第二节 函数解析的充要条件

- 一、主要定理
- 二、典型例题
- 三、小结与思考

一、主要定理

定理一

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域D内,
则 $f(z)$ 在 D内一点 $z=x+iy$ 可导的充要条件是:
$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 并且在该点满足
Cauchy－Riemann方程：（柯西—黎曼）C－R

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$u_x=v_y;\qquad u_y=-v_x.$$

二元函数的全微分

全微分的定义

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的**全微分**，记为$dz$，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

函数若在某区域 D 内各点处处可微分，则称该函数在 D 内可微分/可微.

证 (1) 必要性.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内,

且 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+yi$ 可导,

则对于充分小的 $|\Delta z|=|\Delta x+i\Delta y|>0,$

有 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z,$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0,$

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v,$

$f'(z)=a+ib,\quad \rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2\,,$

所以 $\Delta u + i\Delta v =$

$$(a+ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y) + (\rho_1 + i\rho_2)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

$$+ i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z) = 0$, 所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2 = 0,$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x - \rho_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y}{\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}} = 0, \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho_2(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \rho_1(\Delta x,\Delta y)\Delta y}{\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}} = 0.$$

定理 1（必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

由此可知 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b.$

(2) 充分性. 由于

$$f(z+\Delta z)-f(z)=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)$$
$$+i[v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,y)]$$
$$=\Delta u+i\Delta v,$$

又因为 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,

于是 $\Delta u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\rho_1(\Delta x,\Delta y)\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2},$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\rho_2(\Delta x,\Delta y)\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2},$$

其中 $\lim\limits_{\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0}\rho_k(\Delta x,\Delta y)=0,\qquad k=1,2.$

因此 $f(z+\Delta z)-f(z)=$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+[\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)]\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}.$$

由柯西一黎曼方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=i^2\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+[\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)]\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}.$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{[\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)]\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0}\left|\frac{[\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)]\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}}{\Delta z}\right|$$

$$=\lim_{\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0}|\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)|=0$$

所以 $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$

即函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ **在点** $z=x+yi$ **可导.**

根据定理一，可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+yi$ 处的导数公式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

函数在区域 D 内解析的充要条件

定理二 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是： $u(x,y)$与 $v(x,y)$ 在 D 内可微，并且满足柯西一黎曼方程.

$$u_x=v_y; \qquad u_y=-v_x.$$

解析函数的判定方法:

定义法

(1) 如果能用求导公式与求导法则证明复变函数 $f(z)$ 的导数在区域 D 内处处存在,则可根据解析函数的定义断定 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

(2) 如果复变函数 $f(z)=u+iv$ 中 u,v 在 D 内的各一阶偏导数都存在、连续(因而 $u,v(x,y)$ 可微)并满足 C-R 方程,那么根据解析函数的充要条件可以断定 $f(z)$ 在 D 内解析.

C-R定理

二、典型例题

例1 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w = \bar{z}$; (2) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$;

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z)$.

解 (1) $w = \bar{z}$, $u = x$, $v = -y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

不满足柯西—黎曼方程,

故 $w = \bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析.

(2) $f(z) = \boxed{e^x(\cos y + i\sin y)}$ 指数函数

$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

四个偏导数均连续

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析.

且 $f'(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi$, $\quad u = x^2$, $\quad v = xy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时，满足柯西一黎曼方程，

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

例2 证明 $\bar{z}^2$ 在复平面上不解析.

证

$$\bar{z}^2=(x-yi)^2=x^2-y^2-2xyi,$$

$$u=x^2-y^2,\quad v=-2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x.$$

仅当 $x=0$ 时,满足柯西一黎曼方程,

故函数 $w=\bar{z}^2$ 仅在直线 $x=0$ 上可导,

在复平面内不解析.

例3 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$, 问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$2x+ay=dx+2y,\quad -2cx-dy=ax+2by,$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例4 证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 满足柯西—黎曼方程但在点 $z=0$ 不可导.

证 因为 $f(z)=\sqrt{|xy|}$，所以 $u=\sqrt{|xy|}$， $v=0$,

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-v_x(0,0),$$

柯西—黎曼方程在点 $z=0$ 成立.

但当 z 沿第一象限内的射线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}\to\frac{\sqrt{k}}{1+ik},$$ 随 k 变化,

故 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在,

函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 不可导.

例5 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析,并且 $v=u^2$,求 $f(z)$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (2)$$

将(2)代入(1)得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0,$

由 $(4u^2+1)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=0,$

由(2)得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ 所以 $u=c$ (常数),

于是 $f(z)=c+ic^2$ (常数).

课堂练习 设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数, 试确定 l,m,n 的值.

答案 $l=n=-3,\quad m=1.$

例6 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零,则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$常数, $v=$常数,

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

例7 设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数,且 $f'(z)\neq 0$, 那末曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 必相互正交, 其中 c_1, c_2 为常数.

证 因为 $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq 0$,

所以 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 不全为零,

如果在曲线的交点处 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 都不为零,

根据隐函数求导法则,

曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 中任一条曲线的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{u_x}{u_y},\quad k_2=-\dfrac{v_x}{v_y},$

根据柯西一黎曼方程得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\left(-\frac{v_y}{u_y}\right)\cdot\left(\frac{u_y}{v_y}\right)=-1,$$

故曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 相互正交.

如果 u_y 和 v_y 中有一个为零,则另一个必不为零,两族中的曲线在交点处 的切线一条是水平的,另一条是铅直的,它们仍然相互正交.

三、小结与思考

在本课中我们得到了一个重要结论—函数解析的充要条件:

$u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微,并且满足柯西—黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

掌握并能灵活应用柯西—黎曼方程.

思考题

用柯西一黎曼条件判断 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析时应注意什么？

思考题答案

首先判断 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内是否可微;

其次再看是否满足C-R条件: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

最后判定 $f(z)$ 的解析性.