第二章 非线性方程数值解法

- §2.1 引言
- §2.2 二分法（对分法）
- §2.3 简单迭代法
- §2.4 Newton迭代法

§ 2.1 引言

一、问题

求解非线性方程　　$f(x)=0$

如多项式方程：$p_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 = 0$

n=1—古埃及BC1700
n=2—古巴比伦BC3世纪（巴比伦泥板-公元前1800年）—阿拉伯Al Khwarizmi820
n=3—Taritalia（意大利）1541-赵爽，东汉末至三国，约182---250年-九章算术
n=4—Cardan、Ferrari（意大利）1550
n>=5—Euler、Vandermonde、Lagrange、Rullini、Gauss
1771-Lagrange关于方程的代数解法的思考—Rullini1813—Abel（挪威1802-1829）五次代数方程解法不可能存在—Gauss-Newton
Galois（法国1811-1832）—关于五次方程的代数解法问题（Cauchy、Fourier）
1828—关于用根式解方程的可解性条件1831（应Poisson要求修订）—1846Liouville纯粹与应用数学杂志-Jordan1870年出版《论置换群与代数方程》
1929—苏家驹—《学艺》—代数式的五次方程之解法
1930—华罗庚—《科学》—苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由

困难：方程的解难以用公式表达。
需要一定精度的近似解！

二、概念

方程 $f(x)=0$ 的解 x^* 称为方程 $f(x)=0$ 的根或称为 $f(x)$ 的零点。若 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$ 其中 m为正整数，$g(x)$满足$g(x)\neq 0$，则显然 $f(x^*)=0$ 这时称x^* 为 $f(x)$ 的m重零点，或称x^*为 $f(x)=0$ 的m重根。

方程可能有多个实根，我们只能逐个求出来。

设在区间$[a,b]$上方程有一个根，则称该区间为方程的一个有根区间。若在区间$[a,b]$上方程只有一个根，则称把方程的根隔离出来了。

Remark：若能把有隔根间不断缩小，则可以得出根的近似值。

三、根的隔离

基于函数$f(x)$的连续性质，常用的根的隔离的方法有：描图法与逐步搜索法。

1、描图法：画出$y=f(x)$的简图，从曲线与x轴交点的位置确定出隔根区间，或者将方程等价变形为$g_1(x)=g_2(x)$，画出函数$y=g_1(x)$和$y=g_2(x)$的简图，从两条曲线交点的横坐标的位置确定隔根区间。

2、逐步搜索法：先确定方程$f(x)=0$的所有实根所在区间$[a,b]$，再按照选定的步长$h=\dfrac{b-a}{n}$（n为正整数），取点$x_k=a+kh(k=0,1,\ldots,n)$，逐步计算函数值$f(x_k)$，依据函数值异号以及实根的个数确定隔根区间。必要时可调整步长h，总可把隔根区间全部找出。

§2.2 二分法（对分法）

重点精讲2.1
二分法

一、算法

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$且在$[a,b]$内$f(x)=0$仅有一个实根 x^*。二分法的基本思想是：逐步将有根区间分半，通过判别函数值的符号，进一步搜索有根区间，将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的根 x^* 的近似值。

具体算法：

Step1:记$a_1=a$，$b_1=b$，将区间$[a_1, b_1]$分半，计算中点 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 以及函数值 $f(x_1)$ 。

若 $f(x_1)=0$ 则 $x^*=x_1$ 。

二分法（对分法）（续）

否则，若有$f(x_1)f(a_1)<0$，则$x^* \in [a_1, x_1]$，令$a_2 = a_1, b_2 = x_1$

或 $f(x_1)f(b_1)<0$，则 $x^* \in [x_1, b_1]$，令 $a_2 = x_1, b_2 = b_1$

新的有根区间$[a_2, b_2]$的长度 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b-a)$ 。

Step2:再计算$[a_2, b_2]$中点$x_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$ 的函数值$f(x_2)$。

若$f(x_2)=0$则 $x^* = x_2$ 。否则 $f(x_2)f(a_2)<0$ 则 $x^* \in [a_2, x_2]$，

令 $a_3 = a_2, b_3 = x_2$，或 $f(x_2)f(b_2)<0$ 则 $x^* \in [x_2, b_2]$，

令 $a_3 = x_2, b_3 = b_2$ 。

新的有根区间$[a_3, b_3]$的长度 $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b-a)$

二分法（对分法）（续）

如此对分下去则得到一系列的有根区间

$$[a,b]=[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

且 $b_k-a_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})=\cdots=\frac{1}{2^{k-1}}(b-a)$

由 $x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$ 及 $\left|x_k-x^*\right|\le\frac{1}{2}(b_k-a_k)=\frac{1}{2^k}(b-a),k=1,2,\cdots$

当对分过程无限继续下去，则有根区间必收敛到一点，即 $\lim\limits_{1<k<\infty}x_k=x^*$

二、误差估计

定理：给定方程 $f(x)=0$，设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则由二分法产生的序列$\{x_k\}$收敛于方程的根x^*，且具有误差估计

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{1}{2^k}(b-a) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

三、收敛准则

1.事先误差估计：

利用误差估计定理，令 $\left|x_k - x^*\right| \le \dfrac{1}{2^k}(b-a) \le \varepsilon$

得 $$k \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

从而得到对分次数k，取x_k作为根得近似值x^*。

2.事后误差估计：

给定 ε，每步检查 $\left|x_k - x^*\right| \le \dfrac{1}{2^k}(b-a) \le \varepsilon$ ，若成立，则取 $x^* \approx x_k$ ，否则继续对分。

二分法（对分法）（续）

Remark1：由于 $\left|x_k - x^*\right| \le \left|x_k - x_{k-1}\right| = \dfrac{1}{2^k}(b-a) \le \varepsilon$ ，

故也可以用 $\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \varepsilon$ 来控制误差。

Remark2：也可以使用 $|f(x_k)| \le \varepsilon$来控制误差。

Remark3：二分法的优点是方法及相应的程序均简单，且对$f(x)$性质要求不高，只要连续即可。但二分法不能用于求复数根和偶数重根，且收敛速度比较慢。因此，一般常用该方法求根的初始近似值，然后再用其它的求根方法精确化。

§ 2.3 简单迭代法

一、迭代法

1.基本思想

令方程 $f(x)=0$，将其变成一个等价的方程 $x=\Phi(x)$，构造 $x_{k+1}=\Phi(x_k), k=0,1,\cdots$， $\{x_k\}$ 称为迭代数列，

$\Phi(x)$ 称为迭代函数，$x_{k+1}=\Phi(x_k)$ 称为迭代公式

或迭代过程。

当$\Phi(x)$连续时，有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_k)=\Phi(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)$

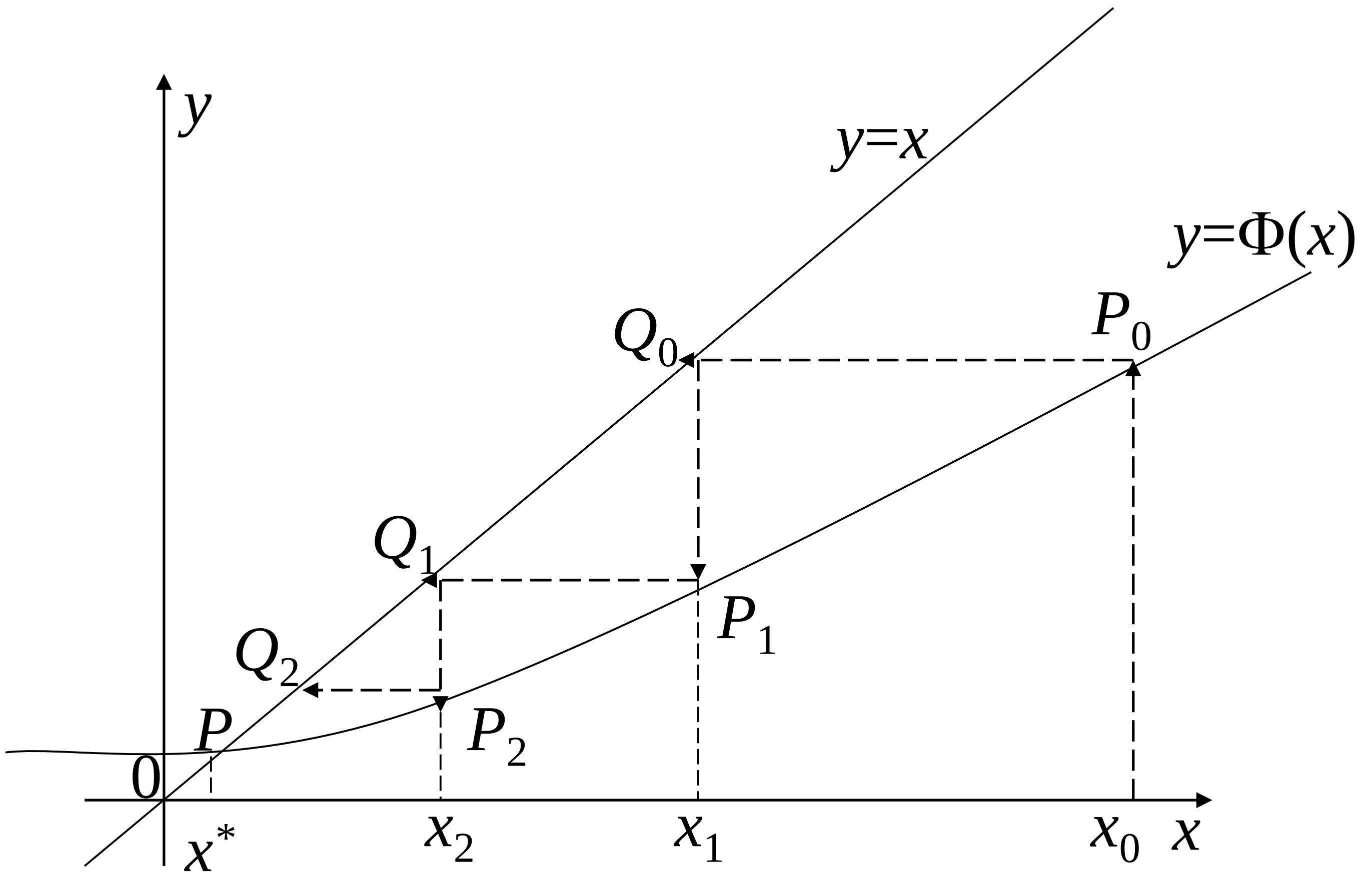
即 $x^*=\Phi(x^*)$ 或 $f(x^*)=0$ 。

即序列$\{x_k\}$的极限x^*为$f(x)=0$的根。

因此，我们可以通过求迭代数列的极限的方法来求得方程$f(x)=0$的根。

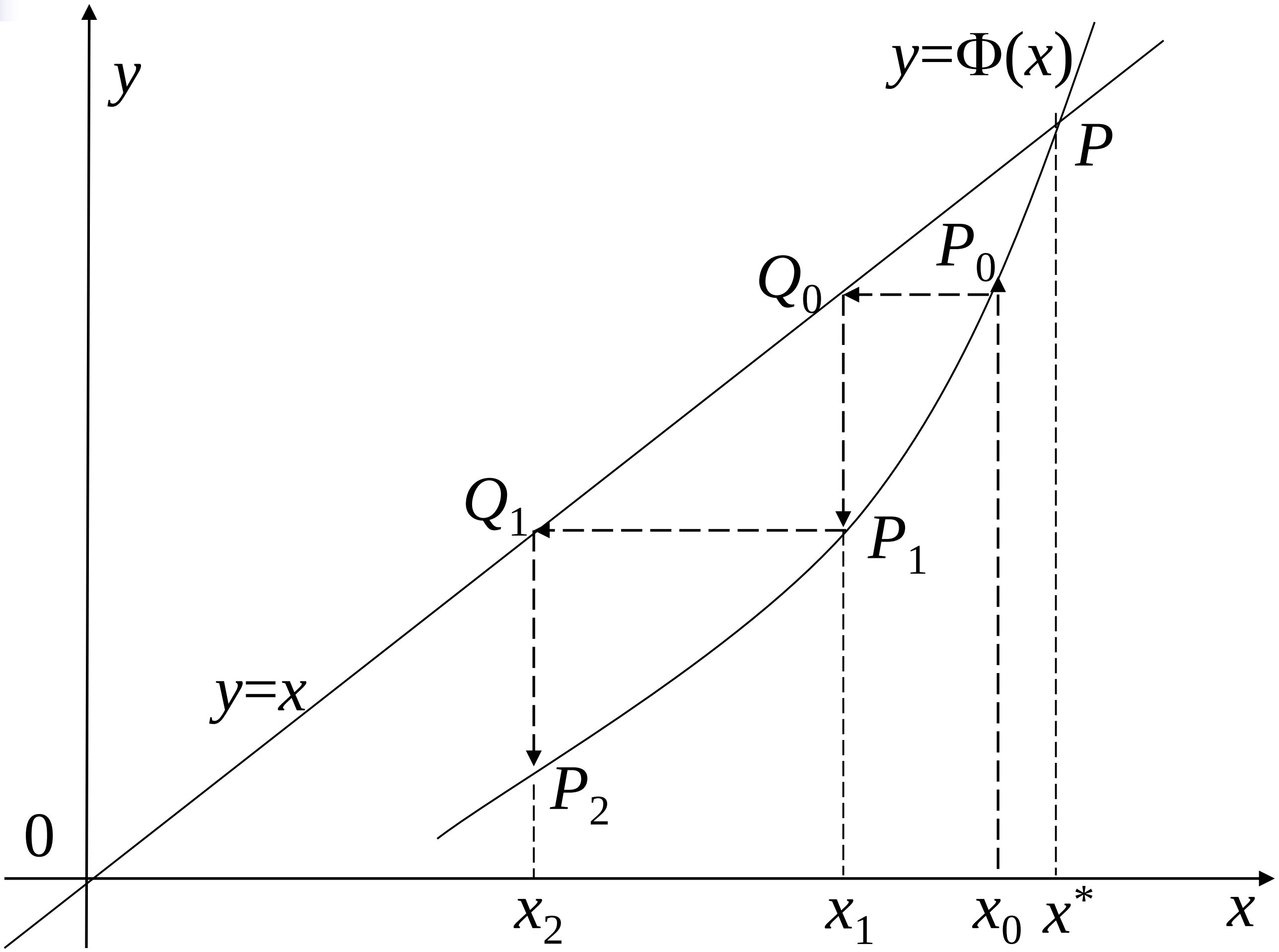
迭代法的基本思想（续）

迭代法的几何意义



收敛的迭代法

迭代法的基本思想（续）



发散的迭代法

迭代法的基本思想（续）

Remark：可以通过不同的途径将$f(x)=0$化为$x=\Phi(x)$的形式，从而构造不同的迭代公式，得到不同的迭代序列。在所有这些构造的迭代公式中形成的序列中，有的序列是收敛的，而有些是发散的。

问题：如何选取合适的迭代函数 $\Phi(x)$ ？

迭代函数$\Phi(x)$应满足什么条件，序列$\{x_k\}$收敛？

怎样加速序列$\{x_k\}$的收敛？

重点精讲2.2
迭代法收敛定理

2. 迭代法的收敛定理

定理1.（全局收敛定理）设方程 $x=\Phi(x)$，若

（1）迭代函数 $\Phi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导；

（2）当 $x\in[a,b]$ 时，$\Phi(x)\in[a,b]$；

（3）存在常数 $0<L<1$，使对任意 $x\in(a,b)$ 有 $|\Phi'(x)|\le L$

则有

（1）方程 $x=\Phi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有唯一的根 x^*；

（2）对任意初值 $x_0\in[a,b]$ 由迭代公式 $x_{k+1}=\Phi(x_k), k=0,1,2\cdots$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 必收敛于方程的根 x^*；

（3）误差估计 $|x_k-x^*|\le\dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$, $|x_k-x^*|\le\dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

（4）$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=\Phi'(x^*)$$

迭代法的收敛定理（续）

证明：(1)先证方程根的存在性。

由于$\Phi(x)$在$[a,b]$上连续，作辅助函数$\psi(x)=x-\Phi(x)$,

则$\psi(x)\in C[a,b]$且，$\psi(a)=a-\Phi(a)\le 0, \psi(b)=b-\Phi(b)\ge 0$

故由连续函数的介值定理知，至少存在 $x^*\in[a,b]$,

使$\psi(x^*)=0$,即$\Phi(x^*)=x^*$，即x^*是方程$x=\Phi(x)$的根。

又设$\Phi(x)$有两个根$x_1^*, x_2^*\in[a,b]$。注意$\Phi(x)\in C(a,b)$,

且$|\Phi'(x)|\le L<1$，故由微分中值定理知，

$$|x_1^*-x_2^*|=|\Phi(x_1^*)-\Phi(x_2^*)|=|\Phi'(\xi)(x_1^*-x_2^*)|$$

$$(1-|\Phi'(\xi)|)|x_1^*-x_2^*|=0,\quad 得|x_1^*-x_2^*|=0$$

即 $x_1^*=x_2^*$, $\Phi(x)$有唯一的根。

迭代法的收敛定理（续）

（2）因

$$|x_k - x^*| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(x^*)| = |\Phi'(\xi)||x_{k-1} - x^*| \le L|x_{k-1} - x^*|$$

其中 ξ 介于x_{k-1}与x^*之间，故有

$$|x_k - x^*| \le L|x_{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|, k = 1,2\cdots$$

因 $L<1$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k - x^*| = 0$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*, \forall x_0 \in [a,b]$。

迭代法的收敛定理（续）

（3） 由

$$|x_{k+1}-x_k|=|\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})|=|\Phi'(\xi)(x_k-x_{k-1})|$$

$$\le L|x_k-x_{k-1}|,\xi\in(x_{k-1},x_k)\subset(a,b),k=1,2,\cdots$$

$$|x_{k+1}-x_k|=|(x_k-x^*)-(x_{k+1}-x^*)|\ge|x_k-x^*|-|x_{k+1}-x^*|$$

由结论2有 $$|x_{k+1}-x^*|\le L|x_k-x^*|$$

故

$$|x_k-x_{k+1}|\ge|x_k-x^*|-|x_{k+1}-x^*|\ge(1-L)|x_k-x^*|$$

即

$$|x_k-x^*|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_k-x^*|\le\frac{L^2}{1-L}|x_{k-1}-x_{k-2}|\le\cdots\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

迭代法的收敛定理（续）

（4） 由

$$x_{k+1} - x^* = \Phi(x_k) - \Phi(x^*) = \Phi'(\xi)(x_k - x^*)$$

其中 ξ 介于 x_k与x^* 之间，故两端取极限有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \Phi'(x^*)$$

证毕

3. 迭代法的局部收敛定理

迭代法的全局收敛性定理给出的是区间$[a,b]$上的收敛性，称之为全局收敛性，一般不易验证，并且在较大的隔根区间上此定理的条件不一定成立，而只能在根的一个较小的邻域内成立。下面给出局部收敛定理：

定理2.（局部收敛定理）设 x^* 是方程 $x=\Phi(x)$的根，如果满足：（1）迭代函数$\Phi(x)$在 x^* 的邻域可导；（2）在 x^* 的某个邻域$S=\{x \mid |x-x^*|\le\delta\}$，对于任意$x\in S$，有

$$|\Phi'(x)|\le L<1$$

则对于任意的初值$x_0\in S$，迭代公式 $x_{k+1}=\Phi(x_{k+1}), k=0,1,2\cdots$ 产生的序列$\{x_k\}$必收敛于方程的根 x^* 。

迭代法的局部收敛定理的证明

证明：

将前述定理1中的$[a,b]$取为$[x^* - \delta, x^* + \delta]$，则只需证明 $\forall x \in S, \Phi(x) \in S$ 即可。

当$x \in S$，即$|x - x^*| \le \delta$ 时，由Lagrange中值定理有

$$|\Phi(x) - x^*| = |\Phi(x) - \Phi(x^*)| = |\Phi'(\xi)(x - x^*)|$$

$$\le L|x - x^*| < |x - x^*| \le \delta$$

其中ξ在x与x^*之间，即$\xi \in S$。

故 $\forall x \in S, \Phi(x) \in S$。

证毕

迭代法的局部收敛定理（续）

Remark1： 全局与局部收敛定理中的条件都是充分条件，条件满足则迭代法收敛，不满足则不能判定，此时可以用试算来判定迭代法的是收敛性。

Remark2： 可以证明，若在根 x^* 的邻域中$\Phi'(x)>1$，则可以以邻域内任何一点 x_0 为初值，用迭代过程产生的序列就一定不会收敛于 x^*。事实上，

$$\left|x_k - x^*\right| = \left|\Phi(x_{k-1}) - \Phi(x^*)\right| = \left|\Phi'(\xi)(x_{k-1} - x^*)\right| > \left|x_{k-1} - x^*\right| > \left|x_0 - x^*\right|$$

Remark3： 当 x_0 不取在 x^* 的邻域内时可能不收敛。

Remark4： 全局收敛定理中的两个误差估计式实际上给出了迭代收敛的两个准则：事后误差估计与事先误差估计（利用估计式可以预先求出迭代次数k）。

4. 迭代收敛准则

方法一、事先误差估计法

先计算满足误差要求的迭代次数k，再进行迭代。

由 $|x_k - x^*| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \le \varepsilon$ 有 $k \ge \dfrac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}}{\ln L}$

对于较为复杂的迭代函数，其导数也较为复杂，使得L难以取得，因而实际中不常用此方法。

方法二、事后误差估计法

由 $|x_k - x^*| \le \dfrac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$

只要使$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$，就可使 $|x_k - x^*| \le \dfrac{L}{1-L}\varepsilon$ ，

故也可以用 $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$ 来控制迭代过程。

迭代法（续）

Remark1:迭代方法的优点是计算程序简单，并且虽然是以求解非线性方程的实根来讨论的，但类似的结果完全可以推广到求方程的复数根的情形。

Remark2：由全局收敛定理知，若$L\approx1$，则$\{x_k\}$必然收敛较慢；若$L<<1$，则收敛速度快。

二、迭代法的收敛阶

定义：设$x_{k+1}=\Phi$（x_k）收敛于$x=\Phi(x)$的根x^*，令迭代误差$e_k=x_k-x^*$，如果存在实数$p\geq 1$及非零正常数C使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$ （ C称为渐近误差常数）

则称该迭代过程以及该迭代式是p阶收敛的，也称相应的迭代法是p阶方法。

若$0<C<1,p=1$称为线性收敛；$p>1$称为超线性收敛；p＝2称为平方收敛（二次收敛）。p越大，收敛速度越快；反之，p越小，收敛速度就越慢。因此，迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

重点精讲2.3
迭代法的加速

三、迭代法的加速

1. 线性收敛序列的Aitken加速法

设$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$是一个线性收敛的序列，极限为x^*。即有小于1的正数c使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|}=c$$

线性收敛，误差减少的速度较慢，采用Aitken加速技术。

线性收敛序列的Aitken加速法（续）

当k充分大时，有

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}\approx c, \qquad \frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*}\approx c$$

从而有 $$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}\approx\frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*}$$

从上式可以解得

$$x^*\approx\frac{x_k x_{k+2}-x_{k+1}^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

因此可以得下述Aitken加速公式：

$$y_k=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

2. Steffensen迭代法

Aitken加速法针对任意线性收敛序列。若将其应用于简单迭代法产生的序列，则可以得到Steffensen迭代公式：

$$\begin{cases} s = \varphi(x_k) \\ t = \varphi(s) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(s - x_k)^2}{t - 2s + x_k} \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

Remark： Steffensen迭代在一定条件下可以达到二阶收敛。

§2.4 Newton迭代法

一、Newton迭代法的构造

基本思想：将非线性方程转化为线性方程来求解。

设x_k是 $f(x)=0$ 的一个近似根，则

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2+\cdots$$

取前两项近似代替$f(x)$得近似 $f(x)=0$ 的线性方程

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

Newton迭代法（续）

设 $f(x)=0$ ，令解为 x_{k+1} 得 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},(k=0,1,2,\cdots)$

上式称为 $f(x)=0$ 的Newton迭代公式，对应的方程

$x=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(f'(x)\neq 0)$ 显然是 $f(x)=0$的同解方程。

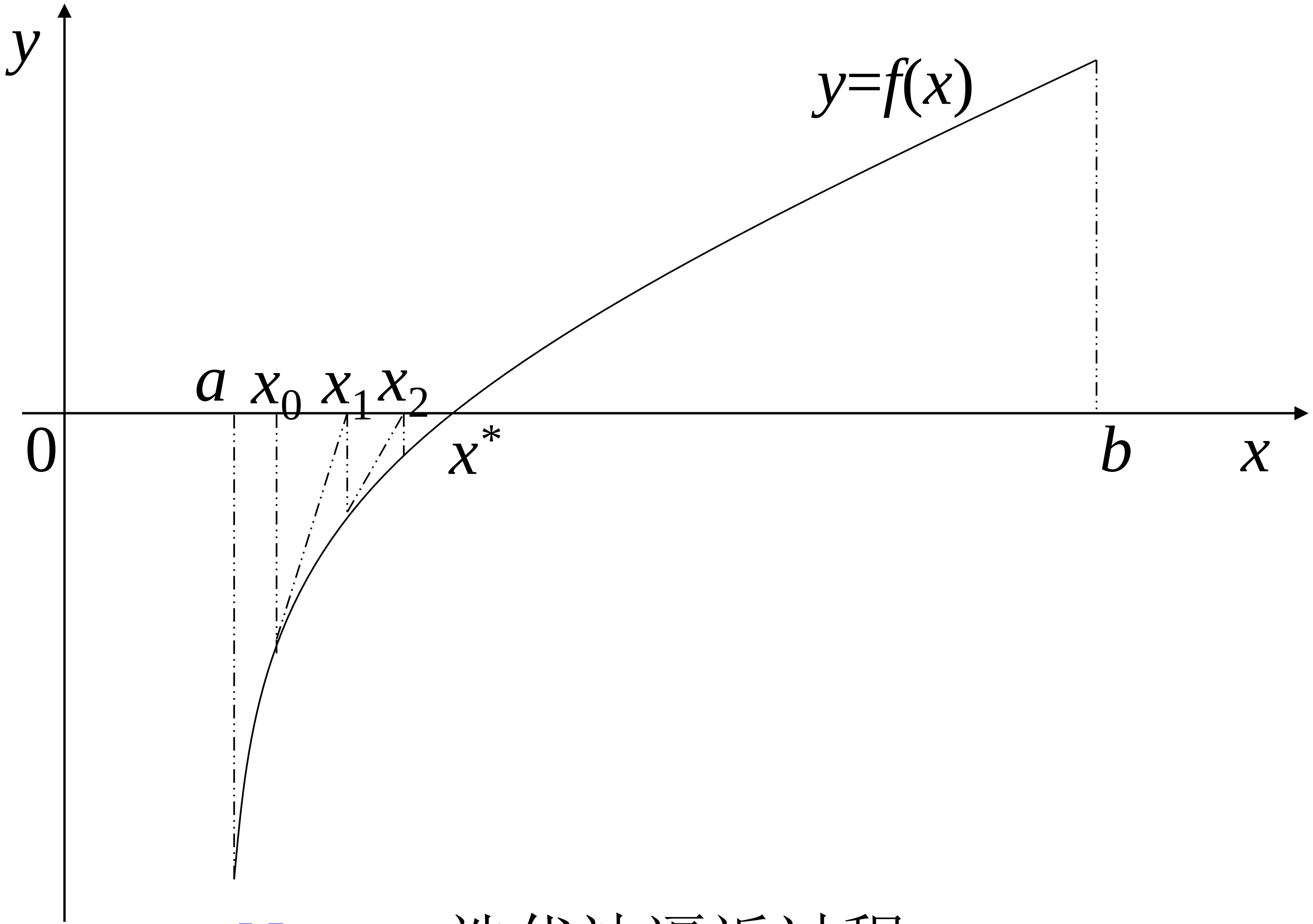
由 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 知 x_{k+1}是 $(x_k,f(x_k))$ 处 $y=f(x)$ 的

切线 $\dfrac{y-f(x_k)}{x-x_k}=f'(x_k)$ 与 x轴交点的横坐标，

- 故Newton法的几何意义是逐次用切线代替曲线，求切线与横坐标轴的交点。 （如下图）

- Newton法亦称为切线法–Newton-Raphson公式

Newton迭代法（续）



Newton迭代法逼近过程

定理（Newton迭代法局部收敛性）： 设 x^* 为 $f(x)=0$ 的根，如果：（1）函数 $f(x)$ 在 x^* 的邻域具有连续的二阶导数；（2）在 x^* 的邻域 $f'(x)\neq 0$ 。

则存在 x^* 的某个邻域 $S=\{x \mid |x-x^*|\leq\delta\}$ ，对于任意的初始值 $x_0\in S$，由Newton迭代公式产生的数列二阶收敛于根 。

证明：

由迭代函数的导数 $\varphi'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

及条件（1）（2）知，$\varphi(x)$ 在 x^* 的邻域可导。

Newton迭代法局部收敛性（续）

显然有 $\varphi'(x^*)=0$

根据连续函数的性质，一定存在x^*的某个邻域 $S=\{x \mid |x-x^*|\le\delta\}$，对于任意的$x\in S$，有

$$|\varphi'(x)|\le L<1$$

故Newton迭代法收敛。

将 $f(x)$ 在x_k处作一阶Taylor展开并取$x=x^*$，有

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x^*-x_k)^2$$

Newton迭代法局部收敛性（续）

利用Newton迭代公式可得

$$x_{k+1}-x^*=-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}\right|=\left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$$

证毕

Remark：上述定理对于初值x_0的要求比较高，只有当初值选的充分靠近x^*时，才能保证序列收敛。

Newton迭代法的非局部收敛性

定理（Newton迭代法的非局部收敛性）： 设x^*是方程$f(x)=0$在隔根区间$[a,b]$内的根，如果满足

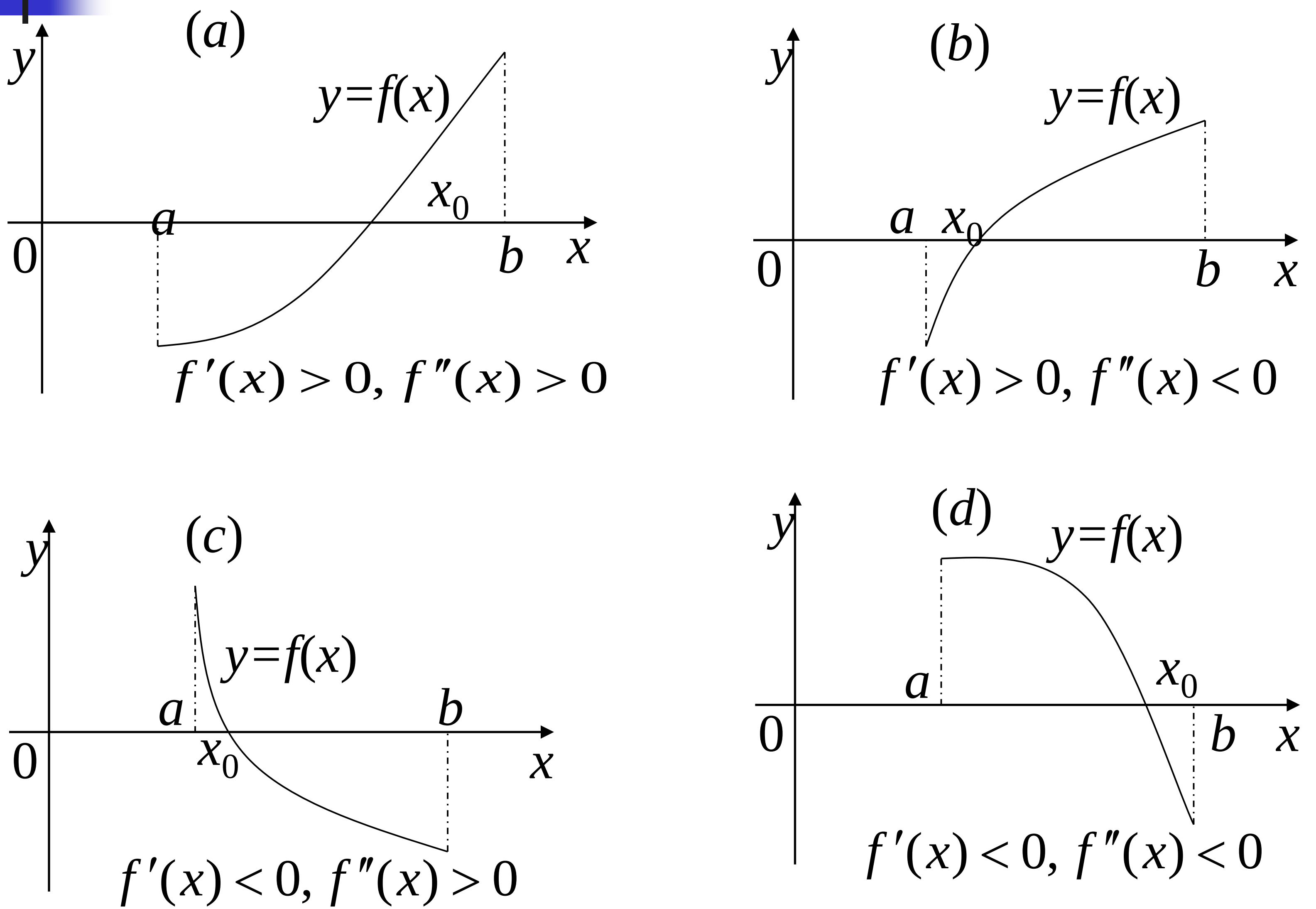
（1）对于$x\in[a,b]$，$f'(x), f''(x)$ 连续且不变号；

（2）取 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)f''(x_0)>0$。

则由Newton迭代公式产生的数列二阶收敛于根x^*。

Remark：定理的几何解释见下图。满足定理条件的情况只有4种。

Newton迭代法的非局部收敛性（续）



Newton迭代法的非局部收敛性（续）

证明：仅就图(c)的情况进行证明。此时，有

$$\forall x \in [a,b],\ f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ x_0 < x^*$$

要证 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，应证数列$\{x_k\}$单调递增上有界。

（1）用数学归纳法证明数列上有界，即证$x_k<x^*$。

$k=0$时，$x_k<x^*$成立。

一般的，设$x_k<x^*$成立，再证$x_{k+1}<x^*$成立即可。

将$f(x)$在x_k处作一阶Taylor展开，

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x-x_k)^2$$

其中ξ_k在x与x_k之间。因为x，$x_k \in [a,b]$,所以$\xi_k \in (a,b)$。

Newton迭代法的非局部收敛性（续）

将$x=x^*$代入上式，有

$$f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi_k)(x^*-x_k)^2=0$$

于是有

$$x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$x^*=x_{k+1}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

由已知条件知，上式右端第二项小于零，从而有$x_{k+1}<x^*$成立。

故由数学归纳法知，$x_k<x^*$（$k=0,1,2,\ldots$）成立。

Newton迭代法的非局部收敛性（续）

(2)再证明数列单调递增。

因为 $f'(x)<0, x_k<x^*$，所以 $f(x_k)>0, f'(x_k)<0$

于是Newton迭代公式 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

中的第二项小于零，从而有

$$x_{k+1}>x_k$$

于是 $$x_0<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x^*$$

即数列$\{x_k\}$是单调递增有上界的数列，且上界为x^*。

Newton迭代法的非局部收敛性（续）

（3）证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ 。

设该数列的极限为A，则对Newton迭代公式两边取极限，有

$$A = A - \frac{f(A)}{f'(A)}$$

从而得 $f(A)=0$。

因为方程$f(x)=0$在隔根区间$[a,b]$中只有一个根，故$A=x^*$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

证毕

例题

用Newton迭代法建立平方根 $\sqrt{c}$ $(c>0)$ 的迭代公式。

解： 令 $x=\sqrt{c}$ ，则$x^2-c=0$，这样把开平方问题转化为求方程 $f(x)=x^2-c=0$ 的正根。

Newton迭代公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k}) \qquad ,k=0,1,2,\cdots$$

容易证明，只要选取初值$x_0>0$，则可以保证Newton迭代法的收敛性。 #

三、Newton迭代法的变形

Newton迭代格式构造容易，迭代收敛速度快，但对初值的选取比较敏感，要求初值充分接近真解，另外对重根收敛速度较慢（仅有线性收敛速度），而且当函数复杂时，导数计算工作量大．下面从不同的角度对Newton法进行改进。

1. Newton下山算法

由Newton迭代法的收敛定理知，Newton迭代法对初值x_0的要求是很苛刻的。在实际应用中往往难以给出较好的初值x_0。下面我们给出一种降低对初值要求的修正的Newton法。

Newton下山法（续）

方程$f(x)=0$的解 x^*是 $|f(x)|$的最小值点，即

$$0=|f(x^*)|=\min_x|f(x)|$$

若我们视$|f(x)|$为$f(x)$在x 处的高度，则 x^* 是山谷的最低点。

若序列$\{x_k\}$满足 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$，则称 $\{x_k\}$是$f(x)$ 的一个下山序列。求下山序列的算法称为下山法。

在Newton迭代法中引进下山因子$t_k\in(0,1]$

将迭代格式修改为$x_{k+1}=x_k-t_k\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,\ldots$

适当选取下山因子，直至“下山成功”。

2. 重根情形的Newton迭代加速算法

Remark：标准牛顿迭代法仅适用于单根的情形。

设 x^* 为$f(x)=0$ 的重根 $(m\geq 2)$, $f(x)$在 x^* 的某邻域内有 m 阶连续导数，这时 $f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$

$$f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

将 $f(x)$ 在 x^* 处展开，有：

$$f(x)=f(x^*)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x-x^*)^{(m-1)}+\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-x^*)^m$$

$$f'(x)=f'(x^*)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-2)!}(x-x^*)^{m-2}+\frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1}$$

重根情形的Newton迭代加速算法（续）

$$f''(x) = f''(x^*) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-3)!}(x-x^*)^3 + \frac{f^{(m)}(\xi_3)}{(m-2)!}(x-x^*)^{m-2}$$

其中 ξ_1， ξ_2， ξ_3 介于x与 x^*之间.

由Newton迭代函数$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$得\varphi(x^*) = \lim_{x\to x^*} \varphi(x) = \lim_{x\to x^*} \left[x - \frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-x^*)^m \Big/ \frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1} \right]$$

$$= \lim_{x\to x^*} \left[x - \frac{(x-x^*) f^{(m)}(\xi_1)}{m f^{(m)}(\xi_2)} \right] = x^*$$

重根情形的Newton迭代加速算法（续）

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$=\lim_{x\to x^*}\frac{(m-1)f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{m[f^{(m)}(\xi_2)]^2}\quad=1-\frac{1}{m}$$

由于$0<\varphi'(x^*)<1$，故对于m重根（$m\geq 2$），Newton迭代法仍收敛，但只有线性收敛速度。

若取$\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$从以上分析可知，$\varphi'(x^*)=0$，由此得到平方收敛的方法：

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

该方法称为改进的Newton法。但实际上该式使用比较困难，因为事先很难知道根x^*的重数m。

重根情形的Newton迭代加速算法（续）

一种修改法是令$\mu(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,则若$x^*$是$f(x)$的$m$重零点，

则x^*是$\mu(x)$的单重零点，取迭代函数

$$\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\Big/\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}\right\}$$

即 $$\varphi(x)=x-\frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}$$

则 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$ 是二阶收敛的。缺点

是需要计算$f''(x_k)$,，计算量稍大。

3. 割线法

为了得到超线性收敛且避免导数计算的迭代格式，常用函数增量与自变量增量之比来近似替代Newton迭代格式中的导数项。

取 $$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

用上述增量比代替Newton迭代格式中的一阶导数，则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}),\ \ k = 0,1,\ldots$$

割线法（续）

割线法的几何意义在于用弦线代替曲线，类似于标准情形的Newton迭代法。其收敛阶为1.618，每步需要两个初始值。