第六章：连续时间系统的系统函数

汪彦婷
西北工业大学 软件学院
Email：yantingwang@nwpu.edu.cn

本章内容

- ◈6.1 引言
- ◈6.2 系统函数的极零图
- ◈6.3 系统函数的频域特性与波特图
- ◈6.4 系统函数的极零点与系统频域特性的关系
- ◈6.5 系统的稳定性

6.1 引言

■ 系统函数

- 定义：系统零状态响应$R(s)$与激励$E(s)$的比值，即：

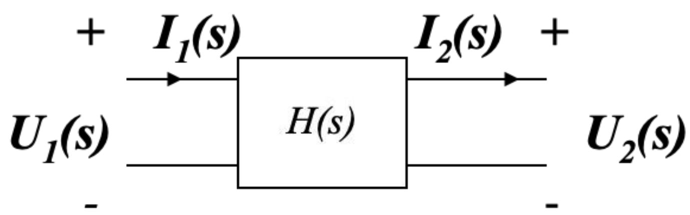
$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

- 表示系统激励与响应之间的因果关系，是系统特性在复频域中的表现形式。

6.1 引言

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 系统函数分类



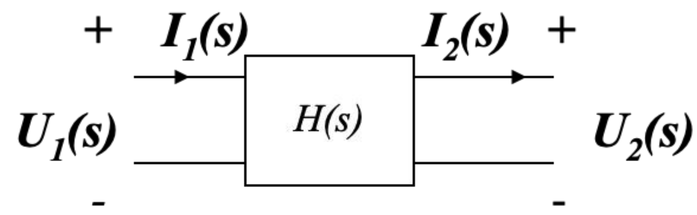
➢ 从输入端口看:

	激励	响应	系统函数
策动点函数 (输入函数)	电压$U_1(s)$	电流$I_1(s)$	输入导纳: $Y_{11}(s)=\dfrac{I_1(s)}{U_1(s)}$
	电流$I_1(s)$	电压$U_1(s)$	输入阻抗: $Y_{11}(s)=\dfrac{U_1(s)}{I_1(s)}$

6.1 引言

■ 系统函数分类

➢ 从输出端口看：



	激励	响应	系统函数
转移函数(传输函数)	电流$I_1(s)$	电压$U_2(s)$	转移阻抗函数：$Z_{21}(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_1(s)}$
	电压$U_1(s)$	电流$I_2(s)$	转移导纳函数：$Y_{11}(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}$
	电流$I_1(s)$	电流$I_2(s)$	电流传输函数：$T_{i21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$
	电压$U_1(s)$	电压$U_2(s)$	电压传输函数：$T_{u21}(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$

6.1 引言

■ 系统函数的作用

- ➢ 系统响应求解和成分分析；
  - ✓ 回忆：零状态响应、零输入响应、自然响应、受迫响应的关系；
  - ✓ 系统的零状态响应$R(s) = E(s)H(s)$中极点是由$H(s)$带来的，对应系统的自然响应，由$E(s)$带来的，对应系统的受迫响应；
  - ✓ 系统的零输入响应的极点只能由$H(s)$带来，属于自然响应。
- ➢ 系统性能分析；
  - ✓ 极点决定系统时域和频域特性；
  - ✓ 极点决定系统稳定性；

思：如何获得$H(s)$？

6.1 引言

■ 从数学角度

法1：微分方程两边同求LT

➢ 线性系统可以用线性常系数微分方程表示，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}(t) \xrightarrow{\text{LT}} \sum_{i=0}^{n} a_i s^i R(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i E(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

与Ch.2中转移算子相似

➢ $H(s)$和$H(p)$形式相同，$H(s) = H(p)|_{p=s}$，但含义不同；

- ✓ 时域：$r(t) = H(p)e(t)$
- ✓ 复频域：$R(s) = E(s)H(s)$

法2：$H(p)$简单变量替换；

6.1 引言

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 从系统的冲激响应

➢ 近代时域法中，

$$r(t) = e(t) * h(t) \xrightarrow{LT} R(s) = E(s)H(s) \quad \therefore H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

注：它是$h(t)$的LT，同时形式又和系统函数定义一致。因此可得，$h(t) \leftrightarrow H(s)$是拉斯变换对！

法3:对冲激响应$h(t)$求LT；

思考：$h(t)$和$H(s)$哪个更容易获得?

6.1 引言

■ 从信号分解角度

- 和FT中的$H(j\omega)$一样，$H(s)$也可看作反应系统对复频域中某信号e^{st}的幅度和相位影响的函数。
- 对于电感而言，对激励电流信号e^{st}，其响应电压为：

$$u_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) = L\frac{d}{dt}(e^{st}) = sLe^{st} \qquad \therefore \frac{u_L(t)}{i_L(t)} = sL$$

说明：电压信号依然有形式e^{st}，只是幅度和相位发生了变化，即电感的运算阻抗sL。

- 电容类似，其运算阻抗为$\frac{1}{sC}$。

法4:对电路各个元件进行LT处理，通过KCL或者KVL方程，得到电系统的$H(s)$。

6.1 引言

- $H(s)$与$H(p)$、$h(t)$、$H(j\omega)$的关系
  - $H(s)$和$H(p)$形式相同，$H(s)=H(p)|_{p=s}$，但含义不同；
    - 时域：$r(t)=H(p)e(t)$
    - 复频域：$R(s)=E(s)H(s)$
  - 拉斯变换对：$h(t)\leftrightarrow H(s)$；
  - $H(s)$当$s=j\omega$时，得系统特性在频域中的表达形式$H(j\omega)$；

$H(p)$、$H(j\omega)$、$h(t)$、$H(s)$知一即可；
工程中，多从$H(s)$角度来进行系统的综合和分析；

6.1 引言

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

- 系统函数的表示法
  - 数学表达式法
    - ✓ 对系统微分方程两边同求LT，整理得：

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

简单，但是无法直接看出系统的特性

  - 图示法
    - ✓ 极零图；
    - ✓ 频率特性曲线与波特图；
    - ✓ 复轨迹（极坐标图）（自学）；

本章内容

■ 极零图

➢ 定义：对于

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

其中，定义$D(s)=0$的根p_1, p_2，$\cdots p_n$为极点，$N(s)=0$的根z_1, z_2，$\cdots z_m$为零点，把极点和零点标绘在s平面中，即是极点零点分布图，简称极零图。

例： $H(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)^2}$

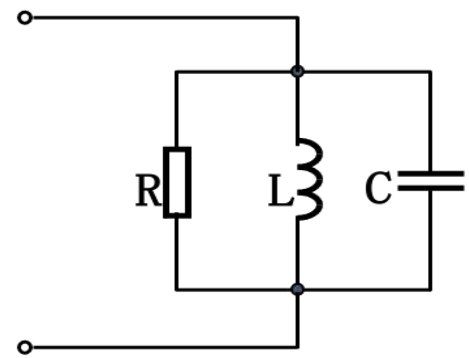
➢ 有了极零图后，系统函数$H(s)$基本就可以确定了。因此，可认为极零图是$H(s)$的一种图像化表示方法。

6.2 系统函数的极零图

例：并联RLC电路的系统（阻抗）函数为

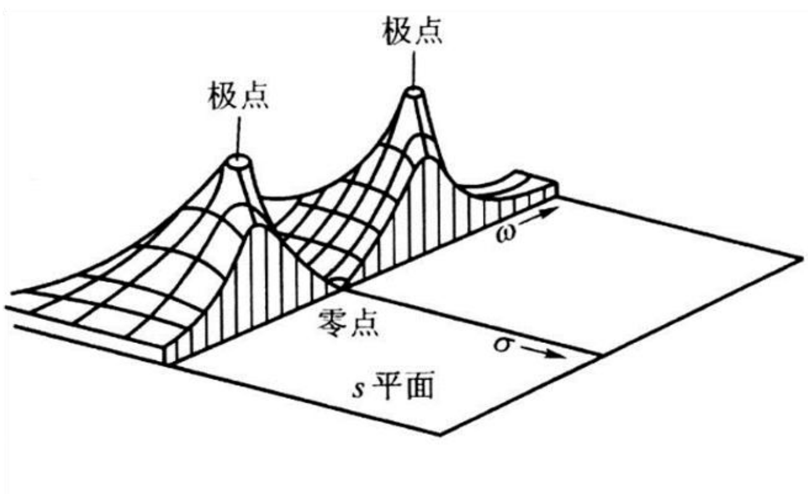
$$H(s)=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{Ls}+Cs}=\frac{s}{C(s-p_1)(s-p_2)},$$ 其中

$$p_{1,2}=-a\pm j\sqrt{\omega_0^2-a^2}。$$

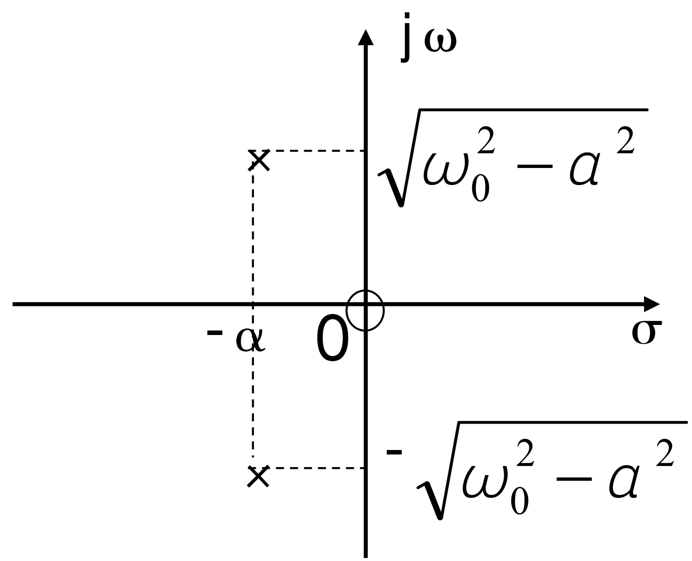


电感：Ls；
电容：1/Cs

解：



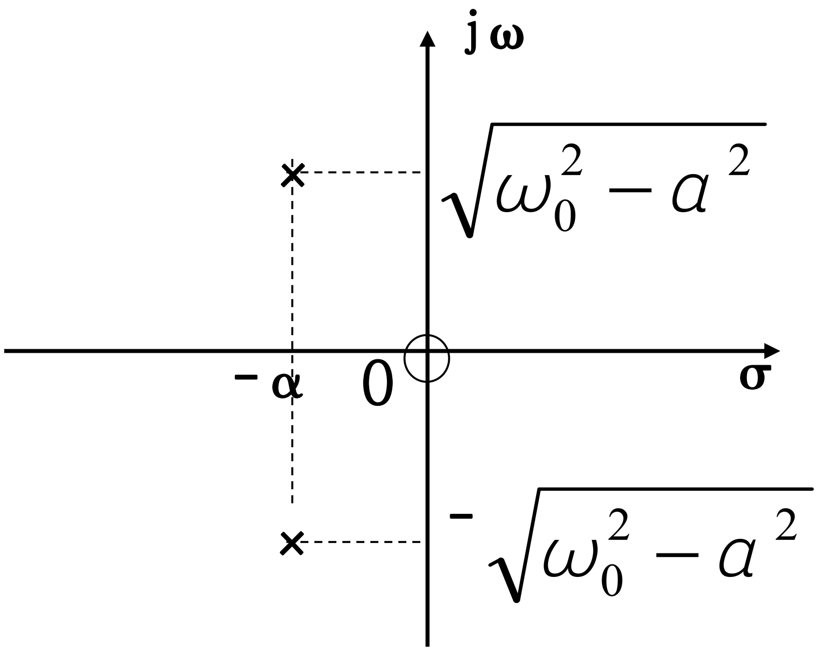
$|H(s)|$随s变化的三维图形



极零图

■ 极零图特点

例： $H(s)=\dfrac{s}{C(s-p_1)(s-p_2)}$， $p_{1,2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$是一对共轭复数对。



极零图

- 极零点分布的**对称性**：一般实际系统的$H(s)$是一个实系数的有理分式，其极零点要么是实数，要么是共轭复数。所以，**极零点关于实轴对称。**
- 如果将无穷远处的极零点考虑在内，则**极点和零点个数相等**。

■ 系统函数极零点与系统自然响应信号模式的关系

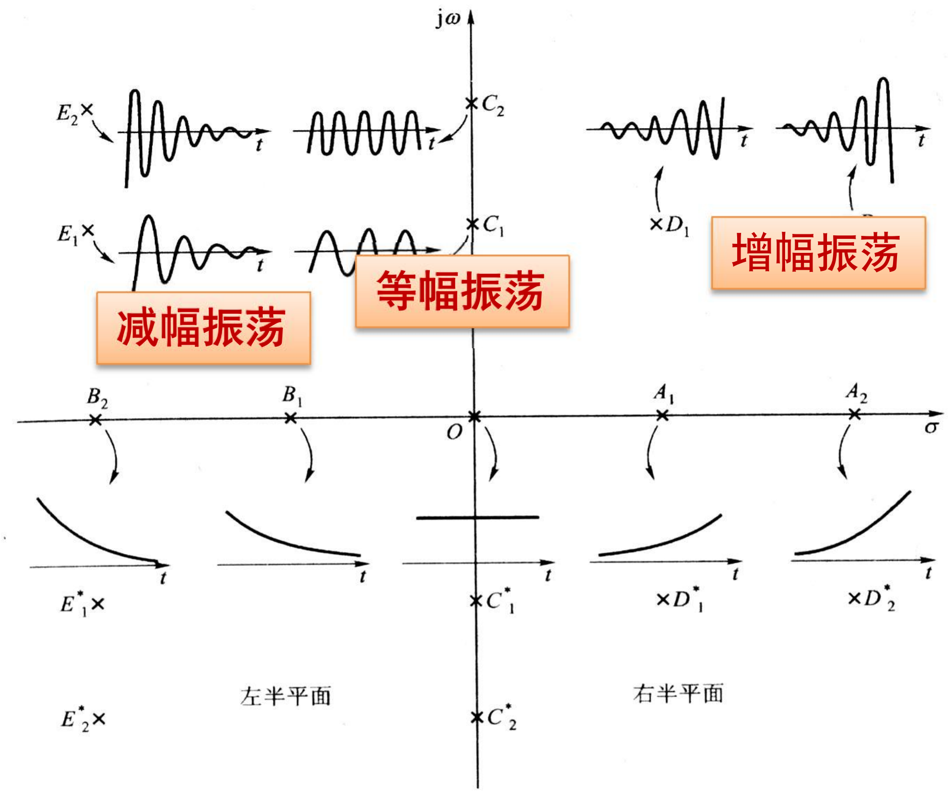
- 系统极点是分母多项式的根，也是系统的特征根，决定系统自然响应或者$r_{zi}(t)$可能含有的信号模式。
- 若$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$，则$r_{zi}(t)$形式解为：

$$r_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{p_i t}$$

振幅

$p=\sigma+j\omega$

振荡频率



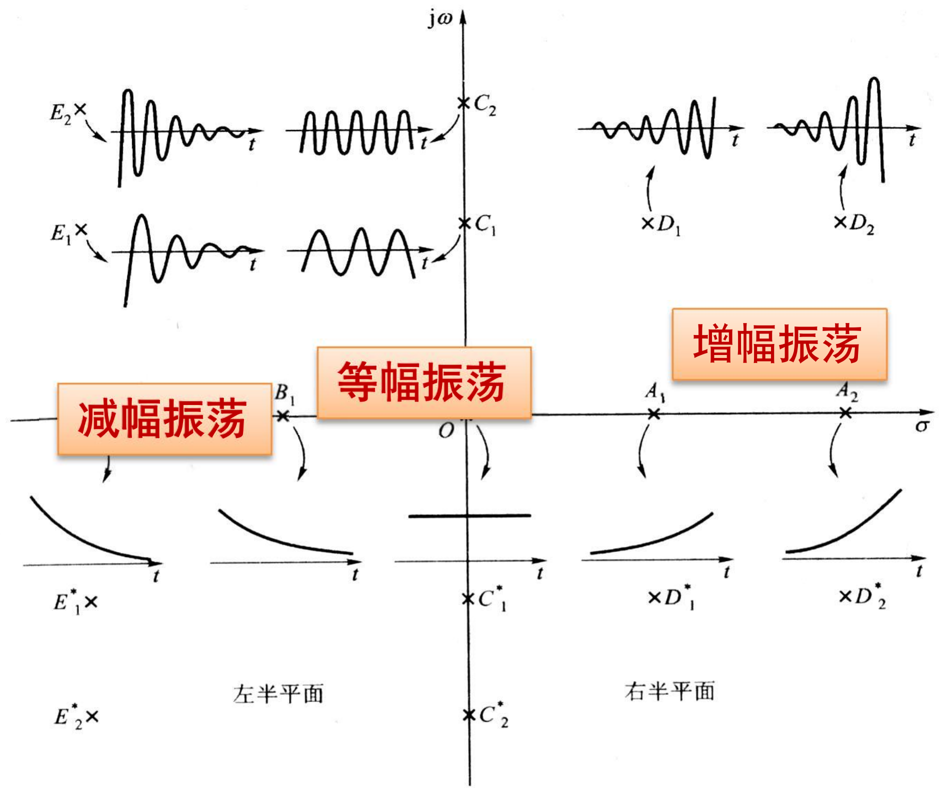
✓ 受迫响应或$r_{zs}(t)$除系统函数的极点带来的部分，还有信号极点带来的部分。

补：极零点与系统时域特性关系

- 系统函数极零点决定系统的**时域特性**

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{H_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$$

$$\Rightarrow h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}$$



- 系统函数极零点决定系统的**频域特性（6.4节）**
- 极零点分布与**系统稳定性**有很大关系（6.5节）

本章内容

- ◈6.1 引言
- ◈6.2 系统函数的极零图
- ◈6.3 系统函数的频域特性与波特图
- ◈6.4 系统函数的极零点与系统频域特性的关系
- ◈6.5 系统的稳定性

6.3 系统函数的频域特性与波特图

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 频率特性曲线

- 如Ch.4所述，系统频域特性可以用反映幅度特性随频率变化规律的幅频特性曲线和反映相位特性随频率变化规律的相频特性曲线描述。
- 对于$H(s)$，没有必要研究其随着任意复频率变化的规律，只需研究$s = j\omega$时，沿着s平面虚轴变化的规律；

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

$$= U(j\omega) + jV(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性曲线：　$|H(j\omega)| \sim \omega$是ω的偶函数

相频特性曲线：　$\varphi(\omega) \sim \omega$是$\omega$的奇函数

仅需画出 $\omega \geq 0$ 即可

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

频率特性曲线

- 对于因果系统，$H(j\omega)$的实部和虚部有特定关系；

证明：对于因果系统，有 $h(t)=h(t)\varepsilon(t)$

$$\therefore H(j\omega)=\frac{1}{2\pi}H(j\omega)*[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]=\frac{1}{2\pi}H(j\omega)*\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2\pi}H(j\omega)*\frac{1}{j\omega}$$

$$=\frac{1}{2}H(j\omega)+\frac{1}{2\pi j}H(j\omega)*\frac{1}{\omega}$$

$$\therefore H(j\omega)=\frac{1}{j\pi}H(j\omega)*\frac{1}{\omega}$$

$$\therefore R(j\omega)+jX(j\omega)=\frac{1}{j\pi}[R(j\omega)+jX(j\omega)]*\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\pi}X(j\omega)*\frac{1}{\omega}-j\frac{1}{\pi}R(j\omega)*\frac{1}{\omega}$$

对比两个复数，可得

$$\therefore R(j\omega)=\frac{1}{\pi}X(j\omega)*\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(j\gamma)}{\omega-\gamma}d\gamma$$

$$X(j\omega)=-\frac{1}{\pi}R(j\omega)*\frac{1}{\omega}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(j\gamma)}{\omega-\gamma}d\gamma$$

物理可实现系统的系统函数需要满足这两个公式！

即 $R(j\omega)$与$X(j\omega)$可相互推导。

波特图（自学）

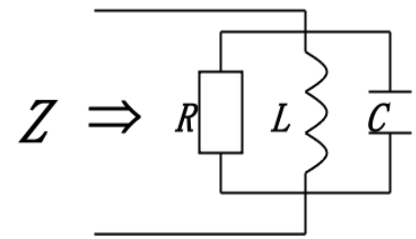
- 频率特性曲线是系统特性最常见的描述方式，但是在一些使用中会有不便：
  - ✓ 不能解决信号动态范围与精度之间的矛盾；
  - ✓ 不能解决频率范围与精度之间的矛盾；

- 波特图采用对数坐标，解决了上面的问题。

6.3 系统函数的频域特性与波特图

■ 频率特性曲线

例：RLC并联网络，输入阻抗$Z=\dfrac{U_1}{I_1}=|Z|e^{j\varphi}$

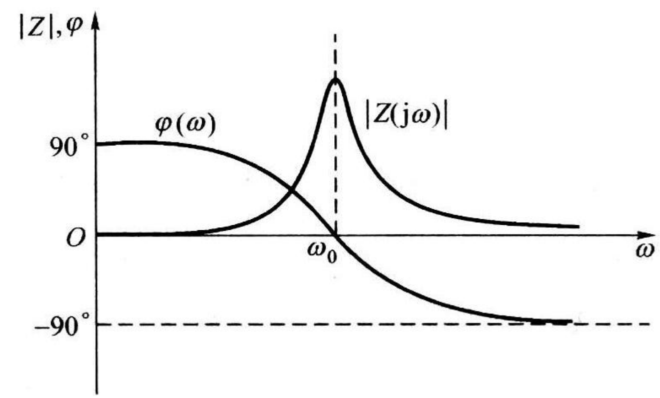


解：

$$Z=\frac{1}{\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L}}=\frac{j\omega LR}{R-RLC\omega^2+j\omega L}$$

$$=\frac{j\omega LR}{R(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2})+j\omega L}=\frac{R}{1-j\dfrac{R}{\omega L}(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2})},\qquad \text{其中}\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$|Z|=\frac{\omega LR}{\sqrt{R^2(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2})^2+\omega^2L^2}}\le R,\qquad \varphi=90°-arctg\frac{\omega L}{R(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2})}$$



频率特性曲线

本章内容

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

- 6.1 引言
- 6.2 系统函数的极零图
- 6.3 系统函数的频域特性与波特图
- 6.4 系统函数的极零点与系统频率特性的关系
- 6.5 系统的稳定性

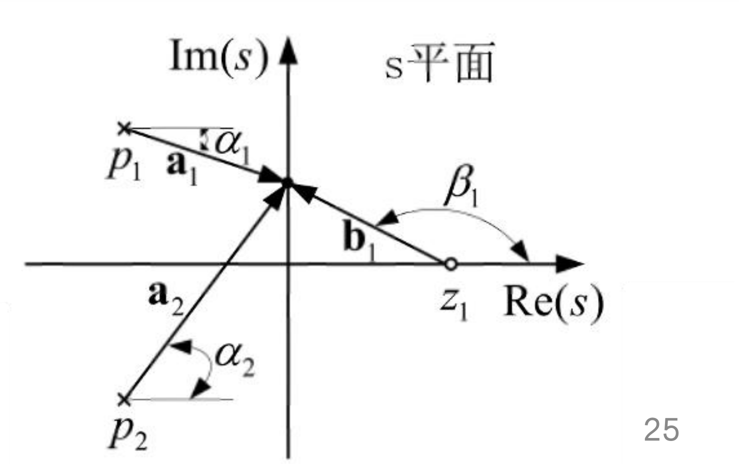
■ 极零点分布决定系统的频域特性

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

令 $s=j\omega$，有 $H(j\omega)=H_0\dfrac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，其中 $j\omega, z_i, p_k$ 为复数，可用矢量表示：

复因式（差矢量）
$$\begin{cases}(j\omega-z_i)=\text{矢量}j\omega\text{与}z_i\text{之差}=z_i\text{点至}j\omega\text{的矢量}\overset{\text{令}}{=}B_ie^{j\beta_i} & (A_k,B_i-\text{模})\\(j\omega-p_k)=\text{矢量}j\omega\text{与}p_k\text{之差}=p_k\text{点至}j\omega\text{的矢量}\overset{\text{令}}{=}A_ke^{j\alpha_k} & (\alpha_k,\beta_i-\text{辐角})\end{cases}$$

$$\therefore\ H(j\omega)=H_0\frac{B_1B_2\cdots B_m}{A_1A_2\cdots A_n}e^{j[(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)]}$$



幅频特性：$|H(j\omega)|=H_0\dfrac{B_1B_2\cdots B_m}{A_1A_2\cdots A_n}$

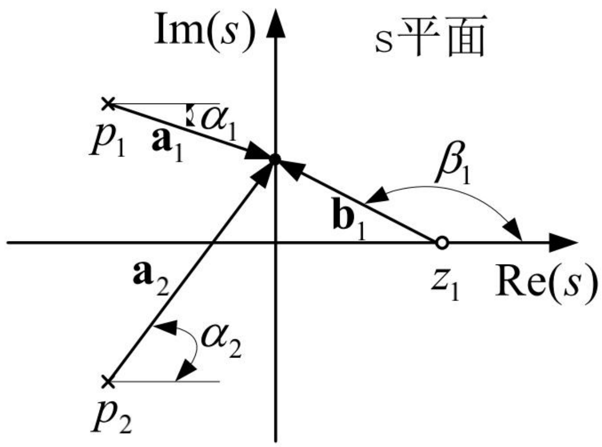
相频特性：$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$

■ 极零点分布决定系统的频域特性

幅频特性：$|H(j\omega)| = H_0 \dfrac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$　相频特性：$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

➢ 如果在极零图上确定了A_i B_i α_i β_i，则可以得到频率特性

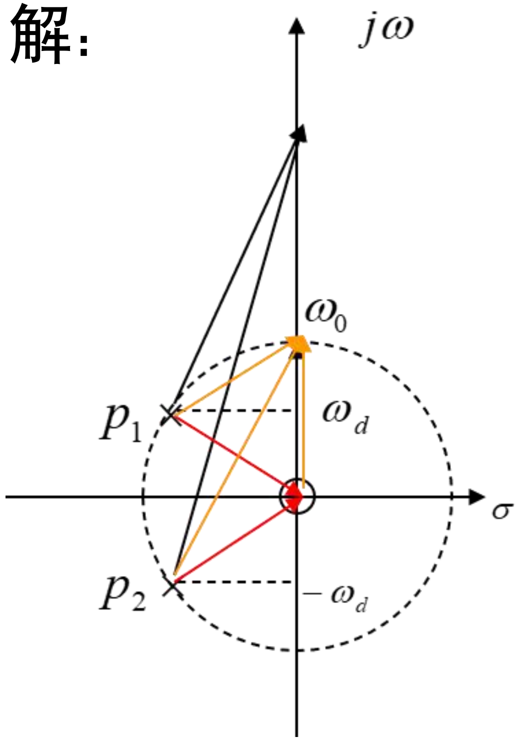
- ✓ 计算机没有普及时，仅需要一张方格纸、一把尺子、一个量角器、一个计算器就可以计算画出系统的频率特性。
- ✓ 现在该方法，多用于系统特性的大致判断。

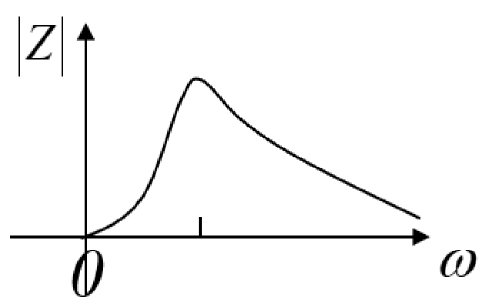


6.4 极零点与系统频率特性关系

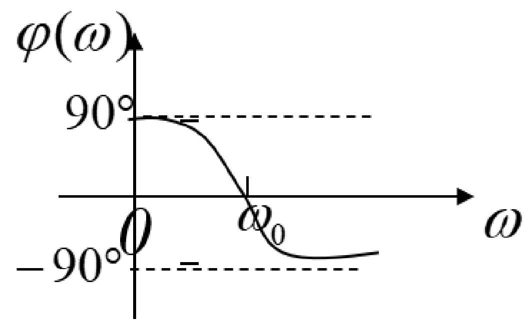
例：并联RLC电路，输入阻抗$H(s)=\dfrac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$，大致画出系统的频率特性。

解：





幅频特性



相频特性

思考：大致程度?

6.4 极零点与系统频率特性关系

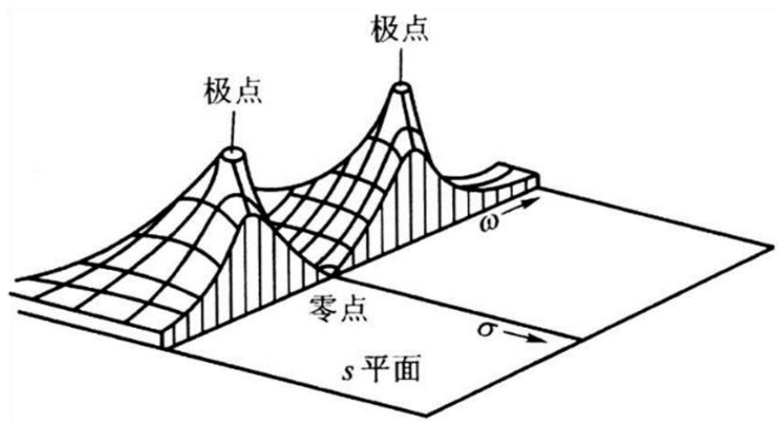
- 根据极零图，可以**粗略确定**系统频率特性

幅频特性：$|H(j\omega)| = H_0 \dfrac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$ 相频特性：$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

- 当$j\omega$靠近极点时，A变小，幅频特性产生一个波峰；
- 当$j\omega$靠近零点时，B变小，幅频特性产生一个波谷；
- 极零点越靠近虚轴，相应的峰或谷越尖锐。当极点（或零点）正好落在虚轴上时，幅频特性出现无穷大（或零）。

回忆：并联RLC电路

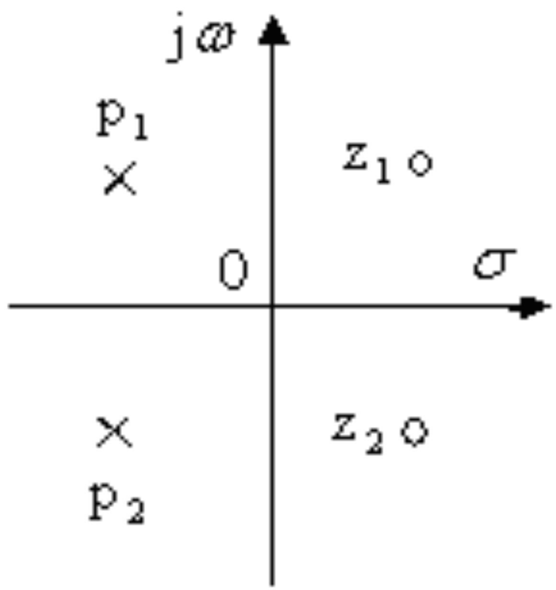
$$H(s) = \frac{s}{C(s-p_1)(s-p_2)}$$



■ 两种重要的系统函数

幅频特性：$|H(j\omega)| = H_0 \dfrac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$ 相频特性：$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

➢ 全通系统：系统的零点和极点关于虚轴对称分布的系统。



✓ $|H(j\omega)| = H_0$，是与频率无关的一个常数，意味着系统对所有的频率分量都有相同的增益，故称全通系统。

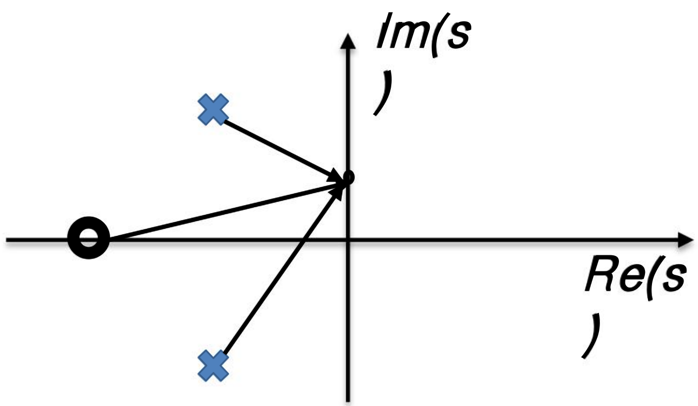
✓ 作用：该类网络对各种频率的信号可以一视同仁的传输。故常来做相位校正而不产生幅度失真。

注：稳定系统的极点只能出现在s平面的左半平面。所以，稳定的全通系统零点只能在右半平面。

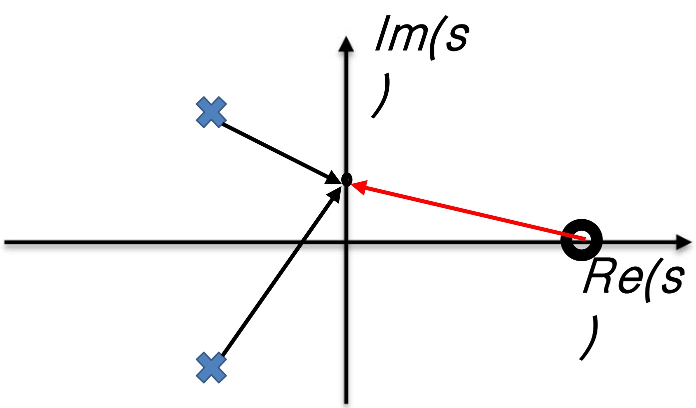
- 两种重要的系统函数

幅频特性：$|H(j\omega)| = H_0 \dfrac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$ 相频特性：$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

➢ 最小相位系统：系统的极零点全部处于虚轴以左的系统。



系统1的极零图



系统2的极零图

✓ 最小的含义：相同$|H(j\omega)|$的系统中，对信号的相位移动最小的系统。如，系统1和系统2的幅频特性相同，但是系统1的$\varphi(\omega)$小。

✓ 思考：该类系统用途?

本章内容

稳定系统定义

- 如果系统对于有限（有界）的激励（即存在常数M_e，使得$|e(t)| < M_e$在任何条件下均成立），有有限的响应（即存在常数M_r，使得$|r(t)| < M_r$在任何条件下均成立），则该系统为稳定系统。简言之，在有限激励下有有限响应的系统称作稳定系统。
- 有限输入有限输出（boundary-input，boundary-output，BIBO）特性。

系统稳定的条件： From 零输入响应

- 由6.3知道，系统的零输入响应的模式取决于系统函数$H(s)$的极点。对于极点$p_i = \sigma_i + j\omega_i$，零输入响应中会有$C_i e^{p_i t}$（一阶极点情况）或者$C_i t^n e^{p_i t}$（高阶极点情况）；
- 一阶极点：响应包含$C_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$，要求 $\sigma_i \le 0$；
- 高阶极点：假设r阶极点，响应包含

$$(A_r t^{r-1} + A_{r-1} t^{r-2} + \cdots A_2 t + A_1) e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$$

要求$\sigma_i < 0$；

✓ 从零输入响应看，系统稳定要求$H(s)$的极点不能在右半平面，如果在虚轴上有极点，该极点只能是一阶极点。

6.5 系统的稳定性

■ 系统稳定的条件： From 零状态响应

➢ 充要条件：冲激响应函数绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$。对于因果系统，则$\int_{0}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$。（证）

➢ 由于$h(t)\leftrightarrow H(s)$，$H(s)$的极点决定系统稳定性。

✓ 极点全在s平面左半平面 → 满足绝对可积 → 稳定；

✓ 有极点在s平面右半平面 → 不满足绝对可积 → 不稳定；

✓ 虚轴上有高阶极点→ 不满足绝对可积 → 不稳定；

虚轴上有一阶极点 →？

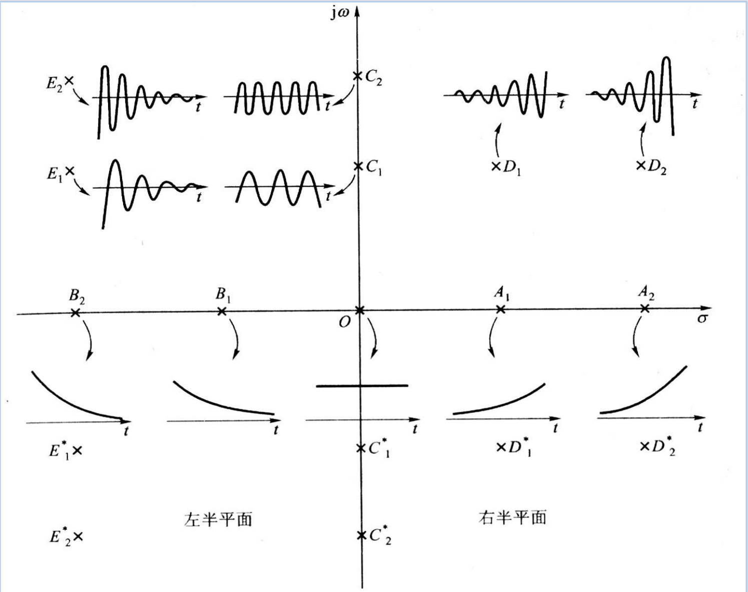


图 5－2 与复平面上位置不同的复频率相对应的时间函数模式图，带有 * 号的点如 C_1^*，D_1^* 等与其共轭点 C_1，D_1 等分别合起来代表一时间模式

6.5 系统的稳定性

- 系统稳定的条件： From 零状态响应
  - 如果系统在虚轴上有一阶极点（纯LC网络），其冲激响应存在无阻尼正弦函数，不满足稳定性判定条件。这样的系统稳定吗?
  - 如果激励信号恰巧也在虚轴上相同位置有一阶极点，此时，激励有限，但是，响应中出现重极点，响应信号有随时间增大的振荡，系统不稳定。

6.5 系统的稳定性

■ 系统稳定的条件： From 零状态响应

➢ 充要条件：冲激响应函数绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$。对于因果系统，则$\int_{0}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$。（证）

➢ 由于$h(t)\leftrightarrow H(s)$，$H(s)$的极点决定系统稳定性。

✓ 极点全在s平面左半平面 → 满足绝对可积 → 稳定；

✓ 有极点在s平面右半平面 → 不满足绝对可积 → 不稳定；

✓ 虚轴上有高阶极点→ 不满足绝对可积 → 不稳定；

✓ 虚轴上有一阶极点 → 临界稳定；

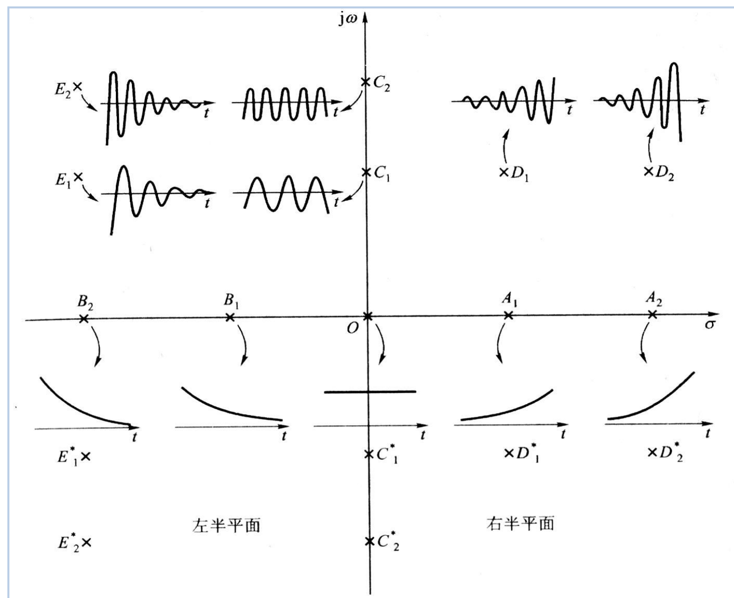


图 5－2 与复平面上位置不同的复频率相对应的时间函数模式图，带有 * 号的点如 C_1^*，D_1^* 等与其共轭点 C_1，D_1 等分别合起来代表一时间模式

6.5 系统的稳定性

■ 系统是否稳定取决于系统函数的极点分布

- 极点全在s平面的左半平面 → 稳定；
- 虚轴上有一阶极点 → 临界稳定；
- 有极点在s平面右半平面或虚轴上有高阶极点 → 不稳定；

- 临界稳定系统在实际工作中不能确保稳定，系统参数略有变化就可能导致不稳定，而且不能保证对任何激励系统都稳定。所以，也有文献直接将临界稳定看作不稳定系统。

■ 系统稳定性判据

- 根据$H(s)$的极点位置来判断；

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

- 对于高阶系统，极点不好计算时?

✓ 分母多项式$D(s)$没有实部大于零的根的必要条件是所有系数a_i不为零并且同号；如果缺项或不同号，那么可直接判定系统不稳定；如果不缺项且同号，则需进一步判断；（如果有零项，最多临界稳定）

✓ 罗斯-霍维茨法则；

■ 系统稳定性判据

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

- ➢ 罗斯-霍维茨法则
  - ✓ 根据a_i判断$D(s)$是否有实部大于零的根以及这类根的个数；
  - ✓ 核心思想：R-H数列不变号 → 稳定；
  - ✓ 步骤：

step1：

$$\begin{tikzcd}
a_n \arrow[d] & a_{n-2} \arrow[d] & a_{n-4} \arrow[d] & \cdots \\
a_{n-1} \arrow[ur] & a_{n-3} \arrow[ur] & a_{n-5} &
\end{tikzcd}$$

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

系统稳定性判据

step2：计算下面各列 ⇒R–H 阵列（n 阶系统要排 n+1 行）

An	Bn	Cn	Dn	…
An-1	Bn-1	Cn-1	Dn-1	…
An-2	Bn-2	Cn-2		
An-3				
:	:			
A2	B2	0		
A1	0	0		
A0	0	0		

Step 1中数列

R-H数列

$$A_{i-1} = \frac{A_i B_{i+1} - A_{i+1} B_i}{A_i}$$

$$B_{i-1} = \frac{A_i C_{i+1} - A_{i+1} C_i}{A_i}$$

…

step 3：R-H数列变号次数等于实部大于零的根的个数。

■ 系统稳定性判据

- 利用L-H准则，可以判定系统稳定性

例： $D(s) = 2s^3 + s^2 + s + 6$

- 利用L-H准则，还有助于稳定系统设计

例：$D(s) = s^3 + 5s^2 + 4s + K$，求系统稳定的K值范围

■ 系统稳定性判据

例： $D(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

Tips：如果计算中出现$A_i = 0$，下边各行就无法计算下去。解决方案：

✓ 法1:将原来的$D(s)$乘以$s + 1$，再重新计算；

✓ 法2:将0用无穷小量ε代替，继续计算；

6.5 系统的稳定性

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

■ 系统稳定性判据

例：$D(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 2$

Tips：如果计算中出现全零行，说明系统在虚轴上有极点，系统最多临界稳定。是否临界稳定，需作进一步判断：

- ✓ Step1：用全零行上一行的辅助多项式的导数的系数替代全零行继续计算，判定是否有实部大于零的根；
- ✓ Step2：求解辅助多项式的根，从而判断虚轴上极点的阶数，从而判定是否临界稳定。

■ 课后练习

6.7-6.9、6.14、6.15