第五节　事件的独立性

- 一、事件的相互独立性
- 二、独立试验序列概型
- 三、内容小结

一、事件的相互独立性

(一) 两个事件的独立性

由条件概率，知

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}$$

一般地， $P(A|B)\neq P(A)$

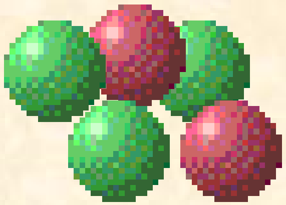
这意味着：事件B的发生对事件A发生的概率有影响. 然而，在有些情形下又会出现：

$$P(A|B)=P(A)$$

1.引例 盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

A = 第一次抽取,取到绿球,

B = 第二次抽取,取到绿球,



则有 $P(B|A)=\dfrac{3}{5}=P(B)$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

若 $P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=P(B) \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

2. 定义1.9　设 A, B 是两事件 , 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

注. 1^{o} 若 $P(A) > 0$, 则

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

说明

事件 A 与 B 相互独立,是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

互斥是事件间本身的关系

2 °独立与互斥的关系

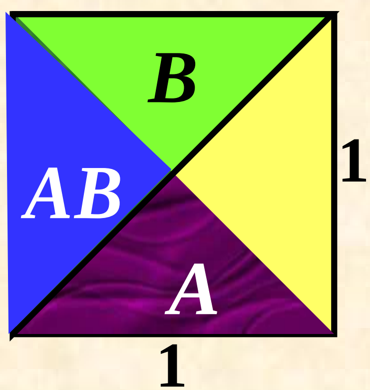
这是两个不同的概念.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



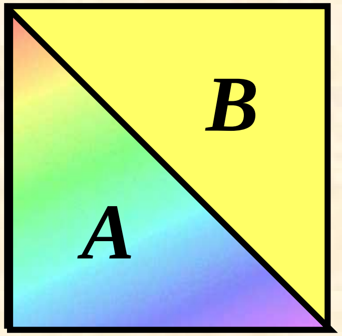
若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2},$

则 $P(AB)=P(A)P(B).$

两事件相互独立 $\not\longrightarrow$ 两事件互斥.

又如:

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$ (如图)



则 $P(AB)=0,$

$P(A)P(B)=\frac{1}{4},$

故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

由此可见两事件互斥但不独立.

两事件互斥 $\not\longrightarrow$ 两事件相互独立.

3.性质1.5

(1) 必然事件Ω 及不可能事件$\varnothing$与任何事件A相互独立.

证 $\because$ $\Omega A=A$, $P(\Omega)=1$

$\therefore$ $P(\Omega A) = P(A)=1\cdot P(A)= P(\Omega)\,P(A)$

即 Ω与A独立.

$\because$ $\varnothing A=\varnothing$, $P(\varnothing)=0$

$\therefore$ $P(\varnothing A) = P(\varnothing)=0= P(\varnothing)\,P(A)$

即 $\varnothing$与A独立.

(2) 若事件A与B相互独立, 则以下三对事件也相互独立.

① A 与 $\overline{B}$;

② $\overline{A}$ 与 B;

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

注 称此为二事件的独立性关于逆运算封闭.

证 ① $\because A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}$

$\therefore \quad P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

又$\because$ A与B相互独立

$$\therefore \quad P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

③ $\because \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B}$ (对偶律)

$$\therefore \quad P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

例1 甲, 乙两人同时向敌人炮击,已知甲击中敌机的概率为0.6, 乙击中敌机的概率为0.5, 求敌机被击中的概率.

解

设 A={ 甲击中敌机 }

B={ 乙击中敌机 }

C={敌机被击中 }

则 $C = A \cup B$. 依题设,

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.5$$

由于 甲，乙同时射击，甲击中敌机并不影响乙击中敌机的可能性，所以 A与B独立.

$$\therefore \quad P(C) = P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6$$

$$= 0.8$$

(二) 多个事件的独立性

1. 三事件两两相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

2. 三事件相互独立的概念

定义1.10 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

3. n 个事件的独立性

定义 若事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件相互独立，即对于一切 $1\le i< j\le n$, 有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

则称 A_1，$A_2,\cdots A_n$ 两两相互独立.

$$\boxed{\begin{aligned}\text{共}\,&C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n\\&=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1\\&=2^n-1-n\text{ 个式子.}\end{aligned}}$$

定义1.11 设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，

若对于任意 $k(1\le k\le n)$, 及 $1\le i_1< i_2< \cdots< i_k\le n$

有 $$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 A_1，$A_2,\cdots A_n$ 相互独立.

注. $A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

$\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两相互独立.

两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \ge 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2 \le k \le n)$个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \ge 2)$相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立．(独立性关于运算封闭)

结论的应用　n 个独立事件和的概率公式:

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n)$$

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立

即　n 个独立事件至少有一个发生的概率等于 1 减去各自对立事件概率的乘积.

若设n个独立事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的概率分别为 $p_1, \cdots, p_n$,

则"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生"的概率为

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - (1-p_1) \ldots (1-p_n)$$

类似可以得出:

"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个不发生"的概率为

$$P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}) = 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$= 1 - p_1 \ldots p_n$$

例3 若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%, 假设每个人血清中是否含有肝炎病毒相互独立，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记 $A_i=\{$第i个人的血清含有肝炎病毒$\}$

$$(i=1,2,\cdots,100)$$

$B=\{$100个人的混合血清中含有肝炎病毒$\}$

则 $P(A_i)=0.004$

$$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}$$

依题设, $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$相互独立

$$\therefore P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_{100})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)]^{100}$$

$$= 1 - (1 - 0.004)^{100} = 1 - (0.996)^{100} \approx 0.33$$

二、独立试验序列概型

1. 定义1.12 (独立试验序列)

设$\{E_i\}(i=1,2,\ldots)$是一列随机试验,E_i的样本空间为Ω_i,设A_k 是E_k中的任一事件,$A_k \subset \Omega_k$,若A_k出现的概率都不依赖于其它各次试验E_i $(i\neq k)$的结果,则称$\{E_i\}$是**相互独立**的随机试验序列,简称**独立试验序列**.

2. n 重贝努利(Bernoulli)试验

若n 次重复试验具有下列**特点：**

1) 每次试验的可能结果只有两个 A 或 $\overline{A}$,

且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$

(在各次试验中p是常数，保持不变）

2) 各次试验的结果相互独立,

则称这n次重复试验为n重贝努里试验，简称为**贝努里概型.**

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次,就是n重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”, 就是 n重伯努利试验.

实例3 (球在盒中的分配问题)

设有n 个球，N个盒子.

试验E：观察一个球是否投进某一指定的盒中.

A={该球进入指定的盒中}

B={ 某指定的盒中恰有m个球 }, 求 $P(B)$.

解 易知，$P(A)=\dfrac{1}{N}, P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{N}$

设E_{n}：观察n个球是否投进某一指定的盒中

则E_{n}是将E重复了n次，是贝努里概型.

$$\therefore \quad P(B)=C_n^m[P(A)]^m[P(\overline{A})]^{n-m}$$

$$=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

$$(=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=C_n^m p^m q^{n-m})$$

一般地，对于贝努里概型，有如下公式：

3. 二项概率公式

定理 如果在贝努里试验中，事件A出现的概率为p $(0<p<1)$，则在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,n;\ q = 1-p)$$

且 $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

- **几何分布**

若 X 表示贝努利试验中事件 A 首次发生的次数，则 X 的可能取值为 $1,2,\cdots$

当 $X=k$，即事件A首次在第k次出现.

则试验总共进行了k次，前 $k-1$ 次均是 $\bar{A}$ 发生，第k次A发生.

若以 B_k 记这一事件，以 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 记事件A在第i次试验中发生，则

几何分布

$$B_k=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k$$

$$P(B_k)=P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k)=(1-p)^{k-1}p$$

例6 一个人开门, 他共有n把钥匙, 其中仅有一把能打开这个门, 他随机地选取一把钥匙开门, 即每次以 $\frac{1}{n}$ 的概率被选中, 求该人在**第k次首次打开门**的概率.

解 令 B_k 表示第 k 次首次打开门, 则

$$P(B_k) = (1-\frac{1}{n})^{k-1}\frac{1}{n} \qquad k = 1,2,\cdots$$

三、内容小结

1.　A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A, B, C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2.　重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

3　设事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

4 二项分布　$C_n^k p^k q^{n-k}$

5 几何分布　$(1-p)^{k-1} p$

备用题

伯恩斯坦反例

例2-1 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色 , 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A , B, C 分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色朝下的事件, 问 A,B,C是否相互独立?

解 由于在四面体中红, 白, 黑分别出现两面,

因此 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有
$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $P(ABC) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$,

因此 A、B、C 不相互独立.

射击问题

例3-1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为"第 i 名射手击落飞机",

$i = 1,2,\cdots,10.$

事件 B 为 "击落飞机",

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$