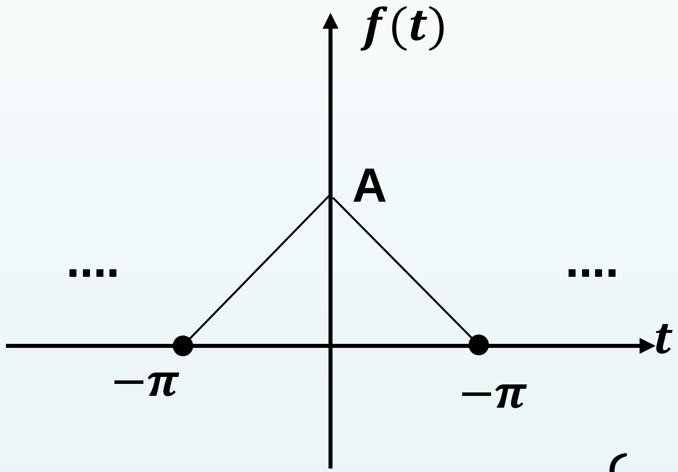
信号与系统：连续信号的正交分解

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

连续信号的正交分解:傅里叶级数展开

已知周期信号f(t)如下图所示，其周期为2π，求其三角傅里叶级数展开



$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

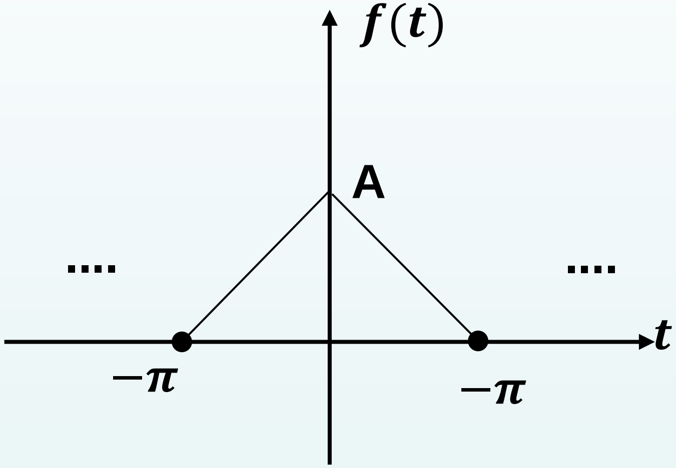
$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t dt \end{cases}$$

$$c_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i^*(t)dt$$

$$K_n=\int_{t_1}^{t_2}\left|\phi_n(t)\right|^2 dt$$

连续信号的正交分解:傅里叶级数展开

已知周期信号f(t)如下图所示，其周期为2π，求其三角傅里叶级数展开



$$\boxed{T = 2\pi, \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1}$$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{\pi} t + A, & -\pi \le t < 0 \\ -\dfrac{A}{\pi} t + A, & 0 \le t < -\pi \end{cases}$$

1. 偶函数，$b_n = 0$

2. a_0?

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{A}{\pi} t + A \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left(-\frac{A}{\pi} t + A \right) dt$$

$$= \frac{A}{2}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt \end{cases}$$

一般可以选择$t_0 = -\dfrac{T}{2}$，积分区间为$\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2} \right]$

连续信号的正交分解:傅里叶级数展开

已知周期信号f(t)如下图所示，其周期为2π，求其三角傅里叶级数展开

3. a_n?

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{A}{\pi}t+A\right)\cos(nt)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{A}{\pi}t+A\right)\cos(nt)dt$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{0}\cos(nt)dt=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{A}{\pi}t\cos(nt)dt-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{A}{\pi}t\cos(nt)dt$$

$$=\frac{A}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{0}t\cos(nt)dt-\int_{0}^{\pi}t\cos(nt)dt\right]=\frac{2A}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}t\cos(nt)dt$$

$$=\frac{2A}{n^2\pi^2}\int_{-n\pi}^{0}t_1\cos(t_1)dt_1=\frac{2A}{n^2\pi^2}\left(t_1\sin(t_1)+\cos(t_1)\right)\Big|_{-n\pi}^{0}$$

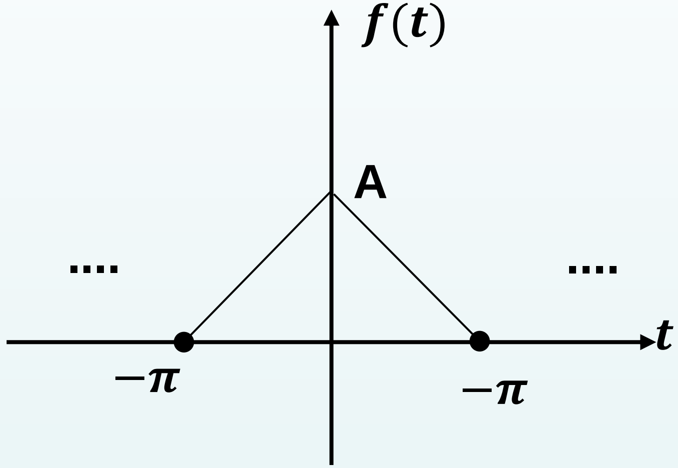
$$\boxed{t_1=nt,\quad t=\frac{t_1}{n},-n\pi\le t_1<0}$$

$$=\frac{2A}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)=\begin{cases}\frac{4A}{n^2\pi^2},n=1,3,5,\cdots\\0,n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$\boxed{x\cos(x)=\left[x\sin(x)+\cos(x)\right]'}$$

连续信号的正交分解:傅里叶级数展开

已知周期信号f(t)如下图所示，其周期为2π，求其三角傅里叶级数展开



$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{A}{2}, b_n = 0$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4A}{n^2\pi^2}, n=1,3,5,\cdots \\ 0, n=2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2}\cos t + \frac{4A}{9\pi^2}\cos 3t + \frac{4A}{25\pi^2}\cos 5t + \cdots$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

$$\boxed{f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)}$$

管致中：P151

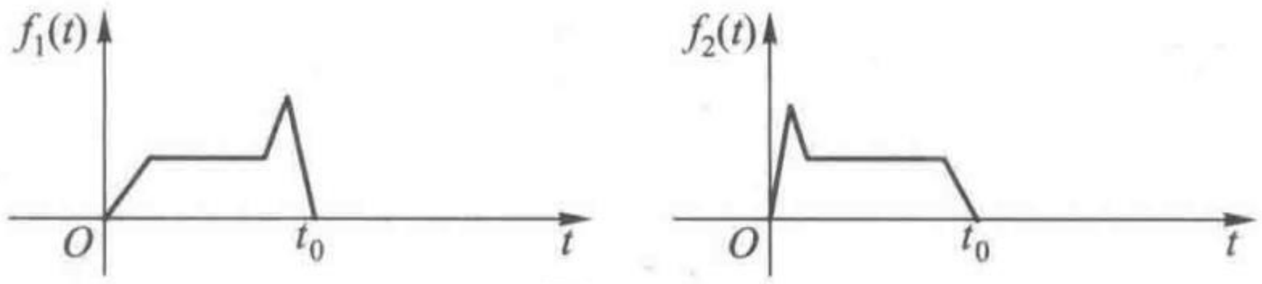


图 P3-11

$$f_2(t) = f_1(-(t-t_0))$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \quad f_2(t) = f_1(-(t-t_0)) \leftrightarrow ?$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})$　　a非零常量

$$f_1(-t) \leftrightarrow F_1(-j\omega)$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(t+t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{j\omega t_0}$，　t_0为任意实数

$$f_1(-(t-t_0)) \leftrightarrow F_1(-j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

管致中：P151

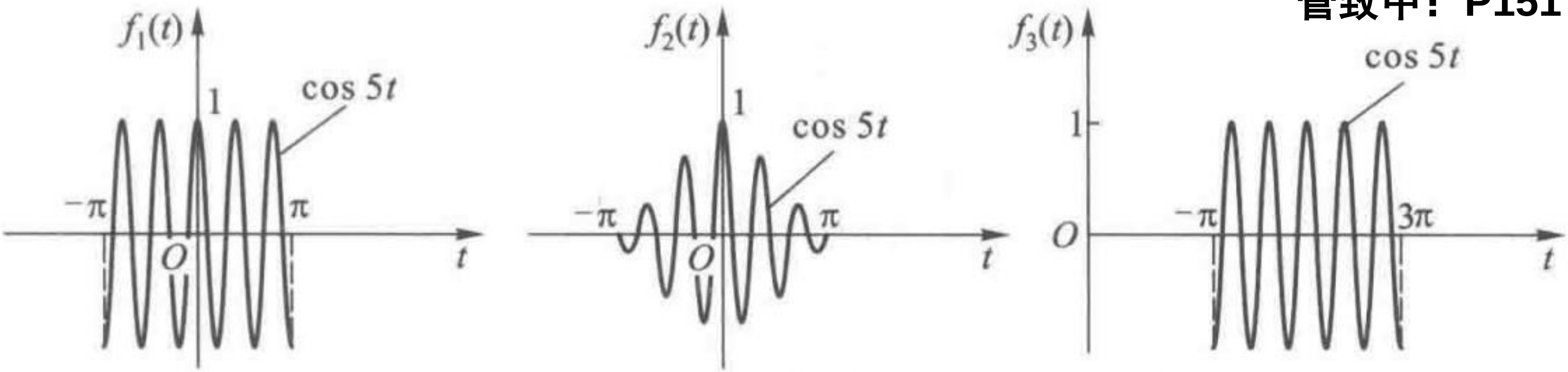


图 P3−12

$$f_1(t) = G_{2\pi}(t)\cos(5t)$$

$$G_{2\pi}(t) \leftrightarrow 2\pi Sa\left(\frac{\omega 2\pi}{2}\right) = 2\pi Sa(\omega\pi)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$$

$$f_1(t) = G_{2\pi}(t)\cos(5t) \leftrightarrow \pi\left[Sa\big(\pi(\omega+5)\big) + Sa\big(\pi(\omega\text{-}5)\big)\right]$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

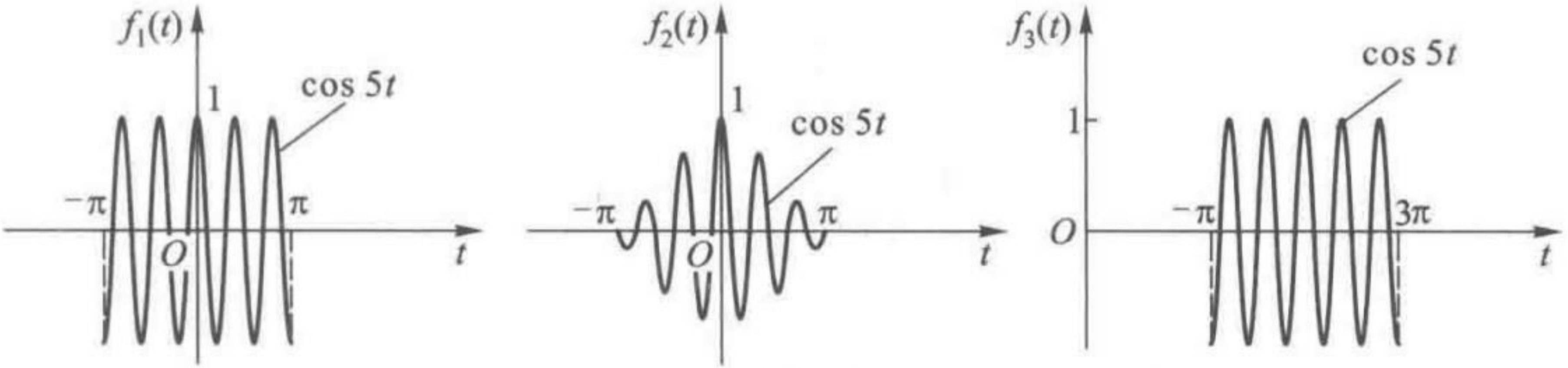


图 P3−12

$$f_1(t)=G_{2\pi}(t)\cos(5t)\leftrightarrow\pi\left[Sa(\pi\omega+5)+Sa(\pi\omega-5)\right]$$

$$f_3(t)=f_1(t-2\pi)\leftrightarrow\pi\left[Sa(\pi\omega+5)+Sa(\pi\omega-5)\right]e^{-j2\pi\omega}$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.15 求下列频谱函数对应的时间函数。

管致中：P152

(1) $F(j\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$

(2) $F(j\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

(3) $F(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$

(4) $F(j\omega)=-\frac{2}{\omega^2}$

1. 解：已知： $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

得到： $e^{jt(-\omega_0)}=e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$e^{jt(\omega_0)}=e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

线性： $e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t}=-2j\sin(\omega_0 t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)-2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\frac{-j}{\pi}\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{j\pi}\sin(\omega_0 t)\leftrightarrow\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.15　求下列频谱函数对应的时间函数。

管致中：P152

(1) $F(j\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$　　(2) $F(j\omega)=\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

(3) $F(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$　　(4) $F(j\omega)=-\frac{2}{\omega^2}$

2. 解：已知：$G_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

得到：

$$\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

管致中：P152

3.15　求下列频谱函数对应的时间函数。

(1) $F(j\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$　　(2) $F(j\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

(3) $F(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2},a>0$　　(4) $F(j\omega)=-\frac{2}{\omega^2}$

3. 解：已知：$\boxed{e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega},a>0}$

得到：

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)=-\frac{j}{(a+j\omega)^2}$$

$$-jte^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)=-\frac{j}{(a+j\omega)^2}$$

$$\boxed{te^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2},\ a>0}$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

管致中：P152

（4）$F(j\omega)=-\dfrac{2}{\omega^2}$

4. 解：已知：$\boxed{\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)}$

得到：
$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)=-\frac{1}{j\omega^2}+\pi\delta'(\omega)$$

$$-jt\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)=-\frac{1}{j\omega^2}+\pi\delta'(\omega)$$

$\boxed{1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$ $\boxed{-jt\leftrightarrow 2\pi\delta'(\omega)}$ $\boxed{-\dfrac{jt}{2}\leftrightarrow\pi\delta'(\omega)}$

$$-jt\varepsilon(t)+\frac{jt}{2}\leftrightarrow-\frac{1}{j\omega^2}$$

$$-j^2 2t\varepsilon(t)+j^2 t\leftrightarrow-\frac{2}{\omega^2}$$

$$2t\varepsilon(t)-t=t\,\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow-\frac{2}{\omega^2}$$

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$　　(2) $(t-2)f(t)$　　(3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$　　(5) $(1-t)f(1-t)$　　(6) $f(2t+5)$

管致中：P153

1. 解： 已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$tf(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F_1(j\omega) = jF_2(j\omega)$$

$$2tf(2t) \leftrightarrow j\frac{1}{2}F_2\left(j\frac{\omega}{2}\right) = j\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\frac{\omega}{2}}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)\right] = j\frac{d}{d\omega}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

$$tf(2t) \leftrightarrow j\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

1. 解：

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt = F(w)$$

则 $F'(w) = -i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-iwt}dt$

$$\overset{令 t=2u}{=} -i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (2u)f(2u)e^{-iw(2u)}d(2u)$$

$$= -4i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} uf(2u)e^{-i(2w)u}du$$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} uf(2u)e^{-i(2w)u}du = \dfrac{i \cdot F'(w)}{4}$

那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(2t)e^{-iwt}dt = \dfrac{i \cdot F'(\frac{w}{2})}{4}$

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$ (2) $(t-2)f(t)$ (3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$ (5) $(1-t)f(1-t)$ (6) $f(2t+5)$

管致中：P153

2. 解： 已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$(t-2)f(t) = tf(t) - 2f(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F_1(j\omega) - 2F_1(j\omega)$$

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$　(2) $(t-2)f(t)$　(3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$　(5) $(1-t)f(1-t)$　(6) $f(2t+5)$

管致中：P153

3. 解： 已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow j\omega F_1(j\omega)$$

$$t\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left(j\omega F_1(j\omega)\right)$$

$$j\frac{d}{d\omega}\left(j\omega F_1(j\omega)\right) = -\frac{d}{d\omega}(\omega)F_1(j\omega) - \frac{d}{d\omega}\left(F_1(j\omega)\right)\omega = -F_1(j\omega) - \omega\frac{d}{d\omega}\left(F_1(j\omega)\right)$$

$$t\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow -F_1(j\omega) - \omega\frac{d}{d\omega}\left(F_1(j\omega)\right)$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$　(2) $(t-2)f(t)$　(3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$　(5) $(1-t)f(1-t)$　(6) $f(2t+5)$

管致中：P153

4. 解： 已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$f(-t) \leftrightarrow F_1(-j\omega)$$

$$f(-(t-1)) \leftrightarrow F_1(-j\omega)e^{j\omega(-1)} = F_1(-j\omega)e^{-j\omega}$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$ (2) $(t-2)f(t)$ (3) $t\frac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$ (5) $(1-t)f(1-t)$ (6) $f(2t+5)$

管致中：P153

5. 解：已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$tf(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F_1(j\omega)$$

$$-tf(-t) \leftrightarrow -j\frac{d}{d\omega}\left[F_1(-j\omega)\right]$$

$$(1-t)f(1-t) \leftrightarrow -je^{-j\omega}\frac{d}{d\omega}\left[F_1(-j\omega)\right]$$

连续信号的正交分解：傅里叶变换性质

3.21 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F_1(j\omega)$，求下列时间信号的频谱函数。

(1) $tf(2t)$　　(2) $(t-2)f(t)$　　(3) $t\dfrac{df(t)}{dt}$

(4) $f(1-t)$　　(5) $(1-t)f(1-t)$　　(6) $f(2t+5)$

管致中：P153

6. 解： 已知：$f(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$

$$f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(2t+5) = f\left(2\left(t+\frac{5}{2}\right)\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}F_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{j\frac{5\omega}{2}}$$