

诚信保证

本人知晓我校考场规则和违纪处分条例的有关规定，保证
遵守考场规则，诚实做人。 本人签字：_____

任课教师：_____ 大班号：_____ 班内序号：_____

姓 名：_____ 学 号：_____

西北工业大学考试试题（A 卷）

2020— 2021 学年 秋 学期

开课学院：数学与统计学院 课 程：计算方法 学 时： 32
考试日期：2020 年 11 月 21 日 考试时间：2 小时 考试形式： 闭卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

一、简单计算或推导（每题 6 分，共 30 分）。

1. 已知 x_0, x_1, x_2 为等距节点，其步长为 h ，试推导如下数值微分公式。

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

2. 设近似数 $x_1^* = 2.1$, $x_2^* = -3.2$, $x_3^* = 5.4$ 都是有效数, 求 $x_1^* x_2^* + x_3^*$ 的相对误差限 (结果保留三位小数)。

3. 设 $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, 试求差商 $f[0,1]$, $f[0,1,2,3,4]$, $f[0,1,2,3,4,5]$ 。

4. 用乘幂法计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 的主特征值, 取 $V^{(0)} = (1,1)^T$, $\lambda_1^{(k)} = \frac{V_1^{(k)}}{V_1^{(k-1)}}$, 给出迭代 3 步的结果 (保留 4 位小数)。

解: 计算结果列表如下:

k	$(V^{(k)})^T$	$\lambda_1^{(k)}$
0	(1, 1)	
1		
2		
3		

则矩阵 A 按模最大的特征值为 $\lambda_1 \approx$ _____;

相应的近似特征向量为 $x = (\quad)^T$ 。

5. 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 进行 Doolittle 分解。

二、(10 分)利用 $(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 三个节点, 构造 $\int_0^2 f(x)dx$ 的插值型求积公式,

并用所构造的求积公式计算 $\int_0^2 e^x dx$ 的近似值 (结果保留 4 位小数)。

解: (1) 利用 $(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 三个节点, 构造插值型求积公式:

(2) 利用建立的求积公式计算 $\int_0^2 e^x dx$ 的近似值 (结果保留 4 位小数)。

三、(10 分)考察用雅可比对应的赛德尔 (JGS) 迭代法解方程组
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$$
 的

收敛性, 若收敛, 取 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 迭代至 $\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq 10^{-3}$ 。

(1) 证明 JGS 迭代法关于任意初始向量都收敛

(2) JGS 迭代格式为:

(3) 取 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 计算结果如下:

四、(10 分) 用最小二乘法求一个形如 $y = ax^2 + b$ 的经验公式, 使它与下列的数据拟合。

x_i	-2	-1	0	1
y_i	3	1	0	2

解: (1) 将所给点代入得矛盾方程组为:

(2) 法方程组为:

(3) 解得: $a =$ _____ $b =$ _____ (结果可直接写成分式或保留三位小数)

拟合的曲线方程为: _____

五、(10 分) 当常数 c 取合适的值时, 两条抛物线 $y = x^2 + x + c$ 与 $y = 2\sqrt{x}$ 在某点相切,

试取 $x_0 = 0.4$, 用牛顿迭代法求切点横坐标, 迭代至 $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$ 。

解: (1) 由相切条件建立方程

(2) 牛顿迭代格式

(3) 验证区间 $[0, 1]$ 内的收敛性

(4) $x_0 = 0.4$, 计算如下

六、(10分) 设有求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的如下数值方法

$$y_{n+1} = ay_{n-1} + by_n + chf(x_n, y_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

试确定参数 a, b, c 使该方法成为二阶方法.

解:

七、填空题 (5*2分=10分)

1. 如果 Jacobi 迭代法的迭代矩阵的任意一个范数 $\|B_j\| < 1$, 则 JGS 迭代法关于任意初始向量 $x^{(0)}$ 均收敛. 该叙述_____. (错, 对)
2. 若求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 是插值型求积公式, 则必有 $\sum_{k=0}^n A_k = 1$. 该叙述_____. (错, 对)
3. 已知迭代函数 $\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$, c 满足条件_____时, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的迭代序列收敛于 $\sqrt{3}$.

4. 求解常微分方程初值问题的线性多步公式一定可以用数值积分方法构造. 该叙述_____。(错, 对)

5. 设 B 为实对称矩阵, 用迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + x^{(k)} + g$ 求解线性方程组 $Ax = b$ 时, 对于任意 $x^{(0)}$, 该迭代法收敛的充要条件为 B 的特征值 λ_B 满足: _____.

八、(10 分) 建立满足插值条件 $P(0) = -1, P(1) = 2, P(2) = 11, P'(1) = 5$ 的插值多项式, 并写出插值余项。