第一节 复变函数积分的概念

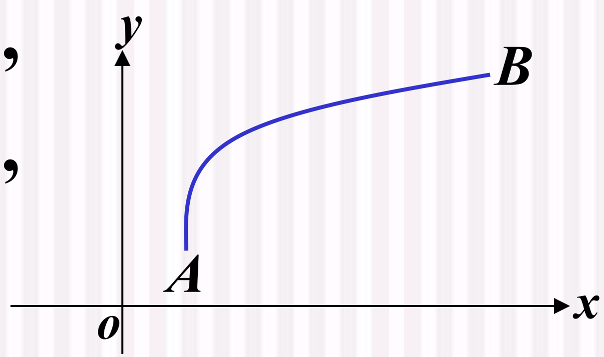
- 一、积分的定义
- 二、积分存在的条件及其计算法
- 三、积分的性质
- 四、小结与思考

一、积分的定义

1.有向曲线:

规定了起点和终点光滑曲线或按段光滑的曲线称为有向曲线.

如果A到B作为曲线C的正向,
那么B到A就是曲线C的负向,
记为C^-.

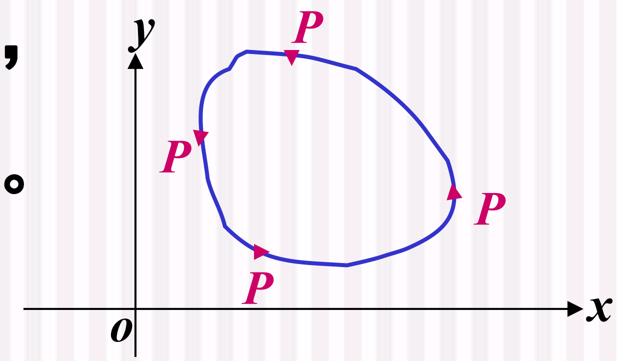


若曲线是简单闭曲线，通常规定逆时针方向为正方向，顺时针方向为负方向，若闭曲线作为某区域的边界，规定其正向为：

当点P沿闭曲线前进时，邻近P点的区域总在闭曲线左侧。

内部区域，其正向为逆时针方向，

外部区域，其正向为顺时针方向。



2.积分的定义:

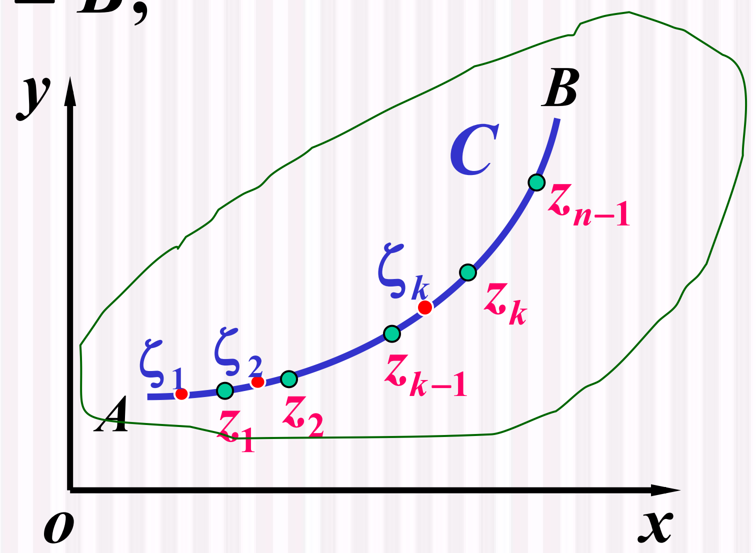
设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线，把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$(k = 1,2,\cdots,n)$

上任意取一点 ζ_k,



作和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k,$

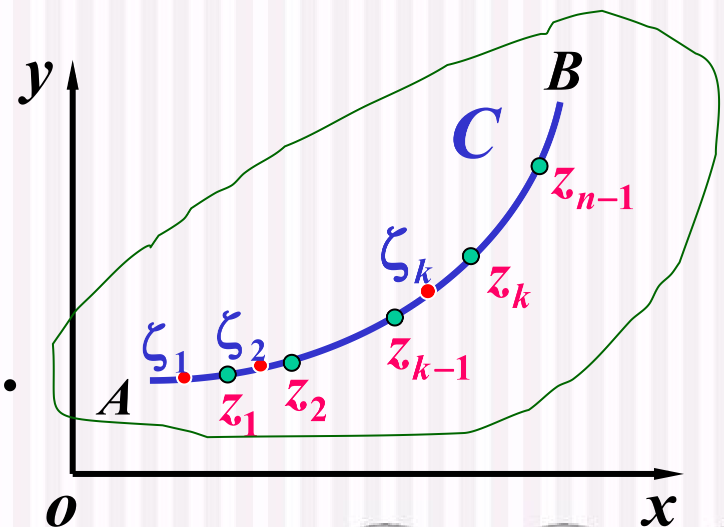
这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$，当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限,那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分,

记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k .$$



关于定义的说明:

(1) 如果 C 是闭曲线,那么沿此闭曲线的积分

记为 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$,而 $f(z) = u(x)$,这个积分定义就是一元 实变函数定积分的定义.

二、积分存在条件及其计算

定理1（积分存在定理） 若 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在光滑曲线C上连续，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y \qquad (1)$$

证： 设 $z_k=x_k+iy_k,\ \zeta_k=\xi_k+i\eta_k,$

$$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=x_k+iy_k-(x_{k-1}+iy_{k-1})$$

$$=(x_k-x_{k-1})+i(y_k-y_{k-1})$$

$$=\Delta x_k+i\Delta y_k,$$

所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k) + i\,v(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于 u, v 都是连续函数,因此第二类曲线积分均存在,

即当 n 无限增大而弧段长度的最大值趋于零时,不论对 C 的分法任何,点 (ξ_k,η_k) 的取法如何,下式两端极限存在,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$+\, i\boxed{\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

证毕

2. 定义10.2 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**, 在L 上定义了一个有界**向量函数**

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

都存在(**与分割和取点无关**),其中$\Delta\vec{r}_i=\Delta x_i\,\vec{i}+\Delta y_i\,\vec{j}$,

$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{|\Delta \vec{r}_i|\}$, 则称此极限值为向量值函数

$F(x,y)$在有向曲线弧 L 上的第二类曲线积分,

或对坐标的曲线积分，记作

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

积分曲线

$$= \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

注：公式记忆

(1) $f(z)=u+iv$ 与 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

$$=\int_C u\mathrm{d}x+iv\mathrm{d}x+iu\mathrm{d}y-v\mathrm{d}y$$

$$=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

（2）若曲线 C由参数方程给出 $z=z(t)=x(t)+i\,y(t)$,

$(\alpha\le t\le\beta)$给出，$f(z)$沿C连续，则

$$f(z(t))=u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))=u(t)+iv(t)$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t \qquad (2)$$

(3) 如果 C 是由 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 等光滑曲线依次相互连接所组成的按段光滑曲线, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

常用参数方程形式

(a) 线段 $\quad z = (1-t)z_1 + tz_2 \quad 0 \le t \le 1$

(b) 圆周 $\quad z = z_0 + re^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

例1 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$, C: 从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解 直线方程为 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$,

在 C 上, $z = (3+4i)t$, $\mathrm{d}z = (3+4i)\mathrm{d}t$,

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (3+4i)^2 t\mathrm{d}t = (3+4i)^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

又因为 $\int_C z\mathrm{d}z = \int_C (x+iy)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$

$$\int_C z\mathrm{d}z = \underline{\underline{\int_C x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y}} + i\underline{\underline{\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}}$$

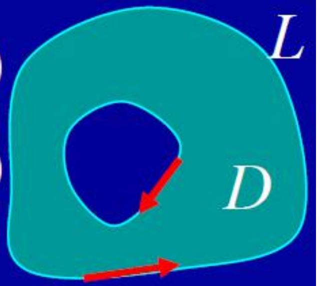
这两个积分都与路线C无关

所以不论 C 是怎样从原点连接到点 $3+4i$ 的曲线,

$$\int_C z\mathrm{d}z = \frac{(3+4i)^2}{2}. \quad = \frac{1}{2}z^2 \Big|_0^{3+4i}$$

格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域（无“洞”区域）} \\ \text{多连通区域（有“洞”区域）} \end{cases}$



域 D 边界L 的**正向**: **域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （格林公式）

例2 计算 $\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

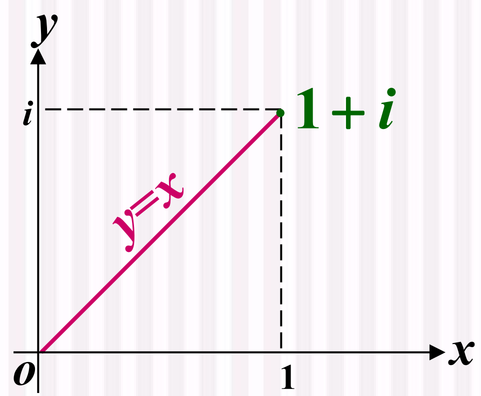
(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

(3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$



于是 $\operatorname{Re} z = t,\quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+i);$$

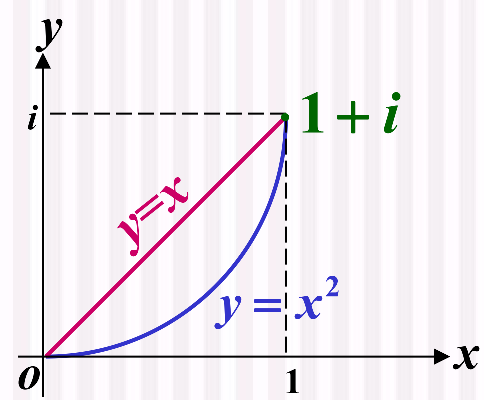
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it^2 \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z=t,\quad dz=(1+2ti)dt,$

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz=\int_0^1 t(1+2it)dt$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$



(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

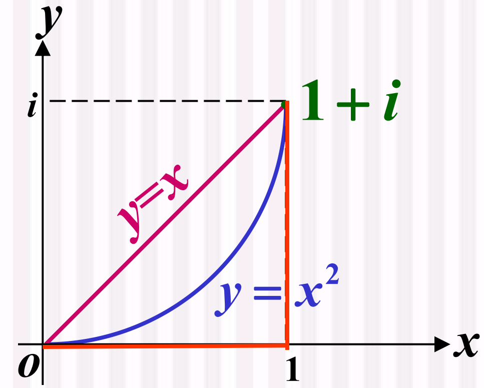
于是 $\operatorname{Re} z = t, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t,$

1到1+i直线段的参数方程为$z(t)=1+it \ (0\le t\le 1)$,

于是 $\operatorname{Re} z = 1, \quad \mathrm{d}z = i\mathrm{d}t,$

$$\int_C \operatorname{Re} z\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} + i.$$



例3 计算 $\int_C |z| \mathrm{d}z$, 其中 C 为：圆周 $|z| = 2$.

解 积分路径的参数方程为

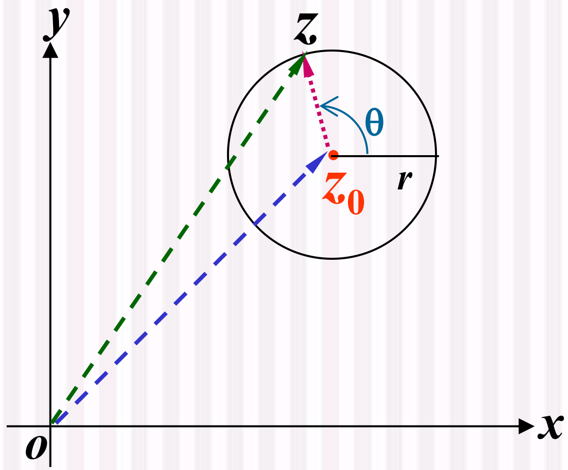
$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \qquad \mathrm{d}z = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_C |z| \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \quad (\text{因为 } |z| = 2)$$

$$= 4i\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 0.$$

例4 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.



解 积分路径的参数方程为

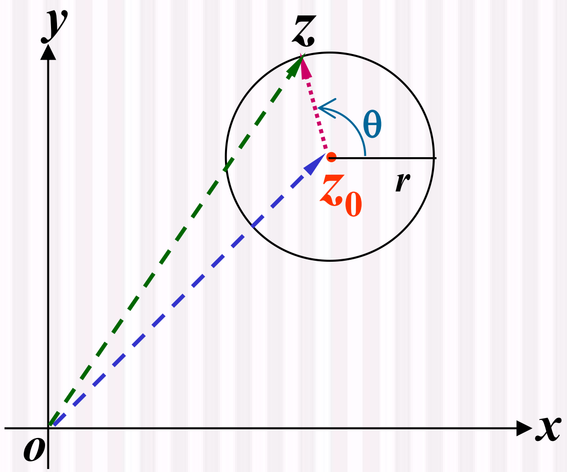
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当 $n\neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以

$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.

三、积分的性质

复积分与实变函数的线积分有类似的性质.

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z;$ (k为常数)

(3) $\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$

(4) 设曲线 C 的长度为 L, 函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\le M$, 那末 $\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}S \le ML.}$

估值不等式

例5 设 C 为从i到点 $2+i$ 的直线段， 试证：

$$\left|\int_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z\right| \le 2$$

解 C 的参数方程为：

$$z=(1-t)i+t(2+i)=2t+i,\quad (0\le t\le 1)$$

故

$$\left|\frac{1}{z^2}\right|=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{4t^2+1}\le 1$$

$$\left|\int_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z\right| \le 1\times 2=2$$

四、小结与思考

本课我们学习了积分的定义、存在条件以及计算和性质. 应注意复变函数的积分有和二元微积分学中的线积分完全相似的性质. 本课中重点掌握复积分的计算方法.

思考题

复函数 $f(z)$ 的积分定义式 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与一元函数定积分是否一致？

思考题答案

若 C 是实轴上区间 $[\alpha, \beta]$, 则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$,

如果 $f(x)$ 是实值的, 即为一元实函数的定积分.

一般不能把起点为 α, 终点为 β 的函数 $f(z)$ 的积分

记作 $\int_\alpha^\beta f(z)\mathrm{d}z$, 因为这是一个线积分, 要受积分路

线的限制, 必须记作 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.