复变函数与积分变换
习题课

夏健康

数学与统计学院

2021 秋

证明：

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Proof.

设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. 则

$$\begin{aligned}
& z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\
&= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2Re(z_1\bar{z}_2)
\end{aligned}$$

$\square$

证明：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Proof.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

这里应用了上一结论和不等式 $Re z \le |z| = |\bar{z}|$. □

可导函数的四则运算

设f, g 在 z_0 处可导，则：$f \pm g$，$f \cdot g$，$f/g\,(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0处可导，且

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$
$$(f(z_0) \cdot g(z_0))' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$
$$(1/g(z_0))' = g'(z_0)/g^2(z_0),\ \text{从而}$$
$$(f/g)'(z_0) = [f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)]/g^2(z_0).$$

Proof.

因为 f, g 在 z_0 处可导，则 f, g 在 z_0处连续且在 z_0的邻域 U内有定义. 设 Δz 足够小，使得 $z_0 + \Delta z \in U$, 考察差商：

$$\frac{(f \pm g)(z_0 + \Delta z) - (f \pm g)(z_0)}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \pm \frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}$$

两端同取极限即得 $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$. □

对于乘积，考察差商

$$\frac{f(z_0+\Delta z)g(z_0+\Delta z)-f(z_0)g(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0))g(z_0+\Delta z)}{\Delta z}+\frac{f(z_0)(g(z_0+\Delta z)-g(z_0))}{\Delta z}$$

两端取极限并应用f,g在 z_0 处的连续性可得：

$$(f(z_0)\cdot g(z_0))'=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

因为 $|g(z_0)|>0$, 所以存在 $\delta>0$，使得对任何 z 属于邻域 $U(z_0,\delta)=\{z||z-z_0|<\delta\}$ 成立

$$|g(z)-g(z_0)|<|g(z_0)|/2,$$

从而对任何 $z\in U(z_0,\delta)$，总是有 $|g(z)|\geq|g(z_0)|/4>0$. 在邻域 $U\cap U(z_0,\delta)$ 上考察差商，此时 $g(z_0), g(z_0+\Delta z)\neq 0$.

$$\frac{1}{\Delta z}[\frac{1}{g(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{g(z_0)}]=-\frac{1}{g(z_0)g(z_0+\Delta z)}\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0))}{\Delta z}$$

两端取极限并应用连续性可得：$(1/g)'(z_0)=-g'(z_0)/g^2(z_0)$.

解析函数的四则运算

设f,g 在 z_0 处解析. 则: $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g $(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0处解析.

Proof.

因为 f,g 在 z_0 处解析, 所以 f,g 在 z_0 可导且存在邻域 $U=U(z_0)$ 使得 f,g 在任何 $z\in U$ 处可导.

$$
\begin{aligned}
&(f\pm g)'(z)=f'(z)\pm g'(z),\\
&(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),\\
&(1/g(z))'=g'(z)/g^2(z).
\end{aligned}
$$

所以这些函数在 z_0 处可导, 且在任何 $z\in U$ 处也可导. 注意 $1/g$ 可导的邻域可能会小一些, 因为要保证 $g(z)\neq 0$. 这是可以办到的, 只需取 $U\cap U(z_0,\delta)$ 即可. □

$1/\bar{z}$ 处处不可导，点点不解析

首先$1/\bar{z}$ 在原点处无定义，假定其在某点 $z_0 \neq 0$处可导，则可断言：$1/\bar{z}_0 \neq 0$. 事实上，$1/\bar{z}_0 = z_0/|z_0|^2 = 0$ 将导致 $z_0 = 0$. 由可导的四则运算$1/(1/\bar{z})$ 在z_0 也可导，这也是矛盾，因为$\bar{z} = x - iy$ 在任何点处均不可导. 这可以直接从定义得到：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

而当 Δz 沿着不同的路径趋于0 时，比如实轴和虚轴，二者确定的极限不同，因此上式不存在极限.

另外一种证明是利用 $Cauchy - Riemann$ 方程：

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y).$$

简单的计算可知只要 $(x, y) \neq (0, 0)$ 总有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

习题热身

设函数$f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+2xy-x^2)$. 求$f'(i)$.

解

由题意，

$$u(x,y)=x^2+2xy-y^2, v(x,y)=y^2+2xy-x^2.$$

经计算，$u(x,y)$ 和 (x,y) 在复平面上每一点都满足Cauchy-Riemann 方程：

$$u_x(x,y)=2x+2y=v_y, u_y(x,y)=2x-2y=-v_x.$$

所以，$f(z)$ 在复平面内处处解析，

$$f'(z)=u_x+iv_x=(2x+2y)+i(2y-2x).$$

因此$f'(i)=u_x(0,1)+iv(0,1)=2+2i$.

习题

1. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z-2|=2}\frac{\bar{z}-2}{|\bar{z}-2|}\,\mathrm{d}z$，曲线沿上半圆周，逆时针方向.
2. 设 C 为原点到 $1+2i$ 的直线段，估计上界并计算 $\displaystyle\int_C\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$.
3. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z$ 并判断下述计算是否正确?

曲线 $|z|=1$ 所围区域只包含奇点 $z=-1/2$. 由Cauchy积分公式

DRAFT

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z=\int_{|z|=1}\frac{z/(z-2)}{2z+1}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{z}{z-2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{2\pi i}{5}.$$

4. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$, $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{z}$ 和 $\displaystyle\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$.
5. 计算积分 $\displaystyle I=\int_{|z|=\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z+2)}$，其中 $\rho>0,\rho\neq1,2$.

习题

6. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$, 取正方向.

7. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z+1}{(z^2+9)(z-1)}\,\mathrm{d}z$, 取正方向.

8. 设 $v(x,y)=e^{px}\sin y$，而 $f(z)=u+iv$ 是解析函数. 试确定p 值并求$f(z)$.

9. 设$f(z)=u+iv$是解析函数，其中 $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 且 $f(z)$ 在正实轴上的值是纯虚数。试确定$f(z)$.

10. 利用Cauchy 积分公式和估值不等式证明Liouville 定理：有界整函数必为常数.

1. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z-2|=2} \frac{\bar{z}-2}{|\bar{z}-2|}\,\mathrm{d}z$, 曲线沿上半圆周，逆时针方向.

设$z=2+2e^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi$. 则 $\mathrm{d}z=2ie^{i\theta}$. 所以

$$\int_{|z-2|=2} \frac{\bar{z}-2}{|\bar{z}-2|}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{2e^{-i\theta}}{2} 2ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i.$$

2. 设C为原点到$1+2i$的直线段，估计上界并计算$\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$.

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C \frac{1}{|z-i|}\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} \int_C \mathrm{d}s = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5.$$

设参数方程：$z(t)=(1+2i)t, 0\le t\le 1$. 取$a=\frac{1}{5}$，则

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{1+2i}{t+(2t-1)i}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{5t-2}{5t^2-4t+1}\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 \frac{1}{5t^2-4t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{t-\frac{2}{5}}{(t-\frac{2}{5})^2+a^2}\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 \frac{a}{(t-\frac{2}{5})^2+a^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{s}{s^2+a^2}\,\mathrm{d}s + i\int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{a}{s^2+a^2}\,\mathrm{d}s\\ &= [\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2)+i\arctan\frac{s}{a}]\Big|_{\frac{-2}{5}}^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}i.\end{aligned}$$

取辅助曲线构成封闭曲线：
设C_1,C_2分别是连接$z=1+2i$到$z=1$，$z=1$到原点的直线段，使得封闭曲线取负方向.由于所围区域内不含奇点，由Cauchy-Goursat 定理得

$$\int_{C+C_1+C_2}\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=0.$$

所以$\int_C\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=-\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$. 注意到

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{x+(y-1)i}=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}.$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z&=\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y\\&\quad+i\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

分别按路径计算实部和虚部:

$$\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=-\int_2^0\frac{1-y}{1^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y+\int_1^0\frac{x}{x^2+(0-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_1^{-1}\frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^0\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

DRAFT

$$\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_2^0\frac{1}{1^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y+\int_1^0\frac{1}{x^2+(0-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{-1}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\int_1^0\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}\pi.$$

所以 $\displaystyle\int_C\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi i.$

取辅助曲线构成封闭曲线:
设C_1,C_2,C_3 分别是连接 $1+2i$ 到 $-1+2i$, $-1+2i$ 到-1, -1 到原点的直线段, 使得封闭曲线取正方向. 则由Cauchy-Goursat 定理得

$$\int_{C+C_1+C_2+C_3} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

所以 $\int_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i - \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right)\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$. 注意到

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{x+(y-1)i} = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right)\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z \\
&= \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right)\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y \\
&\quad + i\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right)\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

分别按路径计算实部和虚部：

$$\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}\right)\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^{-1}\frac{x}{x^2+(2-1)^2}\,\mathrm{d}x-\int_2^0\frac{1-y}{(-1)^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\frac{x}{x^2+(0-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{-1}\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\int_1^{-1}\frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^0\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

DRAFT

$$\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}\right)\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^{-1}\frac{-1}{x^2+(2-1)^2}\,\mathrm{d}x+\int_2^0\frac{-1}{(-1)^2+(y-1)^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+(0-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{-1}\frac{-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int_1^{-1}\frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi.$$

所以 $\displaystyle\int_C\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi i.$

取辅助曲线构成封闭曲线：设 C_1 是连接原点到 $(1-\sqrt{2})i$ 的直线段，C_2 是 $|z-i|=\sqrt{2}$ 从 $(1-\sqrt{2})i$ 到 $1+2i$ 的弧段. 则由 Cauchy-Goursat 定理得 $\int_C \frac{1}{z-i}\,dz = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right)\frac{1}{z-i}\,dz.$

C_1 的参数方程：$z=ti$, 其中 $0 \le t \le 1-\sqrt{2}$，所以 $dz = i\,dt$.

$$\int_{C_1} \frac{1}{z-i}\,dz = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{i\,dt}{(t-1)i} = \ln(1-t)\Big|_0^{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

C_2 的参数方程：$z-i=\sqrt{2}e^{i\theta}$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$，所以 $dz = i\sqrt{2}e^{i\theta}\,d\theta$.

$$\int_{C_2} \frac{1}{z-i}\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\theta}}\sqrt{2}e^{i\theta}i\,d\theta = \frac{3\pi}{4}i.$$

3. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z$

方法一

曲线 $|z|=1$ 所围区域只包含奇点$z=-\frac{1}{2}$. 由Cauchy积分公式

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z}{2(z-2)}}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{z}{2(z-2)}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{5}.$$

方法二

法二：因为 $\frac{z}{(2z+1)(z-2)}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{z+\frac{1}{2}}+\frac{4}{z-2}\right)$，而曲线 $|z|=1$ 所围区域只包含奇点 $z=-\frac{1}{2}$,所以，由 Cauchy 积分公式和Cauchy-Goursat 定理得

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{10}\int_{|z|=1}\frac{1}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z+\frac{1}{10}\int_{|z|=1}\frac{4}{z-2}\,\mathrm{d}z=\frac{\pi i}{5}.$$

4. 计算积分：$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$, $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{z}$, $\displaystyle\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$.

解

参数方程：$z=e^{i\theta},(0\le\theta\le 2\pi)$，$\mathrm{d}z=ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi i;$$

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}=\int_{|z|=1}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}=0;$$

$$\int_{|z|=1}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{|ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta|}{e^{i\theta}}=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\,\mathrm{d}\theta=0;$$

$$\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|=\int_0^{2\pi}\left|\frac{ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{e^{i\theta}}\right|=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

5. 计算积分 $I=\int_{|z|=\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z+2)}$，其中$\rho>0$ 且$\rho\neq 1,2$.

分析

被积函数的奇点是$z_1=0$，$z_2=-1$ 和 $z_3=2$. 以z_i 为圆心，先作半径充分小的圆周$C_i(i=1,2,3)$ 使得 C_i两两不交，且都不与$|z|=\rho$ 相交，从而构成复合闭路。计算每个小圆周上的积分I_i，由复合闭路定理，

$$I=\sum_{i\in\mathcal{I}} I_i,$$

其中 $\mathcal{I}=\{i||z_i|<\rho\}$. 因此需要根据积分曲线所围的区域分情况讨论。

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right)^{(2)}(0) = -\frac{3}{4}\pi i.$$

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{\frac{1}{z^3(z-2)}}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{z^3(z-2)}\Big|_{z=-1} = \frac{2}{3}\pi i.$$

DRAFT

$$I_3 = \int_{C_3} \frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{z^3(z+1)}\Big|_{z=2} = \frac{1}{12}\pi i.$$

于是当 $\rho \in (0,1)$时，$I = I_1 = -\frac{3}{4}\pi i$;
当 $\rho \in (1,2)$时，$I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi i}{12}$;
当 $\rho > 2$时，$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

6. 计算积分： $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$, 取正方向.

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{\sin^z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin^2 z}{z-1}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{\sin^2 z}{z^2}\Big|_{z=1} = \cdot$$

7. 计算积分： $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z+1}{(z^2+9)(z-1)}\,\mathrm{d}z$, 取正方向.

$$\int_{|z|=2} \frac{z+1}{(z^2+9)(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{z+1}{(z^2+9)}\Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{5}.$$

8. 设 $v(x,y)=e^{px}\sin y$，且 $f(z)=u+iv$ 是解析函数. 试确定 p 值并求 $f(z)$.

$v_x=pe^{px}\sin y$，$v_y=e^{px}\cos y$ 而 $\mathrm{d}u=u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=v_y\,\mathrm{d}x-v_x\,\mathrm{d}y$.

$$u(x,y)=\int v_y\,\mathrm{d}x+\psi(y)=\int e^{px}\cos y\,\mathrm{d}x+\psi(y)=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\psi(y)$$

$$-\frac{1}{p}e^{px}\sin y+\psi'(y)=u_y=-v_x=-pe^{px}\sin y.$$

$$\psi'(y)=\left(\frac{1}{p}-p\right)e^{px}\sin y.$$

所以 $\psi'(y)=0$ 且 $p^2=1$, $u(x,y)=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+C$ 因此
$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+C+ie^{px}\sin y=\frac{1}{p}e^{pz}+C.$
当 $p=1$时，$f(z)=e^{z}+C$；当 $p=-1$ 时，$f(z)=-e^{-z}+C$.

9. 设 $f(z)=u+iv$是右半平面的解析函数，其中 $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 且 $f(z)$ 在正实轴上的值是纯虚数。试确定$f(z)$.

先验证 $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$是右半平面的调和函数。事实上，

$$v_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ v_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

所以 $\Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}+\dfrac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}=0.$

$$\mathrm{d}u=u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=v_y\,\mathrm{d}x-v_x\,\mathrm{d}y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

所以

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y+c=\frac{y}{x^2+y^2}+c.$$

因此 $f(z)=\dfrac{i\bar{z}}{z\bar{z}}+c=\dfrac{i}{z}+c$. 而 $c=iC$ 其中 $C\in\mathbb{R}$.

10. Liouville 定理：有界整函数必为常数.

Proof.

对任何 $a, b \in \mathbb{C}$, 取充分大 R, 使得 $|a| < R, |b| < R$. 因为 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$上解析，因此在闭圆盘 $|z| \leq R$ 上也解析。根据 Cauchy 积分公式，

$$
\begin{aligned}
f(a) - f(b) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) f(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{a-b}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

设 $|f(z)| \leq M$. 则由估值不等式，

$$
\begin{aligned}
|f(a) - f(b)| &\leq \frac{|a-b|M}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{1}{|z-a||z-b|}\, \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{|a-b|M}{2\pi(R-|a|)(R-|b|)} \int_{|z|=R} \mathrm{d}s = \frac{|a-b|MR}{(R-|a|)(R-|b|)}
\end{aligned}
$$

令 $R \to +\infty$, 可得 $f(b) = f(a)$. 由 a, b 的任意性知 $f(z) =$ 常数. □

判断级数$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{\ln k}$ 的敛散性

首先考察级数$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{\ln k}$. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{\ln(k+1)}=1$（这只需对极限使用洛必达法则即可： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$.）也即是收敛半径$r=1$. 而 i 正好位于圆周$|z|=1$ 上. 注意$\ln n\le n$. 所以

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{i^k}{\ln k}\right|=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}\ge\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

因此，原级数不是绝对收敛的。再考察它是否条件收敛。

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{\ln k}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{\ln(4k+2)}-\frac{-1}{\ln(4k+4)}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{\ln(4k+3)}-\frac{-1}{\ln(4k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln(2k)}+i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln(2k+1)}\end{aligned}$$

由交错级数的莱布尼茨判别法可知，实部和虚部的级数均收敛，所以级数$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{\ln k}$条件收敛.

计算积分：

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n+1}} dz.$$

展成洛朗级数，找 c_{-1}.

$$\frac{\cos z}{z^{2n+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}}{z^{2n+1}} = c_{-1}\frac{1}{z} + \cdots$$

DRAFT

所以只需令 $k = n$，所以 $c_{-1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} = Res[f, 0]$.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n+1}} dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

如果$f(z),g(z)$是以z_0为零点的两个不恒为零的解析函数，证明

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

证明：因为$f(z),g(z)$ 是解析函数，所以它们均可展为Taylor 级数，不妨 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$. 因为 $f(z)$ 不恒为零，所以存在$m\geq 1$ 使得 $f^{(k)}(z_0)=0, k=0,\cdots,m-1, f^{(m)}(z_0)\neq 0$. 所以 $f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$，其中 $\phi(z)$ 是解析函数且$\phi(z_0)\neq 0$. 同理，$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$，$\psi(z)$ 是解析函数且$\psi(z_0)\neq 0$. 直接计算可知

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\phi(z)+(z-z_0)^m\phi'(z),$$

$$g'(z)=n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z).$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m\phi(z)}{(z-z_0)^n\psi(z)}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^{m-1}[m\phi(z)+(z-z_0)\phi'(z)]}{(z-z_0)^{n-1}[n\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)]}$$

当$m>n$时，二者均等于0，当$m<n$ 时，二者均等于∞. 当$m=n$ 时，两极限均存在，且都等于$\frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}$.

求$y=\sec z$ 的Taylor 级数.
解：首先$y(0)=1$. 因为$y'(z)=\tan z\sec z$，所以$y'(0)=0$.

$$y''=\sec^3 z+\sec z\tan^2 z=\sec^3 z+\sec z(\sec^2 z-1)=2y^3-y.$$

所以$y''(0)=1$. 两端对 z 求导得

$$y^{(3)}=6y^2y'-y'=(6y^2-1)y'$$

于是$y^{(3)}(0)=0$. 接着再求导

$$y^{(4)}=(12yy')y'+(6y^2-1)y''$$

所以$y^{(4)}(0)=5$. 接着求导

$$y^{(5)}=(12y'y'+12yy'')y'+12yy'y''+(12yy')y''+(6y^2-1)y^{(3)}$$

$y^{(5)}(0)=0$. 再求导带入得$y^{(6)}(0)=12+12+12+25=61$. 所以

$$y=\sec z=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{5}{24}z^4+\frac{61}{6!}z^6+\cdots,\qquad (|z|<\frac{\pi}{2}).$$

$$f(z)=\frac{z}{\cos z-1}$$

首先计算极限$\lim_{z\to 0}f(z)=\infty$，这表明$z=0$ 是极点。令$\phi(z)=\frac{1}{f(z)}$，要判断$z=0$ 是f 的几级极点，只需判断$z=0$ 是$\phi(z)$ 的几阶零点.
$\phi(0)=\lim_{z\to 0}\phi(z)=0$. 其次，

$$\phi'(z)=\frac{-z\sin z-(\cos z-1)}{z^2}=\frac{1-\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z}$$

所以，$\phi'(0)=\lim_{z\to 0}\phi'(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z-z\sin z}{z^2}=-\frac{1}{2}\neq 0$. 即$z=0$ 是$\phi(z)$ 的一阶零点.

另外：

$$\phi(z)=\frac{\cos z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}-1\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k-1}}{(2k)!}$$
$$=z\sum_{k=1}\frac{(-1)^k z^{2k-2}}{(2k)!}=z\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}z^2+\cdots\right)=z\varphi(z)$$

$\varphi(0)=-1/2\neq 0$，所以$z=0$是$\phi(z)$的一阶零点.

留数$Res[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2}{\cos z-1}=-2.$
$z=2k\pi(k\neq 0)$ 是$\phi(z)$ 的二阶零点：因为$\phi(2k\pi)=0$，且$\phi'(2k\pi)=0$，而

$$\phi''(z)=\frac{z^2\sin z-2z(1-\cos z)}{z^4}-\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}$$

所以，$\phi''(2k\pi)=-\frac{1}{2k\pi}\neq 0$. 因而$z=2k\pi(k\neq 0)$ 是$f(z)$ 的二级极点.
令$F(z)=f(z+2k\pi)$ (平移)，则$F(z)=\frac{z+2k\pi}{\cos z-1}$. $z=0$ 是$F(z)$ 的二级极点.
平移不会改变留数，因为留数是洛朗级数中-1次幂项的系数.
令$c=2k\pi$.

DRAFT

$$Res[f,2k\pi]=Res[F(z),0]=\lim_{z\to 0}\left(z^2F(z)\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2(z+c)}{\cos z-1}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(3z^2+2cz)(\cos z-1)+z^2(z+c)\sin z}{(\cos z-1)^2}=-2.$$

此处计算略复杂，建议使用Taylor 级数作无穷小代换.
$\phi(2k\pi)=0,\phi'(2k\pi)=0,\phi''(2k\pi)=-\frac{1}{2k\pi}\neq 0$

令$c=2k\pi$. 因为$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!}=1-\frac{z^2}{2}+\cdots$ 在全平面内是解析的. 所以,

$$z^2F(z)=\frac{z^2(z+c)}{\cos z-1}=\frac{z+c}{-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}+\cdots}=\frac{z+c}{\beta(z)}.$$

其中$\beta(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}z^{k-2}}{k!}=-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$.
注意$\beta(0)=-\frac{1}{2}$, $\beta'(0)=0$. 所以

DRAFT

$$\left(\frac{z^2(z+c)}{\cos z-1}\right)'=\frac{d}{dz}\left(\frac{z+c}{\beta(z)}\right)=\frac{\beta(z)-(z+c)\beta'(z)}{(\beta(z))^2}$$

于是

$$Res[F(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\beta(z)-(z+c)\beta'(z)}{(\beta(z))^2}=\frac{1}{\beta(0)}=-2.$$

令 $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$. 求导化成微分方程

$$f'(z)=(e^{1+\frac{1}{z-1}})'=e^{\frac{z}{z-1}}\frac{-1}{(z-1)^2}$$

于是 $(z-1)^2f'(z)+f(z)=0$. 由 $f(0)=1$ 得 $f'(0)=-1$. 两端继续求导得

$$(z-1)^2f''(z)+(2z-1)f'(z)=0.$$

所以 $f''(0)=f'(0)=-1$. 求导上式得

$$(z-1)^2f^{(3)}(z)+(4z-3)f''(z)+2f'(z)=0.$$

因而 $f^{(3)}(0)=3f''(0)-2f'(0)=-1$. 接着写几步，得答案

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=1-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots,(|z|<1).$$

（这并不意味着所有阶的导数值都是±1，至少$f^{(5)}(0)=19$，如果我计算正确的话）

定理

z_0 是解析函数$f(z)$的m级零点的充分必要条件是：

$$f^{(k)}(z_0) = 0, k = 0, 1 \cdots m-1,\ \text{且} f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

证明： 事实上，设z_0是$f(z)$的m级零点，则在z_0的小邻域内

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

其中$g(z)$在z_0处解析且$g(z_0) \neq 0$. 因而在 z_0的小邻域内可以将g作Taylor 展开. 设

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad g(z_0) = c_0 \neq 0.$$

于是

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{m+n}.$$

容易验证结论成立。反过来，因为$f(z)$在z_0的小邻域内解析，所以

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=(z-z_0)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

而幂级数$g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$在$z_0$的小邻域内解析，

且$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$. 因而$z_0$是$f(z)$的$m$级零点.

零点孤立性

命题

非零解析函数的零点是孤立的.

Proof.

设 $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析,且满足 $\varphi(z_0)=0$. 不妨设其级数为 $m\geq 1$. 于是在 z_0的小邻域 $U(z_0,\delta_1)$内

$$\varphi(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$在 z_0处解析且 $\psi(z_0)\neq 0$. 因为 $\psi(z_0)\neq 0$, 所以 $|\psi(z_0)|>0$. 由于 $\psi(z)$ 在 z_0 处解析，因而也连续，所以对于 $\varepsilon_0=|\psi(z_0)|/2>0$, 存在 $\delta_2>0$ 使得对任何$|z-z_0|<\delta_2$ 都有

$$|\psi(z)-\psi(z_0)|\leq\varepsilon_0.$$

所以$|\psi(z)|\geq|\psi(z_0)|-\varepsilon_0=\varepsilon_0>0$.
取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 在 $U(z_0,\delta)$内$\varphi(z)$ 仅有一个零点 z_0. □

定理(零点与极点的关系)

z_0 是$f(z)$ 的m级极点当且仅当z_0是$\frac{1}{f(z)}$ 的m级零点.

证明: 设 z_0 是$f(z)$ 的m级极点，则在z_0的小邻域U内可以将f 表示为

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$$

其中$g(z)$ 在U内解析且$g(z_0) \neq 0$. 于是$\frac{1}{g(z)}$在z_0也许更小的邻域内解析且$\frac{1}{g(z_0)} \neq 0$. 所以

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{g(z)}.$$

重新定义 $\frac{1}{f(z_0)} = 0$, 则 $\frac{1}{f(z)}$ 在U内解析。所以 z_0是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m级零点。反过来，设 z_0 是$1/f(z)$ 的 m级零点，则在 z_0的小邻域V内可以将 $\frac{1}{f(z)}$ 表示为

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m h(z)$$

其中 $h(z)$ 在 V 内解析且 $h(z_0) \neq 0$. 于是 $\frac{1}{h(z)}$ 在 z_0 的某个更小的邻域内解析，因而在该邻域内可以表示为

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{h(z)}.$$

所以 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点.

判断奇点的级

设函数$g(z)$,$h(z)$在z_0处解析，z_0分别是$g(z)$, $h(z)$的m级和n级零点. 令 $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$. 证明：$m>n$ 时，z_0是$f(z)$的$m-n$ 级零点；$m<n$时，z_0是$f(z)$的$n-m$ 级奇点；$m=n$时，z_0是$f(z)$的可去奇点.

证明：根据题设，$g(z)=(z-z_0)^m g_1(z)$,$h(z)=(z-z_0)^n h_1(z)$, 其中$g_1(z)$,$h_1(z)$在z_0处解析，且满足$g_1(z_0)\neq 0$, $h_1(z_0)\neq 0$. 所以 $\frac{g_1(z)}{h_1(z)}$ 在z_0处解析，因而在z_0的邻域内可以展为Taylor级数（由于零点的孤立性，可以取小邻域使其不含$g(z)$的其它零点）：

$$\frac{g_1(z)}{h_1(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

而且$c_0=\frac{g_1(z_0)}{h_1(z_0)}\neq 0$. 所以 $f(z)=(z-z_0)^{m-n}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$. 因此
当$m>n$时，定义 $f(z_0)=0$，z_0是$f(z)$的$m-n$级零点；
当$m<n$时，z_0是$f(z)$的$n-m$ 级奇点；
当$m=n$时，$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0\neq 0$. 可见$z_0$是$f(z)$的可去奇点.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{I} - j\mathcal{J} = \frac{a - j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{s}.$$

Here $\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$, and $\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$.

分部积分

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}(-\frac{1}{a}e^{-at}) \\
&= -\frac{1}{a}e^{-at}\sin\omega t\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\frac{1}{a}e^{-at})\,\mathrm{d}(\sin\omega t) \\
&= \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{a}\mathcal{J} = \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty}\cos\omega t\,\mathrm{d}(-\frac{1}{a}e^{-at}) \\
&= -\frac{\omega}{a^2}e^{-at}\cos\omega t\Big|_0^{+\infty} - \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{a}e^{-at}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{a^2} - \frac{\omega^2}{a^2}\mathcal{I}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \frac{\omega}{a^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{J} = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

判断幂级数收敛半径的方法

- 如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$, 或者$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$, 则$R=\lambda^{-1}$.
- 设$f(z)$在z_0处解析，则$f(z)$ 可以展为$(z-z_0)$ 的Taylor 级数，且收敛半径

$$R=\min\{|z_0-z_k|:z_k\ \text{是}f(z)\ \text{诸奇点}\}$$

缺项级数求半径

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^{2n+1}$的收敛半径.
考察级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n(z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$,
令$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|1+i|^{n+1}}{|1+i|^n}|z|^2=2|z|^2<1$，所以$|z|<\sqrt{1/2}=2^{-\frac{1}{4}}$.
求设$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$的收敛半径.

$$R=\min\{|1-z_k|:z_k\ \text{是}f(z)\ \text{诸奇点}\}=\min\{|1-i|,|1+i|,|1-3|\}=\sqrt{2}.$$

用定义求留数

求积分$\int_C \frac{1}{z(z+1)^2}dz$ 其中$C:|z|=3$ 正向圆周.

当$1<|z|<+\infty$ 时，可将$f(z)$ Laurent 展开,且$\int_C f(z)dz=2i\pi c_{-1}$.

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z}(\frac{-1}{1+z})'=-\frac{1}{z}(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}})'=-\frac{1}{z}(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n})'$$

$$=-\frac{1}{z}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}})'=\sum_{n=3}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{z^n}$$

所以$\int_C f(z)dz=2i\pi c_{-1}=0$.

求Res$[\frac{e^z}{1-\cos z},0]$

设$\frac{e^z}{1-\cos z}=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_nz^n$ 则$e^z=(1-\cos z)\sum c_nz^n$，即

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots=(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\cdots)(\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots)$$

比较相同幂次的系数可知$c_{-1}=2$.

分式函数一级极点的留数公式

一级极点

设$P(z)$, $Q(z)$在z_0处解析， 且$P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(0) \neq 0$. 证明： $\text{Res}[\dfrac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

Proof.

由于z_0 是$Q(z)$的一级零点， 所以
$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+1} = (z - z_0)\phi(z)$, 其中$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$
且$\phi(z_0) = c_0 \neq 0$. 简单计算得$Q'(z_0) = \phi(z_0)$. 根据留数的计算公式

$$Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = Res[\frac{P(z)}{(z - z_0)\phi(z)}, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{\phi(z)} = \frac{P(z_0)}{\phi(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

□

分式函数二级极点的留数公式

二级极点

设$P(z)$，$Q(z)$在z_0处解析，且$P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=Q'(z_0)=0$，$Q''(0)\neq 0$. 证明：$\mathrm{Res}[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0]=\frac{2P'(z_0)}{Q''(z_0)}-\frac{2Q'''(z_0)}{3Q''(z_0)^2}P(z_0)$.

Proof.

由于z_0 是$Q(z)$的二级零点，所以
$Q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+2}=(z-z_0)^2\phi(z)$, 其中$\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 且$\phi(z_0)=c_0\neq 0$. 通过计算得$Q''(z_0)=2c_0$, $Q'''(z_0)=6c_1=6\phi'(z_0)$. 根据留数的计算公式

$$
\begin{aligned}
Res[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0]&=Res[\frac{P(z)}{(z-z_0)^2\phi(z)},z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}(\frac{P(z)}{\phi(z)})\\
&=\frac{P'(z_0)\phi(z_0)-P(z_0)\phi'(z_0)}{\phi(z_0)^2}=\frac{2P'(z_0)}{Q''(z_0)}-\frac{2Q'''(z_0)}{3Q''(z_0)^2}P(z_0).
\end{aligned}
$$

□

留数计算与无穷小替换

计算留数Res$[\frac{1}{(e^z-1)^2},0]$.

容易判断$z=0$ 是二级极点. 令$P(z)=1$, $Q(z)=(e^z-1)^2$. 所以$P'(z)=0$, $Q'(z)=2(e^z-1)e^z=2e^{2z}-2e^z$, $Q''(z)=4e^{2z}-2e^z$, $Q'''(z)=8e^{2z}-2e^z$. 所以，$Q''(0)=2$, $Q'''(0)=6$. 利用上述二级极点处留数公式得

$$Res[\frac{1}{(e^z-1)^2},0]=\frac{2P'(0)}{Q''(0)}-\frac{2Q'''(0)}{3Q''(0)^2}P(0)=-1.$$

教材上的计算方法: 因为$\frac{1}{(e^z-1)^2}$ 在环形区域$0<|z|<\infty$上解析，且$z=0$ 是二级极点，可设$\frac{1}{(e^z-1)^2}=\sum_{n=-2}^{\infty}c_nz^n$. 所以，

$$1=\sum_{n=-2}c_nz^n(e^z-1)^2=(c_{-2}z^{-2}+c_{-1}z^{-1}+c_0+\cdots)(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)^2$$

于是

$$1=(c_{-2}z^{-2}+c_{-1}z^{-1}+c_0+\cdots)(z^2+z^3+\frac{7}{12}z^4+\cdots)$$

比较相同幂次的系数可得$c_{-2}=1$, $c_{-2}+c_{-1}=0$，所以$c_{-1}=-1$.

或者按照二级极点求留数的规则，结合洛必达法则，可以得到

$$
\begin{aligned}
Res[\frac{1}{(e^z-1)^2},0] &= \lim_{z\to 0}(\frac{z^2}{(e^z-1)^2})' \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2z(e^z-1)^2-2z^2(e^z-1)e^z}{(e^z-1)^4} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2z(e^z-1)-2z^2e^z}{(e^z-1)^3} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2z(z+\frac{z^2}{2}+o(z^2))-2z^2(1+z+o(z))}{z^3+o(z^3)} = -1.
\end{aligned}
$$

不能直接用等价无穷小来替换，否则 $\frac{1}{(e^z-1)^2}\sim\frac{1}{z^2}$，而$Res[\frac{1}{z^2},0]=0$.

如果是一级极点时，可以用等价无穷小替换. 计算$\text{Res}[\frac{z\cos z}{1-\cos z}, 0]$

容易判断$z=0$ 是一级极点. 正确的结果应该是

$$Res[\frac{z\cos z}{1-\cos z}, 0] = \lim_{z\to 0}\frac{z^2\cos z}{1-\cos z} = 2.$$

采用等价无穷小替换$1-\cos z \sim \frac{z^2}{2}$，也可以得到

$$Res[\frac{z\cos z}{1-\cos z}, 0] = Res[\frac{z\cos z}{\frac{1}{2}z^2}, 0] = \lim_{z\to 0} 2\cos z = 2$$

事实上，设函数$P(z), Q(z)$ 在$z=z_0$处均解析，且$z=z_0$ 是$\frac{P(z)}{Q(z)}$的一级极点. 不妨设

$$P(z) = \frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k + o((z-z_0)^k),$$

$$Q(z) = \frac{1}{(k+1)!}Q^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)^{k+1} + o((z-z_0)^{k+1}),$$

则$Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = Res[\frac{\frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k}{\frac{1}{(k+1)!}Q^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)^{k+1}}, z_0] = (k+1)\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k+1)}(z_0)}$.

更一般的我们有：

分式在极点处的留数公式

设z_0 分别是$P(z)$,$Q(z)$的m级和$m+k$级零点，则z_0是$\frac{P(z)}{Q(z)}$的k级极点

$$Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = Res\left[\frac{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{P^{(m+j)}(z_0)}{(m+j)!}(z-z_0)^{m+j}}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{Q^{(m+k+j)}(z_0)}{(m+k+j)!}(z-z_0)^{m+k+j}}, z_0\right] = \left(\frac{(m+k)!}{Q^{(m+k)}(z_0)}\right)^k$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{Q^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{P^{(m)}(z_0)}{m!} \\ \frac{Q^{(m+k+1)}(z_0)}{(m+k+1)!} & \frac{Q^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} & 0 & \cdots & 0 & \frac{P^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{Q^{(m+2k-1)}(z_0)}{(m+2k-1)!} & \frac{Q^{(m+2k-2)}(z_0)}{(m+2k-2)!} & \frac{Q^{(m+2k-3)}(z_0)}{(m+2k-3)!} & \cdots & \frac{Q^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} & \frac{P^{(m+k-1)}(z_0)}{(m+k-1)!} \end{vmatrix}$$

特别地，当$m=0$，$k=2$时，

$$Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0] = \frac{2P'(z_0)}{Q''(z_0)} - \frac{2Q'''(z_0)}{3Q''(z_0)^2}P(z_0).$$