

第一节 解析函数的概念

- 一、复变函数的导数与微分
- 二、解析函数的概念
- 三、小结与思考



一、复变函数的导数与微分

1. 导数的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D , z_0 为 D 中的一点, 点 $z_0 + \Delta z$ 不出 D 的范围,

如果极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在,

那末就称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

$$\text{记作 } f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$



在定义中应注意:

$z_0 + \Delta z \rightarrow z_0$ (即 $\Delta z \rightarrow 0$) 的方式是任意的.

即 $z_0 + \Delta z$ 在区域 D 内以任意方式趋于 z_0 时,

比值 $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 我们就称 $f(z)$ 在区域内 D 可导.



例1 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

$$(z^2)' = 2z$$



例2 讨论 $f(z) = \operatorname{Im} z$ 的可导性.

解

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Im}(z + \Delta z) - \operatorname{Im} z}{\Delta z} \\&= \frac{\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \Delta z - \operatorname{Im} z}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Im} \Delta z}{\Delta z} \\&= \frac{\operatorname{Im}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

当点沿平行于实轴的方向($\Delta y = 0$)而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,



$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = 0,$$

当点沿平行于虚轴的方向($\Delta x = 0$)而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1}{i},$$

当点沿不同的方向使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,极限值不同,

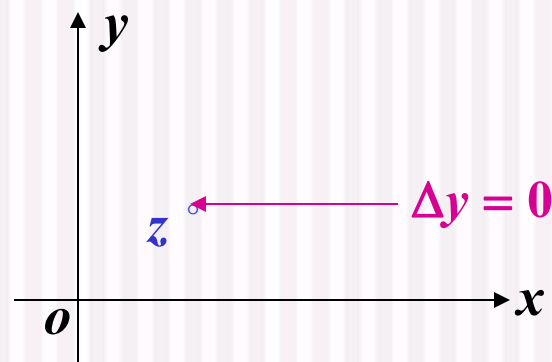
故 $f(z) = \operatorname{Im} z$ 在复平面上处处不可导.



例3 问 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?

解
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}$$



设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z ,

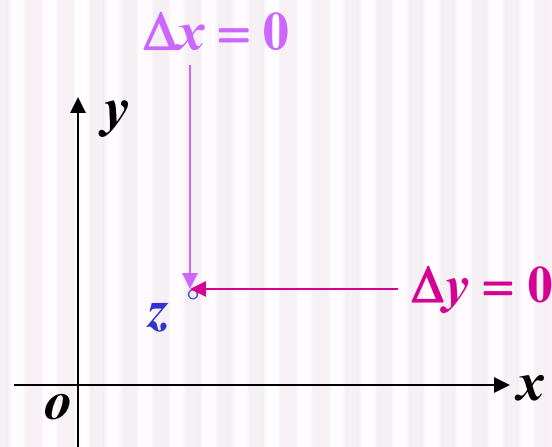


$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta yi}{\Delta yi} = 2,$$

所以 $f(z) = x + 2yi$ 的导数不存在.



2.可导与连续:

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证 根据在 z_0 可导的定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时,

$$\text{有 } \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

$$\text{令 } \rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$$



则 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho(\Delta z) = 0,$

因为 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$

所以 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0),$

即 $f(z)$ 在 z_0 连续.

[证毕]

例2, 例3表明即使复变函数在区域内每一点都连续,
也有可能处处不可导 (处处连续处处不可导) .



3.求导法则:

由于复变函数中导数的定义与一元实变函数中导数的定义在形式上完全一致, 并且复变函数中的极限运算法则也和实变函数中一样, 因而实变函数中的求导法则都可以不加更改地推广到复变函数中来, 且证明方法也是相同的.

求导公式与法则:

- (1) $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数.
- (2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为正整数.



$$(3) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$(4) \quad [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

$$(5) \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

$$(6) \quad \{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z). \quad \text{其中 } w = g(z)$$

$$(7) \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}, \quad \text{其中 } w = f(z) \text{ 与 } z = \varphi(w) \text{ 是}$$

两个互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$



4.微分的概念:

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

定义

若函数 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导, 则

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

其中 $|\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小量, $f'(z_0)\Delta z$ 是函数 $w = f(z)$ 的改变量 Δw 的线性部分. 称 $f'(z_0)\Delta z$ 为函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的微分, 记作

$$dw = f'(z_0)\Delta z = f'(z_0)dz.$$



如果函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的微分存在, 则称函数 $f(z)$ 在 z_0 可微.

函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内可微.



二、解析函数的概念

1. 解析

一点处解析: 称函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 如果 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的一个邻域内处处可导.

解析函数

称函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析. 也称 $f(z)$ 是区域 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数).



2. 奇点

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 那末称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

根据定义可知:

函数在区域内解析与在区域内可导是等价的.

函数在一点处解析与在一点处可导是不等价的.

即函数在一点处可导, 不一定在该点处解析.



例4 研究函数 $f(z)=z^2$, $g(z)=x+2yi$ 和 $h(z)=|z|^2$ 的解析性.

解 由本节例1和例3知:

$f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的 ;

$g(z)=x+2yi$ 处处不解析 ;

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性 ,

$$\frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} = \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$



$$= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} = \overline{z_0} + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

$$(1) z_0 = 0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} = 0.$$

$$(2) z_0 \neq 0,$$

令 $z_0 + \Delta z$ 沿直线 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 趋于 z_0 ,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1 - i\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1 - ik}{1 + ik}$$



由于 k 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{1 - ki}{1 + ki} \text{ 不趋于一个确定的值.}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} \text{ 不存在.}$$

因此 $h(z) = |z|^2$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 而在其他点都不可导, 根据定义, 它在复平面内处处不解析.



例5 研究函数 $w = \frac{1}{z}$ 的解析性.

解 因为 $w = \frac{1}{z}$ 在复平面内除 $z = 0$ 处处可导,

$$\text{且 } \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2},$$

所以 w 在复平面内除 $z = 0$ 外处处解析,
 $z = 0$ 为它的奇点.



例6 研究函数 $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ 的可导性与解析性.

解 (1) $z = 0$,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z} = 0,$$

故 $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ 在 $z = 0$ 处可导.

(2) $z \neq 0$,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z) \operatorname{Re}(z + \Delta z) - z \operatorname{Re}(z)}{\Delta z}$$



$$= \frac{z}{\Delta z} [\operatorname{Re}(z + \Delta z) - \operatorname{Re}(z)] + \operatorname{Re}(z + \Delta z)$$

$$\text{令 } \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x,$$

$$\text{因为 } \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = x,$$

$$\lim_{\substack{\Delta y=0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z + x,$$



所以 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 不存在.

即当 $z \neq 0$ 时, $f(z)$ 不可导,

因此 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 而在其他点都不可导, 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

课堂练习 研究函数 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ 的解析性.

答案 处处不可导, 处处不解析.



定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商 (除去分母为零的点) 在 D 内解析.

(2) 设函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, 函数 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z , 函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G , 那末复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.

以上定理的证明, 可利用求导法则.



根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的, 使分母为零的点是它的奇点.



三、小结与思考

理解复变函数导数与微分以及解析函数的概念；
掌握连续、可导、解析之间的关系以及求导方法。

注意：复变函数的导数定义与一元实变函数的导数定义在形式上完全一样，求导公式与求导法则也一样，然而复变函数极限存在要求与 z 趋于零的方式无关，这一点与二元实变函数极限存在的条件类似.这也表明复变函数在一点可导的条件比实变函数严苛得多。



思考题

复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 可导与在 z_0 解析有无区别？



思考题答案

$f(z)$ 在点 z_0 解析必在 z_0 可导, 反之不对.

例如 $f(z) = |z|^2$ 在 $z_0 = 0$ 处可导,

但在 $z_0 = 0$ 处不解析.

