第三章 随机变量的数字特征

第一节 数学期望

- 一、数学期望的概念
- 二、随机变量函数的数学期望
- 三、数学期望的性质
- 四、内容小结

一、数学期望的概念

引例1 **了解二年级学生身高X.**

随机挑选n个人，有

m_1个人身高为x_1,

m_2个人身高为x_2,

…

m_k个人身高为x_k,

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$.

问题： 如何评价二年级学生的身高？

解　一般的方法是求它们的算术平均值:

$$\boxed{\bar{x}} = \frac{1}{n}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_k x_k)$$

随机波动

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \boxed{\frac{m_i}{n}}$$

这正是身高为x_i的频率!

"平均身高"的稳定值=?

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$$

"平均身高"等于身高的可能值与其概率之积的和.

1. 离散型随机变量的数学期望

(1) 定义3.1

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

身高问题

“平均身高”即为 X 的数学期望

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot p_i$$

(2) 关于定义的几点说明

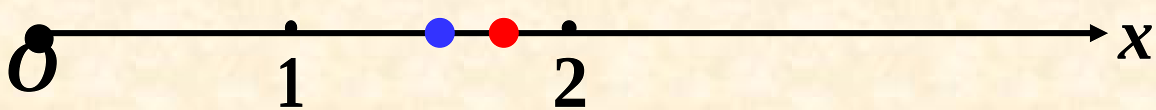
1° $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

如：对于

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times0.02+2\times0.98=1.98.$$



2° 分布律 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ EX

3° 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

例1 谁的技术比较好?

甲,乙两个射手,他们的射击技术分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲,乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

(3) 常见离散型随机变量的数学期望

分布	分布律	$E(X)$
(0-1)分布 $X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊 松 分 布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\dfrac{1}{p}$

二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$=np$$

则二项分布$B(n,p)$的数学期望为 np.

并有两点分布$B(1,p)$的数学期望为

p.

泊松分布

设 $X \sim P(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

几何分布

设随机变量 X的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,$$

$$q=1-p;\ k=1,2,\cdots;\ 0<p<1$$

则有 $$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$$

$$=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(q^{k})'=p\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k})'=p\cdot(\frac{q}{1-q})'$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}$$

$$=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

(1)定义3.2

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x$

绝对收敛,则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x$ 的值得为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$.即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x.$$

例4　顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待的服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}x=5$(分钟).

因此，顾客平均等待5分钟就可得到服务.

(2) 常见连续型随机变量的数学期望

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布 $X \sim U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$
正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布 $X \sim E(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $(\lambda > 0)$	$\frac{1}{\lambda}$

均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}\,x$

$=\dfrac{1}{2}(a+b).$

结论　均匀分布的数学期望位于区间的中点.

指数分布

设随机变量X 服从指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad 其中\lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

则有 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$

$x=\mu+\sigma t$

$dx=\sigma\, dt$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

奇函数

$$=\mu.$$

二、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

引例 设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y=f(X)=X^2$，求 $E(Y)$.

解 先求 $Y=X^2$ 的分布律

$Y=X^2$	0	1	4
p	p_2	p_1+p_3	p_4

则有 $E(Y)=E(f(X))=E(X^2)$

$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_3)+4\cdot p_4$$

$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_3+2^2\cdot p_4$$

$$=\sum_{k=1}^{4} f(x_k)P\{X=x_k\}.$$

因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=f(X)$, 且 $P\{X=x_k\}=p_k,\quad (k=1,2,\cdots)$,

则有 $$E(f(X))=\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的,它的分布密度为 $p(x)$ 则

$$E(f(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X,Y 为离散型随机变量, $f(x,y)$ 为二元函数,则 $E[f(X,Y)]=\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)p_{ij}.$

其中(X,Y)的联合概率分布为p_{ij}.

(2) 设 X,Y 为连续型随机变量, $f(x,y)$ 为二元函数,则

$$E[f(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$.

例5 设 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 + 3\times 0.4 = 2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y) = -1\times 0.3 + 0\times 0.4 + 1\times 0.3 = 0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.1-\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+0\times0.3+\frac{1}{3}\times0.1$$

$$=\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2]=4\times0.3+1\times0.2+0\times0.1+9\times0.4$

$$=5.$$

三、数学期望的性质

1. 设C是常数, 则有 $E(C)=C$.

证 $E(X)=E(C)=1\times C=C$.

2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k = C\sum_k x_k p_k = CE(X)$.

例如: $E(X)=5$, 则 $E(3X)=3E(X)=3\times 5=15$.

3. 设 X、Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证 $$E(X+Y)=\sum_{i}\sum_{j}(x_i+y_j)p_{ij}$$

$$=\sum_{i}x_i p_{i\cdot}+\sum_{j}y_j p_{\cdot j}=E(X)+E(Y).$$

推广 $$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i E(X_i).$$

4. 设 X、Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

四、内容小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

$$\begin{cases} 1^0 \quad E(C) = C; \\ 2^0 \quad E(CX) = CE(X); \\ 3^0 \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y); \\ 4^0 \quad X, Y \text{ 独立} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y). \end{cases}$$

备份题

例1　你知道自己该交多少保险费吗?

　　根据生命表知，某年龄段保险者里，一年中每个人死亡的概率为0.002, 现有10000个这类人参加人寿保险,若在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金 . 问每人一年须交保险费多少元?

解　设1年中死亡人数为X，则 $X \sim b(10000, 0.002)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{10000} k \cdot \binom{1000}{k} (0.002)^k (1 - 0.002)^{10000-k}$$

$$= 20(\text{人}).$$

被保险人所得赔偿金的期望值应为

$$20 \times 2000 = 40000(\text{元}).$$

若设每人一年须交保险费为a 元,

由被保险人交的“纯保险费”与他们所能得到的赔偿金的期望值相等知

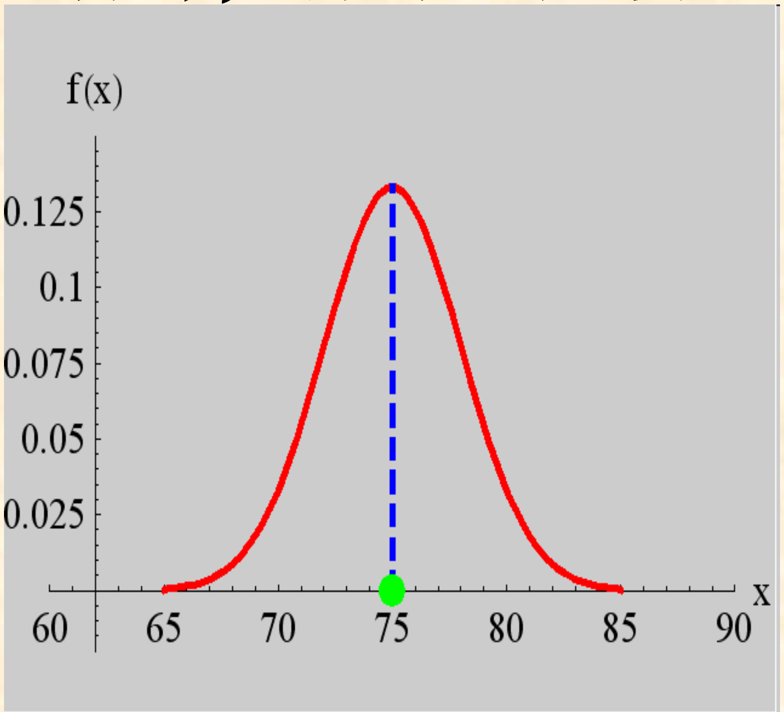
$$10000a = 40000 \Rightarrow a = 4(\text{元}),$$

故每人1年应向保险公司交保险费4元.

例2 某大学二年级学生进行了一次数学统考,设其成绩 X 服从 $N(75, 9)$ 的正态分布,试求学生成绩的期望值.

解 因为 $X \sim N(75,9)$,

知 $p(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-75)^2}{3^2}}$,



故 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-75)^2}{3^2}}\,\mathrm{d}x=75(分).$$

例3 设

X	-2	0	1	3
p	$1/3$	$1/2$	$1/12$	$1/12$

求: $E(2X^3+5)$.

解 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+E(5)$

$$=2E(X^3)+5,$$

又 $E(X^3)=(-2)^3\times\dfrac{1}{3}+0^3\times\dfrac{1}{2}+1^3\times\dfrac{1}{12}+3^3\times\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{3}$,

故 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+5=2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+5=\dfrac{13}{3}$.

例4　设一电路中电流$I(A)$与电阻$R(\Omega)$是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, & 0\le i\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, & 0\le r\le 3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求电压$V=IR$的均值.

解　$$E(V)=E(IR)=E(I)E(R)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty} i g(i)\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\left[\int_0^1 2i^2\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_0^3 \frac{r^3}{9}\,\mathrm{d}r\right]=\frac{3}{2}(V).$$

例5　商店的销售策略

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式,记使用寿命为X(以年计),规定:

$X \le 1$,一台付款1500元;$1 < X \le 2$,一台付款2000元;$2 < X \le 3$,一台付款2500元;$X > 3$,一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布,概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台收费Y 的数学期望.

解 $P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} \,\mathrm{d}x = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} \,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} \,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得　$E(Y) = 2732.15$, 即平均一台收费 2732.15.

例7 按规定,某车站每天 $8:00\sim 9:00$, $9:00\sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客 $8:00$ 到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客 $8:20$ 到车站,求他候车时间的数学期望.

解 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}$$

$$=33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$= 27.22$(分).