

$$r_{zi}(k) = \left[C_1 {v_1}^k + C_2 {v_2}^k + \cdots + C_n {v_n}^k\right]\varepsilon(k)$$

✓ 若有重根，如v_1是m重根，则$r_{zi}(k) =$

$$\left[(C_1 + C_2 k + \cdots + C_m k^{m-1}){v_1}^k + C_{m+1} {v_{m+1}}^k + \cdots + C_n {v_n}^k\right]\varepsilon(k)$$

（其他情况类推）

- 零输入响应$r_{zi}(k)$的求解方法

Step3：带入初始条件，确定$r_{zi}(k)$形式解中的待定系数：

✓ 对于一般差分方程，初始条件为$r_{zi}(0)$~$r_{zi}(n-1)$，代入形式解中，可得n元一次线性方程组，求解即可得到待定系数，从而得到$r_{zi}(k)$。

例 1 ： 已 知 $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+2)$ ，$y_{zi}(0)=1$，$y_{zi}(1)=4$，求$y_{zi}(k)$ 。

例2：求解Fibonacci数列：$y(k+2)-y(k+1)-y(k)=0$的零输入响应，初始条件$y(0)=0$，$y(1)=1$。

例3：已知$y(k+2)+4y(k+1)+4y(k)=0$，初始条件$y(0)=y(1)=2$，求$y_{zi}(k)$ 。

■ 特征根与系统稳定性

➢ 稳定性：系统的响应不随着$k \to +\infty$而趋于无穷大，而是一个有限的值。这要求系统零输入响应中的各个分量都应该随着$k \to +\infty$有限。

✓ 当$|v| < 1$时，$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} |v|^k = 0 & \text{（单根），系统稳定；} \\ \lim\limits_{k\to\infty} k|v|^k = 0 & \text{（重根），系统稳定；} \end{cases}$

临界：零状态响应角度

✓ 当$|v| = 1$时，$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} |v|^k \equiv 1 & \text{（单根），系统临界稳定；} \\ \lim\limits_{k\to\infty} k|v|^k = \infty & \text{（重根），系统不稳定；} \end{cases}$

✓ 当$|v| > 1$时，$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} |v|^k = \infty & \text{（单根），系统不稳定；} \\ \lim\limits_{k\to\infty} k|v|^k = \infty & \text{（重根），系统不稳定；} \end{cases}$

■ 特征根与系统稳定性

➢ 特征根v是一个复数，在复平面（z平面）上表示为一个点；

$$v=|v|e^{j\varphi_v}\triangleq e^{(\alpha+j\beta)T}=e^{\alpha T}e^{j\beta T}$$

$$|v|=e^{\alpha T}\qquad \varphi_v=\beta T$$

$$v_1^k=e^{(\alpha+j\beta)Tk}=e^{\alpha Tk}(\cos\beta Tk+j\sin\beta Tk)$$

$$v_2^k=e^{(\alpha-j\beta)Tk}=e^{\alpha Tk}(\cos\beta Tk-j\sin\beta Tk)$$

v_1^k和v_2^k是变幅正弦序列

幅度： $e^{\alpha Tk}=|v|^k$

振荡（角）频率：$\beta=\dfrac{\varphi_v}{T}$

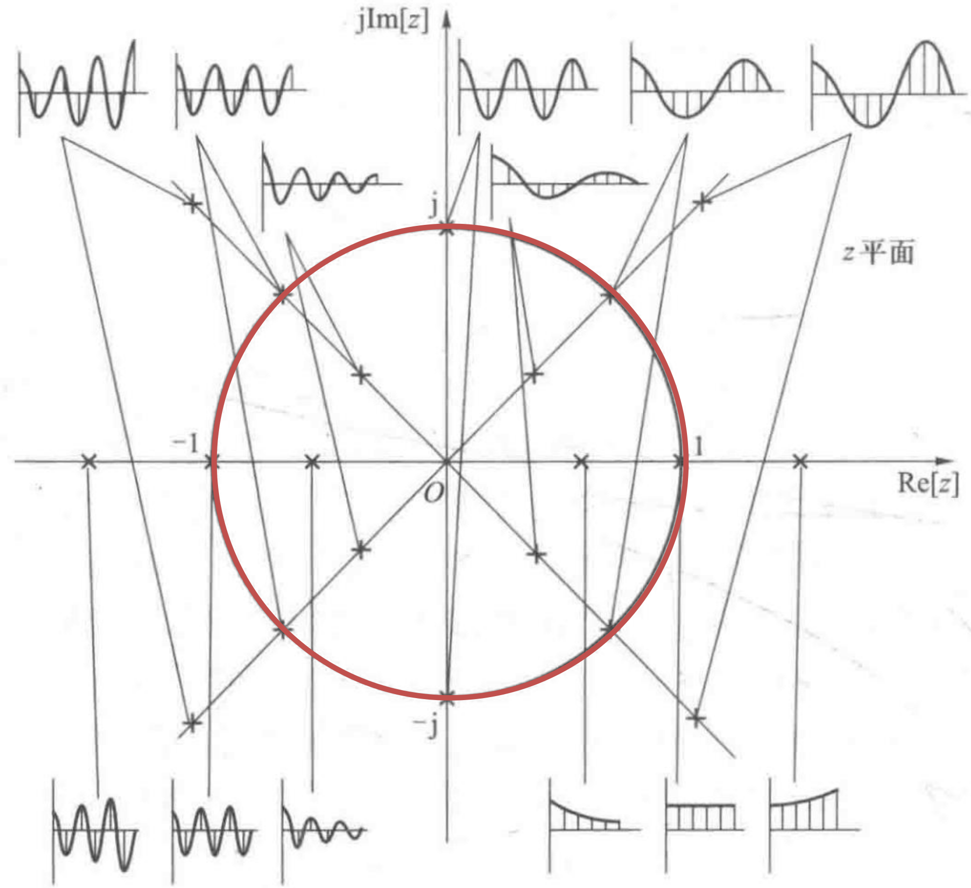
■ 特征根与系统稳定性

➢ 振幅： $e^{\alpha Tk} = |v|^k$

✓ $|v| < 1$，减幅振荡；
✓ $|v| = 1$，等幅振荡；
✓ $|v| > 1$，增幅振荡；

系统稳定性要求特征根全部在单位圆的内部，圆上的最多只能是单根。

区别2：线左&圆内



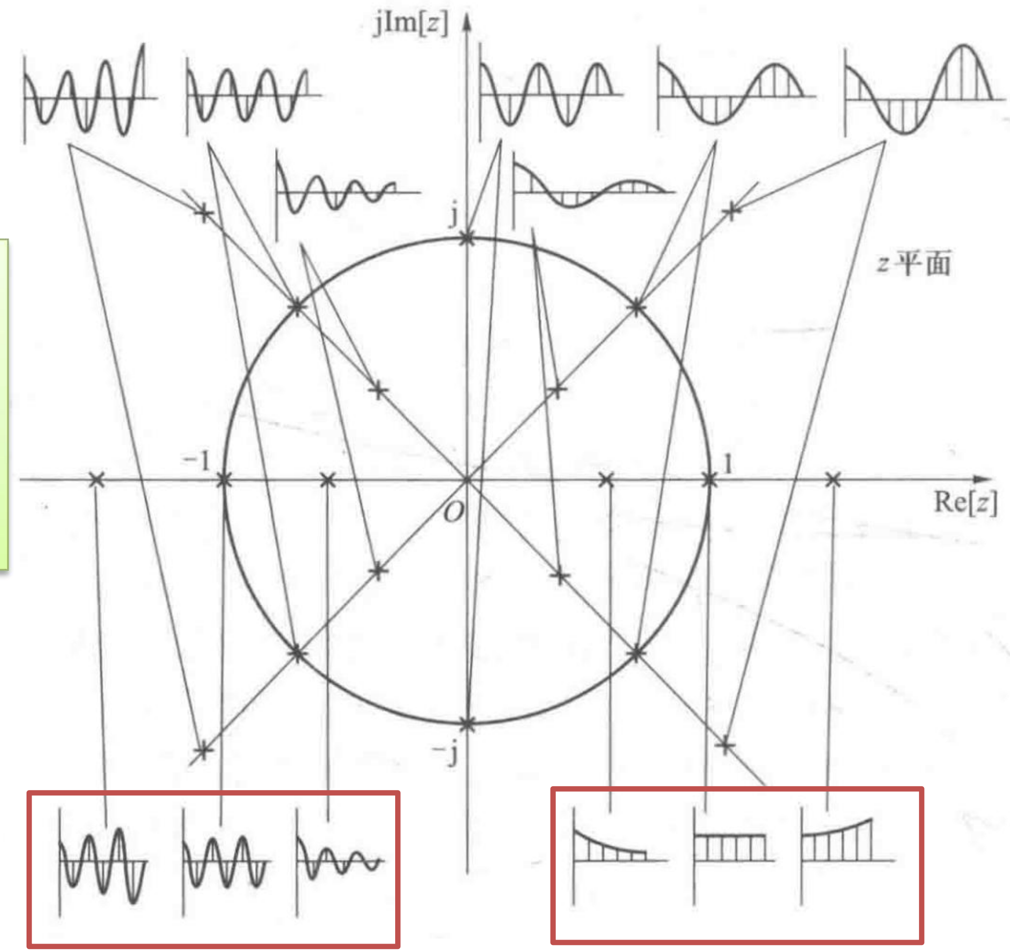
■ 特征根与系统稳定性

➢ 振荡（角）频率

$$\beta = \frac{\varphi_v}{T}$$

✓ v 在实轴上， $\varphi_v = 0$，无振荡；

✓ φ_v增大时，振荡变快；当$\varphi_v = \pi$，振荡最快。



本章内容

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY 西北工業大學

零状态响应$r_{zs}(k)$的解法

- 经典法：分通解和特解两部分求解；
- 时域卷积和法：类似连续时间系统中的卷积积分法；
- 变换域法：ZT，类似LT；

离散信号的时域分解

- 选用子信号$\delta(k)$，可将离散信号分解为：

$$e(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}e(i)\,\delta(k-i)$$

定义卷积和如下：

$$x(k)*y(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)\,y(k-i)$$

那么信号分解可表示为：

$$e(k)=e(k)*\delta(k)$$

■ $r_{zs}(k)$的求解

➢ 假设线性移不变系统对于$\delta(k)$的响应为$h(k)$，即

$$\delta(k) \rightarrow h(k)$$

单位函数响应

则：移不变性

$$\delta(k-i) \rightarrow h(k-i)$$

齐次性

$$e(i)\delta(k-i) \rightarrow e(i)h(k-i)$$

叠加性

$$\boxed{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(i)\delta(k-i)} \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(i)h(k-i)$$

只要知道系统的单位函数响应$h(k)$，通过卷积和计算，就可以获得系统对于任意信号的响应。

即，系统对于激励信号$e(k)$的响应$r_{zs}(k)$为：

$$r_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e(i)h(k-i) = e(k) * h(k)$$

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ $r_{zs}(k)$的求解

➢ 如果激励信号是有始信号，则上述卷积和可以简化为：

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)=\sum_{i=0}^{+\infty}e(i)h(k-i)$$

➢ 如果系统是因果系统，则上述卷积和可进一步简化为：

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)=\sum_{i=0}^{k}e(i)h(k-i)$$

求零状态响应：1）求单位函数响应$h(k)$；
2）计算卷积和！

7.5 离散时间系统的零状态响应

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

- 卷积和
  - 依据定义求

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

例： 求$a^k\varepsilon(k) * b^k\varepsilon(k)$

$$a^k\varepsilon(k) * b^k\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^i\varepsilon(i)\, b^{k-i}\varepsilon(k-i) = \left(\sum_{i=0}^{k} a^i\, b^{k-i}\right)\varepsilon(k)$$

$$= b^k\left(\sum_{i=0}^{k}(ab^{-1})^i\right)\varepsilon(k)$$

$$= \begin{cases} b^k\dfrac{1-(ab^{-1})^{k+1}}{1-ab^{-1}}\varepsilon(k) & a \neq b \\ b^k(k+1)\varepsilon(k) & a = b \end{cases}$$

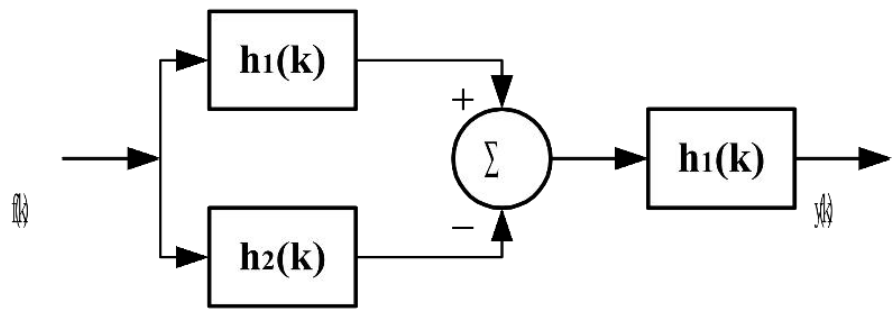
$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (1+k)\varepsilon(k)$

表7-1 卷积和表

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ 卷积和

例 如图复合系统由三个子系统组成，其中 $h_1(k) = \varepsilon(k)$， $h_2(k) = \varepsilon(k-5)$，求复合系统的单位序列响应h (k) 。



解 根据h(k)的定义，有

$$h(k)= [\delta(k)* h_1(k) -\delta(k)* h_2(k)]* h_1(k)$$
$$= [h_1(k) - h_2(k)]* h_1(k)$$
$$= h_1(k) * h_1(k) -h_2(k) * h_1(k)$$
$$= \varepsilon(k)* \varepsilon(k) - \varepsilon(k-5) *\varepsilon(k)$$
$$= (k+1)\varepsilon(k) - (k+1-5)\varepsilon(k-5)$$
$$= (k+1)\varepsilon(k) - (k-4)\varepsilon(k-5)$$

7.5 离散时间系统的零状态响应

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

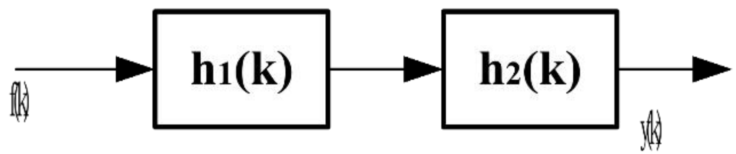
■ 卷积和

例 如图复合系统由两个子系统级联组成，其中

$h_1(k) = 2\cos(k\pi)$,

$h_2(k) = a^k\varepsilon(k)$,

激励$f(k)= \delta(k)–a\delta(k-1)$，求复合系统的零状态响应响应$y_f(k)$。



解

$$
\begin{aligned}
y_f(k) &= f(k) * h_1(k) * h_2(k) \\
&= 2\cos(k\pi)*[a^k\varepsilon(k)]*[\delta(k)–a\delta(k-1)] \\
&= 2\cos(k\pi)*[a^k\varepsilon(k) - a^k\varepsilon(k-1)] \\
&= 2\cos(k\pi)*\delta(k) \\
&= 2\cos(k\pi)
\end{aligned}
$$

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ 卷积和

- 数值解法：1）图解法；2）多项式乘法；3）阵列法

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： k换为 i →得 $x(i)$， $y(i)$

（2）反转平移：由$y(i)$反转→ $y(-i)$；右移k → $y(k-i)$

（3）乘积： $x(i)\, y(k-i)$

（4）求和： i 从 $-\infty$到∞对乘积项求和。

注意：k 为参变量。

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ 卷积和

（原始图解法）

例：$f_1(k)$、 $f_2(k)$如图所示，已知$f(k) = f_1(k)* f_2(k)$， 求$f(2) =$?

解：$f(2)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(2-i)$

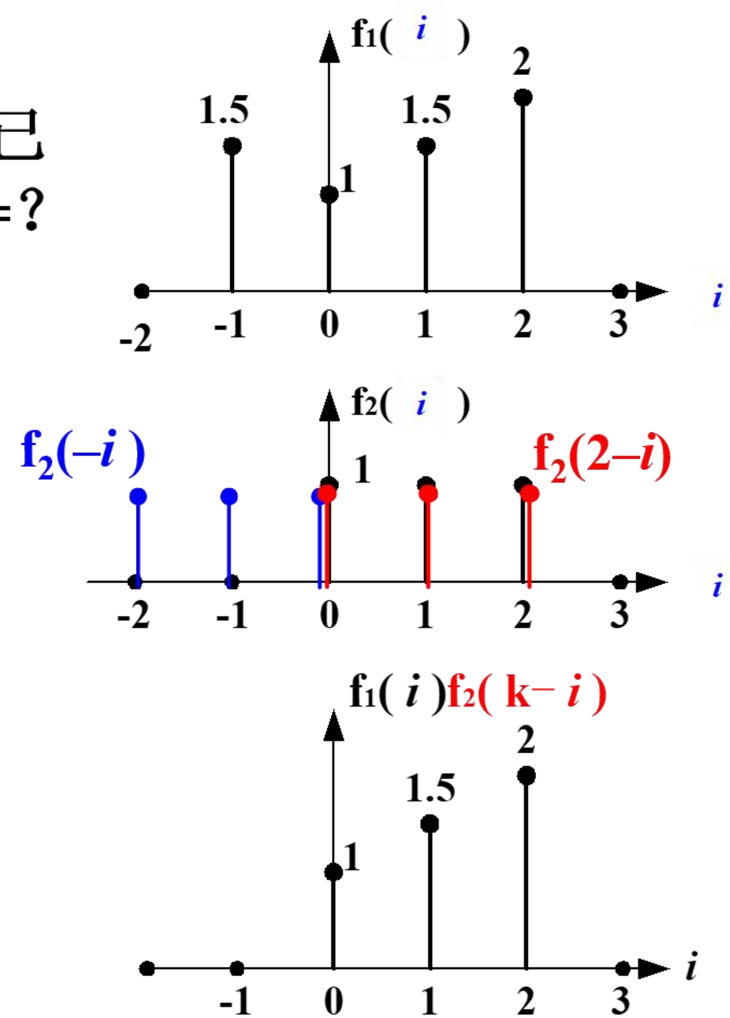
（1）换元

（2） $f_2(i)$反转得$f_2(-i)$

（3） $f_2(-i)$右移2得$f_2(2-i)$

（4） $f_1(i)$乘$f_2(2-i)$

（5）求和，得$f(2) = 4.5$



■ 卷积和

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

例：（图解法）$e(k) = \{2,1,5\}$，$h(k) = \{1,2,3\}$

$e(k)$			**2**	**1**	**5**				
$h(k)$			1	2	3				
$h(-k)$	3	2	1						$r(0)$=2
$h(1-k)$		3	2	1					$r(1)$=5
$h(2-k)$			3	2	1				$r(2)$=13
$h(3-k)$				3	2	1			$r(3)$=13
$h(4-k)$					3	2	1		$r(4)$=15
$h(5-k)$						3	2	1	$r(5)$=0
									…

$$r(k) = e(k) * h(k) = \{2,5,13,13,15\}$$

注：有限长度序列的卷积和仍然是有限长序列，长度最多为$N = N_1 + N_2 - 1$;

卷积和的求法

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

- 数值解法：1）图解法；2）多项式乘法；3）阵列法

例：（多项式乘法）

$e(k)$			2	1	5
$*$ $h(k)$			1	2	3
			6	3	15
		4	2	10	
	2	1	5		
	2	5	13	13	15

- 不进位乘法；
- 只能计算有限长的序列的卷积和；
- 注意：0点确定；

7.5 离散时间系统的零状态响应

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

■ 卷积和的求法

- 数值解法：1）图解法；2）多项式乘法；3）阵列法

例：（阵列法）

	2	1	5
1	2	1	5
2	4	2	10
3	6	3	15

- 给解析式，用定义求解；
- 给数列形式，用数值解法；

- 各对角线元素相加，可以得到结果；

■ 卷积和的性质

- 与卷积性质类似；
- 满足乘法的三律：交换律、分配律、结合律；
- $x(k) * \delta(k) = x(k)$
- $x(k) * \delta(k-k_0) = x(k-k_0)$
- $x(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} x(i)$
- 移序特性（相当于卷积积分中的时移或微分特性）：

若：$x_1(k) * x_2(k) = y(k)$

则：$x_1(k+m) * x_2(k+n) = y(k+m+n)$

求零状态响应：1）求单位函数响应$h(k)$；
2）计算卷积和！

7.5 离散时间系统的零状态响应

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 单位函数响应$h(k)$

- 迭代法
- 初始条件法
- 算子法（部分分式分解法）★
- 系统函数法（ch8）

■ 迭代法

□ 注意：因果离散时间系统要求$m \leqslant n$；

➢ 一阶系统

$$y(k+1) - vy(k) = e(k)$$

即：$h(k+1) - vh(k) = \delta(k)$

$$\therefore h(k+1) = \delta(k) + vh(k)$$

$k=-1$: $\boxed{H(S) = \dfrac{1}{S-v}}$ $vh(-1)$ $= 0$

$k=0$: $h(1) = \delta(0) + vh(0) = 1$

$k=1$: $h(2) = \delta(1) + vh(1) = v$

$k=2$: $h(3) = \delta(2) + vh(2) = v^2$

$$\vdots$$

$$\boxed{h(k) = v^{k-1}\varepsilon(k-1)\cdots(I)}$$

$$y(k+1) - vy(k) = e(k+1)$$

$$h(k+1) - vh(k) = \delta(k+1)$$

$$\therefore h(k+1) = \delta(k+1) + vh(k)$$

$k=-1$: $\boxed{H(S) = \dfrac{S}{S-v}}$ $vh(-1)$ $= 1$

$k=0$: $h(1) = v$

$k=1$: $h(2) = v^2$

$k=2$: $h(3) = v^3$

$$\vdots$$

$$\boxed{h(k) = v^k\varepsilon(k)\cdots(\mathrm{II})}$$

注：同样思路迭代高阶系统；

■ 初始条件法

➢ 核心思想：看作特定条件下的零输入响应

例：已知$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+2)$，求$h(k)$

解：Step1：写出形式解

$$h(k+2)-5h(k+1)+6h(k)=\delta(k+2)$$

$\delta(k+2)$只在 $k=-2$时非零，所以当$k>0$时，此系统相当于一个具有某种初始条件的零输入系统

$$h(k)=(c_1v_1{}^k+c_2v_2{}^k)\varepsilon(k)=[c_1(2)^k+c_2(3)^k]\ \varepsilon(k)$$

Step2：求初始条件

$$h(k+2)=5h(k+1)+6h(k)+\delta(k+2)$$

$$h(0)=5h(-1)+6h(-2)+\delta(0)=1$$ 迭代法

$$h(1)=5h(0)+6h(-1)+\delta(1)=5$$

Step3：求待定系数

$$\begin{cases} h(0)=c_1+c_2=1 \\ h(1)=2c_1+3c_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=3 \end{cases}$$

$$h(k)=[-2(2)^k+3(3)^k]\ \varepsilon(k)$$

算子法（部分分式分解法）

- 核心思想：通过部分分式分解的方法，将高阶系统分解为多个低阶系统之和，解出单位函数响应。

$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots a_1 S + a_0}$$

因果性要求：$H(S)$的分子多项式次数小于等于分母多项式的次数，即 $m \le n$

例：系统$H(S) = \frac{S^2}{S - v_1}$对应的差分方程为：

$$r(k+1) - v_1 r(k) = e(k+2)$$

意味着系统k和$k+1$时刻的响应依赖将来$k+2$时刻的激励，这违背了因果性！

■ 算子法

➢ $m < n$

✓ 如果特征根没有重根，则

$$H(S) = \frac{A_1}{S - v_1} + \frac{A_2}{S - v_2} + \cdots \frac{A_n}{S - v_n}$$
$$= H_1(S) + H_2(S) + \cdots H_n(S)$$

✓ 如果特征根有重根，假设v_1是l重根，则

$$H(S) = \frac{A_1}{S - v_1} + \frac{A_2}{(S - v_1)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(S - v_1)^l}$$
$$+ \frac{A_{l+1}}{S - v_{l+1}} + \cdots + \frac{A_n}{S - v_n}$$
$$= H_1(S) + H_2(S) + \cdots H_n(S)$$

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ 算子法

- ➢ $m = n$　先将其变成一个常数和真分式之和，然后求解
  - ✓ 如果特征根没有重根，则

$$H(S) = A_0 + \frac{A_1}{S - v_1} + \frac{A_2}{S - v_2} + \cdots \frac{A_n}{S - v_n}$$

$$= A_0 + H_1(S) + H_2(S) + \cdots H_n(S)$$

如果能够得到各个低阶系统的单位函数响应，将其相加，就可以得到高阶系统的单位函数响应；

  - ✓

$$H(S) = A_0 + \frac{A_1}{S - v_1} + \frac{A_2}{(S - v_1)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(S - v_1)^l}$$

$$+ \frac{A_{l+1}}{S - v_{l+1}} + \cdots + \frac{A_n}{S - v_n}$$

$$= A_0 + H_1(S) + H_2(S) + \cdots H_n(S)$$

■ 算子法

➢ 单根时， $H(S) = \dfrac{1}{S-v}$

对应的差分方程：$h(k+1) - vh(k) = \delta(k)$

$$k=-1:\ h(0) = \delta(-1) + vh(-1) = 0$$
$$k=0\ :\ h(1) = \delta(0) + vh(0) = 1$$
$$k=1\ :\ h(2) = \delta(1) + vh(1) = v$$
$$k=2\ :\ h(3) = \delta(2) + vh(2) = v^2$$
$$\vdots$$

区别3：
$t\ \&\ k-1$

通过数学归纳法，可以证明：$h(k) = v^{k-1}\varepsilon(k-1)$

或记成：$\dfrac{1}{S-v}\delta(k) = v^{k-1}\varepsilon(k-1)$

回忆：算子$\frac{1}{p-\lambda}$作用于$\delta(t)$，得到$e^{\lambda t}\varepsilon(t)$；

✓ 同样，可以证明 $\dfrac{S}{S-v}\delta(k) = v^k\varepsilon(k)$。
这个结果形式上更加整齐，但是在做因式分解时，需要在分子上面凑S。

7.5 离散时间系统的零状态响应

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

算子法

- 重根时，

$$\frac{1}{(s-v)^n}\delta(k)=\frac{(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}v^{k-n}\varepsilon(k-1)$$

$$\frac{S}{(s-v)^n}\delta(k)=\frac{k!}{(n-1)!\,(k-n+1)!}v^{k-n+1}\varepsilon(k)$$

- 常数项， $H(S)=A_0$的单位函数响应为$A_0\delta(k)$

有了以上结论，就可以得到任意系统的单位函数响应！

■ 算子法

$$\frac{1}{S-v}\delta(k)=v^{k-1}\varepsilon(k-1)\cdots(I)$$

例：已知$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+2)-3e(k)$，求$h(k)$。

解：$(S^2-5S+6)y(k)=(S^2-3)e(k)$

$$H(S)=\frac{S^2-3}{S^2-5S+6}=1+\frac{5S-9}{S^2-5S+6}=1+\frac{6}{S-3}-\frac{1}{S-2}$$

$e(k)=\delta(k)$时，$y(k)=h(k)$

$$h(k)=\delta(k)+6(3)^{k-1}\varepsilon(k-1)-2^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

■ 算子法

$$\frac{1}{S-v}\delta(k)=v^{k-1}\varepsilon(k-1)\cdots(I)$$

$$\frac{S}{S-v}\delta(k)=v^{k}\varepsilon(k)\cdots(II)$$

例：已知 $H(S)=\dfrac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}$

解：法1：$H(S)=\dfrac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}=7+\dfrac{2.5}{S-0.5}+\dfrac{0.4}{S-0.2}$

$$h(k)=7\delta(k)+2.5(0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)+0.4(0.2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=7\delta(k)+[5(0.5)^{k}+2(0.2)^{k}]\varepsilon(k-1)$$

法2：$\dfrac{H(S)}{S}=\dfrac{7S-2}{(S-0.5)(S-0.2)}=\dfrac{5}{S-0.5}+\dfrac{2}{S-0.2}$

$$H(S)=\frac{5S}{S-0.5}+\frac{2S}{S-0.2}$$

$$h(k)=[5(0.5)^{k}+2(0.2)^{k}]\varepsilon(k)$$

$$v^{k}\varepsilon(k)=\delta(k)+v^{k}\varepsilon(k-1)$$

7.5 离散时间系统的零状态响应

■ 离散时间系统的因果性和稳定性

➢ 因果系统充要条件：单位函数响应是有始信号，即

$$h(k)=h(k)\varepsilon(k)，\text{即}h(k)=0\quad（\text{当}k<0）$$

➢ 系统稳定：若输入信号是有界的，那么输出信号必定也是有界的系统；

✓ 系统稳定的充要条件：单位函数响应绝对可和，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h(k)|\le M\qquad(M\text{为有界正值})$$

➢ 既满足稳定条件又满足因果条件的离散时间系统的单位函数响应是单边的而且是有界的。

■ 离散时间系统的因果性和稳定性

➢ 既满足稳定条件又满足因果条件的离散时间系统的单位函数响应是单边的而且是有界的，即

$$\begin{cases} h(k) = h(k)\varepsilon(k) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \le M \end{cases}$$

如 $h(k) = a^k \varepsilon(k)$ 则该系统是因果的

若 $|a| < 1$ 则该系统是稳定的

若 $|a| > 1$ 则该系统是不稳定的

若 $|a| = 1$ 则该系统称为临界稳定 此时，$h(k) = \varepsilon(k)$

若 $e(k) = \varepsilon(k)$ 则系统的零状态响应 $(1+k)\varepsilon(k)$，系统不稳定

离散时间系统全响应的求解

- 综合零输入响应和零状态响应的求解，我们可以得到离散时间系统的全响应。

例1：系统转移函数$H(S) = \frac{S(7s-2)}{(s-0.5)(s-0.2)}$，初始条件 $r(0) = 9$，$r(1) = 13.9$，激励 $e(k) = \varepsilon(k)$，求系统的全响应。

注意：1. 初始条件不做说明，均指全响应（符合实际系统观测结果）

2. 如果题目给出的是$r(-1)$、 $r(-2)$的值，那该值无论有无特别说明，都是零输入响应的初始值。（零输入响应中$\varepsilon(k)$ 是可加可不加，但是零状态响应$\varepsilon(k)$ 是必须加的）

例2：已知系统 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$，初始状态 $y(-1) = 0$， $y(-2) = 1/6$，激励 $e(k) = (-1)^k\varepsilon(k)$，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应，并判断是否稳定。

$$H(S) = \frac{1}{1 - s^{-1} - 2s^{-2}}$$

解：(1) 求零输入响应 $y_{Zi}(k)$

$y_{Zi}(k)$满足：$y_{Zi}(k) - y_{Zi}(k-1) - 2\,y_{Zi}(k-2) = 0$

及 $y_{Zi}(-1) = y(-1) = 0$，

$y_{Zi}(-2) = y(-2) = 1/6$

注意：此处也可直接代入 $y_{zi}(-1)$、$y_{zi}(-1)$来计算待定系数！

由迭代法可得：$y_{Zi}(0) = y_{Zi}(-1) + 2\,y_{Zi}(-2) = 1/3$

$y_{Zi}(1) = y_{Zi}(0) + 2\,y_{Zi}(-1) = 1/3$

两个单根：$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 2$ （由$1 - s^{-1} - 2s^{-2} = 0$求得）

故有 $y_{Zi}(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k$

将 $y_{Zi}(0), y_{Zi}(1)$代入求得 $C_1 = 1/9$，$C_2 = 2/9$

$$\therefore y_{Zi}(k) = \frac{1}{9}(-1)^k + \frac{2}{9}(2)^k, k \ge 0$$

(2) 求单位函数响应 $h(k)$ 和零状态响应

7.5 离散时间系统的零状态响应

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\because H(S)=\frac{\frac{1}{3}S}{S+1}+\frac{\frac{2}{3}S}{S-2} \quad \therefore h(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_{ZS}(k)=h(k)*e(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)]*(-1)^k\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)*(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(k)*(-1)^k\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(-1)^k\varepsilon(k)+\frac{2}{3}\bullet\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{2-(-1)}\varepsilon(k)$$

$$=[\frac{1}{3}k(-1)^k+\frac{5}{9}(-1)^k+\frac{4}{9}(2)^k]\varepsilon(k)$$

（3）求全响应

$$y(k)=y_{Zi}(k)+y_{ZS}(k)=[\frac{1}{3}(k+2)(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

显然，由于特征根 $|\gamma_1|=1,|\gamma_2|>1$ 且 $e(k)=(\gamma_1)^k\varepsilon(k)$

所以，该系统不稳定

本章内容

系统描述方面

- 数学模型

  - ✓ 连：微分方程

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots a_1\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots b_1\frac{d}{dt}r(t)+b_0e(t)$$

  - ✓ 离：差分方程

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\cdots a_1r(k+1)+a_0r(k)$$
$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\cdots b_1e(k+1)+b_0e(k)$$

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

■ 系统描述方面

➢ 算子形式

✓ 连：引入微分算子p

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t) = (b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)e(t)$$

$$H(p) = \frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots a_1p+a_0}$$

✓ 离：引入差分算子S

$$a_nS^nr(k)+a_{n-1}S^{n-1}r(k)+\cdots a_1Sr(k)+a_0r(k) = b_mS^me(k)+b_{m-1}S^{m-1}e(k)+\cdots b_1Se(k)+b_0e(k)$$

$$H(S) = \frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1S+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots a_1S+a_0}$$

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

■ 系统描述方面

- ➢ 物理模拟（框图）
  - ✓ 基本运算单元

    连：加法器、标量乘法器、积分器

    离：加法器、标量乘法器、移序（延时）器

  - ✓ 结构

    类似，只要将积分器与移序器互换即可

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

■ 求解方法

- ➢ 种类
  - ✓ 连：经典法、近代时域法、变换域法
  - ✓ 离：经典法、近代时域法、变换域法、数值求解（迭代法）
- ➢ 近代时域法：分成零输入响应r_{zi}和零状态响应r_{zs}

■ 零输入响应r_{zi}

➢ 特征方程

连： $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots a_1 p + a_0 = 0$

离： $S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots a_1 S + a_0 = 0$

➢ 特征根

连： λ_1，$\lambda_2 \cdots \lambda_n$

离： v_1，$v_2 \cdots v_n$

➢ 形式解

连：$r_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots C_n e^{\lambda_n t}$

离：$r_{zi}(k) = C_1 {v_1}^k + C_2 {v_2}^k + \cdots C_n {v_n}^k$

➢ 代入初始条件

连： $r(0)$、$r'(0)$、$r''(0)\cdots$

离：$r(0)$、$r(1)$、$\cdots$或者$r(-1)$、$r(-2)$、$\cdots$

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 零状态响应r_{zs}

➢ 连：卷积（ $r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$ ）、冲激响应

➢ 离：卷积和（ $r_{zs}(k)=e(k)*h(k)$ ）、单位函数响应

✓ 求系统的（连：）冲激响应$h(t)$

（离：）单位函数响应$h(k)$

1. 求系统的转移函数：

连：

$$H(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots a_1 p+a_0}$$

离：

$$H(S)=\frac{b_m S^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1 S+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots a_1 S+a_0}$$

- 零状态响应r_{zs}

2. 部分分式分解：

将高阶微分（差分）方程变成低阶微分（差分）方程之和。

3. 求低阶系统的冲激响应（单位函数响应）

连：

$$\frac{1}{p-\lambda}\delta(t)=e^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

离：

$$\frac{1}{S-v}\delta(k)=v^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$\frac{S}{S-v}\delta(k)=v^{k}\varepsilon(k)$$

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

系统特性

- 稳定性判断

连：$h(t)$绝对可积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \le M$$

------特征根在s平面虚轴以左；

离：$h(k)$绝对可和

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \le M$$

------特征根在z平面单位圆以内；

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 系统特性

➢ 因果性

连：$h(t)$是右边（有始）信号

离：$h(k)$是右边（有始）序列

简单判断： $m \leqslant n$

7.6 CTS与DTS时域分析法对比

微分方程描述	差分方程描述
用$H(p)$将微分方程写成代数方程的形式	用$H(S)$将差分方程写成代数方程的形式
➢ 特征根λ出现在指数函数的幂数中； ➢ r_{zi}的幅度和振荡频率分别决定于λ的实部和虚部； ➢ 系统稳定性取决于各特征根是否全部位于s平面的左半平面。	➢ 特征根v出现在指数函数的底数； ➢ r_{zi}的幅度和振荡频率分别决定于v的模和相位； ➢ 系统稳定性取决于各特征根是否全部位于z平面的单位圆内。
r_{zs}等于系统的冲激响应与激励的卷积积分。 $\frac{1}{p-\lambda}\delta(t)=e^{\lambda t}\varepsilon(t)$	r_{zs}等于系统的单位函数响应与激励的卷积和。 $\frac{1}{S-v}\delta(k)=v^{k-1}\varepsilon(k-1)$

课后练习

7.2、7.5-7.10、7.12、7.13、7.15-7.19、7.21-7.29

7.1 引言

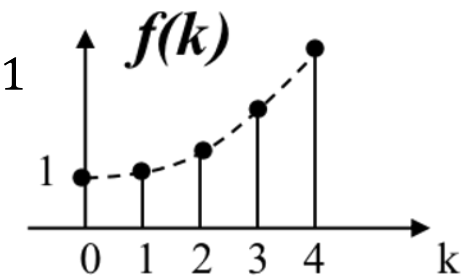
■ 典型离散时间信号

➢ 单边指数序列

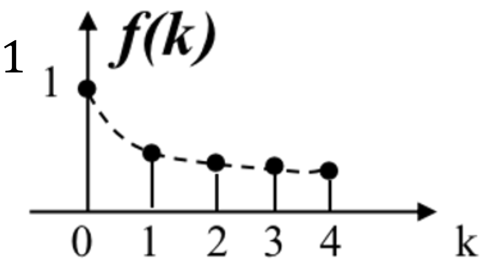
$$f(k)=a^{k}\varepsilon(k)$$

***a*>0,序列值皆为正**

$|a|>1$

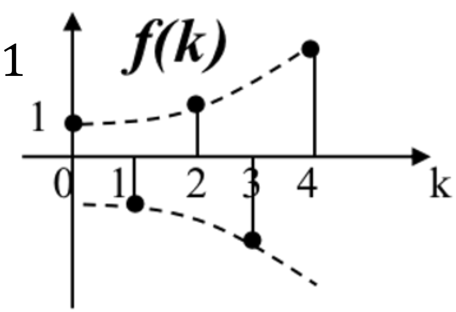


$|a|<1$

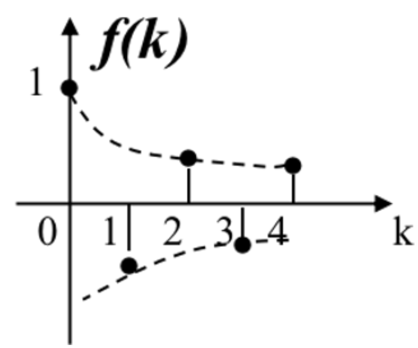


***a*<0,序列值在正、负间摆动**

$|a|>1$



$|a|<1$



Q：和单边连续指数函数$e^{at}\varepsilon(t)$比较有何不同？