课程内容和方法

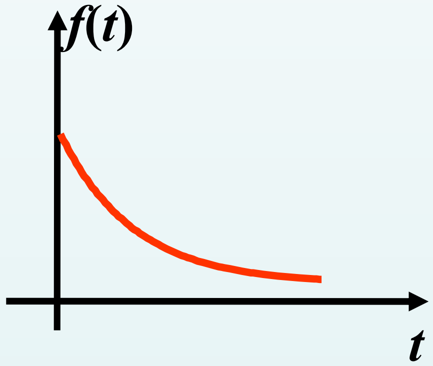
研究对象	研究内容	研究方法
信号（确定性信号）：连续时间信号、离散时间信号	信号描述 特性分析 信号运算	时域分析方法
系统（LTI系统）：连续时间系统、离散时间系统	系统描述 特性分析 响应求解	频域分析方法
	信号处理	复频域分析方法
		Z域分析方法

问题的提出

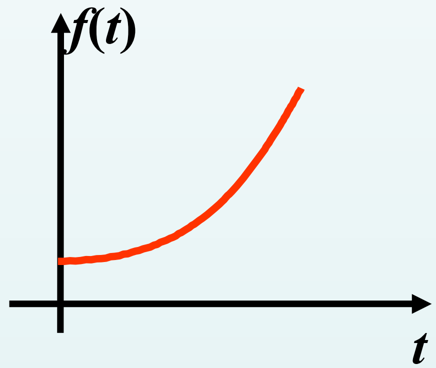
傅里叶变换的绝对可积条件

CTFT: $$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$$



$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$$



指数增长信号怎么办?

如果系统的$h(t)$不衰减，导致$H(j\omega)$不存在，如何进行变换域的分析?

Ch5 连续时间系统的复频域分析

本章内容：

- 拉普拉斯变换及反变换
- 系统的复频域分析
- 系统函数$H(s)$

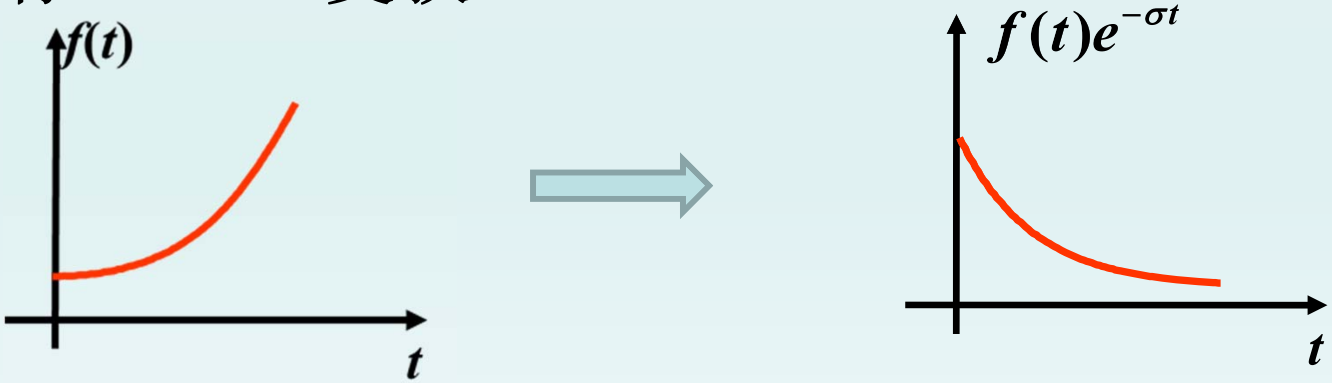
§ 5.1 拉普拉斯变换 (Laplace Transform记作LT)

一、拉普拉斯变换（LT）

$$\begin{cases} F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

若$f(t)$不满足绝对可积条件，则按如下办法：

将$f(t)\cdot e^{-\sigma t}$，选择合适的σ，使$f(t)\cdot e^{-\sigma t}$满足绝对可积条件，再进行$Fourier$变换。



单边指数信号举例！

一、拉普拉斯变换（*LT*）

$s=\sigma+j\omega$

s= \sigma +j\omega

推导

$$\boxed{\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \end{aligned}}\quad \begin{aligned} &\overset{\Delta}{=} \pounds[f(t)] \\ &\overset{\Delta}{=} \pounds^{-1}[F(s)] \end{aligned}$$

拉普拉斯变换

$$f(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} F(s)$$

原函数　　复频谱

$$f(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} F_1(j\omega)$$

原函数　　频谱

二、LT的收敛域(Region of Convergence 记作ROC)

二、LT的收敛域(Region of Convergence 记作ROC)

1. 收敛域定义

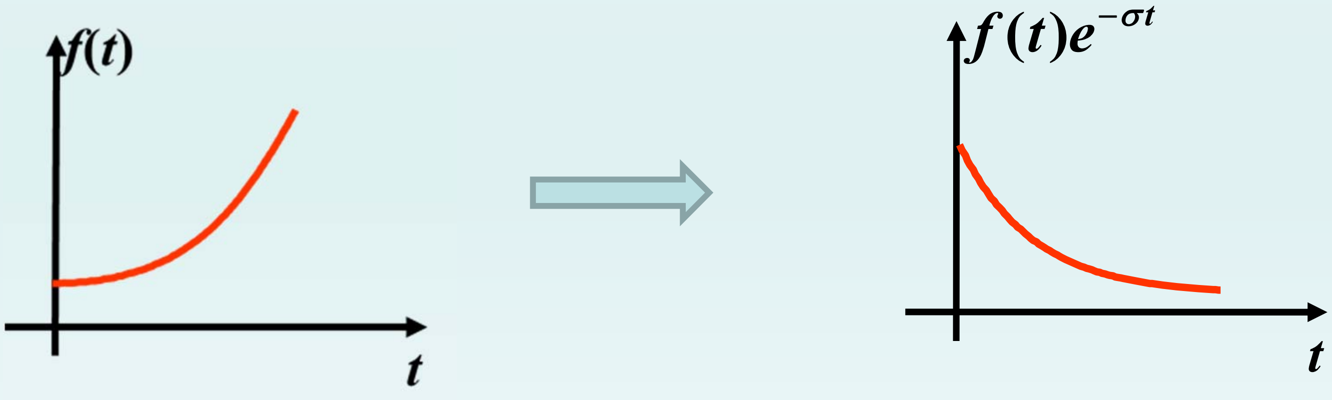
满足 $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0$ 的σ范围，即 Re[s] 的范围，

$s=\sigma+j\omega$

称为LT的ROC。

2. 确定收敛域

当$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0$时，求出 σ，即 Re[$s$]的范围



求下列信号的拉氏变换

例1：右边信号 $f(t)=e^{at}\varepsilon(t)$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{at}\varepsilon(t)e^{-\sigma t}=0$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(a-\sigma)t}=0$$

$(a-\sigma)t<0$，此处$t>0$

因此 $a-\sigma<0$

$\mathrm{Re}[s]=\sigma>a$

$$e^{\alpha t}e^{-\sigma t}=e^{(\alpha-\sigma)t}\Rightarrow(\alpha-\sigma)t<0\Rightarrow ROC$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}\varepsilon(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{(a-s)t}dt$$

$$=\frac{1}{a-s}\int_{0}^{\infty}de^{(a-s)t}$$

$$=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)(+\infty)}-e^{(a-s)0}\right)$$

$$=\frac{1}{a-s}(0-1)=\frac{1}{s-a}$$

$$e^{at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}\qquad \mathrm{Re}[s]>a$$

求下列信号的拉氏变换

例1：右边信号 $f(t)=e^{at}\varepsilon(t)$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0$$

$$\boxed{e^{at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}\qquad \mathrm{Re}[s]>a}$$

a可以取正数，也可以取负数

<u>傅里叶变换</u>

$$\boxed{f(t)=e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow F(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega},a>0}$$

求下列信号的拉氏变换

例2：左边信号 $f(t) = -e^{at}\varepsilon(-t)$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} -e^{at}\varepsilon(-t)e^{-\sigma t} = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{(a-\sigma)t} = 0$$

$(a-\sigma)t < 0$, 此处 $t < 0$

因此 $(a-\sigma) > 0$

$\mathrm{Re}[s] = \sigma < a$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}\varepsilon(-t)e^{-st}dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt$$

$$= \frac{1}{a-s}\int_{-\infty}^{0} de^{(a-s)t}$$

$$= -\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= -\frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)(0)} - e^{(a-s)(-\infty)}\right)$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

$$-e^{at}\varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}[s] < a$$

求下列信号的拉氏变换

例3：双边信号 $f(t)=\begin{cases} e^{at} & t>0 \\ e^{bt} & t<0 \end{cases} = e^{at}\varepsilon(t)+e^{bt}\varepsilon(-t)$

当$a<b$时，$F(s)=\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$，　$a<\sigma<b$;

否则，拉氏变换不存在。

$$e^{\alpha t}e^{-\sigma t}=e^{(\alpha-\sigma)t} \Rightarrow (\alpha-\sigma)t<0 \Rightarrow ROC$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$$

求下列信号的拉氏变换

例1：右边信号 $f(t)=e^{at}u(t)$

$$\boxed{e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}[s]>a}$$

例2：左边信号 $f(t)=-e^{at}u(-t)$

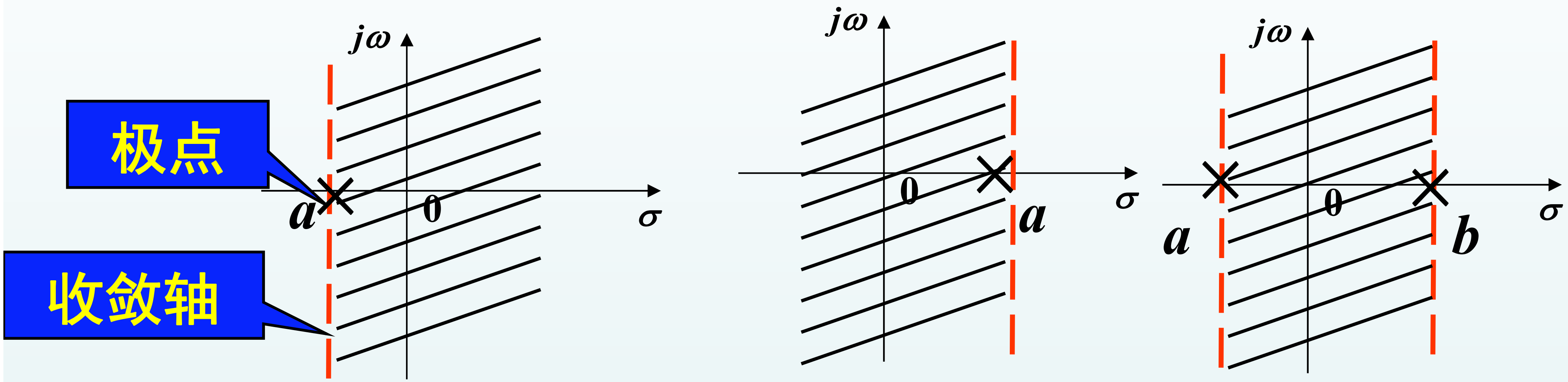
$$\boxed{-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}[s]<a}$$

例3：双边信号 $f(t)=\begin{cases} e^{at} & t>0 \\ e^{bt} & t<0 \end{cases} = e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)$

当$a<b$时，$F(s)=\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$， $a<\sigma<b$;

否则，拉氏变换不存在。

二、LT的收敛域



右边信号的*ROC*　左边信号的*ROC*　双边信号的*ROC*

右边信号的收敛域是收敛轴右边平面收敛；
左边信号的收敛域是收敛轴左边平面收敛；
双边信号的收敛域是带状收敛。

收敛域不包含收敛轴，即不包含极点。

使得 $F(s)=\infty$ 的 点为极点s；使得 $F(s)=0$的 点为零点

小结：

a)无ROC，LT不存在

b)$f(t)$为有限时间信号且绝对可积，收敛域是整个复平面

c)部分复平面

右边信号，ROC位于收敛轴的右侧平面。$\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_c$

左边信号，ROC位于收敛轴的左侧平面。$\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_c$

双边信号，ROC是一条带状区域。$\sigma_{c1}<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_{c2}$

σ_c是极点

d)因果与反因果信号的关系

因果信号，ROC位于收敛轴的右侧平面，

反因果信号，ROC位于收敛轴的左侧平面。

例如：

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} e^{at}\varepsilon(t) & \mathrm{Re}[s]>a \\ -e^{at}\varepsilon(-t) & \mathrm{Re}[s]<a \end{array}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}}$$

傅氏变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

把$f(t)$分解到信号结合$\left\{e^{j\omega t}\right\}$，$\omega\in[-\infty,\ \infty]$

拉氏变换

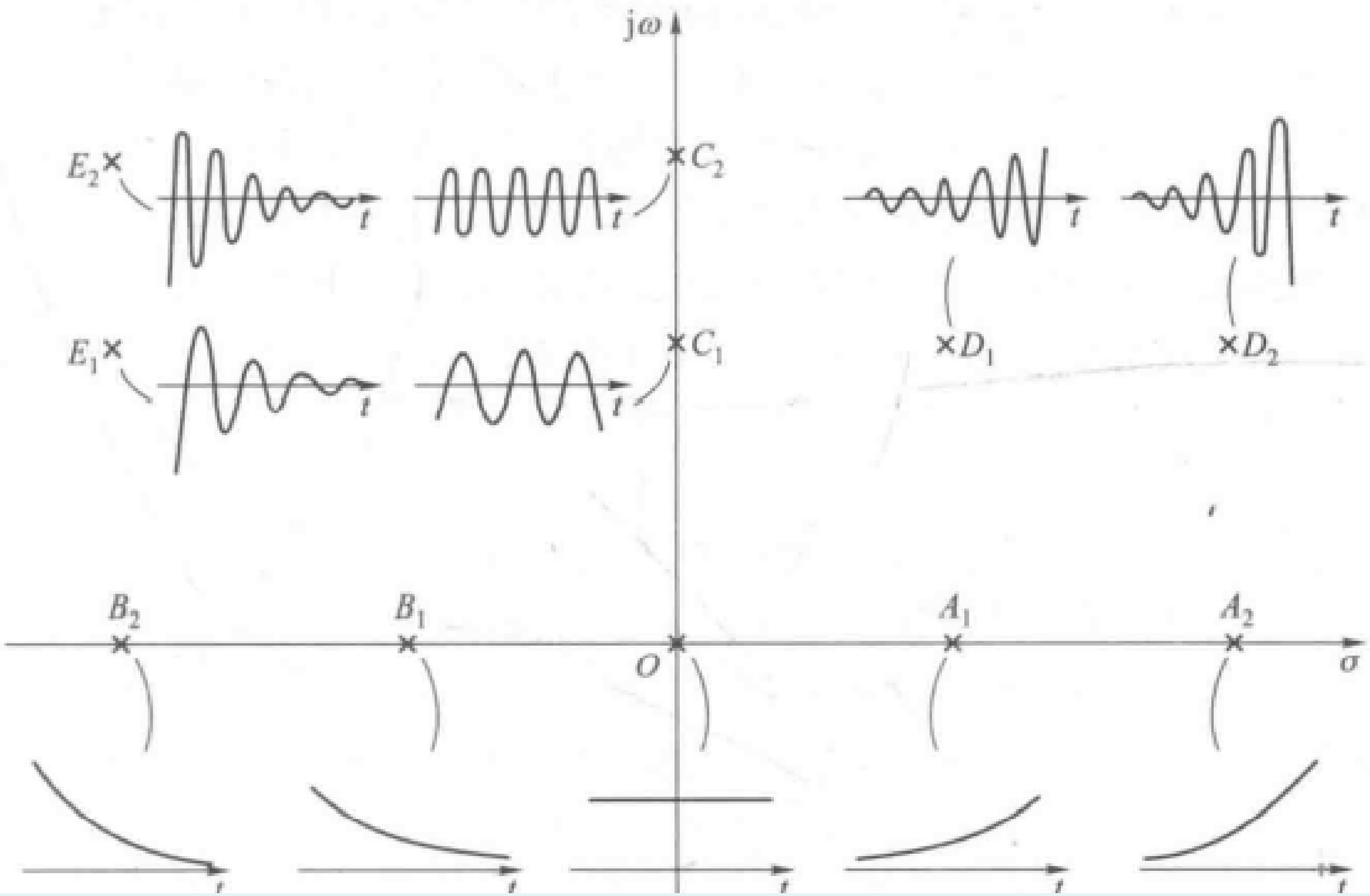
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

把$f(t)$分解到信号结合$\left\{e^{st}\right\}$，s为整个复平面

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

$$s=\sigma+j\omega$$

拉普拉斯变换 | § 5.2 | 203



三、复频率

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

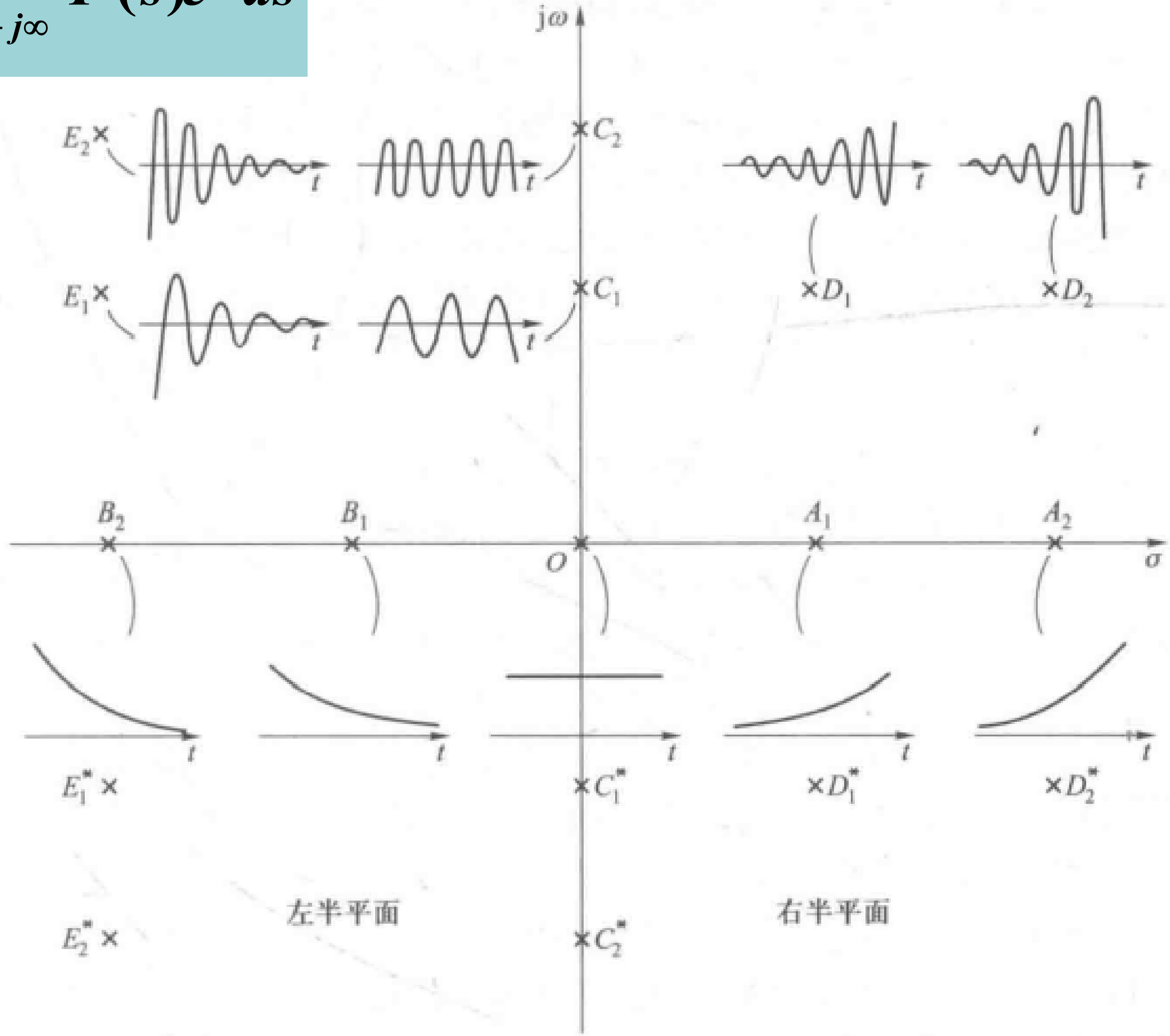


图 5-2 与复平面上位置不同的复频率相对应的时间函数模式图，带有 * 号的点如 C_1^*、D_1^* 等与其共轭点 C_1、D_1 等分别合起来代表一时间模式

四、单边拉氏变换

若：$t<0, f(t)=0$或$f(t)=f(t)\cdot\varepsilon(t)$　　因果信号

则：
$$\begin{cases} F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt \\ f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\cdot e^{st}ds, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \end{cases}$$

单边Laplace变换

单边拉氏变换　$$\mathcal{L}[f(t)]\overset{\Delta}{=}F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

双边拉氏变换　$$\mathcal{L}[f(t)]\overset{\Delta}{=}F_B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

单边LT，若存在，其收敛域位于收敛轴的右侧平面，即 $\sigma>\sigma_c$

四、常用信号的（单边）LT

(1) 复指数信号 $f(t)=e^{s_0 t}\varepsilon(t)$

$$\boxed{e^{s_0 t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}, \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[s_0]}$$

$$e^{at}\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \mathrm{Re}[s]>a$$

$$e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega_0} \quad \mathrm{Re}[s]>0$$

$$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}[s]>0$$

欧拉公式

$$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}[s]>0$$

$$\boxed{\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \mathrm{ROC}:\mathrm{Re}[s]>0}$$

$$\boxed{t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

(2) 冲激信号 $\delta(t)$

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad \mathrm{Re}[s] > -\infty}$$

(3) 矩形脉冲信号

$$\boxed{f(t) = G_\tau(t - \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > -\infty}$$

(4) 如信号 e^{t^2}, t^t, e^{e^t} 等，增长过快，不存在拉氏变换

超指数信号

常见信号大都为**指数阶函数**，总能找到合适的σ值使其收敛，故常见信号的单边拉氏变换总是存在的。

§ 5.2 单边拉普拉斯变换性质

时域描述　　　　复频域描述

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

对应关系

反映了时域与复频域的对应关系；

注意与傅氏变换的性质对比。

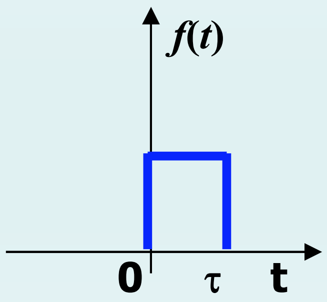
1、时移（延时）特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$

则 $\boxed{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \qquad \text{式中} t_0 > 0, \sigma > \sigma_c}$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}, t_0 > 0$$



$$f(t) = G_\tau(t-\frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)]$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s\tau} = \frac{1-e^{-s\tau}}{s}$$

1、时移（延时）特性

$$f(t)u(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$

则 $\boxed{f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \qquad \text{式中} \; t_0 > 0, \sigma > \sigma_c}$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$(t-1)u(t-1)$$

$$(t-1)u(t)$$

$$tu(t-1)$$

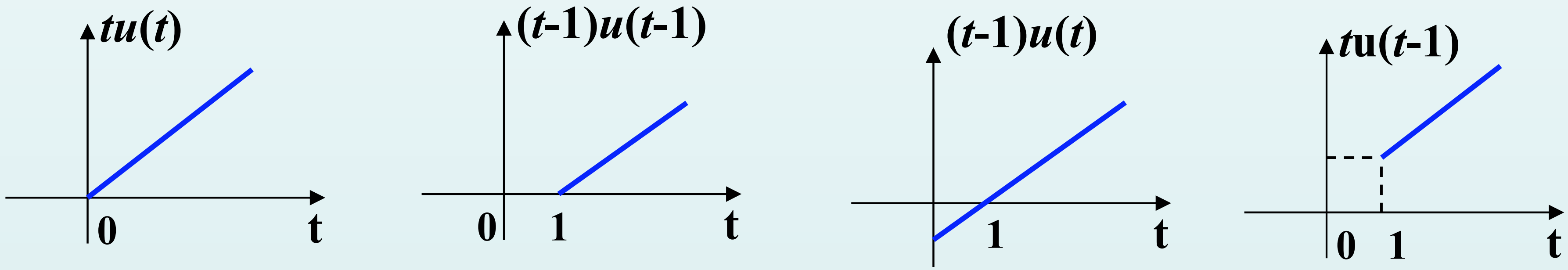
$$[(t+1)u(t+1)]$$

$$(t-1)u(t-1) \quad \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s}}$$

$$\boxed{t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$(t-1)u(t) = tu(t) - u(t) \quad \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}}$$

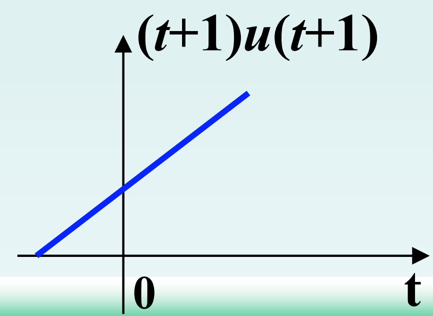
$$tu(t-1) \quad = (t-1)u(t-1) + u(t-1) \quad \boxed{\leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s}}$$



$$\mathcal{L}\{(t+1)u(t+1)\} = \mathcal{L}\{(t+1)u(t)\} \leftrightarrow \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$= \mathcal{L}\{(tu(t) + u(t))\}$$

单边傅里叶变换

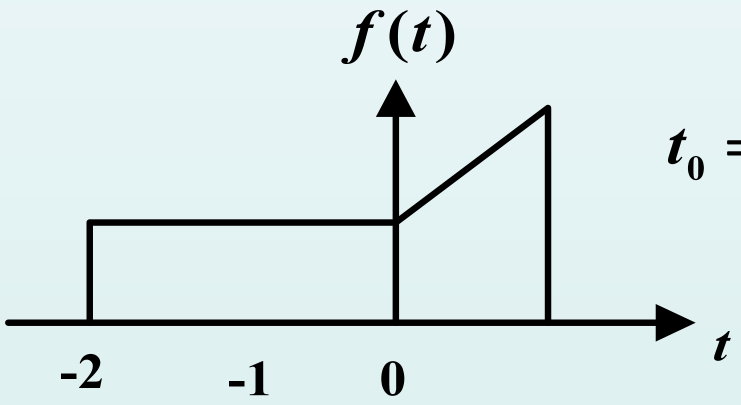


1、时移（延时）特性

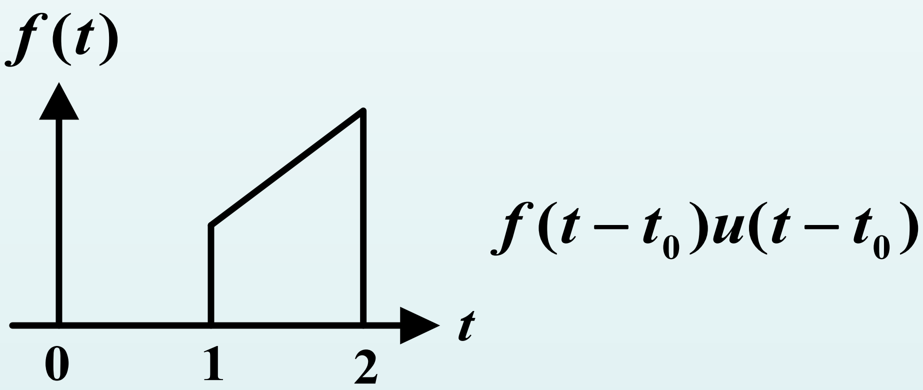
$f(t)u(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$

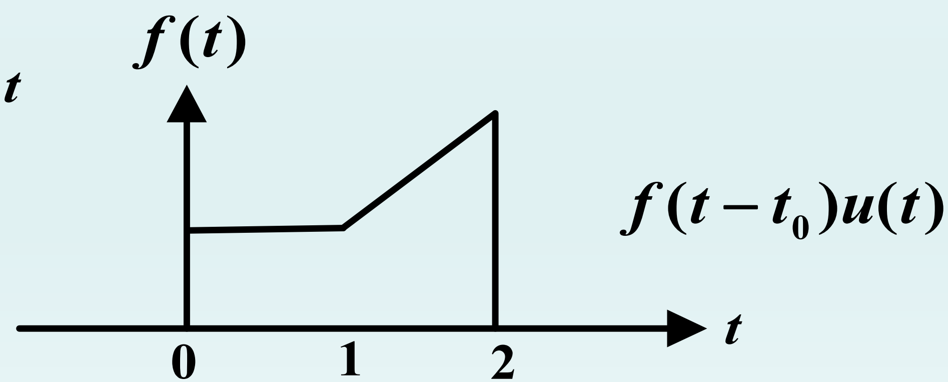
若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$

则 $\boxed{f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \qquad \text{式中} t_0 > 0, \sigma > \sigma_c}$



$t_0 = 1$





2. 复频移特性

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$$

则 $\boxed{f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0) \qquad \sigma - \sigma_0 > \sigma_c，式中\ s_0 = \sigma_0 + j\omega_0\ 为复常数}$

$$\boxed{e^{s_0(t-t_0)} f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s-s_0)e^{-st_0}}$$

例如：$\sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$$e^{-at} \cdot \sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$\sigma > -a$$

$$e^{-at} \cdot \cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

复频移特性十时移特性：

已知：$f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$ ，$\sigma > \sigma_c$

时移特性：$\underbrace{f(t-t_0)u(t-t_0)}_{f_1(t)} \leftrightarrow \underbrace{F(s)e^{-t_0 s}}_{\boxed{F_1(s)}}$ ，$t_0 > 0, \sigma > \sigma_c$

复频移：

$$e^{s_0 t} f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s-s_0) = F(s-s_0)e^{-t_0(s-s_0)}$$

$$e^{s_0 t} f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s-s_0)e^{-t_0(s-s_0)} \quad \cdots\cdots \boxed{Eq.(2)}$$

$$e^{s_0(t-t_0)} f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s-s_0)e^{-t_0 s}, \quad Re[s-s_0] > \sigma_c$$

$\Rightarrow \sigma - \sigma_0 > \sigma_c$

$t_0 > 0$.

另解：$F_1(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}dt \quad \cdots Eq.(1)$

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{s_0 t}e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-(s-s_0)t}dt$$

由Eq(1)得 $= \boxed{F_1(s-s_0)} = F(s-s_0)e^{-t_0(s-s_0)} \Rightarrow f(t-t_0)u(t-t_0)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0)e^{-t_0(s-s_0)}$

记录人签字： **年 月 日**

Eq. 表示 Equation.

即Eq.(2)得证

3. 展缩特性

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \sigma > \sigma_c$$

则 $\boxed{f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})}$ $\quad \frac{\sigma}{a} > \sigma_c$ 即 $\sigma > a\sigma_c \qquad a > 0$ 常数

既有展缩，又有时移时:

$$f(at+b)u(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}s} F(\frac{s}{a}), \mathrm{Re}[s] > a\sigma_c$$

4、时域微分定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ $\quad \sigma > \sigma_c$，且 $\dfrac{df(t)}{dt}$ 存在

则 $\boxed{f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)}$ ROC至少是包括 $\sigma > \sigma_c$

证明：$\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} \dfrac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$= -f(0^-) + sF(s)$

$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$

推论：$\dfrac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$

傅氏变换的时域微分性质：$\dfrac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$

若$f(t)$为因果信号：$\dfrac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow sF(s)$

若系统的微分方程为：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$

频域的方法 $[(j\omega)^2+3(j\omega)+2]Y(j\omega)=F(j\omega)$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}F(j\omega)$$ 只能求零状态响应

复频域的方法

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3[sY(s)-y(0^-)]+2Y(s)=F(s)$$

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+3y(0^-)}{(s)^2+3(s)+2}+\frac{1}{(s)^2+3(s)+2}F(s)$$

系统的复频域分析，可以引入初始条件，求解全响应。

5. 卷积定理

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

已知$f(t)=e^{-\lambda t}u(t), h(t)=u(t)$，求$f(t)*h(t)$

$$F(s)=\frac{1}{s+\lambda}, H(s)=\frac{1}{s}$$

$$f(t)*h(t) \leftrightarrow F(s)\cdot H(s)=\frac{1}{s+\lambda}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\lambda}\right] \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}[u(t)-e^{-\lambda t}u(t)]$$

$$f(t)*h(t)=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})u(t)$$

时移：$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$

频移：$f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0) \qquad \sigma-\sigma_0>\sigma_c$

尺度：$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad \frac{\sigma}{a}>\sigma_c$即$\sigma>a\sigma_c \qquad a>0$

时域微分：$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau$

卷积定理：$f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1 \cdot F_2 \qquad f_1 \cdot f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}F_1 * F_2$

复频域微分：$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

复频域积分：$\frac{1}{t}f(t) \leftrightarrow \int_{s}^{\infty} F(s_1)ds_1$

初值定理：$\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

终值定理：$\lim_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

例1：$e^{-t}u(t-2)$

例5：$f(t)=e^{-at}u(t)$ 求$f'(t)$

例2：$\frac{1}{s+1}e^{-2s}$

例6：$F(\frac{s}{3})$

例3：$\frac{1}{s+1}$

例7：$\delta^{(n)}(t)$

例4：$f(2t)$

例1：$e^{-t}u(t-2) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+1}e^{-2(s+1)} \qquad \sigma > -1$

例2：$\dfrac{1}{s+1}e^{-2s} \leftrightarrow e^{-(t-2)}u(t-2) \qquad \sigma > -1$

例3：$\dfrac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}u(t)$

例4：$f(2t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}F(\dfrac{s}{2})$

例5：$f(t) = e^{-at}u(t)$,求$f'(t) \leftrightarrow s\dfrac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a$

例6：$F(\dfrac{s}{3}) \leftrightarrow 3f(3t)$

例7：$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$

§ 5.3 单边拉普拉斯反变换

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds}$$ 复变函数积分

一、常用的拉氏变换对与性质

二、部分分式展开法

三、留数法(反演积分)

常用信号的拉氏变换对

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$\boxed{\delta'(t) \leftrightarrow s}$$

$$\boxed{t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$\boxed{u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}}$$

$$\boxed{e^{at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}}$$

$$\boxed{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}}$$

$$\boxed{\cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}}$$

$$\boxed{e^{-at}\cos\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}}$$

$$\boxed{\sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}$$

$$\boxed{e^{-at}\sin\omega_0 t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}}$$

一、常用信号的拉氏变换对与性质

例：求 $F(s)=\frac{1}{s^3}(1-e^{-st_0}),t_0>0$ 的拉

$$-tf(t)\leftrightarrow\frac{d}{ds}F(s)$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

解： $\because u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$

由复频域微分特性，得

$$tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2},\qquad t^2u(t)\leftrightarrow-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{2}{s^3}$$

$$\therefore\frac{1}{s^3}\leftrightarrow\frac{1}{2}t^2u(t)$$

利用时移特性 $\frac{1}{s^3}e^{-st_0}\leftrightarrow\frac{1}{2}(t-t_0)^2u(t-t_0)$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2u(t-t_0)$$

二、部分分式展开法

先将$F(s)$作除法（如果分子阶数高于分母），将其真分式部分进行部分分式展开

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=A(s)/\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

此处没有考虑重根

$$=\frac{A_1}{s-\lambda_1}+\cdots+\frac{A_{np}}{s-\lambda_p}+\cdots+\frac{A_n}{(s-\lambda_n)}$$

$$A_i=(s-\lambda_i)\frac{A(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)}\Bigg|_{s=\lambda_i} \qquad i=1,\cdots,n$$

例：求 $F(s)=\dfrac{3s^3+8s^2+7s+1}{s^2+3s+2}$ 的拉氏反变换 $f(t)$。

$$\boxed{\delta(t)\leftrightarrow 1}$$

$$\boxed{\delta'(t)\leftrightarrow s}$$

$$\boxed{e^{at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-a}}$$

解：

$$F(s)=3s-1+\frac{4s+3}{s^2+3s+2}$$

$$=3s-1+\frac{4s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$=3s-1+\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$=3s-1+\frac{-1}{s+1}+\frac{5}{s+2}$$

$$\therefore \quad f(t)=3\delta'(t)-\delta(t)-e^{-t}u(t)+5e^{-2t}u(t)$$

例：求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+s+1)}$ 的拉氏反变换$f(t)$。

解：
$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\therefore f(t)=u(t)-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

$$\boxed{u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}}$$

$$\boxed{e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}}$$

$$\boxed{e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}}$$

三、留数法(反演积分)

自学

该方法只对象函数为有理真分式可行

§ 5.4 双边拉普拉斯变换

Page: 243,管致中

$$F_d(s)=\mathscr{L}_d\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{0} f_b(t)e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty} f_a(t)e^{-st}dt$$
$$=F_b(s)+F_a(s)$$

双边LT变换为右边函数的单边LT和左边函数单边LT之和，注意这两个单边LT必须存在公共ROC，双边LT才存在。

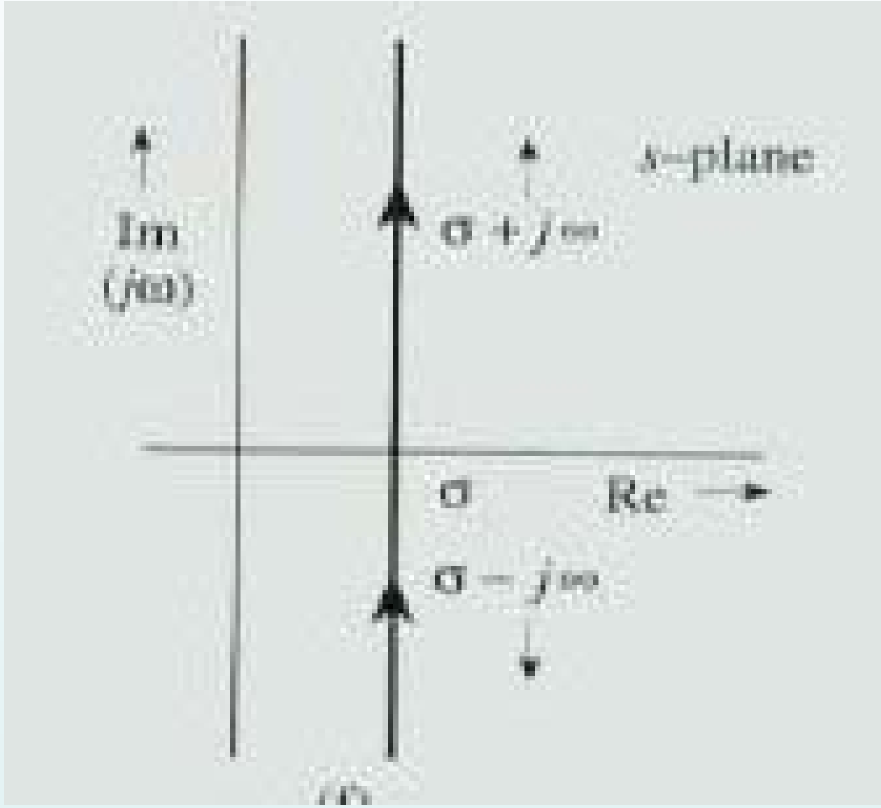
§ 5.5 LT与FT关系

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

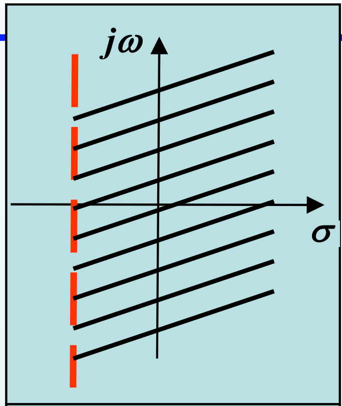
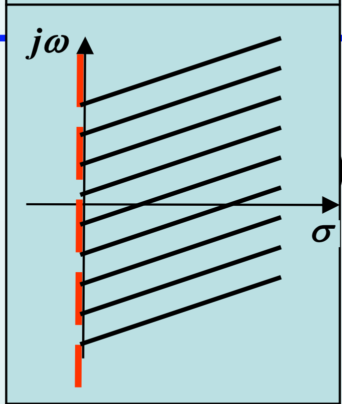
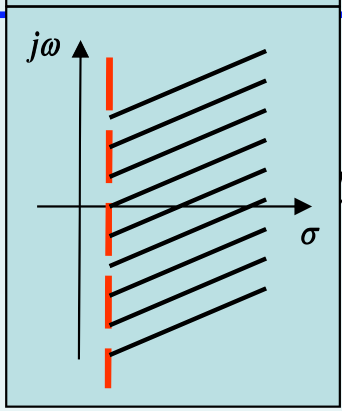
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$



$$s=\sigma+j\omega$$

$f(t)$的拉氏变换是 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅氏变换

$f(t)$的傅氏变换是$\sigma=0$的拉氏变换

信号	LT	ROC	FT	关系
$e^{at}u(t)$ $a<0$	$\dfrac{1}{s-a}$		$\dfrac{1}{j\omega-a}$	$X(j\omega)=X(s)\big\vert_{s=j\omega}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$		$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$	$X(j\omega)\neq X(s)\big\vert_{s=j\omega}$
$e^{at}u(t)$ $a>0$	$\dfrac{1}{s-a}$		不存在	

结论：

(1) 当$F(s)$收敛域包含虚轴时，拉氏变换和傅氏变换都存在

$$F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$$

如单边指数衰减信号 $f(t)=e^{at}u(t), a<0$

(2) 当$F(s)$收敛域不包含虚轴，但以虚轴为界时，

拉氏变换和傅氏变换都存在 $F(j\omega)\neq F(s)\big|_{s=j\omega}$

如阶跃信号 $u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$ $\quad u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

(3) 当$F(s)$收敛域不包含虚轴而且不以虚轴为界时，

拉氏变换存在，但傅氏变换不存在

如单边指数增长信号 $f(t)=e^{at}u(t), a>0$

结论： 已知单边 $F(s)$，$\sigma > \sigma_c$

a） $\sigma_c > 0$ ，不存在FT

b) $\sigma_c < 0$ ，存在FT，且$F(s)\big|_{s=j\omega} = F(j\omega)$

c） $\sigma_c = 0$ ，存在FT，$F(j\omega) = \mathcal{F}[\pounds^{-1}[F(s)]]$

即存在LT的单边信号，其不一定存在FT

而存在FT的单边信号，其必定存在LT，条件 $\sigma > \sigma_c$

例： $f(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2 + j\omega}$

$$f(t)e^{-\sigma t} = e^{-(2+\sigma)t}u(t)$$

$\sigma < -2$　　$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$ 不存在

$\sigma > -2$　　$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$ 存在