第一节 一维随机变量及其分布(1)

- 一、随机变量的概念
- 二、分布函数的概念
- 三、内容小结

一、随机变量的定义

1. 随机变量的引入

(1) 为什么引入随机变量?

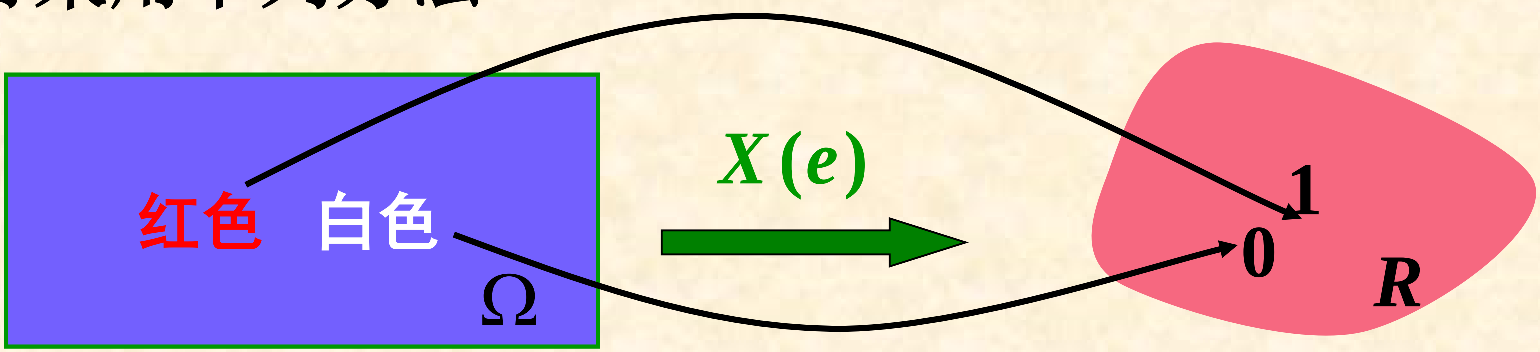
概率论是从数量上来研究随机现象的内在规律性,为了更方便有力的研究随机现象,就要用数学分析的方法来研究, 因此为了便于数学上的推导和计算,就需将任意的随机事件数量化,当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时, 就建立起了随机变量的概念.

(2) 随机变量的引入

实例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球,观察摸出球的颜色.

$$\Omega=\{\underbrace{\text{红色、白色}}_{\text{非数量}}\} \xrightarrow{\ ?\ } \text{将}\Omega\text{数量化}$$

可采用下列方法



即有 X(红色)=1， X(白色)=0.

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的 Ω={红色、白色} 数量化了.

实例2 抛掷骰子,观察出现的点数.

则有

Ω={1、2、3、4、5、6}

样本点本身就是数量

$X(e)=e$ 恒等变换

$X(1)=1,\ X(2)=2,\ X(3)=3,\ X(4)=4,\ X(5)=5,\ X(6)=6,$

且有 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{6},\quad (i=1,2,3,4,5,6).$

2. 随机变量的定义

定义2.1 设 E是随机试验，其样本空间为$\Omega=\{\omega\}$. 若对于每一个样本点$\omega\in\Omega$，都有唯一的实数值$X(\omega)$与之对应，则称定义在样本空间$\Omega=\{\omega\}$上的单值实函数$X(\omega)$为随机变量，简记为 X.

常用 X，Y，Z，…表示随机变量；

用$x, y, z, \ldots$ 表示X，Y，Z，…的取值.

注. 随机变量$X(\omega)$ 与高等数学中的实函数有本质的区别：

1° $X(\omega)$的定义域是样本空间Ω，而Ω不一定是实数集；

2° $X(\omega)$的取值是随机的，它的每一个可能取值都有一定的概率；

3°随机变量是随机事件的数量化. 即对于任意实数 x, $\{X \le x\}$是随机事件.

实例3 掷一个硬币, 观察出现的面 , 共有两个

结果: $e_1 = $(反面朝上),

$e_2 = $(正面朝上),

若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数, 则有

$e_1 = $(反面朝上) $\xrightarrow{X(e)}$ 0 $\rightarrow X(e_1) = 0$

$e_2 = $(正面朝上) 1 $\rightarrow X(e_2) = 1$

即 $X(e)$ 是一个**随机变量.**

实例4 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手不断向目标射击, 直到击中目标为止,则

$$X(e) = \text{"所需射击次数"},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots \quad .$$

实例5　某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过, 如果某人到达该车站的时刻是随机的, 则

$$X(e)=\text{"此人的等车时间"},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: **[0,5].**

3.随机变量的分类

随机变量

离散型　　非离散型

连续型　　其它

(1)离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限多个(可列个), 叫做离散型随机变量.

实例1　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是 :　$1, 2, 3, 4, 5, 6.$

实例2 若随机变量 X 记为 “连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为“击中目标的次数”, 则 X 的所有可能取值为:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 30.$$

(2)连续型　随机变量所取的可能值可以**连续地充满某个区间**, 叫做连续型随机变量.

实例1　随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例2　随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测误差”.

则 X 的取值范围为 (a, b) 内的任一值.

二、分布函数的概念

为了对离散型的和连续型的 随机变量以及更广泛类型的随机变量给出一种统一的描述方法，下面引进了分布函数的概念.

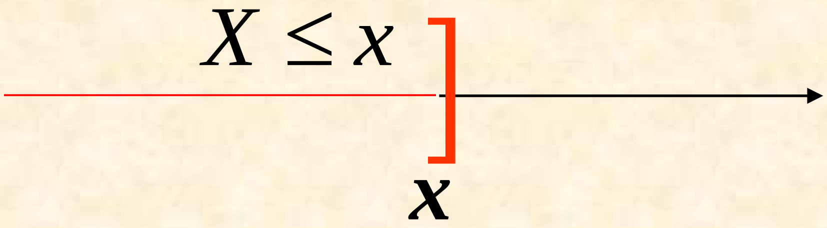
1.分布函数的定义

定义2.2 设 X 是随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为X 的分布函数. 记作 $X\sim F(x)$ 或 $F_X(x)$.

注. 1°如果将 X 看作数轴上随机点的坐标,则分布函数 **$F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 的概率**.



$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$

问: 在上 式中，X, x 皆为变量. 二者有什么区别?

x 起什么作用? $F(x)$ 是不是概率?

$F(x)$ 是随机变量 X 取值不大于 x 的概率.

2°分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

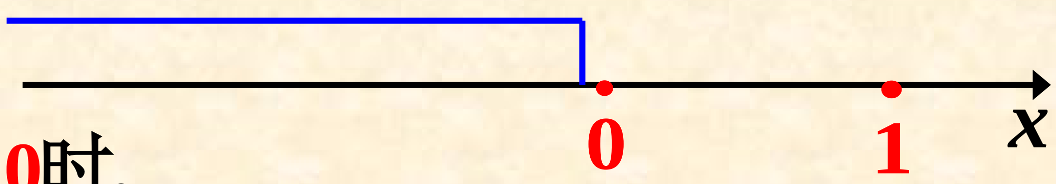
3°分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.

例1 抛掷均匀硬币, 令

$$X=\begin{cases}1, & 出正面,\\ 0, & 出反面.\end{cases}$$

求随机变量 X 的分布函数.

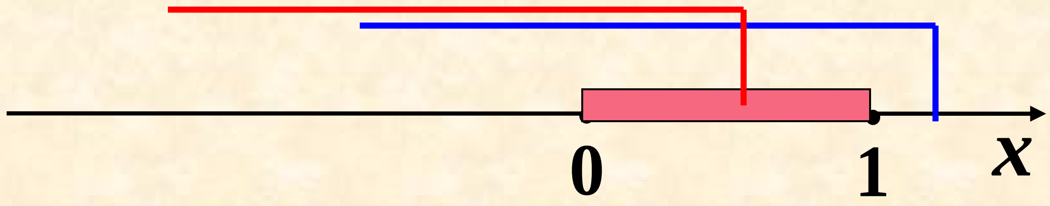
解 $P\{X=1\}=P\{X=0\}=\dfrac{1}{2},$



当$x<0$时,

$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0,$$

目录 上页 下页 返回 结束



当$0 \le x < 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当$x \ge 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

2.分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in R;$

(2) $F(x)$单调不减，即若 $x_1 < x_2$,则有

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

(3) 若 $x_1 < x_2$,则

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

(4) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$

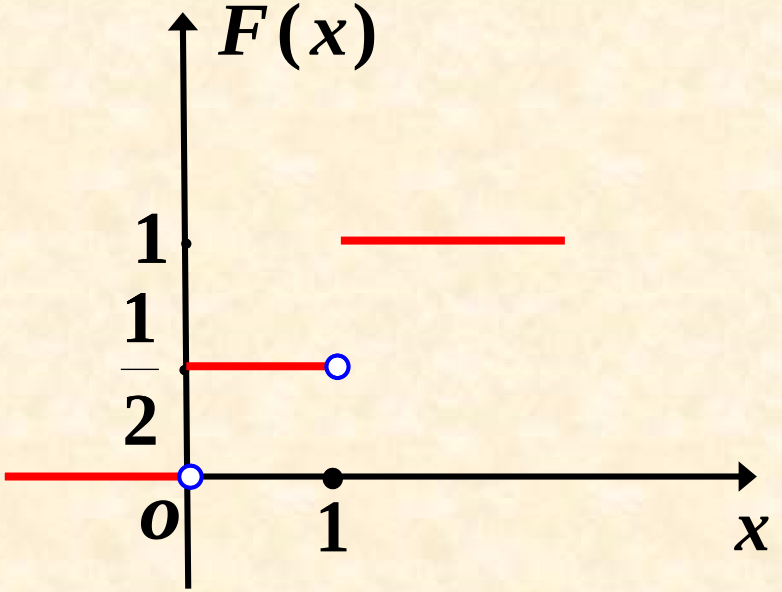
$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(5) $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$, $(-\infty < x_0 < \infty)$. (证明略)

即任一分布函数处处**右连续**.

如：对**例1**,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$



注.

1° 若 X 的分布函数为 $F(x)$，则

$$P\{X = x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - 0), \quad x_0 \in R.$$

事实上，

$$P\{X = x_0\} = \lim_{\delta \to 0^+} P\{x_0 - \delta < X \leq x_0\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} [F(x_0) - F(x_0 - \delta)]$$

$$= F(x_0) - F(x_0 - 0)$$

重要公式:

$$(1)\ P\{X \le b\} = F(b),$$

$$(2)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(3)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

$$(4)\ P\{X < b\} = F(b-0)$$

$$(5)\ P\{X = b\} = F(b) - F(b-0), \quad b \in R.$$

例2 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/8, & 0\le x<1,\\ 4/8, & 1\le x<2,\\ 7/8, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

求 $P\{1<X<3\}, P\{1<X\le 3\}, P\{X\ge 5.5\}$

解 $P\{1<X<3\}=P\{1<X\le 3\}-P\{X=3\}$

$$P\{1 < X < 3\} = P\{1 < X \le 3\} - P\{X = 3\}$$

$$= [\cancel{F(3)} - F(1)] - [\cancel{F(3)} - F(3-0)]$$

$$= F(3-0) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$P\{1 < X \le 3\} = F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \le x < 1, \\ 4/8, & 1 \le x < 2, \\ 7/8, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}}$$

$$P\{X \ge 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - F(5.5-0) = 1 - 1 = 0.$$

例3 已知随机变量X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求 (1) 常数 A，B的值；(2) $P\{1<X\le 2\}$.

解 (1) 由 $F(+\infty)=1$, 得

$$1=F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=A$$

$\therefore \quad A=1$

由分布函数的右连续性，得

$$F(0+0)=\lim_{x\to+0}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=F(0)$$

即 $A+B=0$

$\therefore \quad B=-A=-1$

(2) $P\{1<X\le 2\}=F(2)-F(1)$

$$=(1-e^{-2})-(1-e^{-\frac{1}{2}})$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}\approx 0.4712$$

三、内容小结

1. 概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的, 因此为了方便有力的研究随机现象, 就需将任意的随机事件数量化,把一些非数量表示的随机事件用数字表示时, 就建立起了随机变量的概念. 因此随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

2. 随机变量的分类:离散型,连续型.

3. 随机变量的分布函数的概念

$$F(x) = P\{X \leq x\}.$$

4. 分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in R;$

(2) $F(x)$单调不减，即若 $x_1 < x_2$,则有

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

(3) 若 $x_1 < x_2$,则

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

(4) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(5) $F(x)$右连续，即

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0 + 0) = F(x_0), x_0 \in R;$$