第二节　幂级数

- 一、幂级数的概念
- 二、幂级数的敛散性
- 三、幂级数的运算和性质
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

一、幂级数的概念

1. 复变函数项级数

定义 设 $\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一复变函数序列,

其中各项在区域 D 内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

级数最前面n项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为这级数的部分和.

和函数

如果对于 D 内的某一点 z_0, 若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$收敛, 那末

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛. 其和记为S(z_0).

如果级数在D内处处收敛, 那末它的和一定

是 z 的一个函数 $s(z)$:

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为该级数在区域D上的**和函数**.

2. 幂级数

当 $f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 或 $f_n(z)=c_{n-1}z^{n-1}$ 时,

函数项级数的特殊情形

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots.$$

这种级数称为**幂级数**.

二、幂级数的敛散性

1.收敛定理 (阿贝尔Abel定理)

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛，那末对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，级数必绝对收敛，如果在 $z = z_0$ 级数发散，那末对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z，级数必发散.

证 因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛， 由收敛的必要条件, 有

$$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$$

因而存在正数M， 使对所有的n， 有$\left|c_n z_0{}^n\right| < M$,

如果 $|z| < |z_0|$， 那末 $\frac{|z|}{|z_0|} = q < 1$,

而 $\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0{}^n\right| \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} < Mq^n.$

由正项级数的比较判别法知:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right| = \left|c_0\right| + \left|c_1 z\right| + \left|c_2 z^2\right| + \cdots + \left|c_n z^n\right| + \cdots \quad \text{收敛.}$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛的.

另一部分的证明请课后完成. [证毕]

2. 收敛圆与收敛半径

对于一个幂级数, 其收敛半径的情况有三种:

(1) 对所有的正实数都收敛.

由阿贝尔定理知:

级数在复平面内处处绝对收敛.

(2) 对所有的正实数除 z=0 外都发散.

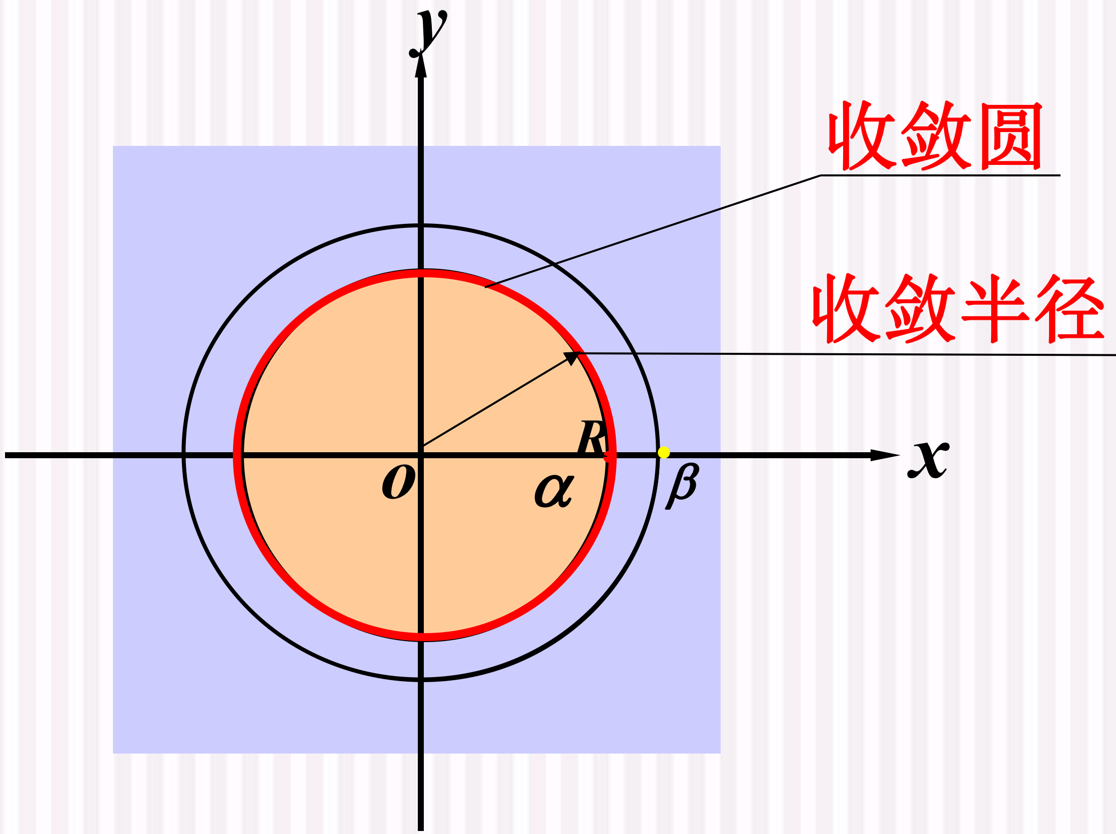
此时, **级数在复平面内除原点外处处发散**.

例如,级数 $1 + z + 2^2 z^2 + \cdots + n^n z^n + \cdots$

当 $z \neq 0$ 时, 通项不趋于零, 故级数发散.

(3) 既存在使级数发散的正实数, 也存在使级数收敛的正实数.

设 $z = \alpha$ 时,级数收敛; $z = \beta$ 时,级数发散. 如图:



幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛范围是以原点为中心的圆域.

问题1: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛范围是何区域?

答案: 是以 $z=a$ 为中心的圆域.

问题2: 幂级数在收敛圆周上的敛散性如何?

注意 在收敛圆周上是收敛还是发散, 不能作出一般的结论, 要对具体级数进行具体分析.

3. 收敛半径的求法

方法1（比值法）：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}||z|^{n+1}}{|c_n||z|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| = \lambda|z|$,

当 $|z| < \dfrac{1}{\lambda}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n||z^n|$ 收敛.

下证$|z|>\frac{1}{\lambda}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$发散.假设级数在圆$|z|=\frac{1}{\lambda}$外某点$z_0$处收敛，则级数在圆盘$B=\{z:|z|<|z_0|\}$内处处绝对收敛.但是对满足$z_1\in B$,但$|z_1|>\frac{1}{\lambda}$,考察极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||z_1|^{n+1}}{|c_n||z_1|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|z_1|=\lambda|z_1|>1,$$

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n||z_1|^n$ 发散，矛盾.

所以，收敛半径$R=1/\lambda$.

说明: 定理中极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在且不为零.

如果:

1. $\lambda = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛,

即 $R = \infty$.

2. $\lambda = \infty$(极限不存在),

则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 对于复平面内除 $z = 0$ 以外的一切

z 均发散, 即 $R = 0$.

课堂练习 试求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}\ (p\text{为正整数})\text{的收敛半径.}$$

答案 因为 $c_n = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

所以 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

方法2(根值法):

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda\neq 0$, 那末收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

说明:

如果 $\lambda=\begin{cases}0 & \longrightarrow\ R=\infty\\ \infty & \longrightarrow\ R=0\end{cases}$

(与比值法相同)

三、幂级数的运算和性质

1. 幂级数的有理运算

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n,$$

$$|z|<R$$

$$f(z)\cdot g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right),$$

$$R=\min(r_1,r_2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0 b_n)z^n,\qquad |z|<R$$

2. 幂级数的代换(复合)运算

如果当 $|z|<r$ 时, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, 又设在

$|z|<R$ 内 $g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$, 那末当 $|z|<R$

时, $f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n$.

说明: 此代换运算常应用于将函数展开成幂级数.

3. 复变幂级数在收敛圆内的性质

定理四 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛半径为 R,

那末

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 是收敛圆

$|z-a|<R$ 内的解析函数.

(2) $f(z)$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的导数可将其幂

级数逐项求导得到, 即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}$.

(3) $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分,

即 $\int_c f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c (z-a)^n \mathrm{d}z,\quad c \subset \{z \mid |z-a| < R\}.$

或 $\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$

简言之: 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析;

幂级数可逐项求导, 逐项积分.

(常用于求和函数)

四、典型例题

例1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围与和函数.

解 级数的部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, (z \neq 1)$$

$|z|<1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z} \Longrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛,

$|z|\geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0 \Longrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

由阿贝尔定理知: 收敛范围为一单位圆域 $|z|<1$,

在此圆域内, 级数绝对收敛, 收敛半径为1,

且有 $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots.$

例2 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0\,,2$ 时的情形)

解 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 1,$

或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1.$

所以收敛半径 $R=1$,

即原级数在圆 $|z|=1$内收敛, 在圆外发散,

在圆周 $|z|=1$上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^3}\right|=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}$

收敛的 p 级数 $(p=3>1)$.

所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$，即 $R = 1$.

当$z = 0$时，原级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 交错级数, 收敛.

当$z = 2$时，原级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 调和级数，发散.

说明： 此级数在收敛圆周上既有级数的收敛点，也有级数的发散点.

例3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$ 的收敛半径:

解 因为 $c_n = \cos in = \cosh n = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n}),$

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = e,$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}.$

例4 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$, 所以 $R=\dfrac{1}{2}$.

当$|z|<\dfrac{1}{2}$时, $|2z|<1$, $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\dfrac{1}{1-z}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\dfrac{2}{1-2z}-\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{(1-2z)(1-z)}$.

例5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1,$ 所以 $R=1.$

利用逐项积分,得:

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=(\frac{z}{1-z})'=\frac{1}{(1-z)^2}.\quad |z|<1$

例5 计算 $\oint_c \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z$, 其中$c$为$|z| = \dfrac{1}{2}$.

解 在$|z| < \dfrac{1}{2}$内, $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$收敛,

和函数 $S(z) = \sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z}$,

所以 $I = \oint_c \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z}\right) \mathrm{d}z = \oint_c \dfrac{1}{z} \mathrm{d}z + \oint_c \dfrac{1}{1-z} \mathrm{d}z$

$= 2\pi i + 0 = 2\pi i.$

思考：哪一项决定了积分值？

例4 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的幂级数, 其中 a 与 b 是不相等的复常数.

解 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

凑出 $\dfrac{1}{1-g(z)}$

代数变形, 使其分母中出现 $(z-a)$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$时，

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=1+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n+\cdots,$$

故 $$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots$$

设 $|b-a|=R$，那末当 $|z-a|<R$时，级数收敛，

且其和为$\dfrac{1}{z-b}$.

五、小结与思考

这节课我们学习了幂级数的概念和阿贝尔定理等内容，应掌握幂级数收敛半径的求法和幂级数的运算性质.

思考题

幂级数在收敛圆周上的敛散性如何断定?

思考题答案

由于在收敛圆周上 $|z|$ 确定, 可以依复数项级数敛散性讨论.