第二节 方差

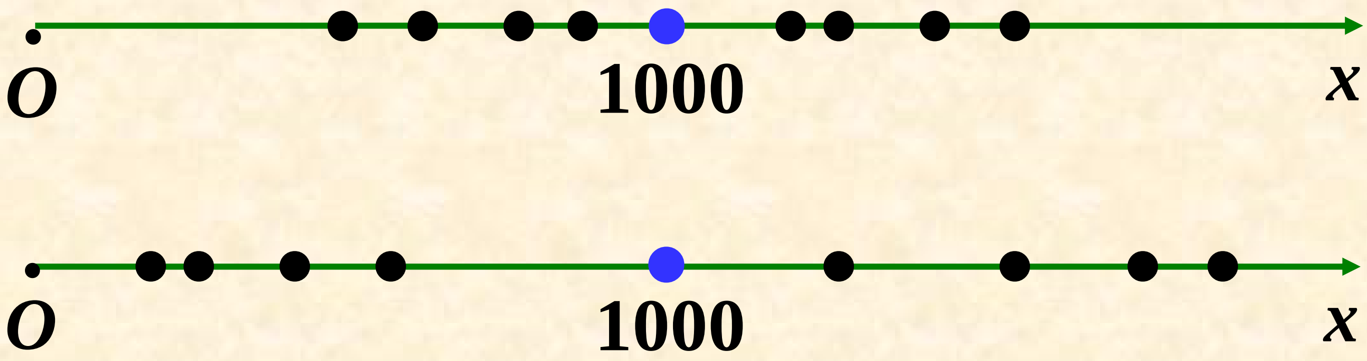
- 一、随机变量方差的概念及性质
- 二、重要概率分布的方差
- 三、矩的概念
- 四、内容小结

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)=1000$小时.



2. 方差定义

定义3.3 设X是一个随机变量， 若

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，

记为 $D(X)$ 或 $\sigma^2(X)$， 即

$$D(X)=\sigma^2(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为**标准差**或**均方差**，记为$\sigma(X)$.

注 由定义知，$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}\geq 0.$

3. 方差的意义

方差$D(X)$是一个非负实数，常用来体现随机变量X取值分散程度的量,它反映了X偏离其数学期望的程度.

如果$D(X)$值大, 表示X 取值越分散,
(小) (集中)
以$E(X)$作为随机变量的代表性差;
(好).

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $p(x)$ 为X的概率密度.

例1 证明：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $D(X)=\sigma^2$.

证 X的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

$$E(X)=\mu$$

$$\therefore \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$x=\mu+\sigma t$

$dx=\sigma\,dt$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

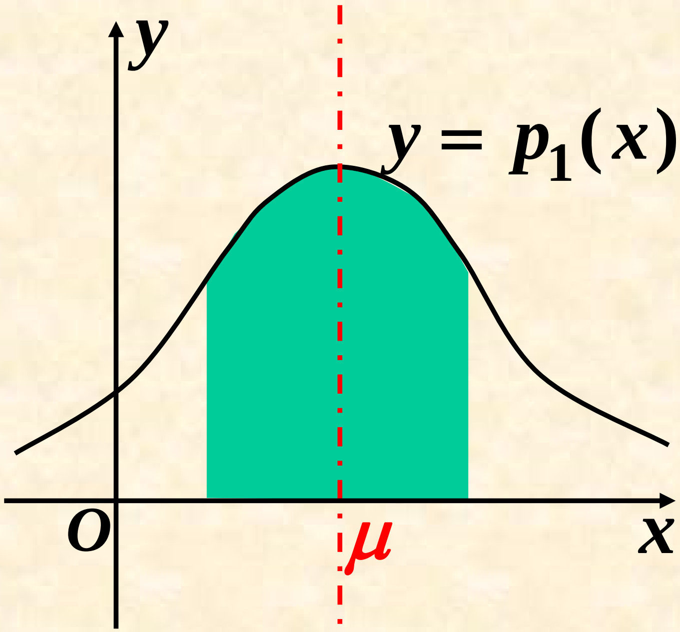
$$=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

目录 上页 下页 返回 结束

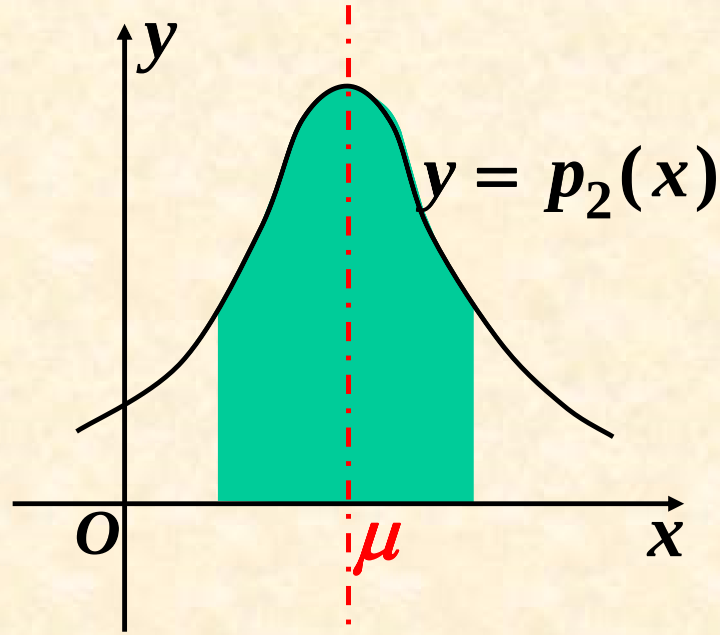
正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$\mu = E(X), \quad \sigma^2 = D(X)$$

$\sigma_1 > \sigma_2$



$X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$



$X \sim N(\mu, \sigma_2^2)$

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证

$$\begin{aligned} D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\} \\ &=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\} \\ &=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2 \\ &=E(X^2)-[E(X)]^2 \\ &=E(X^2)-E^2(X). \end{aligned}$$

例2 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 $D(X)$.

解 X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

$$E(X)=\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)+1]\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right]$$

$$=e^{-\lambda}\left[\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

$$=e^{-\lambda}(\lambda^2e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda})=\lambda^2+\lambda.$$

$$\therefore\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

5. 方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证 $$D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$$

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证 $$D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

(3) 设 X, Y 相互独立, $D(X), D(Y)$ 存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证

$$D(X \pm Y) = E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2$$

$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2$$
$$\pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= D(X) + D(Y).$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(a_1X_1 \pm a_2X_2 \pm \cdots \pm a_nX_n)$$

$$= a_1^2 D(X_1) + a_2^2 D(X_2) + \cdots + a_n^2 D(X_n).$$

(4) $D(X + C) = D(X)$ (C为常数).

证 $D(X + C) = E[(X + C) - E(X + C)]^2$

$$= E[X + \cancel{C} - E(X) - \cancel{C}]^2$$

$$= D(X).$$

(5) 切比谢夫不等式

契比雪夫

定理　设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数 ε, 不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

契比雪夫不等式

证 取连续型随机变量的情况来证明.

设 X 的概率密度为 $p(x)$, 则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}\geq 1}$$

$$\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2.$$

得 $$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

注. 切比谢夫不等式的**意义：**

1°给出了在X的分布未知的情形下，估计概率

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的方法；

2°说明了$D(X)$的确刻划了X对$E(X)$的偏离程度，

由 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 可知：$D(X)$

越小(X偏离$E(X)$程度越小)，

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\text{越大，}$$

这表明：X取值越集中在$E(X)$附近.

3°它是大数定理的理论基础.

二、重要概率分布的方差

分布	分布律或分布密度	$E(X)$	$D(X)$
(0-1)分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
泊 松 分 布 ($X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ	λ

分布	分布律或分布密度	$E(X)$	$D(X)$
均匀分布 $X \sim U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 0, & 其他 \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2=pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

$0<p<1.$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$=np.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim P(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<\infty.$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

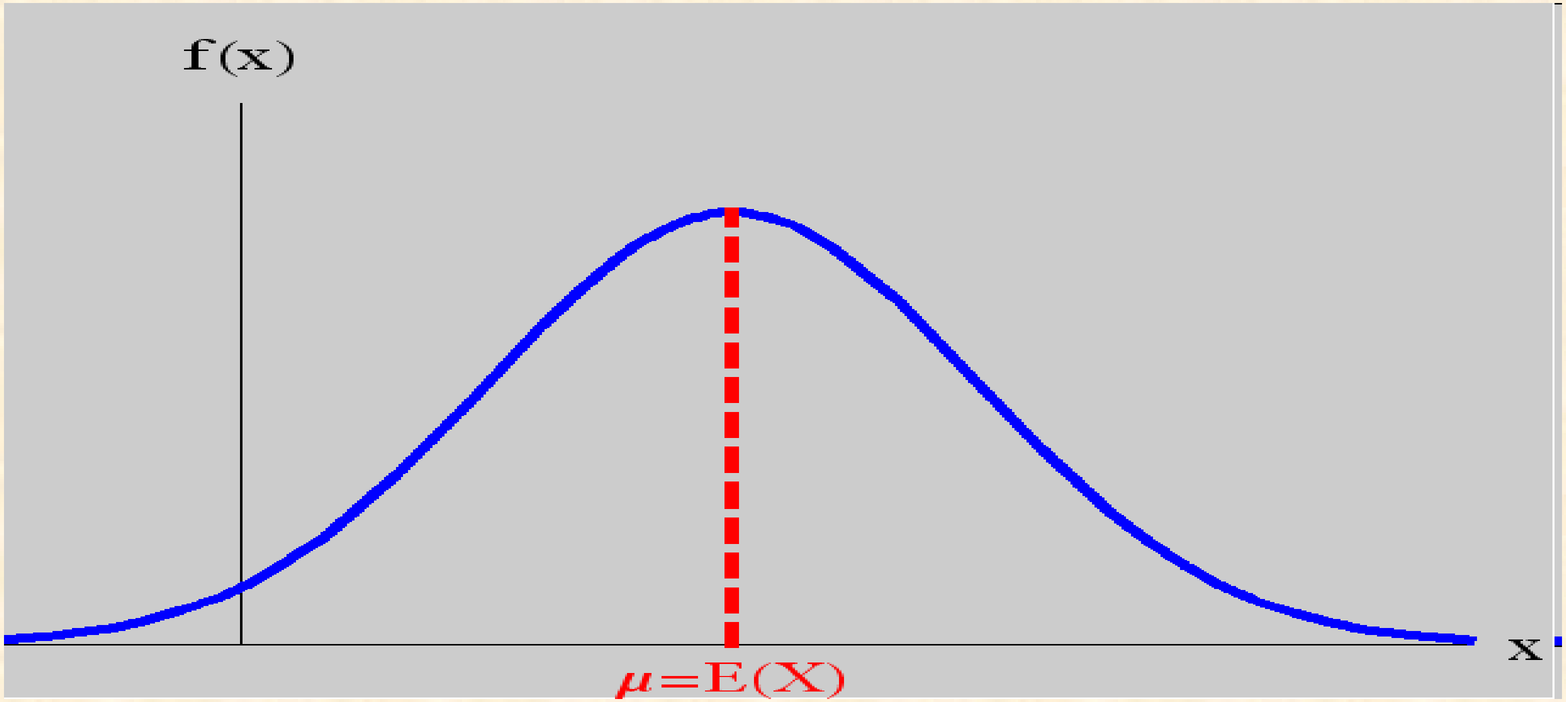
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



6. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\lambda>0$.

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布的期望和方差分别为 $\frac{1}{\lambda}$ 和 $\frac{1}{\lambda^2}$.

三、矩的概念

1. 矩的定义

(1) 原点矩：若 $E(X^k)(k=1,2,\cdots)$存在，则称它为X的k阶原点矩，记为α_k,即

$$\alpha_k = E(X^k) \quad (k=1,2,\cdots)$$

特例: $\alpha_1 = E(X)$是X的数学期望.

(2) 中心矩：若 $E[X-E(X)]^k$ $(k=1,2,\cdots)$存在，则称它为X的k阶中心矩，记为μ_k,

即 $$\mu_k = E[X-E(X)]^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

特例: $\mu_2 = E[X-E(X)]^2$是X的方差.

四、内容小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大,表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示 X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\mathrm{d}x$$

3. 方差的性质

$$\begin{cases} 1^0 \ D(C)=0; \\ 2^0 \ D(CX)=C^2D(X); \\ 3^0 \ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \end{cases}$$

4. 契比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq \varepsilon\}\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

5. 矩是随机变量的数字特征.

随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩;

方差为二阶中心矩.

分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
几何分布	$0 < p < 1$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
均匀分布	$a < b$	$a+b/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2

备份题

例1 已知 $E(X)=3, D(X)=5$,求 $E(X+2)^2$.

解 $E(X+2)^2 = E(X^2+4X+4)$

$= E(X^2+4X+4) = E(X^2)+4E(X)+4$

$= DX+(EX)^2+4EX+4$

$=5+3^2+4\times 3+4=30.$

所以 $E(X+2)^2=30.$

例2 设随机量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

且已知$E(X)=2$, $P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$,求:

(1) a,b,c的值;

(2) 随机变量$Y=e^{X}$的数学期望与方差.

解 (1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$,

所以 $1=\int_0^2 ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4 (cx+b)\,\mathrm{d}x=2a+6c+2b,$

$E(X)=2,$

$\Rightarrow E(X)=\int_0^2 x\cdot ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4 x\cdot(cx+b)\,\mathrm{d}x$

$=\frac{8}{3}a+16c+6b=2,$

$P\{1<X<3\}=\frac{3}{4},$

$\Rightarrow \int_1^2 ax\,\mathrm{d}x+\int_2^3 (cx+b)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b=\frac{3}{4},$

因此有 $$\begin{cases} 2a+2b+6c=1, \\ \dfrac{8a}{3}+16c+6b=2, \\ \dfrac{3a}{2}+b+\dfrac{5c}{2}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{3}{8}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=-\dfrac{1}{8}$.

$$(2)\ E(e^X)=\int_0^2 e^x\cdot\frac{3}{8}x\,\mathrm{d}x+\int_2^4 e^x\cdot\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}e^4+\frac{3}{8},$$

$$E(e^X)^2=\int_0^2 e^{2x}\cdot\frac{3}{8}x\,\mathrm{d}x+\int_2^4 e^{2x}\cdot\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{32}e^8+\frac{1}{8}e^4+\frac{3}{32},$$

得 $D(e^X)=E(e^{2X})-(Ee^X)^2$

$$=\left[\frac{1}{32}e^8+\frac{1}{8}e^4+\frac{3}{32}\right]-\left[\frac{1}{8}e^4+\frac{3}{8}\right]^2$$

$$=\frac{1}{64}e^8+\frac{1}{32}e^4-\frac{3}{64}$$

例3 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$ 求 $D(2X^3+5)$.

解 $D(2X^3+5) = D(2X^3) + D(5)$

$$= 4D(X^3)$$

$$= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12} = \frac{493}{6},$$

$$[E(X^3)]^2=\left[(-2)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{2}+1^3\times\frac{1}{12}+3^3\times\frac{1}{12}\right]^2$$

$$=\frac{1}{9},$$

故 $D(2X^3+5)=4[E(X^6)-(E(X^3))^2]$

$$=\frac{2954}{9}.$$

例5 设连续型随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求随机变量$Y=X^2$的方差$D(Y)$.

解 $$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4p(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24,$$

因为 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$

所以 $D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24-\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)^2$$

$$=20-2\pi^2.$$