第一节　孤立奇点

- 一、孤立奇点的概念
- 二、函数的零点与极点的关系
- 三、函数在无穷远点的性态
- 四、小结与思考

一、孤立奇点的概念

定义 如果函数 $f(z)$在 z_0不解析, 但 $f(z)$在 z_0的某一去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内处处解析, 则称z_0为 $f(z)$的孤立奇点.

例1 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z=-1$是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

注意: 孤立奇点一定是奇点, 但奇点不一定是孤立奇点.

例2 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

解 函数的奇点为

$$z=0,\ z=\frac{1}{k\pi}\quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0,$

即在 $z=0$ 的不论怎样小的去心邻域内, 总有 $f(z)$ 的奇点存在, 所以 $z=0$ 不是孤立奇点.

孤立奇点的分类

依据 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 的去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

1．可去奇点;　　2．极点;　　3．本性奇点.

1. 可去奇点

1) 定义　如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项，那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点.

2)　z_0 为 $f(z)$ 可去奇点的充要条件

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\ \text{存在且为有限值。}$$

例3 $\dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{1}{3!}z^2+\dfrac{1}{5!}z^4-\cdots$ 中不含负幂项,

$z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 .

如果补充定义:

$$z=0\text{ 时}, \quad \frac{\sin z}{z}=1,$$

那末 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 解析.

例4 说明 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

解 $$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots-1\right)$$

$$=\underline{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots},\quad 0<|z|<+\infty$$

无负幂项

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解 因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1,$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2. 极点

1) 定义 如果洛朗级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项, 其中关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$,

即 $$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots \qquad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

那末孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

2) z_0 为 $f(z)$ 极点的充要条件

①在点 z_0 的某去心邻域内 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内解析, 且 $g(z_0)\neq 0$.

② $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

例5 有理分式函数 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$,

$z=0$ 是二级极点, $z=-2$ 是一级极点.

课堂练习

求 $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

答案 由于 $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$,

所以：$z=-1$是函数的一级极点 ，

$z=1$是函数的二级极点 .

3. 本性奇点

如果洛朗级数中含有无穷多个 $z-z_0$ 的负幂项,

那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

例如, $e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots,$

含有无穷多个z的负幂项 $(0 < |z| < \infty)$

所以 $z=0$ 为本性奇点, 同时 $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

特点: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞ .

综上所述:

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

二、函数的零点与极点的关系

1.零点的定义 不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$, m 为某一正整数, 那末 z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点.

例6 $z=0$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的一级零点，

$z=1$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的三级零点.

注意: 不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

2.零点的判定

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 那末 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0, (n=0,1,2,\cdots m-1);\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

例7 求以下函数的零点及级数:

$$(1)\ f(z)=z^3-1,\quad (2)\ f(z)=\sin z.$$

解 (1)由于 $f'(1)=3z^2\big|_{z=1}=3\neq 0,$

知 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级零点.

(2)由于 $f'(0)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0,$

知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级零点.

课堂练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点及级数.

答案 $z=0$ 是五级零点, $z=\pm i$ 是二级零点.

3.零点与极点的关系

定理 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末 z_0 就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立.

证 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 则有

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z) \qquad (g(z_0)\neq 0)$$

当 $z\neq z_0$ 时, $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\dfrac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)$

函数 $h(z_0)$ 在 z_0 解析且 $h(z_0)\neq 0.$

由于 $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$, 只要令 $\dfrac{1}{f(z_0)} = 0$,

那末 z_0 就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

说明 此定理为判断函数的极点提供了一个较为简便的方法.

例8 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.

解 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点,

这些奇点是 $z = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$. 是孤立奇点.

因为 $(\sin z)'\big|_{z=k\pi} = \cos z\big|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0,$

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点, 即 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

例9 问 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解 $$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)$$ 解析且$\varphi(0)\neq 0$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

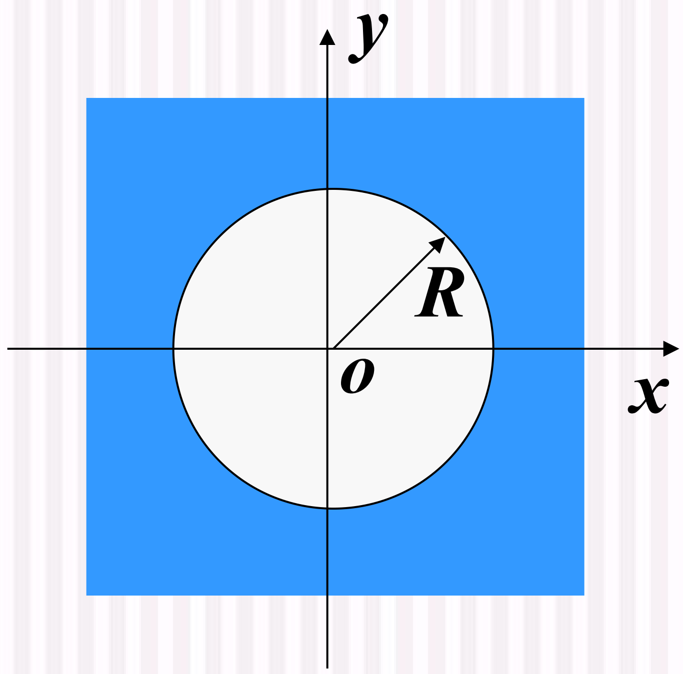
所以 $z=0$ 不是二级极点, 而是一级极点.

思考 $z=0$ 是 $\dfrac{\sinh z}{z^3}$ 的几级极点?

注意: 不能以函数的表面形式作出结论 .

三、函数在无穷远点的性态

1. 定义　如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.



令变换 $t=\dfrac{1}{z}$：则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\varphi(t)$，规定此变换将：

$$z=\infty \xrightarrow{\text{映射为}} t=0,$$

$$\text{扩充 } z \text{ 平面} \xrightarrow{\text{映射为}} \text{扩充 } t \text{ 平面}$$

$$\{z_n\}\,(z_n\to\infty) \xrightarrow{\text{映射为}} \left\{t_n=\frac{1}{z_n}\right\}(t_n\to 0)$$

$$R<|z|<+\infty \xrightarrow{\text{映射为}} 0<|t|<\frac{1}{R}$$

结论:

在去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内对函数 $f(z)$ 的研究

→ 在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内对函数 $\varphi(t)$ 的研究

因为 $\varphi(t)$ 在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内是解析的,

所以 $t = 0$ 是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点.

规定: 如果 $t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、m 级极点或本性奇点, 那末就称点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m 级极点或本性奇点 .

2.判别方法: 判别法1 (利用洛朗级数的特点)

如果 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数中:

1)不含正幂项;

2)含有有限多的正幂项且 z^m 为最高正幂;

3)含有无穷多的正幂项;

那末 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1)可去奇点;

2) m 级极点;

3)本性奇点.

例10 (1)函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$

内的洛朗展开式为:

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots$$

不含正幂项

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 .

(2)函数 $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ 含有正幂项且 z 为最高正

幂项,所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 1级极点.

(3)函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

含有无穷多的正幂项

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

课堂练习

说出函数 $f(z) = z + e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点及其类型.

答案 $z=\infty$是一级极点, $z=0$是本性奇点.

判别法2 : (利用极限特点)

如果极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

1)存在且为有限值 **;**

2)无穷**;**

3)不存在且不为无穷 **;**

那末 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 **1)**可去奇点 **;**

2)极点 **;**

3)本性奇点 **.**

例11 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$ 在复平面内

有些什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级.

解 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm 1,\pm 2\cdots$ 外,

在 $|z|<+\infty$ 内解析.

因 $(\sin \pi z)'=\cos \pi z$ 在 $z=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 处均不为零.

所以这些点都是 $\sin \pi z$ 的一级零点,

故这些点中除1, -1, 2外, 都是 $f(z)$的三级极点.

因 $z^2-1=(z-1)(z+1)$，以1与-1为一级零点，

所以 1与-1是 $f(z)$的2级极点.

当$z=2$时，

因为 $\lim\limits_{z\to2} f(z) = \lim\limits_{z\to2}\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$

$$=\frac{3}{\pi^3},$$

那末 $z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

四、小结与思考

理解孤立奇点的概念及其分类; 掌握可去奇点、极点与本性奇点的特征; 熟悉零点与极点的关系.

思考题

确定函数$f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$的孤立奇点的类型.

思考题答案

$z=0$是分母的6级零点,

也即是函数 $f(z)$的6级极点.