The Art of Linear Algebra

– Graphic Notes on “Linear Algebra for Everyone” –

Kenji Hiranabe *
with the kindest help of Gilbert Strang †
translator: Kefang Liu ‡

September 1, 2021/updated November 8, 2022

Abstract

我尝试为 Gilbert Strang 在书籍 “Linear Algebra for Everyone” 中介绍的矩阵的重要概念进行可视化图释, 以促进从矩阵分解的角度对向量、矩阵计算和算法的理解. [1] 它们包括矩阵分解 (Column-Row, $\boldsymbol{CR}$)、高斯消去法 (Gaussian Elimination, $\boldsymbol{LU}$)、格拉姆-施密特正交化 (Gram-Schmidt Orthogonalization, $\boldsymbol{QR}$)、特征值和对角化 (Eigenvalues and Diagonalization, $\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}$)、和奇异值分解 (Singular Value Decomposition, $\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}$).

序言

我很高兴能看到 Kenji Hiranabe 的线性代数中的矩阵运算的图片! 这样的图片是展示代数的绝佳方式. 我们当然可以通过行・列的点乘来想象矩阵乘法, 但那绝非全部——它是 “线性组合” 与 “秩 1 矩阵” 组成的代数与艺术. 我很感激能看到日文翻译的书籍和 Kenji 的图片中的想法.

– Gilbert Strang
麻省理工学院数学教授

Contents

*twitter: @hiranabe, k-hiranabe@esm.co.jp, https://anagileway.com
†Massachusetts Institute of Technology, http://www-math.mit.edu/~gs/
‡twitter: @kfchliu, 微博用户: 5717297833
[1]“Linear Algebra for Everyone”: http://math.mit.edu/everyone/.

1 理解矩阵——4 个视角

一个矩阵 $(m \times n)$ 可以被视为 1 个矩阵, mn 个数, n 个列和 m 个行.

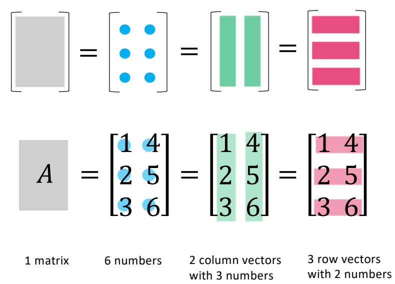


Figure 1: 从四个角度理解矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_1^*}- \\ -\boldsymbol{a_2^*}- \\ -\boldsymbol{a_3^*}- \end{bmatrix}$$

在这里, 列向量被标记为粗体 $\boldsymbol{a_1}$. 行向量则有一个 $*$ 号, 标记为 $\boldsymbol{a_1^*}$. 转置向量和矩阵则用 T 标记为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 和 A^{T}.

2 向量乘以向量——2 个视角

后文中, 我将介绍一些概念, 同时列出 "Linear Algebra for Everyone" 一书中的相应部分 (部分编号插入如下). 详细的内容最好看书, 这里我也添加了一个简短的解释, 以便您可以通过这篇文章尽可能多地理解. 此外, 每个图都有一个简短的名称, 例如 v1 (数字 1 表示向量的乘积)、Mv1 (数字 1 表示矩阵和向量的乘积), 以及如下图 (v1) 所示的彩色圆圈. 如你所见, 随着讨论的进行, 该名称将被交叉引用.

- 1.1 节 (p.2) Linear combination and dot products
- 1.3 节 (p.25) Matrix of Rank One
- 1.4 节 (p.29) Row way and column way

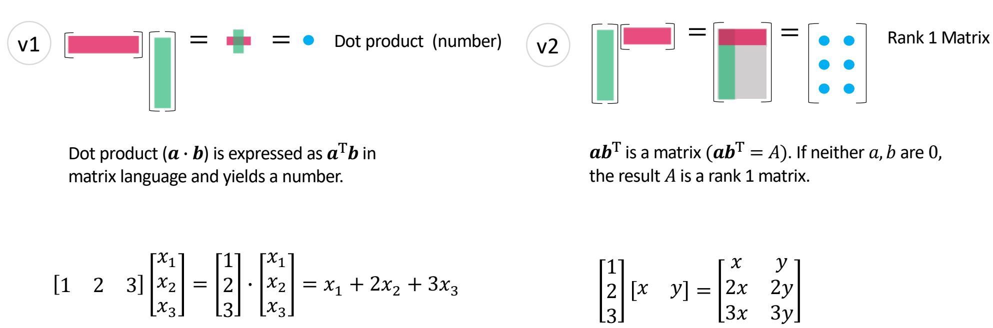


Figure 2: 向量乘以向量 - (v1), (v2)

(v1) 是两个向量之间的基础运算, 而 (v2) 将列乘以行并产生一个秩 1 矩阵. 理解 (v2) 的结果 (秩 1) 是接下来章节的关键.

3 矩阵乘以向量——2 个视角

一个矩阵乘以一个向量将产生三个点积组成的向量 (Mv1) 和一种 A 的列向量的线性组合.

- 1.1 节 (p.3) LInear combinations
- 1.3 节 (p.21) Matrices and Column Spaces

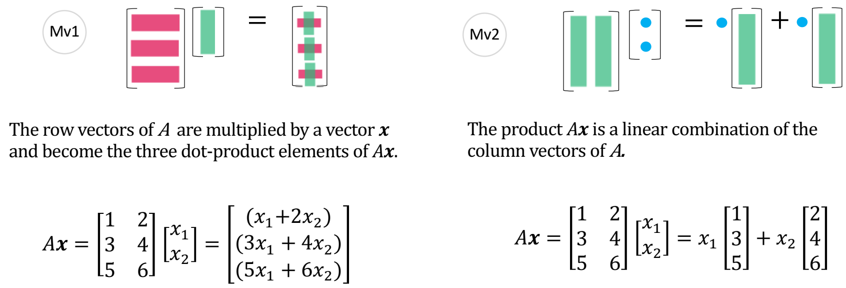


Figure 3: 矩阵乘以向量- (Mv1), (Mv2)

往往你会先学习 (Mv1). 但当你习惯了从 (Mv2) 的视角看待它, 会理解 $A\boldsymbol{x}$ 是 A 的列的线性组合. 矩阵 A 的列向量的所有线性组合生成的子空间记为 $\mathbf{C}(A)$. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间则是零空间, 记为 $\mathbf{N}(A)$.

同理, 由 (vM1) 和 (vM2) 可见, 行向量乘以矩阵也是同一种理解方式.

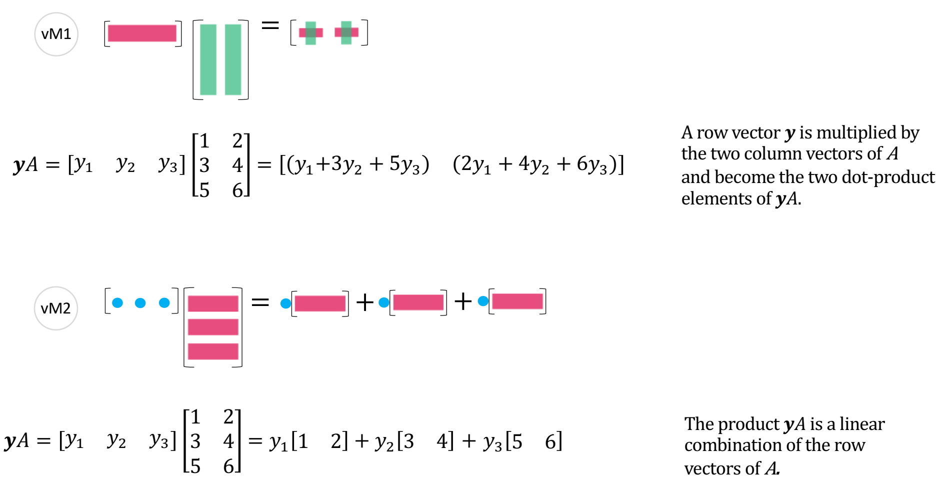


Figure 4: 向量乘以矩阵 - (vM1), (vM2)

上图 A 的行向量的所有线性组合生成的子空间记为 $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$. $yA = 0$ 的解空间是 A 的左零空间, 记为 $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$.

本书的一大亮点即为四个基本子空间: 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathbf{N}(A) + \mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$ (相互正交) 和在 $\mathbb{R}^m$ 上的 $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}}) + \mathbf{C}(A)$ (相互正交).

- 3.5 节 (p.124) Dimensions of the Four Subspaces

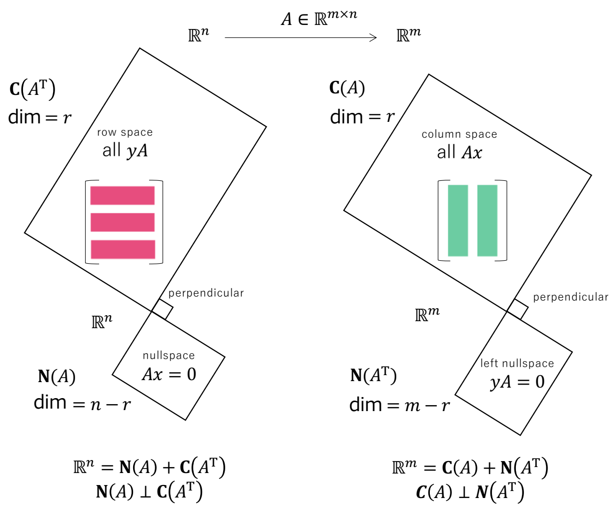


Figure 5: 四个子空间

关于秩 r, 请见 $A = CR$ (6.1 节) .

4 矩阵乘以矩阵——4 个视角

由 “矩阵乘以向量” 自然延伸到 “矩阵乘以矩阵”.

- 1.4 节 (p.35) Four ways to multiply $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$
- 也可以见书的封底

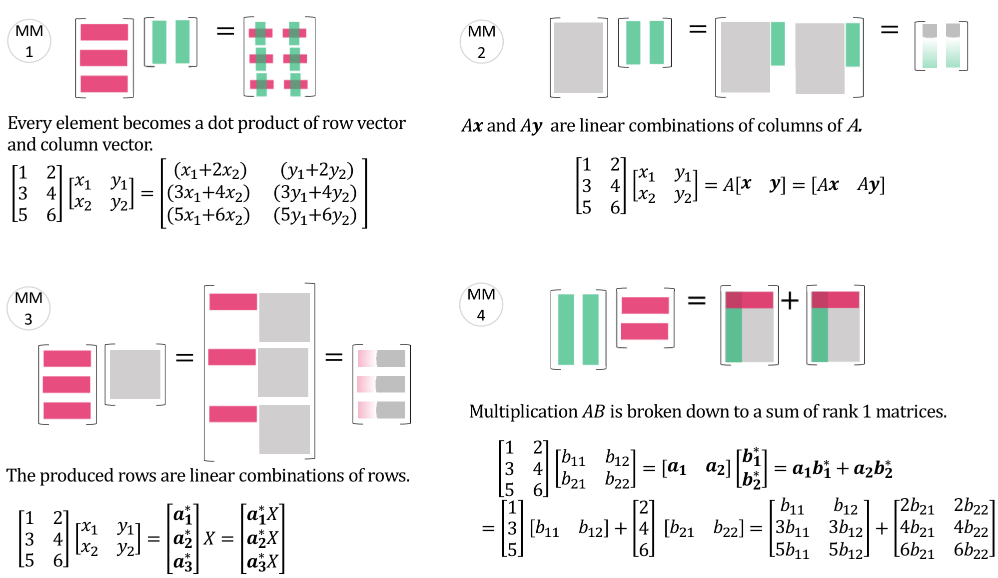


Figure 6: 矩阵乘以矩阵 - (MM1), (MM2), (MM3), (MM4)

5 实用模式

在这里, 我展示了一些实用的模式, 可以让你更直观地理解接下来的内容。

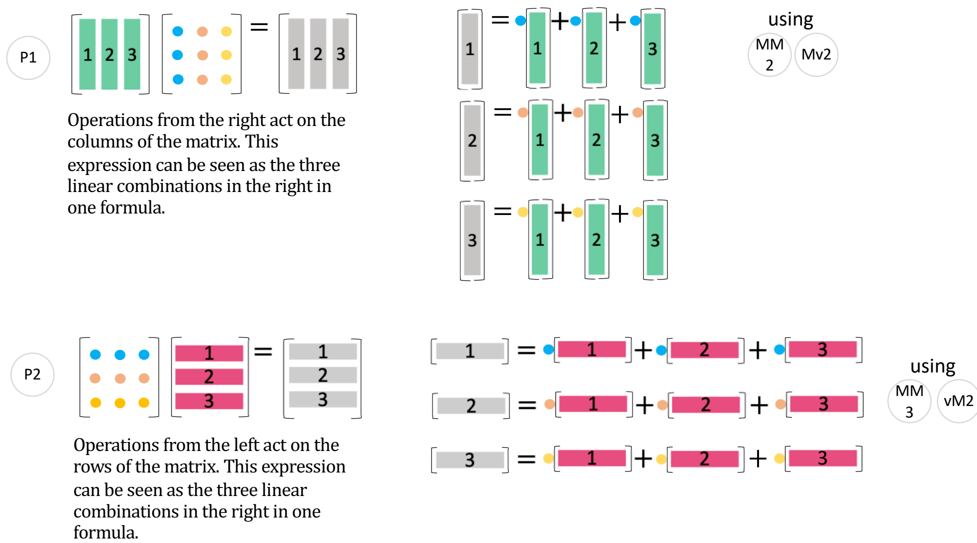
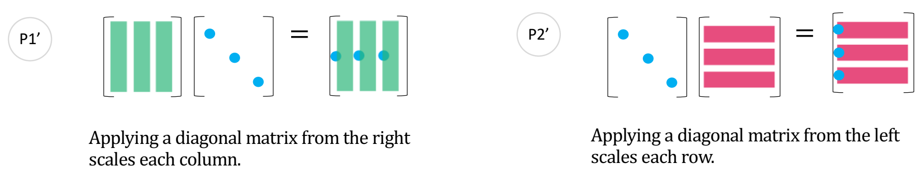


Figure 7: 图 1, 2 - (P1), (P1)

P1 是 (MM2) 和 (Mv2) 的结合. P2 是 (MM3) 和 (vM2) 的扩展. 注意, P1 是列运算 (右乘一个矩阵), 而 P2 是行运算 (左乘一个矩阵).

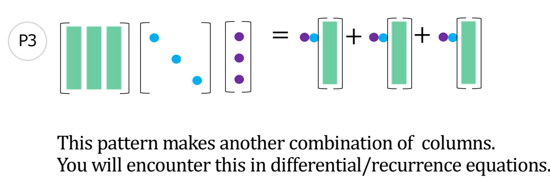


$$AD = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} = [d_1\boldsymbol{a}_1 \quad d_2\boldsymbol{a}_2 \quad d_3\boldsymbol{a}_3]$$

$$DB = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^* \\ \boldsymbol{b}_2^* \\ \boldsymbol{b}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{b}_1^* \\ d_2\boldsymbol{b}_2^* \\ d_3\boldsymbol{b}_3^* \end{bmatrix}$$

Figure 8: 图 1′, 2′ - (P1′), (P2′)

(P1′) 将对角线上的数乘以矩阵的列, 而 (P2′) 将对角线上的数乘以矩阵的行. 两个分别为 (P1) 和 (P2) 的变体.



$$XD\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3]\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1d_1\boldsymbol{x}_1 + c_2d_2\boldsymbol{x}_2 + c_3d_3\boldsymbol{x}_3$$

Figure 9: 图 3 - (P3)

当解决微分方程和递归方程时的也会出现这一模式:

- 6 节 (p.201) Eigenvalues and Eigenvectors
- 6.4 节 (p.243) Systems of Differential Equations

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = A\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$
$$\boldsymbol{u}_{n+1} = A\boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u}_0$$

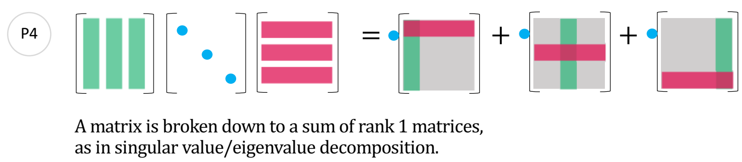
在两种问题中, 它的解都可以用 A 的特征值 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$、特征向量 $X = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}$ 和系数 $c = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 表示. 其中 C 是以 X 为基底的初始值 $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ 的坐标.

$$\boldsymbol{u}_0 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3$$
$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = X^{-1}\boldsymbol{u}_0$$

以上两个问题的通解为:

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{At}\boldsymbol{u}_0 = Xe^{\Lambda t}X^{-1}\boldsymbol{u_0} \qquad = Xe^{\Lambda t}\boldsymbol{c} = c_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{x}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{x}_2 + c_3e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{x}_3$$
$$\boldsymbol{u}_n = A^n\boldsymbol{u}_0 = X\Lambda^n X^{-1}\boldsymbol{u_0} \qquad = X\Lambda^n\boldsymbol{c} = c_1\lambda_1^n\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2^n\boldsymbol{x}_2 + c_3\lambda_3^n\boldsymbol{x}_3$$

见 Figure9: P3 中的 XDc.



$$U\Sigma V^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \sigma_3\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}$$

Figure 10: Pattern 4 - (P4)

P4 在特征值分解和特异值分解中都会用到. 两种分解都可以表示为三个矩阵之积, 其中中间的矩阵均为对角矩阵. 且都可以表示为带特征值/特异值系数的秩 1 矩阵之积.

更多细节将在下一节中讨论.

6 矩阵的五种分解

- 前言 p.vii, The Plan for the Book.

$A = CR, A = LU, A = QR, A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}, A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 将一一说明.

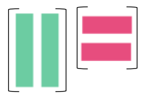
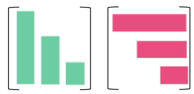
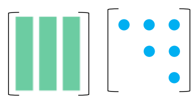
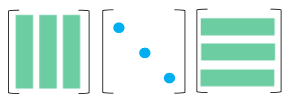
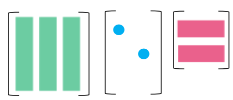
$\boldsymbol{A = CR}$		C 为 A 的线性无关列 R 为 A 的行阶梯形矩阵 可推知列秩 = 行秩
$\boldsymbol{A = LU}$		LU 分解通过 高斯消去法 (下三角)(上三角)
$\boldsymbol{A = QR}$		QR 分解为 格拉姆-施密特正交化中的 正交矩阵 Q 和三角矩阵 R
$\boldsymbol{S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}}$		对称矩阵 S 可以进行 特征值分解 特征向量组成 Q, 特征值组成 Λ
$\boldsymbol{A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}}$		所有矩阵 A 的 奇异值分解 奇异值组成 Σ

Table 1: 五种分解

6.1 $\boldsymbol{A = CR}$

- 1.4 节 Matrix Multiplication and $\boldsymbol{A = CR}$ (p.29)

所有一般的长矩阵 A 都有相同的行秩和列秩. 这个分解是理解这一定理最直观的方法. C 由 A 的线性无关列组成, R 为 A 的行阶梯形矩阵 (消除了零行). $A = CR$ 将 A 化简为 r 的线性无关列 C 和线性无关行 R 的乘积.

$$A = CR$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

推导过程: 从左往右看 A 的列. 保留其中线性无关的列, 去掉可以由前者线性表出的列. 则第 1、2 列被保留, 而第三列因为可以由前两列之和表示而被去掉. 而要通过线性无关的 1、2 两列重新构造出 A, 需要右乘一个行阶梯矩阵 R.

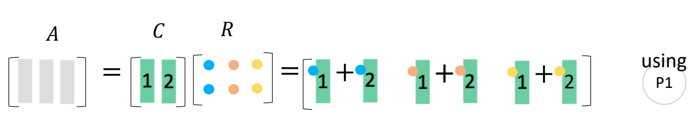


Figure 11: CR 中列的秩

现在你会发现行的秩为 2, 因为 C 中只有 2 个线性无关列. 而 A 中所有的列都可以由 C 中的 2 列线性表出.

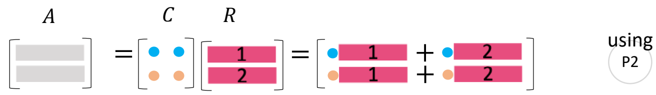


Figure 12: CR 中行的秩

同样, 列秩也为 2, 因为 R 中只有 2 个线性无关行, 且 A 中所有的行都可以由 R 中的 2 行线性表出.

6.2 $\boldsymbol{A = LU}$

用高斯消除法求解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 也被称为 LU 分解. 通常, 是 A 左乘一个初等行变换矩阵 (E) 来得到一个上三角矩阵 U.

$$
\begin{aligned}
EA &= U \\
A &= E^{-1}U \\
\text{let } L = E^{-1}, \quad A &= LU
\end{aligned}
$$

现在, 求解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有 2 步: (1) 求解 $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, (2) 代回 $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.

- 2.3 节 (p.57) Matrix Computations and $\boldsymbol{A = LU}$

在这里, 我们直接通过 A 计算 L 和 U.

$$
A = \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{l}_1 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{u}_1^* - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{l}_1 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{u}_1^* - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{l}_2 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{u}_2^* - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} = LU
$$

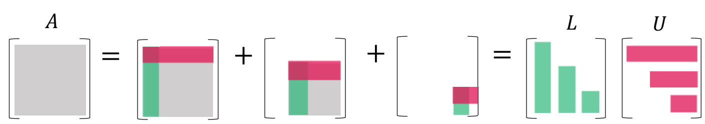


Figure 13: A 1

要计算 L 和 U, 首先分离出由 A 的第一行和第一列组成的外积. 余下的部分为 A_2. 递归执行此操作, 将 A 分解为秩 1 矩阵之和.

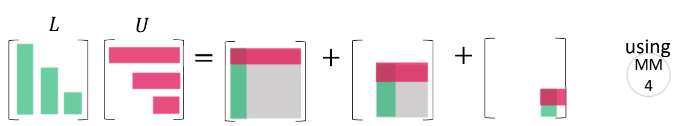


Figure 14: 由 LU 重新构造 A

由 L 乘以 U 来重新构造 A 则相对简单.

6.3 $\boldsymbol{A = QR}$

$A = QR$ 是在保持 $\boldsymbol{C}(A) = \boldsymbol{C}(Q)$ 的条件下, 将 A 转化为正交矩阵 Q.

- 4.4 节 Orthogonal matrices and Gram-Schmidt (p.165)

在格拉姆-施密特正交化中, 首先, 单位化的 $\boldsymbol{a}_1$ 被用作 $\boldsymbol{q}_1$, 然后求出 $\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{q}_1$ 正交所得到的 $\boldsymbol{q}_2$, 以此类推.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1/||\boldsymbol{a}_1|| \\
&\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_2/||\boldsymbol{q}_2|| \\
&\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{q}_1 - (\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{q}_2, \quad \boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_3/||\boldsymbol{q}_3||
\end{aligned}
$$

或者你也可以写作 $r_{ij} = \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_j$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= r_{11}\boldsymbol{q}_1 \\
\boldsymbol{a}_2 &= r_{12}\boldsymbol{q}_1 + r_{22}\boldsymbol{q}_2 \\
\boldsymbol{a}_3 &= r_{13}\boldsymbol{q}_1 + r_{23}\boldsymbol{q}_2 + r_{33}\boldsymbol{q}_3
\end{aligned}
$$

原本的 A 就可以表示为 QR: 正交矩阵乘以上三角矩阵.

$$
A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix} = QR
$$

$$
QQ^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}}Q = I
$$

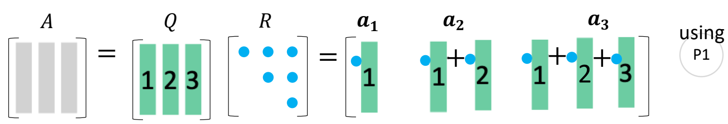


Figure 15: $A = QR$

A 的列向量就可以转化为一个正交集合: Q 的列向量. A 的每一个列向量都可以用 Q 和上三角矩阵 R 重新构造出.

图释可以回头看 P1.

6.4 $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$

所有对称矩阵 S 都必须有实特征值和正交特征向量. 特征值是 Λ 的对角元素, 特征向量在 Q 中.

- 6.3 节 (p.227) Symmetric Positive Definite Matrices

$$
S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}- \\ -\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}- \\ -\boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_1 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{q}_1 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{q}_2 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{q}_3 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3
\end{aligned}
$$

$$
P_1 = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}, \quad P_2 = \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}, \quad P_3 = \boldsymbol{q}_3\boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}
$$

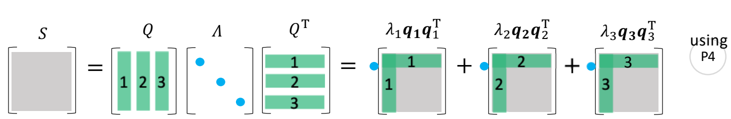


Figure 16: $S = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$

一个对乘矩阵 S 通过一个正交矩阵 Q 和它的转置矩阵, 对角化为 Λ. 然后被分解为一阶投影矩阵 $P = qq^{\mathrm{T}}$ 的组合. 这就是谱定理.

注意, 这里的分解用到了 P4.

$$
\begin{gathered}
S = S^{\mathrm{T}} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \\
QQ^{\mathrm{T}} = P_1 + P_2 + P_3 = I \\
P_1 P_2 = P_2 P_3 = P_3 P_1 = O \\
P_1^2 = P_1 = P_1^{\mathrm{T}}, \quad P_2^2 = P_2 = P_2^{\mathrm{T}}, \quad P_3^2 = P_3 = P_3^{\mathrm{T}}
\end{gathered}
$$

6.5 $\boldsymbol{A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}}$

- 7.1 节 (p.259) Singular Values and Singular Vecrtors

包括长方阵在内的所有矩阵都具有奇异值分解 (SVD). $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ 中, 有 A 的奇异向量 U 和 V. 奇异值则排列在 Σ 的对角线上. 下图就是“简化版”的 SVD.

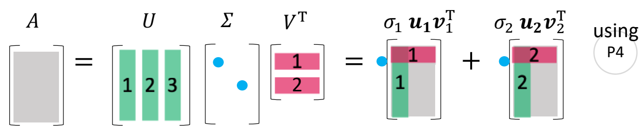


Figure 17: $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$

你可以发现, V 是 $\mathbb{R}^n$ ($A^{\mathrm{T}}A$ 的特征向量) 的标准正交基, 而 U 是 $\mathbb{R}^m$ (AA^{T} 的特征向量) 的标准正交基. 它们共同将 A 对角化为 Σ. 这也可以表示为秩 1 矩阵的线性组合.

$$
\begin{aligned}
A = U\Sigma V^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_2 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}- \\ -\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} &= \sigma_1 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{u}_1 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} + \sigma_2 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{u}_2 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}- \end{bmatrix} \\
&= \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

注意:

$$
\begin{gathered}
UU^{\mathrm{T}} = I_m \\
VV^{\mathrm{T}} = I_n
\end{gathered}
$$

图释见 P4.

总结和致谢

我展示了矩阵/向量乘法的系统可视化与它们在五种矩阵分解中的应用. 我希望你能够喜欢它们、通过它们加深对线性代数的理解.

Ashley Fernandes 在排版时帮我美化了这篇论文, 使它更加一致和专业.

在结束这篇论文之前, 我要感谢 Gilbert Strang 教授发表了《人人都可以用线性代数》一文. 它引导我们通过新的视角去了解线性代数中这些美丽的风景. 每个人都可以通过一种实用的方式对它的基本思想进行基本理解, 从而向我们介绍当代和传统的数据科学和机器学习. 矩阵世界的重要组成部分.

参考文献与相关工作

1. Gilbert Strang(2020),*Linear Algebra for Everyone*, Wellesley Cambridge Press., http://math.mit.edu/everyone

2. Gilbert Strang(2016), *Introduction to Linear Algebra*,Wellesley Cambridge Press, 5th ed., http://math.mit.edu/linearalgebra

3. Kenji Hiranabe(2021), *Map of Eigenvalues*, An Agile Way(blog),
https://anagileway.com/2021/10/01/map-of-eigenvalues/

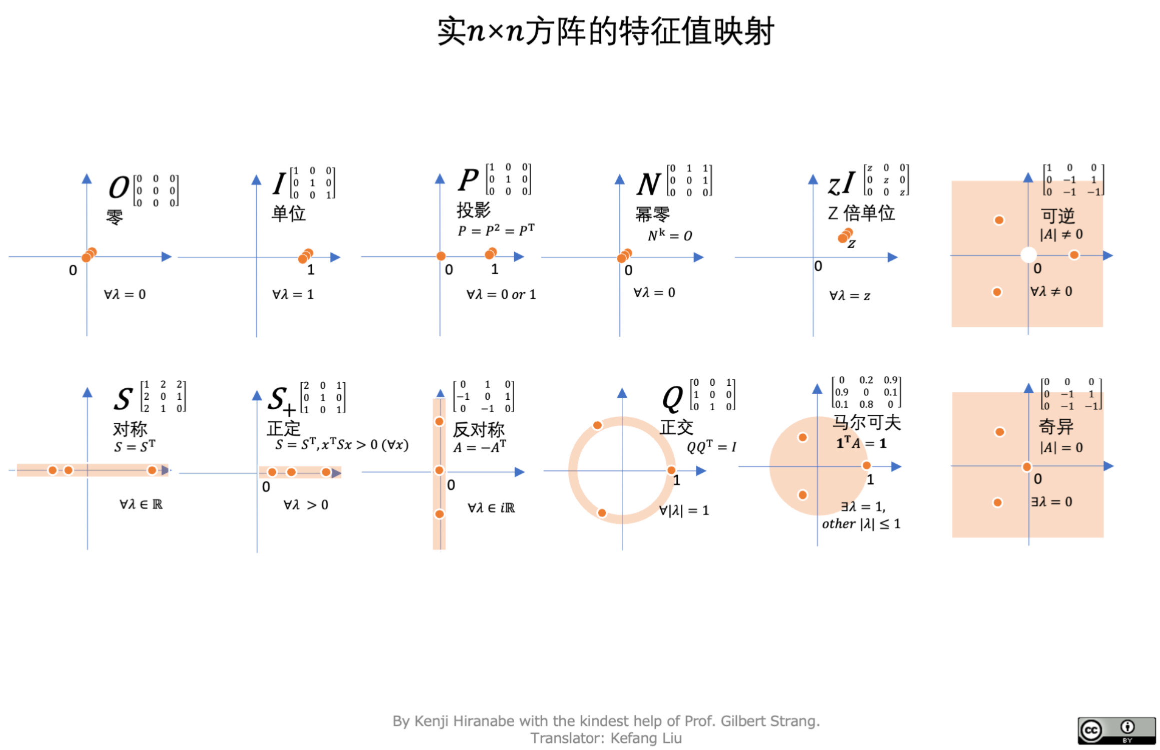


Figure 18: 特征值图

4. Kenji Hiranabe(2020), *Matrix World*, An Agile Way(blog),
https://anagileway.com/2020/09/29/matrix-world-in-linear-algebra-for-everyone/

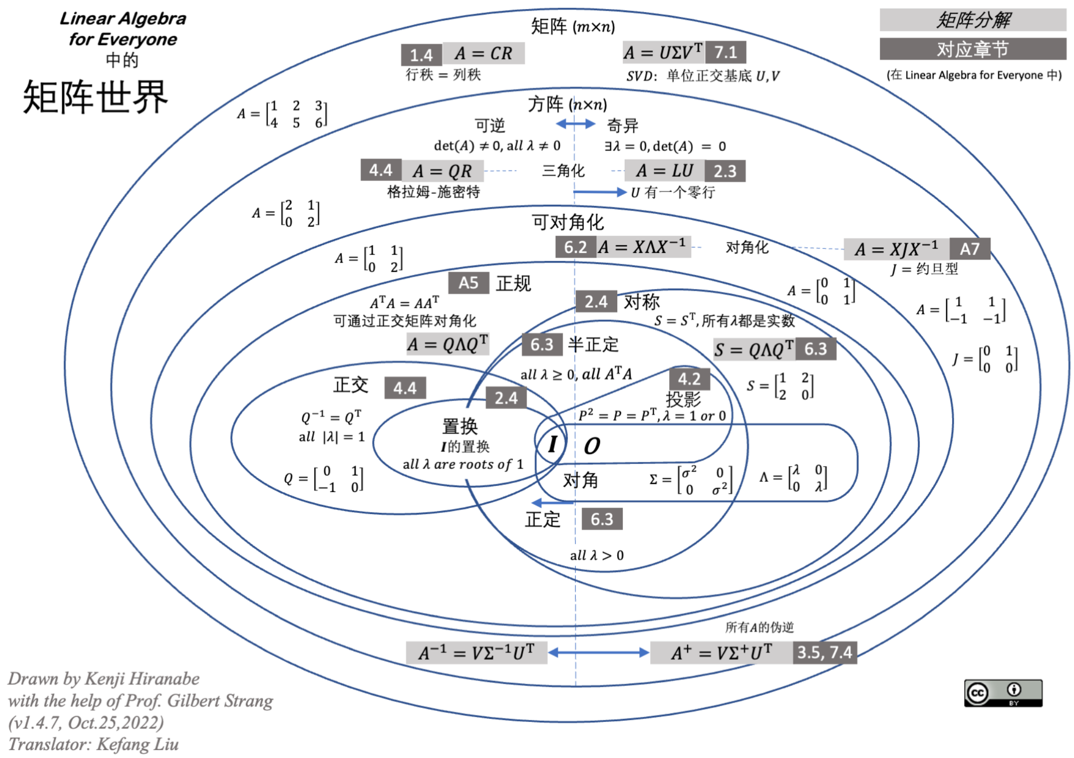


Figure 19: 矩阵世界