第一章 绪论

1. 有效数字和有效数

①有效数末尾数字所在单位的一半是绝对误差限

②直尺等测量工具读数的最后一位（估读位）不是有效数字，前一位才是有效数字。因此仪器读数误差限为$\frac{\text{最小刻度}}{2}$

③对真值进行四舍五入所得到的近似数是有效数

④末尾的 0 不能随意增删

2. 误差的传播

函数值的绝对误差近似等于自变量绝对误差的线性组合，组合系数为相应的偏导数值

第二章 非线性方程数值解法

1. 二分法

区间长度：$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}(b-a)$

误差估计：$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^k}(b-a)$

对分次数 k 预估：$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{1}{2^k}(b-a) \le \varepsilon$

$$k \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

注意：k 为当前次数，k-1 为迭代次数，k 为对分次数

2. 简单迭代法

①全局收敛的判定以及性质

判定：压缩变换

性质：（1）方程 $x = \varphi(x)$ 在该区间上有唯一实根

（2）对于任意的 $x_0 \in [a,b]$，迭代公式均收敛

备注备注备注：初值可以取区间端点!!!

（3）后验误差估计：$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$

先验误差估计：$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

（4）$\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \varphi'(x^*)$

②局部收敛性：$\varphi(x)$ 满足连续且压缩

迭代法的收敛阶

记：$e_k = x_k - x^*$

若存在常数 $c > 0$ 以及 $p \ge 1$，使得：

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

则称 p 阶收敛，且 p=1 时为线性收敛，且此时必然有 $0 < c < 1$

$p > 1$ 的时候为超线性收敛，p 越大收敛速度越快，若两个迭代方法相同的时候，c 越小收敛越快

对于简单迭代法来说：当 $\varphi'(x) \ne 0$ 的时候简单迭代法**线性**收敛，若 $\varphi'(x) = 0$ 时简单迭代法为**超线性**收敛

---

3. Aitken 加速法与 Steffensen 迭代法（收敛性判定等同于简迭）

说明：Aitken 加速法是一种广义上的加速方法，而 Steffensen 方法是将简单迭代法与 Aitken 加速法融合之后得出来的方法。

公式推导：

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=c\text{并且也有}\frac{x_{k+2}-x^*}{x_{k+1}-x^*}=c$$

联立之后整理，将 x^* 单独整理到等号左边即可推导出 Aitken 加速法，若将简单迭代法引入，便可得到 Steffensen 迭代法

4. Newton 迭代法（特点：较为依赖 x_0 点的选取）

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

收敛性判定：

全局收敛性：

①对于任意的 $x\in[a,b]$，均有 $f'(x)\neq 0$以及$f''(x)\neq 0$

（确保单调性和凹凸性不变）

②对于初值的要求：$f(x_0)f''(x_0)>0$

5. 牛顿下山算法

6. 计算重根的牛顿迭代法

①

②

两种

第三章 线性方程组的解法

1. 矩阵和向量的范数要熟悉计算方法

2. Jacobi 为分项的简单迭代，每一个方程分别变形

3. Gauss-Seidel 方法为第 K+1 次数值代替 K 次数值的迭代方法

4. 并且 GS 方法包括两种迭代格式：与简单迭代法对应的 Gauss-Seidel 方法、与 Jacobi 对应的 GS 方法

5. $\rho(B)$ 谱半径表示矩阵 B 最大的特征值，且必有 $\rho(B) \le \|B\|$

6. SOR 方法的迭代格式要看准确（也是用当前最好近似计算）

下面是两个小总结：

迭代矩阵小汇总

1. Jacobi 迭代矩阵：$B_J = -D^{-1}(L+U)$

2. 与简单迭代法对应的 Gauss-Seidel 方法迭代矩阵：$B_{GS} = (I - B_1)^{-1} B_2$

3. 与 Jacobi 对应的 Gauss-Seidel 方法迭代矩阵：$B_{JGS} = -(D+L)^{-1}U$

收敛性判据小总结：

注意：这些收敛性判据都是判定的对于任意初始向量均收敛的条件，因此不满足以下条件也可能对某个向量收敛

（每个迭代法的判据顺序按照解题顺序）

1. 简单迭代法

①（充分不必要）$\|B\| < 1$

②（充要）$\rho(B) < 1$

③（充要）$\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = 0$

2. Jacobi 迭代法

①（充分不必要）原矩阵 A 按行按列严格对角占优，注意这里的对角占优全都是>、<号，不带等

$|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$，$|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$

②（充分不必要）$\|B_J\|<1$

③（充要）$\rho(B_J)<1$

3. 与简单迭代法对应的 Gauss-Seidel 方法

①（充分不必要）$\|B\|=\|B_1+B_2\|<1$

（B 为与简单迭代法对应的迭代矩阵）

②（充分不必要）$\|B_{GS}\|<1$

③（充要）$\rho(B_{GS})<1$

4. 与 Jacobi 对应的 Gauss-Seidel 方法

①（充分不必要）原矩阵 A 严格按行按列对角占优

②（充分不必要）A 为对称正定矩阵

③（充分不必要）$\|B_J\|<1$

④（充分不必要）$\|B_{JGS}\|<1$

⑤（充要）$\rho(B_{JGS})<1$

注意：如果给了一个矩阵，里面带未知量 a，让求解迭代方法收敛时的 a 的范围，一定一定只能用谱半径小于 1 的方法，因为只有这一个是充要条件，其他的调节解出的 a 均为真正 a 范围的子集。

第四章 函数插值

注意 n 阶差商和 n 阶导数的关系 $f[x_0,x_1,x_2\cdots x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\varepsilon)}{n!}$

拉格朗日插值、牛顿插值的余项都是：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

Lagrange 格式：$L_n(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+\cdots+l_n(x)f(x_n)$

Newton 格式：

$$N_n(x)=f\left[x_0\right]+f\left[x_0,x_1\right](x-x_0)+\cdots+f\left[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\right](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Hermite 插值看笔记，先依据节点和节点函数值建立牛顿插值多项式，之后再根据导数值待定系数构建 Hermite 插值

分段插值：

①两点插值（线性插值）

在每两个点构成的小区间上使用拉格朗日插值

误差估计为：$\left|R_n(x)\right|\le\dfrac{h^2}{8}M_2$

$$h=\max_{1\le i\le n}\left|x_i-x_{i-1}\right| \qquad M_2=\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

②三点插值（二次插值）

在三个点构成的小区间$\left[x_{2i},x_{2i+2}\right]$上使用拉格朗日插值

误差估计为：$\left|R_n(x)\right|\le\dfrac{h^3}{12}M_3$

其中 $h=\max\limits_{0<i<\frac{n}{2}-1}\left|x_{2i+2}-x_{2i}\right| \qquad M_3=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f'''(x)\right|$

第五章 曲线拟合的最小二乘法

①把已知的数据代入函数构建矛盾方程组

②始终记住左乘 A^T 即可

第六章 数值微分与数值积分

Part1. 数值微分

一. 插值法

其实公式没必要记（不好记。。。）

用拉格朗日插值近似$f(x)$即可

$$f(x)=\mathrm{L}_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

之后正常求导即可推下面的公式和相应变量的截断误差：

①一阶两点公式

②一阶三点公式

二．Taylor 展开法

（看笔记）

核心思路：若求一阶微分，则用已知函数值在目标导数的自变量处泰勒展开，之后加减消元消掉二阶导项剩下的就都是$O(h^2)$

Part2. 数值积分

一．插值法

还是用拉格朗日插值：$f(x)=\mathrm{L}_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

得： $\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$

其中：$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$

二．Newton-Cotes 求积公式

①中点求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

代数精度：1 次

截断误差：$E_M[f]=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$

②梯形公式：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

代数精度：1 次

截断误差：$E_T\left[f\right] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$

③Simpson 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

代数精度：3 次

截断误差：$E_S\left[f\right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

三．复化求积法

以下的小区间均为：$h = \frac{b-a}{n}$

①复化梯形公式

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]$$ 两侧+2 倍的余点

截断误差：$E_{T_n} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)$

代数精度仍为 1 次

②复化 Simpson 公式

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)\right]$$ 两侧+2 余+4 中点

截断误差：$E_{S_n} = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta)$

代数精度仍为 3 次

四．Romberg 求积法

系数呈现 $2^2-1, 4^2-1, 8^2-1$

$T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=S_n$

$S_{2n}+\frac{1}{15}(\mathrm{S}_{2n}-S_n)=C_n$

$C_{2n}+\frac{1}{63}(\mathrm{C}_{2n}-C_n)=R_n$

R_n 的误差阶是 $O(h^8)$

第七章 常微分方程初值问题的数值解法

本章中 y_n 代表近似值，$\mathrm{y}(\mathrm{x}_n)$ 代表真实值

引理：Lipschitz 条件：

存在正常数 L，使得对任意 (x,y_1) 与 (x,y_2) 均满足不等式：

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$

则初值问题存在唯一的连续可微解 y（x）

本章在研究初值问题时，总是假定满足本条件

一．显式 Euler 公式

$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

误差的阶：1 阶

二．隐式 Euler 公式

$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_{n+1})$

计算格式：$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(s+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) \end{cases}$

误差的阶：1 阶

收敛条件：$hl < 1$

三．梯形公式（也是隐式方法，求解也需迭代）

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

计算格式：$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(s+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)})\right] \end{cases}$

误差的阶：2 阶

收敛条件：$\frac{hl}{2} < 1$

四．欧拉-梯形预估矫正公式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})\right] \end{cases}$$

其实本质上就是梯形公式只做了一次迭代

误差的阶：2 阶

五．单步法的局部误差和阶

左端减去右端

近似值换成真值

泰勒展开

第八章 矩阵特征值和特征向量的计算

一．乘幂法

求按模最大的特征值和对应的特征向量

$V^{(k)}=A^kV^{(0)}$

之后每次求得迭代向量$V^{(k)}$

对应的每次迭代得到的特征值为：$\frac{V_i^{(k+1)}}{V_i^{(k)}}=\lambda_1^{(k+1)}$

i表示 V 向量的第i个分量，求特征值的这个公式只要求每次都是对应分量相除即可

规范化：$\tilde{V}^{(k)}=\frac{V^{(k)}}{\max V^{(k)}}$，用$V^{(k)}$向量整体除以本向量中按模最大的分量（就是除以原本的分量，不取绝对值）即可得到规范化之后的向量

二．原点平移法

构造$B=A-pI$，其中 p 可以任意选，由于 B 和 A 的特征值有等式关系，因此可以直接转为求 B 的按模最大特征值

三．反幂法

求 A 按模最小的特征值，因为有乘幂法做铺垫，只要将 A 取逆，求A^{-1}按模最大的特征值即可

因此有：$AV^{(k+1)}=V^{(k)}$

由于A矩阵恒定不变，因此可对A使用LU分解简化运算

变为：$\begin{cases} UV^{(k+1)}=y \\ Ly=V^{(k)} \end{cases}$

需要记忆的截断误差有：第四章函数插值中的分段插值两个公式

第六章数值积分中的Newton-Cotes公式中的三个公式以及两个复化后的公式

需要记忆的阶数有：第六章Cotes公式里面的代数精度1135

第七章四个公式的截断误差的阶数1122