连续时间系统的时域分析方法 1-卷积引出

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- **零状态响应**
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - **奇异函数的系统响应**
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - 奇异函数的系统响应
    - 阶跃响应
    - 冲激响应

阶跃响应

1. 阶跃响应(step response)

阶跃响应(step response)就是把阶跃函数作为零状态系统的输入，系统的输出响应即为阶跃响应。

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad\qquad \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$

单位冲激响应　　　　单位阶跃响应

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{\varepsilon}(t)$$

$$r_{\varepsilon}(t)=\int_{0^-}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

冲激响应

2. 冲激响应(impulse response)

冲激响应：冲激函数作为系统输入时候的输出响应。

熟练掌握转移算子H(p)法

冲激响应

系统的微分方程为:

$$\boxed{\frac{dh_1(t)}{dt} - \lambda h_1(t) = k_1\delta(t)}$$

先用算子表示

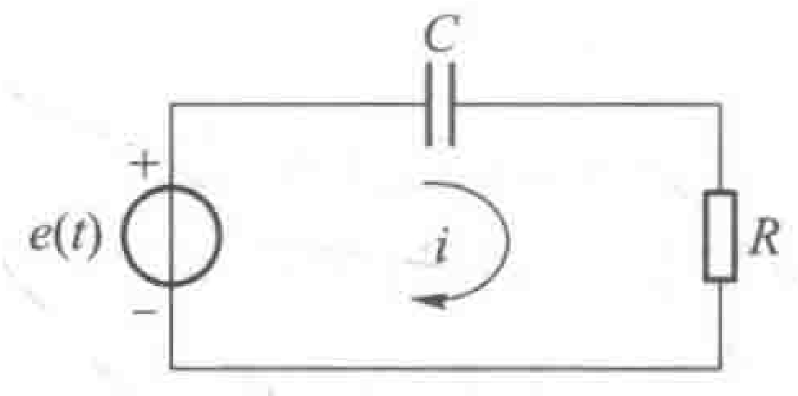
$$h_1(t) = \frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \quad \text{推导} \Rightarrow \quad h_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}\,\varepsilon(t)$$

反向验证！

冲激响应

RC串联电路初始状态为零，输入电压信号为冲激信号，如下图所示，求电路的响应电流以及电容上的响应电压。

管致中：P.48



RC串联电路

$$\text{电容：}\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt}}$$

$$i(t) = Cpu(t) \Rightarrow \boxed{\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{1}{Cp}}$$

电容可以看作一个电阻，电阻值为$\frac{1}{Cp}$

步骤：

1. 写出电路的微分方程
2. 获得冲激响应
3. 获得电容上的响应电压

冲激响应

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{零状态LTI系统}} \longrightarrow h_1(t)$$

$$h_1(t)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \xrightarrow{\text{推导}} h_1(t)=k_1 e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)$$

冲激函数经过一阶系统的响应便于求解

对于复杂信号、高阶系统，怎么办？

冲激响应

高阶微分方程： 把高阶微分方程化简为多个一阶微分方程的和！

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)h(t)$$
$$=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)\delta(t)$$

$n>m$

$$h(t)=H(p)\delta(t)$$
$$=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}\delta(t)$$
$$=\left[\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\right]\delta(t)$$
$$=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t)+\frac{k_2}{p-\lambda_2}\delta(t)+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\delta(t)$$

冲激响应

- **n>m**

$$h(t)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t)+\frac{k_2}{p-\lambda_2}\delta(t)+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\delta(t)$$

$$h_1(t)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \Rightarrow h_1(t)=k_1 e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)$$

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)$$

冲激响应

- **n=m**

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{b_1 p}{p-\lambda}\delta(t)$$

$$=\left(b_1+\frac{b_1\lambda}{p-\lambda}\right)\delta(t)=b_1\delta(t)+\frac{b_1\lambda}{p-\lambda}\delta(t)$$

推导！

$$h(t)=b_1\delta(t)+b_1\lambda e^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}\delta(t)+b_m\delta(t)$$

冲激响应

例2：求系统 $\frac{d}{dt}r(t)-\lambda r(t)=k\delta(t)$的冲激响应

解：$H(p)=\frac{k}{p-\lambda}$ $\longrightarrow$ $h(t)=ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$

例3：求系统 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=-5\frac{d}{dt}e(t)-7e(t)$

的冲激响应

分析：$H(p)=\frac{-5p-7}{p^2+3p+2}=\frac{-2}{p+1}+\frac{-3}{p+2}$

$$h(t)=-(2e^{-t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

冲激响应

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p})=\frac{-5\boldsymbol{p}-7}{\boldsymbol{p}^{2}+3\boldsymbol{p}+2}=\frac{\mathrm{A}}{\boldsymbol{p}+1}+\frac{\mathrm{B}}{\boldsymbol{p}+2}$$

公式两边同时乘以p+2，可以得到

$$\frac{(-5\boldsymbol{p}-7)}{\boldsymbol{p}+1}=\frac{\mathrm{A}}{\boldsymbol{p}+1}(\boldsymbol{p}+2)+\mathrm{B}$$

令p=-2，可以得到

B=-3

冲激响应

例4：求系统 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d^3}{dt^3}e(t)+4\frac{d^2}{dt^2}e(t)-5e(t)$

的冲激响应

解：$$H(p)=\frac{p^3+4p^2-5}{p^2+3p+2}=p+1+\frac{-2}{p+1}+\frac{-3}{p+2}$$

$$r(t)=pe(t)+1e(t)+\frac{-2}{p+1}e(t)+\frac{-3}{p+2}e(t)$$

当$e(t)=\delta(t)$

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)-(2e^{-t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

冲激响应

$$H(p)=\frac{p^3+4p^2-5}{p^2+3p+2}$$

分子阶次n=3，分母阶次m=2，因此

$$\frac{p^3+4p^2-5}{p^2+3p+2}=\alpha p+\beta+\frac{\mathrm{A}}{p+1}+\frac{\mathrm{B}}{p+2}$$

$$=p+1+\frac{-2}{p+1}+\frac{-3}{p+2}$$

零状态响应

时域分解

$$e_k(t)$$

冲激响应

$$r_k(t)$$

卷积！

?

$$e(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k e_k(t-t_k) \longrightarrow r(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k r_k(t-t_k)$$

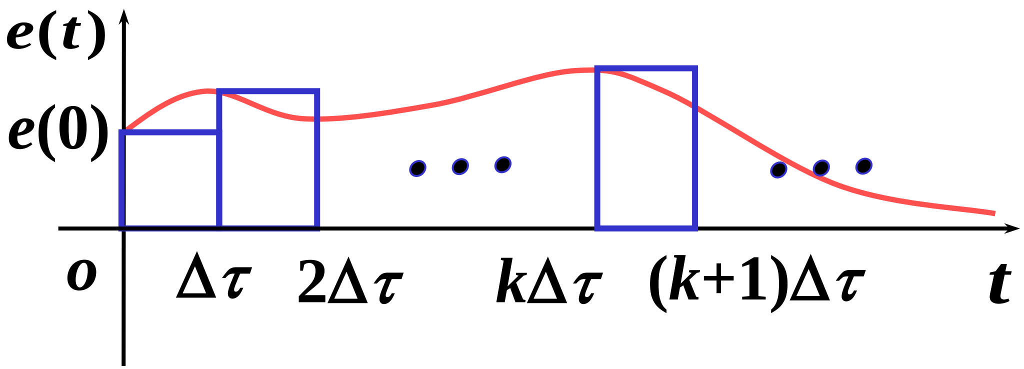
零状态响应

- ❑ 系统分析的逻辑
- ❑ 零输入响应
- ❑ **零状态响应**
  - ▪ 奇异函数
  - ▪ 信号的时域分解
  - ▪ 阶跃响应和冲激响应
  - ▪ **卷积定理**
    - 叠加积分
    - 计算步骤
    - 卷积性质

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
  - 阶跃响应和冲激响应
  - 卷积定理
    - 叠加积分
    - 计算步骤
    - 卷积性质

叠加积分



$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\, p(t-k\Delta\tau)\, \Delta\tau$$

$$e(t) \approx e(0)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta\tau)] + e(\Delta\tau)[\varepsilon(t-\Delta\tau)-\varepsilon(t-2\Delta\tau)] + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

$$\boxed{p(t-k\Delta\tau)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)\frac{1}{\Delta\tau}[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]\Delta\tau$$

当$e(t)$分割得足够细， $\Delta\tau \to d\tau, k\Delta\tau$变成连续变量$\tau$

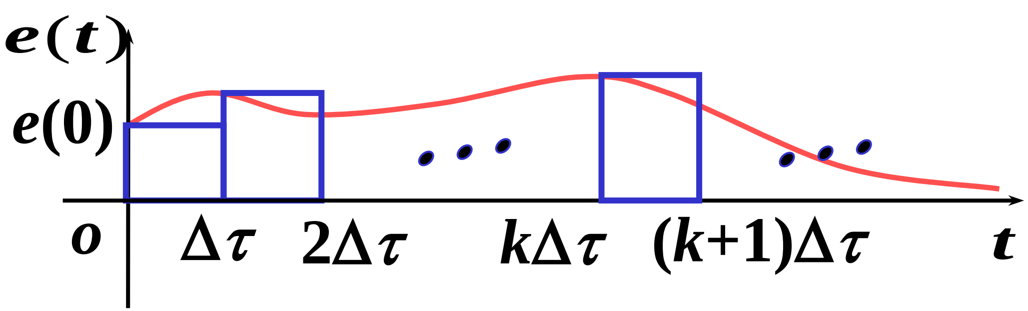
$$\boxed{\text{激励}\, e(t) = \int_0^{\infty} e(\tau)\, \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau}$$

Delta函数的抽样特性！！

叠加积分

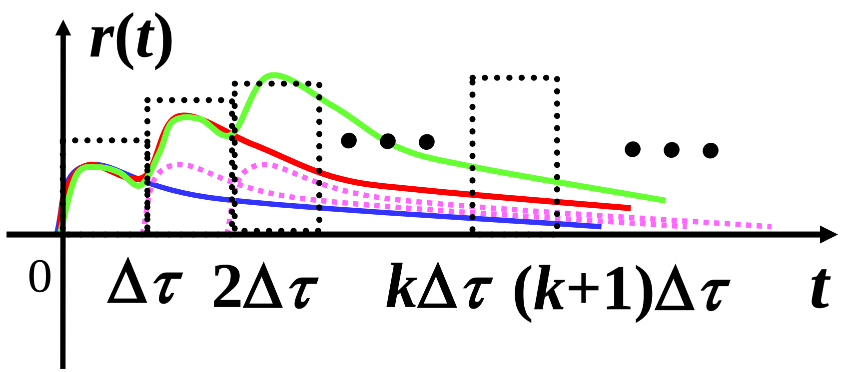
输入信号$e_k(t)$ → **LTI系统** → 输出响应 $r_k(t)$

$$e(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k e_k(t-t_k) \longrightarrow r(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k r_k(t-t_k)$$



$$e(t)\approx\sum_{k=0}^{N}e(k\Delta\tau)\ p(t-k\Delta\tau)\,\Delta\tau$$

$$\Downarrow$$



$$r(t)\approx\sum_{k=0}^{\infty}e(k\Delta\tau)\,h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

叠加积分

当$e(t)$分割得足够细，$\Delta\tau \to d\tau, k\Delta\tau$变成连续变量$\tau$

$$p = \frac{1}{\Delta\tau}[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)] = \delta(t-\tau)$$

$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$r(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$$

$$r(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

积分

脉冲响应

$$h(t-\tau)$$

冲激响应

$$\boxed{r(t) = \int_0^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

卷积！！

叠加积分

$$\boxed{\text{激励} e(t) = \int_0^{\infty} e(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\Big\downarrow \text{LTI}$$

$$\boxed{r(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

卷积！！

卷积

$$r(t)=\int_0^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

零状态响应　　输入　　冲激响应

若连续系统为因果系统, 即 $h(t)=0$, $t<0$, 且输入信号为因果信号，则有

$$r(t)=\int_0^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

零状态LTI系统的响应

时域分解

$e_k(t)$ —冲激响应→ $r_k(t)$

叠加积分/卷积

$$e(t)=\sum_{k=1}^{N} a_k e_k(t-t_k) \xrightarrow{?} r(t)=\sum_{k=1}^{N} a_k r_k(t-t_k)$$

山不转路转，分而治之

科学思想方法

应用：**求解零状态响应**

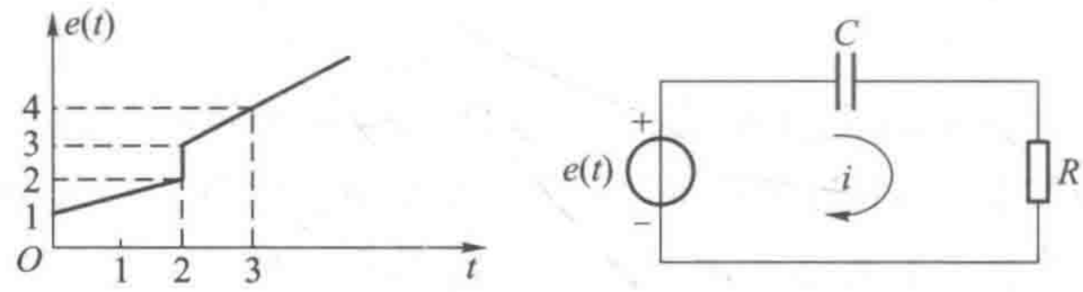
$$\textbf{电容：}\ \boldsymbol{i(t) = C\frac{du(t)}{dt}}$$

管致中：P.52

例题 2-7 激励电压

$$e(t)=\left(\frac{1}{2}t+1\right)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+(t+1)\varepsilon(t-2)$$

如图 2-20(a)所示，加于图 2-20(b)所示的 RC 串联电路。设其中 $R=\frac{1}{2}\ \Omega$，$C=2$ F，且初始状态 $i(0^-)$ 为零，求响应电流 $i(t)$。



(a) $e(t)$ (b) RC串联电路

图 2-20 例题 2-7 的激励电压和电路

Step1: 写输入信号的表达式
Step2 : 写系统微分方程
Step2: 求解冲激响应函数 h(t)
Step3: 利用卷积积分，求零状态响应

写出所示信号的时域表达式f(t)，并画出f(t)的导数的波形。