第三节　泰勒级数

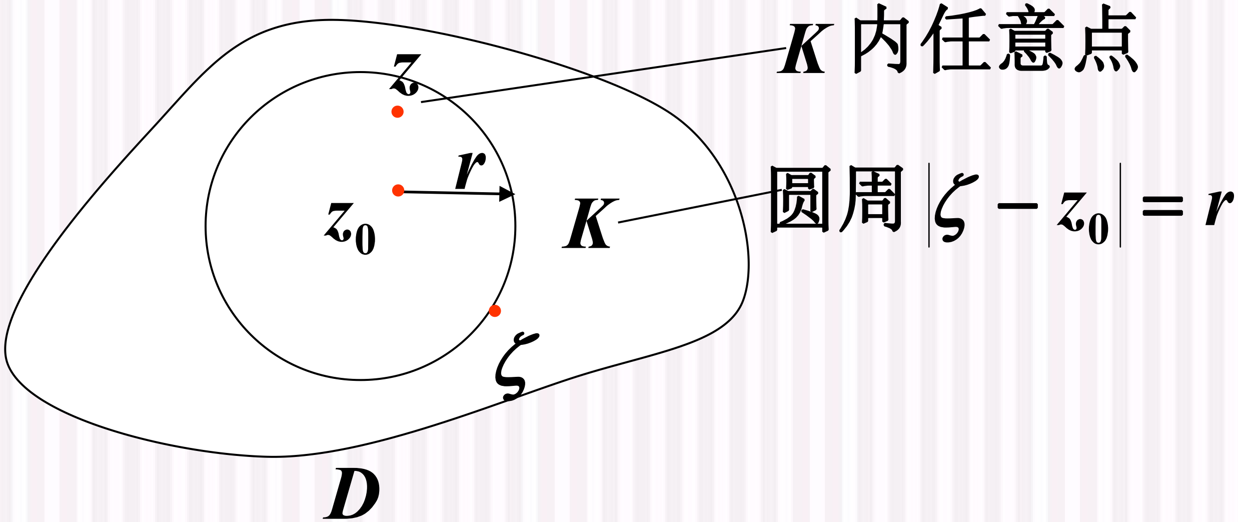
- 一、问题的引入
- 二、泰勒定理
- 三、将函数展开成泰勒级数
- 四、典型例题
- 五、小结与思考

解析函数是否可以展为幂级数？

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析， $K=\{\zeta\in C:|\zeta-z_0|=r\}$ 是以 z_0 为圆心内部含于 D 的圆周.能否在 K 内将函数写成幂级数的形式？

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

如图:



Taylor 级数的唯一性

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数：

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$
$$+ a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

那末 $f(z_0) = a_0,\ f'(z_0) = a_1,\quad \cdots\cdots$

即 $$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \cdots$$

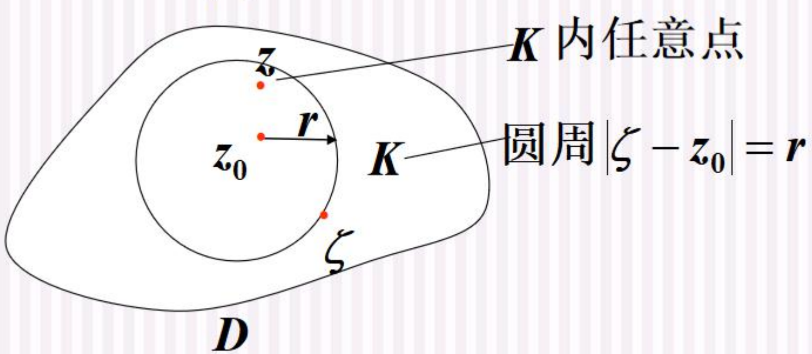
因此, 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数, 因而是唯一的.

由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$ 其中 K 取正方向.

因为积分变量 ζ 取在圆周 K 上，点 z 在 K 的内部，

所以 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$



则 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

于是 $$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta.$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)$$

其中 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta$

若 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$,

可知在K内 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

即 $f(z)$ 在 K 内可以用幂级数来表示，

令 $$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r}=q$$

q 是与积分变量 ζ 无关的量，且 $0\le q<1$,

$f(z)$ 在 $D\,(K\subset D)$ 内解析，则在K上连续，

因此 $f(\zeta)$ 在 K 上也连续，$f(\zeta)$ 在 K 上有界，

即存在一个正常数M， 在 K上$|f(\zeta)| \le M$.

$$|R_N(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| \mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n \right] \mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{r} q^n \cdot 2\pi r = \frac{Mq^N}{1-q}.$$

$$\lim_{N\to\infty} q^N = 0 \longrightarrow \lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0 \text{ 在 } K \text{ 内成立,}$$

从而在K内 $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n}$ 泰勒级数

$f(z)$在z_0的泰勒展开式,

圆周K的半径可以任意增大,只要K在D内成立.

泰勒定理

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 那末

当 $|z - z_0| < d$ 时, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 成立,

泰勒展式 泰勒级数

其中 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0,1,2,\cdots\cdots$

注记:

1.复变函数展开为泰勒级数的条件与实函数展开为泰勒级数的条件有何不同?

2.如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点,则 d 等于 z_0 到最近一个奇点 α 之间的距离,即 $d=|\alpha-z_0|$;

3. 当 $z_0=0$ 时,级数称为麦克劳林级数; Maclaurin

4.任何解析函数在一点的泰勒级数是唯一的.

(为什么?)

Taylor 级数的唯一性

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

那末 $\quad f(z_0)=a_0,\ f'(z_0)=a_1,\quad \cdots\cdots$

即 $\quad a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\cdots$

因此, 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数, 因而是唯一的.

三、将函数展开成泰勒级数

常用方法: 直接法和间接法.

1.直接法:

由泰勒展开定理计算系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),\ n = 0,1,2,\cdots$$

将函数 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数.

例如，求 e^z 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)}=e^z$,

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0}=1,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

故有 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径 $R=\infty$.

仿照上例，可得 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

2. 间接展开法 :

借助于一些已知函数的展开式 , 结合解析函数的性质, 幂级数运算性质 (逐项求导, 积分等)和其它数学技巧 (代换等) , 求函数的泰勒展开式.

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径 , 因而比直接展开更为简洁 , 使用范围也更为广泛 .

例如，

利用间接展开法求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

附: 常见函数的泰勒展开式

$$1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty)$$

$$2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$(|z| < 1)$$

$$4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$7)(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

四、典型例题

例1 把函数$\dfrac{1}{(1+z)^2}$展开成z的幂级数.

解 由于$\dfrac{1}{(1+z)^2}$在$|z|=1$上有一奇点$z=-1$,

且在$|z|<1$内处处解析，可展开成z的幂级数，

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

上式两边逐项求导,

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

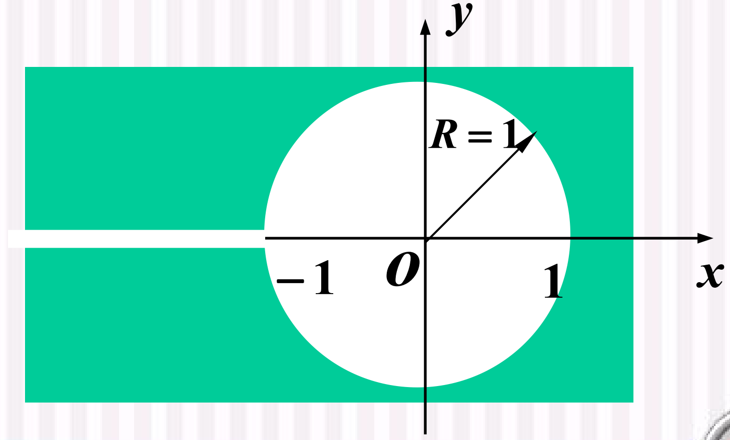
$$=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots,\quad |z|<1.$$

例2 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

分析 $\ln(1+z)$ 在从 -1 向左沿负实轴剪开的平面内是解析的, -1 是它的一个奇点,

所以它在 $|z|=1$ 内可以展开成 z 的幂级数.

如图,



解 $[\ln(1+z)]' = \dfrac{1}{1+z}$

$$= 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad (|z| < 1)$$

设 C 为收敛圆 $|z| < 1$ 内从 0 到 z 的曲线,

将展开式两端沿 C 逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z} \mathrm{d}z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \mathrm{d}z$$

即 $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z| < 1$

例3 把函数$f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$展开成z的幂级数.

解 $$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{3z}{2}+\left(\frac{3z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

例4 将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展为麦克劳林级数 .

解 因为 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在 $|z|<1$ 内进行展开,

令 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)^2 f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)^2 f''(z)+(2+z)f'(z)-f(z)=0$$

$\cdots \quad \cdots$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0, f''(0)=1, f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的麦克劳林级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

例4 求 $\arctan z$ 在 $z=0$ 的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$,

且 $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z^2)^n, \quad |z|<1$

所以 $\arctan z = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z^2)^n \mathrm{d}z$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z|<1.$$

例5 求$\cos^2 z$的幂级数.

解 因为 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

所以 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$

$$= 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

五、小结与思考

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理,熟记五个基本函数的泰勒展开式,掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.

思考题

奇、偶函数的泰勒级数有什么特点?

思考题答案

奇函数的泰勒级数只含 z 的奇次幂项, 偶函数的泰勒级数只含 z 的偶次幂项.