信号与系统：连续时间系统的频域分析

柳艾飞，副教授

西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

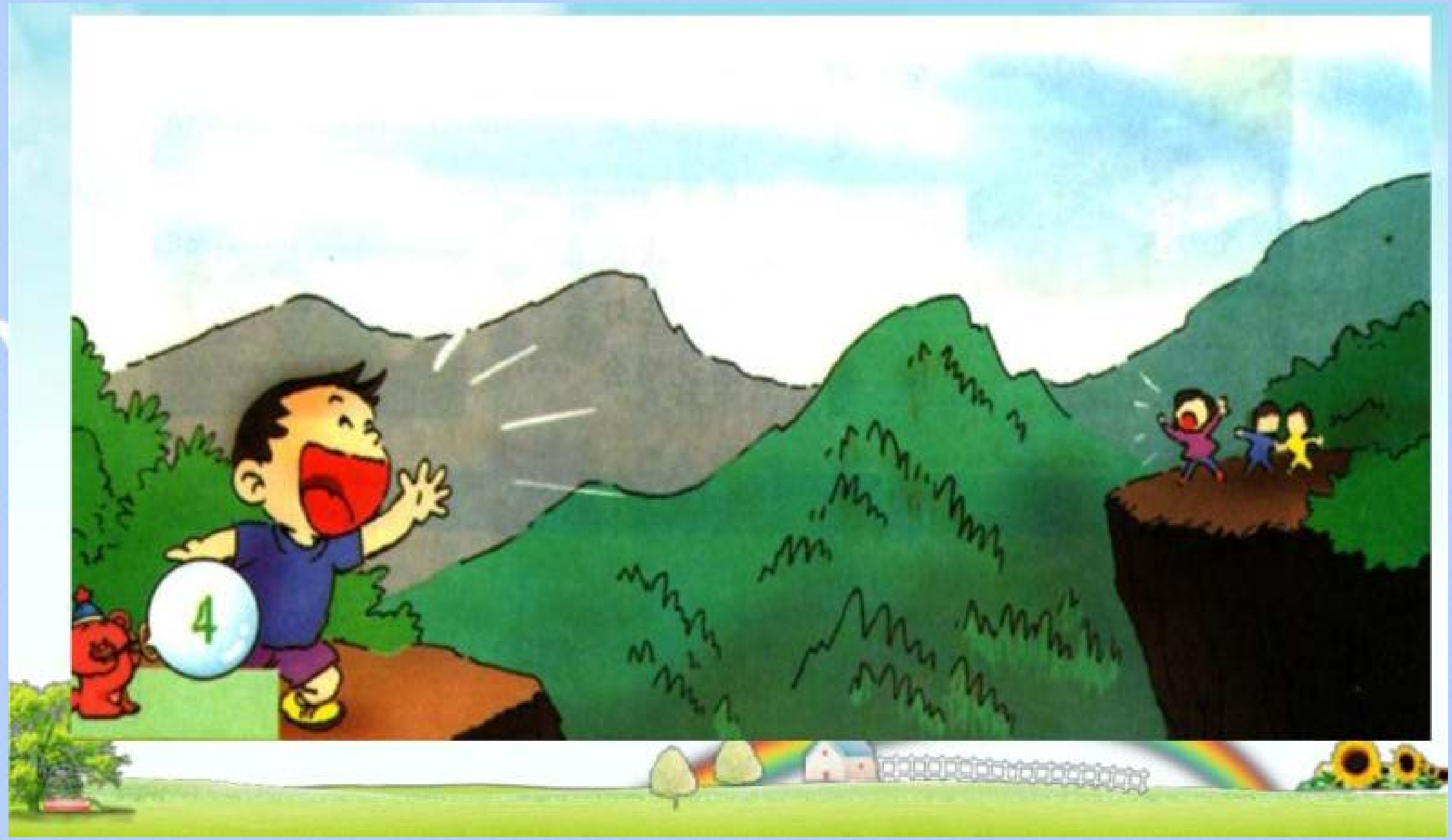
本章内容：

◈分析周期信号的系统响应

◈分析非周期信号的系统响应

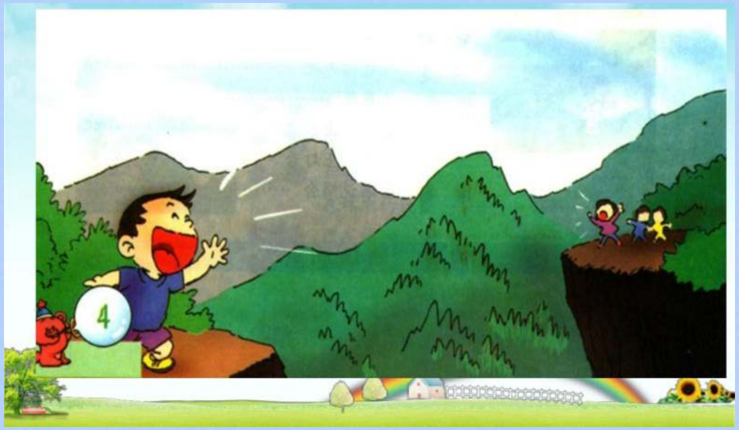
◈无失真传输与滤波

- 无失真传输
- 理想滤波器
- 物理可实现的滤波器



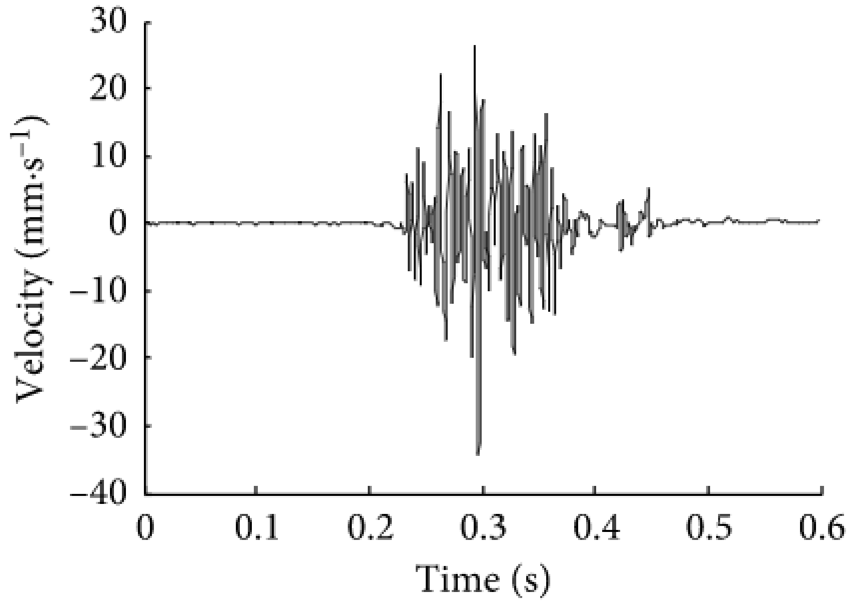
到达接收端时，信号发生了哪些变化？

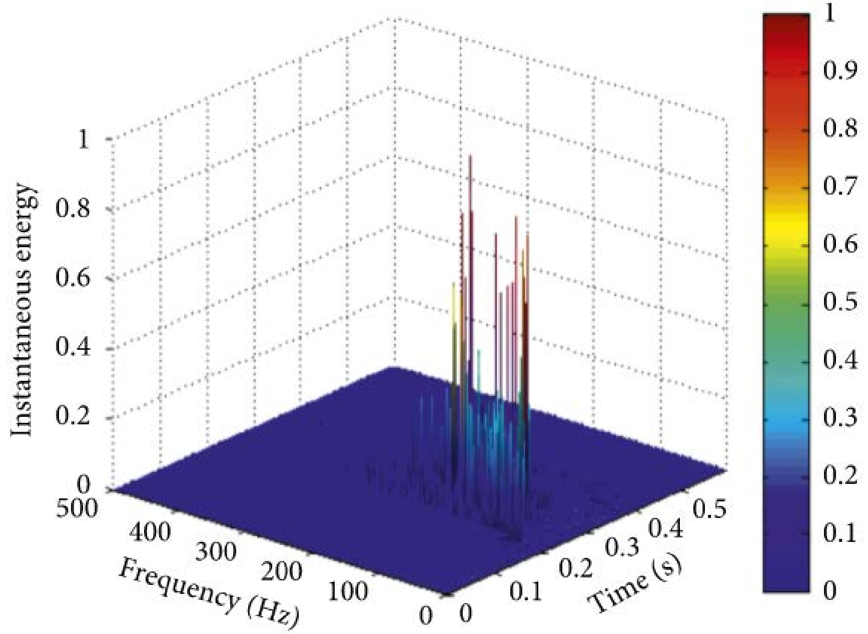
$$r_{zs}(t) = kf(t - t_d)$$



到达接收端时，信号发生了哪些变化？

$$r_{zs}(t) = kf(t - t_d)$$





无失真传输与滤波

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$F(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow R_{zs}(j\omega) = F(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega)=1 \quad F(j\omega)\to R_{zs}(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)=F(j\omega)}$$

$$\boxed{H(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega) \quad F(j\omega)\to R_{zs}(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega)F(j\omega)\neq F(j\omega)}$$

LTI系统对输入信号的具体作用体现在：将输入信号的频谱$F(jw)$乘以$H(jw)$转化为输出信号频谱。

系统起到了频谱变换器的作用　一 、无失真传输

二、 滤波

无失真传输

定义：信号的无失真传输是指对于任意信号，通过系统后，输出信号波形与输入信号波形相同，只允许改变其幅度及增加一定的延迟时间。相应的系统称为无失真传输系统。

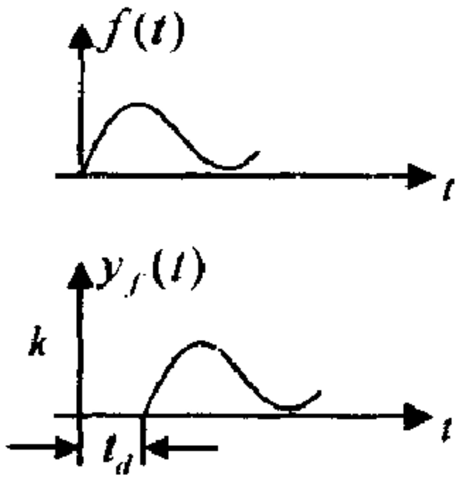
$$r_{zs}(t)=kf(t-t_d)$$

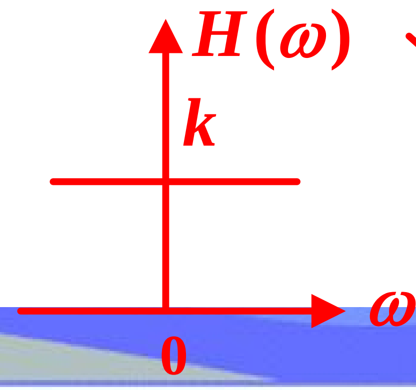
k为非零常量，$t_d>0$常量

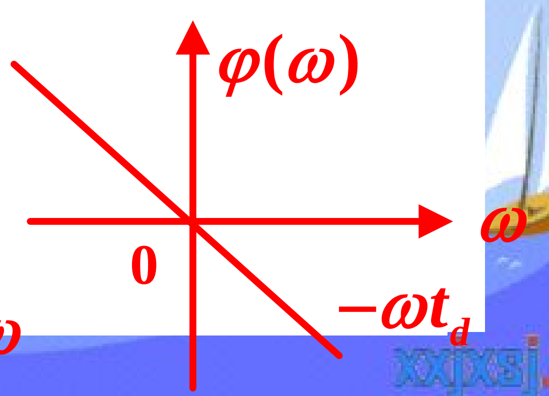
$$R_{zs}(j\omega)=ke^{-j\omega t_d}F(j\omega)$$

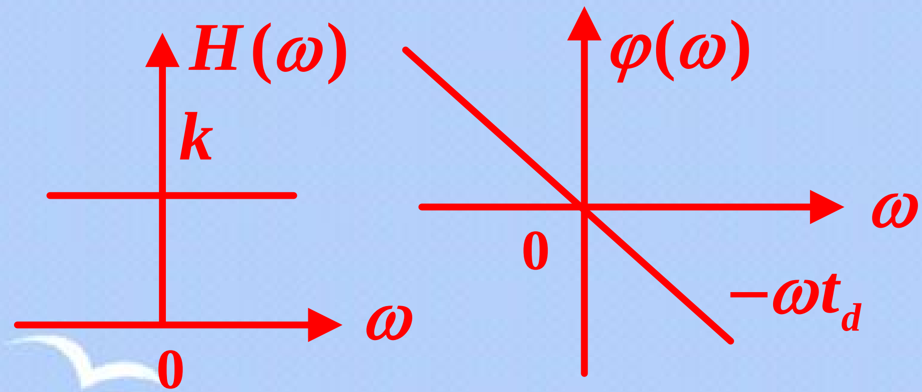
$$H(j\omega)=ke^{-j\omega t_d}$$

$$H(\omega)=k \qquad \varphi(\omega)=-\omega t_d$$





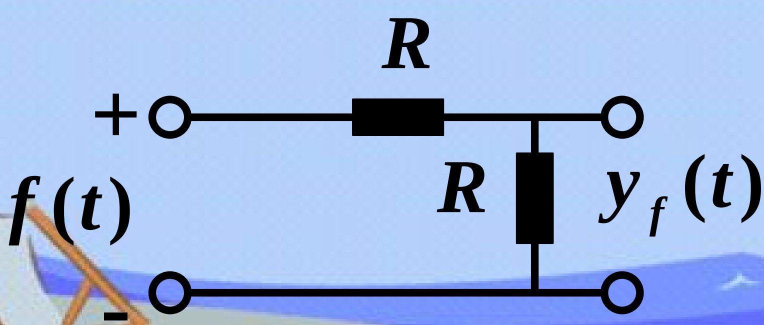




$$r_{zs}(t) = kf(t - t_d)$$

无失真传输系统应满足两个条件：

1. 系统幅频特性在整个频域范围（$-\infty < \omega < \infty$）内为非零实常数。
2. 相频特性在整个频域范围内是过坐标原点的一条斜率为负直线，即输入信号各频率分量通过系统后的附加相移与频率成正比。

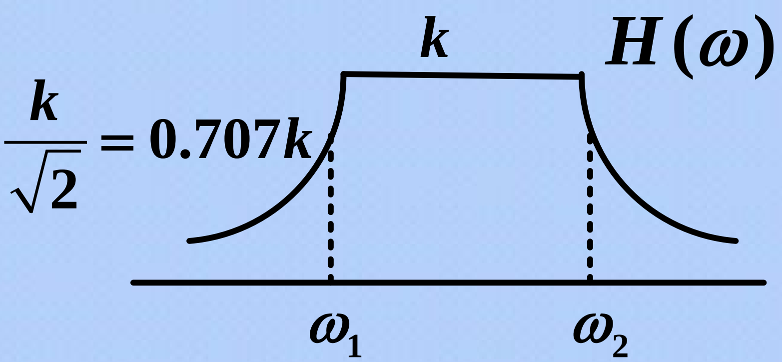


$$H(j\omega) = \frac{Y_f(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{2} f(t)$$

定义：系统传输带宽（passband width）

使 $H(\omega)$ 为零或很小的那些 ω 值，对应的虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 信号基本阻止，而使 $H(\omega)$ 比较大的那些 ω 值，对应的虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过，称后者 $H(\omega)$ 频率范围为系统的传输带宽（通频带）。



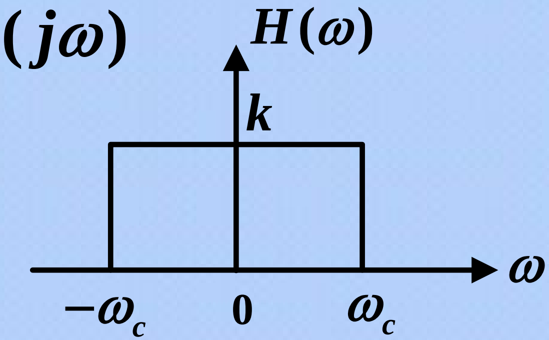
传输带宽 $\omega_2 - \omega_1$

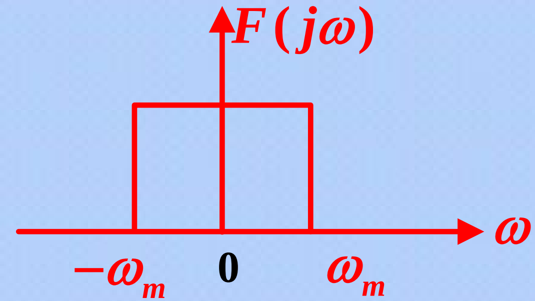
ω_2 ——上截止频率

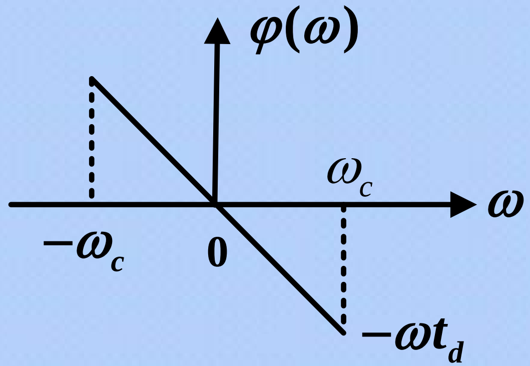
ω_1 ——下截止频率（电子学中常称为半功率点）

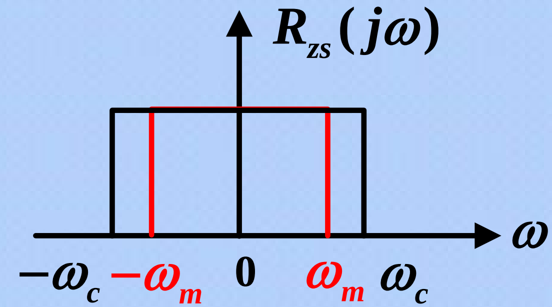
$$R_{zs}(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$R_{zs}(j\omega)=F(j\omega)\cdot H(j\omega)$$









扩充无失真传输的定义:

对某一信号，如果系统的传输带宽包含信号的频率范围，并且同时具备或近似具备 $\varphi(\omega)=-\omega t_d$， $H(\omega)=k$ ，则称系统对该信号为无失真传输系统。

滤波（Filtering）
—有失真传输（pass signals distorted）

滤波：通过系统后，信号中各频率分量的相对大小和相位被改变，甚至某些频率分量被完全去除。

当系统传输带宽小于信号频率范围，系统表现为具有频率选择特性的滤波器，这也是LTIS的一个重要应用。

1、理想滤波器

理想低通滤波器
理想高通滤波器
理想带通滤波器

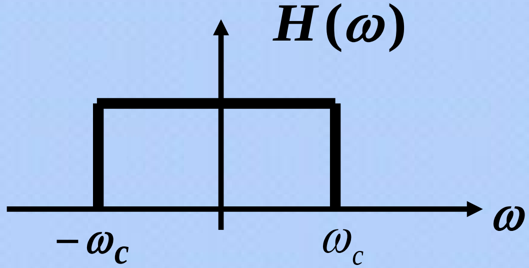
的频率响应

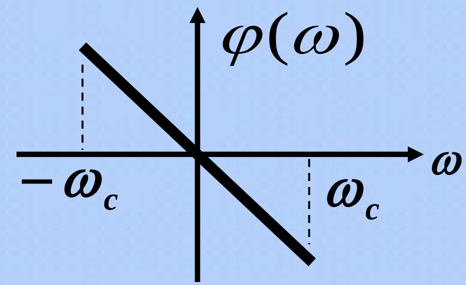
2、理想低通滤波器的时域特性

3、实际滤波器

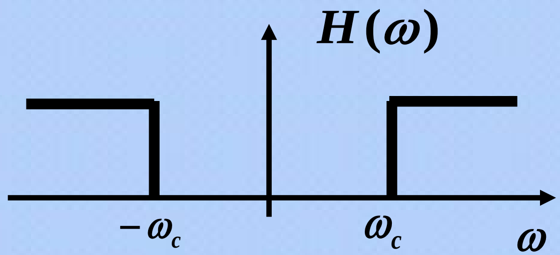
1. 理想滤波器

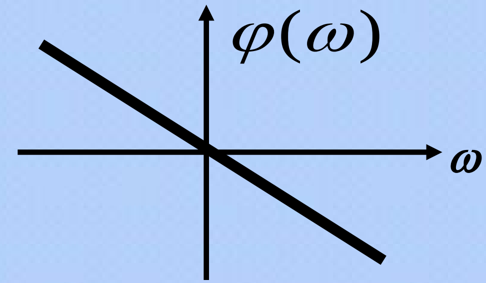
理想低通滤波器



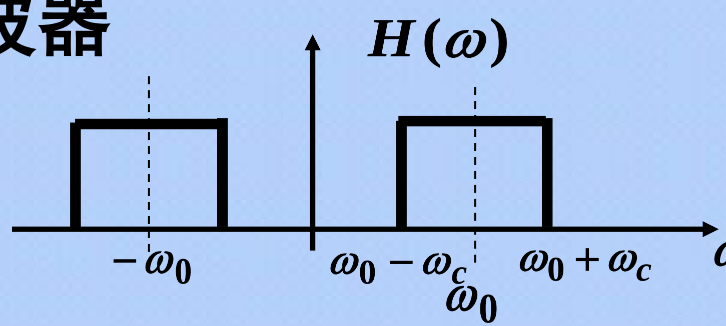


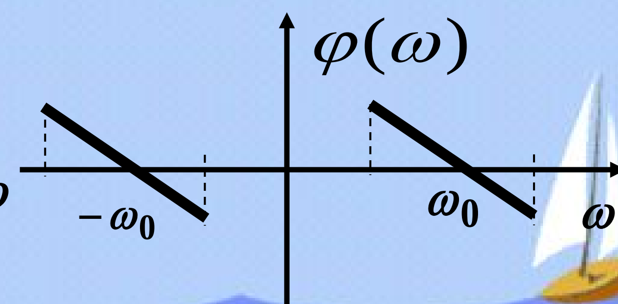
理想高通滤波器





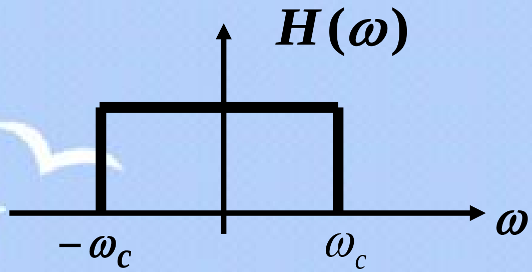
理想带通滤波器

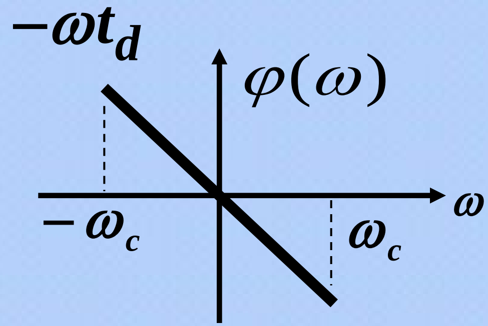




几个概念：通(频)带、阻带、截止频率、频域加窗

(1) 理想低通滤波器 Ideal Low Pass Filter，记作ILPF





通(频)带：　$\omega \in (-\omega_c, \omega_c)$

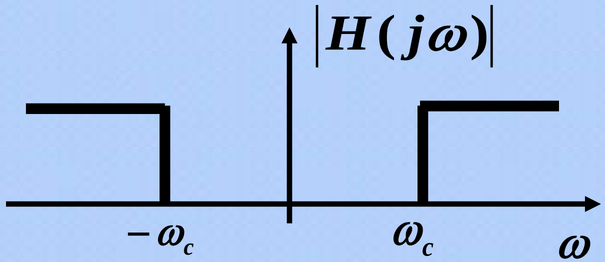
截止频率：　ω_c

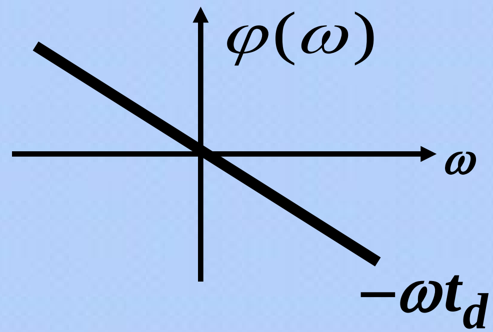
阻带：　$|\omega| > \omega_c$

系统频响：

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = G_{2\omega_c}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_d}$$

(2) 理想高通滤波器 Ideal High Pass Filter，记作IHPF



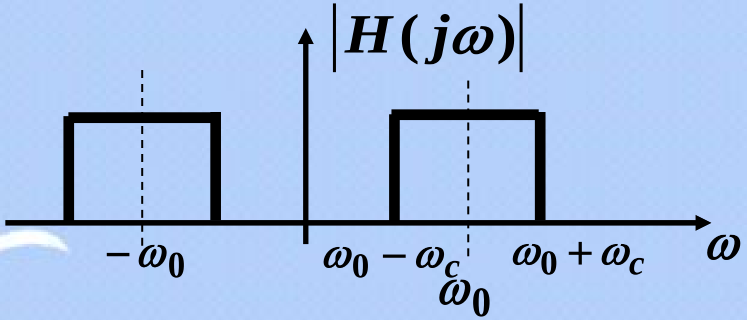


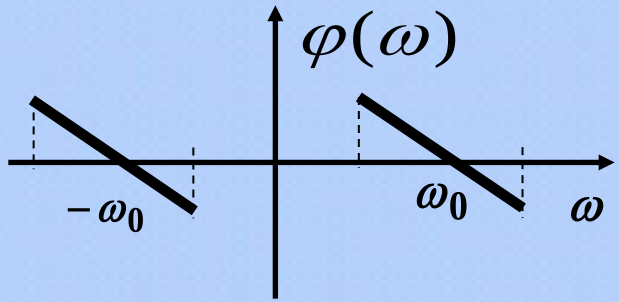
$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega|>\omega_c \\ 0 & |\omega|\le\omega_c \end{cases}=[1-G_{2\omega_c}(\omega)]\cdot e^{-j\omega t_d}$$

通(频)带： $|\omega|>\omega_c$

阻带： $\omega\in(-\omega_c,\omega_c)$

(3) 理想带通滤波器(Ideal Band Pass Filter，记作IBPF)





$$H_1(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$H(j\omega)=H_1(j\omega)*[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$H(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega+\omega_0)\cdot e^{-j(\omega+\omega_0)t_d}+G_{2\omega_c}(\omega-\omega_0)\cdot e^{-j(\omega-\omega_0)t_d}$$

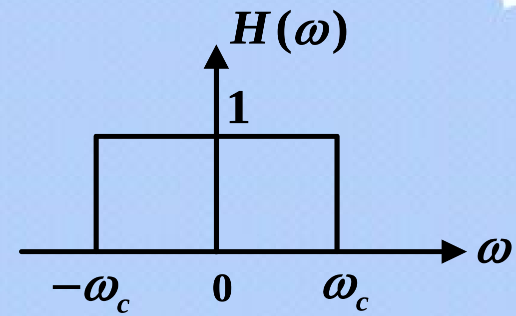
通(频)带：$|\omega-\omega_0|<\omega_c$

阻带：$|\omega-\omega_0|>\omega_c$

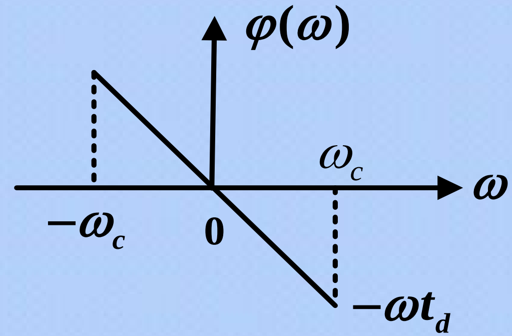
2. 理想低通滤波器的时域特性

理想LPF的冲激响应$h(t)$

$$H(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

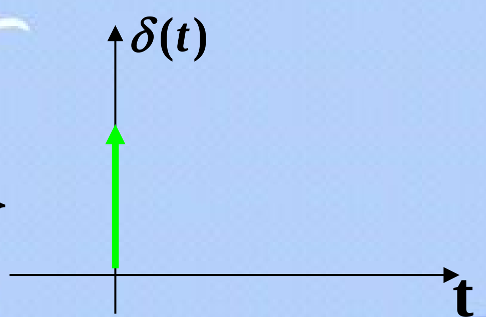


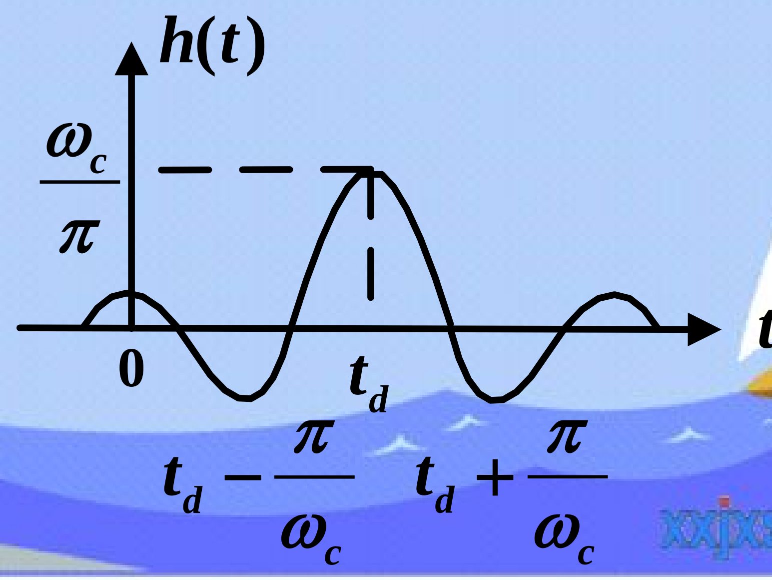
$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_d)]$$

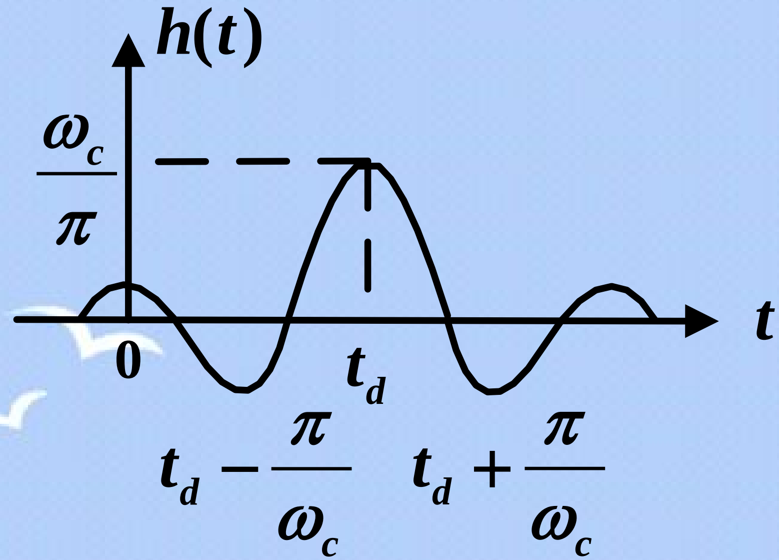


$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t)$$

输入







$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_d)]$$

① 波形产生失真；

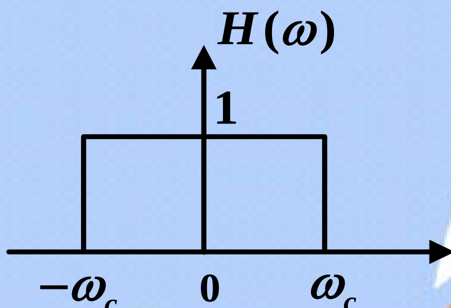
② 失真的原因：
$|\omega|>\omega_c$ 的频率分量被截断；

③ 非因果，不可实现；

当 $\omega_c\to\infty$ ILPF⟶无失真传输系统

$$\lim_{\omega_c\to\infty}h(t)=\lim_{\omega_c\to\infty}\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_d)]$$

$$=\delta(t-t_d)$$



理想LPF的阶跃响应$s(t)$——输入为$u(t)$时的零状态响应

$$H(j\omega)=G_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$S(j\omega)=\mathcal{F}\left[u(t)\right]\cdot H(j\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]G_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}G_{2\omega_c}(\omega)\cdot e^{-j\omega t_d}$$

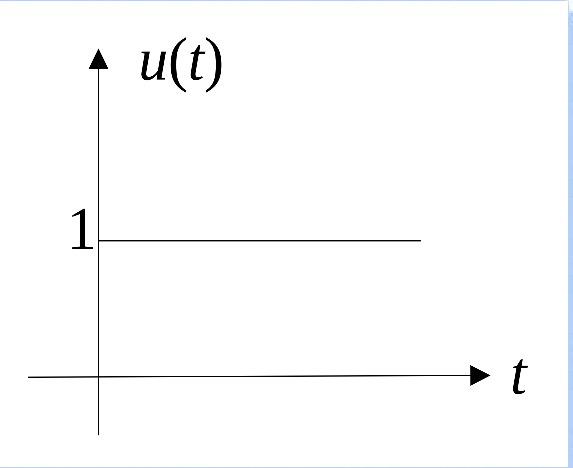
记$\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx=Si(y)$，称为正弦积分

可以求得：

$$\therefore s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si\left[\omega_c(t-t_d)\right]$$

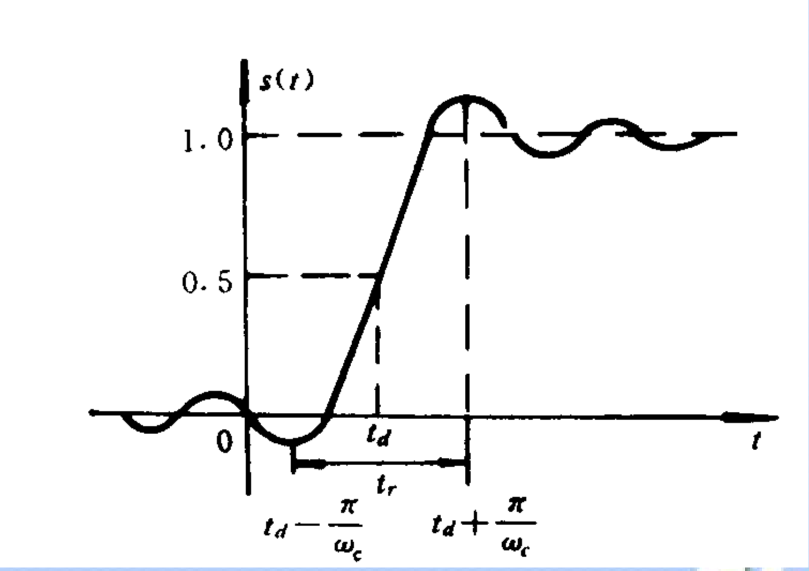
理想LPF的阶跃响应s(t)

$$\therefore s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si\left[\omega_c(t-t_d)\right]$$



① 波形产生失真， ILPF为非因果，不可实现；

② 频率截断效应引起吉布斯现象



总之，理想低通滤波器的作用是对输入信号进行频域加窗（矩形窗），频率截断效应引起时域的吉布斯波纹。用其他的频窗，如三角形窗，有可能使吉布斯波纹减小。

反之，如果在时域加窗，同样其频谱会出现吉布斯波纹。

根据需要选择合适的时窗函数或频窗函数，在数字信号处理中会得到应用。

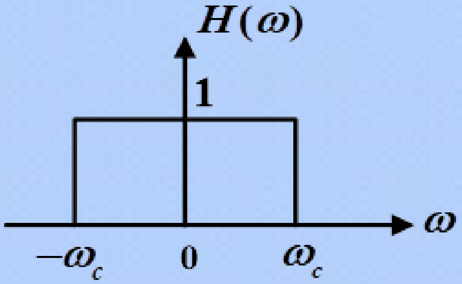
注意：“非因果，物理不可实现”不等于“无意义”。

3. 物理可实现的低通滤波器

连续时间系统物理可实现的准则（佩利—维纳准则），即系统的**幅频特性**必须同时满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln H(\omega)\right|}{1+\omega^2}d\omega<\infty$$

且 $$\int_{-\infty}^{\infty}H^2(\omega)d\omega<\infty$$

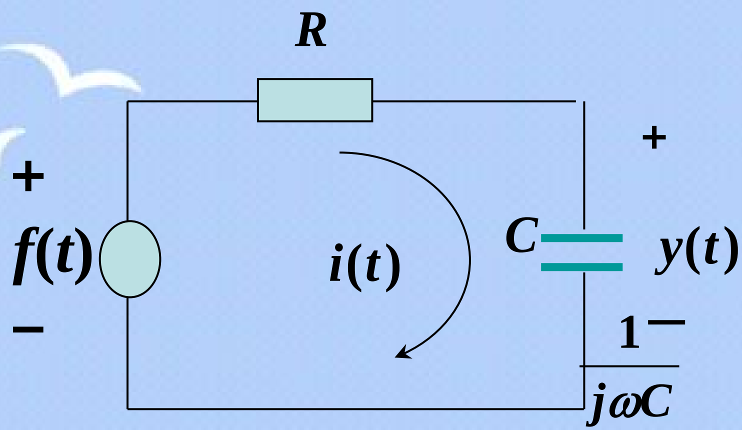


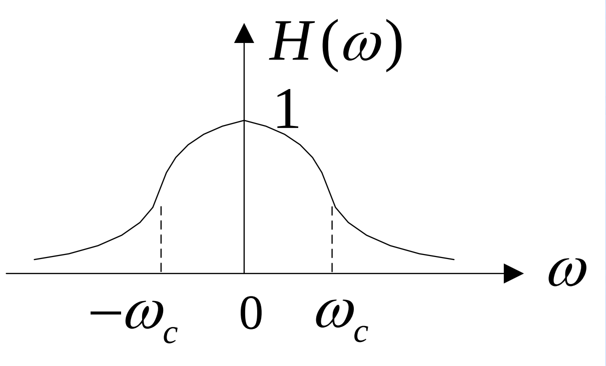
$$H(\omega)=0\Rightarrow\left|\ln H(\omega)\right|=+\infty$$

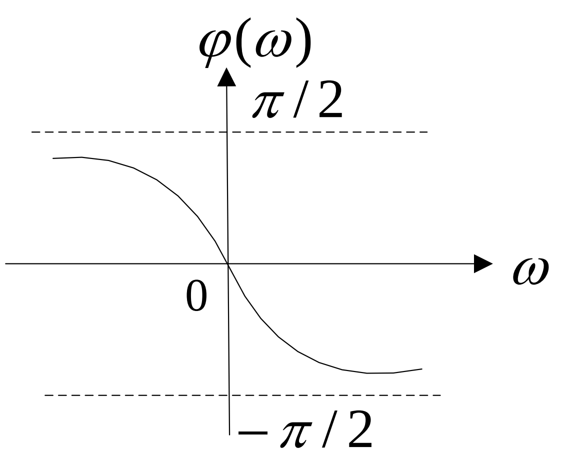
故理想滤波器都属物理不可实现系统

实际的低通滤波器

例：求如图所示RC电路，输入为电压源，以电路中的电流为输出，求频率响应H(jω)，并求$f(t)=u(t)$时的零状态响应。





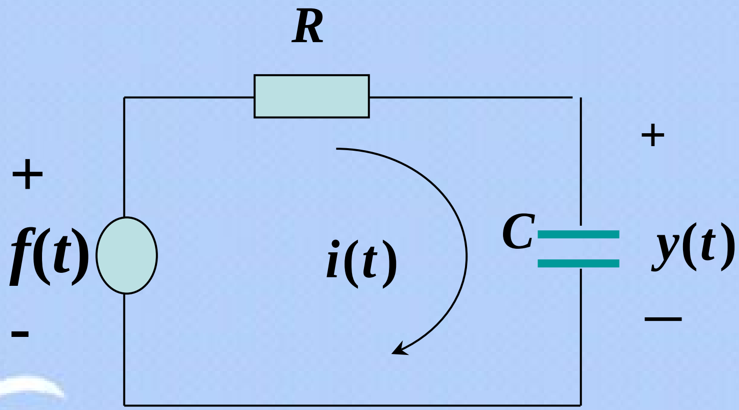


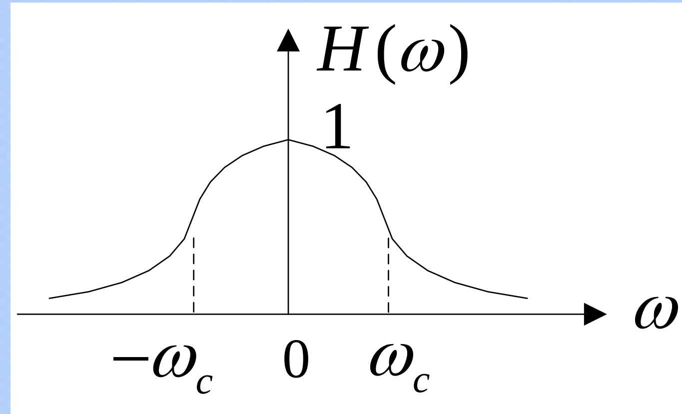
$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$\varphi(\omega)=-arctg(RC\omega)$$

$\omega_c = 1/RC$ **称为截止频率。**

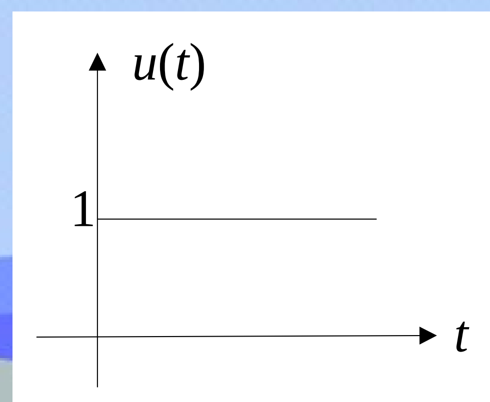


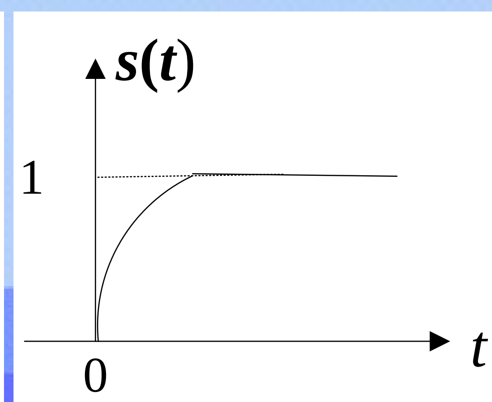


$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

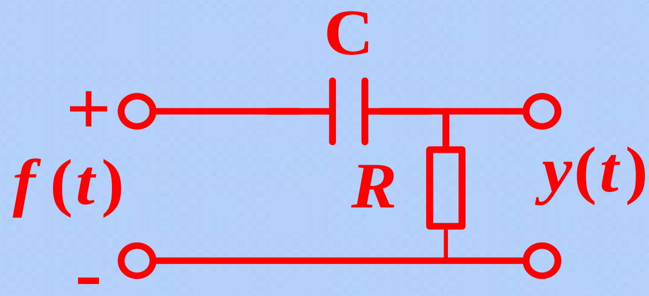
$$S(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$

$$s(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)$$



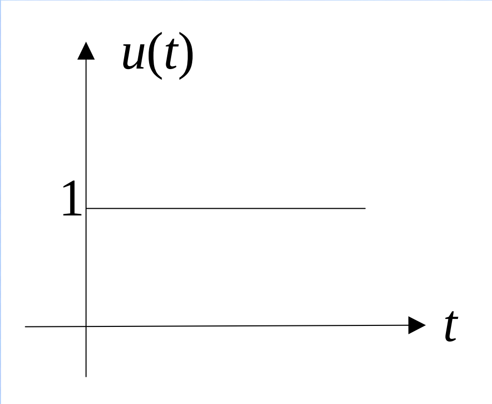


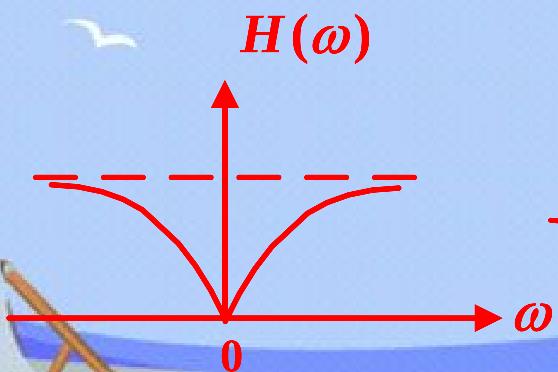
例：CR电路

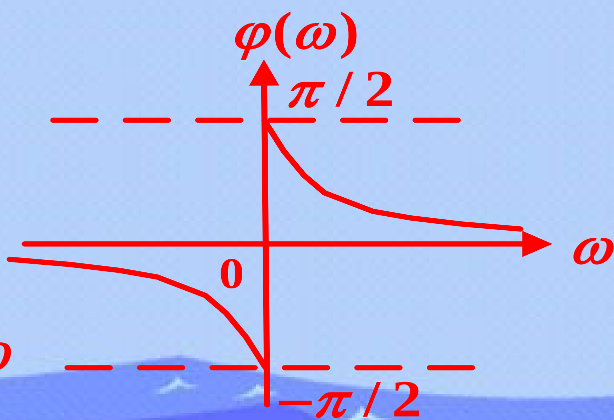


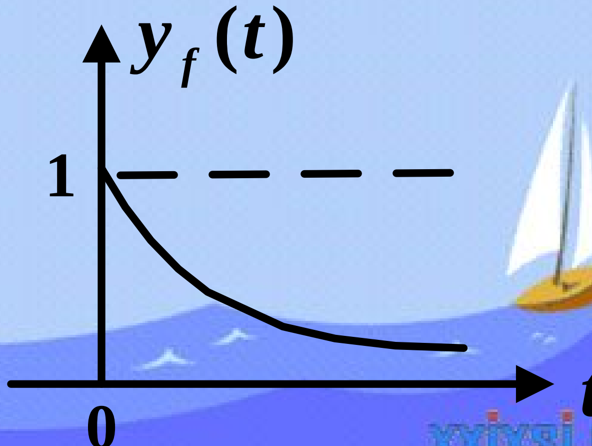
$$H(j\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

$$H(\omega)=\frac{\left|\omega/\omega_c\right|}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}},\quad \varphi(\omega)=arctg\frac{\omega_c}{\omega}$$

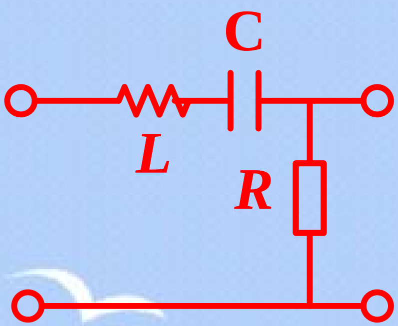




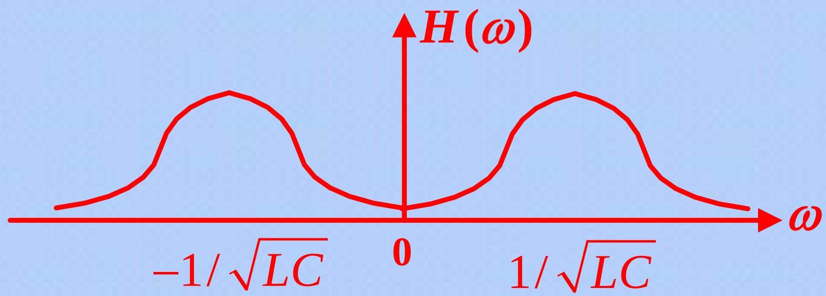




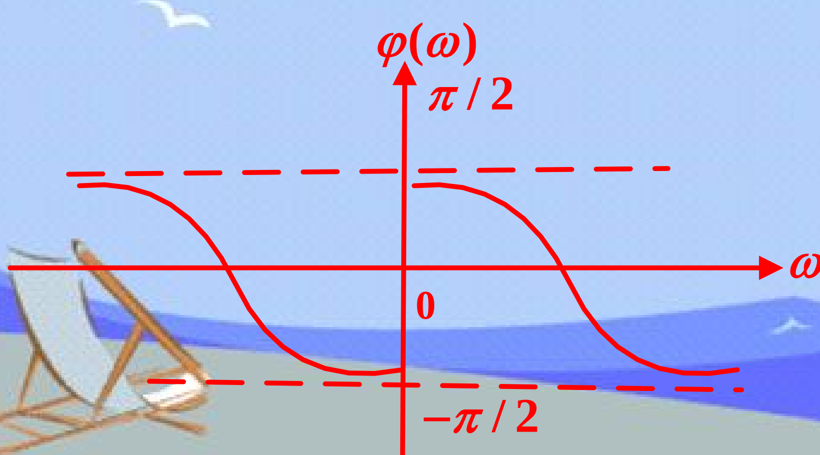
例：RLC串联谐振电路



$$H(j\omega)=\frac{R}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega RC}{1-\omega^2LC+j\omega RC}$$



$$H(\omega)=\frac{|\omega RC|}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2+(\omega RC)^2}},$$



$$\varphi(\omega)=arctg\frac{1-\omega^2LC}{\omega RC}$$

本章内容：

◈分析周期信号的系统响应

◈分析非周期信号的系统响应

◈无失真传输与滤波

- 无失真传输
- 理想滤波器
- 物理可实现的滤波器