第三节 随机变量的函数及其分布(1)

一维随机变量的函数的分布

- 一、离散型随机变量的函数的分布
- 二、连续型随机变量的函数的分布
- 三、内容小结

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数，若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y=f(x)$ 的值，则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数，记作 $Y=f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量 $Y=f(X)$ 的分布?

例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y = X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2,\ 0^2,\ 1^2,\ 2^2;$

即 $0,\ 1,\ 4.$

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}$$

$$=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=f(X)$ 的分布律为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $f(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、连续型随机变量的函数的分布

设 X是连续型随机变量, $Y = f(X)$

1. 分布函数法

先求: $F_Y(y)$

再求: $p_Y(y) = F'_Y(y)$.

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求随机变量$Y = 2X + 8$的概率密度.

解 1° 先求$Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\mathrm{d}x$$

2° 由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=[\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\mathrm{d}x]'$$

$$=p_X(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})'=p_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

2. 公式法

定理 (例2.18) 设随机变量 X 的具有概率密度 $p_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$. 又设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 且恒有 $f'(x) > 0$ (或恒有 $f'(x) < 0$), 则 $Y = f(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $f^{-1}(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, (α,β) 是 $f^{-1}(y)$ 的定义域,

$$\left|[f^{-1}(y)]'\right| = \begin{cases} [f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x) > 0 \text{时} \\ -[f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x) < 0 \text{时} \end{cases}$$

例4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

设 $y = f(x) = ax + b$,

得 $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $[f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{a} \neq 0.$

由公式 $p_Y(y) = p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < \frac{y-b}{a} < +\infty.$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

得 $Y = aX + b$

$\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

例5 设 $X \sim U(0,1)$, 求 $Y = e^X$ 的分布密度.

解 $\because X \sim U(0,1)$

$\therefore X$ 的分布密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

方法1 (公式法)

$\because y = e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，单调增加

$$x = f^{-1}(y) = \ln y, \quad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \quad p_Y(y)=\begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\cdot[f^{-1}(y)]', & 0<y<+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\cdot[f^{-1}(y)]', & 0<f^{-1}(y)<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\cdot\dfrac{1}{y}, & 0<\ln y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1<y<e \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

方法2 (分布函数法)

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^X \le y\}$$

$$= \begin{cases} P(\varnothing), & y \le 0 \\ P\{X \le \ln y\}, & y > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \int_{-\infty}^{\ln y} p_X(x)dx, & y > 0 \end{cases}$$

当 $y > 0$ 时，$\int_{-\infty}^{\ln y} p_X(x)dx = \begin{cases} 0, & \ln y \le 0 \\ \int_{-\infty}^{\ln y} p_X(x)dx, & 0 < \ln y < 1 \\ \int_{-\infty}^{1} p_X(x)dx, & \ln y \ge 1 \end{cases}$

$$=\begin{cases} 0, & \ln y \le 0 \\ \int_0^{\ln y} p_X(x)dx, & 0 < \ln y < 1 \\ \int_0^1 p_X(x)dx, & \ln y \ge 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & \ln y \le 0 \\ \int_0^{\ln y} 1dx, & 0 < \ln y < 1 \\ \int_0^1 1dx, & \ln y \ge 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \ln y, & 1 < y < e \\ 1, & y \ge e \end{cases}$$

$$\therefore \quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 0, & 0<y\le 1\\ \ln y, & 1<y<e\\ 1, & y\ge e\end{cases}$$

从而 $\quad p_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例8 设随机变量 X 分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数，试证明：$Y=F(X)$ 在[0,1]上服从均匀分布.

证 $\because$ $F(x)$ 是分布函数

$\therefore$ $0 \le F(x) \le 1$，且 $F(x)$ 单调不减

依题意，又知 $F(x)$ 严格单调增加

故 $\forall\, y \in R$，

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$$

$$= \begin{cases} P(\varnothing), & y < 0 \\ P\{F(X) \le y\}, & 0 \le y \le 1 \\ P(\Omega), & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P\{X \le F^{-1}(y)\}, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F[F^{-1}(y)], & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = [F_Y(y)]'$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即$Y = F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

三、内容小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=f(X)$ 的分布律为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{f(X) \le y\}$

$$= \int_{f(x)\le y} p_X(x)dx \qquad (-\infty < x < \infty)$$

再对$F_Y(y)$求导得到Y的密度函数.

方法2

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注意条件.

思考题

设 $f(x)$ 是连续函数,若 X 是离散型随机变量,则 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量吗?若 X 是连续型的又怎样?

答 若 X 是离散型随机变量,它的取值是有限个或可列无限多个,因此 Y 的取值也是有限个或可列无限多个,因此 Y 是离散型随机变量.若 X 是连续型随机变量,那末 Y 不一定是连续型随机变量.

备用题 设随机变量 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3 e^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = X^2$ 和 $Y = 2X + 3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y = X^2$ 分布函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \quad (\text{当 } y > 0 \text{ 时})$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$p_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3e^{-x^2}, & x\geq 0.\end{cases}$$

再由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=p_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'-p_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot(\sqrt{y})^3\cdot e^{-(\sqrt{y})^2}+0\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ye^{-y}}{2}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$$

当 Y=2X+3 时,有

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2},$$

$$p_Y(y) = F_y'(y) = [\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x]'$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$