复变函数与积分变换
习题课

夏健康

数学与统计学院

2021 秋

证明：

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Proof.

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. 则

$$\begin{aligned}
& z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\
& = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \\
& = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) \\
& = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2Re(z_1\bar{z}_2)
\end{aligned}$$

$\square$

证明：

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

Proof.

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2 \end{aligned}$$

这里应用了上一结论和不等式$Re z \le |z| = |\bar{z}|$. □

可导函数的四则运算

设f,g 在 z_0 处可导，则：$f\pm g$，$f\cdot g$，$f/g\,(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0处可导，且

$$\begin{aligned}
&(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0),\\
&(f(z_0)\cdot g(z_0))'=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0),\\
&(1/g(z_0))'=g'(z_0)/g^2(z_0),\ \text{从而}\\
&(f/g)'(z_0)=[f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)]/g^2(z_0).
\end{aligned}$$

Proof.

因为 f,g 在 z_0 处可导，则 f,g 在 z_0处连续且在 z_0的邻域 U内有定义.
设 Δz 足够小，使得 $z_0+\Delta z\in U$, 考察差商：

$$\frac{(f\pm g)(z_0+\Delta z)-(f\pm g)(z_0)}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\pm\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z}$$

两端同取极限即得 $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$. $\square$

对于乘积，考察差商

$$\frac{f(z_0+\Delta z)g(z_0+\Delta z)-f(z_0)g(z_0)}{\Delta z}$$
$$=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0))g(z_0+\Delta z)}{\Delta z}+\frac{f(z_0)(g(z_0+\Delta z)-g(z_0))}{\Delta z}$$

两端取极限并应用f,g在 z_0 处的连续性可得：

$$(f(z_0)\cdot g(z_0))'=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

因为 $|g(z_0)|>0$, 所以存在 $\delta>0$，使得对任何 z 属于邻域 $U(z_0,\delta)=\{z||z-z_0|<\delta\}$ 成立

$$|g(z)-g(z_0)|<|g(z_0)|/2,$$

从而对任何 $z\in U(z_0,\delta)$，总是有 $|g(z)|\geq|g(z_0)|/4>0$. 在邻域 $U\cap U(z_0,\delta)$ 上考察差商，此时 $g(z_0), g(z_0+\Delta z)\neq 0$.

$$\frac{1}{\Delta z}[\frac{1}{g(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{g(z_0)}]=-\frac{1}{g(z_0)g(z_0+\Delta z)}\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0))}{\Delta z}$$

两端取极限并应用连续性可得：$(1/g)'(z_0)=-g'(z_0)/g^2(z_0)$.

解析函数的四则运算

设f,g 在 z_0 处解析. 则：$f\pm g$，$f\cdot g$，f/g $(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0处解析.

Proof.

因为 f,g 在 z_0 处解析，所以 f,g 在 z_0 可导且存在邻域 $U=U(z_0)$ 使得 f,g 在任何 $z\in U$ 处可导.

$$
\begin{aligned}
(f\pm g)'(z) &= f'(z)\pm g'(z),\\
(f(z)\cdot g(z))' &= f'(z)g(z)+f(z)g'(z),\\
(1/g(z))' &= g'(z)/g^2(z).
\end{aligned}
$$

所以这些函数在 z_0 处可导，且在任何 $z\in U$ 处也可导. 注意 $1/g$ 可导的邻域可能会小一些，因为要保证 $g(z)\neq 0$. 这是可以办到的，只需取 $U\cap U(z_0,\delta)$ 即可. □

$1/\bar{z}$ 处处不可导，点点不解析

首先$1/\bar{z}$ 在原点处无定义，假定其在某点 $z_0 \neq 0$处可导，则可断言：$1/\bar{z}_0 \neq 0$. 事实上，$1/\bar{z}_0 = z_0/|z_0|^2 = 0$ 将导致 $z_0 = 0$. 由可导的四则运算$1/(1/\bar{z})$ 在z_0 也可导，这也是矛盾，因为$\bar{z} = x - iy$ 在任何点处均不可导. 这可以直接从定义得到：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

而当 Δz 沿着不同的路径趋于0 时，比如实轴和虚轴，二者确定的极限不同，因此上式不存在极限.

另外一种证明是利用 $Cauchy - Riemann$ 方程：

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y).$$

简单的计算可知只要 $(x, y) \neq (0, 0)$ 总有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

习题热身

设函数$f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+2xy-x^2)$. 求$f'(i)$.

解

由题意，

$$u(x,y)=x^2+2xy-y^2, v(x,y)=y^2+2xy-x^2.$$

经计算，$u(x,y)$ 和 (x,y) 在复平面上每一点都满足Cauchy-Riemann 方程：

$$u_x(x,y)=2x+2y=v_y, u_y(x,y)=2x-2y=-v_x.$$

所以，$f(z)$ 在复平面内处处解析，

$$f'(z)=u_x+iv_x=(2x+2y)+i(2y-2x).$$

因此$f'(i)=u_x(0,1)+iv(0,1)=2+2i$.