第七节 解析函数与调和函数的关系

- 一、调和函数的定义
- 二、解析函数与调和函数的关系
- 三、小结与思考

一、调和函数

定义 如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D内具有二阶连续偏导数，并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

那末称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D内的调和函数.

设 $u(x,y)$为区域 D内给定的调和函数,我们把满足 $u+iv$在 D内解析的调和函数 $v(x,y)$称为函数 u的共轭调和函数.

二、解析函数与调和函数的关系

定理 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析，则$u(x,y)$和$v(x,y)$均是区域D上的调和函数，且v是u的共轭调和函数.

证 设 $w=f(z)=u+iv$ 为 D 内的一个解析函数,

那末 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

从而 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

根据解析函数高阶导数定理,

u 与 v 具有任意阶的连续偏导 数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ 同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$

因此 u 与 v 都是调和函数. 且 v 为 u 的共轭调和函数.

[证毕]

三. 利用调和函数构造解析函数

1. 偏积分法

如果已知一个调和函数 u, 那末就可以利用柯西一黎曼方程求得它的共轭调和函数 v, 从而构成一个解析函数$u+vi$. 这种方法称为**偏积分法**.

例1 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由它们构成的解析函数.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$

$$v=-6\int xy\mathrm{d}y=-3xy^2+g(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

又因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2,$

$$-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2,\qquad (c\text{为任意常数})$$

故 $g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+c$, $v(x,y)=x^3-3xy^2+c$,

得一个解析函数 $w=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+c)$.

这个函数可以化为 $w=f(z)=i(z^3+c)$.

2. 不定积分法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$, 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

不定积分法的实施过程:

解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数,

且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

把 u_x-iu_y 与 v_y+iv_x 用 z 来表示,

$f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$, $\quad f'(z)=v_y+iv_x=V(z)$,

将上两式积分, 得

$$\boxed{f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+c,}\qquad \boxed{f(z)=\int V(z)\mathrm{d}z+c,}$$

适用于已知实部 u 求 $f(z)$,

适用于已知虚部 v 求 $f(z)$,

例2 求 k 值,使 $u=x^2+ky^2$ 为调和函数.再求v,使 $f(z)=u+iv$ 为解析函数,并求 $f(i)=-1$ 的 $f(z)$.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ky,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k=-1,$

因为 $f'(z)=U(z)=u_x-iu_y=2x-2kyi$

$$= 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z,$$

根据不定积分法 $f(z) = \int 2z\mathrm{d}z = z^2 + c,$

由 $f(i) = -1,$ 得 $c = 0,$

所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

三、线积分法

设u是区域D内解析函数 $f(z)$的实部，因而是调和函 数.所以$u_{xx}+u_{yy}=0$.即$(-u_y)_y=(u_x)_x$,所以$-u_y dx+u_x dy$是某二元函数v的全微分： $dv=-u_y dx+u_x dy=v_x dx+v_y dy.$

于是$u_x=v_y$; $u_y=-v_x$. $C-R$方程成立，所以$u+iv$是解析函数，且

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y dx+u_x dy+c$$

其中c为常数,(x_0,y_0)是D中的某一点.

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y(x,y)dx+u_x(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}-u_y(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}u_x(x,y)dy$$

$$=\int_{x_0}^{x}-u_y(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}u_x(x_0,y)dy.$$

例3 验证$u(x,y)=x^3-3xy^2$是调和函数，并求以 $u(x,y)$为实部的解析函数$f(z)$使得$f(0)=i$.

因在z平面上任一点处，$u_x=3x^2-3y^2, u_y=-6xy$, 所以$u_{xx}+u_{yy}=6x-6x=0$.
即$u(x,y)$是调和函数.
因为 $f(z)$解析，u,v 满足$C-R$方程，所以 $dv=v_x dx+v_y dy=-u_y dx+u_x dy$.
于是,

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 6xydx+(3x^2-3y^2)dy+c$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)} 6x0dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(3x^2-3y^2)dy+c=3x^2y-y^3+c.$$

而 $f(0)=u(0,0)+iv(0,0)=ci=i$, 所以 $c=1$.
因此 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+1)=z^3+i$.

三、小结与思考

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

注意: 1. 任意两个调和函数u与v所构成的函数$u+iv$不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程$u_x = v_y$, $v_x = -u_y$,的v称为u的共轭调和函数, u与v注意的是位置不能颠倒.