第四节　洛朗级数

- 一、问题的引入
- 二、洛朗级数的概念
- 三、函数的洛朗展开式
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

一、问题的引入

1.双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂项部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{正幂项部分}}$$

收敛

主要部分　　解析部分

同时收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$$

$$\Big\downarrow \text{收敛半径 } R$$

$|\zeta| < R$时,收敛

$$\Big\downarrow \text{收敛域}$$

$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$\Big\downarrow \text{收敛半径 } R_2$$

收敛域

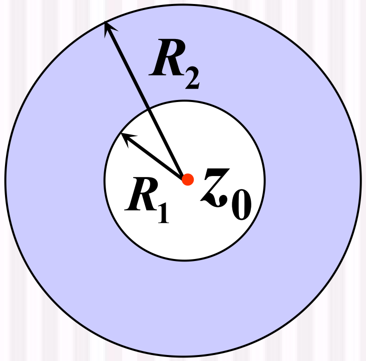
$$|z-z_0| < R_2$$

若 (1) $R_1 > R_2$： 两收敛域无公共部分,

(2) $R_1 < R_2$： 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

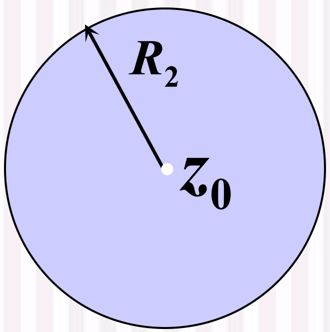
结论: 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛区域为

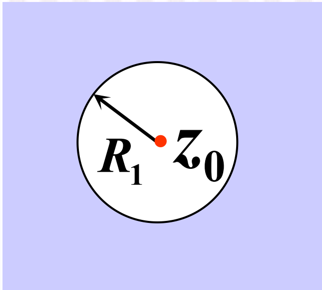
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

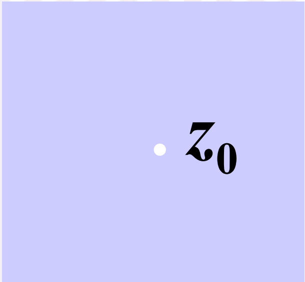


在此圆环域内和函数为解析函数且可逐项求导，可以逐项积分.

常见的特殊圆环域:







$0 < |z-z_0| < R_2$　　$R_1 < |z-z_0| < \infty$　　$0 < |z-z_0| < \infty$

2. 问题：在圆环域内解析的函数是否一定能展开成级数?

例如， $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0$ 及 $z=1$ 都不解析，

但在圆环域 $0<|z|<1$ 及 $0<|z-1|<1$ 内都是解析的.

在圆环域 $0<|z|<1$ 内：

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

而 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\ |z|<1$$

所以 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}=z^{-1}+1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots,$

即 $f(z)$在 $0<|z|<1$ 内可以展开成级数.

在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内，也可以展开成级数：

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$$=\frac{1}{1-z}\left[1+(1-z)+(1-z)^{2}+\cdots+(1-z)^{n}+\cdots\right]$$

$$=-(z-1)^{-1}+1-(z-1)+(z-1)^{2}+(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}+\cdots.$$

二、洛朗级数的概念

定理：设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析，

那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

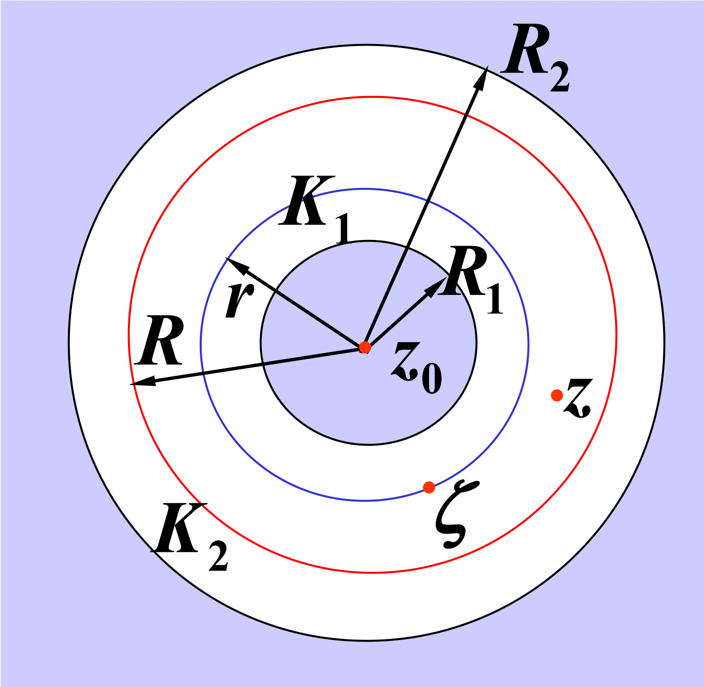
其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$ 为洛朗系数.

$(n = 0, \pm 1, \cdots)$

C 为圆环域内绕 z_0 的任一正向简单闭曲线.

证 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

对于第一个积分:



因为 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\quad\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

对于第二个积分: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

因为 $\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{-1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\quad\left(\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n},$$

则 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}+R_N(z)$$

其中 $$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}f(\zeta)}{(z-z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta$$

下面证明 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0$ 在 K_1外部成立.

令 $q=\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{r}{|z-z_0|}$ 与积分变量ζ无关,$0<q<1$.

又因为$|f(\zeta)|\le M$ (由$f(z)$的连续性决定)

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}.$$

所以 $\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0.$

于是 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\, i}\oint_{K_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \dfrac{1}{2\pi\, i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

如果C为在圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线.则 c_n与c_{-n}可用一个式子表示为:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

[证毕]

说明:

1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$在圆环域内的洛朗(Laurent)级数.

函数 $f(z)$ 在圆环域内的洛朗展开式

2) 某一圆环域内的解析函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的， 这就是$f(z)$ 的洛朗级数.

定理给出了将圆环域内解析的函数展为洛朗级数的一般方法.

三、函数的洛朗展开式

常用方法：1. 直接法　2. 间接法

1. 直接展开法

利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$

缺点：计算往往很麻烦.

2. 间接展开法

根据正、负幂项组成的的级数的唯一性, 可用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

优点 : 简捷 , 快速 .

四、典型例题

例1 在 $0<|z|<\infty$ 内, 将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开成洛朗级数.

解 由定理知: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta$

$$C:|z|=\rho(0<\rho<\infty),\quad (n=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

当 $n \le -3$ 时，$\dfrac{e^z}{z^{n+3}}$ 在圆环域内解析，

故由柯西–古萨基本定理知：$c_n = 0$

当 $n \ge -2$ 时，由高阶导数公式知：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}z^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

故 $$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

$$0 < |z| < \infty$$

另解 $$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$

本例中圆环域的中心 $z=0$ 既是各负幂项的奇点,

也是函数 $\dfrac{e^z}{z^2}$ 的奇点.

例2 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域：

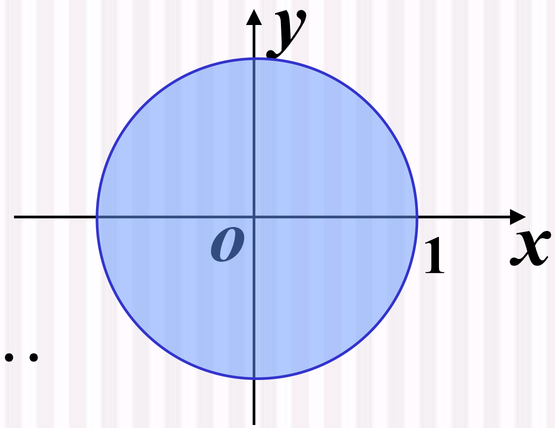
1) $0<|z|<1$;　　2) $1<|z|<2$;　　3) $2<|z|<+\infty$.

内是处处解析的，试把 $f(z)$ 在这些区域内展开成洛朗级数.

解　$f(z)=\dfrac{1}{(1-z)}-\dfrac{1}{(2-z)}$,

1) 在 $0<|z|<1$ 内,

由于$|z|<1$，从而$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$



则 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

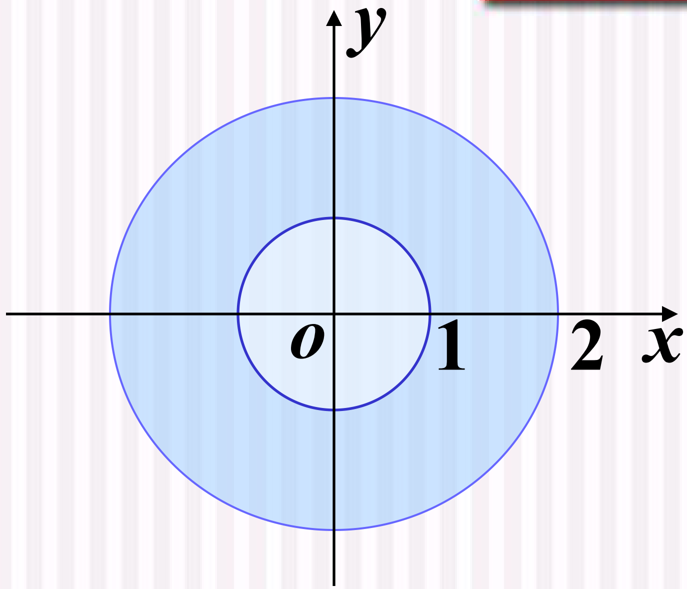
所以 $$f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots$$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,

由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$



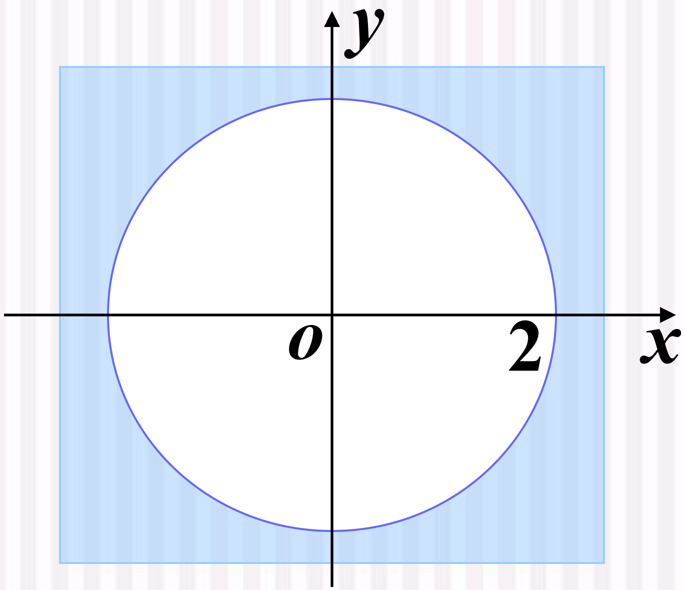
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有 $$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z) = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$= \cdots - \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots$$

3) 在 $2 < |z| < \infty$ 内,



由 $|z| > 2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1$

此时 $\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$$ 此时 $\left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$

仍有 $$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

故 $$f(z) = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

注意: 本例中圆环域的中心 $z=0$ 是各负幂项的奇点但却不是函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的奇点 .

说明:

1. 函数 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域内的洛朗级数中尽管含有 $z-z_0$ 的负幂项, 而且 z_0 又是这些项的奇点, 但是 z_0 可能是函数 $f(z)$ 的奇点,也可能不是 $f(z)$ 的奇点.

2. 给定了函数 $f(z)$ 与复平面内的一点 z_0 以后，函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

问题：这与洛朗展开式的唯一性是否相矛盾?

回答：不矛盾 .

(唯一性 : 指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的)

例3 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域：

$1)\ 0<|z-1|<1;\qquad 2)\ 1<|z-1|;$

内是处处解析的，试把 $f(z)$ 在这些区域内展开成洛朗级数.

解 1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-1-1)}=-\dfrac{1}{(z-1)}\dfrac{1}{(1-(z-1))}$

$$=-\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$

$$2)\ f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-1-1)}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{(z-1)}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

例4 将函数 $[z(z-2)]^{-1}$ 在 $z_0=2$ 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 在 $0<|z-2|<2$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2(z-2)}-\frac{1}{2^2}+\frac{z-2}{2^3}+\cdots.$$

例5 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域：

$(1)1<|z|<2$; $(2)0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

1) 当 $1<|z|<2$ 时, $f(z)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)}-\dfrac{2}{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

2) 在 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=\frac{1}{z-2}-i\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)$$

$$=\frac{1}{z-2}-i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)}-\frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)}-\frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}]\cdot\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.$$

例3 将函数 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z_0 = 0$ 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\qquad 0 < |z| < \infty$

$$= \frac{1}{z}\left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

例4 求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=3$, 且 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$.

1 **解** 2 在 $1<|z|<\infty$ 时,

3
$$f(z)=\frac{1}{z\cdot(z+1)^2}=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{-1}{1+z}\right)'$$
4
$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}}\right]'$$

5
$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots$$

因为$C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$

所以 $C_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i C_{-1}$

故 $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z=0.$

例5 求积分 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\mathrm{d}z$

解 因为在 $0<|z|<1$内，有

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+z+\cdots+z^n+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)$$

于是 $c_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$

故 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\mathrm{d}z=2\pi ie$

五、小结与思考

在这节课中, 我们学习了洛朗展开定理和函数展开成洛朗级数的方法. 将函数展开成洛朗级数是本节的重点和难点.

思考题

洛朗级数与泰勒级数有何关系?

思考题答案

是一般与特殊的关系.

洛朗级数是一个双边幂级数, 其解析部分是一个普通幂级数;

洛朗级数的收敛区域是圆环域 $r < |z - z_0| < R$.

当 $z_0 = 0, r = 0, c_{-n} = 0$ 时,

洛朗级数就退化为泰勒 级数了.