第二节 柯西一古萨基本定理

- 一、问题的提出
- 二、基本定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、问题的提出

积分与路径是否有关 $\Leftrightarrow$ 沿闭曲线积分为零

1、解析性

2、区域的连通性

假定$f(z)$在**单连通区域**D上是解析的，C是简单闭曲线，**如果其导函数在D上连续**，则

假定$f'(z)$是连续的

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$$

$$= \iint_D -v_x - u_y dxdy + i\iint_D u_x - v_y dxdy = 0.$$

C-R方程

二、基本定理

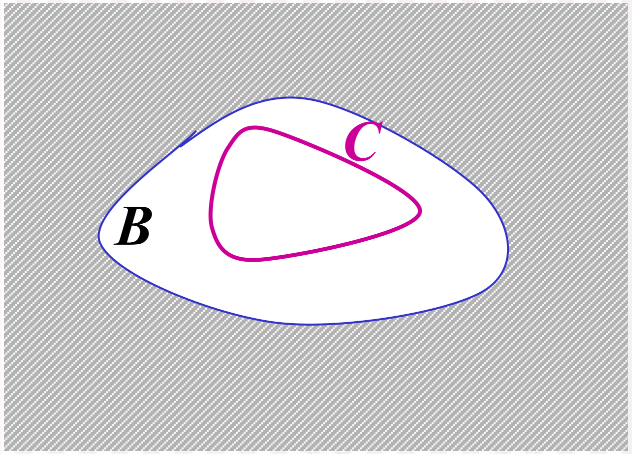
柯西—古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内解析, 则函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零:

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

定理中的 C 可以不是简单曲线.

定理也称为**柯西积分定理**.



关于定理的说明:

(1) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内与 C 上解析, 即在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上解析, 那末

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(2) 如果曲线 C 是区域 B 的边界, 函数 $f(z)$ 在 B 内解析, 在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上连续, 那末定理仍成立.

推论：

设$f(z)$在复平面上的单连通区域D内解析，则$f(z)$在 D 内积分和路径无关。

三、典型例题

例1 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z.$

解 函数 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \le 1$ 内解析,

根据柯西一古萨定理，有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z = 0.$$

例2 计算积分 $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$

因为 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西一古萨定理得

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right) dz$$

$$=\boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$=0$$

$$=-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=-\pi i.$$

四、小结与思考

通过本课学习, 重点掌握柯西一古萨基本定理:

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零: $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

并注意定理成立的条件.

思考题

应用柯西–古萨定理应注意什么?

思考题答案

(1) 注意定理的条件“单连通域”.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内;

(2) 注意定理的不能反过来用.

即不能由 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$, 而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析.

反例: $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.