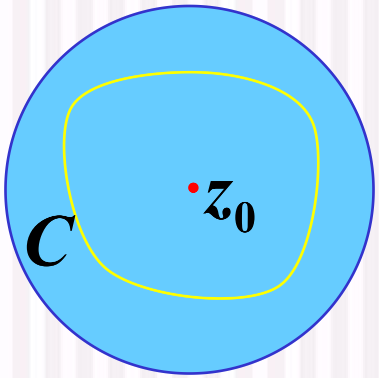
# 第二节 留 数

- 一、留数的引入
- 二、利用留数求积分
- 三、在无穷远点的留数
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

## 一、留数的引入

设 $z_0$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点; $C$ 为




$z_0$ 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$

内包含 $z_0$ 的任一条正向简单闭曲线

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗级数:

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

$$= \cdots + c_{-n}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0\ \text{(高阶导数公式)}} + \cdots + c_{-1}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i} + \cdots$$

$$+ \oint_C c_0\mathrm{d}z + \oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z + \cdots$$

0 (柯西-古萨基本定理)

$= 2\pi i c_{-1}$　洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

即 $$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$$

$f(z)$在$z_0$的留数

## 二、利用留数求积分

**1.留数定理**　函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析, $C$ 是 $D$ 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那末

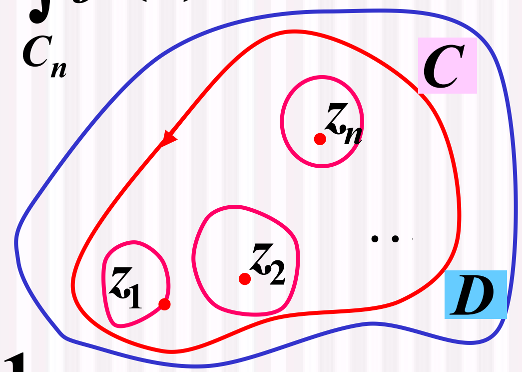
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

说明: 1. $f(z)$ 在 $C$ 上无奇点;

2. 留数定理将沿封闭曲线 $C$ 积分转化为求被积函数在 $C$ 内各孤立奇点处的留数.

**证** 如图

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$




两边同时除以 $2\pi i$ 且

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f(z),z_n]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$ 即可得. [证毕]

## 2.留数的计算

(1) 如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$

(2) 如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 $c_{-1}$.

(3) 如果 $z_0$ 为 $f(z)$的极点, 则有如下计算规则

•规则1 如果 $z_0$ 为 $f(z)$的一级极点, 那末

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z).$$

•规则2　如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的 $m$ 级极点，　那末

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

证　$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+$$

$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

两边求 $m-1$ 阶导数,

得 $\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

$=(m-1)!c_{-1}+$(含有 $z-z_0$ 正幂的项)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!c_{-1},$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$ [证毕]

•**规则3** 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 $z_0$ 都解析,

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 那末 $z_0$ 为

$f(z)$ 的一级极点, 且有 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

**证** 因为 $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$

所以 $z_0$ 为 $Q(z)$ 的一级零点,

$z_0$ 为 $\dfrac{1}{Q(z)}$ 的一级极点.

因此 $\dfrac{1}{Q(z)}=\dfrac{1}{z-z_0}\cdot\varphi(z),$

其中$\varphi(z)$在$z_0$解析且$\varphi(z_0)\neq 0,$

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0}\cdot P(z)\varphi(z).$$

在$z_0$解析且$P(z_0)\varphi(z_0)\neq 0.$

所以$z_0$为$f(z)$的一级极点,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

## 三、在无穷远点的留数

1. **定义** 设函数 $f(z)$在圆环域 $R<|z|<+\infty$内解析，

$C$为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线，

那末积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$的值与$C$无关，则称此定值

为 $f(z)$在$\infty$点的留数，

记作 $$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$$

注意积分路线取顺时针方向

$=-c_{-1}$

说明 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$

**2.定理二**

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那末 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括$\infty$点) 的留数的总和必等于零.

**说明:** 由定理得

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = -\mathrm{Res}[f(z), \infty],$$

$$\therefore \quad \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] \quad \text{(留数定理)}$$

$$= -2\pi i \mathrm{Res}[f(z), \infty].$$

计算积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z \longrightarrow$ 计算无穷远点的留数.

优点: 使计算积分进一步得到简化.

(避免了计算诸有限点处的留数)

## 3.在无穷远点处留数的计算

• **规则4**

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

**说明：** 定理二和规则4提供了计算函数沿闭曲线

积分的又一种方法:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

此法在很多情况下更为简单.

证明：取半径足够大的正向圆周$C$: $|z|=\rho$.

令 $z=\dfrac{1}{\zeta}$, 并设$z=\rho e^{i\theta}$, $\zeta=re^{i\varphi}$.则$\rho=\dfrac{1}{r}$, $\varphi=-\theta$.直接计算便得，

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho ie^{i\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{re^{i\varphi}}d\varphi=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{1}{(re^{i\varphi})^2}dre^{i\varphi}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}d\zeta=\operatorname{Res}[f(\frac{1}{\zeta})\frac{1}{\zeta^2},0].$$

新函数在 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{\rho}$ 内解析，$\zeta=0$ 是孤立奇点.

# 四、典型例题

**例1** 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^n}$ 在 $z=0$ 的留数.

**解** 因为 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 $n$ 级极点,

所以 $$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n},0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(z^n\cdot\frac{e^z}{z^n}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}.$$

例2　求 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 的留数.

分析　$P(0)=P'(0)=P''(0)=0,\quad P'''(0)\neq 0.$

$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点， 由规则3得

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right].$$

计算较麻烦.

**解** 如果利用洛朗展开式求 $c_{-1}$ 较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\frac{z}{7!}+\cdots,$$

$$\therefore \ \mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

**说明:** 1. 在实际计算中应灵活运用计算规则.

如 $z_0$ 为 $m$ 级极点，当 $m$ 较大而导数又难以计算时,

可直接展开洛朗级数求 $c_{-1}$ 来计算留数 .

2. 在应用规则2时，为了计算方便一般不要将$m$

取得比实际的级数高. 但有时把$m$取得比实际的

级数高反而使计算方便. 如上例取 $m=6$ :

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

例3 求 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数.

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的四级极点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数:

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots-1\right)$$

$$=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots,$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}.$

**例4** 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$C$为正向圆周：$|z|=2$.

**解** $z=0$ 为一级极点， $z=1$为二级极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

所以 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),1]\}$$

$$= 2\pi i(1+0)$$

$$= 2\pi i.$$

**例5** 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$, $C$为正向圆周: $|z|=2$.

**解** 被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm 1, \pm i$ 都在圆周 $|z|=2$ 的内部, 所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

由规则3 $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$,

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}=0.$$

**法2** 函数 $\dfrac{z}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 的外部, 除 $\infty$ 点外没有

其他奇点. 根据定理 2与规则4:

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^4-1},\infty\right] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right] = 0.$$

注意：当无穷远点是可去奇点时，留数未必是0！ 比如：

$f(z)=1-\dfrac{2}{z}$ 因为不含正幂次项，无穷远是可去奇点.留数为 2.

**例6** 计算 $\int_{|z|=n} \tan \pi z dz \quad (n \in N)$

**解** $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 令 $\cos \pi z = 0$

解得 $\pi z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 即, $z = k + \dfrac{1}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$(\cos \pi z)'\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\pi \sin \pi z\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \neq 0$$

由规则3

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k+\frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\Bigg|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

故　由留数定理得:

1
$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k+\tfrac{1}{2}\right]$$

2
$$= 2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni$$

**例7** 计算积分:$\oint_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$, 圆周取正向.

原式 $= 2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),-i]+\operatorname{Res}[f(z),1]\}$

$$= -2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\} = -2\pi i\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\} = -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.$$

# 五、小结与思考

本节我们学习了留数的概念、计算以及留数定理. 应重点掌握计算留数的一般方法,尤其是极点处留数的求法, 并会应用留数定理计算闭路复积分.

# 思考题

计算 $\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z,\ C: |z| = 2$正向.

**思考题答案** $2\pi i\sin^2 1.$