概率论与数理统计

- 教材：高等教育出版社
- 主讲内容：前6章+第7章（2）

概率论与数理统计

- 参考资料：

概率论与数理统计：重点、难点、考点辅导与精析 师义民，西北工业大学出版社，2012

第一节 随机事件的概念

一、概率论的诞生及应用

1. 概率论的诞生

问题：1654年,一个名叫梅累(Mere)的法国骑士就“两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 c 局便算赢家。

已知一赌徒胜 a 局 ($a<c$),另一赌徒胜 b局 ($b<c$)时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题。法国数学家帕斯卡(Pascal), 帕斯卡与费马讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念 —— 数学期望.

目录 上页 下页 返回 结束

2. 概率论的应用

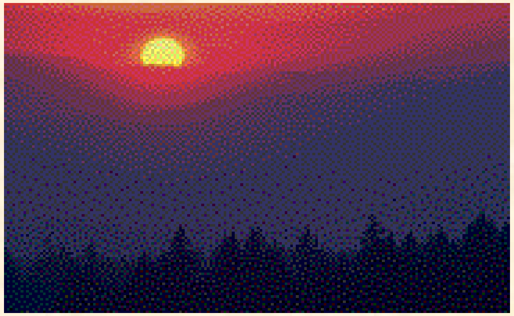
概率论是数学的一个分支,它研究随机现象的数量规律. 概率论的广泛应用几乎遍及所有的科学领域, 例如:天气预报, 地震预报, 产品的抽样调查; 在通讯工程中可用以分析信号的抗干扰性, 分辨率等等.

二、随机现象

自然界所观察到的现象：确定性现象　随机现象

1.确定性现象

在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.



实例

“太阳不会从西边升起”，

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”。

确定性现象的特征 ☛ 条件完全决定结果

2. 随机现象

在基本条件完全相同的条件下，可能发生也可能不发生的现象称为随机现象.

实例1 “在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察正反两面出现的情况”.

结果有可能出现正面也可能出现反面.

实例2 “用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况”.

结果: “**弹落点会各不相同**”.

实例3 “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”.

结果有可能为:

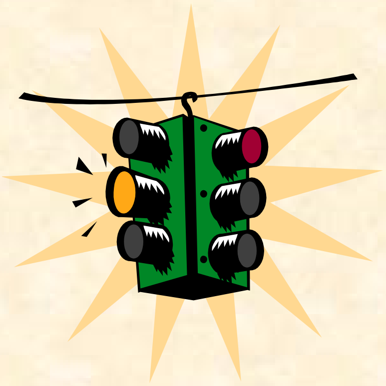
“1”, “2”, “3”, “4”, “5” 或 “6”.

实例4 “从一批含有正品和次品的产品中任意**抽取一个产品**”.

其结果可能为:

正品 、**次品**.

实例5 “**过马路**交叉口时,可能遇上各种颜色的交通**指挥灯**”.



实例6 “一只灯泡的**寿命**” 可长可短.

3. 随机现象的分类

个别随机现象：原则上不能在相同条件下重复出现（例6 灯泡寿命）

大量性随机现象：在相同条件下可以重复出现（例1-5）

随机现象的特征 **条件不能完全决定结果**

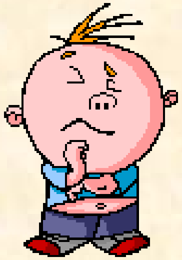
回忆确定性现象的特征？

说明

随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量重复试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性， 概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.



问题　什么是随机试验?

三、随机试验

定义 在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为**随机试验**.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;

2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

说明

1. 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语.

2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 "抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况".

分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

正面，反面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现. 故为随机试验.

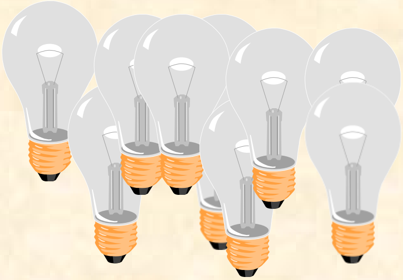
同理可知下列试验都为随机试验

1.“抛掷一枚骰子,观察出现的点数”

2.“从一批产品中,依次任选三件,记 录出现正品与次品的件数”.

3. 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人 数.

4. 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



四、样本空间 样本点

问题: 随机试验的结果怎么去表述?

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具.

定义: 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 Ω .

定义: 样本空间的元素 , 即试验E 的每一个(最简单的不能再分解的)可能结果, 称为样本点. 记作ω或e.

实例1 抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况.

$H \rightarrow$ 字面朝上

$T \rightarrow$ 花面朝上

$\Omega=\{H,T\}$.

实例2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

实例3 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

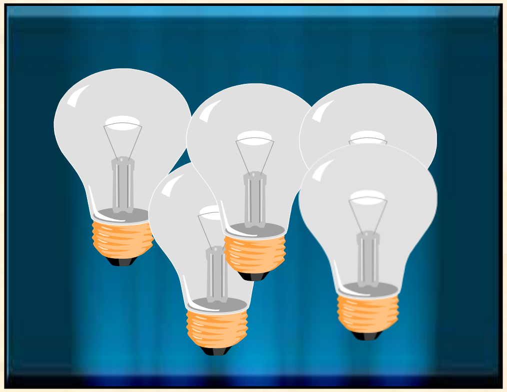
记 $Z \rightarrow$ 正品, $C \rightarrow$ 次品.

则 $\Omega = \{ZZZ, ZZC, ZCZ, CZZ, ZCC, CCZ, CZC, CCC\}.$

实例4　记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

实例4　从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.



$$\Omega = \{t \mid t \geq 0\}.$$

其中 t 为灯泡的寿命 .

实例5　记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$\Omega = \{0,\quad 1,\quad 2, \cdots\}.$$

课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子之和.

2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案

1. $\Omega = \{3, 4, 5, \cdots, 18\}$.

2. $\Omega = \{10, 11, 12, \cdots\}$.

说明 1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验 , 若试验目的不同,则对应的样本空间也不同.

例如 对于同一试验: “将一枚硬币抛掷三 次” .

若观察正面 H、反面 T 出现的情况 ,则样本空间为

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若观察出现正面的次数 , 则样本空间为

$$\Omega = \{0, \quad 1, \quad 2, \quad 3\}.$$

说明　3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此, 一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间,

$$\Omega = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现 正面 或出现 反面的模型, 也可以作为产品检验中合格与不合格的模型, 又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

五、随机事件的概念

在随机试验中，我们往往会关心某个或某些结果是否会出现．这就是 **随机事件**

1. 基本概念

随机事件　随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件, 简称事件.

实例　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子“出现1点”,“出现2点”, … ,“出现6点”, “点数不大于4”, “点数为偶数”等都为随机事件.

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

实例　"出现1点"，"出现2点"，…，"出现6点".

复合事件　由若干个样本点组成的点集.

实例　"点数不大于4", "点数为偶数" .

必然事件　随机试验中必然会出现的结果.

实例　上述试验中 "点数不大于6" 就是必然事件.

不可能事件 随机试验中不可能出现的结果.

实例 上述试验中 "点数大于6" 就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件, 不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为对立事件.

2. 几点说明

(1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 $A, B, C, \ldots$ 来表示事件.

例如 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设 A = "点数不大于4", B = "点数为奇数" 等等.

(2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间，样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

$$\text{随机事件}\begin{cases}\text{基本事件}\\ \text{复合事件}\\ \left.\begin{array}{l}\text{必然事件}\\ \text{不可能事件}\end{array}\right\}\text{互为对立事件}\end{cases}$$

六、内容小结

1. 随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验
(1) 可以在相同的条件下重复地进行;
(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

3. 随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件