第二节 事件的关系和运算

- 一、随机事件间的关系及运算
- 二、小结与思考题

一、随机事件间的关系及运算

回忆一下上节讲的一些符号：

样本点ω = 基本事件

样本空间Ω = {全体样本点}

= 必然事件

随机事件：是由具有某些特征的基本事件所组成，所以

随机事件 = 样本空间Ω的一个子集.

例： E_2：袋中摸球.设袋中有10个外形相同的球，分别标有数字1,2,$\cdots$10.从中任意摸一球，观察球上所标的数字.

记 i =“摸到标号为i的球” (i=1,2,…,10)

结论： 则样本点为：$\omega=\{ i \}$

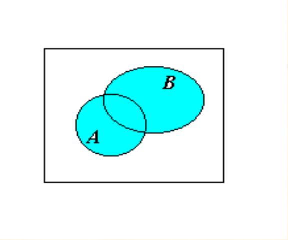
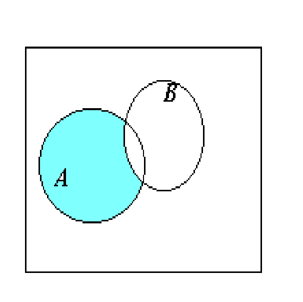
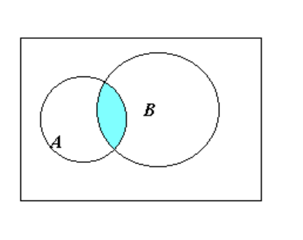
样本空间：$\Omega=\{1,2,\ldots,10\}$

事件D={球的标号是奇数} ={1，3，5，7，9}

F={球的标号$\leq$5}={1，2，3，4，5}

$D \subset \Omega, F \subset \Omega$ D, F均是Ω的子集.

1.运算(有3种）

运算	符号	概率论	集合论	Venn图
和	$A \cup B$	事件A与B至少有一个发生	A与B的并集	
差	$A - B$	事件A发生而B不发生	A与B的差集	
积	AB 或$A \cap B$	事件A与B同时发生	A与B的交集	

目录 上页 下页 返回 结束

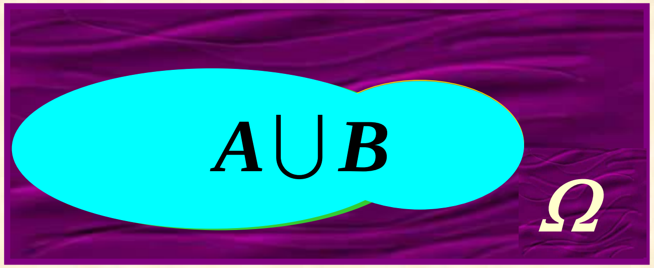
1、事件 A 与 B 的并(和事件)

“二事件 A, B至少发生一个”也是一个事件，称为事件 A 与事件B的**和事件**.记作$A \cup B$，显然

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \text{或} e \in B\}.$$

实例： 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并。

图示事件 A 与 B 的并.



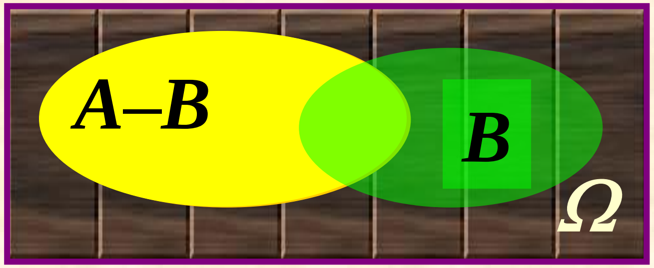
2、事件 A 与 B 的差

由事件 A 出现而事件 B 不出现所组成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

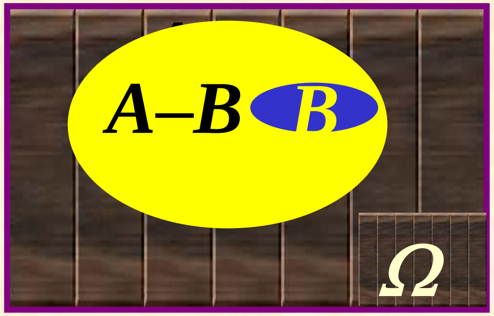
实例： “长度合格但直径不合格”是“长度合格”与“直径合格”的差.

结论： 图示 A 与 B 的差

情形1：$B \not\subset A$



情形2：$B \subset A$



3、 事件 A 与 B 的交 (积事件)

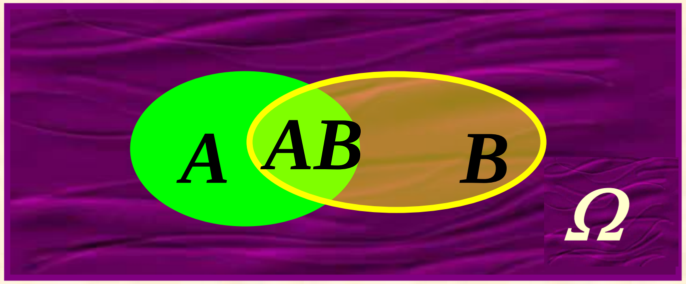
定义:"二事件A, B同时发生"也是一个事件, 称为事件A与事件 B 的**积事件**, 记作$A \cap B$, 显然

$A \cap B = \{e \mid e \in A且e \in B\}$.

积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB.

实例: "某家庭中即有男孩又有女孩"是"某家庭中有男孩"与"某个家庭中有女孩"的交或积事件.

结论: 图示事件A与B 的积事件.



• **推广** ① $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生.

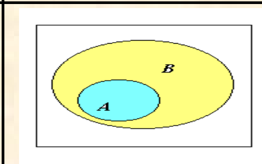
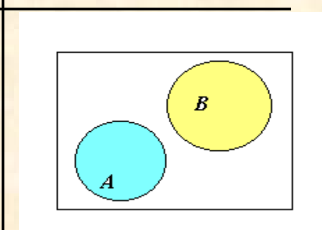
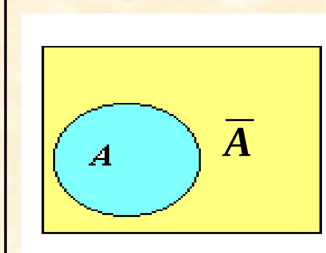
② $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$同时发生.

2.关系(有4种）

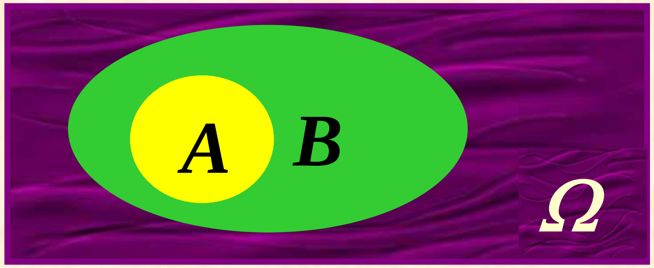
关系	符号	概率论	集合论	Venn图
包含	$A \subset B$	A发生则B必发生	A是B的子集	
等价	$A = B$	$A \subset B$ 且 $B \subset A$	A与B相等	
互斥(互不相容)	$AB = \varnothing$	事件A与B不能同时发生	A与B不相交	
对立(互逆)	$\overline{A}$	A的对立事件	A的余集 ① $A \cup \overline{A} = \Omega$ ② $A\overline{A} = \varnothing$	

1、包含关系

定义： 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现，则称事件 B 包含事件 A, 记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例： “长度不合格” 必然导致 “产品不合格” 所以“产品不合格”包含“长度不合格”.

结论：图示 B 包含 A.



2、事件 A 与 B 互不相容 (互斥)

定义 若事件 A 的出现必然导致事件 B 不出现, B 出现也必然导致 A不出现,则称事件 A与B互不相容, 即

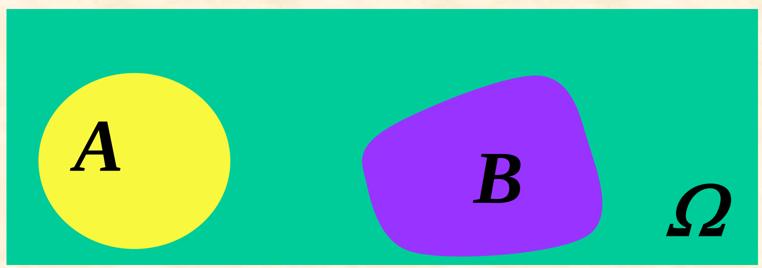
$$A \cap B = AB = \varnothing.$$

实例 抛掷一枚硬币, “出现花面” 与 “出现字面” 是互不相容的两个事件.

实例　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

"骰子出现1点" $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ "骰子出现2点"

图形描述:　　　　图示 A与B互斥



说明　当$A \cap B = \varnothing$时,可将$A \cup B$记为"直和"形式：$A+B$.

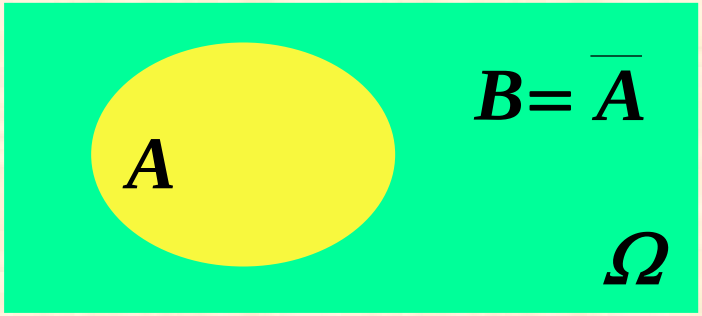
任意事件A与不可能事件$\varnothing$为互斥.

3、事件 A 的对立（互逆）事件

定义 设 A 表示“事件 A 出现”，则“事件 A 不出现”称为事件 A 的**对立事件或逆事件**. 记作 $\overline{A}$.

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 的对立.



结论 若 A 与 B 互逆，则有 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$.

注. 1^{o}互斥与互逆的关系

$$\boxed{\text{互逆} \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \text{互斥}}$$

如：对于 E_2, $A=\{2\}, B=\{5\}$

$\because AB=\varnothing \quad \therefore A$与$B$互斥

但 $A\cup B=\{2,5\}\neq\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$

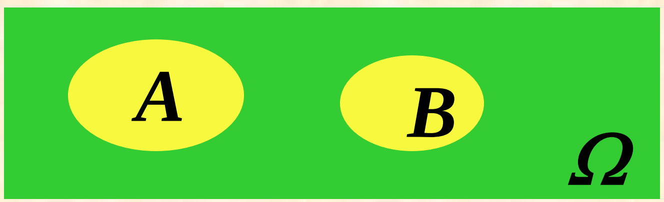
$\therefore A$与B不互逆

$D=\{1,3,5,7,9\}$与$G=\{2,4,6,8,10\}$互逆.

2^{o}必然事件Ω与不可能事件$\varnothing$互逆.

对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥 | **A、B 对立**



$$AB=\varnothing,$$

$$A\cup B=\Omega \text{ 且 } AB=\varnothing.$$

互　斥 $\underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 对　立

3. 运算法则

运算法则可以对事件进行化简！！！

1.交换律：(1) $A\cup B = B\cup A$

(2) $AB = BA$

2.结合律：(1) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

(2) $(AB)C = A(BC)$

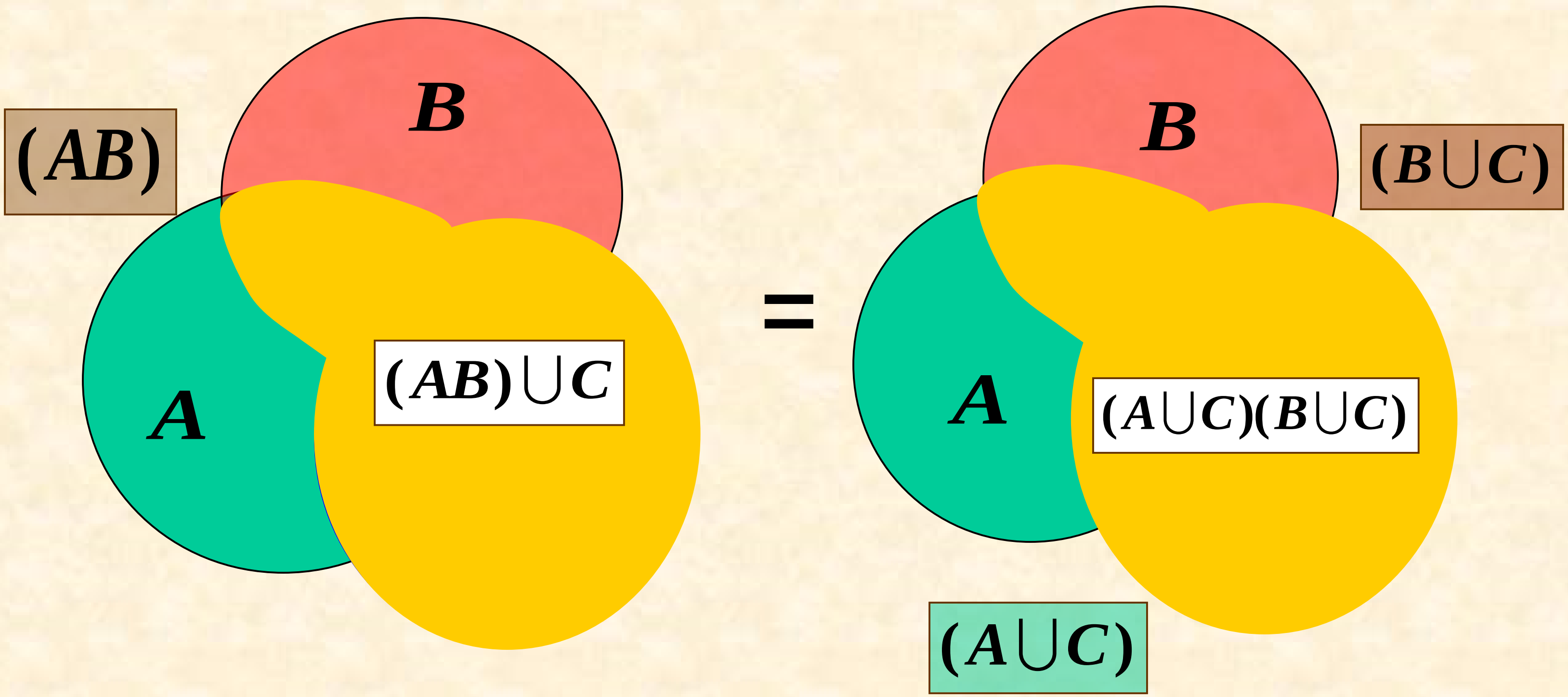
3.分配律：(1) $(A\cup B)C = AC\cup BC$

★ (2) $(AB)\cup C = (A\cup C)(B\cup C)$

$A\cup(BC) = (A\cup B)(A\cup C)$

目录 上页 下页 返回 结束

下面由文氏图简单说明★ 式的正确性



注：此处只能进行简单的说明，不能用这种方法证明，具体证明的方法参看教材例1.2。

4. 对偶律(De Morgan定理)

(1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A}\ \bar{B}$

意义：“A，B至少有一发生”的对立事件

是“A，B均不发生”.

(2) $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

意义：“A，B均发生”的对立事件是“A，B

至少有一个不发生”.

推广：$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

5.　若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$AB = A$.

特别地，$A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$

$A\varnothing = \varnothing$, $A\Omega = A$

例1 设 A，B为随机事件，证明：

(1) $A\text{-}B=A\text{-}(AB)$

(2) $A\cup B=A+(B\bar{A})=A\bar{B}+(\bar{A}B)+(AB)$

证 (1) $A-(AB)=A\overline{AB}$ $\qquad (A-B=A\bar{B})$

$$=A(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=A\bar{A}\cup A\bar{B}=\varnothing\cup A\bar{B}$$

$$=A\bar{B}=A-B$$

(2) $A+B\overline{A}=A\cup B\overline{A}$

$$=(A\cup B)(A\cup \overline{A})$$

$$=(A\cup B)\Omega=A\cup B$$

$$A\overline{B}+\overline{A}B+AB$$

$$=A(B+\overline{B})+\overline{A}B=A\Omega+B\overline{A}$$

$$=A+B\overline{A}=A\cup B$$

例2 下列命题是否正确？

(1) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

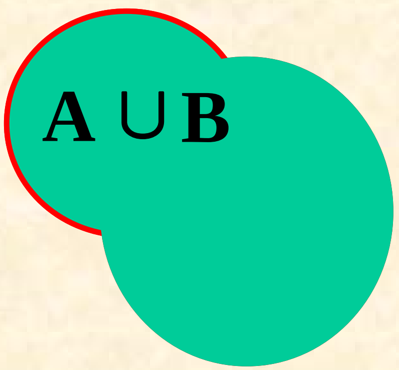
A，B至少有一个不发生

A，B均不发生

(2) $A+(B-A)=B$

解 不正确.

一般地，$A+(B-A)=A\cup B \neq B$



特别地，

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$

从而 $A + (B - A) = A \cup B = B$

(3) $B(A - C) = BA - BC$ √

解 正确.

$$BA - BC = BA\overline{BC} = BA(\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$= BA(\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$= BA\overline{B} \cup BA\overline{C} = \varnothing \cup BA\overline{C}$$

$$= BA\overline{C} = B(A - C)$$

例3 设A，B，C为三个事件，试用这三个事件的运算关系表示下列事件：

(1) A发生，而B，C都不发生.

可表示为：$\boxed{A\overline{B}\,\overline{C}}$ 或 $A\overline{B \cup C}$

(2) A，B，C中恰有一个发生.

可表示为：$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$

(3) A，B，C中恰有两个发生.

可表示为：$AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$

或 $AB \cup BC \cup AC - ABC$

(4) A，B，C中不多于一个发生.

可表示为：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$

或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

例4 在某系学生中任选一名学生，设事件

A=“选出的学生是男生”；

B=“选出的学生是三年级学生”；

C=“选出的学生是运动员”.

(1) 叙述事件$AB\overline{C}$的含义.

(2) 在什么条件下，$ABC=C$成立？

(3) 什么时候关系$C\subset B$成立？

A="选出的学生是男生"；

B="选出的学生是三年级学生"

C="选出的学生是运动员".

解 (1) $AB\overline{C}$的含义是"选出的学生是三年级的男生，但他不是运动员".

(2) $\because ABC\subset C$

$\therefore ABC=C$的充要条件是: $C\subset ABC$

又$\because ABC\subset AB$

$\therefore ABC=C$的充要条件是：$C\subset AB$

$C \subset AB$ 即“某系学生中的运动员都是三年级的男生”.

(3) 什么时候关系$C \subset B$成立？

解 当运动员都是三年级的学生时，C是B的子事件，即 $C \subset B$成立.

A=“选出的学生是男生”；

B=“选出的学生是三年级学生”

C=“选出的学生是运动员”.

练习1

设A,B,C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A 出现 , B, C 不出现;

(2) A, B都出现, C 不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于两个事件出现;

(8) 三个事件至少有两个出现;

(9) A, B 至少有一个出现, C 不出现;

(10) A, B, C 中恰好有两个出现.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ or $A-B-C$ or $A-(B\cup C)$;

(2) $AB\overline{C}$ or $AB-C$; (3) ABC;

(4) $A\cup B\cup C$; (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}$

$+A\bar{B}C+\bar{A}BC$,

或 $\overline{ABC}$;

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

(9) $(A\cup B)\bar{C}$;

(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$.

二、小结

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	空间(全集)
Φ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A出现必然导致B出现	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等

目录 上页 下页 返回 结束

$A \cup B$	事件A与事件B的和	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的积事件	A集合与B集合的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB = \varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素