概率论与数理统计

第一节 大数定律

- 一、问题的提出
- 二、随机变量序列的收敛性
- 三、常用的四种大数定律

一、问题的提出

我们在第一章有关概率的统计定义中讲到，**随机现象**在大量重复试验中呈现**统计规律性**, 即事件发生的**频率具有稳定性**.

频率稳定性是贝努利于1713年首先提出关于频率稳定性的定理, 被称为**贝努利大数定律**.

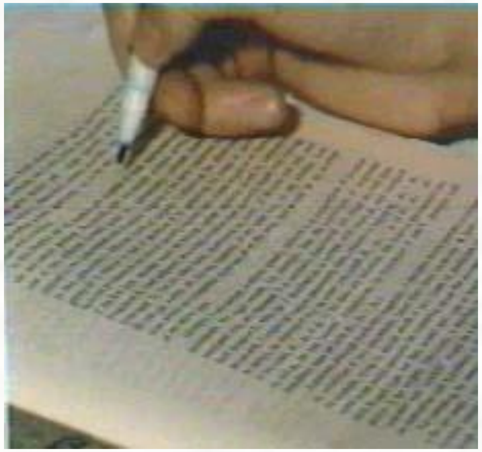


大数定律的客观背景

在实践中，人们认识到大量测量值的**算术平均值**也具有稳定性．大数定律就是用于研究大量随机现象中平均结果稳定性的理论．

大量抛掷硬币正面出现的频率

生产过程中的废品率



字母使用的频率

二、随机变量序列的收敛性

定义4.1 设随机变量 $Y_n(n=1,2,\cdots)$ 和随机变量Y的分布函数分别为$F_n(x)(n=1,2,\cdots)$和$F(x)$,若在$F(x)$ 的所有连续点 x 上都有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

则称随机变量序列 $\{Y_n\}$ 依分布收敛于随机变量Y,简记为

$$Y_n \xrightarrow{L} Y$$

依分布收敛表示：当n充分大时，Y_n 的分布函数

$F_n(x)$ 收敛于Y的分布函数$F(x)$，它是概率论中

较弱的一种收敛性.

定义4.2 设随机变量序列$\{Y_n\}$ 和随机变量Y，若对任意实数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\} = 0$$

则称随机变量序列 $\{Y_n\}$ **依概率收敛于**随机变量Y，

简记为

$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

依概率收敛表示：Y_n 与 Y 的绝对误差小于任意小的正数 ε 的可能性(即概率)将随着n增大而愈来愈大，直至趋于1.

定理4.1 设$\{Y_n\}$为一随机变量序列，且 $Y_n \xrightarrow{P} C$ (常数)，又函数$g(\cdot)$ 在点C处连续，则有

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(C).$$

目 上 下 回 停 续

证 由 $g(\cdot)$ 在C处连续可知，对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta > 0$, 使当 $|y-C|<\delta$ 时，总有

$|g(y)-g(C)|<\varepsilon$, 从而

$$\{|Y_n - C| < \delta\} \subset \{|g(Y_n) - g(C)| < \varepsilon\},$$

$$1 \geq P\{|g(Y_n)-g(C)|<\varepsilon\} \geq P\{|Y_n - C| < \delta\}$$

$$= 1 - P\{|Y_n - C| \geq \delta\} \to 1, n \to \infty$$

这就表明：

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(C)$$

三、常用的四种大数定律

定义4.5 设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是随机变量序列，

令 $$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

如果存在这样一个常数序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,

使对任意的$\varepsilon > 0$,恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|Y_n - a_n\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$服从大数定律.

目 上 下 回 停 续

定理4.3 切比谢夫大数定律

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是两两不相关的随机变量序列,

每一随机变量都有有限的方差,并有公共的上界

$$D(X_1) \le C, D(X_2) \le C, \cdots, D(X_n) \le C, \cdots$$

则对任意的$\varepsilon > 0$,恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0$$

目 上 下 回 停 续

证 因为$\{X_n\}$两两不相关, 故

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\le\frac{C}{n}$$

再由切比谢夫不等式得到

$$0\le P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}\le\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

于是,当$n\to\infty$时,式(4.8)成立,因此定理(4.3)得证.

目 上 下 回 停 续

定理4.3表明

当 n 很大时，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 接近于它们的数学期望的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

这种接近是概率意义下的！

通俗地说，在定理条件下，n 个随机变量的算术平均值，当 n 无限增加时，几乎变成一个常数.

切比谢夫大数定律的另一种叙述

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是两两不相关的随机变量序列,每一随机变量都有有限的方差,并有公共的上界

$$D(X_1) \le C, D(X_2) \le C, \cdots, D(X_n) \le C, \cdots$$

则序列 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$,

即

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

目 上 下 回 停 续

例1 设$X_1, X_2,\ldots,X_n$是独立同分布的随机变量序列, $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$均存在, 证明

$$Y_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$$

依概率收敛到μ.

解 因为 $E(Y_n)=E\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right]$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iE(X_i)=\frac{2\mu}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i=\mu$$

$$D(Y_n)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)\sigma^2}{6n^2(n+1)^2}=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}$$

从而对任意给定的$\varepsilon>0$, 由**切比谢夫不等式**得

$$0\le P\{|Y_n-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此 $Y_n \xrightarrow{P} \mu.$

定理4.4 贝努利大数定理

设 μ_n 是 n 次独立重复贝努里试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

目 上 下 回 停 续

证 引入随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & \text{在第}k\text{次试验中事件}A\text{不发生}\\ 1, & \text{在第}k\text{次试验中事件}A\text{发生}\end{cases}$$

$k=1,2,\cdots,n.$

显然,由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的,且同服从$B(1,p)$分布,故有

$$E(X_k)=p,D(X_k)=p(1-p)\le\frac{1}{4}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

由定理4.3对任意的$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$$

证毕.

定理4.5 泊松大数定律

如果在一个独立试验序列中,事件A在第k次试验中出现的概率等于p_k,以μ_n记在前n次试验中事件A出现的次数,则对任意的$\varepsilon > 0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$$

证 令

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{第}k\text{次试验中}A\text{不发生} \\ 1, & \text{第}k\text{次试验中}A\text{发生} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

由定理4.3可得结论.

注1° 贝努利大数定理表明事件发生的频率 $\dfrac{\mu_A}{n}$ 依概率收敛于事件的概率 p.

用严格的数学形式表达频率的稳定性!

当 n 很大时, 事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小.在实际应用中, 当试验次数很大时, 便可以用事件发生的频率来代替事件的概率.

定理4.6 辛钦大数定律

设随机变量序列$\{X_n\}$相互独立同分布,且具有数学期望 $E(X_k)=\mu \quad (k=1,2,\cdots,n)$,则对任意的$\varepsilon>0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

注1° 与切比谢夫大数定律相比, 定理4.6不要求方差存在且有界.

2° 贝努利大数定律是辛钦大数定律的特例.

例3 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，且$E(X_k)=0,\ D(X_k)=\sigma^2, k=1,2,\cdots$,证明对任意正数$\varepsilon$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1$$

解 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的，所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$ 也是相互独立的. 由 $E(X_k)=0$,

得 $$E(X_k^2)=D(X_k)+[E(X_k)]^2=\sigma^2.$$

由**辛钦大数定律**知，对于任意正数ε,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

内容小结

四个大数定律
- 切比谢夫大数定律
- 贝努利大数定律
- 泊松大数定律
- 辛钦大数定律

频率的稳定性是概率定义的客观基础，而贝努里大数定律以严密的数学形式论证了频率的稳定性.


本节结束

备用题

例3-1 设$\{X_n\}$为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为

$$p\left(X_n=\frac{2^k}{k^2}\right)=\frac{1}{2^k},k=1,2\cdots.$$

试问$\{X_n\}$是否服从大数定律?

解

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{k^2}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}<+\infty$$

即$E(X_n)$存在，由**辛钦大数定律**知服从大数定律.

贝努里(Jacob Bernoulli)

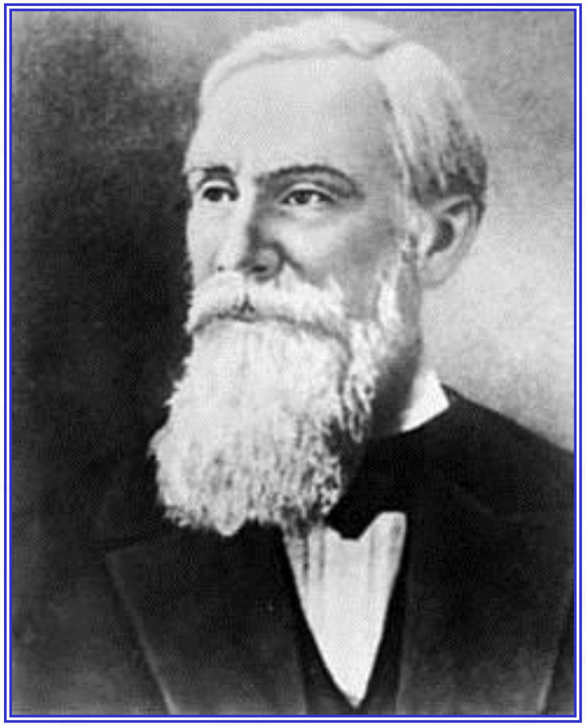
1654-1705

瑞士人, 贝努里家族的三大杰出的数学家之一.

首先发展无穷小分析, 1960 年提出悬连线问题,首创积分"integral"这一术语.

提出贝努里大数定理, 建立了贝努里概型. 在无穷级数理论、变分法和概率论等反面都有贡献.

切比谢夫(Pafnuty Chebyshev)

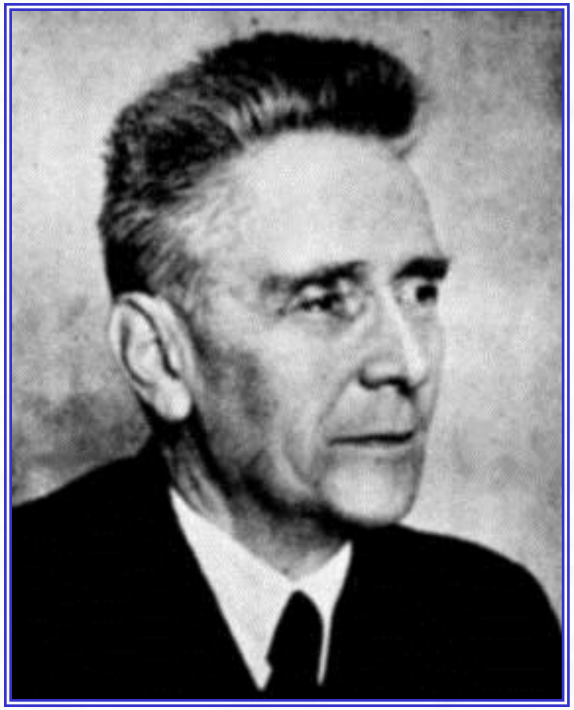


1821-1894

俄国数学家、机械学家. 对数论、积分理论、概率论和力学都有很大贡献.

证明了贝尔特兰公式, 关于自然数列中素数分布的定理, 大数定律的一般公式以及中心极限定理. 创立了切比谢夫多项式.

辛钦(Aleksandr Yakovlevich Khinchin)



1894-1959

苏联数学家, 现代概率论的奠基人之一.

他最早的概率论成果是贝努里试验序列的重对数律.

辛钦在函数的度量理论、数论、概率论、数学分析、信息论等方面都有重要的研究成果.