# 第2.2节(3)

## 随机变量的独立性，条件分布

一、随机变量的相互独立性

二、离散型随机变量的条件分布

三、连续型随机变量的条件分布

四、小结

# 一、随机变量的相互独立性

随机变量的独立性是概率论中的一个重要概念.两随机变量独立的定义是:

## 1.定义2.6

设 $X,Y$是两个随机变量，若对任意的$x, y$, 有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称$X,Y$相互独立.

两事件$A,B$独立的定义是：
若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件$A,B$独立.

用分布函数表示,即

设 $X,Y$是两个随机变量，若对任意的$x,y$,有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称$X,Y$相互独立.

它表明，两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积.

若 $(X,Y)$是连续型r.v ,则上述独立性的定义等价于：

若对任意的 $x, y$, 有

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

成立，则称X,Y相互独立.

其中 $p(x,y)$是X,Y的联合密度，

$p_X(x), p_Y(y)$分别是X的

边缘密度和Y 的边缘密度 .

若 $(X,Y)$是离散型$r.v$， 则上述独立性的定义等价于：

对$(X,Y)$的所有可能取值$(x_i, y_j)$,有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

则称$X$和$Y$相互独立.

例2 设$(X,Y)$的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问$X$和$Y$是否独立？

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

解：$p_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}$ $\quad x>0$

$$p_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y} \quad y>0$$

即：

$$p_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad p_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

# 二、离散型随机变量的条件分布

## 问题

考虑一大群人,从其中随机挑选一个人,分别用 $X$ 和 $Y$ 记此人的体重和身高,则 $X$ 和 $Y$ 都是随机变量,他们都有自己的分布.

现在如果限制 $Y$ 取值从1.5米到1.6米,在这个限制下求 $X$ 的分布.

**定义** 设 $(X,Y)$ 是二维离散型随机变量对于固定的 $j$, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 $X$ 的条件分布律.

对于固定的 $i$, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 $Y$ 的条件分布律.

其中 $i,j=1,2,\cdots$.

# 三、连续型随机变量的条件分布

**定义** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为 $p(x, y)$, $(X, Y)$ 关于 $Y$ 的边缘概率密度为 $p_Y(y)$.若对于固定的 $y$, $p_Y(y) > 0$, 则称 $\dfrac{p(x, y)}{p_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的条件下 $X$ 的条件概率密度,记为

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}\,dx$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数,记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

即 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}\,dx.$

同理定义在 $X = x$ 的条件下 $Y$ 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y | X = x\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{p(x,y)}{p_X(x)}\,dy.$$

**请同学们思考**

为什么不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

**答** 条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下,另一个随机变量的分布,即

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}.$$

由于$P\{Y=y\}$可能为零(连续型时一定为零).故直接用条件概率来定义时,会出现分母为零.

因此,在条件分布中,作为条件的随机变量的取值是确定的数.

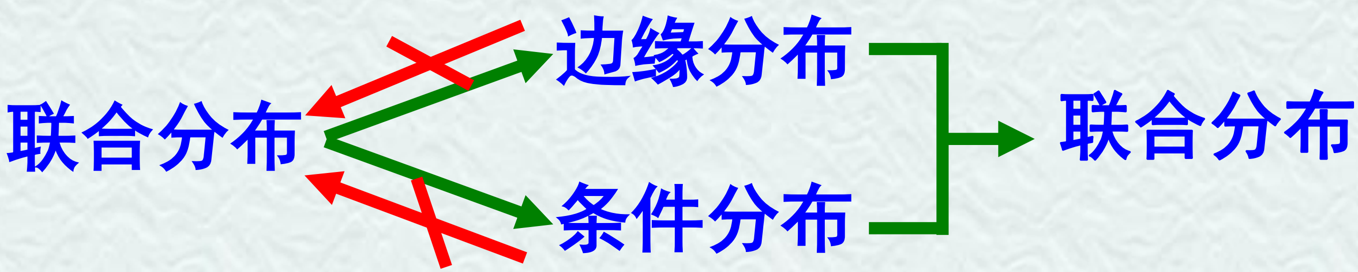
## 条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}[p(x,y)/p_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} p_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}[p(x,y)/p_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

**说明**

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



**例3** 设 $G$ 是平面上的有界区域,其面积为 $A$. 若二维随机变量 $(X,Y)$ 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 $(X,Y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $p_{X|Y}(x|y)$.

**解** 由题意知随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是当 $-1 < y < 1$ 时,有

$$p_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

# 四、小结

## 独立性

1. 若离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots.$$

$X$ 和 $Y$ 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $p(x,y)$，边缘概率密度分别为 $p_X(x)$, $p_Y(y)$，则有

$X$ 和 $Y$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

3. $X$ 和 $Y$ 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

# 条件分布

1. 设 $(X,Y)$ 是二维离散型随机变量, $p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律,在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 $X$ 的条件分布律为

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 $Y$ 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots$.

2. 设 $(X,Y)$ 是二维连续型随机变量, 则有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [p(x,y)/p_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} p_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{y} [p(x,y)/p_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

# 备份题

**例1** 设

$$(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} Cy(1-x), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x. \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求 $C$ 的值;

(2)求关于 $X$,关于 $Y$ 的边缘概率密度

(3)判断 $X,Y$ 的独立性

**解** (1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$

可得 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x Cy(1-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

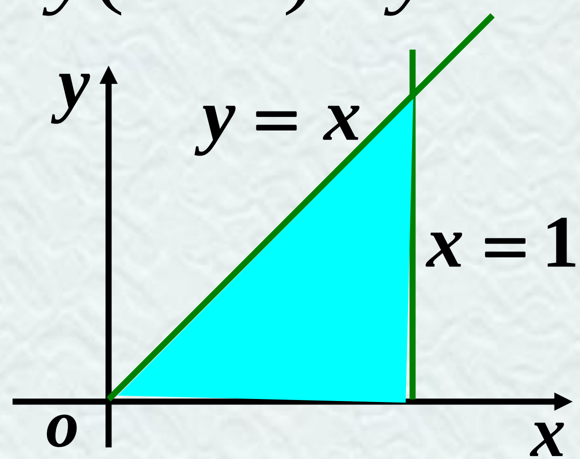
$$= \int_0^1 C(1-x)\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{24} = 1 \Rightarrow C = 24.$$

故 $p(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 24y(1-x)\,\mathrm{d}y$$

$$= 12x^2(1-x).$$




当 $x < 0$,或 $x > 1$ 时,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

于是 $(X,Y)$关于$X$ 的边缘概率密度为

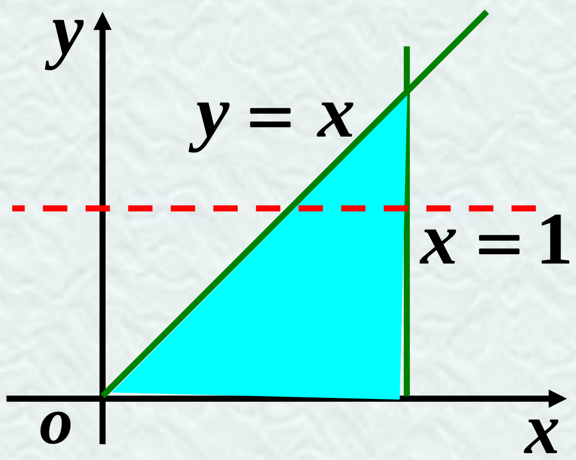
$$p_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $0\le y\le 1$时,

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x$$

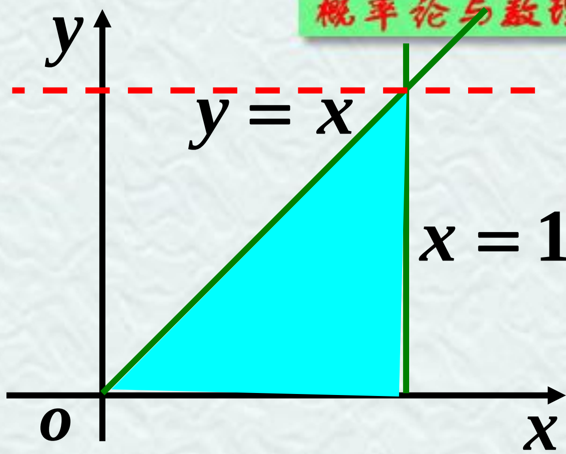
$$=\int_y^1 24y(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=12y(1-y)^2.$$



当 $y<0$, 或 $y>1$时,

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x=0.$$




因而得 $p_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(3) 由于 $p(x,y)\neq p_X(x)\cdot p_Y(y)$,

所以 $X,Y$ 不相互独立.

**例2** 已知分布律

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $3/28$ | $9/28$ | $3/28$ |
| 1 | $3/14$ | $3/14$ | 0 |
| 2 | $1/28$ | 0 | 0 |

求 $Y$=1 时 $X$ 的条件分布.

**解** 由于 $P\{Y=1\}=\dfrac{3}{14}+\dfrac{3}{14}+0=\dfrac{3}{7}$,

$$P\{X=x_i \mid Y=1\}=\frac{P\{X=x_i, Y=1\}}{P\{Y=1\}}, \qquad (i=0,1,2)$$

得 $P\{X=0 \mid Y=1\}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{14}=\frac{1}{2}$,

$$P\{X=1 \mid Y=1\}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{14}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2 \mid Y=1\}=\frac{7}{3}\times 0=0.$$

因此,在 $Y$=1 的条件下 $X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P\{X=x_i \mid Y=1\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

**例3** 设随机变量$(X,Y)$的联合概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x<1, 0\le y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $P\{Y\le \frac{1}{8} \mid X=\frac{1}{4}\}$?

**解** 因为 $\boldsymbol{P\{X=\frac{1}{4}\}=0,}$

所以 $\boldsymbol{P\{Y\le \frac{1}{8} \mid X=\frac{1}{4}\}=\dfrac{P\{X=\frac{1}{4},Y\le\frac{1}{8}\}}{P\{X=\frac{1}{4}\}}}$ 不~~存~~在.

正确解法为

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 3x\,\mathrm{d}\,y, & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

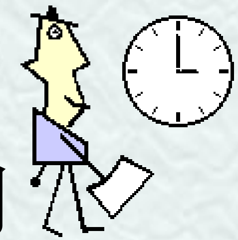
因此 $\boldsymbol{p_{Y|X}(y|x) = \dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}}$

$$= \begin{cases} 3x/(3x^2) = 1/x, & 0 \le y < x, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{P\{Y \le \frac{1}{8} \Big| X = \frac{1}{4}\}} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{8}} p_{Y|X}(y|\frac{1}{4})\,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_0^{\frac{1}{8}} 4\,\mathrm{d}\,y = 1/2.$$

**例4** 一负责人到达办公室的时间均匀分布在**8~12**时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在**7~9**时,设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 **5** 分钟的概率.



**解** 设 $X$ 和 $Y$ 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间, 由假设 $X$ 和 $Y$ 的概率密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其它},\end{cases} \qquad p_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<x<9,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 $X,Y$ 相互独立, 得 $(X,Y)$ 的概率密度为

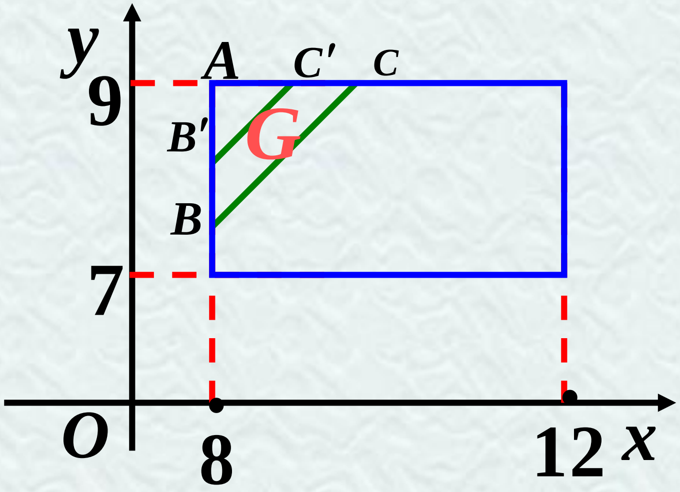
$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12, 7<y<9,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

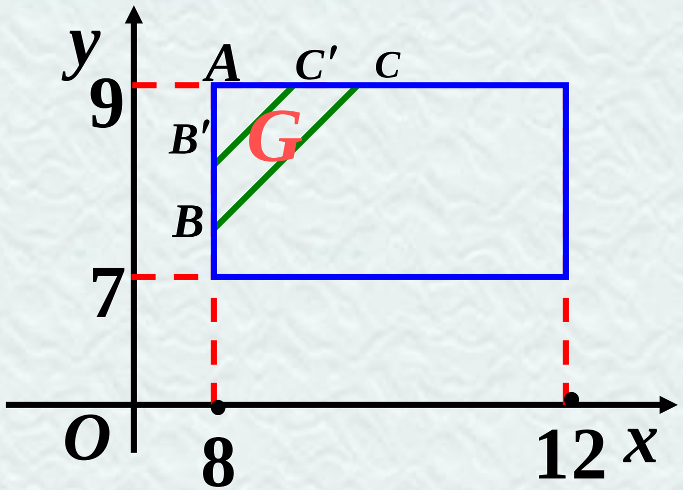
$$=\iint\limits_G p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积}).$$



而 $G$的面积$=\Delta ABC$的面积$-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$




于是 $P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.