信号与系统：连续信号的正交分解

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

本章内容：

◈分析周期信号（利用傅里叶级数）

——谐波分析法

◈分析非周期信号（$T\rightarrow\infty$）

——傅里叶变换

延拓目的：

◈分析系统的I/O特性，并用频率方法求$r_{zi}(t)$

连续时间信号傅里叶变换的性质

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \longleftrightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

时域描述 频域描述

$f(t)$ ⟺ $F(j\omega)$

1 唯一性

2 线性特性

3 奇偶特性

4 共轭特性

5 对称特性

6 时域展缩特性

7 时移特性

8 频移特性

9 时域微分特性

10 频域微分特性

11 时域卷积定理

12 频域卷积定理

13 时域积分定理

14 信号能量与频谱的关系

傅里叶变换的性质

1、傅里叶变换的唯一性

若$\mathscr{F}[f_1(t)]=\mathscr{F}[f_2(t)]=F(j\omega)$，则$f_1(t)=f_2(t)$

反之若 $\mathscr{F}^{-1}[F_1(j\omega)]=\mathscr{F}^{-1}[F_2(j\omega)]=f(t)$, 则 $F_1(j\omega)=F_2(j\omega)$

即：频谱与时间信号之间是一一对应。

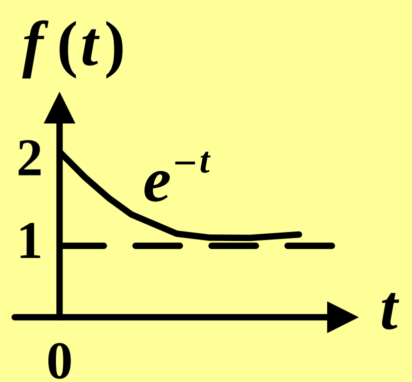
2、线性特性

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)$, $\quad f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)$

则$af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$ $\quad a$、b都是常量

应用：$f(t)\overset{\text{分解}}{=}\sum K_i f_i(t)\leftrightarrow\sum K_iF_i(j\omega)\overset{\text{合成}}{=}F(j\omega)$

例：



解1： $f(t)=\quad e^{-t}\varepsilon(t)\quad+\quad\varepsilon(t)$

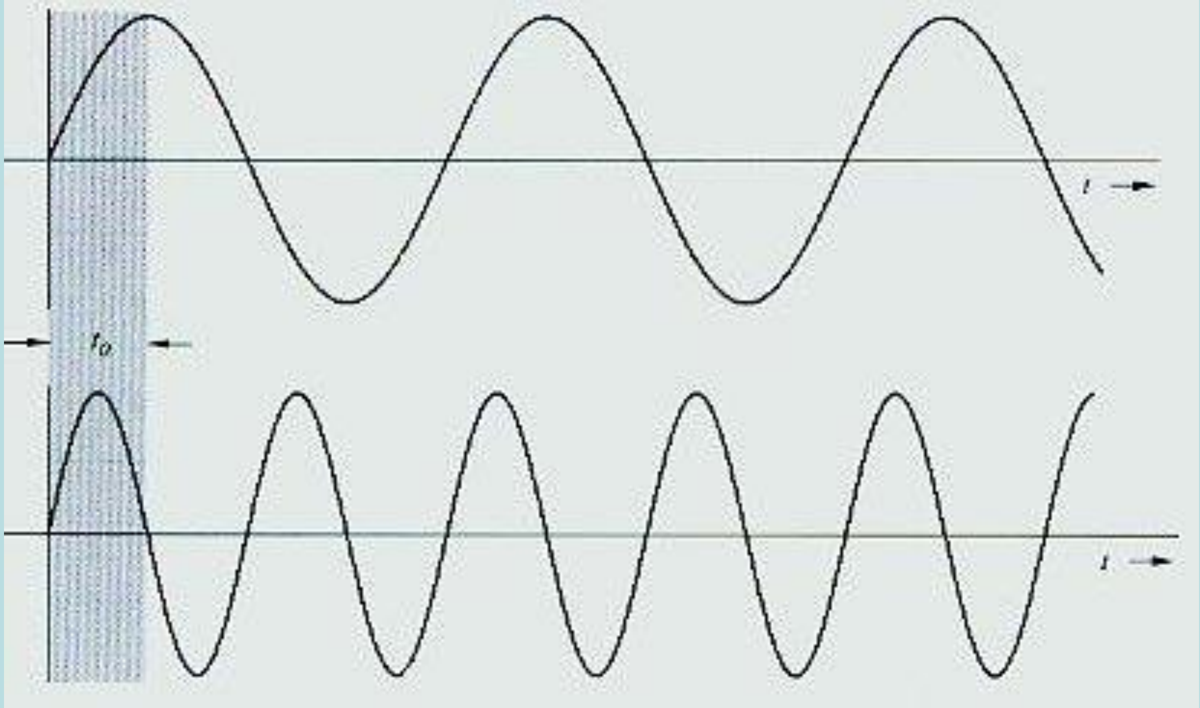
$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$

$$F(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

3、时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(t+t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{j\omega t_0}$， t_0为任意实数

意义： $f(t+t_0) \leftrightarrow |F(j\omega)|e^{j[\varphi(\omega)+\omega t_0]}$ ，线性相位 ωt_0



为了实现相同的时间延迟，较高频率的正弦必须乘比例地承受较大的相移。 不失真条件

例　求 $\delta(t-t_0)$ 的频谱

$\delta(t)\leftrightarrow 1$

解：　$\delta(t-t_0)\leftrightarrow 1\cdot e^{-j\omega t_0}=e^{-j\omega t_0}$

4、频移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)]$， ω_0 为任意实数

例 求 $e^{j\omega_0 t}$、$\cos\omega_0 t$ 及 $\sin\omega_0 t$ 的频谱

解： $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

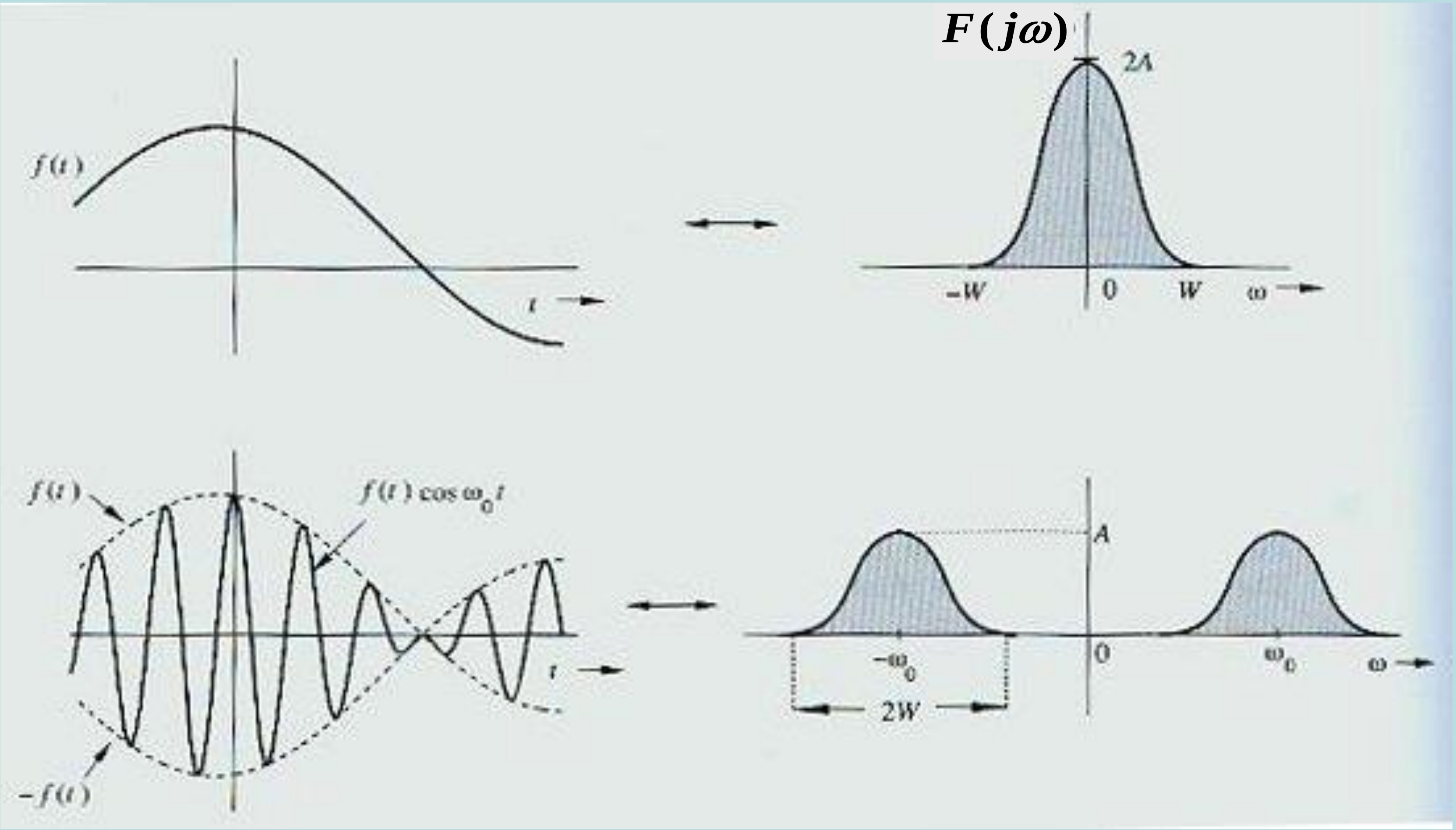
$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

傅里叶变换的性质

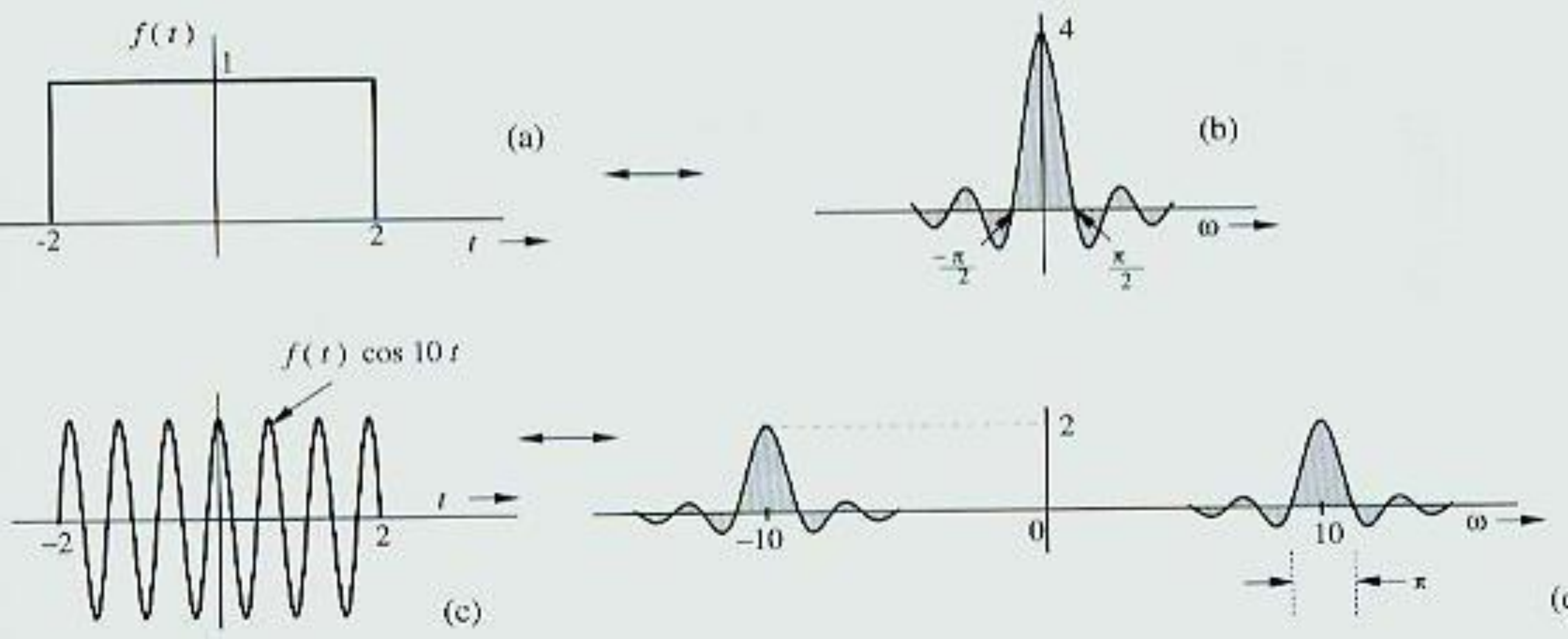
$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$$



傅里叶变换的性质

$$f(t)\cos 10t \leftrightarrow \frac{1}{2}F[j(\omega+10)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-10)]$$

$$f(t)=G_4(t)\leftrightarrow 4Sa(2\omega)$$



5、时域展缩特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $f(at)\leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})$　　a非零常量

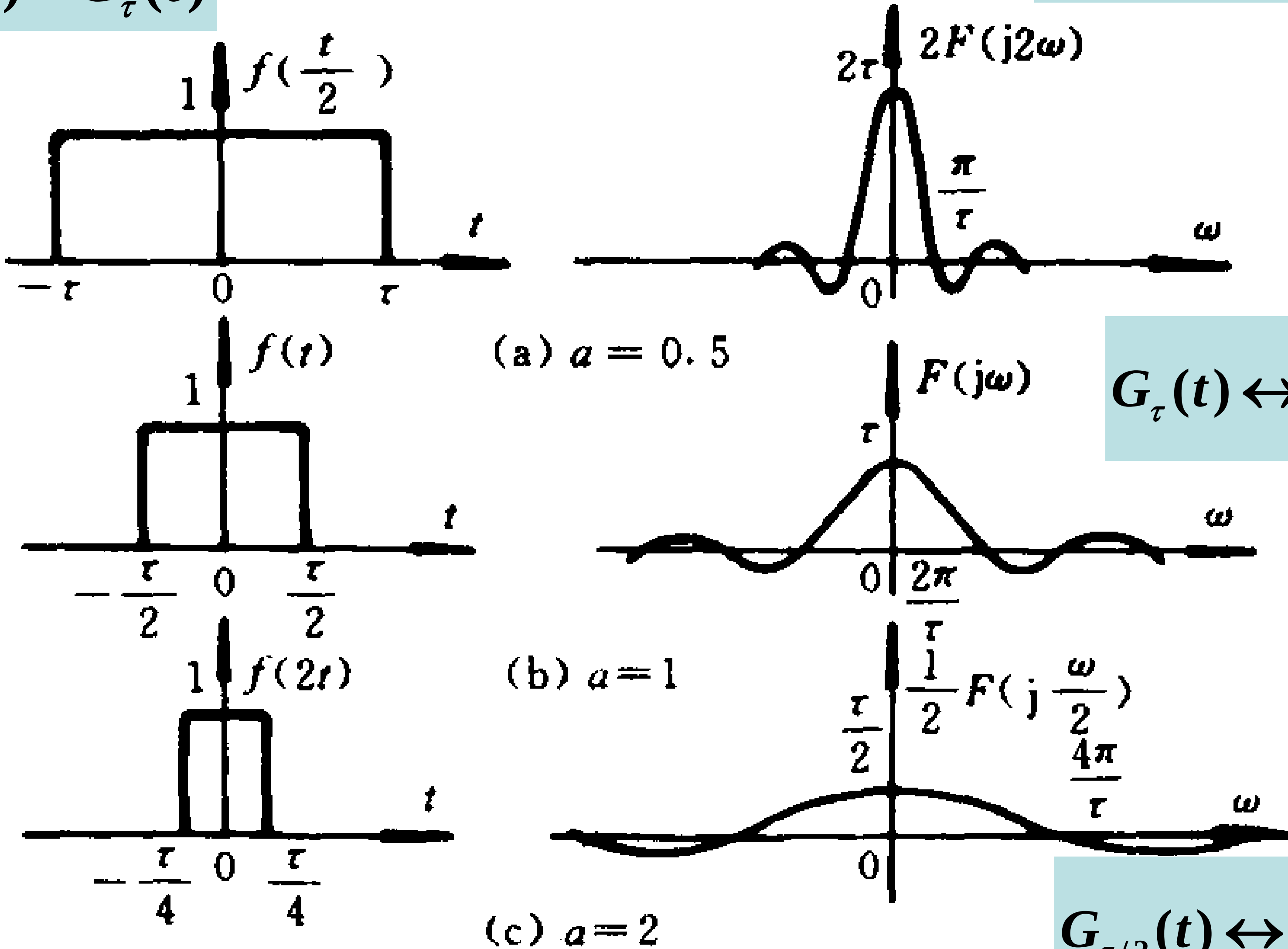
$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
f(t) \arrow[rrr, "a<0\text{翻转}\quad |a|<1\text{扩展}\quad |a|>1\text{压缩}"] \arrow[d, leftrightarrow] & & & f(at) \arrow[d, leftrightarrow] \\
F(j\omega) \arrow[rrr, "a<0\text{翻转}\quad |a|<1\text{压缩}\quad |a|>1\text{扩展}"] & & & \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})
\end{tikzcd}
$$

意义：一个信号的时域压缩就形成它的频谱扩展，而信号的时域扩展导致它的频谱压缩。

以矩型脉冲为例

$$f(t)=G_\tau(t)$$

$$G_{2\tau}(t)\leftrightarrow 2\tau Sa(\omega\tau)$$



$$G_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$G_{\tau/2}(t)\leftrightarrow \frac{\tau}{2}Sa(\frac{\omega\tau}{4})$$

傅里叶变换的性质

一个信号的带宽是反比于信号持续期或时宽的，上例已经证明此点，即脉冲宽度为τ秒的门脉冲，其带宽是$1/\tau\ Hz$。

$$\boxed{\tau \times \frac{1}{\tau} = 1}$$

这就从理论上证明了时域与频域的反比关系，也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。

通信中，若要压缩信号的持续时间，则信号的带宽就要展宽。要压缩信号的有效频带，就不得不增加信号的持续时间。

一般而言，时域有限，频谱无限，反之亦然。

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \qquad a\text{非零常量}$$

特例：$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

6、奇偶特性——时域波形的对称性与频谱函数的关系

偶信号的频谱是偶函数，奇信号的频谱是奇函数。

关于t

关于ω

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

证明：若$f(t)$为偶函数，即$f(-t)=f(t)$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore F(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt \quad 令 \; t=-\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = F(j\omega)$$

同样可以证明　若$f(t)$为奇函数，即$f(-t)=-f(t)$

则　$F(-j\omega)=-F(j\omega)$

7、共轭特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)\text{，则}\quad f^{*}(t) \leftrightarrow F^{*}(-j\omega)$$

证明： $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$ 可得 $F^{*}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(t)\cdot e^{j\omega t}dt$

$$\therefore F^{*}(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore f^{*}(t) \leftrightarrow F^{*}(-j\omega)$$

推论： 若$f(t)$为实信号，则 $F(j\omega)=F^{*}(-j\omega)$

即：实信号的频谱是**共轭对称函数**

$$F(j\omega)=\mathrm{Re}[F(j\omega)]+j\,\mathrm{Im}[F(j\omega)]=|F(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$F^{*}(-j\omega)=\mathrm{Re}[F(-j\omega)]-j\,\mathrm{Im}[F(-j\omega)]=|F(-j\omega)|e^{j\varphi(-\omega)}$$

即：频谱的实部为偶函数，虚部为奇函数；

$|F(j\omega)|$为偶函数，$\varphi(\omega)$为奇函数。

傅里叶变换的性质

信号与频谱的奇偶特性

$f(t)$的奇偶特性	$F(j\omega)$ 的奇偶特性
实函数	复函数 $\mathrm{Re}[F(j\omega)]$、$\lvert F(j\omega)\rvert$ 是偶函数，$\mathrm{Im}[F(j\omega)]$、$\varphi(\omega)$ 是奇函数
实偶函数	实偶函数 $F(j\omega)=\mathrm{Re}[F(j\omega)], \mathrm{Im}[F(j\omega)]=0, \varphi(\omega)=0$
实奇函数	虚奇函数 $F(j\omega)=j\,\mathrm{Im}[F(j\omega)], \mathrm{Re}[F(j\omega)]=0, \varphi(\omega)=\pi/2$

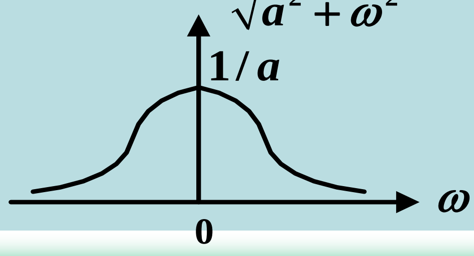
例： $$e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega},\quad a>0$$

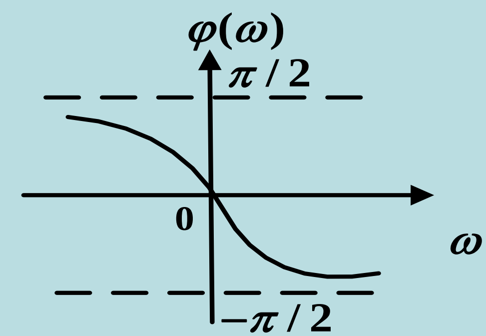
验证：实信号→复函数

$\lvert F(j\omega)\rvert$ **为偶函数**

$\varphi(\omega)$ **为奇函数**

$$\lvert F(j\omega)\rvert=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$





傅里叶变换的性质

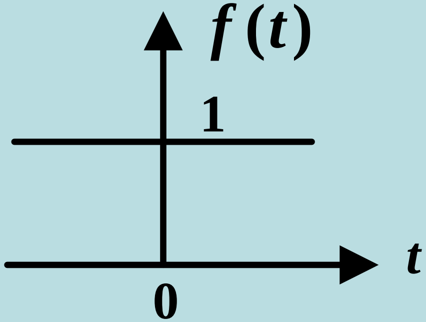
8、对称特性（互易对称性）

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

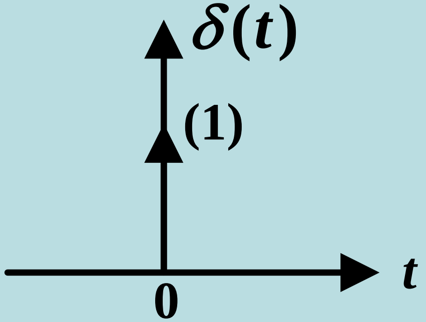
用途：可根据已有的FT，简单导出许多其它的FT

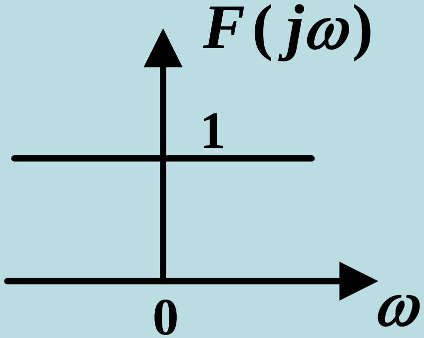
例3：求$f(t)=1$的频谱

解：



$\longleftrightarrow \quad F(j\omega)$



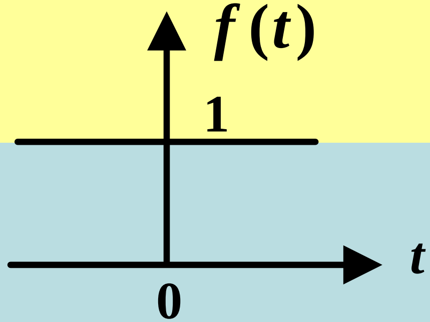


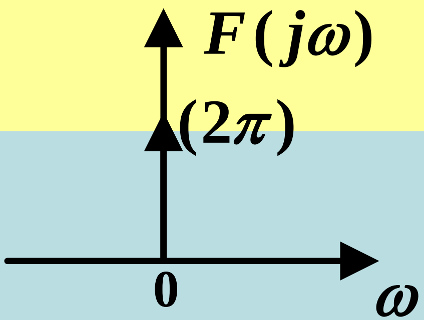
8、对称特性（互易对称性）

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

用途：可根据已有的FT，简单导出许多其它的FT

例：求$f(t)$=1的频谱





解：

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$f(t) = \delta(t) \leftrightarrow F(j\omega) = 1$$

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$F(jt) = 1 \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

8、对称特性（互易对称性）

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

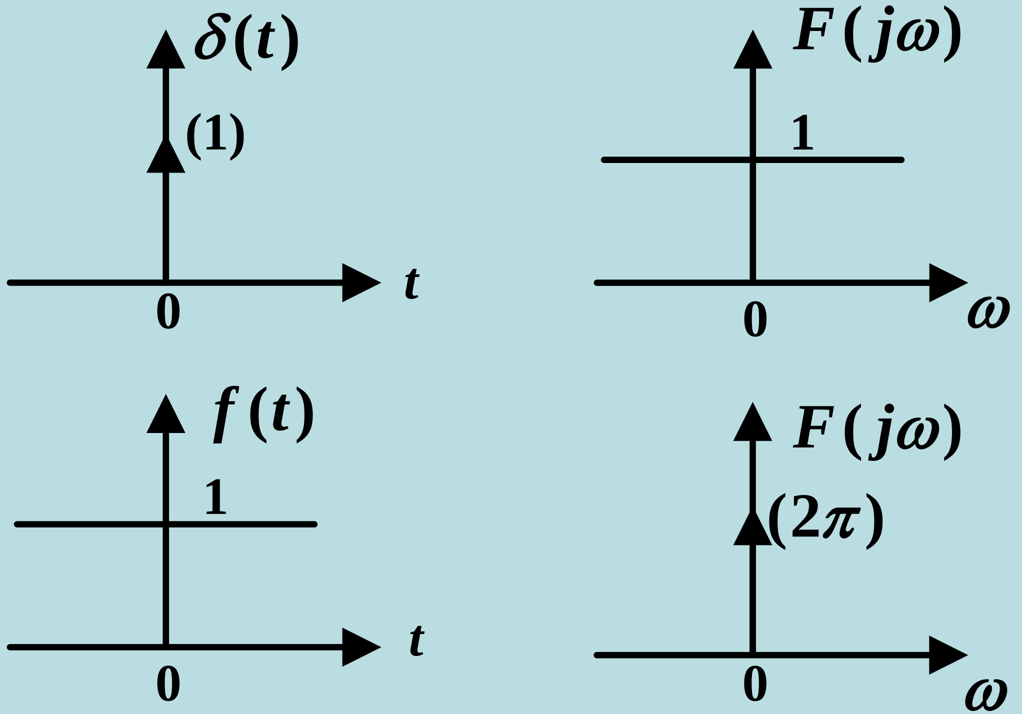
用途：可根据已有的FT，简单导出许多其它的FT

例：求$f(t)=1$的频谱

解：

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$



8、对称特性（互易对称性）

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

对于实偶函数 $f(t) = f(-t)$

其频谱函数也为实偶函数

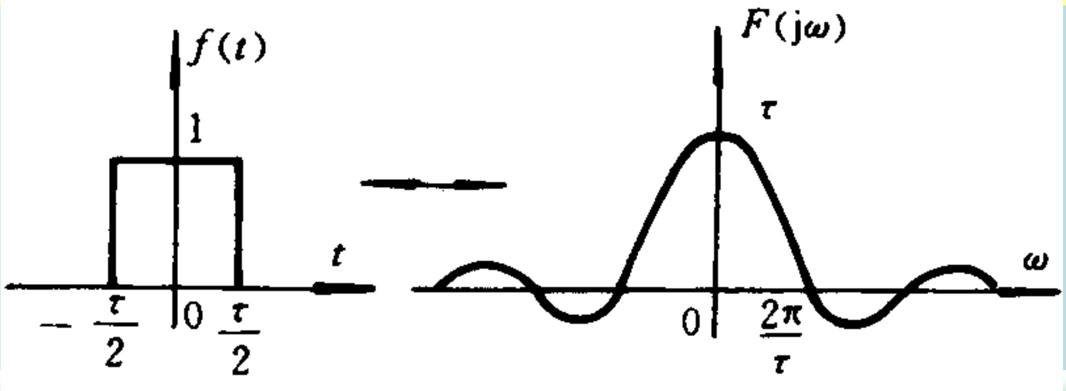
$$F(j\omega) = F(\omega) = F(-\omega)$$

对于实偶函数 $f(t) = f(-t)$

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

例 求 $Sa(\omega_c t)$ 的频谱

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$



8、对称特性（互易对称性）

若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

对于实偶函数 $f(t)=f(-t)$

若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$, 则 $F(t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

例4 求 $Sa(\omega_c t)$ 的频谱

$$f(t)=G_\tau(t)\leftrightarrow F(\omega)=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$F(t)=?\leftrightarrow 2\pi f(\omega)=2\pi G_{\omega_c}(\omega)$$

$$\omega_c Sa(\frac{t\omega_c}{2})\leftrightarrow 2\pi G_{\omega_c}(\omega)$$

$$\boxed{Sa(\frac{t\omega_c}{2})\leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega_c}G_{\omega_c}(\omega)}$$

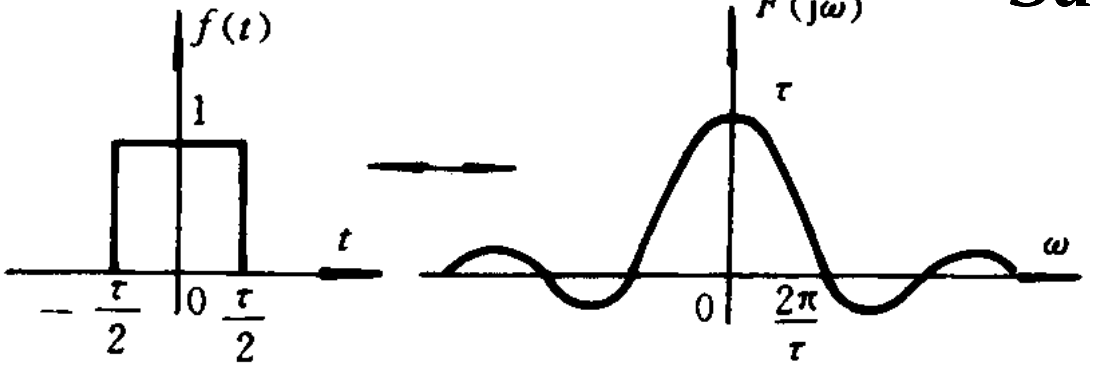
例　求 $Sa(\omega_c t)$ 的频谱

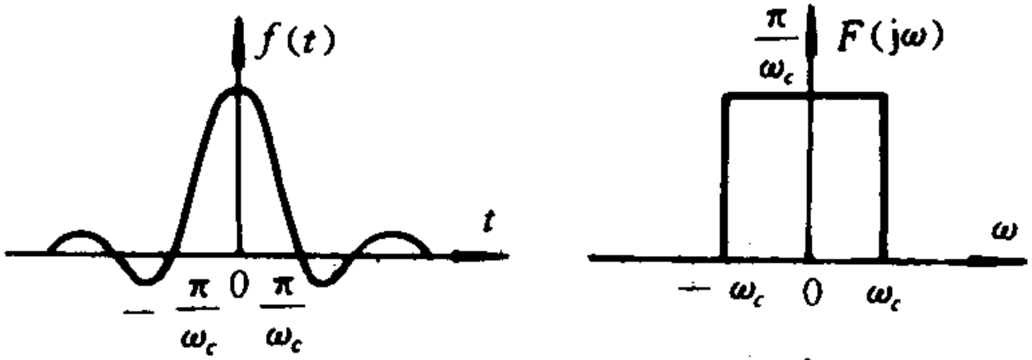
解：

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\boxed{Sa\left(\frac{t\omega_c}{2}\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega_c} G_{\omega_c}(\omega)}$$

$$Sa(t\omega_c) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$





9、时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0$$

例 $[e^{-t}\varepsilon(t)] * [e^{-2t}\varepsilon(t)]$

解：

$$[e^{-t}\varepsilon(t)] * [e^{-2t}\varepsilon(t)] \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1}{2+j\omega} = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{-1}{2+j\omega}$$

$$[e^{-t}\varepsilon(t)] * [e^{-2t}\varepsilon(t)] = e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(t)$$

例　求三角信号 $\Lambda_{2\tau}(t)$ 的频谱

$$G(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

解:

$$G_\tau(t) * G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \cdot \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\tau\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau^2 Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

10、频域卷积定理

$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

例 已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 求$f(t)\cos\omega_0 t$ 的 频谱

解:

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

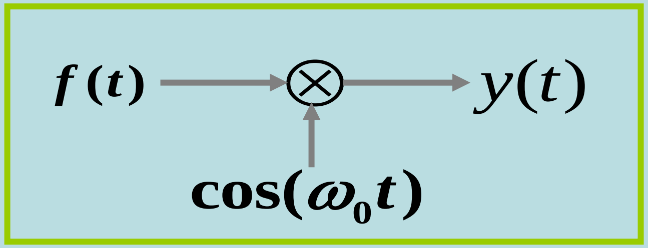
$$= \frac{1}{2} F[j(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega-\omega_0)]$$

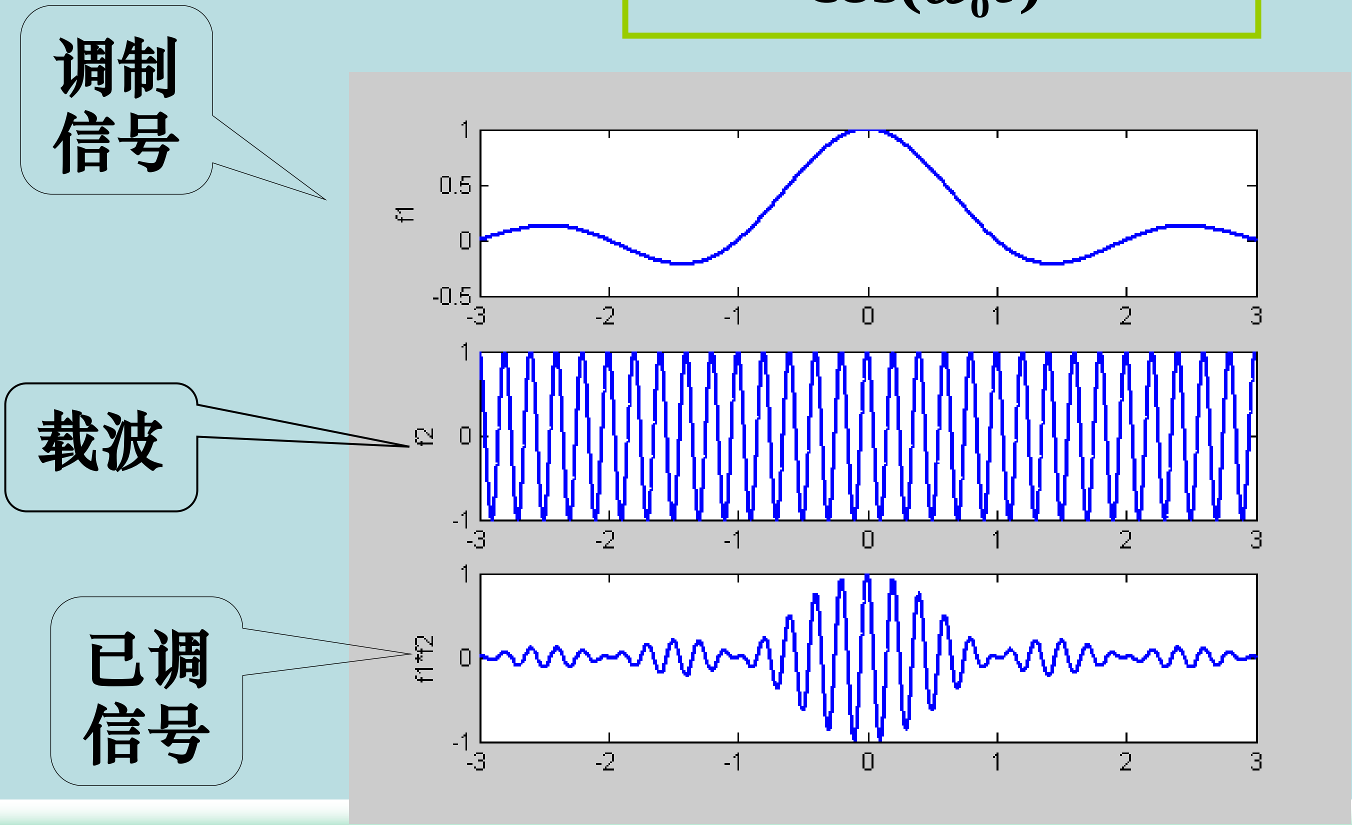
同理可得: $f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \dfrac{j}{2}\{F[j(\omega+\omega_0)] - F[j(\omega-\omega_0)]\}$

相乘特性是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。

两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是**幅度调制**。其中一个信号称为**载波**，另一个是**调制信号**。

正弦幅度调制

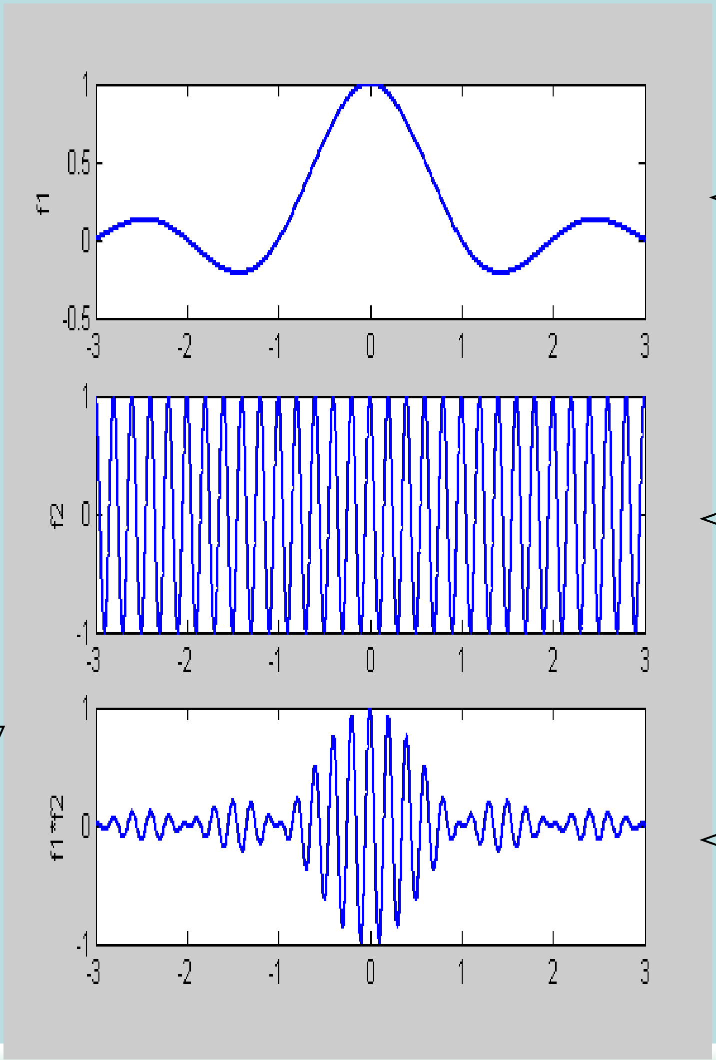




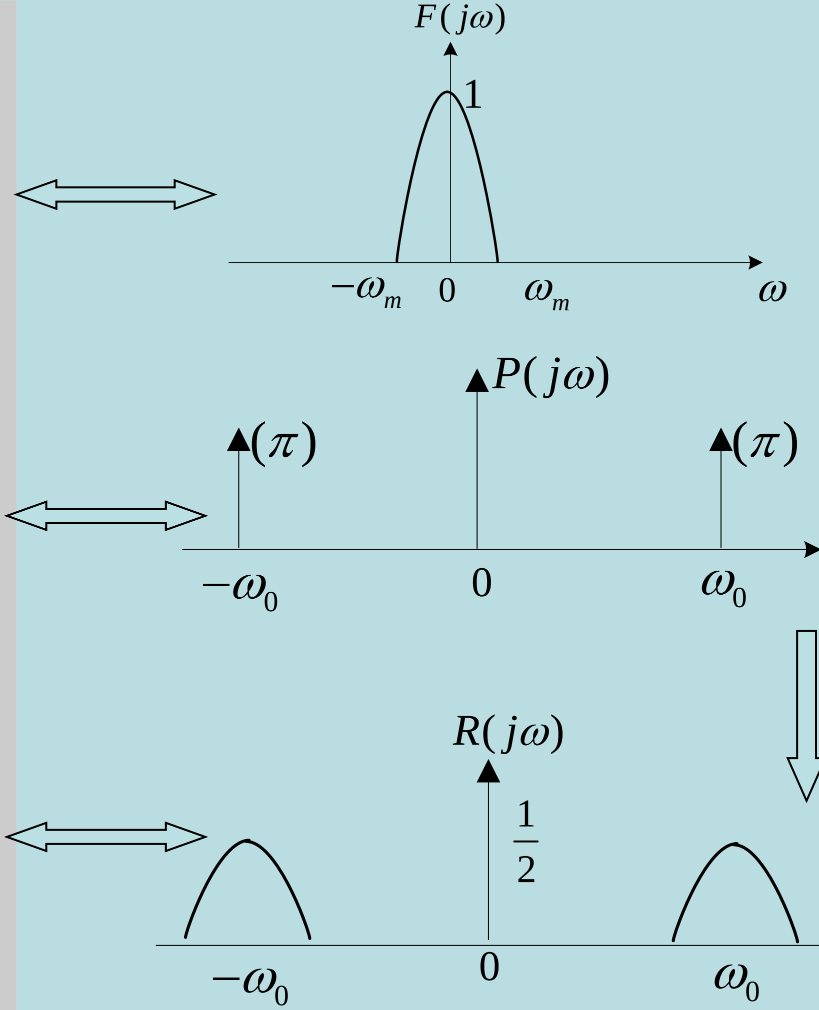
傅里叶变换的性质

$$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \quad \frac{1}{2}\{F[j(\omega+\omega_0)]+F[j(\omega-\omega_0)]\}$$

时域 **频域**

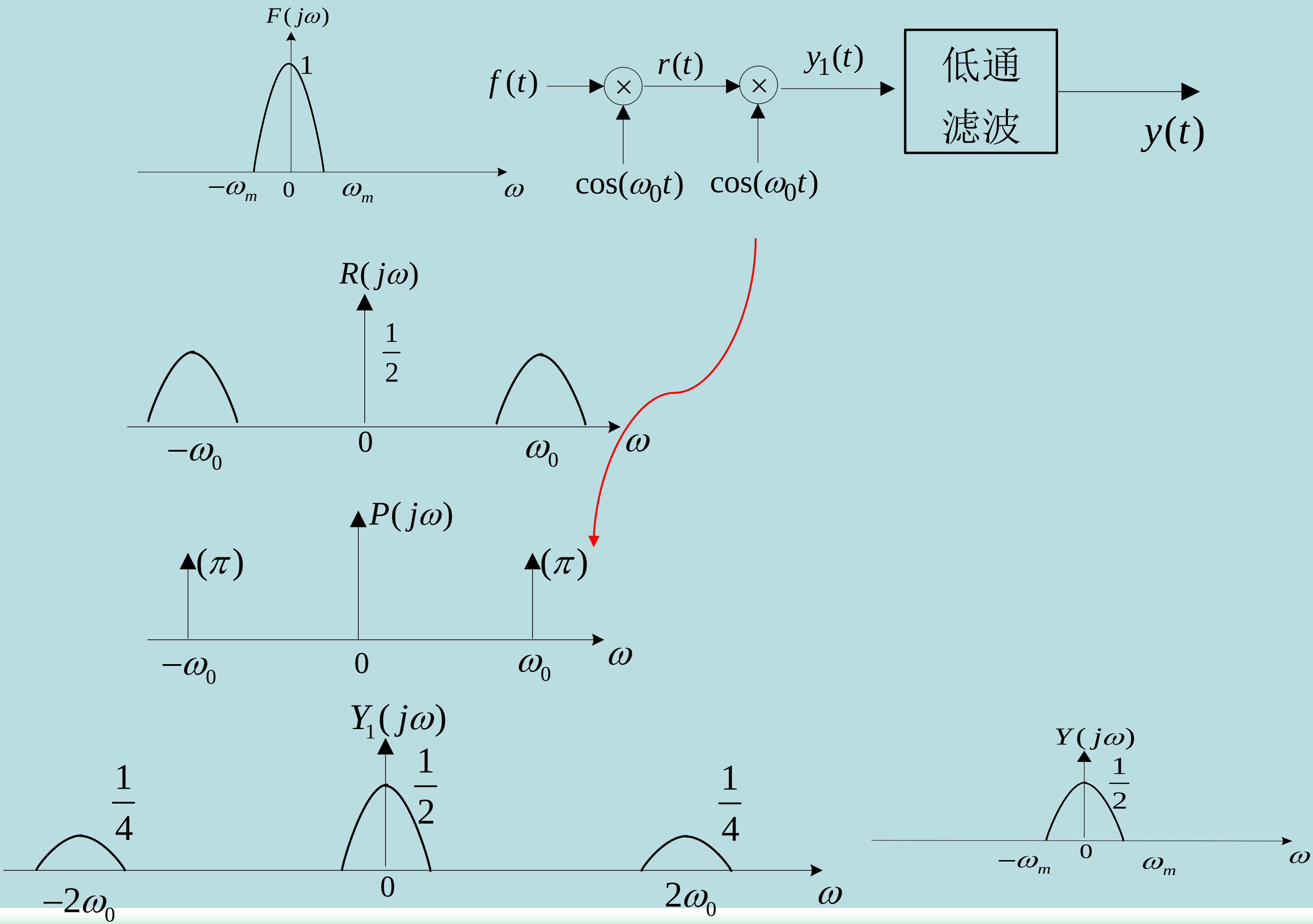


相乘



卷积

傅里叶变换的性质



F(jω)
1
−ω_m
0
ω_m
ω
f(t)
r(t)
y_1(t)
低通
滤波
y(t)
cos(ω_0 t)
cos(ω_0 t)
R(jω)
1/2
−ω_0
0
ω_0
ω
P(jω)
(π)
(π)
−ω_0
0
ω_0
ω
Y_1(jω)
1/4
1/2
1/4
−2ω_0
0
2ω_0
ω
Y(jω)
1/2
−ω_m
0
ω_m
ω

傅里叶变换的性质

$e^{at}\varepsilon(-t)$， $a>0$

$$e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}, \quad a>0$$

$$e^{-at}\varepsilon(t)+e^{at}\varepsilon(-t)=e^{-a|t|}$$

$$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

$$e^{-at}\varepsilon(t)-e^{at}\varepsilon(-t)$$

例 $\operatorname{sgn} t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$

例 $\varepsilon(-t)$

例 求 $1/t$ 的频谱

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

傅里叶变换的性质

偶对称双边指数信号:

$$e^{-at}\varepsilon(t)+e^{at}\varepsilon(-t)=e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}\qquad a>0$$

奇对称双边指数信号:

$$e^{-at}\varepsilon(t)-e^{at}\varepsilon(-t)\leftrightarrow\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\qquad a>0$$

$$\operatorname{sgn}t\leftrightarrow\frac{2}{j\omega}$$

$$\varepsilon(-t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}$$

$$\frac{1}{t}\leftrightarrow\begin{cases}-j\pi & \omega>0\\ j\pi & \omega<0\end{cases}$$

11、时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 且 $\dfrac{df(t)}{dt}$ 存在, 则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$

若 $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$ 存在, 则 $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

例

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$

$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$

$\dfrac{1}{t} \leftrightarrow -\pi j \,\mathrm{sgn}(\omega)$

$-\dfrac{1}{t^2} \leftrightarrow \pi\omega \,\mathrm{sgn}(\omega)$

傅里叶变换的性质

12、频域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $tf(t) \leftrightarrow j\dfrac{d}{d\omega}F(j\omega)$

推广 $$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(j\omega)$$

例 $$t \leftrightarrow 2\pi j\delta'(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$t^n \leftrightarrow 2\pi(j)^n \delta^{(n)}(\omega)$$

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

$$|t| = t\,\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow j\left(\frac{2}{j\omega}\right)' = -\frac{2}{\omega^2}$$

13、时域积分定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，$F(0)$ 存在且有限，则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$其中F(0) = F(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

证明：　利用卷积定理

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = f(t) * \varepsilon(t) \leftrightarrow F(j\omega)[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Page 135, 管致中

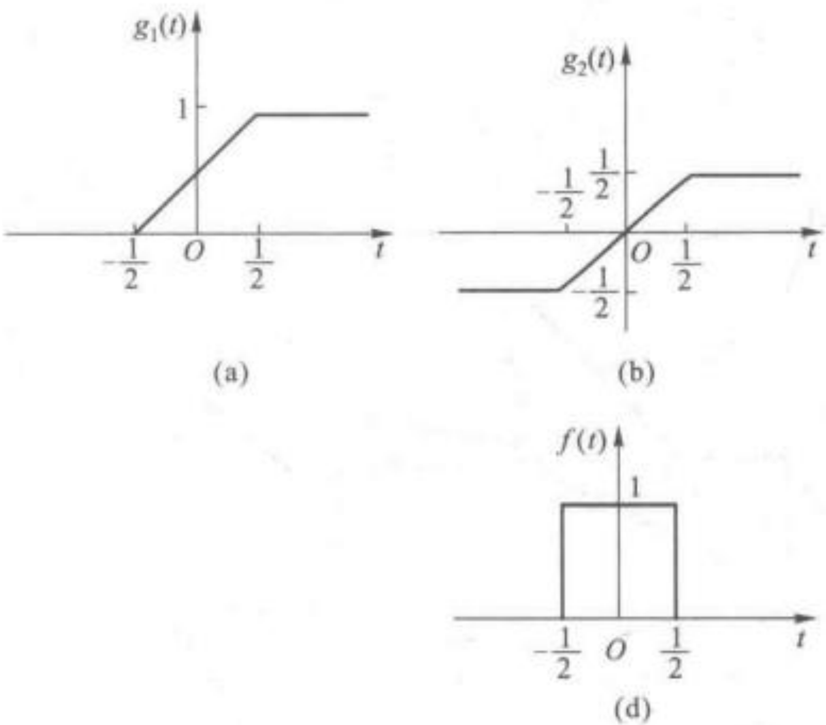


图 3-27　三信号具有相同的导函数

$$g_1(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

$$g_2(t)=g_1(t)-\frac{1}{2}$$

$$g_3(t)=g_1(t)+\frac{1}{2}$$

$$G_1(j\omega)=\frac{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$G_2(j\omega)=G_1(j\omega)-\pi\delta(\omega)=\frac{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}$$

$$G_3(j\omega)=G_1(j\omega)+\pi\delta(\omega)=\frac{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}+2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

14、信号的能量与频谱的关系

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}}$$

能量谱的意义：

1. 根据能量谱，可研究信号能量的分布（能量谱仅与信号频谱的模值的平方有关，与相位无关）

2. 这样可正确选择电路或系统的通频带，以使在规定的通频带内获得更多的信号能量。

非周期信号（能量信号）的能量谱

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dt]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)F(-j\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega \boxed{=\int_0^{\infty}G(\omega)d\omega}$$

设：$G(\omega)=\dfrac{\left|F(j\omega)\right|^2}{\pi}$ 能量密度函数

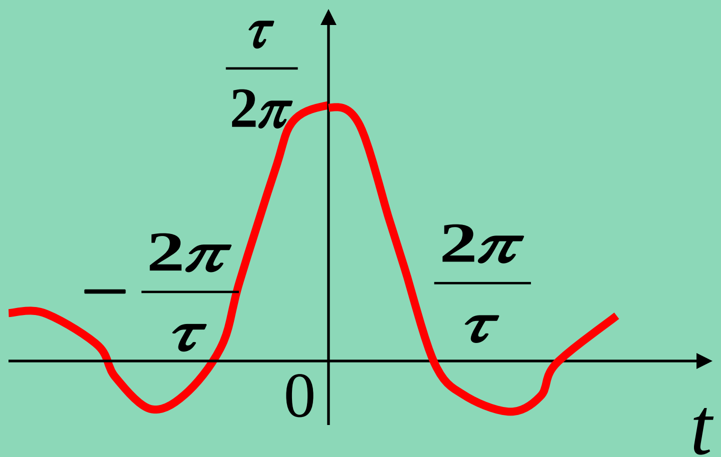
能量只与幅度谱的平方有关，与相位无关

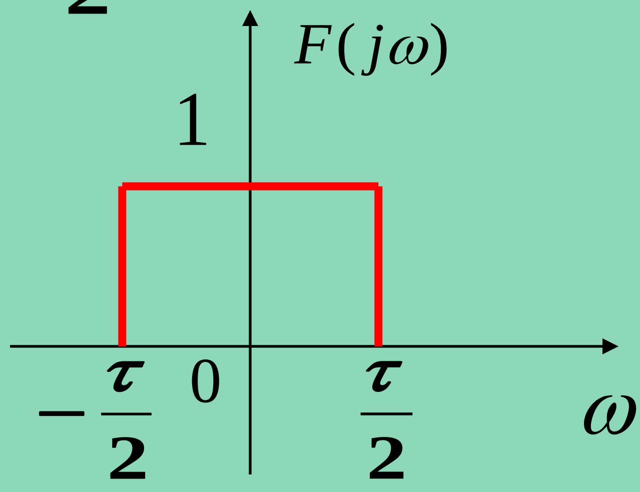
$$W=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega$$

有效频宽：脉冲的绝大部分能量集中的频率区间

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{B_w}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega=\eta W$$

例：求信号的能量 $f(t)=\dfrac{\tau}{2\pi}Sa(\dfrac{\tau t}{2})$





总结：学习性质的目的

1．揭示时域与频域的对应关系，进一步理解FT意义

2．便于求解FT，在记住基本傅氏变换对基础上，灵活运用性质

3．卷积定理地位突出

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

傅里叶变换的性质

基本傅氏变换对

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$Sa(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad a > 0$$

傅里叶变换的性质

① 时移 $f(t+t_0)=f(t)*\delta(t+t_0)\leftrightarrow F(j\omega)e^{j\omega t_0}$

② 频移 $f(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]=F[j(\omega-\omega_0)]$

③ 时域微分 $f'(t)=f(t)*\delta'(t)\leftrightarrow F(j\omega)\cdot j\omega$

④ 频域微分 $tf(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*[j2\pi\delta'(\omega)]=jF'(j\omega)$

⑤ 时域积分 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=f(t)*u(t)\leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(j\omega)}{j\omega}$

易错

$$t^n f(t)\leftrightarrow j^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(j\omega)$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

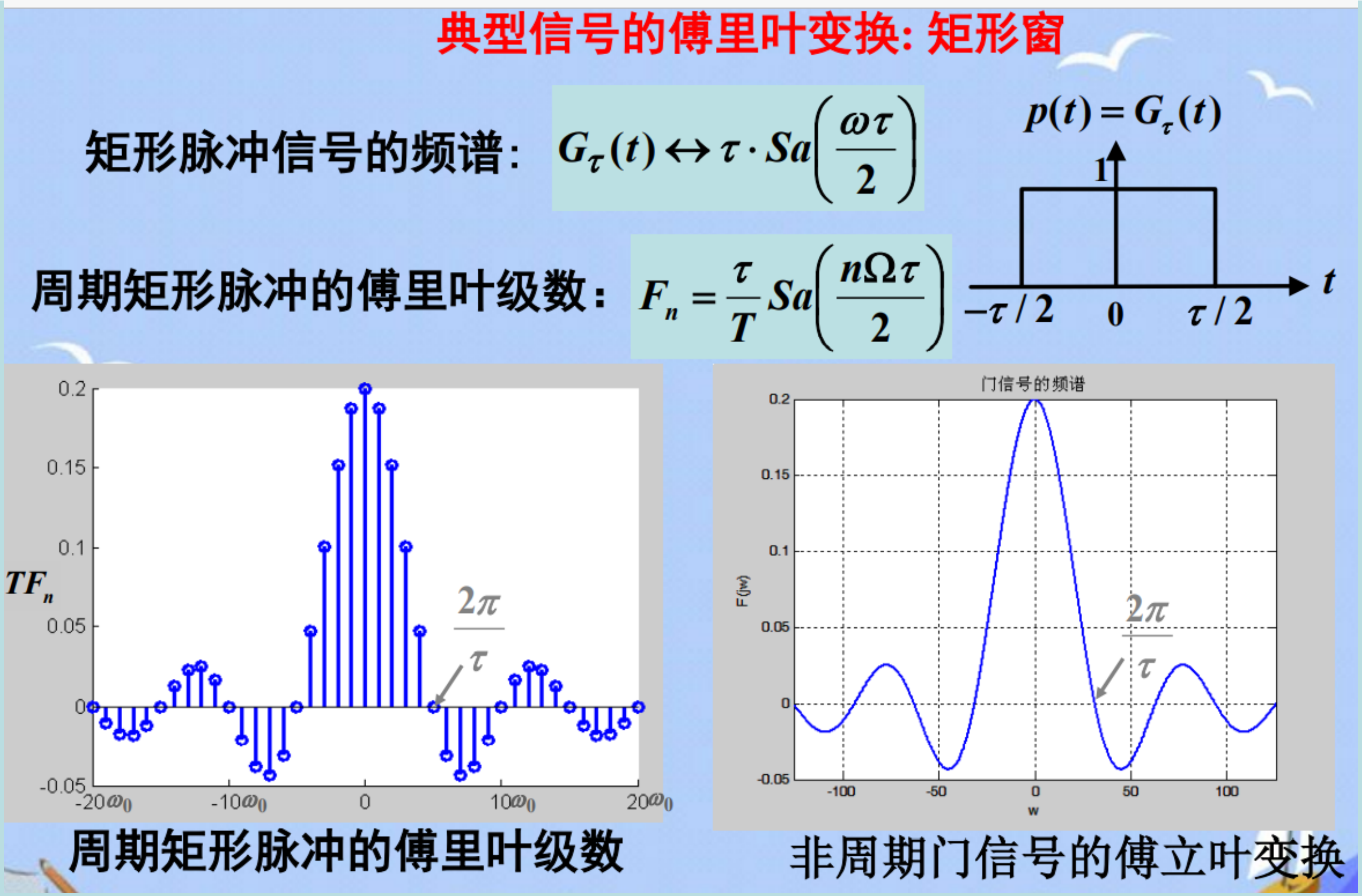
$$f(at+b)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})e^{j\frac{b}{a}\omega}$$

对称性质：

$$\begin{cases} f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0} \\ f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(j\omega - j\omega_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega) \\ -jtf(t) \leftrightarrow \dfrac{d}{d\omega}F(j\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega).F_2(j\omega) \\ f_1(t).f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \end{cases}$$



时域波形和频域频谱：

时域周期 连续 ——→ 频域离散非周期

时域连续非周期 ——→ 频域连续非周期

周期 ⟷ 离散

非周期⟷连续