

PARTE 1 CONCEPTOS BÁSICOS DE UNA COMPUTADORA

"La computadora es, por mucho, la más extraordinaria de las vestimentas electrónicas creadas por el hombre, ya que es una extensión de nuestro sistema nervioso central. Junto a ella, la rueda no es más que un juguete...".

Marshall McLuhan.

LA COMPUTADORA EN LA VIDA DIARIA

En la vida moderna las computadoras constituyen un componente esencial y, aunque no lo notemos, están en todas partes y son determinantes en nuestro modo de vida. Aún más, muchas veces nos damos cuenta de esto cuando dejan de funcionar.

Pensemos por un momento en qué cosas está presente alguna forma de computadora: reloj despertador digital, radio, TV, reproductor de CD, agenda electrónica, cafetera automática, horno a microondas, encendido electrónico del auto, portón eléctrico de la cochera, teléfono celular, cajero automático, lector de tarjeta de ingreso al trabajo, ascensores automáticos, controles de seguridad del edificio, lavarropas automático, cámaras fotográficas, máquinas de juegos, expendedoras de comestibles, control de los semáforos, centrales telefónicas, aviones, aeropuertos, *casi todo !!!!*

Es difícil imaginarse un día en el cual no utilicemos *alguno* de estos elementos. ¿Qué pasaría si todos ellos dejaran de funcionar simultáneamente?. Nuestra vida está relacionada con las computadoras, tanto por su operación como por su falta de funcionamiento. Y lo más sorprendente es que se hayan infiltrado tanto en la vida diaria en un tiempo tan corto...

LA "IDEA" DE LA COMPUTADORA

En 1823, el excéntrico genio matemático inglés Charles Babbage, profesor en Cambridge, comenzó a trabajar sobre la idea de un dispositivo mecánico para efectuar sumas repetidas. Esta idea se enriqueció al conocer que Jacquard, fabricante de tejidos francés, había ideado un telar que permitía reproducir automáticamente patrones de tejidos leyendo la información codificada en patrones de agujeros perforados. Babbage se embarcó entonces en el ambicioso proyecto de crear una *máquina analítica*, que pretendía evolucionar el telar programable en una máquina capaz de realizar *cualquier* cálculo que se le *programara* mediante tarjetas perforadas, con una precisión de 20 dígitos.

A esta idea adhirió Ada Lovelace, hija del poeta Lord Byron y con aptitudes matemáticas. Publicó un artículo sobre la máquina analítica que incluía el primer programa para computadora. Se asoció a Babbage aportando mayores alcances a su idea y corrigiendo errores de su trabajo.

“La máquina analítica no es capaz de crear nada, sin embargo puede hacer cualquier cosa que sepamos ordenarle”

Ada Lovelace.

Pero la tecnología de la época no bastaba para hacer realidad la máquina. El mundo aún no estaba listo para las computadoras, y no lo estaría por cien años más.

DE LA CALCULADORA A LA COMPUTADORA... LA GRAN DIFERENCIA

Si bien las computadoras nos acompañan desde hace apenas medio siglo, sus raíces van mucho más allá de la máquina analítica concebida por Babbage y son producto de siglos de meditación y esfuerzo intelectual.

Durante años el esfuerzo tecnológico estuvo en calcular: ábacos, calculadores mecánicos, circuitos electromecánicos, circuitos electrónicos. El objetivo era obtener la mayor velocidad posible para alguna combinación de las operaciones matemáticas básicas.

Aún las primitivas computadoras y las primeras aplicaciones industriales fueron de cálculo fijo (aunque complejo) que debía hacerse a la mayor velocidad posible. Los componentes electrónicos más “famosos” eran las Unidades Aritméticas que realizaban cálculos simples a gran velocidad.

El salto conceptual de las "máquinas de calcular" a la computadora fue comprender que el cálculo era sólo uno de los elementos de interés para la computación. Aún más, representaba tal vez la línea tecnológica más “fácil”.

El verdadero desarrollo estaba en poder generalizar la utilización de “la máquina” para cualquier aplicación que se pudiera “programar”... tal como lo había escrito Ada Lovelace 120 años antes!!!

UNA PRIMERA DEFINICIÓN

Una **Computadora** es una máquina digital y sincrónica, con cierta capacidad de cálculo numérico y lógico, controlada por un programa almacenado y con posibilidad de comunicación con el mundo exterior.

¿Qué significa esto?

- Es **digital** porque dentro de la computadora las señales eléctricas que se manejan y la información que se procesa se representa en forma discreta, por medio de dos valores (0 y 1).
- Además se afirma que es **sincrónica**, es decir que realiza las operaciones coordinadas por un reloj central que envía señales de sincronismo a todos los

elementos que componen la computadora. Esto significa que todas las operaciones internas se realizan en instantes de tiempo predefinidos y coordinados con el reloj.

- Internamente posee una **capacidad de cálculo numérico y lógico**, en un subsistema denominado Unidad Aritmético-Lógica (UAL) ó en su acrónimo en idioma inglés ALU (Arithmetic & Logic Unit). Normalmente las operaciones que pueden realizarse en ella son muy simples (por ejemplo suma, disyunción, conjunción o comparación).
- El hecho que sea **controlada por programa** es quizás el punto más importante que diferencia a una computadora de una calculadora. Significa que internamente se tienen órdenes o instrucciones almacenadas, que la computadora podrá obtener, interpretar y ejecutar.
- Además, está **comunicada con el mundo exterior**. Esto significa que podrá realizar operaciones de ingreso o egreso de valores desde y hacia el mundo real, utilizando dispositivos periféricos (por ejemplo el teclado o el mouse para entrada de información y pantalla como salida). Debe mencionarse que el mundo real es *analógico* y no digital.

La computadora es una máquina que cambia información de una forma a otra: recibe información (entrada), la transforma y proporciona información (salida). Esta información puede presentarse de muchas formas, lo que convierte a la computadora en una máquina sumamente versátil, que es capaz desde liquidar impuestos hasta guiar el recorrido de una nave espacial. En cada caso las entradas y salidas son totalmente distintas, y en esto radica lo sorprendente de poder usar una computadora para ambas actividades.

Esta versatilidad está dada en que la máquina sea controlada por un *programa*, que establece las instrucciones que le indican a las partes físicas qué deben hacer para transformar los datos de entrada en la salida requerida. El programa controla todo el proceso, del principio al fin: podemos modificar su funcionamiento con solo cambiar el programa.

Con el advenimiento de la computadora, gran parte de la tecnología pasó del mundo analógico al digital.

UN POCO DE HISTORIA

“Considera el pasado y conocerás el futuro”
Proverbio Chino.

La evolución en la tecnología electrónica en los últimos 60 años tuvo un impacto notable en la ciencia informática.

En la primera generación de computadoras, las máquinas estaban construidas con *tubos de vacío* (válvulas), que eran tubos de vidrio del tamaño de una bombilla de luz que albergaban circuitos eléctricos. Eran máquinas muy grandes, costosas y de difícil operación. A pesar de esto, rápidamente se convirtieron en herramientas indispensables para los científicos e ingenieros. El *transistor*, inventado en 1948, podía cumplir la misma función que un tubo de vacío, ya que podía transferir la electricidad a través de una pequeña resistencia.

Esto dio lugar, a partir de 1956, a la segunda generación de computadoras, donde las máquinas ya eran más pequeñas, confiables y económicas que las anteriores. En forma paralela hubo un avance en la programación y forma de manejo de estas computadoras, lo que produjo un mayor uso de las mismas.

A mediados de los '60 las computadoras basadas en transistores fueron sustituidas por las máquinas más pequeñas y potentes de la tercera generación, construidas con base en los nuevos *circuitos integrados* (que empaquetaban cientos de transistores en un chip de silicio). Su éxito estuvo basado en la mayor confiabilidad, velocidad y eficiencia, y su menor tamaño y costo.

La invención del tubo de vacío, el transistor y el chip de silicio tuvieron un impacto notable en la sociedad, y por eso muchos historiadores señalan estos acontecimientos como fronteras generacionales. Pero ninguno de ellos tuvo un efecto más profundo que la invención en 1969 del primer *microprocesador*, que es una computadora completa empaquetada en un diminuto chip de silicio. Esto fue considerado el inicio de la cuarta generación, que trajo aparejados cambios en la capacidad y la disponibilidad de las máquinas en todo el planeta.

Datos (y velocidad) de la evolución

- En el siglo IX un texto budista es el primer libro impreso conocido.
- En el siglo XV aparece la imprenta de Gutenberg.

- En el siglo XVIII aparece la revolución industrial.
- A principios del siglo XX la producción industrial automatizada.

- En el siglo XIX la radio.
- En el siglo XX la TV y el cine.

1940 a 1950: Aparecen las primeras computadoras. Con programa fijo y programa variable. En 1945 John Von Neumann propone almacenar programas en forma de datos. Surge el transistor y con él la electrónica moderna.

1950 a 1960: Computadoras transistorizadas. Banca computarizada. Circuitos integrados. Láser. En 1959 la Unión Soviética lanza el Sputnik.

1960 a 1970: Sistemas operativos de tiempo compartido. El software como producto industrial. Lenguajes de programación. La primera red de computadoras. En 1969 el hombre llega a la Luna.

1970 a 1980: Aparecen los microprocesadores. Microcomputadoras. Computadoras Personales. Robots industriales controlados por computadora. Supercomputadoras. Primeros juegos para computadoras personales. Planilla de Cálculo. Interfaz gráfica. Apple. En 1979 nace el PacMan.

1980 a 1990: IBM presenta la primera computadora personal (PC). Surgen publicaciones electrónicas. Nace Internet. Aparecen las primeras computadoras masivamente paralelas. Aparecen los virus y los hackers.

1990 a 2000: En 1990 Microsoft introduce Windows 3.0. Aparecen otros elementos como la interfaz hablada, multimedia, robots móviles, realidad virtual, videoconferencia, visión por computadora, etc.

2000 en adelante: Adquiere fuerte impulso la Inteligencia Artificial. La realidad virtual cada vez es más real. La interfaz hombre-máquina sigue evolucionando. Las comunicaciones por Internet dan origen a nuevos mecanismos como el comercio electrónico.

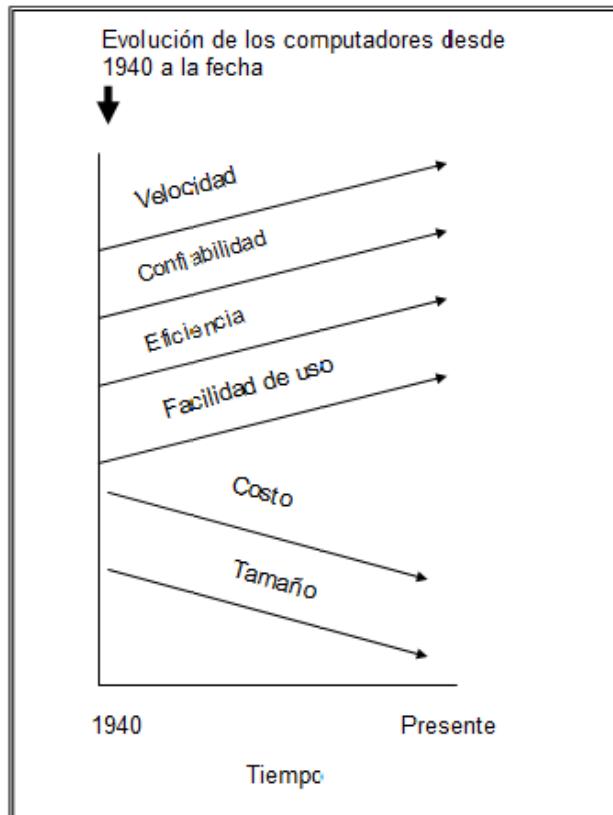
Estos datos reflejan la diferencia en la velocidad de evolución de la informática con respecto a cualquiera de las otras industrias. Notar que el avance desde el primer libro impreso a la imprenta tomó 6 siglos, mientras que desde los tubos de vacío al primer microprocesador sólo pasaron una veintena de años...

El complejo electrónico-informático ha desplazado a la industria automotriz, a la industria pesada, a la industria militar y a la industria petrolera en la facturación mundial.

Los grandes ejes de la evolución

“La experiencia histórica muestra que los cambios tecnológicos transforman notablemente las relaciones políticas y sociales”
John von Neumann

Podemos ver gráficamente cuáles han sido los grandes ejes de la impresionante evolución de las computadoras:



¿QUÉ ES LA INFORMÁTICA?

La informática nace de la idea de ayudar al hombre en aquellos trabajos rutinarios y repetitivos, generalmente de cálculo y gestión, donde es frecuente la repetición de tareas. La idea es que una máquina puede realizarlos mejor, aunque siempre bajo la supervisión del hombre.

El término **Informática** se creó en Francia en 1962 bajo la denominación *Informatique*, y procede de la contracción de las palabras *Information automatique*.

Posteriormente fue reconocido por el resto de los países, siendo adoptado por España en 1968 bajo el nombre de Informática, que como puede deducirse fácilmente, viene de la contracción de las palabras *Información automática*. En los países anglosajones se conoce con el nombre de *Computer Science*.

La informática se puede definir de diversas formas si bien todas ellas giran en torno a la misma idea. Dos de las más difundidas son:

Informática es la ciencia que estudia el tratamiento automático y racional de la información.
Informática es la ciencia que estudia el análisis y resolución de problemas utilizando computadoras.

- La palabra **ciencia** se relaciona con una metodología fundamentada y racional para el estudio y resolución de los problemas.
- La **resolución de problemas** utilizando las herramientas informáticas puede tener aplicaciones en áreas muy diferentes tales como biología, comercio, control industrial, administración, robótica, educación, arquitectura, diseño, etc.

Los temas propios de la ciencia Informática abarcan aspectos tales como la arquitectura física y lógica de las computadoras, las metodologías de análisis y diseño de sistemas de software, los lenguajes de programación, los sistemas operativos, la inteligencia artificial, los sistemas de tiempo real, el diseño y aplicación de bases de datos, etc.

Aplicaciones de la informática

“El grado de inteligencia que atribuimos al comportamiento de algo está determinado tanto por nuestra propia capacidad y comprensión como por las propiedades del objeto que analizamos”.

Alan Turing.

El universo de las aplicaciones informáticas es esencialmente multidisciplinario.

Las aplicaciones que pueden desarrollarse con una computadora van desde un sistema de gestión comercial, administrativo, hasta sistemas expertos que ayudan en la toma de decisiones, diseño asistido, controladores de vuelo automáticos, máquinas jugadoras de ajedrez, etc.

En esta tarea están involucradas personas de distintas disciplinas: matemáticos, ingenieros e informáticos. Los matemáticos brindan las herramientas básicas para que tanto ingenieros como informáticos puedan desarrollar su labor.

Por otro lado se encuentran los usuarios de las aplicaciones, que van desde especialistas que utilizan una determinada herramienta (economistas, docentes, músicos, médicos,

arquitectos, etc.) hasta entusiastas que navegan por Internet o juegan con un simulador de vuelo.

COMPONENTES Y FUNCIONAMIENTO BÁSICO DE UNA COMPUTADORA

Recordemos la definición que dimos de computadora:

Una **Computadora** es una máquina digital y sincrónica, con cierta capacidad de cálculo numérico y lógico, controlada por un programa almacenado, y con posibilidad de comunicación con el mundo exterior.

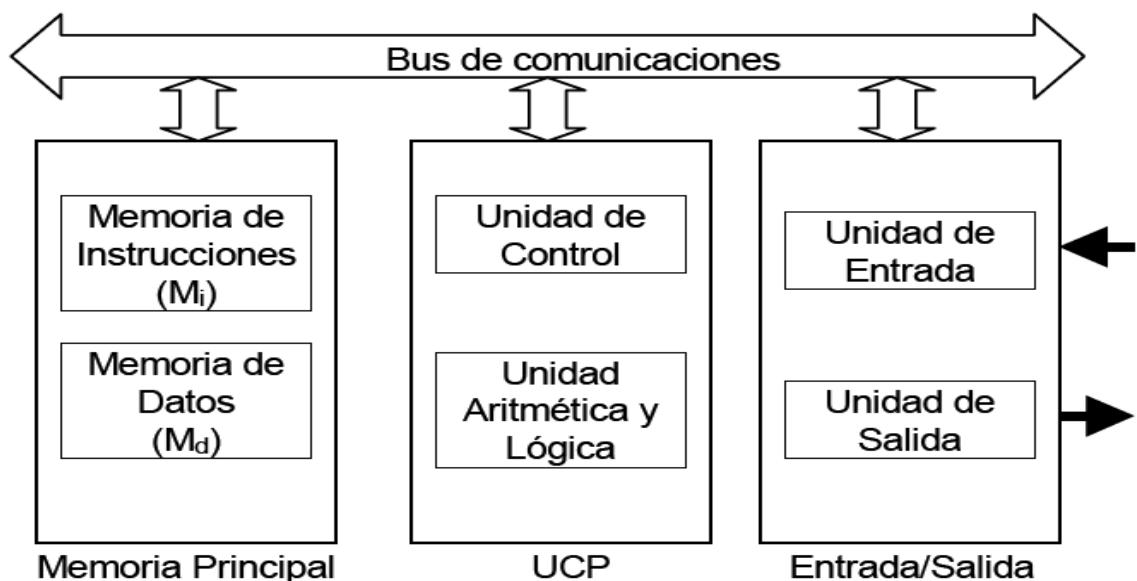
La mayoría de las computadoras actuales de propósito general presentan una estructura interna basada en la arquitectura definida por John Von Neumann.

Esta estructura interna debe contener aquellos componentes que permitan realizar el procesamiento de datos útiles para el problema a resolver.

Dado que se utilizará un programa que controlará la sucesión de pasos a seguir, será necesario no solamente tener una unidad de cálculo sino también una unidad de memoria.

Podrá también, ser necesario interactuar con el mundo exterior, tanto para obtener datos como para entregar resultados, por lo que unidades que se encarguen de la entrada y la salida de valores podrán estar presentes.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expresado, podemos esquematizarla de la siguiente manera



En el gráfico se ha dividido conceptualmente la memoria Principal **M** en dos partes:

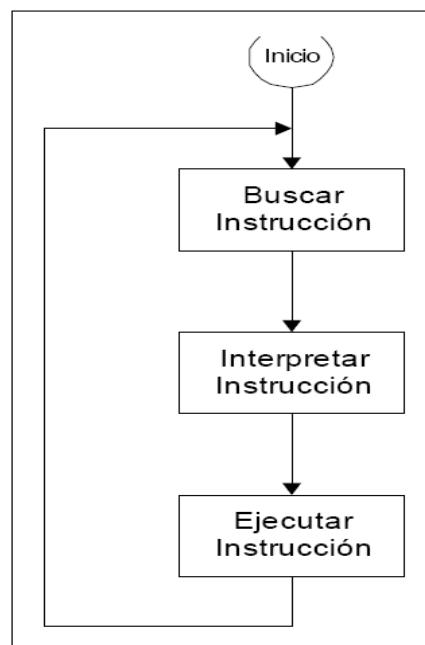
memoria de instrucciones Mi donde residen las órdenes que la computadora debe interpretar y ejecutar, y **memoria de datos Md** donde se almacena la información con la cual la computadora realizará los procesos (cálculos, decisiones, actualizaciones) que sean necesarios para la resolución del problema.

El bloque rotulado como **Entrada/Salida** representa los dispositivos que permiten la comunicación con el mundo real. Por ejemplo, el controlador de video que vincula el procesador central de la computadora con la pantalla o el circuito controlador de multimedia que permite tener salida por un parlante o entrada por un micrófono.

Las líneas de comunicación indicadas como bus de comunicaciones normalmente permiten el paso de tres grandes categorías de información: direcciones, datos y control. En el esquema simplificado se acepta que estas líneas permiten la comunicación interna y externa de datos, direcciones y señales de control.

Por último, tradicionalmente la combinación de la unidad de control UC y la unidad de cálculo UAL se la llama unidad central de procesamiento **UCP**, que en las computadoras personales está representada por el microprocesador (por ejemplo Pentium).

El *funcionamiento* de una Computadora, descripta como en el modelo anterior, se puede sintetizar con el siguiente esquema:



Esto representa una secuencia infinita de pasos:

- Buscar la próxima instrucción a ejecutar **l_i** de la memoria de instrucciones **Mi**
- Interpretar qué hacer con **l_i** en la Unidad de Control (UC).

- Ejecutar las operaciones interpretadas por UC, utilizando la UAL de ser necesario. Estas operaciones pueden comprender lectura/escritura de la memoria de datos **Md** o entrada/salida por los periféricos **Pe** o **Ps**.

En capítulos posteriores trataremos más en detalle sobre la estructura interna y el funcionamiento de las computadoras. Para finalizar, damos algunos conceptos:

El **hardware** se refiere a las componentes físicas de la computadora.

El **software** comprende los programas que se ejecutan sobre la computadora.

Un **bit** (dígito binario o *binary digit*) es la unidad de información más pequeña. Solo puede tener uno de dos valores: encendido o apagado (0 o 1, si o no, blanco o negro, etc.).

La *Unidad Central de Procesamiento* (UCP) o en su acrónimo en inglés CPU, es la encargada de interpretar y llevar a cabo las instrucciones de los programas. Efectúa manipulaciones aritméticas y lógicas con los datos y se comunica con las demás partes del sistema de cómputo.

PARTE 2 HARDWARE Y SOFTWARE

“A primera vista parecía un procesador de palabras Wang..., tenía un teclado Wang y un revestimiento Wang. Solamente cuando Richard Hagstrom le miró por segunda vez vio que el revestimiento había sido abierto (y no con cuidado, además; le pareció como si el trabajo se hubiera hecho con una sierra casera) para encajar en él un tubo catódico IBM ligeramente más grueso. Los discos de archivo que habían llegado con ese extraño bastardo no eran nada flexibles; eran tan duros como los disparos que Richard había oído de niño.

-Por el amor de Dios, ¿qué es esto? -preguntó Lina, cuando él y Mr. Nordhoff lo trasladaron penosamente hasta su despacho.”

Stephen King, El Ordenador de los dioses

HARDWARE Y SOFTWARE

La computadora presenta dos aspectos íntimamente relacionados: el **hardware** y el **software**. La palabra inglesa hardware se refiere a aquella parte “dura” o material. El término software designa aquella otra parte “blanda” o lógica. Así pues, etimológicamente, la computadora se compone de una parte dura y de una parte blanda. Estas expresiones han de entenderse metafóricamente. Significan que existen unos elementos materiales o tangibles, los que forman el llamado soporte físico del procesamiento de la información como los circuitos, los aparatos y terminales y también unos elementos intangibles de programación, que se designan como soporte lógico.

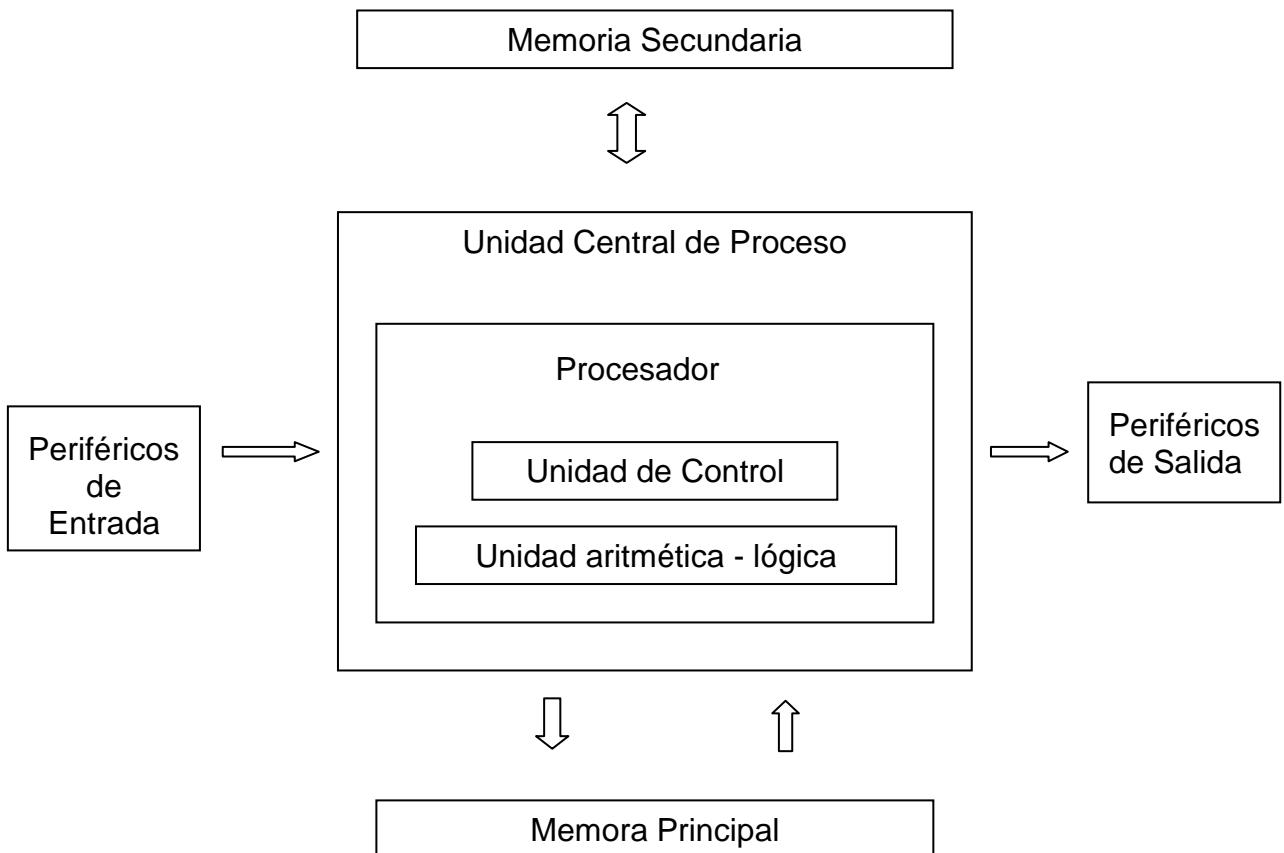
Hardware

Es el conjunto de elementos físicos (máquinas y circuitos) y puede ser comparado con la fuerza; el hardware difícilmente puede ser modificado, y abarca todos los componentes materiales de la propia computadora, sean mecánicos, eléctricos o electrónicos, así como las unidades periféricas, sean teclados, impresoras, monitores, etc..

Son todos los elementos físicos de un sistema informático, es decir, todos los materiales que lo componen, como la propia computadora, los dispositivos externos, los cables, en definitiva todos aquellos elementos que tienen entidad física.

Son dispositivos eléctricos, electrónicos y mecánicos que se usan para procesar datos.

Esquema Básico del Hardware



UNIDAD CENTRAL DE PROCESO:

La unidad central de proceso (UCP o CPU, Central Process Unit) es la encargada de interpretar ordenadamente las instrucciones almacenadas en la memoria para poder ser ejecutadas. La unidad central de proceso actúa como el cerebro de la unidad central multiusuario, y se encarga del control general y del envío de información a todos los demás elementos de la máquina (memoria principal y periféricos).

La unidad central de proceso está formada por la Unidad de Control (UC), incluyendo los registros en los que se almacena temporalmente la información manejada por la unidad central de proceso y la Unidad Operativa o Unidad Aritmético-Lógica (ALU).

La CPU es el centro neurálgico de cualquier sistema de ordenador digital, ya que es el que coordina y controla las actividades de todas las unidades periféricas y realiza los procesos de cálculos aritméticos y comparaciones lógicas que han de efectuarse con los datos.

Todas las instrucciones de programas que vayan a procesarse deben cargarse previamente en esta unidad.

Las funciones del CPU son: -representa datos e instrucciones

- almacena los datos en la memoria
- los transfiere internamente de una unidad a otra
- interpreta y ejecuta las instrucciones.

UNIDAD ARITMÉTICO-LÓGICA:

Ejecuta las instrucciones de tipo aritmético (como las cuatro operaciones básicas) y de tipo lógico (comparaciones).

La instrucción concreta a realizar le viene regida por la señal que le manda la Unidad de control, aunque lo ejecuta de manera autónoma.

Recoge los datos a operar (operando) de los registros convenientes y proporciona resultados en un registro al efecto.

LA UNIDAD DE CONTROL

Dirige todas las actividades del ordenador. Para ello dispone de un sincronizador, que es un reloj electrónico que intervalos regulares genera impulsos eléctricos que marcan un ciclo de base, el ciclo de máquina.

La ejecución de todas las operaciones elementales requiere un tiempo múltiplo de este ciclo de máquina. En los ordenadores modernos el ciclo de máquina suele ser de unos pocos nanosegundos.

No hay que confundir el ciclo de máquina con el ciclo de memoria, este último es el tiempo necesario para leer o escribir una posición de la memoria.

En base a la sincronización que le otorga el sincronizador y consumiendo el ciclo de máquina que hagan falta, la unidad de control, realiza las siguientes funciones:

- determina la secuencia en que las instrucciones deben ejecutarse
- interpreta la instrucción a ejecutar y encarga su materialización a la UAL, si es de tipo aritmético o lógica, o al canal si es de entrada o salida de datos.
- Se encarga de establecer la comunicación entre la UAL y la memoria principal a través de los registros.

Los elementos que contienen la unidad de control son: Contador de Programa, Registro de Instrucciones, Decodificador, Reloj, Secuenciador.

LA MEMORIA PRINCIPAL DE LA COMPUTADORA

Memoria, también llamada memoria de ordenador en España, se refiere a componentes de una computadora, dispositivos y medios de grabación que retienen datos informáticos durante algún intervalo de tiempo. Las memorias de computadora proporcionan una de las principales funciones de la computación moderna, la retención de información. Es uno de los componentes fundamentales de todas las computadoras modernas que, acoplados a una

Unidad Central de Proceso (CPU por su acrónimo en inglés), implementa lo fundamental del modelo de computadora de Von Neumann, usado desde los años 1940.

En la actualidad, memoria suele referirse a una forma de almacenamiento de estado sólido conocido como Memoria RAM (memoria de acceso aleatorio, RAM por sus siglas en inglés Random Access Memory) y otras veces se refiere a otras formas de almacenamiento rápido pero temporal. De forma similar, almacenamiento se refiere a formas de almacenamiento masivo como Discos ópticos y tipos de almacenamiento magnético como discos duros y otros tipos de almacenamiento más lento que las memorias RAM, pero de naturaleza más permanente.

La CPU, por medio de la memoria principal, la unidad de control y la unidad aritmético-lógica realiza las funciones siguientes:

- Representa datos e instrucciones.
- Almacena los mismos en la memoria.
- Los transfiere internamente de una unidad a otra.
- Interpreta y ejecuta las instrucciones.

La memoria es el lugar donde residen los datos e instrucciones y para operar con ellos es necesario llevarlos a la unidad aritmético-lógica. Los datos se representan internamente en la memoria principal mediante dígitos binarios (bits), éstos se agrupan en conjuntos de ocho unidades denominados bytes. La computadora emplea el sistema binario, pues, los dígitos de este sistema (cero y uno) pueden hacerse corresponder directamente con los estados posibles de un interruptor, es decir prendido o apagado.

La Memoria de la computadora

Las computadoras personales utilizan dos tipos, memoria de solo **lectura ROM (Read Only Memory)** y **memoria de acceso aleatorio o RAM (Random Access Memory)**. La memoria ROM de las PC almacena ciertos programas e información que necesita la computadora al encenderse. Estas instrucciones están grabadas y permanecen inalterables en el chip de memoria ROM, no pueden ser modificadas por el usuario, de ahí el calificativo de solo lectura. Se la conoce también como memoria no volátil porque no desaparece o se borra cuando se desconecta la electricidad. Las instrucciones básicas que se necesitan para arrancar una PC están almacenadas en la memoria ROM. A veces algunos programas utilitarios que suelen distribuirse junto con la PC vienen contenidos en memorias de este tipo.

La memoria RAM se usa para almacenar los programas necesarios para el funcionamiento de la computadora. Sin embargo dentro de la memoria RAM el usuario puede cambiar la

información, almacenarla o borrarla. La capacidad de la RAM afecta la forma en que se corren los programas y la cantidad de datos que pueden procesarse. La RAM es una memoria volátil; a menos que se guarde en algún dispositivo de almacenamiento secundario (por ejemplo un disquete), se pierde cuando la computadora se desconecta o se apaga.

El tamaño de la memoria se mide por la cantidad de bytes que puede almacenar, expresándose de la siguiente forma:

$$1 \text{ KB} = 1 \text{ Kilo byte} = 1.024 \text{ bytes}$$

$$1 \text{ MB} = 1 \text{ Megabyte} = 1.024.000 \text{ bytes} = 1.000 \text{ Kilobytes}$$

$$1 \text{ GB} = 1 \text{ Gigabyte} = 1.024.000.000 \text{ bytes} = 1.000 \text{ Megabytes}$$

PERIFERICOS

En informática, se denomina **periféricos** a los aparatos y/o dispositivos auxiliares e independientes conectados a la unidad central de procesamiento de una computadora.

Se consideran periféricos tanto a las unidades o dispositivos a través de los cuales la computadora se comunica con el mundo exterior, como a los sistemas que almacenan o archivan la información, sirviendo de memoria auxiliar de la memoria principal.

Se entenderá por periférico al conjunto de dispositivos que, sin pertenecer al núcleo fundamental de la computadora, formado por la CPU y la memoria central, permitan realizar operaciones de entrada/salida (E/S) complementarias al proceso de datos que realiza la CPU. Estas tres unidades básicas en un computador, CPU, memoria central y el subsistema de E/S, están comunicadas entre sí por tres buses o canales de comunicación:

- direcciones, para seleccionar la dirección del dato o del periférico al que se quiere acceder,
- control, básicamente para seleccionar la operación a realizar sobre el dato (principalmente lectura, escritura o modificación) y
- datos, por donde circulan los datos.

A pesar de que el término periférico implica a menudo el concepto de “*adicional pero no esencial*”, muchos de ellos son elementos fundamentales para un sistema informático. El teclado y el monitor, imprescindibles en cualquier computadora personal de hoy en día (no lo fueron en los primeros computadores), son posiblemente los periféricos más comunes, y es posible que mucha gente no los considere como tal debido a que generalmente se toman

como parte necesaria de una computadora. El ratón o *mouse* es posiblemente el ejemplo más claro de este aspecto. Hace menos de 20 años no todos las computadoras personales incluían este dispositivo. El sistema operativo MS-DOS, el más común en esa época, tenía una interfaz de línea de comandos para la que no era necesario el empleo de un ratón, todo se hacía mediante comandos de texto. Fue con la popularización de Finder, sistema operativo de la Macintosh de Apple y la posterior aparición de Windows cuando el ratón comenzó a ser un elemento imprescindible en cualquier hogar dotado de una computadora personal. Actualmente existen sistemas operativos con interfaz de texto que pueden prescindir del ratón como, por ejemplo, algunos sistemas básicos de UNIX y GNU/Linux.

Periféricos de entrada

Son los que permiten introducir datos externos a la computadora para su posterior tratamiento por parte de la CPU. Estos datos pueden provenir de distintas fuentes, siendo la principal un ser humano. Los periféricos de entrada más habituales son:

- Teclado
- Micrófono
- Escáner
- Ratón o mouse
- Escáner de código de barras
- Cámara web
- Lápiz óptico
- Cámara digital



Periféricos de salida

Son los que reciben la información procesada por la CPU y la reproducen, de modo que sea perceptible por el usuario. Algunos ejemplos son:

- Visualizador
- Monitor
- Impresora
- Fax
- Tarjeta de sonido
- Altavoz
- Proyector digital
- Auriculares



Periféricos de almacenamiento

Se encargan de guardar los datos de los que hace uso la CPU, para que ésta pueda hacer uso de ellos una vez que han sido eliminados de la memoria principal, ya que ésta se borra cada vez que se apaga la computadora. Pueden ser internos, como un disco duro, o extraíbles, como un CD. Los más comunes son:

- Disco duro
- Disquete
- Unidad de CD
- Unidad de DVD
- Unidad de Blu-ray Disc
- Memoria flash
- Memoria USB
- Cinta magnética
- Tarjeta perforada
- Memoria portátil
- Otros dispositivos de almacenamiento:
 - Zip (Iomega): Caben 100 Mb y utiliza tecnología magnética.
 - EZFlyer (SyQuest): Caben 230 Mb y tiene una velocidad de lectura muy alta
 - SuperDisk LS-120: Caben 200 Mb y utilizan tecnología magneto-óptica.
 - Magneto-ópticos de 3,5: *Caben de 128 Mb a 640 Mb*
 - Jaz (Iomega): Similar al dispositivo Zip y con capacidad de 1 GB a 2 GB.



Periféricos de comunicación

Su función es permitir o facilitar la interacción entre dos o más computadoras, o entre una computadora y otro periférico externo a la computadora. Entre ellos se encuentran los siguientes:

- Fax-Módem
- Tarjeta de red
- Concentrador
- Comutador
- Enrutador
- Tarjeta inalámbrica
- Tarjeta Bluetooth



LA NECESIDAD DEL "SOFTWARE"

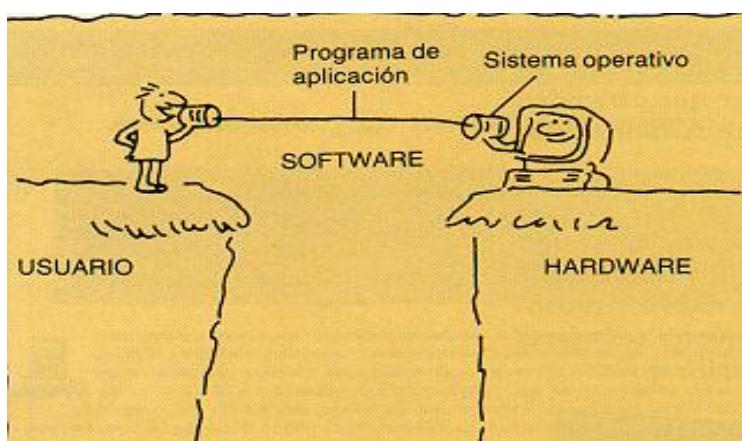
Hemos visto que la **Informática** es la ciencia que estudia el análisis y resolución de problemas utilizando computadoras.

También se ha mencionado que el mundo real es **naturalmente complejo** y los problemas a resolver con herramientas informáticas pueden ser muy variados.

Hemos analizado el funcionamiento esencial de una **Computadora** como una máquina digital y sincrónica, con cierta capacidad de cálculo numérico y lógico, controlada por un programa almacenado, y con posibilidad de comunicación con el mundo exterior.

Nuestras computadoras, como herramientas de resolución de problemas son muy pobres, si no disponemos de **programas adecuados** para utilizarlas.

*En síntesis, la distancia entre los usuarios (que tienen los problemas del mundo real) y las computadoras (que los podrían ayudar a resolver) requiere un puente lógico y conceptual que está constituido por el **software**.*



Precisamente, gran parte de la actividad profesional de un egresado de Informática es desarrollar **Ingeniería de Software**, que es el área de la Ciencia Informática que trata el análisis, diseño e implementación de sistemas de software.

La producción de sistemas de software (que constituyen el puente útil entre el usuario y la computadora) es una **actividad industrial** que requiere métodos, herramientas y procedimientos que se estudian a lo largo de la carrera.

SOFTWARE

CONCEPTO DE SOFTWARE

Software, palabra proveniente del inglés (literalmente: partes blandas o suaves), que en nuestro idioma no posee una traducción adecuada al contexto, por lo cual se la utiliza asiduamente sin traducir y fue adoptada por la Real Academia Española (RAE). Se refiere al equipamiento lógico o soporte lógico de un computador digital, comprende el conjunto de los componentes lógicos necesarios para hacer posible la realización de una tarea específica, en contraposición a los componentes físicos del sistema (hardware). Tales componentes lógicos incluyen, entre otras, aplicaciones informáticas tales como procesador de textos, que permite al usuario realizar todas las tareas concernientes a edición de textos; software de sistema, tal como un sistema operativo, el que, básicamente, permite al resto de los programas funcionar adecuadamente, facilitando la interacción con los componentes físicos y el resto de las aplicaciones, también provee una interface ante el usuario. El software es capaz de hacer que un computador ejecute una tarea u obtenga un resultado. El software es la parte lógica que dota al equipo físico de capacidad para realizar cualquier tipo de trabajo.

Otra definición

Conjunto de Instrucciones de programa de computador que dirige la operación del hardware. Un conjunto de instrucciones para una tarea específica se llama **Rutina**. Un conjunto completo de instrucciones para ejecutar un conjunto de tareas relacionadas se llama **PROGRAMA**.

CLASIFICACIÓN DEL SOFTWARE

Si bien esta distinción es, en cierto modo, arbitraria, y a veces confusa, a los fines prácticos se puede clasificar al software en tres grandes tipos:

- **Software de sistema:** Su objetivo es desvincular adecuadamente al usuario y al programador de los detalles del sistema informático en particular que se use, aislando especialmente del procesamiento referido a las características internas de: memoria, discos, puertos y dispositivos de comunicaciones, impresoras, pantallas, teclados, etc. El software de sistema le procura al usuario y programador adecuadas interfaces de alto nivel, controlador, herramientas y utilidades de apoyo que permiten el mantenimiento del sistema global. Incluye entre otros:
 - Sistemas operativos
 - Controladores de dispositivos
 - Herramientas de diagnóstico

- Herramientas de Corrección y Optimización
 - Servidores
 - Utilidades
- **Software de programación:** Es el conjunto de herramientas que permiten al programador desarrollar programas informáticos, usando diferentes alternativas y lenguajes de programación, de una manera práctica. Incluyen básicamente:
 - Editores de texto
 - Compiladores
 - Intérpretes
 - Enlazadores
 - Depuradores
 - Entornos de Desarrollo Integrados (IDE): Agrupan las anteriores herramientas, usualmente en un entorno visual, de forma tal que el programador no necesite introducir múltiples comandos para compilar, interpretar, depurar, etc. Habitualmente cuentan con una avanzada interfaz gráfica de usuario (GUI).
 - **Software de aplicación:** Es aquel que permite a los usuarios llevar a cabo una o varias tareas específicas, en cualquier campo de actividad susceptible de ser automatizado o asistido, con especial énfasis en los negocios. Incluye entre muchos otros:
 - Aplicaciones para Control de sistemas y automatización industrial
 - Aplicaciones ofimáticas
 - Software educativo
 - Software empresarial
 - Bases de datos
 - Telecomunicaciones (por ejemplo Internet y toda su estructura lógica)
 - Videojuegos
 - Software médico
 - Software de cálculo Numérico y simbólico.
 - Software de diseño asistido (CAD)
 - Software de control numérico (CAM)

SOFTWARE DE SISTEMA

Estos programas son considerados como los principales de una computadora. Debido a que si la computadora no tiene un sistema operativo esta no funciona.

De esta manera podemos definir a un sistema operativo como el programa que toma el control de los recursos físicos y lógicos de la computadora; así como también administrar la

información almacenada en ella.

El Sistema Operativo: Es un administrador de recursos, tales como:

Proceso de entradas y salidas - Memoria - Archivos

Es un conjunto de programas y funciones que controlan el funcionamiento del hardware ofreciendo al usuario una vía sencilla y flexible de acceso a la computadora.

- El sistema operativo cumple varias funciones:

Administración del procesador: el sistema operativo administra la distribución del procesador entre los distintos programas por medio de un algoritmo de programación. El tipo de programador depende completamente del sistema operativo, según el objetivo deseado.

Gestión de la memoria de acceso aleatorio: el sistema operativo se encarga de gestionar el espacio de memoria asignado para cada aplicación y para cada usuario, si resulta pertinente. Cuando la memoria física es insuficiente, el sistema operativo puede crear una zona de memoria en el disco duro, denominada "memoria virtual". La memoria virtual permite ejecutar aplicaciones que requieren una memoria superior a la memoria RAM disponible en el sistema. Sin embargo, esta memoria es mucho más lenta.

Gestión de entradas/salidas: el sistema operativo permite unificar y controlar el acceso de los programas a los recursos materiales a través de los drivers (también conocidos como administradores periféricos o de entrada/salida).

Gestión de ejecución de aplicaciones: el sistema operativo se encarga de que las aplicaciones se ejecuten sin problemas asignándoles los recursos que éstas necesitan para funcionar. Esto significa que si una aplicación no responde correctamente puede "sucumbir".

Administración de autorizaciones: el sistema operativo se encarga de la seguridad en relación con la ejecución de programas garantizando que los recursos sean utilizados sólo por programas y usuarios que posean las autorizaciones correspondientes.

Gestión de archivos: el sistema operativo gestiona la lectura y escritura en el sistema de archivos, y las autorizaciones de acceso a archivos de aplicaciones y usuarios.

Gestión de la información: el sistema operativo proporciona cierta cantidad de indicadores que pueden utilizarse para diagnosticar el funcionamiento correcto del equipo.

Los sistemas operativos controlan diferentes procesos de la computadora. Un proceso importante es la interpretación de los comandos que permiten al usuario comunicarse con el ordenador. Algunos intérpretes de instrucciones están basados en texto y exigen que las instrucciones sean tecleadas. Otros están basados en gráficos, y permiten al usuario comunicarse señalando y haciendo clic en un ícono. Por lo general, los intérpretes basados

en gráficos son más sencillos de utilizar.

- Los sistemas operativos pueden ser: de tarea única o multitarea.

Los sistemas operativos de tarea única, más primitivos, sólo pueden manejar un proceso en cada momento. Por ejemplo, cuando la computadora está imprimiendo un documento, no puede iniciar otro proceso ni responder a nuevas instrucciones hasta que se termine la impresión.

Todos los sistemas operativos modernos son multitarea y pueden ejecutar varios procesos simultáneamente. En la mayoría de los ordenadores sólo hay una UCP; un sistema operativo multitarea crea la ilusión de que varios procesos se ejecutan simultáneamente en la UCP. El mecanismo que se emplea más a menudo para lograr esta ilusión es la multitarea por segmentación de tiempos, en la que cada proceso se ejecuta individualmente durante un periodo de tiempo determinado. Si el proceso no finaliza en el tiempo asignado, se suspende y se ejecuta otro proceso. El sistema operativo se encarga de controlar el estado de los procesos suspendidos. También cuenta con un mecanismo llamado planificador que determina el siguiente proceso que debe ejecutarse. El planificador ejecuta los procesos basándose en su prioridad para minimizar el retraso percibido por el usuario. Los procesos parecen efectuarse simultáneamente por la alta velocidad del cambio de contexto.

- Los sistemas operativos se clasifican en:

Sistema operativo monousuario.

Este tipo de sistema operativo puede ser utilizado solamente por un usuario a la vez. Por ejemplo: MS-DOS, OS/2 v. 3.0, Windows 95, Windows 98, Windows Me y Windows XP son sistemas operativos monousuarios.

Sistema operativo multiusuario.

Es un sistema operativo que puede ser utilizado por varios usuarios al mismo tiempo. Por ejemplo: Unix, Solaris y Windows 2000 (Terminal server) son sistemas operativos multiusuarios.

Sistema operativo de red.

Sistema operativo que permite la conexión entre varias computadoras personales y compartir sus recursos entre ellas. Por ejemplo: Novell, Windows NT, Windows 2000 Professional, Windows 2000 Server, Windows XP Professional y Windows 2003 Server y Professional son sistemas operativos de red.

Algunos ejemplos de Sistemas Operativos

Familias de Sistemas operativos para distintas plataformas Hardware:

Familia OSBOS

- . BeOS, Haiku, Zeta, BlueEyedOS, Cosmoe, BeFree, Sequel, Mockup/BeOS

Familia Amiga

- . AmigaOS, WarpOS (AmigaOS + subsistema PowerPC), MorphOS

Familia Macintosh

- . Mac OS, Mac OS X

Familia QNX

- . RTOS, Neutrino, RTP

Familia DOS

- . MS-DOS, DR-DOS (antiguo DOS Plus o CP/M) , PC-DOS, FreeDOS, Novell DOS, QDOS

Familia Windows

- . Windows, Windows NT, Windows Ce, XP 64 bits, Vista, Windows Mobile, Windows Tablet

Familia IBM

- . OS/2, Warp, eComStation, OS/360, OS/370, OS/390, OS/400

Familia UNIX

- . AIX, AMIX, GNU/Linux (Distribuciones), GNU/Hurd, HP-UX, Irix, Minix, System V, Solaris, UnixWare, LynxOS, Xenix, Digital UNIX, SCO Unix

Familia BSD

- . FreeBSD, DragonFlyBSD, NetBSD, VINO, OpenBSD, PicoBSD, Darwin, GNU/Darwin

Familia Mach

- . GNU/Hurd, BSD lites, Mac OS X, NEXTSTEP, YAMIT, MKlinux

Sistemas operativos académicos o experimentales (Betas)

- . Chorus/Jaluna, Amoeba, MIT Exokernel, BriX
- . Plan9, VMS, Tron , Aos (Bluebottle)

Actualmente los sistemas operativos más usados son la familia Windows y la familia UNIX.



Para Móviles

A medida que los teléfonos móviles crecen en popularidad, los sistemas operativos con los que funcionan adquieren mayor importancia. La cuota de mercado de sistemas operativos móviles a mediados de 2012 era el siguiente:

1. Android 68,1% (En países como España las diferencias son más significativas, donde Android tiene el 87% de la cuota de mercado.)
2. iOS 16,9%
3. BlackBerry OS 4,8%
4. Symbian OS 4,4%
5. Windows Phone y Windows Mobile 3,5 %
6. Linux u otros 2,3%



SOFTWARE DE DESARROLLO

Este tipo de software es el que no proporciona diferentes herramientas necesarias para ayudar al usuario a realizar el desarrollo de programas informáticos. Es un conjunto de órdenes, sentencias, mandatos o instrucciones que permiten codificar algoritmos para luego

ser ejecutados en una computadora.

Lenguajes de Programación

Los lenguajes de programación nos permiten crear aplicaciones para resolver problemas específicos de empresas o personas a través de la computadora. Un lenguaje de programación está formado por un conjunto de palabras (Instrucciones) y una serie de reglas para escribir adecuadamente estas palabras (Sintaxis) con la finalidad de que sean entendibles por la computadora.

Un programa es un conjunto de instrucciones con secuencia lógica para realizar una tarea específica en la computadora.

Los lenguajes utilizados para escribir programas de computadoras que puedan ser entendidos por ellas se denominan lenguajes de programación.

Los lenguajes de programación se clasifican en tres grandes categorías:

→ Maquina

→ Bajo Nivel

→ Alto Nivel

Lenguaje de Máquina

Los lenguajes máquina, son aquellos cuyas instrucciones son directamente entendibles por la computadora y no necesitan traducción posterior para que la UCP, pueda entender y ejecutar el programa.

Las instrucciones en lenguaje de maquina, se expresan en términos de la unidad de memoria más pequeña, el bit (dígito binario 0 o 1), en esencia una secuencia de bits que especifican la operación y las celdas implicadas en una operación. Una serie de instrucciones en lenguaje maquina son:

0010 0000 0000 1001 1001 0001 1001 1110

Como se puede observar, estas instrucciones serán fáciles de leer por la computadora y difíciles por un programador, y viceversa. Esta razón hace difícil escribir programas en código o lenguaje a maquina y requiere buscar otro lenguaje para comunicarse con la computadora, pero que sea mas fácil de escribir y leer por el programador.

Para evitar la tediosa tarea de escribir programas en lenguaje maquina, se han diseñado otros lenguajes de programación que facilitan la escritura y posterior ejecución de los programas.

Estos lenguajes son los de bajo y alto nivel.

Lenguajes de Bajo Nivel (ensambladores)

La programación en lenguaje maquina es difícil, por ello se necesitan lenguajes que permitan simplificar este proceso. Los lenguajes de bajo nivel han sido diseñados para ese fin. Estos lenguajes dependen de la maquina, es decir, dependen de un conjunto de instrucciones específicas de la computadora.

Un lenguaje típico de bajo nivel es el lenguaje ensamblador. En este lenguaje las instrucciones se escriben en códigos alfabéticos conocidos como nemotécnicos (abreviaturas de palabras inglesas o españolas). Así, por ejemplo, nemotécnicos típicos son:

ADD suma

MPY multiplicar

Las palabras nemotécnicas son mucho más fáciles de recordar que las secuencias de dígitos 0 y 1. Una instrucción típica en ensamblador puede ser:

ADD X, Y, Z

Esta instrucción significa que se deben sumar los números almacenados en las direcciones x, y y almacenar el resultado en la dirección z.

El programa ensamblador traducirá la instrucción a código de maquina.

Por ejemplo:

ADD se puede traducir a 1110

x se puede traducir por 1001

Lenguajes de Alto Nivel

Los lenguajes de programación de alto nivel son aquellos en los que las instrucciones o sentencias a la computadora son escritas con palabras similares a los lenguajes humanos -- en general lenguaje inglés, como es el caso de QuickBASIC--, lo que facilita la escritura y la fácil compresión por el programador.

Por ejemplo, la línea siguiente es una línea de un programa QuickBASIC:

IF (x=y) AND (z=w) THEN PRINT "Esto es una prueba"

Que simbólicamente quiere decir:

si (x=y) y (z=w) entonces escribir "Esto es una prueba"

Esta línea se puede comprender fácilmente conociendo la traducción de las palabras inglesas IF (si), THEN (entonces), PRINT (escribir / imprimir), AND (y) y sin necesidad de

muchas explicaciones.

Características:

Los lenguajes de programación son transportables. Significa que un programa escrito en un lenguaje de alto nivel se puede escribir con poca o ninguna modificación en diferentes tipos de computadoras.

Otra propiedad de estos lenguajes es que son independientes de la máquina, es decir, las sentencias del programa no dependen del diseño o hardware de una computadora específica.

Los programas escritos en lenguaje de alto nivel no son entendibles directamente la máquina. Necesitan ser traducidos a instrucciones en lenguaje máquina que entiendan las computadoras.

Los programas que realizan esta traducción se llaman compiladores, y los programas escritos en un lenguaje de alto nivel se llaman programas fuentes,

El compilador traduce el programa fuente en un programa llamado programa objeto. Este programa objeto se utiliza en la fase de ejecución del programa.

Algunas computadoras especialmente microcomputadoras, utilizan unos programas similares llamados intérpretes que traducen los programas.

El proceso de traducción de un programa fuente a un programa objeto se denomina interpretación o compilación, según sea el programa.

Un *intérprete* traduce y ejecuta una instrucción (sentencia) en código fuente, cada vez. Los programas interpretados generalmente se ejecutan mucho más lentamente que los programas *compilados*; sin embargo, los intérpretes son más fáciles de utilizar y la depuración de errores es mucho más cómoda.

BASICA y GW-BASIC son intérpretes y QuickBASIC es un compilador. El lenguaje QuickBASIC realiza la traducción y ejecución cada vez que se ejecuta una línea.

Ejemplos:

Lenguaje	Principal área de aplicación
ADA	Tiempo real

BASIC	Programación para fines educativos
C	Programación de sistema
C++	Programación de sistema orientado a objeto
Cobol	Administración
Fortran	Cálculo
Java	Programación orientada a Internet
LISP	Inteligencia artificial
Pascal	Educación
PHP	Desarrollo de sitios web dinámicos
Perl	Procesamiento de cadenas de caracteres

SOFTWARE DE APLICACIÓN

Una aplicación es un programa informático diseñado para facilitar al usuario la realización de un determinado tipo de trabajo. Posee características que le diferencia de un Sistema Operativo y de un Lenguaje de Programación

Los programas de aplicación están diseñados para realizar una tarea específica dependiendo de la finalidad para la cual fueron creados. Existe una gran variedad de programas de aplicación de acuerdo a su uso. Son programas que dirigen el funcionamiento de la computadora para la realización de trabajos específicos denominados aplicaciones

Planilla de Cálculo

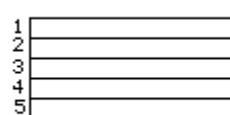
Programas orientados al manejo de información donde se requiera realizar cálculos matemáticos. Una hoja de cálculo es similar a las hojas tabulares utilizadas en contabilidad y se desarrollaron para que realicen las mismas funciones que estas con la ventaja de que los cálculos y la actualización de la información se pueden hacer más rápidos, sencillos y con menos margen de error.

Es la aplicación que más se utiliza para la mayoría de los documentos que organizan información numérica, como presupuestos, estados financieros, planillas de calificaciones y registros de ventas. Una Planilla de Cálculo puede ejecutar operaciones simples o complejas con los números que ingrese en filas y columnas.

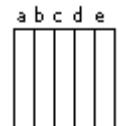
Una planilla de cálculo está compuesta por

**Filas (con números)
y
Columnas (con letras)**

Crear una grilla

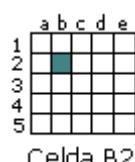


Filas



Columnas

Celda (intersección de fila con columna) Ubicaciones para el texto y los números



Celda B2

Rango (conjunto de celda) Puede ser horizontales, verticales, matriciales

A2 : D2
B3 : B9
C3 : F8

Una planilla puede contener:

Número
Letras
Formulas
Graficos

Ejemplos: Lotus, Quattro pro, Microsoft Excel , Calc son hojas de cálculo.

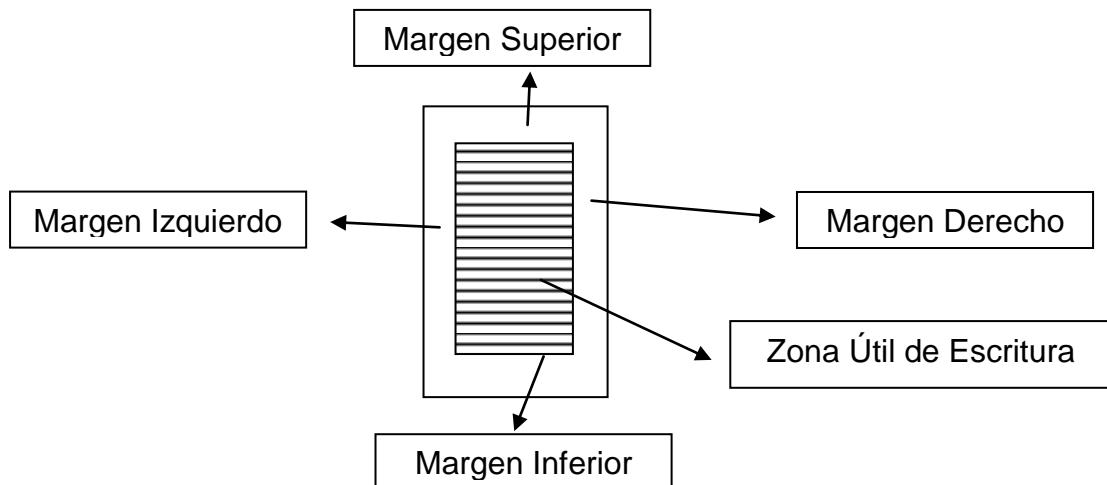
Procesador De Palabras

Programas orientados a la creación de documentos de texto, tienen las funciones similares a las de una máquina de escribir con la diferencia de tener grandes ventajas en su uso con respecto a estas.

Los procesadores de palabras han reemplazado a la máquina de escribir como la herramienta principal para generar documentos sobre papel y poder revisarlos y corregirlos antes de ser impresos. Un documento grabado puede ser utilizado como plantilla. De esta manera el usuario no necesita repetir los documentos comunes desde el principio en cada modificación. Este es un importante elemento para ahorrar tiempo y ayuda a mantener las cosas en orden.



Parte de una hoja de trabajo en un Procesador de Texto:



Ejemplos: WordPerfect, Lotus WordPro, Microsoft Word, Write

Gestor de Base De Datos

Programas que permiten manipular grandes cantidades de información, son utilizados para administrar los sistemas de información de las empresas como control de inventario, facturación, control escolar, recursos humanos, etc.

Una Base de Datos es un conjunto de datos que se desea administrar, pudiendo agregar, sacar o modificar esos datos. Es un buen programa para ser utilizado para administrar listas que no son todos números, como direcciones y números de teléfono, inventarios y listas de socios. Con una base de datos puede ordenar los datos por nombre, ciudad o código postal o por cualquier rubro individual de la información registrada. Puede crear formularios para ingresar o actualizar o solo mostrar los datos. Puede crear informes que muestran solamente los datos que le interesan, como socios que deben su cuota.

Esta formada por campos, los cuales hacen un archivo, y este conjunto de archivos hacen un fichero, si este posee una serie de características hacen una base de datos.

Ejemplos: MS Access, dBase, FoxPro, Paradox, Oracle- Base

Diseño gráfico.

Programas orientados al diseño y creación de material publicitario, de dibujo técnico y artístico. Estos programas hacen más accesible el área de dibujo para que todas las personas puedan desarrollar su creatividad. Por ejemplo: Autocad, Page Maker, Photo Draw, Front Page, Corel y Publisher son programas de diseño gráfico y autoedición.

Navegadores.

Programas que nos permiten navegar por la red mundial de la información (INTERNET) y aprovechar al máximo las bondades que nos ofrece Internet. Por ejemplo: NetScape, Opera e Internet Explorer son algunos programas navegadores.

Multimedia.

Programas orientados a la creación de material donde usted podrá combinar Imágenes, Sonido y Texto para desarrollar material atractivo en la computadora. Por ejemplo: Flash, Director, Microsoft Producer, Movie Maker, Corel RAVE y Media Player son programas de Multimedia.

Antivirus.

Programas orientados a la protección de las computadoras que hayan sido infectadas por los programas denominados virus. Por ejemplo: Virus Scan, Norton Antivirus y Panda son programas antivirus.

Presentadores gráficos.

Estos programas permiten generar material de apoyo para la realización de una presentación. Donde se podrá utilizar Texto, Gráficos, Sonidos, Efectos especiales en los archivos para lograr un mejor impacto con la audiencia. Por ejemplo: Freelance y PowerPoint son programas para realizar presentaciones gráficas.

Programas de comunicaciones.

Programas orientados a la comunicación entre computadoras. Por lo general son utilizados cuando se maneja una red de computadoras, o se quiere dar soporte a distancia de una computadora a otra. Por ejemplo: PC Anywhere y Outlook son programas de comunicación.

LA INTERFAZ DEL USUARIO CON EL SISTEMA OPERATIVO

El modo en que el sistema operativo se comunica con el usuario constituye la **interfaz** del mismo.

La interfaz es particularmente importante para establecer una vinculación amigable entre el usuario de la computadora y el manejo de la misma que da el sistema operativo.

Históricamente las interfaces estuvieron basadas en **comandos** formados por palabras clave que se combinaban con una sintaxis determinada para ser interpretados por el sistema operativo. Estas interfaces se denominan **orientadas a caracteres**.

El ejemplo clásico de una interfaz orientada a caracteres es el sistema operativo DOS que ¿todos? conocen de las primitivas PCs.

Las ventajas que tienen las interfaces orientadas a caracteres son su simplicidad, confiabilidad y poco costo en el desarrollo del sistema operativo que las soporta.

Las desventajas son que requieren un usuario calificado que estudie y conozca los comandos, lo cual resulta muy restrictivo para la difusión del uso de las computadoras.

En los últimos años se han impuesto las **interfaces gráficas** que contienen imágenes representativas (por ejemplo de los archivos o dispositivos o de los comandos), llamadas **iconos** que se pueden organizar en menús que se abren y cierran (**menús descendentes**) y que pueden expandirse en presentaciones dentro de múltiples **ventanas** en la pantalla. En todos los casos el dispositivo apuntador a las selecciones del usuario es fundamentalmente el mouse.

Ventajas de las interfaces gráficas tipo VIMA

VIMA (WIMP en inglés) significa Ventanas, Iconos, Menús y Apuntadores, como interfaz de usuario tiene una serie de ventajas:

- **Son intuitivas.** El usuario no necesita estudiar un manual de comandos para comprender lo que la imagen le muestra en un menú.
- **Son consistentes.** Toda una gama de aplicaciones (por ejemplo los múltiples programas de un Office) tienen la misma forma de interfaz, lo que favorece el aprendizaje y la seguridad del usuario en su utilización.
- **Facilitan el autoaprendizaje al ser repetitivas.**
- **Incorporan mecanismos de seguridad.** Se trata de impedir determinados errores mediante mensajes y bloqueos para el usuario (por ejemplo borrar inadvertidamente un disco rígido) y también se trata de permitir “volver atrás”, de modo de corregir alguna secuencia incorrecta de acciones.
- **Incrementan la flexibilidad.** En particular se puede usar simultánea o alternativamente el teclado o el mouse.

¿Cuál es el futuro?

La tendencia es a las interfaces naturales: poder hablar directamente a la computadora indicando lo que se quiere, y tener una respuesta auditiva o gráfica. Ya existen productos de hardware y software que permiten manejar un procesador de textos directamente al dictado de voz, o tener el mailing de una organización por voz.

Las aplicaciones de inteligencia artificial (en particular los agentes inteligentes) aplicados al manejo de la vinculación entre el sistema operativo y el usuario, tienden a facilitar el trabajo “interpretando” las elecciones más frecuentes del usuario y los “deseos” según el tipo de proceso a realizar. Un ejemplo muy elemental de esta tendencia lo constituyen las ayudas

interactivas de algunos productos bajo Windows (por ejemplo el asistente de presentaciones de Power Point)



PARTE 3

SISTEMAS DE NUMERACION

¿Cuántos camellos hay?. Para responder a esta pregunta hay que emplear el número. ¿Serán cuarenta? ¿Serán cien? Para llegar al resultado el beduino precisa poner en práctica cierta actividad. El beduino necesita contar. Para contar, el beduino relaciona cada objeto de la serie con cierto símbolo: uno, dos, tres, cuatro,... Para dar el resultado de la cuenta, o mejor el número, el beduino precisa inventar un sistema de numeración.

Se denomina sistema de numeración al conjunto de símbolos y reglas que se utilizan para la representación de datos numéricos o cantidades. Un sistema de numeración se caracteriza fundamentalmente por su *base*, que es el número de símbolos distintos que utiliza, y además es el coeficiente que determina cuál es el valor de cada símbolo dependiendo de la posición que ocupe

Pero esto no es práctico, y se torna engorroso para cantidades grandes, y más aún para operar con ellas.

Después de muchos intentos de las distintas civilizaciones comenzaron a utilizarse símbolos y surgieron dos categorías de sistemas numéricos:



El orden o ubicación de los símbolos es significativa en la representación del número. Estos sistemas tienen un conjunto de símbolos (dígitos del sistema) y una base (cantidad de símbolos diferentes que pueden

Las cantidades se expresan mediante la combinación de símbolos que no tienen un valor relativo a la posición que ocupan. Por ejemplo, en el sistema de numeración romana el 24 es equivalente a XXIV

ocupar una posición dada)

La categoría que nos ocupa en este trabajo es la primera. Y estableceremos en primer término, las propiedades que se cumplen en todos los sistemas numéricos posicionales:

- I) Un sistema numérico consiste de un conjunto ordenado de símbolos llamados **dígitos** o **cifras**, con relaciones definidas para la adición (+), sustracción (-), multiplicación (x) y división (/).
- II) La **base** del sistema numérico es el número total de dígitos permitidos.

La siguiente tabla muestra los sistemas más usuales:

SISTEMAS NUMÉRICOS	BASE	DÍGITOS DISCRETOS
Decimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Binario *	2	0, 1
Octal	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Hexadecimal **	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

* Utilizado en electrónica y computación, ya que los símbolos son solamente 0 y 1. El 1 representa el paso de corriente y el 0 la ausencia de ésta (algo así como "prendido" y "apagado").

** En este caso faltan símbolos, por lo que a los dígitos se agregan algunas letras para completar el conjunto de dieciséis cifras discretas:

$$A = 10; B = 11; C = 12; D = 13; E = 14; F = 15$$

Estos sistemas no son los únicos. Nada nos impide escoger otra base: 3, 4, 5, ..., etc., en cuyo caso tendremos tantos sistemas numéricos como bases determinemos. En todos ellos, la forma de contar se puede generalizar en las siguientes reglas que formularemos a continuación:

REGLAS DE CONTEO

- I) La base (“ b ” en adelante) de conteo de un sistema es igual al número de cifras discretas disponibles.
- II) Siempre que una columna ha llegado al último valor discreto y recibe otra unidad, regresa a 0 (cero) y “acarrea” 1 (uno) a la columna que le sigue en significación a al izquierda.
- III) La columna en el extremo derecho es la menos significativa, cuenta unidades. Cada conteo en la segunda columna es igual al producto de cada dígito discreto por la base del sistema.

Ejemplificando en el sistema decimal lo dicho anteriormente, tenemos:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 9 \\
 + 1 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 19 \\
 + 1 \\
 \hline
 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 99 \\
 + 1 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

← acarreo

segunda columna ← → columna de unidades

$10 = 1 \times 10$
 $20 = 2 \times 10$
 $30 = 3 \times 10$

 $90 = 9 \times 10$

Lo siguiente pone de manifiesto el principio fundamental de la numeración decimal: *toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las que representa la anterior y viceversa, toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que representa la anterior.*

Por ejemplo, cuando escribimos el número 134,68, significa:

$$1 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1 + 6 \times 0,1 + 8 \times 0,01$$

o equivalentemente en potencias de 10:

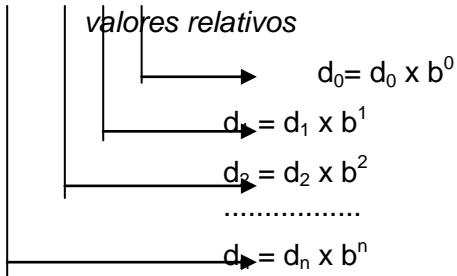
$$1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$

El primer dígito a la izquierda de las unidades representa naturalmente, el número de veces que se toma diez a la primera potencia, o sea, la decena. El siguiente dígito a la izquierda representa el número de veces que se toma diez a la segunda potencia, o sea la centena, etc. Se puede decir que el valor relativo de cada dígito depende de la posición que ocupa con respecto a un índice. Todos los valores a la izquierda de las unidades se los llama **parte entera** y todos aquéllos colocados a la derecha, **parte fraccionaria**.

GENERALIZANDO

NÚMERO EN LA BASE “b”

$$(d_n \dots d_2 d_1 d_0)_b$$



Una cantidad cualquiera en un sistema de base “b” puede expresarse mediante un polinomio de potencias de la base multiplicadas por un símbolo perteneciente al sistema:

$$C = d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + d_{n-2} b^{n-2} + \dots + d_1 b^1 + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + d_{-2} b^{-2} + \dots + d_{-m} b^{-m}$$

Parte entera

parte fraccionaria

Este polinomio se denomina **ecuación generalizada** de un sistema de base “b”

Donde:

- C es la cantidad representada

- b es la base
- d_i es un símbolo del sistema con $0 \leq d_i < b$
- n es el orden de la parte entera (la parte entera tienen $n + 1$ cifras)
- m es el orden de la parte fraccionaria (la parte fraccionaria tiene m cifras)

PRINCIPIOS QUE CUMPLEN LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

- I) Un número de unidades de un orden cualquiera, igual a la base, forma una unidad de orden superior.
- II) Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores que las que representa la anterior, como unidades tenga la base. Éste es el **valor relativo** de un dígito según su posición
- III) En todo sistema, con tantas cifras como unidades tenga la base, contando el

CONVERSIÓNES DE UN SISTEMA A OTRO

Para convertir al sistema decimal una cantidad **C** dada en una base **b**, descomponemos el número en su expresión polinómica:

Ejemplos :

$$\begin{aligned}
 1) (2406)_8 &= 2 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 6 \times 8^0 \\
 &= 2 \times 512 + 4 \times 64 + 0 \times 8 + 6 \times 1 \\
 &= 1024 + 256 + 0 + 6 \\
 &= (1286)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) (43)_5 &= 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\
 &= 4 \times 5 + 3 \times 1 \\
 &= 20 + 3 \\
 &= (23)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) (10111,011)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\
 &= 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0,5 + 1 \times 0,25 + 1 \times 0,125 \\
 &= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0,25 + 0,125 \\
 &= (23,375)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) (100)_4 &= 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 0 \times 4^0 \\
 &= 1 \times 16 + 0 \times 4 + 0 \times 1 \\
 &= 16 + 0 + 0 \\
 &= (16)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) (202)_3 &= 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 \\
 &= 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 \times 1 \\
 &= 18 + 0 + 2 \\
 &= (20)_{10}
 \end{aligned}$$

Nota: estos dos últimos ejemplos nos dan la pauta que la clasificación de números redondos y no redondos es convencional, porque depende del sistema en el que trabajemos.

Método de conversión del sistema decimal a otro sistema de base **b**:

Nos interesa expresar una cantidad entera **C** dada en base 10 en otra base **b**:

(C)₁₀ ————— (d_n d_{n-1} d_{n-2} ... d₁ d₀)_b

Sabemos que:

$$C = d_n \times b^n + d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + \dots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por la base **b**:

$$\frac{C}{b} = \underbrace{d_n \times b^{n-1} + d_{n-1} \times b^{n-2} + d_{n-2} \times b^{n-3} + \dots + d_1 \times b^0}_{C_1 \text{ (primer cociente)}} + \frac{d_0}{b} \longrightarrow \text{primer resto,} \\ (\text{ocupará la posición} \\ \text{menos significativa})$$

Volvemos a dividir el nuevo cociente por la base:

$$C_1 = \frac{d_n \times b^{n-2} + d_{n-1} \times b^{n-3} + \dots + d_2 + d_1}{b}$$

C_2 (segundo cociente)

segundo resto (ocupará la posición a la izquierda del anterior)

Continuamos dividiendo hasta obtener el último cociente, que estará entre 0 y b:

$$\frac{C_{n-1} = d_n + d_{n-1}}{b} \quad \text{último resto}$$

C_n (último cociente) Será el dígito más significativo en la representación de la nueva base.

Ejemplos:

$$1) \ (53)_{10} = (110101)_2$$

$$2) \quad (107)_{10} = (153)_8$$

$$\begin{array}{r} 107 \\ \underline{\quad}\quad\quad 8 \\ 27 \\ (3) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{\quad}\quad\quad 8 \\ 5 \\ (1) \end{array}$$

$$3) (752)_{16} = (2F0)_{16}$$

$$\begin{array}{r} 752 \\ \hline 16 | 16 \\ 112 \quad 47 \quad 16 \\ (0) \quad (15) \quad (2) \end{array}$$

REGLA PRÁCTICA:

- 1) Dividir el número y los sucesivos cocientes por la base del nuevo sistema hasta llegar a un cociente menor que el divisor.
- 2) El nuevo número se forma escribiendo de izquierda a derecha el último cociente y todos los residuos anteriores hasta el primero, de uno a uno, aunque sean ceros

Método de conversión de un nº fraccionario del sistema decimal a otro de base **b**:

Nos interesa expresar una cantidad fraccionaria **C** dada en base 10 en otra base **b**:

$$(C)_{10} = (0.d_1 d_2 d_3 \dots d_m)_b$$

Sabemos que:

$$C = d_1 \times b^{-1} + d_2 \times b^{-2} + d_3 \times b^{-3} + \dots + d_m \times b^{-m}$$

- Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por la base **b**:

$$b \times C = d_1 + d_2 \times b^{-1} + d_3 \times b^{-2} + \dots + d_m \times b^{-m+1}$$

\downarrow

C₁ (parte fraccionaria del producto)

Parte entera. Es el dígito que ocupará el primer lugar después de la coma

- Volvemos a multiplicar C₁ por la base **b**:

$$b \times C_1 = d_2 + d_3 \times b^{-1} + \dots + d_m \times b^{-m+2}$$

\downarrow

C₂ (parte fraccionaria del producto)

Parte entera. Es el dígito que ocupará el segundo lugar después de la coma

- Multiplicamos ahora C₂ por la base **b**:

$$b \times C_2 = d_3 + \dots + d_m \times b^{-m+3}$$

\downarrow

C₃ (parte fraccionaria del producto)

Parte entera. Es el dígito que ocupará el tercer lugar después de la coma

- Continuamos multiplicando hasta que la parte fraccionaria dé cero

Ejemplos:

1) $(0,75)_{10} = (0,11)_2$

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ \times 2 \\ \hline 1,50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,50 \\ \times 2 \\ \hline 1,00 \end{array}$$

↓ ↓
Primer dígito después de la coma Segundo dígito después de la coma

2)

$$(0,75)_{10} = (0,\overbrace{20})_3$$

↓ ↓
0,75 x 3 = 2,25 0,25 x 3 = 0,75 (volvemos al 0,75)
0,75 x 3 = 2,25
0,25 x 3 = 0,75
.....
Así que $0,75 = 0,202020\dots_3$

3) $(0,89)_{10} = (\overbrace{0,6141})_7$

$0,89 \times 7 = 6,23$

$0,23 \times 7 = 1,61$

$0,61 \times 7 = 4,27$

$0,27 \times 7 = 1,89$ (a partir de acá se repite)

.....

Así que $0,89=0,61416141\dots_7$

A continuación desarrollaremos el tema referido a tres sistemas de numeración que tienen estrecha relación en cuanto a los métodos de conversión: el sistema *binario* (base 2), el *octal* (base 8) y el *hexadecimal* (base 16)

Notemos que $8 = 2^3$, es decir, cada dígito octal equivale a tres dígitos binarios.

Asimismo, $16 = 2^4$, entonces, por cada dígito hexadecimal necesitaremos cuatro dígitos binarios.

Esto nos da la pauta que la conversión *binario-octal*, *octal-binario*, *binario-hexadecimal*, *hexadecimal-binario* será mucho más sencilla.

SISTEMA NUMÉRICO BINARIO

Particularizando las reglas y principios generales que rigen cualquier sistema numérico posicional, podemos enunciar lo siguiente para el sistema de base 2:

- 1) Este sistema tiene una base 2 porque sus únicos dígitos permitidos son 0 y 1
- 2) Dos unidades de un orden forman una de orden superior inmediato
- 3) Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades dos veces mayores que las que representa ésta (... 8, 4, 2, 1)
- 4) Con dos cifras se pueden escribir todos los números (valor absoluto que tiene cada número por su figura o símbolo)



Puesto que en este sistema sólo existen 0 y 1, para poder seguir contando una vez que se han agotado las cifras discretas, no puede emplearse el 2 porque en este sistema no existe, sino que, como dice la segunda regla de conteo: “*siempre que en una columna se ha llegado al último valor discreto y recibe otra unidad, regresa a 0 y acarrea 1 a la columna que le sigue en significación a la izquierda*”:

$$\begin{array}{r}
 & 1 & \xleftarrow{\quad} & \text{acarreo} \\
 & 1 & & \\
 + 1 & \hline
 10
 \end{array}$$

Aplicando la tercera regla de conteo:

Columna:	$2^a \ 1^a$
Valor relativo:	2 1
Cantidad representada:	$1 \ 0 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$ $1 \ 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$

En el ejemplo que sigue, vemos que en cada posición se han agotado otra vez los valores discretos disponibles, por lo que si añadimos otra unidad tendremos que comenzar en 0 y arrastrar 1 a la siguiente columna situada a la izquierda:

$$\begin{array}{r}
 (1) \\
 (1) \\
 1 \ 1 \\
 + \quad 1 \hline
 \end{array}$$

$$1 \ 0 \ 0 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$$

Si continuamos contando, añadiendo una unidad en la primera columna obtendremos 101, que equivale al decimal 5. Puesto que hemos llegado nuevamente al último valor discreto permitido, para seguir contando la columna regresa a 0, arrastrando 1 a la segunda columna, lo que da 110 para el decimal 6.

SISTEMA NUMÉRICO OCTAL

Aplicando las reglas y principios generales ya enunciados para cualquier sistema numérico, tenemos para este caso:

- 1) Este sistema tiene una base 8 porque sus únicos dígitos permitidos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
- 2) Ocho unidades de un número forman una de orden superior inmediato.
- 3) Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades 8 veces mayores que las que representa ésta (...8³, 8², 8¹, 8⁰).

Por lo tanto, cada dígito octal tiene 8 veces el peso del siguiente dígito menos significativo a la derecha, o en forma equivalente, los dígitos octales aumentan por potencias de ocho

Esta base se ha seleccionado deliberadamente debido a que guarda, como ya hemos visto, una proporción directa con el sistema binario, cuyos dígitos aumentan en potencias de 2. Así, grupos de tres dígitos binarios, en consecuencia, aumentan por potencias de 8, igual que los dígitos simples en el sistema octal. La razón por la que la conversión de números binarios a decimales es tan complicada es por la ausencia de una relación simple entre potencias de 2 y potencias de 10.

CONVERSIÓN BINARIA-OCTAL

La conversión de los números binarios a octal y viceversa, es sencilla. Simplemente dividimos el número binario en grupos de tres elementos. Comenzando de derecha a izquierda y completando con ceros, siempre que se requiera, para formar el último grupo. Luego es necesario recordar los valores relativos de las tres posiciones de cada grupo.

Ejemplo: Conversión del número binario 11101111

421	421	421	←	valor relativo de cada posición	
11101111 =	011	101	111	←	binario
3	5	7	←	octal	

Comprobemos que el octal 357 representa al binario 11101111, convirtiendo ambos al decimal equivalente:

$$\begin{aligned}
 (357)_8 &= 3 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 \\
 &= 3 \times 64 + 5 \times 8 + 7 \times 1 \\
 &= 192 + 40 + 7 \\
 &= \mathbf{239}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11101111)_2 &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 128 + 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 \\
 &= \mathbf{239}
 \end{aligned}$$

CONVERSIÓN OCTAL-BINARIA

Para convertir un número octal a binario, simplemente se escribe para cada dígito octal un equivalente en notación binaria, recordando que se requieren tres dígitos binarios para representar un dígito octal.

Ejemplo: Conversión del número octal 167

167 =	1	6	7	=	11101111
001	110	111			

Nota: los dos ceros del primer dígito se suprimen ya que no tienen valor significativo.

SISTEMA NUMÉRICO HEXADECIMAL

El sistema hexadecimal es una combinación de los diez dígitos de 0 a 9 y un grupo adicional de seis letras del alfabeto, que también se toman como números. Las letras A, B, C, D, E, F, representan diez, once, doce, trece, catorce, quince, respectivamente.

La siguiente tabla establece una comparación entre los sistemas numéricos decimal, hexadecimal y binario:

DECIMAL	HEXADECIMAL	BINARIO
0	0	00000
1	1	00001
2	2	00010
3	3	00011
4	4	00100
5	5	00101
6	6	00110
7	7	00111
8	8	01000
9	9	01001
10	A	01010
11	B	01011
12	C	01100
13	D	01101
14	E	01110
15	F	01111
16	10	10000
17	11	10001
18	12	10010
19	13	10011
20	14	10100

CONVERSIÓN BINARIA- HEXADECIMAL

Procedemos de manera análoga a la conversión *binaria-octal*, pero recordando en este caso que cada cuatro dígitos binarios obtendremos un dígito hexadecimal. Por lo tanto, formaremos cuaternas comenzando de derecha a izquierda para la parte entera (completando con ceros no significativos a la izquierda en el último grupo en caso de necesitarlo) y de izquierda a derecha para la parte fraccionaria (también completando con ceros no significativos a la derecha, si se requiere, para formar el último grupo)

Ejemplo: Conversión del binario 11011110,11011

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 8421 & 8421 & 8421 & 8421 & \leftarrow & \text{valor relativo de cada posición} \\
 11011110,11011 = & 1101 & 1110, & 1101 & \leftarrow & 1000 & \text{binario} \\
 & D & E, & D & 8 & \leftarrow & \text{hexadecimal}
 \end{array}$$

Comprobemos que el hexadecimal DE,D8 representa al binario 11011110,11011, convirtiendo ambos al decimal equivalente:

$$\begin{aligned}
 (DE,D8)_{16} &= D \times 16^1 + E \times 16^0 + D \times 16^{-1} + 8 \times 16^{-2} \\
 &= 13 \times 16 + 14 \times 1 + 13 \times 0,0625 + 8 \times 0,00390625 \\
 &= 208 + 14 + 0,8125 + 0,03125 \\
 &= \mathbf{222,84375}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11011110,11011)_2 &= \\
 &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + \\
 &\quad + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} = \\
 &= 128 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0 + 0,5 + 0,25 + 0 + 0,0625 + 0,03125 = \\
 &= \mathbf{222,84375}
 \end{aligned}$$

CONVERSIÓN HEXADECIMAL - BINARIA

Para convertir un número hexadecimal a binario, simplemente se escribe para cada dígito hexadecimal su equivalente en notación binaria, recordando que se requieren cuatro dígitos binarios para representar un dígito hexadecimal.

Ejemplo: Conversión del número hexadecimal 1A5

1A5 = 1 A 5

0001 1010 0101 = 110100101

OBSERVACIÓN:

Podemos hacer conversiones *octal-hexadecimal* y viceversa pasando previamente por el sistema binario:

Ejemplos:

1) Conversión del octal 64 a sistema hexadecimal

$$(64)_8 = 110\ 100 = 11\ 0\ 100 = \mathbf{0011\ 0100} = (34)_{16}$$

2) Conversión del hexadecimal AF a sistema octal

$$(AF)_{16} = 1010\ 1111 = 10\ 10\ 1\ 111 = \mathbf{010\ 101\ 111} = (257)_8$$

OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Las operaciones aritméticas en un sistema de base **b** sigue exactamente las mismas reglas básicas que en el decimal.

Particularmente, en el sistema binario las reglas son muy sencillas, sólo hay tres para la suma y la multiplicación, como veremos más adelante. Pero en sistemas de otras bases las reglas son más complejas y lo más práctico es auxiliarse con tablas (una para la suma y otra para la multiplicación). En el anexo se incorporaron las tablas para el sistema octal y hexadecimal.

SUMA

Reglas en el sistema binario: $0 + 0 = 0$

$$0 + 1 = 1$$

$1 + 1 = \text{dos} = 0$ y 1 que se acarrea

Ejemplos:

$$\begin{array}{r}
 & 1 & & 1 & \\
 1) & 7_{10} & = & 111_2 & = & 7_8 & = & 7_{16} \\
 & + 5_{10} & = & \underline{101}_2 & = & \underline{5}_8 & = & \underline{5}_{16} \\
 & 12_{10} & = & 1100_2 & = & 14_8 & = & C_{16}
 \end{array}$$

← acarreo

\downarrow
 $7 + 5 = \text{doce} = 8 + 4 = 4$ y 1 que se acarrea

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar, el problema es que uno no se acuerda las tablas de las otras bases de memoria (las tablas en base 10 las memorizamos durante los primeros años en la escuela). Por esta razón es bastante difícil multiplicar números escritos en otra base y debemos valernos de las tablas

Pero en el sistema binario, al igual que ocurre con la suma, sólo existen tres reglas de multiplicación:

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcl} 1) \quad 111_2 & = & 7_{10} \\ \times 101_2 & = & \hline 5_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & 111 & 35_{10} \\ & 000 & \\ \hline & 111 & \\ 100011_2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Verificación: } 100011_2 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 35_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2) \quad 53_8 & = & 43_{10} \\ \times 72_8 & = & 58_{10} \\ \hline & 126 & 344 \\ & 455 & 215 \\ \hline & 4676_8 & 2494_{10} \end{array}$$

→ $2 \times 5 = 10_{10} = 12_8$
 → $7 \times 3 = 21_{10} = 25_8$ (se coloca el 5 y se acarrea 2 para sumar al producto siguiente)
 $7 \times 5 = 35_{10} = 43_8$ y $43_8 + 2_8 = 45_8$

→ acarreo

$$\begin{aligned} \text{Verificación: } 4676_8 &= 4 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 6 \times 8^0 \\ &= 2048 + 384 + 56 + 6 = 2494_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 3) \quad 45_{16} & = & 69_{10} \\ \times B_{16} & = & 11_{10} \\ \hline & 2F7_{16} & 69 \\ & & 69 \\ & & \hline & & 759_{10} \end{array}$$

→ $B \times 5 = 11 \times 5 = 55_{10} = 37_{16}$ (se coloca el 7 y se acarrea 3 para sumar al producto sig.)
 $B \times 4 = 11 \times 4 = 44_{10} = 2C_{16}$ y $2C_{16} + 3_{16} = 2F_{16}$

→ acarreo

$$\text{Verificación: } 2F7_{16} = 2 \times 16^2 + F \times 16^1 + 7 \times 16^0$$

$$= 512 + 15 \times 16 + 7 = 512 + 240 + 7 = 759_{10}$$

RESTA

La resta de dos números positivos ($M - N$) se realiza utilizando el complemento aritmético a la base menos uno (complemento a $b - 1$) del sustraendo N y se realiza una suma en vez de una resta.

Complemento a $b - 1$:

El complemento a la base menos uno de un número N de “ n ” cifras se obtiene restando el número dado de $(b^n - 1)$ $\rightarrow (b^n - 1) - N$

Ejemplos:

$$1) N = 6_{10} \quad n = 1 \quad (b^n - 1) = 10^1 - 1 = 10 - 1 = 9 \\ \text{Complemento a la base menos uno de 6: } 9 - 6 = 3$$

$$2) N = 24_{10} \quad n = 2 \quad (b^n - 1) = 10^2 - 1 = 100 - 1 = 99 \\ \text{Complemento a la base menos uno de 24: } 99 - 24 = 75$$

$$3) N = 1101_2 \quad n = 4 \quad (b^n - 1) = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15_{10} = 1111_2 \\ \text{Complemento a la base menos uno de } 1101_2: \\ 1111_2 - 1101_2 = \mathbf{0010}_2$$

Nota: El complemento a 1 es fácil de obtener. Simplemente se invierten todos los dígitos: donde hay un uno colocamos un cero y viceversa.

$$4) N = 711_8 \quad n = 3 \quad (b^n - 1) = 8^3 - 1 = 512 - 1 = 511_{10} = 777_8 \\ \text{Complemento a la base menos uno de } 711_8: \quad 777_8 - 711_8 = \mathbf{066}_8$$

$$5) N = 3D_{16} \quad n = 2 \quad (b^n - 1) = 16^2 - 1 = 256 - 1 = 255_{10} = \text{FFF}_{16} \\ \text{Complemento a la base menos uno de } 3D_{16}: \quad \text{FFF}_{16} - 3D_{16} = \mathbf{FC2}_{16}$$

CÓMO OPERAR: Dada la resta $M - N$:

- 1) Calcular el complemento a $b - 1$ de del sustraendo N .
- 2) Sumar dicho complemento al minuendo M .
- 3) Si hay acarreo, sumarlo al dígito menos significativo. El número obtenido será el resultado de la diferencia dada.
- 4) Si no hay acarreo, tomar el complemento a $b - 1$ del número obtenido y colocarle signo negativo. Éste será el resultado de la diferencia dada.

Ejemplos:**En el sistema decimal:**

$$1) M = 19,72 \quad N = 12,79 \quad M - N = 6,93$$

Calculamos el complemento a 9 de N:

$$\begin{array}{r} 99,99 \\ - 12,79 \\ \hline 87,20 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r} 19,72 \\ + 87,20 \\ \hline 106,92 \\ + \quad \xrightarrow{1} \text{sumamos el acarreo a la cifra menos significativa} \\ 6,93 \quad \text{resultado} \end{array}$$

$$2) M = 12,79 \quad N = 19,72 \quad M - N = -6,93$$

Calculamos el complemento a 9 de N:

$$\begin{array}{r} 99,99 \\ - 19,72 \\ \hline 80,27 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r} 12,79 \\ + 80,27 \\ \hline 93,06 \end{array}$$

No hay acarreo, tomar el complemento y colocarle signo negativo:

$$\begin{array}{r} 99,99 \\ - 93,06 \\ \hline -6,93 \quad \text{resultado} \end{array}$$

En notación binaria:

$$3) M = 1100 \quad N = 0111 \quad M - N = 101$$

Complemento a 1 de N: 1000

Lo sumamos a M:

$$\begin{array}{r} 1100 \\ + 1000 \\ \hline 10100 \\ + \quad \xrightarrow{1} \text{sumamos el acarreo a la cifra menos significativa} \\ 101 \quad \longrightarrow \quad \text{resultado} \end{array}$$

$$4) M = 0111 \quad N = 1100 \quad M - N = -101$$

Complemento a 1 de N: 0011

Lo sumamos a M:

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0111 \\ \hline 1010 \end{array}$$

No hay acarreo, tomar el complemento y colocarle signo negativo:

$$\begin{array}{r} -101 \quad \text{resultado} \end{array}$$

En el sistema octal:

$$5) M = 407 \quad N = 2,6 \quad M - N = 404,2$$

Calculamos el complemento a 7 de N:

$$\begin{array}{r} 777,7 \\ - 2,6 \\ \hline 775,1 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r}
 407 \\
 +775,1 \\
 \hline
 1404,1 \\
 + \quad \boxed{1} \text{ sumamos el acarreo a la cifra menos significativa} \\
 \hline
 404,2 \quad \text{resultado}
 \end{array}$$

6) $M = 2,6$ $N = 407$ $M - N = -404,2$

Calculamos el complemento a 7 de N:

$$\begin{array}{r}
 777,7 \\
 -407 \\
 \hline
 370,7
 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r}
 2,6 \\
 +370,7 \\
 \hline
 373,5
 \end{array}$$

No hay acarreo, tomar el complemento y colocarle signo negativo:

$$\begin{array}{r}
 777,7 \\
 -373,5 \\
 \hline
 \boxed{-404,2} \quad \text{resultado}
 \end{array}$$

En el sistema hexadecimal:

7) $M = EA,7$ $N = 19$ $M - N = D1,7$

Calculamos el complemento a F de N:

$$\begin{array}{r}
 FF,F \\
 -19 \\
 \hline
 E6,F
 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r}
 EA,7 \\
 +E6,F \\
 \hline
 \boxed{1D1,6} \\
 + \quad \boxed{1} \text{ sumamos el acarreo a la cifra menos significativa} \\
 \hline
 D1,7 \quad \text{resultado}
 \end{array}$$

8) $M = 19$ $N = EA,7$ $M - N = -D1,7$

Calculamos el complemento a F de N:

$$\begin{array}{r}
 FF,F \\
 -EA,7 \\
 \hline
 15,8
 \end{array}$$

Sumamos el número obtenido al minuendo M:

$$\begin{array}{r}
 19 \\
 +15,8 \\
 \hline
 2E,8
 \end{array}$$

No hay acarreo, tomar el complemento y colocarle signo negativo:

$$\begin{array}{r}
 FF,F \\
 -2E,8 \\
 \hline
 \boxed{-D1,7} \rightarrow \text{resultado}
 \end{array}$$

EJERCITACIÓN

1. Expresar el número decimal 5072,12 en base :
 - 1.a) $b = 2$
 - 1.b) $b = 4$
 - 1.c) $b = 9$
 - 1.d) $b = 16$
2. Aplicando la regla que se explica a continuación, calcular la cantidad de cifras de los siguientes números decimales (verificar luego expresando el número en la base dada):
 - 2.a) 302 en el sistema de base 3
 - 2.b) 72.019 en el sistema hexadecimal

REGLA: Los números que en el sistema de base b tienen n cifras son tales que expresados en el sistema decimal son mayores que $b^{n-1} - 1$ y menores o iguales que $b^n - 1$

$$b^n - 1 \geq n^{\text{o}} \text{ decimal} > b^{n-1} - 1$$

3. Pasar al sistema decimal las siguientes cantidades
 - 3.a) $(1001101)_2$
 - 3.b) $(1370,7)_8$
 - 3.c) $(F2DA,BD)_{16}$
 - 3.d) $(444,3)_5$
4. Expresar en base 8:
 - 4.a) $(1011,01)_2$
 - 4.b) $(155,3)_{10}$
 - 4.c) $(5B9,25)_{16}$
5. Expresar en base 16:
 - 5.a) $(111100,01)_2$
 - 5.b) $(153,4)_8$
 - 5.c) $(681,52)_{10}$
6. Resolver operando en el sistema binario:
 - 6.a) $10111000 + 111011 =$
 - 6.b) $100000 - 1 =$

- 6.c) $1111 - 1011,01 + 11,1 =$
7. Resolver operando en el sistema octal:
- 7.a) $471 + 1036 + 245 =$ 7.c) $10000 - 7117 =$ 7.e) $407 - 2,6 + 3,5 =$
 7.b) $36,2 + 105,7 + 2461,2 =$ 7.d) $765,43 - 345,67 =$ 7.f) $4,35 + 1,7 - 6,31 =$
8. Resolver operando en el sistema hexadecimal:
- 8.a) $6AE + 1FA =$ 8.c) $7865 - 9AB7 =$ 8.e) $E7,2 - 19 + 3,5 =$
 8.b) $B1,3 + A54 + CB,A =$ 8.d) $D9,357 - 8E,7C2 =$ 8.f) $AB + 0,F - 38,5 =$
9. ¿Para qué **b** el número que se escribe como 426182_b es par?
10. Escribir la tabla de sumar y multiplicar en las bases 2, 3, 5 y 9.
11. Resolver:
- En base 5:
- 11.a) $(32 - 1,02) \times 21 =$ 11.b) $1,12 - 4231 + 44,2 \times 30 =$
- En base 2:
- 11.c) $1101 - 1,1 \times 10 - 10 =$ 11.d) $(100011,001 - 110011) \times 11 + 101,1 =$
- En base 8:
- 11.e) $7,01 \times 6 - 24 =$ 11.f) $104,67 - 77 + 12 \times 3,5 =$
- En base 16:
- 11.g) $(D5 + 44F,01) \times A - C,B =$ 11.h) $12 \times 5,C - E25 \times DE =$

SOLUCIONES



1.a) $(1001111010000,0001110101110000101)_2$

1.b) $(1033100,0132232011)_4$

1.c) $(6855,1064278246)_9$

1.d) $(13D0,1EB85)_{16}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{2.a)} & 3^n - 1 \geq 302 \quad 302 > 3^{n-1} - 1 \\
 & 3^n \geq 303 \quad 303 > 3^{n-1} \\
 & n \times \log 3 \geq \log 303 \quad \log 303 > (n-1) \times \log 3 \\
 & n \geq \log 303 / \log 3 \quad \log 303 / \log 3 + 1 > n
 \end{array}$$

$$n \geq 5,20\dots$$

$$6,20\dots > n$$

Luego, **n = 6**

Verificación: $(302)_{10} = (102012)_3$

$$2.b) 16^n - 1 \geq 72019$$

$$72019 > 16^{n-1} - 1$$

$$n \geq \log 72020 / \log 16$$

$$\log 72020 / \log 16 + 1 > n$$

$$n \geq 4,034\dots$$

$$5,034\dots > n$$

Luego, **n = 5**

Verificación: $(72019)_{10} = (11953)_{16}$

$$3.a) (1001101)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 64 + 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = (77)_{10}$$

$$3.b) (1370,7)_8 = 1 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 + 7 \times 8^{-1}$$

$$= 512 + 192 + 56 + 0 + 0,875 = (760,875)_{10}$$

$$3.c) (F2DA,BD)_{16} = 15 \times 16^3 + 2 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 10 \times 16^0 + 11 \times 16^{-1} + 13 \times 16^{-2}$$

$$= 61440 + 512 + 208 + 10 + 0,6875 + 0,05078125 = (62170,73828)_{10}$$

$$3.d) (444,3)_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 + 3 \times 5^{-1}$$

$$= 100 + 20 + 4 + 0,6 = (124,6)_5$$

$$4.a) (1011,01)_2 = 001\ 011,010 = (13,2)_8$$

$$4.b) (155,3)_{10} = (233,\underline{23}146)_8$$

$$4.c) (5B9,25)_{16} = (0101\ 1011\ 1001,0010\ 0101)_2 = (010\ 110\ 111\ 001,001\ 001\ 010)_2 =$$

$$= (2671,112)_8$$

$$5.a) (111100,01)_2 = (0011\ 1100,\ 0100)_2 = (3C,4)_{16}$$

$$5.b) (153,4)_8 = (001\ 101\ 011,100)_2 = (0000\ 0110\ 1011,1000)_2 = (6B,8)_{16}$$

$$5.c) (681,52)_{10} = (2A9,\underline{85}1EB)_{16}$$

$$6.a) 10111000 + 111011 = 11110011$$

$$\begin{array}{r} 10111000 \\ + 111011 \\ \hline 11110011 \end{array}$$

$$6.b) 100000 - 1 = 11111$$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ + 111110 \quad (\text{complemento a 1 de 1}) \\ \hline 1011110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 1 \\ 1111 \end{array}$$

6.c) $1111 - 1011,01 + 11,1 = 111,01$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ + 11,1 \\ \hline 10010,1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10010,1 \\ + 10100,10 \\ \hline 100111,00 \end{array} \quad \begin{array}{l} (complemento\ a\ 1\ de\ 1011,01) \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 111,01 \end{array}$$

7.a) $471 + 1036 + 245 = 1774$

$$\begin{array}{r} 471 \\ 1036 \\ + 245 \\ \hline 1774 \end{array}$$

7.b) $36,2 + 105,7 + 2461,2 = 2625,3$

$$\begin{array}{r} 36,2 \\ 105,7 \\ + 2461,2 \\ \hline 2625,3 \end{array}$$

7.c) $10000 - 7117 = 661$

$$\begin{array}{r} 77777 \\ - 7117 \\ \hline 70660 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10000 \\ + 70660 \quad (Complemento\ a\ 7\ de\ 7117) \\ \hline 100660 \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 661 \end{array}$$

7.d) $765,43 - 345,67 = 417,54$

$$\begin{array}{r} 777,77 \\ - 345,67 \\ \hline 432,10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 765,43 \\ + 432,10 \quad (Complemento\ a\ 7\ de\ 345,67) \\ \hline 1417,53 \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 417,54 \end{array}$$

7.e) $407 - 2,6 + 3,5 = 407,7$

$$\begin{array}{r} 777,7 \\ - 2,6 \\ \hline 775,1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 407 \\ + 3,5 \\ \hline 412,5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 412,5 \\ + 775,1 \quad (Complemento\ a\ 7\ de\ 2,6) \\ \hline 1407,6 \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 407,7 \end{array}$$

7.f) $4,35 + 1,7 - 6,31 = - 0,04$

$$\begin{array}{r} 4,35 \\ + 1,7 \\ \hline 6,25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7,77 \\ - 6,31 \\ \hline 1,46 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6,25 \\ + 1,46 \\ \hline 7,73 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7,77 \\ - 7,73 \\ \hline - 0,04 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{No hay acarreo. Tomamos el} \\ \text{complemento a 7 y le colocamos} \\ \text{el signo “-”}) \end{array}$$

8.a) $6AE + 1FA = 8A8$

$$\begin{array}{r} 6AE \\ + 1FA \\ \hline 8A8 \end{array}$$

8.b) $B1,3 + A54 + CB,A = BD0,D$

$$\begin{array}{r} B1,3 \\ A54 \\ + CB,A \\ \hline BD0,D \end{array}$$

8.c) $7865 - 9AB7 = - 2252$

FFFF	7 8 6 5	FF F F (No hay acarreo.)
Tomamos		
$- 9AB7$	$+ 6548$	$- DDAD$ el complemento a F de
		$DDAD$ y le cambiamos el signo)

8.d) $D9,357 - 8E,7C2 = 4A,B95$

$$\begin{array}{r} FF,FFF \\ - 8E,7C2 \\ \hline 71,83D \end{array} \quad \begin{array}{r} D9,357 \\ + 71,83D \\ \hline 14A,B94 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4A,B94 \\ + 1 \\ \hline 4A,B95 \end{array}$$

8.e) $E7,2 - 19 + 3,5 = D1,7$

E7,2	FF,F	EA,7
$+ 3,5$	$- 19$	$+ E6,F$ (Complemento a F de 19)
EA,7	E6,F	1D1,6
		$\frac{+ 1}{D1,7}$

8.f) $AB + 0,F - 38,5 = 73,A$

$$\begin{array}{r} AB \\ + 0,F \\ \hline AB,F \end{array} \quad \begin{array}{r} FF,F \\ - 38,5 \\ \hline C7,A \end{array} \quad \begin{array}{r} AB,F \\ + C7,A \\ \hline 173,9 \\ + 1 \\ \hline 73,A \end{array}$$

9) Como 8 es el mayor dígito básico utilizado en la representación de 426182_b , **b** debe ser mayor o igual que 9. Ahora bien, dentro de las bases mayores o iguales que 9 tenemos que determinar para cuáles 426182_b es un número par.

Expresémoslo en su forma polinómica:

$$426182_b = 4 \times b^5 + 2 \times b^4 + 6 \times b^3 + 1 \times b^2 + 8 \times b^1 + 2 \times b^0$$

El primero, segundo, tercero, quinto y sexto términos son números pares, dado que b^n está multiplicada por números pares; y su suma dará por resultado un número par. Pero el cuarto término será par si **b** es par, e impar si **b** es impar. Sabemos que la suma de dos números pares es par y la de un número par y uno impar resulta impar.

Por lo tanto, **426182_b será par para cualquier base par mayor que 9.**

10)

Base 2:

+	0	1
0	00	01

x	0	1
0	00	00

1	01	10
---	----	----

1	00	01
---	----	----

Base 3:

+	0	1	2
0	00	01	02
1	01	02	10
2	02	10	11

x	0	1	2
0	00	00	00
1	00	01	02
2	00	02	04

Base 5:

+	0	1	2	3	4
0	00	01	02	03	04
1	01	02	03	04	10
2	02	03	04	10	11
3	03	04	10	11	12
4	04	10	11	12	13

x	0	1	2	3	4
0	00	00	00	00	00
1	00	01	02	03	04
2	00	02	04	06	11
3	00	03	11	14	22
4	00	04	13	22	31

Base 9:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08
1	01	02	03	04	05	06	07	08	10
2	02	03	04	05	06	07	08	10	11
3	03	04	05	06	07	08	10	11	12
4	04	05	06	07	08	10	11	12	13
5	05	06	07	08	10	11	12	13	14
6	06	07	08	10	11	12	13	14	15
7	07	08	10	11	12	13	14	15	16
8	08	10	11	12	13	14	15	16	17

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	00	00	00	00	00	00	00	00	00
1	00	01	02	03	04	05	06	07	08
2	00	02	04	06	08	11	13	15	17
3	00	03	06	10	13	16	20	23	26
4	00	04	08	13	17	22	26	31	35
5	00	05	11	16	22	27	33	38	44
6	00	06	13	20	26	33	40	46	53
7	00	07	15	23	31	38	46	54	62
8	00	08	17	26	35	44	53	62	71

11)

En base 5:

$$11.a) (32 - 1,02) \times 21 = 1200,03$$

$$\begin{array}{r} 44,44 \\ - 1,02 \\ \hline 43,42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ + 43,42 \\ \hline 130,42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30,42 \\ 3043 \\ + 11141 \\ \hline 1200,03 \end{array} \quad \times \quad 21$$

$$11.b) 1,12 - 4231 + 44,2 \times 30 = -1243,33$$

$$\begin{array}{r} 4444,44 \\ - 4231 \\ \hline 0213,44 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44,2 \\ \times 30 \\ \hline 000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,12 \\ + 0213,44 \text{ (Complemento a 4 de 4231)} \\ \hline 0220,11 \end{array}$$

+ 2431

2431,0 (el cero no significativo se descarta)

El resultado de la diferencia 1,12 – 4231 es el complemento a 4 de 0220,11 con signo negativo (-4224,33) porque no hubo acarreo. Pero como este número hay que sumarlo a 2431 (resultado del producto 44,2 x 30) tenemos que calcular su complemento a 4, que no es otro que 0220,11. Nos queda ahora realizar la suma:

$$\begin{array}{r} 2431 \quad \text{No hubo acarreo. Calculamos} \\ + 0220,11 \quad \text{el complemento a 4 de 3201,11} \\ \hline 3201,11 \quad \text{y le cambiamos el signo:} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4444,44 \\ - 3201,11 \\ \hline - 1243,33 \end{array}$$

En base 2:

11.c) $1101 - 1,1 \times 10 - 10 = 1000$

$$\begin{array}{r}
 1,1 \\
 \times 10 \\
 \hline
 00 \\
 + 11 \\
 \hline
 11,0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1101 \\
 + 1100 \text{ (Complemento a 1 de 11)} \\
 \hline
 1010
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1010 \\
 + 1101 \text{ (Complemento a 1 de 10)} \\
 \hline
 10111 \\
 + 1 \\
 \hline
 1000
 \end{array}$$

11.d) $(100011,001 - 110011) \times 11 + 101,1 = -101010,001$

$$\begin{array}{r}
 100011,001 \\
 + 001100,111 \\
 \hline
 110000,000
 \end{array}
 \quad
 \text{(Complemento a 1 de 110011)}$$

Como no hay acarreo, tomamos el complemento a 1 de 110000,000 y le cambiamos el signo:

$$\begin{array}{r}
 - 001111,111 \\
 \times 11 \\
 \hline
 111111 \\
 + 111111 \\
 \hline
 - 101111,101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 101,1 \\
 + 010000,010 \text{ (Complemento a 1 de 101111,101)} \\
 \hline
 010101,110
 \end{array}$$

Como no hay acarreo, tomamos el complemento a 1 de 010101,110 y le colocamos signo negativo: -101010,001

En base 8:

11.e) $7,01 \times 6 - 24 = 26,06$

$$\begin{array}{r}
 7,01 \\
 \times 6 \\
 \hline
 52,06
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 77,77 \\
 - 24 \\
 \hline
 53,77
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 52,06 \\
 + 53,77 \\
 \hline
 126,05
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (Complemento a 7 de 24) \\
 + 1 \\
 \hline
 26,06
 \end{array}$$

11.f) $104,67 - 77 + 12 \times 3,5 = 52,07$

$$\begin{array}{r}
 3,5 \\
 \times 12 \\
 \hline
 172 \\
 + 35 \\
 \hline
 44,2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 104,67 \\
 + 44,2 \\
 \hline
 151,07
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 777,77 \\
 - 77 \\
 \hline
 700,77
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 151,07 \\
 + 700,77 \\
 \hline
 1052,06
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (Complemento a 7 de 77) \\
 + 1 \\
 \hline
 52,07
 \end{array}$$

En base 16:

11.g) $(D5 + 44F,01) \times A - C,B = 335B,5A$

$$\begin{array}{r}
 D5 \\
 + 44F,01 \\
 \hline
 524,01
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 521,01 \\
 \times A \\
 \hline
 3368,0A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 FFFF,FF \\
 - C,B \\
 \hline
 FFF3,4F
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3368,0A \\
 + FFF3,4F \text{ (Complemento a} \\
 \text{F de C,B)} \\
 + 1 \\
 \hline
 335B,5A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1335B,59 \\
 + 1 \\
 \hline
 335B,5A
 \end{array}$$

11.h) $12 \times 5,C - E25 \times DE = -C43AE,8$

$$\begin{array}{r}
 5,C \\
 \times 12 \\
 \hline
 B8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 E25 \\
 \times DE \\
 \hline
 C606
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 FFFFF,F \\
 - C4416 \\
 \hline
 3BBE9,F
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 67,8 \\
 + 3BB39,F \text{ (Complemento a } F \text{ de} \\
 \hline
 3BC51,7 \text{ C4416)}
 \end{array}$$

Como no hay acarreo, tomamos el complemento a F de 3BC51,7 y le colocamos signo negativo:

$$\begin{array}{r}
 FFFFF,F \\
 - 3BC51,7 \\
 \hline
 - C43AE,8
 \end{array}$$

ANEXO

Tablas de suma y multiplicación del sistema octal:

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16
+	1	2	3	4	5	6	7

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61
x	1	2	3	4	5	6	7

Tablas de suma y multiplicación del sistema hexadecimal:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	+
1	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	1
2	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	2
3	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	3
4	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	4
5	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	5
6	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	6
7	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	7
8	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	8
9	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9
A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	A
B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	B

C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	C
D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	D
E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	E
F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	F
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	+

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	x
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	1
2	02	04	06	08	0A	0C	0E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	2
3	03	06	09	0C	0F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D	3
4	04	08	0C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C	4
5	05	0A	0F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B	5
6	06	0C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A	6
7	07	0E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69	7
8	08	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	8
9	09	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87	9
A	0A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96	A
B	0B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5	B
C	0C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4	C
D	0D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3	D
E	0E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2	E
F	0F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1	F
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	x

BIBLIOGRAFÍA

- **Malva Alberto de Toso; Ingrid Schwer de Inglese; Viviana Cámara; Cristina Rogiano; Silvina Meinero:** *Elementos de Matemática Discreta*, Centro de Publicaciones – UNL, 2002
- www.oma.org.ar/omanet

PARTE 4 CONCEPTOS DE COMUNICACIONES Y REDES

*"Poco después de mi entrada la yegua se levantó de su estera, se acercó a mí, observó atentamente mi cara y manos, y luego hizo un gesto de desagrado. A continuación se volvió hacia el caballo y escuché que entre ellos repetían a menudo la palabra **yahoo**, cuyo significado entonces no entendía, aunque fuera la primera que aprendí a pronunciar. Mas pronto estaría mejor informado para mi eterna vergüenza."*

Los Viajes de Gulliver, Cap XIX: El país de los Houyhnhnms

NOCIONES BÁSICAS DE COMUNICACIONES

En los principios del siglo XIX, los tiempos de las comunicaciones eran directamente proporcionales a los tiempos del movimiento humano. Una noticia de Europa podía tardar meses en llegar a las colonias sudamericanas; un hecho trascendental como la declaración de la independencia en Tucumán en 1816 viajó “en diligencia” para ser conocido en Buenos Aires varios días después; la imagen del general mirando desde un cerro la evolución de una gran batalla y enviando y recibiendo mensajeros a caballo desde el frente de batalla sólo se mejoraba levemente con el empleo de palomas mensajeras...

- En 1844 Morse inventó el telégrafo y en 1876 Bell el teléfono. Con ellos nació el concepto de **telecomunicaciones**, es decir comunicación a distancia en forma prácticamente inmediata.
- La evolución de la tecnología de las comunicaciones en los siguientes 100 años y hasta nuestros días, combinada con el desarrollo explosivo de la electrónica y la informática, pasaron a ser el **eje fundamental del mundo de hoy**.
- Desde el punto de vista de la transmisión de información, la tecnología permite hoy que **la distancia física prácticamente no existe !**: Podemos ubicarnos virtualmente en otro lugar del mundo, observar un museo de Europa, leer un texto que se está escribiendo en Estados Unidos, recibir el mismo diario que un ciudadano de Rusia o tener 1000 millones de personas pendientes del partido inaugural de un mundial de fútbol... que se juega en China (y sería lo mismo si se jugara en la Luna).

Esta evolución de la tecnología de comunicaciones es muy importante para nuestra vida y para nuestras posibilidades laborales: cualquier ámbito de trabajo informático hoy tiene comunicaciones, redes, computadoras remotas que se consultan y utilizan... y todo esto nos obliga a estudiar como un componente esencial de la disciplina informática, algunos

aspectos de las comunicaciones.

- En principio debemos definir el **medio de comunicación** es decir sobre que soporte se transmiten los bits (en principio sólo hablaremos de comunicaciones digitales) que llevan la información. Este medio puede ser un cable telefónico, un cable coaxil, una fibra óptica o el aire.
- En general las transmisiones sobre cables requieren enviar señales eléctricas entre un transmisor y un receptor en los extremos del cable, y normalmente se trata de un medio de bajo costo y muy adecuado para distancias relativamente cortas. Por ejemplo un cable telefónico permite manejar velocidades típicas de 100.000 bits por segundo y un cable coaxil de red puede tener 100 millones de bits por segundo.
- Pasar de los cables con señales eléctricas a la fibra óptica ha sido un salto tecnológico muy importante (aunque a un costo mayor). Sucede que la fibra óptica transmite señales de luz, a una velocidad mucho mayor y con mucha menos posibilidad de interferencia que un cable convencional. Trabajar con comunicaciones en el orden de 1000 millones de bits por segundo, con alta inmunidad al ruido es típico de la fibra óptica hoy (notar que todos los enlaces telefónicos importantes han reemplazado el cableado convencional por la fibra óptica).
- La señal también se puede trasmitir por el aire. En este caso el transmisor y el receptor tienen otras características (más complejas) y de ese modo recibimos, por ejemplo, las señales de radio o de televisión por aire. También podemos tener estaciones repetidoras en tierra o en un satélite, de modo de comunicar puntos muy distantes que no serían alcanzables por una señal de radio directa. Las comunicaciones satelitales se imponen cuando la distancia crece.

En este punto podemos preguntarnos **¿Qué sentido puede tener comunicar computadoras?** La respuesta resulta inmediata: poder comunicarlas significa poder utilizar sus recursos a distancia.

De repente la computadora que está en la mejor Universidad de Estados Unidos es “alcanzable” y utilizable desde nuestra modesta PC del Laboratorio “A” de la UNLaR. Al mismo tiempo los “usuarios” distantes pueden comunicarse, cooperar y compartir recursos y trabajo, empleando sus computadoras conectadas.

Aunque en principio no lo parezca, poder comunicar computadoras es lo que nos permite ver en tiempo real, sobre nuestra computadora un recital de los Rolling Stones que está

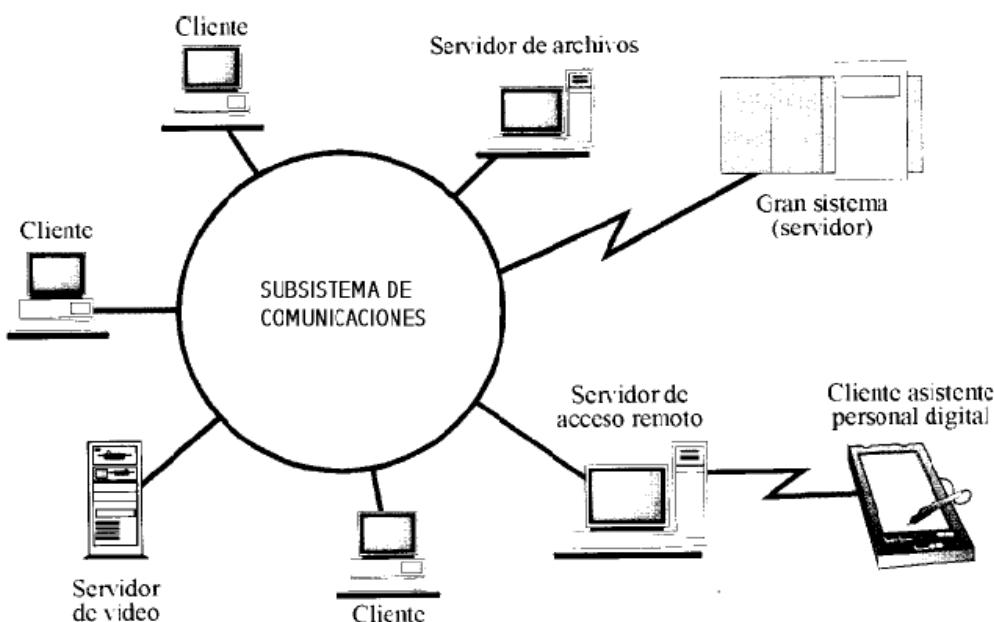
sucediendo en otro extremo del planeta.

Un primer empleo de esta comunicación remota entre computadoras fueron (y son) los sistemas multiusuario con esquema servidor-terminales. Cuando accedemos, por ejemplo, a una terminal de cajero automático de un Banco, en realidad estamos en una pequeña computadora local que se comunica con un servidor (computadora mayor) que tiene los datos globales de clientes, y nos permite hacer operaciones determinadas en nuestra terminal local.

Debe quedarnos claro que de nada nos servirían ambas computadoras si no tenemos un sistema eficiente de comunicaciones

CONCEPTOS ELEMENTALES DE REDES

Conceptualmente una red responde a un esquema general como el de la figura siguiente:



- Las computadoras locales (clientes) pueden ser muy diferentes y disponer de recursos propios.
- El subsistema de comunicaciones puede estar soportado por los diferentes medios de comunicación que hemos mencionado y permite vincular punto a punto o globalmente las computadoras locales.
- Pueden existir recursos dentro de la red que sean compartidos por todas o alguna de

las computadoras, y también pueden existir recursos exclusivos de cada máquina local.

- Naturalmente para poder comunicar coherentemente las computadoras de una red es necesario establecer protocolos aceptados por todos (y esto implica hardware y software). Se deduce que el sistema operativo de la red debe proveer servicios que no tenemos en una computadora monousuario.

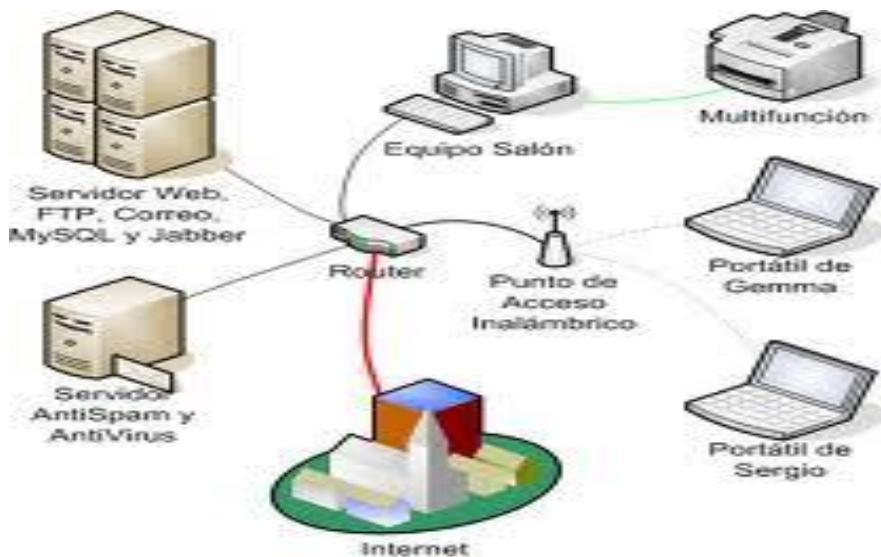
En este punto podemos preguntarnos **¿Qué ventaja puede significar disponer de una red de computadoras?** La respuesta resulta inmediata:

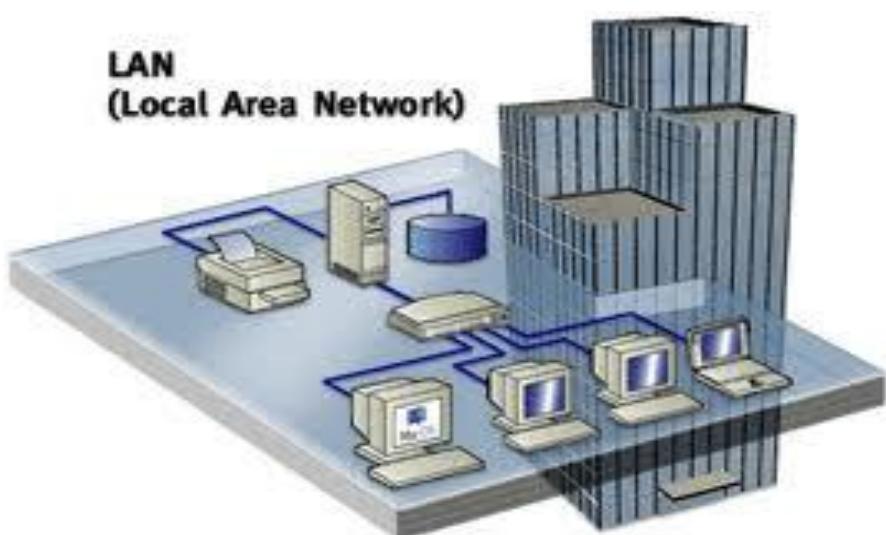
- Compartir hardware, reduciendo costos y convirtiendo a la red en sí misma en un poderoso sistema de procesamiento de datos.
- Compartir datos y programas, permitiendo incrementar la productividad en los sistemas de software.
- Incrementar la eficiencia en los trabajos de grupo al permitir una fluida comunicación entre miembros de la organización ubicados en diferentes puntos.

REDES LAN Y WAN

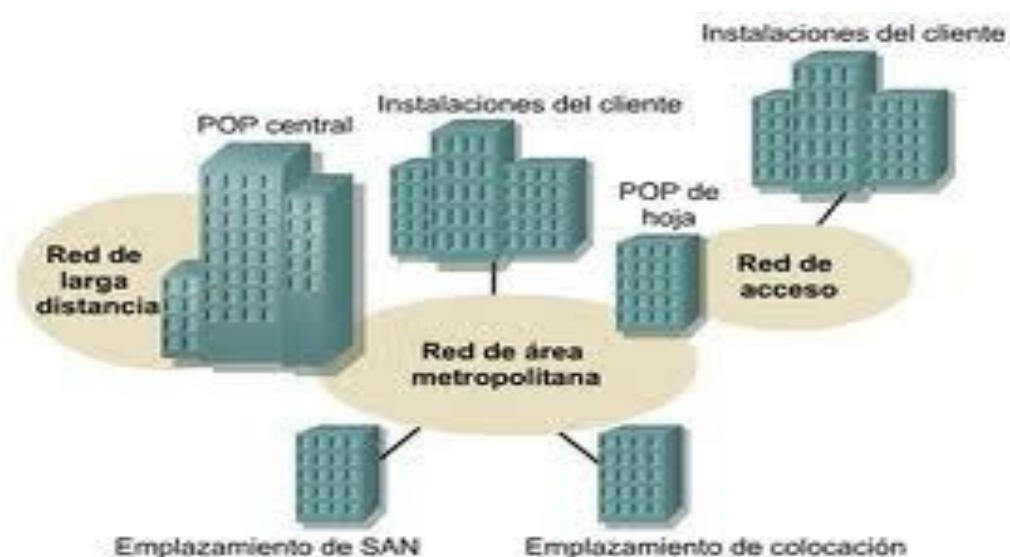
Una red local (LAN: Local Área Network) es una red en la cual las computadoras se encuentran cercanas físicamente, generalmente en un mismo edificio. La comunicación inter-computadoras puede ser por cable, fibra o inalámbrica (en este caso una pequeña radio que hace de receptor-transmisor se incorpora en cada computadora).

Típicamente (como se muestra en la figura) una red local puede conectarse a través de un conjunto de líneas de comunicación común denominado *bus*, pero pueden utilizarse diferentes topologías de comunicación.

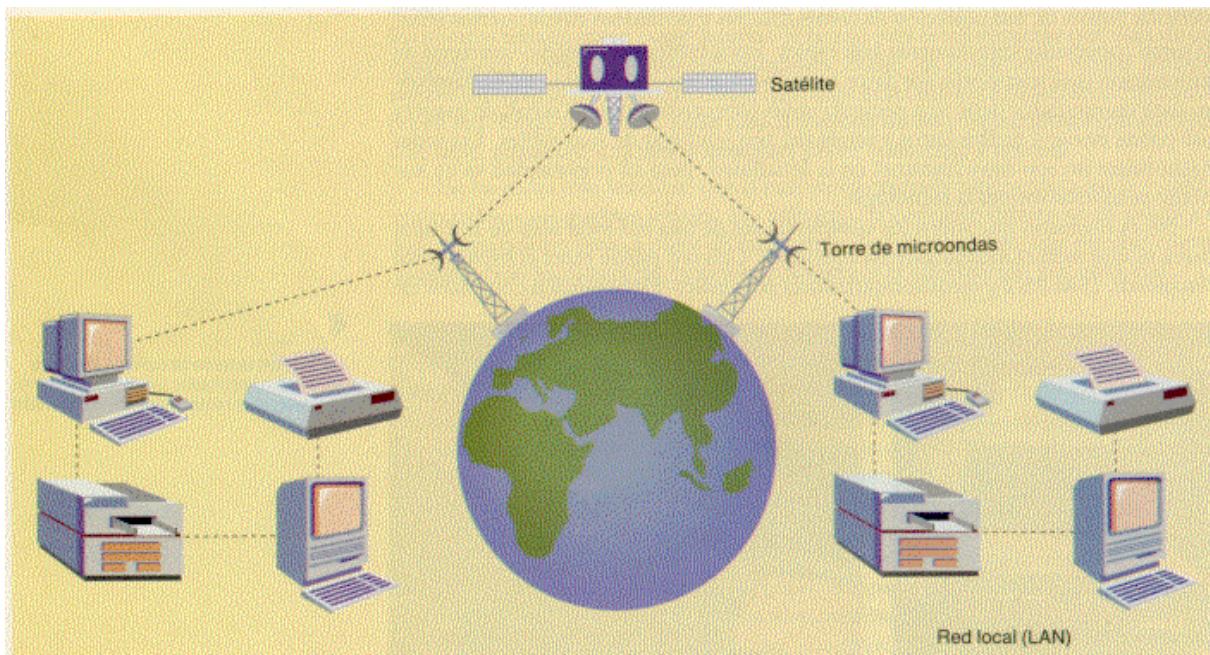




Una **red de área metropolitana** (**Metropolitan Area Network** o **MAN**, en inglés) es una red de alta velocidad (banda ancha) que da cobertura en un área geográfica extensa, proporciona capacidad de integración de múltiples servicios mediante la transmisión de datos, voz y vídeo, sobre medios de transmisión tales como fibra óptica y par trenzado (MAN BUCLE), la tecnología de pares de cobre se posiciona como la red más grande del mundo una excelente alternativa para la creación de redes metropolitanas, por su baja latencia (entre 1 y 50 ms), gran estabilidad y la carencia de interferencias radioeléctricas, las redes MAN BUCLE, ofrecen velocidades de 10Mbps, 20Mbps, 45Mbps, 75Mbps, sobre pares de cobre y 100Mbps, 1Gbps y 10Gbps mediante Fibra Óptica.



Una red extendida (**WAN**: Wide Área Network) es una red en la cual las computadoras pueden estar a grandes distancias. Incluso puede estar formada por subredes locales. La comunicación inter-computadoras puede combinar las tecnologías mencionadas anteriormente, teniendo cable o fibra para las máquinas relativamente más cercanas y por ejemplo enlaces satelitales entre los puntos remotos.



INTERNET: UNA RED DE REDES

Internet no es más que una red WAN, en la que un conjunto de instituciones han acordado conectar sus propias redes, enlazando organizaciones educativas, administrativas y empresas privadas.

Las raíces de Internet fueron la comunicación que establecieron en EEUU un conjunto de Universidades e Instituciones Académicas, y de ese modo fue creciendo y desarrollándose en todo el mundo.

El impacto de Internet en el ámbito científico pronto se extendió a las empresas y al comercio electrónico, ya que esencialmente es una posibilidad de tener una vinculación con cualquier tipo de computadora o dato en cualquier punto del planeta.

Entre los servicios que habitualmente utilizamos en Internet (y que han sido el área de mayor desarrollo del software en los últimos diez años) podemos mencionar:

Correo electrónico y transferencia de archivos de datos.

Ingreso remoto a otras computadoras.

Establecimiento de “sitios” específicos accesibles por usuarios de todo el mundo (o bien por usuarios que tienen determinado atributo o password) con repositorios de información útil.

Por ejemplo podemos tener bibliotecas virtuales, accesibles en forma remota.

- Información “on line” de diarios, revistas, canales de noticias, etc.
- Posibilidad de realizar transacciones (compras, ventas) a través de la red, presentando los productos, catálogos, precios e incluso programas de demostración de funcionamiento para consulta remota y acordando modos de transferencia de los pagos.
- Posibilidad de realizar reuniones de intercambio de opiniones, en forma conjunta por usuarios interesados en un tema (conferencias o “chats”).

Puede decirse que el mundo se está transformando, con el empleo creciente de Internet y con la adopción de nuevos modos de investigar y buscar información, y al mismo tiempo nuevos modos de establecer negocios y tareas cooperantes entre usuarios ubicados en puntos muy distantes.

Uno de los impactos más fuertes de Internet es la posibilidad de brindar educación a distancia, favoreciendo el aprendizaje o la actualización en forma de autoaprendizaje o mediante comunicaciones interactivas alumno-docente.

Aplicaciones: Correo electrónico. Teleconferencia.

Correo electrónico (e-mail) significa conectarnos computadora a computadora con otro usuario, a través de un sistema de comunicaciones y un software adecuado. La comunicación puede tener aspectos muy “humanos” tales como que en cada computadora una filmadora registre al usuario que nos está escribiendo para convertir el correo en una “charla” electrónica, o bien disponer de un periférico de salida que convierte el texto del e-mail en voz.

De todos modos, el sólo hecho de poder comunicarnos muy rápidamente a través del correo electrónico (comparar con el correo tradicional por hojas escritas) favorece el intercambio de datos entre los seres humanos. Por otra parte podemos reemplazar en gran medida el teléfono y el fax.

Teleconferencia en tiempo real significa que un conjunto de usuarios (por ejemplo miembros de una misma empresa) se conectan computadora a computadora e intercambian opiniones sobre un determinado tema, construyendo una “reunión de directorio” o “reunión

de trabajo” en el ámbito virtual que ofrece Internet.

Nuevamente la comunicación puede permitir “verse” a los protagonistas e incluso “hablarse” convirtiendo lo hablado en mensaje electrónico.

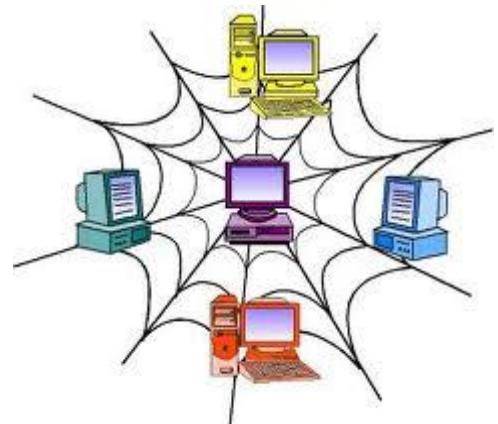
Naturalmente una teleconferencia *no* es igual que una reunión efectiva de las personas involucradas, pero en el caso de organizaciones distribuidas con sedes lejanas, mejora notoriamente la velocidad y eficacia en la toma de decisiones.

En una **videoconferencia** tenemos el equivalente a una clase tradicional, con una (o varias) aula/s virtuales remotas. Cada uno de los oyentes puede “ver” en tiempo real al conferencista y hacerle preguntas. A su vez el conferencista puede “ver” a quien le realiza preguntas y responderle.

La necesidad de trasmisir imágenes y voz en tiempo real hace que los recursos de comunicaciones involucrados en una videoconferencia sean importantes. A su vez, armar un aula virtual para N alumnos significa al menos tener N computadoras (o puestos enlazados con un servidor en el aula) que puedan conectarse con la computadora remota del conferencista... y todas ellas con cámara y micrófono.

LA WORLD WIDE WEB

La World Wide Web (la "telaraña" o "maraña mundial") es tal vez el punto más visible de Internet y hoy en día el más usado junto con el correo electrónico, aunque también es de los más recientes. Originalmente denominado Proyecto WWW y desarrollado en el CERN suizo a principio de los 90, partió de la idea de definir un "sistema de hipermedios distribuidos."



La WWW puede definirse básicamente como tres cosas: *hipertexto*, que es un sistema de enlaces que permite saltar de unos lugares a otros; *multimedia*, que hace referencia al tipo de contenidos que puede manejar (texto, gráficos, vídeo, sonido y otros) e *Internet*, la base sobre las que se transmite la información.

El aspecto exterior de la WWW son las conocidas "páginas Web." Una ventana muestra al usuario la información que desea, en forma de texto y gráficos, con los enlaces marcados en diferente color y subrayados. Haciendo un clic con el ratón se puede "saltar" a otra página, que tal vez esté instalada en un servidor al otro lado del mundo. El usuario también puede "navegar" pulsando el mouse sobre las imágenes o botones que formen parte del diseño de la página.

Las páginas de la WWW están situadas en servidores de todo el mundo (sitios Web), y se

accede a ellas mediante un programa denominado navegador (o browser). Este programa emplea un protocolo llamado HTTP, que funciona sobre TCP/IP, y que se encarga de gestionar el aspecto de las páginas y los enlaces.

Cada página Web tiene una dirección única en Internet, en forma de URL. Un URL indica el tipo de documento (página Web o documento en formato HTML), y el de las páginas hipertexto de la WWW comienza siempre por HTTP.

Una página Web puede ser <http://www.proveedor.ar/bienvenido.html>, que corresponde a un documento hipertexto bienvenido.html) que está en el servidor Web (www) de un proveedor (.proveedor) de Argentina (.ar). Al saltar de un enlace a otro, el programa navegador simplemente va leyendo páginas HTML de distintos lugares de Internet y mostrándolos en pantalla.

La Web proporciona algunas opciones interesantes: se puede circular saltando de un sitio a otro y volviendo rápidamente a los sitios que se acaban de visitar. La información puede presentarse en forma de tablas o formularios. El usuario puede en esos casos completar campos (por ejemplo, una encuesta) y enviarlos por correo electrónico con sólo hacer clic sobre el botón "enviar" que ve en su pantalla. La Web también facilita el acceso a información gráfica, películas o sonido de forma automática.

La Web es el lugar de Internet que más crecimiento está experimentando últimamente: se calcula que hay más de 50 millones de páginas Web en la Red, y su número crece a un ritmo vertiginoso. La Web, al facilitar la búsqueda de información, ha hecho que otros servicios de Internet como Gopher, Archie o WAIS se usen cada vez menos.

TENDENCIAS

Es notable el impacto de Internet y los servicios de red en la vida diaria. Actualmente hay aspectos cotidianos triviales en los que nos estamos acostumbrando a utilizar la "red de redes". Por ejemplo, buscar datos sobre un determinado producto, leer un diario (local o internacional), consultar una enciclopedia, conocer los programas de estudio de una Universidad, comprar un libro, etc...

Cada vez se utilizan más las redes sociales como medio de comunicación, en detrimento del correo electrónico, un medio reservado cada vez más para comunicaciones más formales.

Acceder a la Red desde dispositivos varios ya casi ha dejado de convertirse en tendencia para pasar a ser norma. Tablets, smartphone, videoconsolas... Parece que cualquier aparato electrónico debe poder acceder a Internet y los televisores son los últimos en sumarse a esta tendencia para ofrecer contenidos más completos. Esto incluso parece que empieza a suponer una pequeña crisis para la televisión por cable.

Los equipos informáticos van a ser cada vez más delgados, la tendencia de lo táctil se mantiene y parece que pasará también a los ordenadores y además, los procesadores pasarán de tener un par de núcleos a tener incluso cinco. La potencia, con este cambio, está asegurada

El reconocimiento de voz para ejecutar acciones. Parece que esta tendencia va camino de apoderarse también del mundo de Internet para mejorar la experiencia del usuario. Muchos rumores sobre un posible **iPhone 5** inundan la red. La posible sexta versión del smartphone por excelencia de la empresa de la manzana y evolución natural del iPhone 4S que, si todo va bien, llegará al mercado, junto al nuevo iOS 6, en septiembre de 2012.

Seguirá manteniéndose la oferta, tanto en redes sociales como en teléfonos inteligentes o tabletas. Además, se está trabajando en el sistema peer-to-peer, que permitirá conectar con otros jugadores sin necesidad de consumidor datos, ya que la sincronización se producirá con las llamadas.

La presencia de las empresas en la Red seguirá creciendo, a la vez que la importancia que estas otorgarán a la imagen que existe de ellas en Internet y por tanto, a la gestión de la misma.

El negocio electrónico seguirá creciendo. En este sentido, parece ser que se trabajará en una mayor optimización de las tiendas desde el teléfono móvil, algo que todavía encuentra obstáculos, tanto a la hora de navegar como en el proceso de compra de productos.

La tendencia de que el presupuesto de publicidad y marketing de las empresas dedique cada vez más importancia a la Red se mantiene. Un coste más económico, con un impacto más global y la sencillez de medir respuestas, son sus principales ventajas, ahora centradas sobre todo en las redes sociales, donde los usuarios pasan más tiempo.

CONCLUSIONES

Es importante tener en cuenta que en el mundo, el área de mayor crecimiento es el complejo electrónica-informática-comunicaciones y en particular la mayor oferta laboral mundial está asociada con el empleo de tecnología de sistemas distribuidos.

Esto hace prioritaria la formación tecnológica de los alumnos de carreras de Ingeniería e Informática, cuyo ámbito de trabajo más probable es una organización con un sistema distribuido de cómputo, con todas las áreas de la empresa vinculadas

por Internet y con necesidad de desarrollar productos orientados a ambientes de procesamiento distribuido.



MINISTERIO DE EDUCACION

Universidad Nacional de La Rioja
Departamento de Ciencias Exactas, Físicas y
Naturales

MATEMÁTICA
Curso de Ingreso

Año 2014





UNLaR

MINISTERIO DE EDUCACION DE LA NACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA RIOJA
Matemática

AUTORIDADES DEL DEPARTAMENTO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

DECANO : Ing. Alejandro Alvarez
Socio ACADEMICO : Ing. Carlos Ocampo

Equipo Coordinador y revisor del material de estudio

Prof. Lic. Cristina Fonseca
Prof. Ing. Isabel Demaldé

PROGRAMA

UNIDAD Nº1: Introducción al Número – Expresiones algebraicas.
Campo numérico, clasificación –Naturales, Enteros, Racionales, Reales, Complejos-.
Expresiones algebraicas: Operaciones, Potencias de un binomio, Regla de Ruffini, Teorema del resto.
Factoreo, concepto y análisis de los seis casos, combinación de los mismos.
Expresiones algebraicas fraccionarias, simplificación, reducción, operaciones.

UNIDAD Nº 2: Sistemas de Ecuaciones

Ecuaciones, concepto, clasificación, resolución de ecuaciones con una incógnita, problemas.
Ecuaciones fraccionarias.
Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, raíces, resolución, métodos, ejercicios y problemas de aplicación, representación gráfica.
Ecuaciones de segundo grado, raíces, representación gráfica, problemas.

UNIDAD Nº 3: Radicación y Logaritmación

Potencia de exponente natural. Operaciones y Propiedades.
Radicación, propiedades, operaciones, racionalización del divisor.
Logaritmación, definición, propiedades, logaritmos decimales y naturales. Uso de la calculadora para obtenerlos.

UNIDAD Nº 4: Trigonometría

Sistemas de representación gráfica, tipos.
Trigonometría, sistemas de mediciones, equivalencia, uso de la calculadora.
Funciones, seno, coseno, tangente, cotangente, secante cosecante, representaciones.
Relaciones fundamentales.
Funciones trigonométricas de ángulos notables.

INDICE

PROGRAMA.....	3
1. CAPITULO 1: NÚMEROS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS	7
1.1. NÚMEROS NATURALES	7
1.2. NÚMEROS ENTEROS.....	7
1.3. NÚMEROS RACIONALES	8
1.4. NÚMEROS IRRACIONALES	8
1.5. NÚMEROS REALES	9
1.6. NÚMEROS COMPLEJOS	11
1.7. EXPRESIONES ALGEBRAICAS	11
1.8. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA	12
1.9. TIPOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	12
1.10. MONOMIOS.....	12
1.11. ÁLGEBRA DE MONOMIOS.....	13
1.12. POLINOMIOS.....	14
1.13. ÁLGEBRA DE POLINOMIOS.....	15
1.14. REGLA DE RUFFINI, TEOREMA DEL RESTO, TEOREMA DEL FACTOR.	18
1.14.1. REGLA DE RUFFINI	18
1.14.2. TEOREMA DEL RESTO	20
1.14.3. TEOREMA DEL FACTOR.....	20
1.15. MÉTODOS PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO	20
1.15.1. FACTOR COMÚN	20
1.15.2. DIFERENCIA DE CUADRADOS	21
1.16. EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS	23
1.17. EJERCICIOS DE MONOMIOS.....	24
1.18. EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE POLINOMIOS	25
1.19. ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN	27
1.19.1. RESPUESTA A LAS ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN.....	28
2. CAPITULO 2: ECUACIONES	30
2.1. ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN	30
2.2. OPERACIONES CON ECUACIONES. ECUACIONES EQUIVALENTES.....	31
2.3. CLASES DE ECUACIONES.....	32
2.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA... ..	33
2.5. EJERCICIOS PROPUESTOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.....	35
2.6. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN A TRAVÉS DE ECUACIONES	35
2.7. ECUACIONES FRACCIONARIAS O POLINÓMICAS RACIONALES.....	37
2.8. SISTEMA LINEAL DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS	38

Matemática

2.9.	CLASIFICACIÓN SEGÚN LA SOLUCIÓN.....	38
2.10.	¿CÓMO PODEMOS RESOLVER UN SISTEMA?	39
2.10.1.	POR SUSTITUCIÓN.....	39
2.10.2.	POR IGUALACIÓN.....	40
2.10.3.	POR REDUCCIÓN	40
2.10.4.	MÉTODO DE DETERMINANTES.....	41
2.11.	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS	43
2.12.	TÉCNICA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	44
2.13.	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: PROBLEMAS PROPUESTOS	46
2.14.	ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	46
2.15.	RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.....	47
2.16.	PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS	49
2.17.	DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO A PARTIR DE LA SUMA Y PRODUCTO DE SUS SOLUCIONES.....	51
2.18.	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	54
2.19.	VÉRTICE DE LA PARÁBOLA.....	59
2.20.	EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA	61
2.21.	RAMAS DE LA PARÁBOLA HACIA ABAJO.....	62
2.22.	INFLUENCIA DE LOS PARÁMETROS EN LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS	63
2.23.	CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA ENUNCIADA EN LA FORMA GENERAL	66
2.24.	ECUACIÓN BICUADRADA	68
2.25.	ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN	70
2.25.1.	RESPUESTA A LAS ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN.....	71
3.	CAPITULO 3: POTENCIACIÓN, RADICACIÓN Y LOGARITMACIÓN	72
3.1.	POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL	72
3.2.	POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO Y BASE RACIONAL	74
3.3.	PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	74
3.4.	DIVISIÓN DE POTENCIAS CON LA MISMA BASE	75
3.5.	POTENCIA DE UNA POTENCIA	75
3.6.	PRODUCTO DE POTENCIAS CON EL MISMO EXPONENTE.....	75
3.7.	COCIENTE DE POTENCIAS CON EL MISMO EXPONENTE	75
3.8.	SIGNO DE UNA POTENCIA DE BASE ENTERA	75
3.9.	HISTORIA DE LA RADICACIÓN	76
3.10.	RADICACIÓN	77
3.11.	CÁLCULO DE UNA RAÍZ CUADRADA	79
3.12.	EJERCICIOS PARA CALCULAR UNA RAÍZ CUADRADA	81
3.13.	RAÍZ CUADRADA ENTERA.....	82



UNLaR

Matemática

3.14. CÁLCULO DE UNA RAÍZ CÚBICA.....	83
3.15. SIMPLIFICAR RADICALES	84
3.16. EXPRESAR COMO POTENCIA FRACCIONARIA:	84
3.17. EXTRAER FACTORES DE UN RADICAL	85
3.18. INTRODUCIR FACTORES EN UN RADICAL.....	85
3.19. SUMA Y RESTA DE RADICALES	86
3.20. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES	87
3.21. DIVISIÓN DE RADICALES.....	88
3.22. POTENCIA DE UN RADICAL	89
3.23. RAÍZ DE UN RADICAL	89
3.24. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN	90
3.25. RACIONALIZAR RADICALES	91
3.26. EJERCICIOS PROPUESTO PARA RADICALES	92
3.27. LOGARITMO.....	93
3.28. PROPIEDADES DE LOGARITMO.....	94
3.29. LOGARITMO DECIMAL Y NEPERIANO.....	95
3.30. ECUACIONES LOGARÍTMICAS.....	95
3.31. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS	96
3.32. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON LOGARITMOS.....	97
3.33. EJERCICIOS PROPUESTO PARA LOGARITMOS.....	99
3.34. ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO 3	100
3.35. RESPUESTA A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.....	101
4. CAPITULO 4: TRIGONOMETRÍA	102
4.1. SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS	102
4.2. EQUIVALENCIA ENTRE LOS SISTEMAS:	103
4.3.	103
4.4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	104
4.4.1. DEFINICIÓN DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO	104
4.4.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN ÁNGULO CUALQUIERA	105
4.4.3. ANGULOS NOTABLES	106
4.4.4. RELACIONES FUNDAMENTALES (SÓLO ALGUNAS).....	106
4.4.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.....	106
4.5. ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN	108
4.5.1. RESPUESTAS:	108
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	110

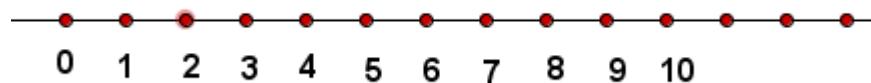
1. Capítulo 1: Números y expresiones algebraicas

1.1. Números naturales

Con los **números naturales** se cuentan los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien se expresa la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**).

El conjunto de los **números naturales** está formado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$



Algunos autores no incluyen al 0

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

La suma y el producto de dos números naturales es otro número natural.

La diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural , sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.	$5 - 3 \in \mathbb{N}$ $3 - 5 \notin \mathbb{N}$
---	---

El cociente de dos números naturales no siempre es un número natural , sólo ocurre cuando la división es exacta.	$6 : 2 \in \mathbb{N}$ $2 : 6 \notin \mathbb{N}$
---	---

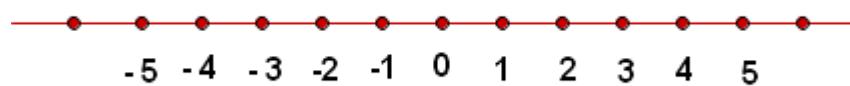
Podemos utilizar **potencias**, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

La **raíz** de un número natural **no siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta

1.2. Números enteros

Los **números enteros** son:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$



Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

La suma, la diferencia y el producto de dos números enteros es otro número entero.

El cociente de dos números enteros no siempre es un número entero , sólo ocurre cuando la división es exacta.	$6 : 2 \in \mathbb{Z}$ $2 : 6 \notin \mathbb{Z}$
--	---

Podemos operar con potencias , pero el exponente tiene que ser un número natural .	$(-2)^3 = -8 \in \mathbb{Z}$ $(-2)^{-3} = \frac{1}{-8} \notin \mathbb{Z}$
---	--

La **raíz** de un **número entero** **no siempre es un número entero**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo

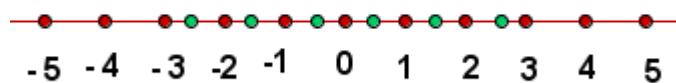
$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$$

1.3. Números racionales

Se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el **cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$



Los **números decimales** (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son **números racionales**; pero los otros números decimales con un número no finito de cifras decimales y que no son periódicas no son racionales.

La **suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números racionales es otro número racional (exceptuando la división por cero)**.

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **entero**.

La **raíz de un número racional no siempre es un número racional**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta y si el índice es par el radicando ha de ser positivo.

$$\sqrt{-\frac{4}{5}} \notin \mathbb{Q}$$

1.4. Números irracionales



Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El **número irracional** más conocido es π , que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = 3.141592653589\dots$$

Otros **números irracionales** son:

El número **e** aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

$$e = 2.718281828459\dots$$

El **número áureo**, Φ , utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,...) en las proporciones de sus obras.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749\dots$$

1.5. Números Reales

Los números racionales junto con los irracionales constituyen el conjunto de números reales que se indica con \mathbb{R} .

Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales.

Suma de números reales

Propiedades

Ley Interna:

El resultado de **sumar dos números reales** es otro **número real**.

$$a + b \in \mathbb{R}$$

$$\pi + \Phi \in \mathbb{R}$$

Asociativa:

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$$

Comutativa:

El orden de los sumandos no varía la suma.

$$a + b = b + a$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

Elemento neutro:

El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$$a + 0 = a$$

$$\pi + 0 = \pi$$

Elemento opuesto

Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.

$$e - e = 0$$

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

$$-(-\Phi) = \Phi$$

Diferencia de números reales

La **diferencia** de dos números reales se define como **la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo**.

$$a - b = a + (-b)$$

Producto de números reales

La **regla de los signos** del **producto** de los **números enteros y racionales** se sigue manteniendo con los **números reales**.

$$\begin{array}{rcl} + & \text{por} & + = + \\ - & \text{por} & - = + \\ + & \text{por} & - = - \\ - & \text{por} & + = - \end{array}$$

Propiedades

Ley Interna:

El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real.

$$a \cdot b \in \mathbb{R}$$

Asociativa:

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a , b y c son números reales cualesquiera, se cumple que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(e \cdot \pi) \cdot \Phi = e \cdot (\pi \cdot \Phi)$$

Comutativa:

El orden de los factores no varía el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$$

Elemento neutro:

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$a \cdot 1 = a$$

$$\pi \cdot 1 = 1$$

Elemento inverso:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$$

Distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$\pi \cdot (e + \Phi) = \pi \cdot e + \pi \cdot \Phi$$

Sacar factor común:

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$\pi \cdot e + \pi \cdot \Phi = \pi \cdot (e + \Phi)$$

División de números reales

La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

1.6. Números complejos

Números imaginarios

Son los que se resuelven la radicación de números negativos con índice par. Se define la unidad imaginaria como la raíz cuadrada de -1:

$$(-1)^{1/2} = i$$

Por ejemplo:

$$(-9)^{1/2} = (-1 \square 9)^{1/2} = 3 \square i$$

Números Complejos

Un número complejo se define como la suma de un número real y un número imaginario.

Por ejemplo: $3 + 5i$

Se puede decir que todos los números son complejos, ya que un número real se los puede definir como un número complejo con su parte imaginaria nula, y un número imaginario como un número complejo con su parte real nula.

1.7. Expresiones algebraicas

Trabajar en **álgebra** consiste en manejar **relaciones numéricas** en las que una o más cantidades son **desconocidas**. Estas cantidades se llaman **variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras**.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligados por los signos de las operaciones: *adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación*.

Las **expresiones algebraicas** nos permiten, por ejemplo, hallar longitudes, áreas y volúmenes:

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.

Área del cuadrado: $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado

Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo

O bien algunas **expresiones algebraicas** comunes:

El doble o duplo de un número:	2x
---------------------------------------	-----------

El triple de un número:	3x
--------------------------------	-----------

El cuádruplo de un número:	4x
-----------------------------------	-----------

Matemática

La mitad de un número:	$x/2$
Un tercio de un número:	$x/3$
Un cuarto de un número:	$x/4$
Un número al cuadrado:	x^2
Un número al cubo:	x^3

1.8. Valor numérico de una expresión algebraica

El un valor numérico de una expresión algebraica es el **número** que se obtiene al **sustituir las letras** de la misma **por números** determinados y **efectuar las operaciones** indicadas en la expresión.

Longitud de la circunferencia de radio 5 cm:	$L = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm}$
Área del cuadrado de lado 5 cm:	$S = (5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$
Volumen del cubo de arista 5 cm :	$V = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

1.9. Tipos de expresiones algebraicas

Monomio

Un **monomio** es una **expresión algebraica** formada por **un solo término**. Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**. Por ejemplo: $2x^2 y^3 z$

Binomio

Un **binomio** es una **expresión algebraica** formada por **dos términos**. Por ejemplo: $2x^2 y^3 z + 3x^2 y$

Trinomio

Un **trinomio** es una **expresión algebraica** formada por **tres términos**.

Polinomio

Un **polinomio** es una **expresión algebraica** formada por **más de un término**.

1.10. Monomios

Partes de un monomio:

Coeficiente

El **coeficiente** del **monomio** es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

Grado

El **grado** de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El grado de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Monomios semejantes

$x^2 y^3 z$ es semejante a $5x^2 y^3 z$

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

1.11. Álgebra de Monomios

Suma de Monomios

Sólo podemos **sumar monomios semejantes**.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n$$

$$2x^2 y^3 z + 3x^2 y^3 z = 5x^2 y^3 z$$

Si los **monomios no son semejantes** se obtiene un **polinomio**.

$$2x^2 y^3 + 3x^2 y^3 z$$

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro **monomio semejante** cuyo **coeficiente es el producto del coeficiente de monomio por el número**.

$$5 \cdot (2x^2 y^3 z) = 10x^2 y^3 z$$

Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.**

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$$

$$(5x^2 y^3 z) \cdot (2 y^2 z^2) = 10 x^2 y^5 z^3$$

División de monomios

Sólo se pueden **dividir monomios** con la **misma parte literal** y con el **grado del dividendo mayor o igual** que el **grado** de la variable correspondiente del **divisor**.

La división de monomios es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.**

$$ax^n : bx^m = (a : b)x^{n-m}$$

$$\frac{6x^3 y^4 z^2}{3x^2 y^2 z^2} = 2xy^2$$

Si el **grado del divisor es mayor**, obtenemos una **fracción algebraica**.

$$\frac{6x^3 y^4 z^2}{3x^5 y^2 z^4} = \frac{2y^2}{x^2 z^2}$$

Potencia de un monomio

Para realizar la **potencia de un monomio** se eleva, cada elemento de éste, al

exponente de la potencia.

$$(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}$$

$$(2x^3)^3 = 2^3 \cdot (x^3)^3 = 8x^9$$

$$(-3x^2)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 = -27x^6$$

1.12. Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ números, llamados **coeficientes**.

n un número natural.

x la variable o indeterminada.

a_n es el coeficiente principal.

a_0 es el término independiente.

Grado de un polinomio

El **grado** de un **polinomio** $P(x)$ es el **mayor exponente** al que se encuentra elevada la **variable** x .

Clasificación de un polinomio según su grado

Primer grado	$P(x) = 3x + 2$
Segundo grado	$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$
Tercer grado	$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Tipos de polinomios**Polinomio nulo**Es aquel **polinomio** que tiene todos sus coeficientes nulos.**Polinomio homogéneo**Es aquel **polinomio** en el que todos sus términos o monomios son del mismo grado.

$$P(x) = 2x^2 + 3xy$$

Polinomio heterogéneoEs aquel **polinomio** en el que sus términos no son del mismo grado.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$$

Polinomio completoEs aquel **polinomio** que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

Polinomio ordenadoUn **polinomio** está **ordenado** si los **monomios** que lo forman están escritos de **mayor a menor grado**.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

1.13. Álgebra de polinomios

Suma de polinomios**Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.**

Podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.



$$\begin{array}{r} P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \\ Q(x) = 6x^3 + 8x + 3 \\ \hline 7x^4 & + 4x^2 + 7x + 2 \\ & 6x^3 & + 8x + 3 \\ \hline & 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5 \end{array}$$

$$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

Resta de polinomios**La resta de polinomios** consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x) \\ P(x) - Q(x) &= 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x \\ P(x) - Q(x) &= 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3 \\ P(x) - Q(x) &= 3x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

Multiplicación de un número por un polinomioEs otro **polinomio** que tiene de **grado el mismo** del polinomio y como **coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número**.



$$3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.



$$3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

Multiplicación de polinomios

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.



$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 - 3 & Q(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x = \end{aligned}$$

Se suman los monomios del mismo grado.

$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Se obtiene otro **polinomio** cuyo **grado** es la **suma** de los **grados** de los **polinomios** que se **multiplican**.

También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:



$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ \underline{-} \quad \quad \quad 2x^2 - 3 \\ \hline - 6x^3 + 9x^2 - 12x \\ \underline{+} \quad \quad \quad 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \\ \hline 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$



Resolver la división de polinomios:
 $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$\begin{array}{r} x^5 + 2x^3 \quad - x - 8 \\ \underline{-} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.
 $x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{r} x^5 + 2x^3 \quad - x - 8 \\ \underline{-} x^5 + 2x^4 - x^3 \quad \quad \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x^4 + x^3 \quad \quad \quad - x - 8 \quad \quad \quad x^3 \end{array}$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del

divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^3 \\
 -x^5 + 2x^4 - x^3 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^3 - 2x^2 - x - 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -x - 8 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2
 \end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$$5x^3 : x^2 = 5x$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^3 \\
 -x^5 + 2x^4 - x^3 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\
 -5x^3 + 10x^2 - 5x \\
 \hline
 8x^2 - 6x - 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -x - 8 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + 5x
 \end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

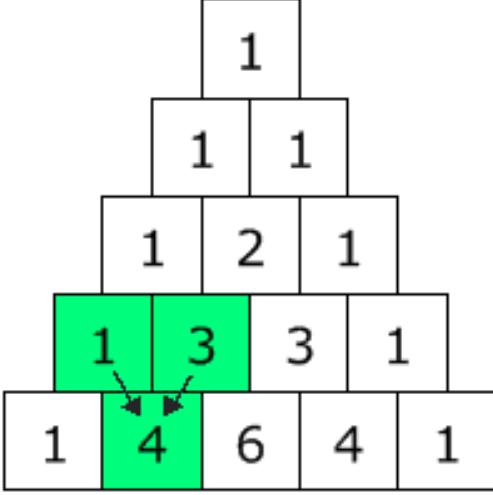
$$8x^2 : x^2 = 8$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^3 \\
 -x^5 + 2x^4 - x^3 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^3 - 2x^2 - x \\
 -5x^3 + 10x^2 - 5x \\
 \hline
 8x^2 - 6x - 8 \\
 -8x^2 + 16x - 8 \\
 \hline
 10x - 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -x - 8 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + 5x + 8
 \end{array}$$

10x - 6 es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

x³ + 2x² + 5x + 8 es el **cociente**.

Matemática

<p>El triángulo de Pascal</p> <p>Una de las pautas de números más interesantes es el triángulo de Pascal (llamado así en honor de <i>Blaise Pascal</i>, un famoso matemático y filósofo francés). Para construir el triángulo, empieza con "1" arriba, y pon números debajo formando un triángulo.</p> <p>Cada número es la suma de los dos números que tiene encima, menos los extremos, que son siempre "1". (Aquí está remarcado que $1+3=4$)</p>																
<p>Polinomios</p> <p>Cómo usar el triángulo de Pascal para desarrollo de potencias de un binomio</p> 	<p>El triángulo de Pascal también te da los coeficientes en la expansión de un binomio: $(x + 1)^n$</p> <p>Cada fila de la tabla dà los coeficientes del polinomio expandido</p>															
<p>Ejemplo para la segunda, tercera y cuarta fila:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #ADD8E6;">Potencia</th> <th style="background-color: #ADD8E6;">Expansión polinomial</th> <th style="background-color: #ADD8E6;">Triángulo de Pascal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="background-color: #FFFACD;">2</td> <td style="background-color: #FFFACD;">$(x + 1)^2 = 1x^2 + 2x + 1$</td> <td style="background-color: #FFFACD;">1, 2, 1</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #FFFACD;">3</td> <td style="background-color: #FFFACD;">$(x + 1)^3 = 1x^3 + 3x^2 + 3x + 1$</td> <td style="background-color: #FFFACD;">1, 3, 3, 1</td> </tr> <tr> <td style="background-color: #FFFACD;">4</td> <td style="background-color: #FFFACD;">$(x + 1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$</td> <td style="background-color: #FFFACD;">1, 4, 6, 4, 1</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; background-color: #FFFACD;">... etc ...</td><td></td></tr> </tbody> </table>		Potencia	Expansión polinomial	Triángulo de Pascal	2	$(x + 1)^2 = 1x^2 + 2x + 1$	1, 2, 1	3	$(x + 1)^3 = 1x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	1, 3, 3, 1	4	$(x + 1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$	1, 4, 6, 4, 1	... etc ...		
Potencia	Expansión polinomial	Triángulo de Pascal														
2	$(x + 1)^2 = 1x^2 + 2x + 1$	1, 2, 1														
3	$(x + 1)^3 = 1x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	1, 3, 3, 1														
4	$(x + 1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$	1, 4, 6, 4, 1														
... etc ...																

1.14. Regla de Ruffini, Teorema del resto, Teorema del factor.

<p>Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableció un método más breve para hacer la división de polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$.</p>	
--	---

1.14.1. Regla de Ruffini

Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división:

$$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$$

Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independientemente del divisor.

Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Sumamos los dos coeficientes.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 3 \end{array}$$

Repetimos el proceso anterior.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \end{array}$$

Volvemos a repetir el proceso.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 9 \quad 18 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \quad 18 \end{array}$$

Volvemos a repetir.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 9 \quad 18 \quad 54 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \quad 18 \quad |56 \end{array}$$

El último número obtenido, 56, es el resto.

El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$$

Matemática
1.14.2. Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$, entre un polinomio de la forma $(x - a)$ es el valor numérico de dicho polinomio.

Calcular por el teorema del resto el valor para el valor: $x = a$.

sto el resto de la división:

$P(x) : Q(x)$

Ejemplo

$$\begin{array}{r} P(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 18 & \boxed{56} \end{array}$$

$$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 = \boxed{56}$$

1.14.3. Teorema del factor

El polinomio $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $(x - a)$ si y sólo si $P(x = a) = 0$.

Al valor $x = a$ se le llama **raíz** o **cero** de $P(x)$.

Raíces de un polinomio

Son los valores que anulan el polinomio.

$x = 2$ y $x = 3$ son raíces o ceros del polinomio: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, porque $P(2) = 0$ y $P(3) = 0$.

Factorización de un Polinomio: (Técnica de Gauss)

Por el teorema del resto, si a es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $x - a$, pues el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es cero. A cada uno de esos valores se los suele designar x_1, x_2, x_3, \dots , etc

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$P(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \text{ (Polinomio factoreado).}$$

1.15. Métodos para factorizar un polinomio
1.15.1. Factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a(b + c + d)$$

Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$$

La **raíces** son: $x = 0$ y $x = -1$

$$2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$$

Sólo tiene una **raíz** $X = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

Factor común por grupos

Descomposición en grupos de igual número de términos con un factor común en cada grupo.

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$$

Agrupo los términos que tienen un factor común

$$(2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b)$$

Saco el factor común de cada grupo

1.15.2. Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia de las bases.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Descomponer en factores y hallar las raíces

$$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Descomponer en factores los trinomios cuadrados perfectos y hallar sus raíces

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

↓ ↑ ↓

$$3^2 \ 2 \cdot 3 \cdot x \ x^2$$

La raíz es $x = -3$, y se dice que es una **raíz doble**.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

↓ ↑ ↓

$$x^2 \ 2 \cdot x \cdot 2 \ 2^2$$

La raíz es $x = 2$.

Trinomio de segundo grado

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2 , el polinomio descompuesto será:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$



Descomponer en factores los trinomios de segundo grado y hallar sus raíces

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$
 $\searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = 2$.

$$x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$
 $\searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = -2$.

Descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces

$$x^4 - 10x^2 + 9$$

$$x^2 = t$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} =$$

$\nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9$
 $\searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 = 1 \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$x^4 - 2x^2 + 3$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 2t + 3 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} =$$

$\nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3$
 $\searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1$

$$x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 = -1 \quad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$$

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

La suma de potencias de igual grado de exponente impar es divisible únicamente por la suma de sus bases.

$$(x^3 + a^3) : (x + a) = (x^2 - ax + a^2)$$

Como se trata de una división exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Luego:

$$(x^3 + a^3) = (x + a) \cdot (x^2 - ax + a^2)$$

La diferencia de potencias de igual grado de exponente impar es divisible por la diferencia de las bases.

$$(m^3 - 27n^3) : (m - 3n) = (m^2 + 3mn + 9n^2)$$

Como se trata de una división exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Luego:

$$(m^3 - 27n^3) = (m - 3n) \cdot (m^2 + 3mn + 9n^2)$$

La diferencia de potencias de igual grado de exponente par, es divisible por la suma y la diferencia de sus bases

$$(x^6 - y^6) : (x + y) = (x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$$

Luego

$$(x^6 - y^6) = (x + y) \cdot (x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$$

$$(x^6 - y^6) : (x - y) = (x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$$

Luego

$$(x^6 - y^6) = (x - y) \cdot (x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$$

La suma de potencias de igual grado de exponente par no se puede factorear.

1.16. Expresiones algebraicas fraccionarias

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad y \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

$$\frac{x+2}{x^2-4} \text{ y } \frac{1}{x-2}$$

son **equivalentes** porque:
 $(x+2) \cdot (x+2) = x^2 - 4$

Dada una fracción algebraica, **si multiplicamos el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot M(x)} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) : M(x)}{Q(x) : M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

1.17. Ejercicios de monomios

1.- Indicar cuáles de las siguientes expresiones son monomios. En caso afirmativo, indica su grado y coeficiente	Respuesta
$3x^3$	
$5x^{-3}$	
$3x + 1$	
$\sqrt{2} x$	
$-\frac{3}{4}x^4$	
$-\frac{3}{x^4}$	
$2\sqrt{x}$	

2.- Realizar las sumas y restas de monomios	Respuesta
$2x^2y^3z + 3x^2y^3z$	
$2x^3 - 5x^3$	
$3x^4 - 2x^4 + 7x^4$	
$3x^4 - 2x^4 + 7x^4$	

3.- Efectuar los productos de monomios.	Respuesta
$(2x^3) \cdot (5x^3)$	

Matemática

$(12x^3) \cdot (4x)$	
$5 \cdot (2x^2y^3z)$	
$(5x^2y^3z) \cdot (2y^2z^2)$	
$(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2)$	
$(-2x^3) \cdot (-5x) \cdot (-3x^2)$	

4.- Realizar las divisiones de monomios	Respuesta
$(12x^3) : (4x)$	
$(18x^6y^2z^5) : (6x^3yz^2)$	
$(36x^3y^7z^4) : (12x^2y^2)$	
$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} =$	
$\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3} =$	
$\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^2} =$	

5.- Calcular las potencias de los monomios	Respuesta
$(2x^3)^3$	
$(-3x^2)^3$	
$\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 =$	

1.18. Ejercicios y problemas de polinomios

1.- Indicar si las siguientes expresiones algebraicas son polinomios o no. En caso afirmativo, señalar cuál es su grado y término independiente.	Respuesta
$x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$	
$\sqrt{x} + 7x^2 + 2$	
$1 - x^4$	
$\frac{2}{x^2} - x - 7$	
$x^3 + x^5 + x^2$	
$x - 2x^{-3} + 8$	
$x^3 - x - \frac{7}{2}$	

2.- Escribir	Respuesta
Un polinomio ordenado sin término independiente	
Un polinomio no ordenado y completo.	
Un polinomio completo sin término independiente	
Un polinomio de grado 4, completo y con coeficientes impares	

Matemática

3.- Dados los polinomios	Calcular	Respuesta
$P(x) = 4x^2 - 1$	$P(x) + Q(x)$	
$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$	$P(x) - U(x)$	
$R(x) = 6x^2 + x + 1$	$P(x) + R(x)$	
$S(x) = 1/2x^2 + 4$	$2P(x) - R(x)$	
$T(x) = 3/2x^2 + 5$	$S(x) + T(x) + U(x)$	
$U(x) = x^2 + 2$	$S(x) - T(x) + U(x)$	

4.- Dados los polinomios	Calcular	Respuesta
$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$	$P(x) + Q(x) - R(x)$	
$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$	$P(x) + 2Q(x) - R(x)$	
$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$	$Q(x) + R(x) - P(x)$	

5.- Multiplicar	Respuesta
$(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3)$	
$(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2)$	
$(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)$	

6.- Dividir	Respuesta
$(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$	
$(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$	
$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8 \quad Q(x) = x^2 - 2x + 1$	

7.- Dividir por Ruffini	Respuesta
$(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$	
$(x^5 - 32) : (x - 2)$	
$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$	

8.- Hallar el resto de las siguientes divisiones	Respuesta
$(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$	
$(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$	
$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$	

9.- Indicar cuáles de estas divisiones son exactas	Respuesta
$(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$	
$(x^6 - 1) : (x + 1)$	
$(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$	
$(x^{10} - 1024) : (x + 2)$	

10.- Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican	Respuesta
$(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$	
$(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$	
$(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$	
$(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$	

11.- Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.



UNLaR

Matemática

- | |
|---|
| 12.- Determina los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$ |
| 13.- Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4. |
| 14.- Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces |
| 15.- Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$ |
| 16.- Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces |

1.19. Actividades de Autoevaluación

Resuelve y obtiene tu evaluación según el porcentaje de respuestas correctas
--

1) En un viaje en taxi, cae una ficha cada 0.2 km. La "bajada de bandera" cuesta \$18 y cada ficha cuesta \$2 ¿Cuál de los siguientes polinomios expresa el costo del viaje en taxi? (x es la distancia recorrida en km.)

a) $P(x) = 2 + 0,2x$

b) $Q(x) = 18x + 2$

c) $R(x) = 2x + 18$

d) $H(x) = 10x + 18$

2) Decidir si las siguientes expresiones son polinomios, en caso de no serlo indicar porque

1) $P(x) = 5x^6 - \sqrt{3}x^4 + x^2 - 2x$

2) $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 8x^{-1} + 5$

3) Halla el grado de cada uno de los siguientes polinomios

1) $P(x) = x^2 + 3x - 4$

2) $P(x) = x^4 + 5x^7 - 4x$

3) $P(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$

4) Indicar si los polinomios están completos, ordenados o ambos. En caso de no estarlo escribirlos completos y ordenados.

1) $P(x) = 3x - 4 + x^2$

2) $P(x) = x^3 + 3x^5 - 2$

3) $P(x) = 2x^2 + 7x - 4x^4 - 1$

5) Halla el valor numérico de los siguientes polinomios

1) $P(x) = 3x^2 - 4x + 2$ para $x = 1$

2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3$ para $x = -1$.

3) $P(x) = 4x^2 - 5x + 2$ para $x = 0$

Matemática

6) Aplicar la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones y verificar el resto por el teorema de resto.

1) $(7x^3 - 11x^2 - 12x + 45) : (x - 3) =$

2) $(x^2 + 4x + 6) : (x + 2) =$

3) $(5x^4 - 2x + x^2 - 6x^3 - 1) : (x - 1) =$

4) $(-15x^2 + 5x^3 - 60x + 50) : (x - 5) =$

7) Indica sin realizar la división si los siguientes polinomios son divisibles

1) $P_{(x)} = x^5 - 1 \quad Q_{(x)} = x - 1$

2) $P_{(x)} = x^3 - 1 \quad Q_{(x)} = x + 1$

3) $P_{(x)} = x^2 + 6x + 9 \quad Q_{(x)} = x + 3$

4) $P_{(x)} = x^4 - x^2 - 12 \quad Q_{(x)} = x + 2$

8) Hallar el valor de "k" para que los siguientes polinomios sean divisibles

1) $P_{(x)} = 3x^2 + kx - 8 \quad Q_{(x)} = x - 2$

2) $P_{(x)} = x^2 + (k - 2)x + 1 \quad Q_{(x)} = x + 2$

3) $P_{(x)} = (3 + k)x^2 + k^2x - 5 \quad Q_{(x)} = x - 1$

9) Hallar las raíces de los siguientes polinomios (factorizarlos)

1) $P_{(x)} = x^2 - 5x + 6$

2) $Q_{(x)} = 3x^2 + 18x + 24$

3) $H_{(x)} = x^3 - 4x^2 - x + 4$

4) $R_{(x)} = x^3 + x^2 - 16x - 16$

10) Resolver los siguientes problemas

1) Escribir todos los polinomios de grado tres cuya única raíz sea 3. ¿La respuesta es única.?

2) Escribir un polinomio de grado tres donde 4 sea una raíz doble y -1 una raíz simple, además que cumpla $P_{(2)} = 24$

3) Escribir el polinomio de grado tres sabiendo que $P_{(-2)} = P_{(1)} = P_{(5)} = 0$ y que $P_{(0)} = 50$.

4) Hallar una función polinómica de grado dos que corte al eje x en los puntos (3, 0) y

5) Hallar la función polinómica de grado 3, cuyos ceros sean -1, 2 y 3, para que verifique que $f(1) = 12$

1.19.1. Resuesta a las actividades de autoevaluación

Respuesta: $H(x)$

Respuesta: 1) si 2) No, potencia no natural 3) No, raíz.

Respuesta: 1) Segundo grado. 2) Séptimo grado. 3) Tercer grado

Respuesta: 1) completo, no ordenado. 2) incompleto y no ordenado. 3) incompleto y no ordenado.

Respuesta: 1) 1 2) -11 3) 2

Respuesta:

$$7x^2 + 10x + 15,$$



$$x + 2 \text{ (resto: 2),}$$

$$5x^3 - x^2 - 2 \text{ (resto: } -3\text{)},$$

$$5x^2 + 10x - 10$$

Respuesta: 1) si 2) no 3) si 4) si

Respuesta: 1) $k = 2$, 2) $k = 9/2$ 3) $k = 1$ ó $k = -2$.

Respuesta: 1) $P_{(x)} = (x - 3)(x - 2)$, 2) $Q_{(x)} = 3.(x + 2)(x + 4)$

$$3) H_{(x)} = (x - 4)(x + 1)(x - 1), \quad 4) R_{(x)} = (x + 4)(x - 4)(x + 1)$$

Respuesta: 1) $P(x) = a \cdot (x - 3)^3$. No "a" puede tener muchos valores. 2) Respuesta: $P(x)$

$$= 2.(x-4)^2(x+1) \quad 3) \text{Respuesta: } P_{(x)} = 5(x+2)(x-1)(x+5) \quad 4) \text{Respuesta: } P(x) = 2(x-1)$$

3)(x + 1) 5)Respuesta



2. Capítulo 2: Ecuaciones

Ecuación es toda función algebraica igualada a 0 ó a otra igualdad algebraica. A la primera parte de la igualdad se la llama primer término y a la segunda se la llama segundo término. Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo resultado.

$$2x \square 3 \square 0$$

¿A que se llaman expresiones Algebraicas?

Trabajaremos con Relaciones numéricas donde una o más cantidades son desconocidas, éstas son llamadas variables, incógnitas o indeterminadas y están representadas por letras.

Una **Expresión Algebraica**, como se definió anteriormente, es una combinación de letras y números ligada por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

En matemática las letras pueden ser	Evaluadas: A la letra se le asigna un valor numérico desde el principio, por ejemplo la letra <i>e</i> .
	Ignoradas: Se ignora la letra y no se le da ningún significado.
	Como objetos: Las letras son vistas como un objeto concreto (lados de un polígono, frutas, tiempo) eliminando así el significado abstracto de las letras por algo concreto y real.
	Como incógnitas específicas: Los alumnos consideran las letras como un número desconocido pero específico y pueden operar sobre él directamente
	Como variables son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

 Ejemplo Las expresiones algebraicas nos permiten hallar, por ejemplo, áreas, perímetros y volúmenes.	Área del círculo: $A \square\square\square r^2$, donde r es el radio del cuadrado Perímetro del cuadrado: $P \square\square l$ donde l es el lado del cuadrado. Volumen del cilindro de base circular: $V \square\square\square h^2$, donde h es la altura del cilindro y r es el radio de la base.
--	---

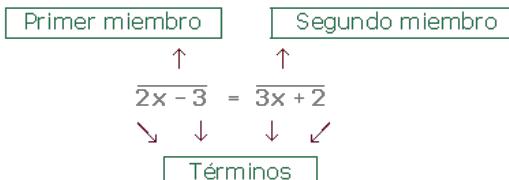
Hay distintos tipos de ecuaciones:

Una igualdad numérica o identidad	$2 + 5 = 3 + 4$
Una igualdad algebraica	$3X + 8 X = 11 X$
Una función: es una expresión algebraica igualada a y .	$y = 2 x - 1$

2.1. Elementos de una ecuación

Miembros	Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que
----------	--

Matemática

	aparecen a ambos lados del signo igual.
Términos	Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros de una ecuación. 
Incógnitas	La incógnita de una ecuación es el valor desconocido que se pretende determinar. La incógnita de una ecuación se suele expresar con las últimas letras del abecedario, como por ejemplo letra x .
Soluciones	Las SOLUCIONES de una ecuación son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea una identidad. $2x \square 3 \square 3x \square 2 \square 3 \square 2 \square 3x \square 2x \square \square \square x$, para esta ecuación el valor es $\square 5$
Grado	El grado de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.

2.2. Operaciones con Ecuaciones. Ecuaciones equivalentes

Si a , b , c y d son cuatro números reales cualesquiera, entonces valen las propiedades siguientes:

Reflexividad: todo número es igual a sí mismo.	$a \square a$
Simetría: si un número a es igual a otro b , y este último es igual a un tercer número c , entonces el primero es igual al tercero	$a = b \square b = c \square a = c$
Transitividad: dados dos números a y b , si el primero es igual al segundo, entonces el segundo también es igual al primero	$a = b \square b = a$
Uniformidad con la suma: si se suma el mismo número a ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad	$a = b \square a + c = b + c$
Uniformidad con el producto: si se multiplican ambos miembros de una igualdad por el mismo número, se obtiene otra igualdad	$a = b \square ac = bc$

Ahora aplicamos estas propiedades en la resolución de algunas ecuaciones sencillas.

$$3x \square 8 \square 9$$

 Ejemplo $3x \square 8 \square \square 8 \square \square 9 \square \square 8 \square$ (por la uniformidad con la suma)

$$3x \square 1$$

$$3x \frac{1}{3} \square 1 \frac{1}{3}$$
 (por la uniformidad con el producto)

$$x \square \frac{1}{3}$$

Sea la ecuación lineal: $2x - 8 = 2(3 + x)$

Resolución:



$$\begin{array}{ll}
 2x \square 8 \square 2 \boxed{3} \square x & \text{por propiedad distributiva:} \\
 2x \square 8 \square 6 \square 2x & \text{por propiedad uniforme de la suma:} \\
 2x \square 8 \square 2x \square 6 \square 2x \square 2x & \text{operando:} \\
 \boxed{8} \square 6 & \text{¡ABSURDO!}
 \end{array}$$

¿Qué significa esto? ¿Se cometió algún error durante el desarrollo?

No se cometió ningún error. El absurdo provino que la ecuación dada no tiene solución en los números reales, es decir, *no existe ningún* valor de x que satisfaga la ecuación. El conjunto solución de dicha ecuación es vacío.

Sea la ecuación lineal: $10x = 5(2x - 4x)$

Resolución:



$$\begin{array}{ll}
 \boxed{0} x \square 5 \square 2x \square 4x & \text{operando:} \\
 \boxed{0} x \square 5 \square 2x & \\
 \boxed{0} x \square \boxed{10} x & \text{por propiedad uniforme del producto:} \\
 \boxed{0} x \boxed{\cancel{10}} \cancel{x} \square \boxed{0} x \cancel{10} \cancel{x} & \\
 x \square x &
 \end{array}$$

Ecuaciones que son equivalentes	Tienen la misma solución $2x \square 4 \square 6$, en ambas ecuaciones la solución es $x \square 1$ $x \square 2 \square 3$
Criterios de equivalencia de ecuaciones	<p>Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada. $3x \square 5 \square 10$, en ambas ecuaciones la solución es $x \square 5$ $3x \square 5 \square 4 \square 10 \square 4$</p> <p>Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada. $6x \square 12 \square 18 \square x \square 1$ $\boxed{6x \square 12} \boxed{3} \square 18 \square 3 \square 2x \square 4 \square 6 \square x \square 1$</p>

2.3. Clases de ecuaciones

Ecuaciones polinómicas	Enteras. Son de la forma $P[x] \square 0$, donde $P[x]$ es un polinomio.
	Primer grado o lineales: Son del tipo $ax \square b \square 0$, con $a \square 0$, ó cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión. $5x \square 2 \square 0$ $\boxed{x \square 1}^2 \square x^2 \square 2 \square x^2 \square 2x \square 1 \square x^2 \square 2 \square 2x \square 1 \square 2$
	Segundo grado o cuadráticas: Son del tipo $ax^2 \square bx \square c \square 0$, con $a \square 0$, cuando están completas, o incompletas $ax^2 \square 0$, $ax^2 \square bx \square 0$ o $ax^2 \square c \square 0$
	Tercer grado: Son del tipo $ax^3 \square bx^2 \square cx \square d \square 0$, con $a \square 0$.
	Cuarto grado: Son del tipo $ax^4 \square bx^3 \square cx^2 \square dx \square e \square 0$, con $a \square 0$,
	Bicuadradas: Son ecuaciones del tipo $ax^4 \square bx^2 \square c \square 0$, con $a \square 0$. Son ecuaciones de cuarto grado que no tienen términos de grado impar.

Matemática

	<p>Grado n: Son del tipo $a_1x^n - a_2x^{n-1} - \dots - a_nx - a_0 = 0$</p> <p>Racionales: son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.</p> $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 0$ <p>Irracionales: son aquellas que tienen al menos un polinomio bajo el signo radical.</p> $\sqrt[n]{P(x) = 0}$ $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}} = 0$
Ecuaciones no polinómicas	<p>Exponenciales: Son ecuaciones en la que la incógnita aparece en el exponente.</p> $2^{2x-1} = 4$ $2^{x-1}\sqrt[3]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$ $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$ <p>Logarítmicas: la incógnita aparece afectada por un logaritmo.</p> $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$ $4 \log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2 \log x$ $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$ <p>Trigonométricas: la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Como éstas son periódicas, habrá por lo general infinitas soluciones.</p> $\cos 2x = 1 + 4 \sin x$ $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$ $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x - 1 = 0$

2.4. Resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita

Los términos en los que no figura la incógnita, en una ecuación de primer grado se llaman términos independientes.	
Pasos a seguir para resolverlas	Se efectúan las operaciones indicadas, supresión de paréntesis, aplicación de propiedades distributivas, reducción a común denominador, etc.
	Si aparece un divisor común en ambos miembros se simplifica la ecuación, suprimiéndolo; si aparece en un solo miembro, se pasa al otro miembro como factor de éste.
	Reducida la ecuación a forma polinómica, sin denominadores, se efectúa el pasaje de todos los términos con incógnitas a un miembro y los términos independientes al otro, reduciéndose los términos semejantes.
	Si el coeficiente de la incógnita es negativo, se multiplican ambos miembros por $\boxed{-1}$.

Matemática

	<p>Se pasa el coeficiente de la incógnita si es distinto de cero, como divisor del miembro que contiene el término independiente, determinándose así el valor de la raíz.</p> <p>Por último se verifica, si el valor hallado satisface a la ecuación.</p> <p>Si la ecuación fuere fraccionaria se procede de igual manera.</p>
Dada una ecuación de primer grado, ésta tiene: ninguna solución una única solución infinitas soluciones	

 Ejemplo	$5x \square 2 \square 7x \square 10$
En la siguiente ecuación	
Se agrupan los términos que tienen x en el primer miembro y los independientes en el segundo miembro	$5x \square 7x \square 10 \square 2$
Se resuelve la suma	$\square 2x \square 12$
Multiplicando ambos miembros por $\square 1$, es recomendable agregar un paréntesis cuando se multiplica por un número negativo.	$\square 2x \square \square 1 \square 12 \square \square 1 \square$
Ahora despejamos el valor de x al cual se lo denomina raíz de la ecuación	$2x \square \square 2 \square x \square \frac{\square 12}{2} \square \square 6$
Verificación, si el valor hallado es correcto, reemplazado en la ecuación ésta se transforma en una identidad	$5 \square 6 \square 2 \square 7 \square 6 \square 10$ $\square 30 \square 2 \square 42 \square 10 \square$ $\square 32 \square \square 32$

 Ejemplo	$\frac{7}{3} \frac{26}{12x} \frac{10x}{3} \frac{4}{}$
En la siguiente ecuación	
Encontramos el mínimo común denominador, 3 es un número primo y 12 se puede descomponer en sus números primos.	$12 \square 2$ $6 \square 2 \square 12 \square 2^2 \square 3$ $3 \square 3$
El mínimo común denominador es 12. Se eligen los números primo con el mayor exponente	$12 \square 2^2 \square 3$
Como en el ejemplo, tenemos la variable x en el denominador, también forma parte del mínimo común denominador	$12x$
Se suma	$\frac{7 \square 4x \square 26 \square 10x}{12x} \frac{4 \square 4x}{12x}$
Resolvemos	$\frac{28x \square 26 \square 10x}{12x} \frac{16x}{12x}$
Cancelamos los denominadores por ser iguales	$18x \square 26 \square 16x$
Agrupamos	$18x \square 16x \square \square 26$
Resolvemos en el primer miembro	$2x \square \square 26$

El valor buscado es	$x \boxed{} \boxed{2} 6 \quad \boxed{} \boxed{1} 3$ 2
Verificación	$\begin{array}{r} 7 \quad 26 \quad 10 \quad 13 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 12 \quad 13 \quad 3 \\ \hline 7 \quad 26 \quad 130 \quad 4 \\ \hline 3 \quad \boxed{1} 56 \quad 3 \\ \hline 7 \quad 156 \quad 7 \quad 1 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 3 \quad \boxed{1} 56 \quad 3 \end{array}$

2.5. Ejercicios propuestos Ecuaciones de primer grado

Encontrar el valor de x	El valor de x es
1.- $2x = 6$	
2.- $2x - 3 = 6 + x$	
3.- $2(2x - 3) = 6 + x$	
4.- $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$	
5.- $4(x-10) = -6(2-x) - 6x$	
6.- $\frac{1}{3}x \boxed{4} \boxed{0}$	
7.- $\frac{2}{10} \boxed{x} \boxed{3}$	
8.- $\boxed{2}x : 4 \boxed{3} \boxed{60} : 5$	
9.- $\boxed{1}0 \boxed{4}x : \boxed{2}$	
10.- $\boxed{\frac{x}{2}} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{12}$	
Indicar cuál es el conjunto solución de la ecuación $x \boxed{2} y \boxed{5}$	

2.6. Problemas que se resuelven a través de ecuaciones

Para resolver problemas de ecuaciones en primer lugar lo tenemos que expresar en lenguaje algebraico y posteriormente resolver la ecuación resultante.	
A continuación se enuncian las expresiones algebraicas más comunes	
El doble o duplo de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
El cuádruplo de un número	$4x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
Un tercio de un número	$\frac{x}{3}$
Un cuarto de un número	$\frac{x}{4}$
Un número es proporcional a 2, 3, 4,..	$2x, 3x, 4x,..$

Matemática

Un número al cuadrado	x^2
Un número al cubo	x^3
Dos números consecutivos	x y $x + 1$
Dos números consecutivos pares	$2x$ y $2x + 2$
Dos números consecutivos impares	$2x + 1$ y $2x + 3$
Descomponer 24 en dos partes	x y $24 - x$
La suma de dos números es 24	x y $24 - x$
La diferencia de dos números es 24	x y $24 + x$
El producto de dos números es 24	x y $\frac{24}{x}$
El cociente de dos números es 24	$; x$ y $24 \bullet x$



 **Ejemplo** Escribir la ecuación que resuelve el siguiente problema:
Pensar un número

Pensar un número

Sumarle 15

Multiplicar por 3 el resultado

A lo que se obtiene, restarle 9

Dividirlo por 3

Restarle 8.

Nota: Si la respuesta es, por ejemplo, 32, el número pensado originalmente es 28.
¿Cómo se sabe?

Expresar en lenguaje simbólico todas las operaciones realizadas. Le llamamos x al número pensado originalmente (valor desconocido a averiguar).

$$\begin{array}{r} \text{numbers periods ones} \\ \boxed{x} \quad \boxed{1} \boxed{5} \quad \boxed{\square} \boxed{3} \quad \boxed{\square} \boxed{9} \\ \hline \quad \quad \quad \boxed{\square} \boxed{8} \quad \boxed{\square} \boxed{3} \end{array}$$

Aplicando las propiedades conocidas de las operaciones entre número reales, obtenemos:

$$\begin{array}{r} \boxed{x} \boxed{\square} 15 \boxed{\square} 3 \\ \quad \quad \boxed{9} \\ \quad \quad 3 \end{array} \quad \boxed{8} \quad \boxed{32} \quad \boxed{\square} \quad \begin{array}{r} \boxed{x} \boxed{\square} 15 \boxed{\square} 3 \\ \quad \quad \boxed{9} \\ \quad \quad 3 \end{array} \quad \boxed{\square} \quad \boxed{8} \quad \boxed{32} \quad \boxed{\square} \quad \begin{array}{r} x \boxed{\square} 15 \boxed{\square} 3 \boxed{8} \boxed{32} \\ \quad \quad \boxed{\square} \\ \quad \quad \quad \boxed{\square} \end{array}$$



1.- Si x toma los valores 6, -1 ó 10, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones se verifican? ¿Cuáles no se verifican?

$$3x + 4 = 5x - 8$$

$$2x^2 + 20 = 24x - 20$$

$$3x + 4 = 5x - 8$$

$$2x^2 + 20 = 24x - 20$$

2.-Determinar si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes. Justificar.

$$3x - 5 \equiv -2x \quad \boxed{ } \quad 3x - 5 + x^2 \equiv -2x + x^2$$

$$\begin{array}{ll}
 3x + 4 = 6 & \boxed{} \quad x + 4 = \frac{6}{3} \\
 x^2 = 3x^2 - 5x & \boxed{} \quad x = 3x - 5 \\
 4 \cdot (-2x + 8) = 6x & \boxed{} \quad -2x + 8 = \frac{3}{2}x \\
 -2 \cdot (x + 9) = 8 & \boxed{} \quad x + 9 = 8 + 2
 \end{array}$$

2.7. Ecuaciones fraccionarias o polinómicas racionales

Llamamos **ecuaciones fraccionarias** a aquellas de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, $Q(x) \neq 0$, o a aquellas ecuaciones que se pueden llevar a esta forma.



Ejemplo
$$\frac{x^{\boxed{1}}}{x^{\boxed{1}}} = x^{\boxed{2}}$$



Encontrar el valor de x

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$

$$\frac{3}{1} \boxed{x}$$

$$3 \boxed{4} \boxed{1} \boxed{x}$$

Pasamos el polinomio que se encuentra en el denominador al segundo miembro

Continuamos el cálculo hasta despejar el valor de x

$$\begin{aligned}
 & 3 \boxed{4} \boxed{4}x \\
 & 3 \boxed{4} \boxed{4}x \\
 & \boxed{1} \boxed{4}x \\
 & \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \boxed{x} \\
 & x \boxed{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$



Encontrar el valor de x

$$2.- \frac{x^2}{x^{\boxed{3}}} = \frac{1}{x^{\boxed{3}}}$$

En el primer miembro el mcm es

$$x^2 \boxed{9}$$

Ahora sumamos los términos del primer miembro

$$\begin{array}{r}
 x \boxed{x} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{x} \boxed{3} \boxed{1} \boxed{x} \\
 \hline
 x^2 \boxed{9} \quad x
 \end{array}$$

Aplicando propiedad distributiva

$$\begin{array}{r}
 x^2 \boxed{3}x \boxed{2}x \boxed{6} \boxed{1} \boxed{x} \\
 \hline
 x^2 \boxed{9} \quad x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \boxed{x} \boxed{6} \boxed{1} \boxed{x} \\
 \hline
 x^2 \boxed{9} \quad x
 \end{array}$$

Pasando el divisor $x^2 \boxed{9}$ al segundo miembro, y el divisor x al primer miembro

$$\begin{array}{r}
 x^2 \boxed{x} \boxed{6} \boxed{1} \boxed{x} \boxed{x^2} \\
 \hline
 \boxed{9} \quad x
 \end{array}$$

Aplicando propiedad distributiva

$$x^3 \boxed{x^2} \boxed{6}x \boxed{x^2} \boxed{9} \boxed{x^3}$$

Cancelando los términos iguales en ambos miembros

$$6x \boxed{\cancel{9}} \boxed{\cancel{9}x}$$

Realizando pasaje de términos, simplificando obtenemos el valor de x

$$\begin{array}{r}
 6x \boxed{9}x \boxed{9} \\
 15x \boxed{9} \\
 x \boxed{\frac{9}{15}} \boxed{\frac{3}{5}}
 \end{array}$$

Resolver

$$1.- \frac{15}{x \boxed{1}} \boxed{2}$$

$$2.- \boxed{3}x \boxed{5} \boxed{2} \boxed{4} 0$$

$$3.- 18 \boxed{x} \boxed{1} \boxed{2}$$

$$4.- \boxed{3}x \boxed{4} : 5 \boxed{4}$$

$$5.- \frac{24}{x \boxed{2}} 1 \boxed{2}x \boxed{3}$$

$$6.- \frac{12}{3 \boxed{x}} \boxed{3} \boxed{1}$$

7. En la resolución de la siguiente ecuación fraccionaria: $\frac{x^2 \boxed{1}}{x \boxed{1}} = 0$, se aplican las propiedades ya conocidas.

Se Multiplica ambos miembros por $x+1$: $\frac{x^2 \boxed{1}}{x \boxed{1}} \boxed{x} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{x} \boxed{1} \boxed{x^2} - 1 = 0$ $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Verificar si x_1 y x_2 son solución de la ecuación original. ¿Qué sucede? ¿Qué error se cometió?

2.8. Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales y dos indeterminadas, generalmente x e y .

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$



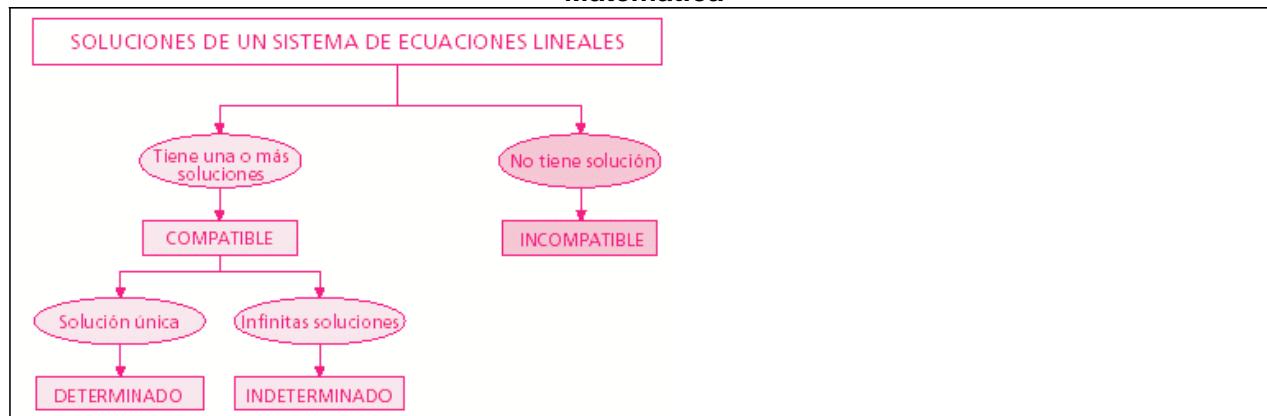
¿Qué es resolver un sistema?

Resolverlo consiste en determinar los valores de x e y que hacen ciertas simultáneamente las dos igualdades.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow 3+y=2 \Rightarrow y=-1, \text{ Sol: } x=3, y=-1$$

2.9. Clasificación según la solución

Un sistema de este tipo puede no tener solución	sistema incompatible
tener una solución	sistema compatible determinado
tener infinitas soluciones	sistema compatible indeterminado



2.10. ¿Cómo podemos resolver un sistema?



Método de Sustitución	Se sustituye su valor en la otra ecuación quedando una ecuación de primer grado con una incógnita, se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas. Finalmente se vuelve a la ecuación despejada para hallar el valor de la incógnita que queda
Método de Igualación	Este método consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones. Se igualan sus valores quedando una ecuación de primer grado con una variable. Se resuelve esa ecuación hallándose el valor de una variable, luego se sustituye ese valor en una de las dos ecuaciones despejadas, calculándose el valor de la segunda variable.
Método de reducción	Consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por números convenientes de tal forma que al "sumar" las ecuaciones se vaya una de las variables quedando una ecuación de primer grado y se procede igual que en los casos anteriores

2.10.1. Por Sustitución

 Ejemplo Se sustituye su valor en la otra ecuación quedando una ecuación de primer grado con una incógnita	$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow x=4+y$
Sustituyendo en la primera ecuación y despejando se tiene	$\begin{aligned} 4+y &= 2 \\ 4 &- 4 + y = 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$
Ahora hallamos el valor de x partiendo del valor despejado inicialmente	$x = 4 + y \rightarrow x = 4 + 2 \rightarrow x = 6$

Resolver



Sistemas de ecuaciones	Respuesta
1.- $\begin{cases} 4x+4y=40 \\ x+4y=28 \end{cases}$	X=4 Y=6
2.- $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$	X=2 Y=3

2.10.2. Por Igualación

Ejemplo	$\begin{cases} x+y=2 \rightarrow x=2-y \\ x-y=4 \rightarrow x=4+y \end{cases}$
Se despeja la misma variable de las dos ecuaciones	
Se iguala	$2 \square y \square 4 \square y$
Despejando, encontramos el valor y	$2 \square 4 \square y \square y \square \square 2 \square 2y \square y \square \frac{2}{\square 2} \square \square 1$
Este valor se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones encontradas al comienzo	$x \square 2 \square y \square 2 \square \square 1 \square \square 2 \square 1 \square 3$
La solución	$x \square 3 \square y \square \square 1$

Resolver

Sistemas de ecuaciones	Respuesta
1.- $\begin{cases} 4x+6y=-24 \\ -2x-5y=24 \end{cases}$	X= Y=
2.- $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$	X=2 Y=3

2.10.3. Por Reducción

Ejemplo	$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$
Se elige la segunda ecuación	
La multiplicamos por 3	$\begin{array}{r} 2x \square 3y \square 2 \\ \square 3x \square 3y \square 3 \end{array}$
Cancelando se obtiene el valor de x	$\begin{array}{r} 2x+3y=2 \\ 3x-3y=3 \\ \hline 5x=5 \rightarrow x=\frac{5}{5}=1 \end{array}$
Ahora hallamos el valor de y sustituyendo x en una de las dos ecuaciones iniciales	$2 \square 1 \square 3y \square 2$

Despejando y	$3y = 2x + 2 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$
La solución del sistema es	$x = 1 \rightarrow y = 2$

Resolver



Sistemas de ecuaciones	Respuesta
1.- $\begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + 2 = y \end{cases}$	X= Y=
2.- $\begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + 2 = y \end{cases}$	X= Y=

2.10.4. Método de Determinantes

Dado un sistema de dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas, igualmente ordenadas, el valor de cada incógnita es el de una fracción que tiene por denominador el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas, y por numerador el determinante que se obtiene reemplazando en el anterior los coeficientes de la incógnita cuyo valor se quiere hallar por los términos independientes respectivos que figuran en el segundo miembro. Para sistemas compatibles determinados.

Ejemplo Dado el sistema de ecuaciones, verificar que las incógnitas se encuentren igualmente ordenadas	$\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 7y = 6 \end{array}$
Se llama determinante principal al formador por los coeficientes de las incógnitas. Para aplicar éste método debe ser distinto de cero.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$
Este determinante se resuelve multiplicando los valores en la diagonal principal de izquierda a derecha y restando el producto de derecha a izquierda (diagonal secundaria)	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5$
Para encontrar el valor de x, se reemplaza en el determinante principal los coeficientes de x por los de los términos independientes, llamado determinante orlado en x.	$\begin{array}{ cc } \hline & 1 & 3 \\ \hline x & 6 & 7 \\ \hline & 25 & \end{array}$

El valor de x se define como	$\begin{array}{c cc} & 1 & \boxed{3} \\ & \boxed{6} & \boxed{7} \\ \hline x & \boxed{1} & \boxed{2} \\ & \boxed{3} & \boxed{5} \\ \hline 2 & \boxed{3} & \boxed{7} \\ 3 & \boxed{5} & \end{array}$
Para obtener el valor de y se procede de manera similar, encontramos el determinante ornado en y	$\begin{array}{c cc} & 2 & 1 \\ & \boxed{3} & \boxed{6} \\ \hline y & \boxed{2} & \boxed{3} \\ & \boxed{6} & \end{array}$
El valor de y se define como	$\begin{array}{c cc} & 2 & 1 \\ & \boxed{3} & \boxed{6} \\ \hline y & \boxed{1} & \boxed{5} \\ & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline 3 & \boxed{7} & \end{array}$

Resolver



Sistemas de ecuaciones	Respuesta
1.- $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 9x - y = -40 \end{cases}$	X= Y=
2.- $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$	X= Y=

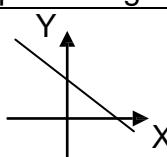


Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.
 Dos ecuaciones equivalentes tienen la misma solución.
 Cualquiera sea el método de resolución que se utilice, el resultado es siempre el mismo.
 El método por determinantes no se puede utilizar si el determinante principal es nulo.

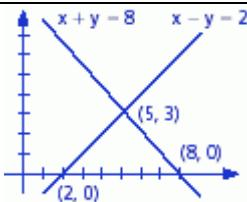
2.11. Representación gráfica de la solución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Una ecuación lineal de primer grado se puede representar en un sistema de coordenadas cartesianas como una recta. Para ello se debe despejar la variable y .

Dada la ecuación	$ax \square by \square c \square 0$
Se despeja la variable y	$y \square \frac{a}{b}x \square \frac{c}{b}$
De esta manera podemos identificar la pendiente de la recta como el coeficiente que multiplica a la variable x	$\frac{a}{b}$
El término independiente también llamado ordenada al origen , es el valor en que la recta corta al eje de ordenadas. Si este valor es nulo la recta pasa por el origen.	$\frac{c}{b}$



Según se analizó anteriormente, el sistema puede tener una o infinitas soluciones, o no tener ninguna solución. A modo de ejemplo s

 Ejemplo 1.- Dada la ecuación lineal	$x \square y \square 8 \square 0$ $x \square y \square 2 \square 0$
Para resolver el sistema podemos utilizar el método por sustitución: despejamos la variable x en las dos ecuaciones:	$x \square \square y \square 8$ $x \square y \square 2$
Igualando se obtiene se obtiene el valor de x	$\square y \square 8 \square y \square 2$ $8 \square 2 \square y \square y$ $6 \square 2 y \square y \square 3$
Con el valor obtenido reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la variable y	$x \square 3 \square 2 \square 5$
Los valores obtenidos son la solución del sistema, que gráficamente representan el punto de intersección entre las dos rectas, $P[5;3]$, como puede verse en el grafico:	 Sistema Compatible determinado.
 Ejemplo 2.- Dada la ecuación lineal	$x \square y \square 2 \square 0$ $3x \square 3y \square 6 \square 0$

<p>Como se vio anteriormente estas dos ecuaciones son equivalentes, ya que la segunda se obtiene multiplicando la segunda por 3. En este caso cualquier valor que satisfaga la primera se obtendrá el mismo valor en la segunda. Gráficamente representa la misma recta, por lo que decimos que la solución del sistema son infinitas.</p>	<p>Sistema Compatible Indeterminado</p>
<p> Ejemplo 3.- Dada la ecuación lineal</p>	$\begin{array}{l} \boxed{x} \boxed{y} \boxed{2} \boxed{0} \\ \boxed{x} \boxed{y} \boxed{4} \boxed{0} \end{array}$
<p>Para resolver el sistema podemos utilizar el método por sustitución: despejamos la variable x en las dos ecuaciones.</p>	$\begin{aligned} x &\boxed{y} \boxed{2} \\ x &\boxed{y} \boxed{4} \end{aligned}$
<p>Al igualar las ecuaciones se obtiene</p>	$y \boxed{2} \boxed{y} \boxed{4}$
<p>Como puede comprobarse, la ecuación obtenida no tiene solución. Gráficamente representan dos rectas paralelas.</p>	<p>Sistema Incompatible</p>

Resolver



Encontrar la solución de los siguientes sistemas y luego graficarlo

1. - $\begin{cases} 4x \boxed{y} \boxed{6} \\ \boxed{x} \boxed{8x} \boxed{5y} \boxed{2} \end{cases}$

2. - $\begin{cases} \boxed{x} \boxed{y} \boxed{1} \\ \boxed{x} \boxed{4} \boxed{y} \boxed{2} \end{cases}$

3. - $\begin{cases} 4x \boxed{y} \boxed{5} \\ 2x \boxed{3y} \boxed{1} \\ \boxed{x} \boxed{y} \boxed{3} \end{cases}$

2.12. Técnica de Resolución de problemas

<p>Dentro del proceso de resolución de problemas, se pueden diferenciar las siguientes etapas:</p>	<table border="1"> <tr> <td>Leer el problema</td></tr> <tr> <td>Definir las incógnitas principales de forma precisa</td></tr> <tr> <td>Traducción matemática del problema</td></tr> <tr> <td>Resolución del problema matemático</td></tr> <tr> <td>Interpretar las soluciones</td></tr> <tr> <td>Contrastar la adecuación de esas soluciones</td></tr> </table>	Leer el problema	Definir las incógnitas principales de forma precisa	Traducción matemática del problema	Resolución del problema matemático	Interpretar las soluciones	Contrastar la adecuación de esas soluciones
Leer el problema							
Definir las incógnitas principales de forma precisa							
Traducción matemática del problema							
Resolución del problema matemático							
Interpretar las soluciones							
Contrastar la adecuación de esas soluciones							



¿Cuántos puntos vale cada bola?

Existen dos datos que no conocemos, los puntos que vale una bola roja, y los que vale una bola amarilla.

A estos datos que no conocemos los llamamos incógnitas, x e y .	$x = \text{Puntos bola roja}$ $y = \text{Puntos bola amarilla}$
Ya que 2 bolas rojas ($2x$) y una bola amarilla (y) son 5 puntos, se debe cumplir que	$2x + y = 5$
Por otro lado, 3 bolas rojas ($3x$) y cuatro bolas amarillas ($4y$) son 10 puntos, así que:	$3x + 4y = 10$
Por tanto, se cumplen dos ecuaciones de primer grado. Juntando ambas ecuaciones: El conjunto de estas dos ecuaciones se llama sistema de ecuaciones con dos incógnitas .	 $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$
¿Entonces cuántos puntos valen cada bola? Para saberlo, debemos encontrar la solución del sistema.	Ahora se aplica cualquiera de los métodos descriptos anteriormente para encontrar la solución. El lector deberá verificar la respuesta: 

Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a \$ 40 el kg y la segunda a \$ 60 el kg.

¿Cuántos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a \$ 50 el kg?

Se definen las incógnitas:		1 ^a clase	2 ^a clase	Total
	Nº de kg	x	$60 - x$	60
	Valor	$40 \cdot x$	$60 \cdot (60 - x)$	$60 \cdot 50$
Se definen matemáticamente el problema	$40x \square 60 \square 60 \square x \square 60 \square 50$			
Se resuelve el sistema	$40x \square 3600 \square 60x \square 3000$			

Matemática

	$ \begin{array}{r} 40x \quad \square 60x \quad \square 3000 \quad \square 3600 \\ \square 20x \quad \square \quad 600 \\ x \quad \square \quad \boxed{600} \\ \hline \quad \square \quad 30 \\ \quad \square \quad 20 \end{array} $
Solución del problema	Se deberán mezclar 30 kg de la primera clase, y 60kg \square 30kg \square 30kg de la segunda clase

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales: Problemas propuestos

Enunciado del problema	Respuesta
1.- En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?	
2.- Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?	
3.- En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).	
4.- En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?	
5.- Se quieren mezclar vino de 60 pesos con otro de 35 pesos, de modo que resulte vino con un precio de 50 pesos el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?	
6.- Se tienen dos lingotes de plata, uno de ley 0.750 y otro de ley 0.950. ¿Qué peso hay que tomar de cada lingote para obtener 1800 g de plata de ley 0.900?	

2.14. Ecuaciones de segundo grado

HISTORIA DE LAS ECUACIONES

Actualmente hay evidencias que los **babilonios** alrededor del año 1600 a.C ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución. Los griegos, al menos a partir del año 100 a.C., resolvía las ecuaciones de segundo grado con métodos geométricos, métodos que también utilizaban para resolver algunas ecuaciones de tercer grado. En el Renacimiento, los matemáticos de Bolonia resolvieron por métodos algebraicos la ecuación de tercer grado (se cree que Scipio del Ferro fue el primero en resolverla), pero la solución permaneció en secreto.

En 1535, Niccolo Fontana (más conocido como Tartaglia) demostró que era capaz de resolver la ecuación de tercer grado, pero no explicó como. Sólo se dedicó a ganar un concurso público con su método sin desvelar los detalles. La fórmula descubierta por Tartaglia fue publicada por el físico **Girolamo Cardano** en su famosa obra *Ars Magna* en 1545.

Tartaglia reducía todas las ecuaciones de grado tres a una de la forma

La ecuación de segundo grado y la solución tiene origen antiguo. Se conocieron algoritmos para resolverla en Babilonia y Egipto. En Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría.



Niccolo Fontana

2.15. Resolución de Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado completas son las expresiones de la forma.	$ax^2 + bx + c = 0$
Los valores que satisfacen esta ecuación, (hacen una identidad la expresión), se llaman raíces. Por ser una ecuación de segundo grado tiene dos raíces.	
Para resolver ecuaciones de segundo grado utilizamos la siguiente fórmula:	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Las raíces son:	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Demostraremos la fórmula para el cálculo de raíces. Si $a \neq 0$ sacamos factor común	$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$
Se debe sumar y restar $\frac{b^2}{4a^2}$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.	$\begin{aligned} a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) &= 0 \\ a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) &= 0 \end{aligned}$
Dividiendo por $a \neq 0$, calculando el denominador común $4a^2$ y despejando el binomio al cuadrado, resulta	$\begin{aligned} \frac{a}{4a^2}(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) &= \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \end{aligned}$
Analizando la ecuación debajo del signo radical, llamada discriminante, se puede determinar que tipo de solución	$\begin{aligned} b^2 + 4ac > 0 &\rightarrow \text{una única solución real doble} \\ b^2 + 4ac = 0 &\rightarrow \text{dos soluciones reales distintas} \\ b^2 + 4ac < 0 &\rightarrow \text{ninguna solución real} \end{aligned}$

Matemática

tiene la ecuación	
Una ecuación cuadrática o de segundo grado es incompleta si alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.	
Si $b=0$ y $c=0$ La solución es $x = 0$	$ax^2 = 0$
Si $c=0$ Extraemos factor común x	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $X_1 = 0$ $ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$
Si $b=0$ Despejando	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c \quad x^2 = \frac{-c}{a} \quad x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ $\searrow x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

 Ejemplo Hallar las soluciones de la ecuación	$-2x^2 - 3x = -2$
en primer lugar debemos llevarla a la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$	$-2x^2 - 3x + 2 = 0$
En este caso particular, tenemos que	$a = -2, b = -3$ y $c = 2$.
Utilizando la fórmula ya vista las soluciones están dadas por	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Operando	$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4}$
 Ejemplo $x^2 - 5x + 6 = 0$	$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $\searrow x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$
 Ejemplo $x^2 - 2x + 1 = 0$	$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$
 Ejemplo $x^2 + x + 1 = 0$	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$
 Ejemplo $x^2 - 5x = 0$	$x(x - 5) = 0$ $x = 0$ $x - 5 = 0 \quad x = 5$

Ejemplo $x^2 - 25 = 0$	$x^2 = 25 \quad x = \pm\sqrt{25}$ $\nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5$ $\searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5$
Ejemplo $2x^2 + 8 = 0$	$2x^2 = -8 \quad x^2 = -4 \quad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Resolver



1.- ¿Cuál es el resultado de: $x^2 = 49$? Indicar la respuesta correcta.	
a) $x^2 = 49$	Su conjunto solución es $\{ +7, -7 \}$
b) $x^2 = 49$	Su conjunto solución es $\{ 4, 0 \}$
c) $x^2 = 49$	Su conjunto solución es $\{ -9, +4 \}$
2.- Sea el polinomio $P(x) = 4x^2 + 8x - 12$. Hallar las raíces mediante la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado. Verificar la respuesta $r_1 \square 1 \square r_2 \square \square 3$	
3.- Resolver las siguientes ecuaciones:	
a) $a^2 - 5x = 2x^2 + 6x + 2 - x^2$	
b) $2x^2 = -18$	
c) $x(x - 1)(x + 2) = x^3$	
d) $- \frac{2}{3}x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0$	
e) $(x + 3)^2 = 12x$	
f) $x^2 + 3x = 3(x^2 + x) - 2x^2$	
4.- La edad de Pablo elevada al cuadrado es igual a cinco veces la edad que tendrá dentro de 10 años. ¿Qué edad tiene Pablo?	
5.- Cuantas raíces tiene la ecuación $3x^2 + 8x + 9 = 0$?	
<input type="checkbox"/> Ninguna solución <input type="checkbox"/> Una solución <input type="checkbox"/> Dos soluciones	
6.- Cuál debe ser el valor del coeficiente a , si se sabe que el valor de la función $y = a \cdot x^2$ para $x = 1$ es igual a 2?	
7- Resolver:	
a) $(3x + 1)x = (2x/3 - 5/6) \cdot 6$	
b) $2(x + 3x^2/2 - 1) = 3(x^2 - 1)$	
c) $(x + 5)^3 - x^3 - 15x^2 = 50$	
d) $(x - 1,5)^2 = (x + 1)(x - 3,5) - 0,25$	
e) $2(x + 3x^2/2 - 1) = 3(x^2 - 1)$	
f) $(x - 1)^2/6 - [(x^2/2) - 1]/3 = 0$	

2.16. Propiedades de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones:	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
---	--

Matemática

La suma de las soluciones $s = x_1 + x_2$ es:	$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$
El producto de las soluciones (p) es:	$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$ $= \frac{c}{a}$
Concluyendo	$s = -\frac{b}{a} \wedge p = \frac{c}{a}$
En la ecuación dividimos por a a ambos lados	$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Si tenemos en cuenta los valores de (s) y (p) nos queda	$x^2 - sx + p = 0$ la forma canónica de la ecuación de segundo grado
Si una ecuación de segundo grado tiene como coeficiente del término de segundo grado la unidad, el coeficiente del término de primer grado es igual a la suma de las soluciones de la ecuación cambiada de signo (-s) y su término independiente es igual al producto dichas soluciones (p).	

Ejemplo	Escribir la ecuación de segundo grado que tenga como soluciones 3 y -8	La suma es $s = 3 - 8 = -5$ El producto es $p = 3 \cdot (-8) = -24$
La ecuación que buscamos es		$x^2 + 5x - 24 = 0$
Ejemplo	Calcular el valor de m en la ecuación $x^2 - 6x + m = 0$ sabiendo que las dos soluciones son iguales.	$x_1 = x_2$ Por lo tanto la suma es $s = 2x_1$
Analizando la ecuación canónica la suma es		c
Igualando ambas expresiones		$x_2 = x_1 = 3$
Como m es el producto de las dos soluciones		$m = 9$
Ejemplo	Determinar, sin resolver las ecuaciones, el valor de la suma y del producto de sus soluciones:	
a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$; b) $\frac{20}{x} = 9 - x$; c) $3x^2 + 6x + 3 = 0$.		
a) En la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$	$a = 2; b = 7; c = -15$	
La suma es	$\bullet x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{2} = -3,5$	
El producto es	$\bullet x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{2} = -7,5$	
b) $\frac{20}{x} = 9 - x$	$20 = x(9 - x)$ $20 = 9x - x^2$ $x^2 - 9x + 20 = 0$ $a = 1; b = -9; c = 20$	
Se pasa la ecuación a la forma $ax^2 \square bx \square c \square 0$		

Matemática

c) $3x^2 + 6x + 3 = 0$	en esta ecuación $a=3$; $b=6$; $c=3$. $\bullet x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{3} = -2$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1$
------------------------	--

2.17. Determinación de una ecuación de segundo grado a partir de la suma y producto de sus soluciones

Conociendo la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado, se puede determinar la ecuación correspondiente

Sea S la suma de las dos raíces o soluciones de la ecuación:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow a \cdot S = -b \Rightarrow -a \cdot S = b$$

Sea P el producto de las dos raíces de la ecuación: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot P = c$

La ecuación de segundo grado se escribe como $ax^2 - Sx + P = 0$

Sustituyendo b y c por su valor $ax^2 - Sx + P = 0$

Dividiendo toda la ecuación por a , conociendo la suma S , y el producto, P , de las dos soluciones, de una ecuación de segundo grado, la ecuación se puede escribir como

$$x^2 - Sx + P = 0$$



Ejemplo Determinar la ecuación de segundo grado cuya suma de soluciones vale 5 y cuyo producto vale 6.

Resolución

$$S = 5; P = 6$$

En la ecuación $x^2 - Sx + P = 0$ sustituimos S y P por sus valores

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Para comprobar que la suma y el producto de las soluciones de la ecuación son 5 y 6 respectivamente, basta con resolver la ecuación

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Las dos soluciones son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$; $x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$$S = x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Luego, efectivamente la ecuación es $x^2 - 5x + 6 = 0$.



Ejemplo Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 168.

Cualquier número par puede expresarse en la forma $2x$.

$2x$ es un número par. El par consecutivo de $2x$ es $2x + 2$.

. El producto de los dos números es 168:

$$2x(2x + 2) = 168$$

Se plantea así una ecuación de segundo grado que hay que resolver

$$2x(2x + 2) = 168$$

$$4x^2 + 4x - 168 = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre 4

$$x^2 + x - 42 = 0$$

Encontramos las raíces

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} =$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -7$$

Si $x = 6$. Una solución es 12 y 14.

$$2x + 2 = 12 + 2 = 14$$

Si $x = -7$. Otra solución es 12 y -14

$$2x + 2 = -14 + 2 = -12$$

Matemática

Dos números pares consecutivos cuyo producto es 168 son -14 y -12.

El problema tiene dos soluciones: 12 y 14; -12 y -14.

Calcular dos números cuya suma sea 39 y cuyo producto sea 380

Si x es uno de los números el otro será	$39-x$, pues entre los dos suman 39
---	--------------------------------------

El producto de los dos números es 380:	$x(39-x) = 380$
--	-----------------

Las soluciones de esta ecuación son:	$x(39-x) = 380$ $39x - x^2 - 380 = 0$ $-x^2 + 39x - 380 = 0$
--------------------------------------	--

La solución de esta ecuación es	$x = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1520}}{2} = \frac{39 \pm 1}{2} =$ $x_1 = \frac{40}{2} = 20$ $x_2 = \frac{38}{2} = 19$
---------------------------------	--

Si un número es 20, el otro será $39 - 20 = 19$

Si un número es 19, el otro será $39 - 19 = 20$.



Ejemplo Se han comprado gomas de borrar por un total de 60 pesos. Si se hubieran comprado tres gomas más, el comerciante habría hecho un descuento de 1 peso en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántas gomas se compraron?

Sea x el número de gomas que se han comprado por 60 pesos. El precio de cada goma se obtendrá dividiendo el precio total entre el número de gomas.	Precio de cada goma es $\frac{60}{x}$
--	---------------------------------------

Si se compran 3 gomas más su precio será de	$\frac{60}{3+x}$
---	------------------

Pero su precio sería de 1 peso menos cada una, entonces se obtendría	$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{x+3}$
--	-------------------------------------

Resolviendo esta ecuación:

$$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{x+3} \Rightarrow \frac{60-x}{x(x+3)} = \frac{60}{x(x+3)} \Rightarrow (60-x)(x+3) = 60x \Rightarrow$$

$$60x + 180 - x^2 - 3x = 60x \quad \boxed{x^2 + 3x - 180 = 0}$$

La solución es

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-180)}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} =$$

$x_1 = \frac{24}{2} = 12$
$x_2 = \frac{-30}{2} = -15$

El número de gomas que se compraron fue 12, ya que una solución negativa para un número de objetos no tiene sentido.
--

Cada goma costó $\frac{60}{12}$ pesos. Si se hubieran comprado 3 gomas más, es decir, 15 gomas, el precio hubiese sido de 4 pesos cada una.



Ejemplo Dos obreros tardan 12 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacerlo separadamente, si uno tarda 5 horas más que el otro?

Sea x el número de horas que emplea el primer obrero en realizar el trabajo.	En una hora hará $\frac{1}{x}$ del total del trabajo
--	--

El segundo obrero empleará	$\frac{1}{x+5}$ del trabajo
----------------------------	-----------------------------

Matemática

Entre los dos tardan 12 horas	• Por lo tanto, $\frac{1}{x} + \frac{1}{5+x} = \frac{1}{12}$
Se resuelve la ecuación	$m.c.m. (x, 5+x, 12) = 12 \times x \times (5+x)$ $12 \times (5+x) + 12x = x(5+x)$ $60 + 12x + 12x = 5x + x^2$ $x^2 - 19x - 60 = 0$
La solución es	$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 240}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{601}}{2} = \frac{19 \pm 24,5}{2} =$ $x_1 = 21,75$ $x_2 = -2,75$
El primer obrero tarda en realizar el trabajo, él solo,	21,75 horas, es decir, 21 horas y 45 minutos
El segundo obrero tarda 5 horas más, es decir	26 horas y 45 minutos



Ejemplo Una ecuación de segundo grado con una incógnita tiene una solución igual a 3 y el término independiente vale 15. Calcular la ecuación.

Por ser 3 solución de la ecuación, ésta se puede descomponer en la forma	$(x - 3)(x - x_2) = 0$
Donde x_2 es la segunda solución de la ecuación, desarrollando el producto	$x^2 - x \times x_2 - 3x + 3x_2 = 0$ El término independiente es $3x_2$, y vale 15 $3x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{3} = 5$
La ecuación es	$(x - 3)(x - 5) = 0 \quad \square x^2 - 8x + 15 = 0$



Ejemplo Determinar el valor de m para que la ecuación $2x^2 - 4x + m = 0$ tenga una raíz doble

Una ecuación de segundo grado tiene una raíz doble si su discriminante es cero.	$b^2 - 4ac = 0$
La ecuación $2x^2 - 4x + m = 0$ tiene una raíz doble si $m = 2$.	$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0 \Rightarrow 16 - 8m = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{8} = 2$.



Ejemplo Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área aumenta en 104 cm². Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

Sea "l" el lado del cuadrado.	El área será $S = l^2$
Si se aumenta en 4 cm el lado del cuadrado, $l+4$	Su área será $(l+4)^2$
Al hacer la transformación, el área aumenta en 104 cm ²	$(l+4)^2 - l^2 = 104 \Rightarrow 8l + 16 = 104 \Rightarrow l = 11$
Se resuelve la ecuación	$l^2 = 121$
Simplificando l^2 en los dos miembros, resulta una ecuación de primer grado:	$104 = 16 + 8l$
El área del cuadrado inicial es	$S = l^2 = 11^2 \text{ cm}^2 = 121 \text{ cm}^2$
El perímetro del cuadrado inicial es	$P = 4 \times l = 4 \times 11 \text{ cm} = 44 \text{ cm}$

Resolver



1.- Escribir la ecuación de segundo grado que tenga como raíces

a) $x_1 = \frac{-1}{3} \wedge x_2 = \frac{-5}{4}$

b) $x_1 = 2 \wedge x_2 = \frac{1}{6}$

c) $x_1 = -5 \wedge x_2 = -3$

2.- Encontrar el valor de m en ecuación $x^2 + \frac{1}{5}x + m = 0$ sabiendo que las dos soluciones son iguales.

3- Determinar una ecuación de segundo grado sabiendo que la suma de sus raíces es $\frac{4}{3}$ y el producto $\frac{5}{2}$.

4-- Obtener dos números sabiendo que su suma es 5 y su producto es (-14).

5.- Se han comprado monitores por un total de 6000 pesos. Si se hubieran comprado tres más, el comerciante habría hecho un descuento de 50 pesos en cada uno, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántos monitores se compraron?

6.- Si se aumenta en 3 cm el lado de un cuadrado, su área aumenta en 144 cm². Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

2.18. Representación gráfica de las ecuaciones de segundo grado

Historia

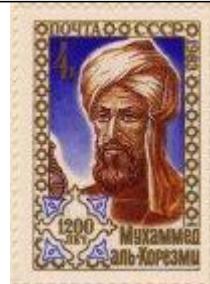
La palabra “ Álgebra ” , con la que hoy conocemos a una de las ramas de las Matemáticas, aparece en el título de la obra más importante de MUSA AL-KHWARIZMI.

La solución de una ecuación matemática de segundo grado usando un método geométrico, fue creado en el año 800, por un matemático árabe, MUSA AL-KHWARIZMI (780-850), conocido como el Padre del Álgebra. Dicho método, geométrico, se conoce como de “ completar cuadrado” .

Se sabe poco de su vida salvo que vivió en la primera mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa de Bagdad. Escribió libros sobre geografía, astronomía y matemática. En su obra Aritmética ("Algoritmi de numero indorum") explica con detalle el funcionamiento del sistema decimal y del cero que usaban en la India.

Se destaca la obra de contenido algebraico "Hisab al-yabr wa'l muqqabala", considerada uno de los primeros libros de álgebra, didáctica con abundantes problemas para resolver y adiestrar al lector, principalmente, en la resolución de ecuaciones de segundo grado.

El Álgebra de Al-Khwarizmi es retórica -sin simbolismo- y detalla, paso a paso, lo que tiene que hacerse. Su objetivo es sistematizar todas las ecuaciones de primer o segundo grado, reduciéndolas a seis tipos básicos



Matemática

Cuando se estudiaron las ecuaciones de primer grado, comprobamos que su representación es por medio de una recta, repasando en el siguiente



$3x + 2y = 7$ Si se le da un valor a x se obtiene otro para y , este valor se lo representa en el eje de coordenadas y se fija un punto.

Dando otro valor a x y obtenemos el correspondiente a y . Con estos dos valores se consigue el segundo punto.

Al unir los dos puntos se determina la recta. Todos los puntos de la recta son respuestas de la ecuación. Queda la representación gráfica de este ejemplo a cargo del alumno.

En el caso de las ecuaciones de segundo grado su representación gráfica es muy diferente.



En la ecuación de segundo grado $y = x^2$

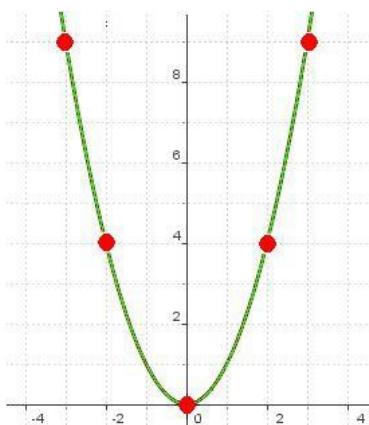
Se le dan valores a la variable independiente x y se consigue que la variable dependiente y tome los suyos.

En el siguiente cuadro se observan los valores que le damos a x y los que se obtienen de y

x	3	2	0	-2	-3
y	9	4	0	4	9

Estos valores lo escribimos como puntos para luego representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas, donde en el eje de abscisas representaremos el valor de la variable x y en el eje de ordenadas el que le corresponde a y :

$(3,9)(2,4),(0,0),(-2,4),(-3,9)$, una vez ubicados en el sistema se unen como puede observarse en la figura



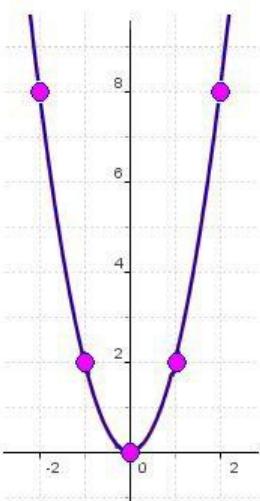
La gráfica de esta curva simétrica se llama parábola y el eje de simetría es el eje de la parábola. Otras funciones cuadráticas más complejas se dibujan de la misma forma.



Representar gráficamente la ecuación de segundo grado $y = 2x^2$

Dando valores a x obtenemos los de y

x	2	1	0	-1	-2
y	8	2	0	2	8



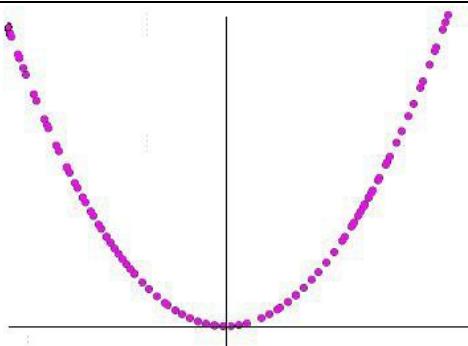
Unidos los puntos obtendremos la parábola.

¿Por qué los puntos no se unen con líneas rectas?

Si calculamos más valores como se puede ver en la siguiente tabla de valores

Valores de x	Valores de y
3	18
2,8	15,68
2,6	13,52
2,4	11,52
2,2	9,68
2	8
1,8	6,48
1,6	5,12
1,4	3,92
1,2	2,88
1	2
0,8	1,28
0,6	0,72
0,4	0,32
0,2	0,08
0	0
-0,2	0,08
-0,4	0,32
-0,6	0,72
-0,8	1,28
-1	2
-1,2	2,88
-1,4	3,92

Estos valores obtenidos se llevan al eje de coordenadas para crear los puntos y se obtiene:

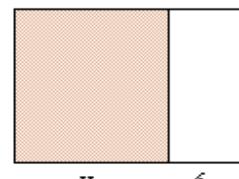


Por la colocación de los puntos vemos que la representación gráfica no corresponde a una recta.

En los ejemplos siguientes podemos observar como un problema sencillo se resuelve con una ecuación de segundo grado.



Si en un cuadrado aumentamos en 6 unidades dos lados paralelos obtenemos un rectángulo. Calcular el área del rectángulo en función del lado x del cuadrado.



El área del rectángulo es lado mayor x lado menor, para nuestro ejemplo $f(x) = \text{Área}$

Lado mayor $x+6$
Lado menor x
 $\text{Área} = (x+6) \cdot x = x^2 + 6x$

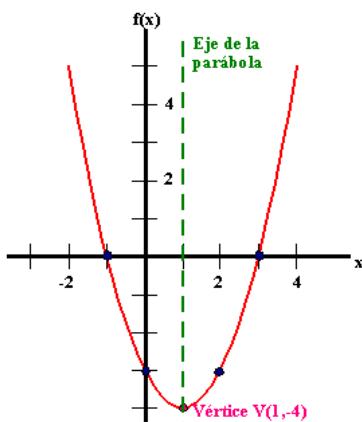
Una forma de escribir la ecuación de segundo grado es lo que se conoce como **función cuadrática**, igualando la ecuación a y, $y = f(x) = a x^2 + b x + c$, donde **a**, **b** y **c** son números cualesquiera, con la condición de que **a** sea distinto de 0.



Graficar $f(x) = x^2 - 2x - 3$, en primer lugar le damos valores a x para obtener los de f(x)

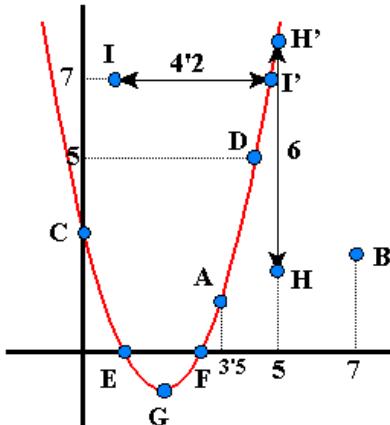
x	-1	0	1	2	3	4	
$y=f(x)$	0	-3	-4	-3	0	5	

La gráfica obtenida es





Dada la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, determinar con precisión las coordenadas de los puntos de la figura:



Del punto A($x;y$) conocemos que $x = 3,5$. Como A es un punto de la parábola, sus coordenadas cumplirán la ecuación, es decir

$$y = 3,5^2 - 4 \cdot 3,5 + 3 = 1,25$$

Luego A = (3,5;1,25).

Del punto B($x;y$) conocemos que $x = 7$. Como B no pertenece a la parábola, no disponemos de ninguna relación que nos permita deducir y en función de x, No es posible conocer con precisión las coordenadas de B.

El punto C($x;y$) está situado sobre el eje de ordenadas, luego $x = 0$. Como también es un punto de la parábola, verificará $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$. Luego C = (0;3).

D = ($x;5$) pertenece a la parábola. Sustituyendo y por 5 en la ecuación de la parábola,

$$5 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

Nos proporciona las soluciones aproximadas $x = -0,45$ y $x = 4,45$. Observando la gráfica se concluye que el valor adecuado es el segundo (¿por qué?). Luego D = (4,45;5).

Los puntos E y F pertenecen al eje OX . Sus coordenadas serán de la forma ($x;0$) y por ser de la parábola verificarán la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = 3$, las coordenadas de los puntos serán E = (1;0) y F = (3;0).

Por la forma simétrica de la parábola, la abscisa de G = ($x;y$) es el punto medio del

segmento \overline{EF} es $x = \frac{1+3}{2} = 2$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola, obtenemos su segunda coordenada $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. Luego G = (2;-1).

Calculemos las coordenadas del punto H'(x,y) de la parábola que está "justo encima" de H. Como $x = 5$, $y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$, es decir, H' = (5,8), H tiene igual abscisa 5 y su ordenada es 6 unidades menos que H', por tanto, H = (5,2).

Calculamos las coordenadas del punto I'($x,7$) que está en la parábola "justo a la derecha" de I. Como pertenece a la parábola

$$7 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

cuyas soluciones aproximadas son $x = -0,88$ y $x = 4,83$. I tiene la misma ordenada 7 y su abscisa es 4,2 unidades menos que la abscisa de I', es decir, I = (0,63,7).

Hasta el momento solo se graficó la ecuación incompleta, ahora se graficará la

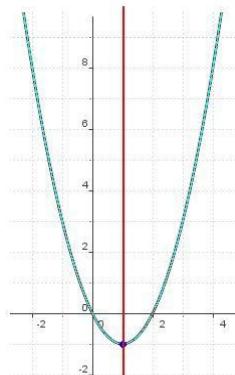
ecuación de la forma $y = a(x - m)^2 + n$



Ejemplo

Vamos graficar la siguiente parábola $y = (x - 1)^2 - 1$?

Si tenemos en cuenta $y = (x - 1)^2$ de la ecuación propuesta, el vértice estaría en el punto: (1, 0), es decir, el vértice se habría trasladado hacia la derecha una unidad y si después incluimos el término independiente -1, el punto se trasladaría verticalmente hacia abajo una unidad, por lo que lo tanto las coordenadas del vértice son V(1; -1), como puede verse en el siguiente gráfico:



según el gráfico se puede observar que las coordenadas del vértice son m y n de la ecuación.



Ejemplo

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola correspondiente a la ecuación $y = (x + 1)^2 + 2$?

Las coordenadas son los valores m y n de la ecuación, $m = -1$ y $n = 2 \square V(-1; 2)$.

Conclusión:

Cualquier número que multiplique al primer término de la ecuación $y = (x + 1)^2 + 2$, es decir, a $y = (x + 1)^2$ no le afecta a las coordenadas del vértice.

2.19. Vértice de la parábola

Se llama **vértice** de la parábola al punto común de la parábola con el eje vertical de la misma o su eje de simetría. No es el eje vertical o de ordenadas de un eje de coordenadas, se refiere al eje de la parábola. Éste es un eje de simetría que divide a la parábola en dos curvas iguales. Cada una de estas curvas se las llama ramas o brazos de la parábola.

¿Qué es un eje de simetría en una parábola?

Es una línea de modo que si doblásemos el papel por dicha línea, las ramas de la parábola coincidirían. En todos los Casos estudiados el eje es el eje de coordenadas Y o es paralelo a éste.

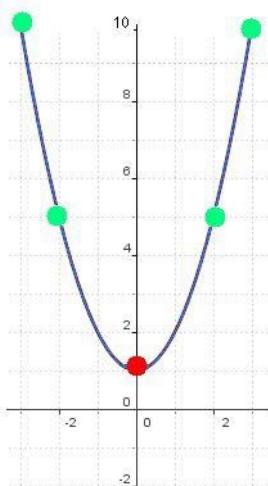
En primer lugar se estudiará la ecuación incompleta de segundo grado, con los coeficientes $b=c=0$



Ejemplo

$y = x^2 + 1$ El vértice se hallará en el punto (0, 1). ¿Porqué?

Calculando $x=0$, se obtiene $y=1$, vemos en la gráfica

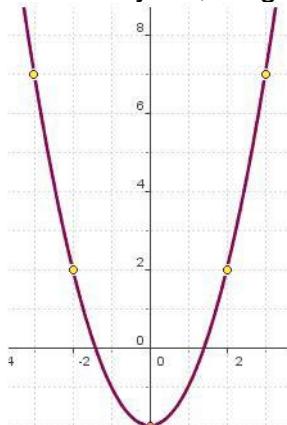


, si le damos valores mayores y menores a 0, los valores que se obtienen son mayores al obtenido en el vértice.

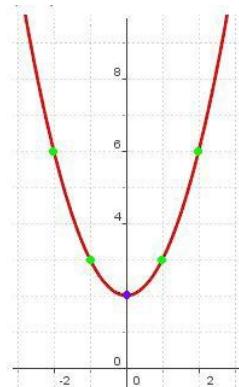


$$y = x^2 - 2$$

Para $x=0$ $y=-2$, su gráfica es



, su vértice es $V(0;2)$, si la ecuación fuese $y = x^2 + 2$, el vértice estaría situado en el punto $V(0;2)$.



¿Qué sucede con las coordenadas del vértice en el caso de la representación gráfica de una ecuación de segundo grado del tipo $a(x - m)^2$ ó $a(x + m)^2$

Cuando la ecuación de segundo grado es del tipo $a(x - m)^2$ el vértice se traslada hacia la derecha tantas unidades como vale m .

En el caso de $a(x + m)^2$ se traslada hacia la izquierda tantas unidades como vale m .

En todos los ejemplos presentados podemos ver que si

m=0, el eje de simetría coincide con el eje de ordenadas, Y si $a(x - m)^2$, el eje se desplaza a la derecha en **m** unidades si $a(x + m)^2$ el eje se desplaza a la izquierda en **m** unidades, como comprobará el alumno en el ejercicio propuesto 1.-c)

Resolver



1.-Representar gráficamente las ecuaciones, indicar los vértices

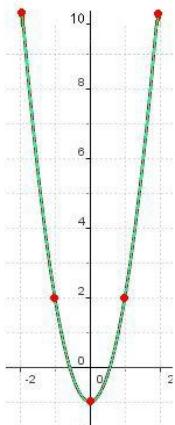
- a) $y = x^2 - 5$
- b-) $y = 3x^2 - 1$
- c) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$
- d) $y = \frac{1}{4}x^2 - 5$

2.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola correspondiente a la ecuación $y = 5(x + 1)^2 + 2$?

2.20. Eje de simetría de la parábola

A partir de ejemplos se definirá el Eje de simetría

 Ejemplo $y = 3x^2 - 1$, en este ejemplo **a=3**, por la resolución del ejercicio anterior sabemos que la gráfica es



Los puntos que se tomaron son

$x = 2, 1, 0, -1, -2$ sustituyendo estos valores en la ecuación obtenemos los valores de **y**

$$y = 11, 2, -1, 11$$

El vértice de la parábola lo tenemos en el punto $V(0; -1)$ y el eje de la parábola coincide con el eje Y y la ecuación es $x=0$.

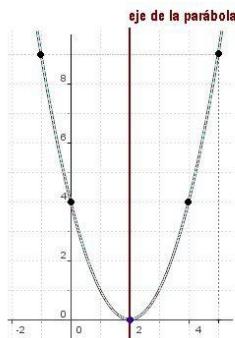
 Ejemplo $y = (x - 2)^2$, en este ejemplo **a=1**,

damos a x los valores 5, 4, 2, 0, -1 sustituyendo estos valores

en la ecuación obtenemos los valores de y

$$y = 9, 4, 0, 4, 9 \text{ respectivamente}$$

representado gráficamente



Cuando $x = 2$; el valor de $y = 0$. Este es el punto común de la parábola y su eje.

Si doblásemos el papel por el eje de la parábola, las dos ramas o brazos coincidirían, por lo tanto el eje de simetría es la recta $x=2$ y su vértice $V(2;0)$.

Por lo visto anteriormente vemos que el eje de simetría coincide con la ordenada en x de las coordenadas del Vértice.

2.21. Ramas de la parábola hacia abajo

Analizaremos qué influencia tiene el coeficiente del término cuadrático en la representación gráfica de la ecuación de segundo grado:

Todos los casos estudiados hasta ahora las parábolas tienen sus ramas orientadas hacia arriba

Las ramas o brazos de la parábola pueden también estar orientados hacia abajo. Es suficiente que el valor de $a(x-m)^2$ tenga el signo negativo por delante o que el valor de a sea menor que cero:

$$a < 0:$$

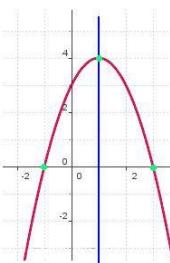
$$y = -(x-m)^2$$



Ejemplo Graficar: $y = -(x-1)^2 + 4$ es:

Se asignan los siguientes valores:

x	1	-1	3
y	4	0	0

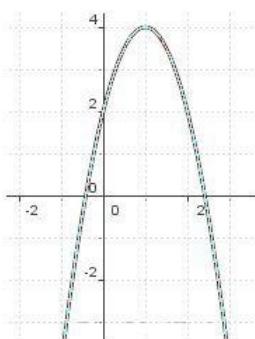


En este caso $a = -1$



Ejemplo Representar gráficamente $y = -2(x-1)^2 + 4$.

- 1.- ¿Hacia dónde abren las ramas?
- 2.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?

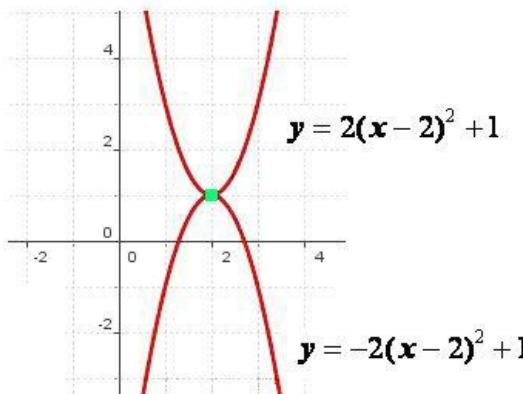


1.- Abren hacia arriba

2.- El vértice está en el punto (1,4)

En las paráolas con ramas hacia arriba, el valor de a siempre vale más que 0.
Las paráolas con ramas hacia abajo el valor de a siempre vale menos que 0, es decir, el valor de a es negativo.

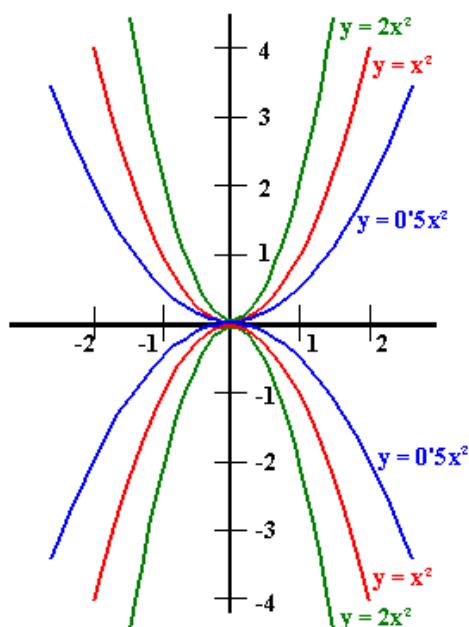
Las paráolas $\begin{cases} y = 2(x - 2)^2 + 1 \\ y = -2(x - 2)^2 + 1 \end{cases}$ están representadas en el siguiente gráfico



, las dos tiene el mismo vértice $\square M(2;1)$, y se puede observar que si el valor de a es negativo las ramas se abren hacia abajo, y si es positivo abren hacia arriba.

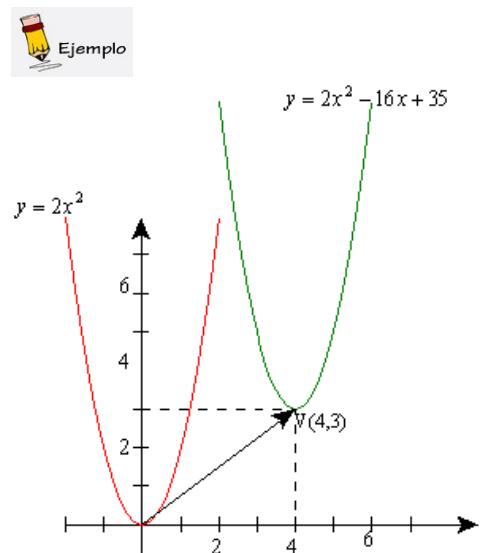
2.22. Influencia de los parámetros en la gráfica de las funciones cuadráticas

Paráolas del tipo $y = ax^2$ ($b = 0$, $c = 0$), en el gráfico siguiente se puede observar cómo se abren o se cierran las ramas según el valor del coeficiente a :



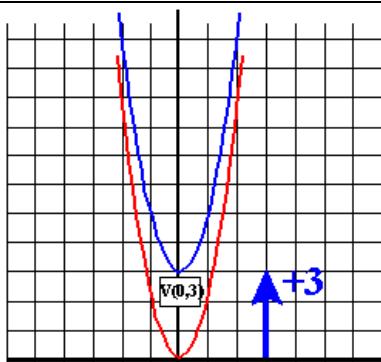
Las paráboles de ecuación $y = ax^2$ tienen por vértice el punto $V(0,0)$.
Cuanto mayor sea a (en valor absoluto), más cerrada será la parábola.
Las ramas van hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

La forma de una parábola depende única y exclusivamente del coeficiente a de x^2 , es decir, cualquier parábola del tipo $y = ax^2 + bx + c$ tiene la misma forma que la parábola $y = ax^2$.



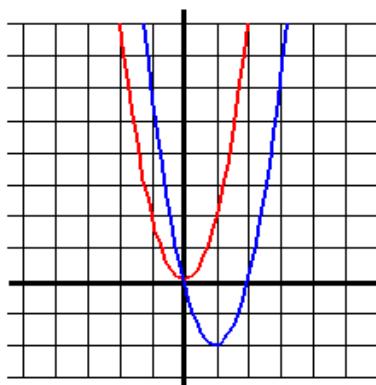
La parábola $y = 2x^2 - 16x + 35$ tiene la misma forma que $y = 2x^2$; encajan perfectamente una encima de la otra se puede observar en la gráfica.

Ejemplo Determinar mediante qué traslación llevamos la parábola $y = 3x^2$ sobre la parábola $y = 3x^2 - 9x + 4$.



La gráfica de $g(x) = 2x^2 + 3$, se obtiene a partir de la gráfica de $f(x) = 2x^2$, desplazándola 3 unidades hacia arriba. El vértice se halla en $V(0,3)$.

Las paráboles del tipo $y = ax^2 + c$, tienen exactamente la misma gráfica que $y = ax^2$, c unidades hacia arriba o hacia abajo , según el signo de c y, por lo tanto, su vértice es el punto $V(0,c)$.



la gráfica de la parábola $y = 2x^2 - 4x$ pasa por el punto $(0,0)$. La primera coordenada del vértice es $\frac{-b}{2a} = 1$.

Sustituyendo obtenemos que la segunda coordenada del vértice es -2 . Luego el vértice es $V(1;-2)$. Utilizando la simetría de la parábola podemos obtener el punto $(2,0)$.

Si la parábola es del tipo $y = ax^2 + bx$. entonces pasa por el origen de coordenadas y corta también al eje x en el punto $(-b, 0)$

Resolver



Determinar mediante qué traslación llevamos la parábola $y= x^2 - 4$ sobre $y = 3x^2$



2.23. Cálculo de las coordenadas del vértice de una parábola enunciada en la forma general

Este problema se reduce a calcular el valor de x , es decir, el de la abscisa, y después sustituirlo en la ecuación para determinar el valor de y .

En las ecuaciones graficadas del tipo $y = a(x - m)^2 + n$ se comprobó que el vértice se encuentra en el punto $V(m; n)$.

¿Cómo pasamos de $y = a(x - m)^2 + n$ a $y = ax^2 + bx + c$?

Recordar que el valor de n no altera el valor de la abscisa x en el vértice. El valor de x sigue siendo el mismo tenga n cualquier valor. El valor de n hace que la parábola se desplace verticalmente el vértice las unidades que señala esta variable, pero el valor de la abscisa sigue siendo el mismo, esto quiere decir que, las siguientes parábolas:

$$y = 2(x - 3)^2 + 1$$

y

$y = 2(x - 3)^2$ tienen el mismo valor de abscisa: $(3, 1)$ y $(3, 0)$. La diferencia radica en que el vértice se ha desplazado una unidad respecto al eje y .

Tenemos $y = a(x - m)^2 + n$ y de la forma general $y = ax^2 + bx + c$. Haciendo operaciones en $y = a(x - m)^2 + n$ tenemos en

$$y = a(x - m)^2 + n$$

$$y = a(x^2 - 2mx + m^2) + n$$

$$y = ax^2 - 2amx + am^2 + n$$

Comparamos $y = ax^2 - 2amx + am^2 + n$ con $y = ax^2 + bx + c$ y vemos que:

1.-Las dos expresiones contienen el mismo término: ax^2

2.-Los términos que no contienen $a \cdot x$ son términos independientes.

Podemos decir que c y $am^2 + n$ son términos independientes que tienen el mismo valor.

3.- Luego, $2amx$ y bx tendrán que ser iguales:

$$2amx = bx$$

Simplificamos por x ambos miembros de la igualdad

$$-2am = b$$

despejamos el valor de m :

$$m = \frac{-b}{2a}$$

4.- Si $am^2 + n$ y c son iguales podemos decir que:

$$a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + n = c, \text{ elevando al cuadrado :}$$

$$\frac{ab^2}{4a^2} + n = c; \text{ simplificando : } \frac{b^2}{4a} + n = c;$$

Tomando 4a como común denominador :

$$\frac{b^2 + 4an}{4a} = \frac{4ac}{4a}$$

$$\text{Simplificando : } b^2 + 4an = 4ac$$

Despejamos el valor de n :

$$n = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Conocidos los valores de m y n ya podemos saber las coordenadas del vértice de una parábola a partir de la ecuación de 2º grado: $y = ax^2 + bx + c$:

$$V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Ejemplo

Hallar el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 4x + 7$

El valor de la abscisa en el vértice será: $m = \frac{-b}{2a}$ donde sustituyendo los valores

$$m = \frac{-(-4)}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$

conocidos tendremos: Para calcular el valor de la ordenada del vértice podemos hacer dos cosas:

1.- Sustituir el valor que acabamos de hallar en $y = 2x^2 - 4x + 7$;

$y = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 7 = -1; y = 2 - 4 + 7 = 5$ con lo que sabemos que el vértice de la parábola se encuentra en el vértice (1,5).

$$n = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2.- Utilizar la fórmula

Sustituyendo por los valores que conocemos tendremos:

$$n = \frac{4 \times 2 \times 7 - (-4)^2}{4 \times 2} = \frac{56 - 16}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

obtenemos el mismo resultado del valor de la ordenada del vértice que en la forma anterior.

Resolver



1.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola correspondiente a la ecuación indicada? ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?. Representarla en un sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = (x - 1)^2$?

b) $y = x^2 + 7$?

c) $y = x^2 - 7$?

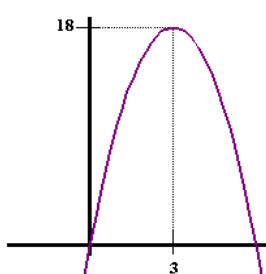
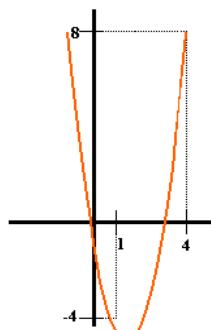
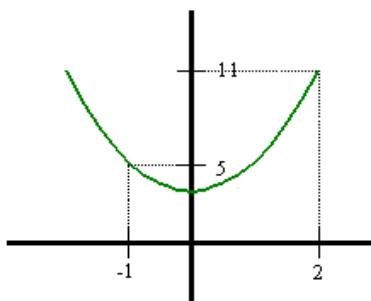
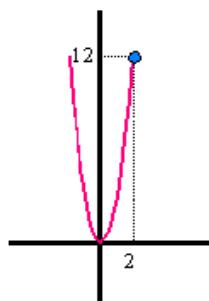
2.- Calcula las coordenadas del vértice de la función cuadrática:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = 3x^2 + 12x + 7$?

c) $y = 4x^2 + 12x + 5$?

3.- Hallar la ecuación correspondiente a cada una de las siguientes paráboles



4.- Dibujar la gráfica de $y = 4x^2 + 4x + 1$.

5.- Escribir tres ejemplos:

a) una ecuación de segundo grado completa con dos soluciones.

b) una ecuación de segundo grado completa con una solución.

c) una ecuación de segundo grado completa sin solución

2.24. Ecuación Bicuadrada

Una ecuación bicuadrada es una ecuación que se puede expresar en la forma	$ax^4 + bx^2 + c = 0$ Donde a, b y c son tres números reales
Para resolver una ecuación bicuadrada se hace	$x^2 = y$

Matemática

el cambio de variable	
Reemplazando	$x^4 = (x^2)^2 = y^2$.
La ecuación expresada en función de y es:	$ay^2 + by + c = 0$
Una vez resuelta esta ecuación se sustituyen sus soluciones en	$x^2 = y$ obteniéndose así las soluciones para x .

Pasos a seguir para resolver una ecuación biquadrada

Hacer el cambio $x^2 = y$ obteniendo la ecuación	$ay^2 + by + c = 0$
Resolver la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ obteniéndose las soluciones	y_1, y_2
Volver a la variable $x^2 = y$, se obtienen las soluciones	$x = \pm\sqrt{y}$ $x_1 = +\sqrt{y_1}$ $x_2 = -\sqrt{y_1}$ $x_3 = +\sqrt{y_2}$ $x_4 = -\sqrt{y_2}$
Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene dos soluciones positivas, la ecuación inicial	La ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene cuatro soluciones
Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene una solución positiva, la ecuación inicial	La ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene dos soluciones
Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ no tiene soluciones positivas, la ecuación inicial	La ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ no tiene solución



Resolver la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Haciendo el cambio $x^2 = y$ se tiene la ecuación	$y^2 - 29y + 100 = 0$
Resolviendo esta ecuación se tienen las soluciones:	$y = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2}$ $\square y_1 = 25; y_2 = 4$
Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:	$x_1 = +\sqrt{y_1} = +\sqrt{25} = +5; \quad x_2 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{25} = -5;$ $x_3 = +\sqrt{y_2} = +\sqrt{4} = +2; \quad x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{4} = -2$
Las soluciones son	$x_1 = 5; x_2 = -5; x_3 = 2$ y $x_4 = -2$



Resolver la ecuación $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

Haciendo el cambio $x^2 = y$ se tiene la ecuación	$y^2 - 4y - 12 = 0$
Las soluciones de esta ecuación son:	$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$ $\square y_1 = 6; y_2 = -2$
Las soluciones de la ecuación de partida son:	$x_1 = +\sqrt{y_1} = +\sqrt{6}; \quad x_2 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{6}$ $x_3 = +\sqrt{y_2} = +\sqrt{-2}$. No tiene solución. en \square $x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{-2}$. No tiene solución. en \square
Las soluciones de la ecuación son	$+ \sqrt{6}$ y $- \sqrt{6}$.

2.25. Actividades de Autoevaluación

Resuelve y obtiene tu evaluación según el porcentaje de respuestas correctas

1.- Hallar el valor de x:

a.- $x \square x \square x \square x 4 \square 9x \square 1$

b.- $\square 4x \square 3 \square : 11 \square 2 \square 5$

c.- $15 : \square x \square 1 \square \square 2$

d.-
$$\frac{x \square 2}{x \square 3} \square \frac{1}{6}$$

2.- Resolver los sistemas de ecuaciones de acuerdo al método indicado

a.-
$$\begin{array}{l} 2x \square y \square 8 \\ 3x \square 2y \square \\ \hline 2 \end{array}$$
 por sustitución

b.-
$$\begin{array}{l} x \square 5y \square 1 \\ 6x \square 2y \square \\ \hline 34 \end{array}$$
 por igualación

c.-
$$\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 2 \end{array}$$
 por reducción

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \\ 2 \end{array} x \square 2y \square 34$$

d.-
$$\begin{array}{l} 3 \\ 5 \\ \hline 13 \\ 8 \end{array}$$
 por determinante

$$\begin{array}{l} 7 \\ 10 \\ \hline 4 \end{array} x \square 1 y \square 9$$

3.- Dada la ecuación $18.x^2 - 12.k.x + (6.k - 2) = 0$, determinar el valor de k para que:

- a) Sus raíces sean iguales.
- b) Sus raíces sean opuestas.
- c) Sus raíces sean recíprocas.
- d) Una de sus raíces sea nula.

4.- Resolver: $1/(x + 1) - 3.x/(x^2 - 1) = 2/(x - 1)$

5.- Obtener las ecuaciones cuyas raíces son: $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{-3}{2}$

6.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola correspondiente a la ecuación $y = (x+3)^2$? ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría? Representarla gráficamente.

$$y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 3$$

7.- Dibuja la gráfica de

8.- Encontrar la solución que satisface la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

9.- Los lados de un triángulo miden 10 m, 17 m y 18 m respectivamente, ¿qué cantidad fija hay que restarle a cada uno para obtener un triángulo rectángulo?

10.- Encuentra una ecuación de segundo grado, con coeficientes enteros, sabiendo que sus raíces son 6 y $\frac{-4}{3}$

2.25.1. Respuesta a las actividades de autoevaluación

1.- a) $x = 1$, b) $x = 9$, c) $x = \frac{17}{2}$, d) $x = 9$

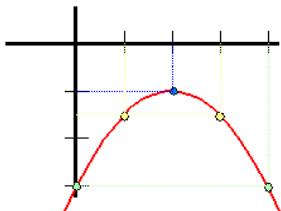
2.- a) $x = 2$ y $y = 4$, b) $x = 6$ y $y = 1$, c) $x = 2$ y $y = 1$, d) $x = 10$ y $y = 8$

3.- a) $k = 233/89$ o $34/89$, b) $k = 0$, c) $k = 10/3$, d) $k = 1/3$

4.- $x_1=3, x_2=4$

5.- $x^2 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} = 0$

6.- $(-3;0)$; $x=-3$



7.-

8.- No solución en \square

9.- 5 m

10.- $3x^2 - 4x - 24 = 0$



3. Capítulo 3: Potenciación, Radicación y Logaritmación



Historia

El primer intento de representar números demasiados grandes fue emprendida por el matemático y filósofo griego Arquímedes, descrita en su obra “*El contador de Areia*” en

el siglo III a.C. Ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo. El número estimado por él era de 10^{63} granos. Nótese la coincidencia del exponente con el número de casilleros del ajedrez sabiendo que para valores positivos, el exponente es $n-1$ donde n es el número de dígitos, siendo la última casilla la Nº 64 el exponente sería 63 (hay un antiguo cuento del tablero de ajedrez en que al último casillero le corresponde -2 elevado a la 63- granos).

A través de la notación científica fue concebido el modelo de representación de los números reales mediante coma flotante. Esa idea fue propuesta por Leonardo Torres Quevedo (1914), Konrad Zuse(1936) y George Robert Stibitz (1939).



Leonardo Torres Quevedo



Konrad Zuse

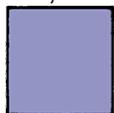


George Robert Stibitz

3.1. Potencia de exponente natural

Cuando se multiplica un número natural por sí mismo, por ejemplo 3×3 , hay otra manera de expresar ese producto 3^2 . Y se lee "3 al cuadrado", o "3 a la 2".

La costumbre de decir "3 al cuadrado" es muy antigua, y la razón por la cual se dice así, tiene que ver con la geometría

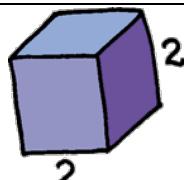


3

Si se tiene un cuadrado cuyo lado mide 3 unidades, su área es $3 \cdot 3 = 3^2$

En los tiempos de la Grecia Antigua, gran parte de las ideas matemáticas eran estudiadas a través de la Geometría, y por eso, cuando se quería encontrar una representación geométrica de algo tan sencillo como el producto de dos números, digamos, 5.6, lo que hacían era dibujar un rectángulo de lados 5 y 6, y así, veían el producto 5.6 como el área del rectángulo que acababan de dibujar. Esta costumbre siguió por mucho tiempo, por lo que cuando el número se repetía, por ejemplo, 2^2 , se lo llamaba dos elevado al cuadrado o el cuadrado de 2.

Si se tiene 2^3 , es igual a $2 \times 2 \times 2$ y se lee 2 al cubo, y la razón para esto proviene también de la también de la visión que tenían los griegos de la Matemática asociada a la Geometría,



su volumen es $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

El proceso de multiplicar a un número por sí mismo una cierta cantidad de veces, se llama **potenciación**, por lo tanto la potencia representa un producto, por ejemplo $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$

El exponente, para el ejemplo es 7, nos dice cuantas veces hay que repetir la base, para el ejemplo el número 3, en forma multiplicativa

Es decir, una potencia de exponente natural es la forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales:

$a^b = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ □ a se repite b veces

a es la **base**, el factor que se repite, el número que multiplicamos.

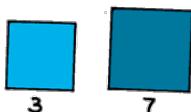
b es el **exponente**, el número de veces que se repite la base.

No hay que confundir la potenciación con la suma: $+3+3+3+3+3+3+3 = 7 \times 3$

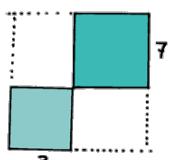
Se utilizará un argumento geométrico para comprobarlo, y ser verificará que

$$3^2 + 7^2 \neq (3+7)^2$$

Se tiene un cuadrado de lado 3 y otro de lado 7

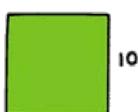


Se suman sus áreas



Esta suma es $3^2 + 7^2$

Si a la figura se le añade lo que hace falta para tener un cuadrado de $3+7$ de la siguiente manera



¿Qué se obtiene? El cuadrado nuevo tiene lado $3+7$ y su área, como se sabe, es igual a $.10^2 = (3+7)^2$.

Se han tenido que añadir rectángulos a la figura original, cuya área es $(3+7)^2$ para obtener un área igual a $(3+7)^2$ y eso asegura que estas dos cantidades no son iguales.

Recordar que la potenciación con base en **Q** y exponente en **Z**, que siempre podemos expresar una potencia con exponente negativo como el inverso de una potencia con exponente positivo.

$$\begin{aligned} 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} & \left(\frac{7}{5}\right)^{-4} &= \left(\frac{5}{7}\right)^4 \\ \left(\frac{-3}{2}\right)^{-3} &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 & 4^{-\frac{5}{4}} &= \frac{1}{4^{\frac{5}{4}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{4}} \\ \left(\frac{-2}{7}\right)^{\frac{-5}{3}} &= \left(\frac{-7}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

En la potenciación los tres números que

$$7^4 = 2401$$

aparecen tienen distintos roles:	7 es la Base 4 es el Exponente 2401 es el resultado o Potencia
----------------------------------	--

3.2. Potencias de exponente entero y base racional

Propiedades:

El exponente, n, se puede distribuir dentro de los elementos que se encuentran dentro del parentesis, excepto si hay una suma

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

 Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Si el exponente es negativo,-n, se puede escribir positivo para el reciproco del número

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

 Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

 Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

Todo número elevado a 0 es igual a 1

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Todo número elevado a 1 es igual a si mismo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

3.3. Producto de potencias de igual base

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

 Ejemplo $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, por ser el producto asociativo esto nos da $3^5 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^5$

 Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

Matemática
3.4. División de potencias con la misma base

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

 Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

3.5. Potencia de una potencia

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

 Ejemplo $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$

 Ejemplo $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$

3.6. Producto de potencias con el mismo exponente

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$$

 Ejemplo $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5) = (3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5) = 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$

 Ejemplo $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{35}\right)^3$

3.7. Cociente de potencias con el mismo exponente

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^n$$

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases

 Ejemplo $\left(\frac{5}{3}\right)^5 : \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \left(\frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7}\right)^5 = \left(\frac{20}{21}\right)^5$

3.8. Signo de una potencia de base entera

Para determinar potencia de un número entero tendremos en cuenta que
Las potencias de exponente par son siempre positivas

$$(+)^{\text{par}} = +$$

$$(-)^{\text{par}} = +$$



$$(+2)^4 = 16 \text{ y } (-2)^4 = 16$$

Las potencias de exponente impar tiene el mismo signo de la base

$$(+)^{\text{impar}} = +$$

$$(-)^{\text{impar}} = -$$



$$(+2)^5 = 32 \text{ y } (-2)^5 = -32$$

Resolver



1.- Escribir en forma de potencia:

- a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$
- b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$
- c) $n \cdot n \cdot n =$
- d) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b =$

2.- Calcular:

- a) 5^4
- b) $(-2)^4$
- c) 2^{-2}

3.- Calcular, dejando el resultado en forma de potencia

- a) $5^2 \times 5^5 \times 5^4 =$
- b) $4^2 \times 4^{-1} \times 4^8 =$

4.- Escribir en forma de una sola potencia

- a) $a \cdot (-a)^{-2} \cdot a^8 \cdot (-a)^3$
- b) $2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^3$
- c) $(-4)^5 \cdot 4^{-2} \cdot 4^3$

5.- Escribir dos potencias que den como resultado:

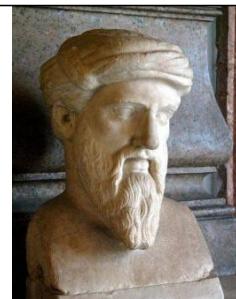
- a). 0
- b). 1
- c). la base.

3.9. Historia de la radicación

Historia

La visión del Universo que tenían el gran sabio griego Pitágoras de Samos y sus discípulos, los llamados pitagóricos, estaba dominada por sus ideas filosóficas acerca del número. Decían que el número natural y las proporciones entre números naturales gobernaban todo cuanto existía.

Un descubrimiento hecho por los mismos pitagóricos demostró que esta afirmación era falsa. Descubrieron la existencia de un número que no era natural y tampoco se podía expresar como fracción alguna.



Matemática

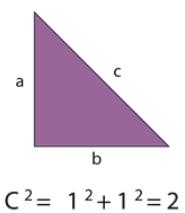
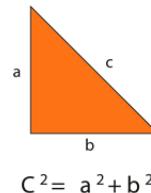
Todo comenzó con el llamado Teorema de **Pitágoras**. Se llama Teorema a toda afirmación matemática importante que es demostrada de manera rigurosa, irrefutable. El Teorema de **Pitágoras** afirma que, en todo triángulo rectángulo, el lado mayor, llamado hipotenusa, elevado al cuadrado, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, llamados catetos.

En todos los triángulos rectángulos quizás el de apariencia más sencilla fue el que produjo entre los pitagóricos la gran conmoción de presentar la existencia de una medida que no era expresable como un número natural ni como una fracción.

El triángulo cuyos catetos son ambos de medida 1 fue el que originó el derrumbe de toda una teoría filosófica.

El Teorema de Pitágoras asegura que

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



Usando un método muy sencillo, los pitagóricos intentaron encontrar números naturales m, n tales que $c = \frac{m}{n}$ sin lograrlo nunca. La idea era la siguiente: se divide un cateto en segmentos de igual longitud (longitud u).

Se intentaba dividir la hipotenusa también en segmentos de longitud u , pero siempre sobraba un segmento de longitud menor que u

En vista de que había un segmento sobrante, se escogía una medida para el segmento que fuera la mitad de la medida anterior, con la esperanza de que no hubiera ningún segmento sobrante en la hipotenusa. Pero no funcionaba.

Si hubieran encontrado un segmento que cupiera una cantidad exacta de veces tanto en la hipotenusa como en los catetos, digamos, 13 veces en la hipotenusa y 8 veces en los catetos, se tendría que la hipotenusa media $\frac{13}{8}$, pues la proporción entre

hipotenusa y cateto, que era $\frac{c}{1}$, también era igual a $\frac{13}{8}$ y así obtendrían $\frac{13}{8} = c$.

Pero no obtuvieron jamás una medida que cupiera una cantidad exacta de veces en ambos lados del triángulo. Surgió así el primer número irracional, aquel cuyo cuadrado es igual a 2. Casi 2000 años después se le dio el nombre de "raíz cuadrada de dos" y se creó el símbolo $\sqrt{}$ para representar las raíces cuadradas.

3.10. Radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Dado un número a , se pide calcular otro, tal que, multiplicado por sí mismo n de veces nos da el numero a .

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$$



¿Qué número multiplicado por si mismo 2 veces da 196?. Ese número es 14.

Se llama radicación a la operación indicada por toda expresión matemática que consista en una potencia con exponente racional, no entero. Se utiliza el símbolo $\sqrt{}$, al cual se llama raíz. El número que está dentro de la raíz se llama radicando, el grado de la raíz se llama índice del radical, el resultado se llama raíz.

índice $\sqrt[3]{27}$ radical → $\sqrt[3]{27} = 3$ radicando raíz
--



En la expresión $\sqrt[3]{27}$, se tiene índice 3 y subradical 27. Cuando el índice es 2, éste por lo general éste se omite $\sqrt{8}$, se lee raíz cuadrada de 8.

Se puede considerar la radicación como un caso particular de la potenciación. En efecto, la raíz cuadrada de un número, (por ejemplo a), es igual que $a^{1/2}$, del mismo modo la raíz cúbica de a es $a^{1/3}$ y en general, la raíz enésima de un número a es $a^{1/n}$.

En los siguientes ejemplos se observa cómo se utiliza este símbolo:

Símbolo	Se lee
$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$	raíz cúbica de 2
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$	raíz cuarta de un medio al cubo
$-5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{-5}$	raíz séptima de menos cinco
$7^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{7^{-5}}$	raíz octava de siete a la menos cinco
$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{2}{3}\right)^8}$	raíz quinta de menos dos tercios a la ocho
$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}}$	raíz sexta de cinco tercios a la menos uno
$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{4}{5}}$	raíz cuadrada de cuatro quintos

La mejor forma de resolver los ejercicios de operaciones con raíces es convertir las raíces a potencias y operar teniendo en cuenta las propiedades dadas para la operación de potenciación.

Dado un número racional b y un entero positivo impar n, la raíz n-ésima de b es aquel número x que, elevado a la n-ésima potencia, sea igual a b:

$$\sqrt[n]{b} = x \iff x^n = b.$$

Si n es par o impar y b es positivo, entonces $\sqrt[n]{b} = x$, donde $x > 0$ $x^n = b$, y x es llamada la n-ésima raíz de b.

Si n es par y b es negativo no podemos definir un valor de x que pertenezca a los números reales.



Algunos ejemplos que se escriben de manera diferente

Matemática

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{1^3}{2^3}} \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$$

$$7^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{7^{-5}} = \sqrt[8]{\frac{1}{7^5}} \quad \text{o} \quad 7^{-\frac{5}{8}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{7^5}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{2}{3}\right)^8} = \sqrt[5]{\left(\frac{-2}{3}\right)^8} = \sqrt[5]{\frac{(-2)^8}{3^8}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{5}} = \frac{(-2)^{\frac{8}{5}}}{3^{\frac{8}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{(-2)^8}}{\sqrt[5]{3^8}}$$



Las expresiones radicales pueden simplificarse transformando el exponente, que es una fracción impropia, en suma de una fracción propia más un número entero.

$$\left(\frac{1}{-3}\right)^{\frac{3}{1}} = \left(\frac{1}{-3}\right)^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{-3}\right)_{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{-3}\right)_2 \left(\frac{1}{-3}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ es decir}$$

$$\left(\frac{-3}{7}\right)^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-3}{7}\right)^7} = \left(\frac{-3}{7}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{-3}{7}} = \frac{9}{49} \sqrt[3]{\frac{-3}{7}}$$



Hay expresiones radicales que se pueden simplificar hasta el punto en que la raíz desaparezca

$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}, \text{ pero si escribimos } 27 = 3^3, \text{ se tiene}$$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$
en estos casos se trata de una raíz exacta

Dada la raíz $\sqrt[n]{b}$ si lo multiplicamos por n veces $\sqrt[n]{b}$ se tiene que es igual a b

$$(\sqrt[n]{b})^n = (b^{\frac{1}{n}})^n = b^{\frac{n}{n}} = b$$

Por lo que podemos afirmar que

$$\sqrt[n]{b^n} = b$$

es una raíz exacta.

3.11. Cálculo de una raíz cuadrada

Entera



Calcular la raíz cuadrada $\sqrt{8\ 92\ 25}$

1.- Si el radicando tiene más de dos cifras, separamos las cifras en grupos de dos empezando por la derecha

$$\sqrt{8\ 92\ 25}$$

2.- Calculamos la raíz cuadrada entera o exacta, del primer grupo de cifras por la izquierda: ¿Qué número elevado al cuadrado da 8?

8 no es un cuadrado perfecto pero está comprendido entre dos cuadrados perfectos: 4 y 9, entonces tomaremos la raíz del cuadrado del cuadrado perfecto por defecto: 2, y lo colocamos en la casilla correspondiente.

$$\sqrt{8\ 92\ 25} \boxed{2}$$

3.- El cuadrado de la raíz obtenida se resta al primer grupo de cifras que aparecen en el radicando

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 4 \end{array}$$

El cuadrado de 2 es 4. se lo restamos a 8 y obtenemos 4.

4.- Detrás del resto colocamos el siguiente grupo de cifras del radicando, separando del número formado la primera cifra a la derecha y dividiendo lo que resta por el duplo de la raíz anterior.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 49 \end{array}$$

49 2 Bajamos 92, siendo la cantidad operable del radicando: 492
 $49 : 4 > 9$, tomamos como resultado 9.

5.- El cociente que se obtenga se coloca detrás del duplo de la raíz, multiplicando el número formado por él, y restándolo a la cantidad operable del radicando

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 49 \\ 49 \times 9 = 441 \end{array}$$

49 2 Si hubiésemos obtenido un valor superior a la cantidad operable del radicando, habríamos probado por 8, por 7... hasta encontrar un valor inferior

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 492 \\ 441 \\ \hline 51 \end{array}$$

6.- El cociente obtenido es la segunda cifra de la raíz.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 492 \\ 441 \\ \hline 51 \end{array}$$

7.- Bajamos el siguiente par de cifras y repetimos los pasos anteriores

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 492 \\ 441 \\ \hline 512 \end{array}$$

Como $5301 > 5125$, probamos por 8

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 492 \\ -441 \\ \hline 5125 \\ -4704 \\ \hline 421 \end{array}$$

Subimos el 8 a la raíz

$$\begin{array}{r} \sqrt{8\ 92\ 25} \\ -4 \\ \hline 492 \\ -441 \\ \hline 5125 \\ -4704 \\ \hline 421 \end{array}$$

8.- Prueba.

Para que el resultado sea correcto, se tiene que cumplir:

Radicando = (Raíz entera)² + Resto

89 225 = 298² + 421

Ejemplo Resolver la raíz cuadrada $\sqrt{2\ 64}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2\ 64} \\ -1 \\ \hline 16\ 4 \\ -156 \\ \hline 8 \end{array}$$

Con decimalesEjemplo Calcular la raíz $\sqrt{264.315}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2\ 64.\ 31\ 50} \\ -1 \\ \hline 264 \\ -156 \\ \hline 831 \\ 644 \\ 18750 \\ -16225 \\ \hline 0.2525 \end{array}$$

3.12. Ejercicios para Calcular una raíz cuadrada**1.- Resolver**

a) $\sqrt{7\ 26\ 75}$

b) $\sqrt{62\ 56}$

c) $\sqrt{7\ 26\ 75 \cdot 687}$

3.13. Raíz cuadrada entera

La raíz cuadrada es entera o exacta, siempre que el radicando no sea un cuadrado perfecto.

La raíz entera de un número entero es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número.

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow \begin{cases} b^n \leq a \wedge (b+1)^n > a \\ r = a - b^n \end{cases}$$

índice
radical $\rightarrow \sqrt[3]{29} = 3$
radicando \uparrow **raíz**
resto

$$\sqrt[3]{29} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 27 \leq 29 \wedge 64 > 29 \\ 2 = 29 - 3^3 \end{cases}$$

Dada $\sqrt{17}$ $4^2 < 17 < 5^2$ $\sqrt{17} = 4$ es la raíz entera de 17.

El resto es la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz entera.

Resto = Radicando - Raíz²

Para $\sqrt{17}$, calculamos el Resto = $17 - 4^2 = 1$

Cálculo de raíces cuadradas por aproximaciones sucesivas

Este método se debe a Newton

Si conocemos una aproximación de la raíz, podemos calcular una aproximación mejor utilizando la siguiente fórmula:

$$a_i \boxed{1} \quad \boxed{a} \quad \boxed{A} \quad \boxed{a_i}$$

Diagrama que muestra la estructura de los dígitos en la división decimal. Se divide en tres partes principales: la parte entera (1), la parte decimal (a), y la parte decimal resultante (A). Debajo de la parte decimal (a) se indica el cociente (a_i).

Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 5, podemos partir de la aproximación 2, entonces:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = (1/2)(2 + 5/2) = 2,250$$

$$a_3 = (1/2)(2,250 + 5/2,250) = 2,236$$



Sir Isaac Newton (4/1/1643 – 31/03/1727) fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de gravedad universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en su obra *Opticks*) y el desarrollo del cálculo matemático. Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes.

3.14. Cálculo de una Raíz cúbica

1.- Para calcular la raíz cúbica de un número se comienza separando el número en grupos de tres cifras, empezando por la derecha

Por ejemplo: 16387064 lo separaríamos 16'387'064

2.- A continuación se calcula un numero entero que elevado al cubo se aproxime lo más posible al número del primer grupo (empezando por la izquierda).

En nuestro ejemplo el primer número es 16 y el numero entero que elevado al cubo se acerca más a 16 es 2. 2 es la primera cifra de la raíz.

3.- después se eleva al cubo esta cifra y se resta del número del primer grupo

En nuestro ejemplo $2^3 = 8$ y restándolo del numero del primer grupo que es 16, sale $16 - 8 = 8$

4.- A continuación ponemos al lado del resto anterior el número del siguiente grupo.

En nuestro ejemplo nos quedaría 8387

5.- después tenemos que calcular un número a que haciendo las operaciones siguientes:

$3 * (\text{raíz obtenida hasta el momento})^2 * a * 100 + 3 * (\text{raíz obtenida hasta el momento}) * a^2 * 10 + a^3$

se aproxime lo más posible al número obtenido en el punto 4.

El número a, es el siguiente dígito de la raíz.

En nuestro ejemplo seria ese número sería 5, porque $3 * 2^2 * 5 * 100 + 3 * 2 * 5^2 * 10 + 5^3 = 7625$

6.- A continuación restamos este numero al numero obtenido en el paso 4.

En nuestro ejemplo: $8387 - 7625 = 762$.

7.- Repetimos el paso 4

En nuestro ejemplo: 762064

8.- Repetimos el paso 5 y el número obtenido sería el siguiente numero de la raíz.
En el ejemplo sería el 4 porque $3 * 25^2 * 4 * 100 + 3 * 25 * 4^2 * 10 + 4^3 = 762064$

9.- Repetimos el paso 6

$$\text{En nuestro ejemplo } 762064 - 762064 = 0$$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$\frac{m}{n} = a^{\frac{km}{kn}} \quad \sqrt[k]{a^m} = a^{\frac{m}{k}}$$

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismonúmero natural, se obtiene otro radical equivalente



$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

3.15. Simplificar radicales

Si existe un número natural que divide al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado



$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$$

Escribir en forma de radical las potencias

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$5^{0.5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$12^{0.2} = 12^{\frac{2}{10}} = 12^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{12}$$

3.16. Expresar como potencia fraccionaria:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} &= \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{-\frac{1}{5}} \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} &= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{15+10+12}{30}} = x^{\frac{37}{30}} \end{aligned}$$

3.17. Extraer factores de un radical

Se descompone el radicando en factores. Si:

- 1.- Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

- 2.-Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

- 3.- Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.



$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 4 \mid 2 \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3 \sqrt[3]{3^2}$$

$$\begin{array}{r} 5 \mid 3 \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

3.18. Introducir factores en un radical

Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
Introducir dentro del radical



$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$\begin{aligned} & 2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} \\ &= \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} = \\ &= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}} \end{aligned}$$

$$2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{4}} = \sqrt[3]{2}$$

$$2 \sqrt[4]{\frac{5}{12}}$$

$$2 \sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{2^2}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

3.19. Suma y resta de radicales

Radicales semejantes

Cuando en una suma de radicales aparecen términos con la misma base y el mismo exponente, estos términos se denominarán semejantes.

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2}, \quad -\frac{3}{5}\sqrt{2}$$

Se operará con estos términos de la manera indicada en el ejemplo siguiente:

$$\sqrt{2} \square \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \square \sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} \square \sqrt{2} \quad \square \sqrt{2}$$

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) radicales que sean semejantes

$$a\sqrt[k]{k} + b\sqrt[k]{k} + c\sqrt[k]{k} = (a+b+c)\sqrt[k]{k}$$



$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$$

$$2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$$

$$\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} = \sqrt{2^3 \cdot 3} - 5\sqrt{6} + \sqrt{2 \cdot 3^5} = 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = \\ = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = \\ = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[4]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \\ = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + \sqrt[6]{2^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \\ = 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \\ = 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{15}{2}\sqrt[3]{2}$$

3.20. Multiplicación de radicales

Multiplicación de radicales con mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$



$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible

Reducción de radicales a índice común

1.-Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, m.c.m., que será el común índice

2.- Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} & \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3} \\ \text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12 & & \\ \sqrt[12]{2^6} & \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} & \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3} \\ \sqrt[12]{2^6} & \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} & \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9} \end{array}$$

Multiplicación de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3 \sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3) = 6$$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6 \sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4 - 3} = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a - b}{(a - b)^2} \cdot \frac{a + b}{a^2 - b^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2 \cdot (a^2 - b^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{(a - b)^2}} = \frac{1}{a - b} \end{aligned}$$

3.21. División de radicales

División de radicales con el mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$



$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

División de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2^1} = \sqrt[3]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación simplificaremos el radical, si es posible.



$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2^1} = \sqrt[3]{2}$$



$$1.- \frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} =$$

$$2.- = \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2 \sqrt[3]{2^2} = 4 \sqrt[3]{4}$$

$$3.- \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} = \sqrt[12]{\frac{a^6 \cdot (a^2)^4 \cdot (a^3)^3}{(a^4)^2}} = \sqrt[12]{\frac{a^6 \cdot a^8 \cdot a^9}{a^8}} = \sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$$

3.22. Potencia de un radical

Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$



$$1.- (\sqrt[3]{18})^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{(2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3 \sqrt[3]{12}$$

$$2.- \left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}} \right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} =$$

$$3.- = \frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18 \sqrt[6]{\frac{(2^8 \cdot 3^4)^2}{(2^4 \cdot 3^4)^3}} = 18 \sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} = 18 \sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18 \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18 \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$4.- (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$$

$$5.- (2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$6.- (\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$7.- (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) = (2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 3^2 (\sqrt{2})^2 = \\ = 4 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 20 - 18 = 2$$

3.23. Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$



$$1.- \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[24]{2}$$

2.-

3.-

4.-

3.24. Propiedades de la radicación

1.- Distributiva con respecto a la multiplicación y a la división:



Ejemplo en la multiplicación

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$



Ejemplo en la división

$$\sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4} = 4 : 2 = 2$$

$$\sqrt{16 : 4} = \sqrt{4} = 2$$

2.- NO ES DISTRIBUTIVA con respecto a la SUMA y a la RESTA.



Ejemplo en la suma

$$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$5 \neq \sqrt{13}$$



Ejemplo en la resta

$$\sqrt[3]{27 - 8} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1$$

$$\sqrt[3]{27 - 8} = \sqrt[3]{19}$$

$$1 \neq \sqrt[3]{19}$$

3.- Si el índice es PAR entonces el radicado TIENE que ser POSITIVO y la raíz tiene dos resultados, uno positivo y otro negativo, para este nivel usamos el resultado positivo

$$\sqrt{16} = \pm 4 \text{ porque } \begin{cases} 4^2 = 16 \\ (-4)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\sqrt{-16} \text{ no se puede hacer porque } \begin{cases} 4^2 = 16 \\ (-4)^2 = 16 \end{cases} \text{ nunca va a dar negativo.}$$

4.- Si el índice es IMPAR entonces la raíz va a tener el mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{porque } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{porque } (-2)^3 = -8$$

3.25. Racionalizar radicales

Racionalizar radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones

Caso 1:

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}$$

se multiplica el numerador y el denominador por \sqrt{c}

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$



$$1.- \quad \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$2.- \quad \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Caso 2:

$$\frac{a}{b\sqrt[m]{c^n}}$$

se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[m]{c^{n-m}}$

$$\frac{a}{b\sqrt[m]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[m]{c^{n-m}}}{b\sqrt[m]{c^n} \cdot \sqrt[m]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[m]{c^{n-m}}}{b\sqrt[m]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[m]{c^{n-m}}}{b\sqrt[m]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[m]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$



$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

Caso 3:

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a + b \rightarrow a - b$$

$$-a + b \rightarrow -a - b$$

$$a - b \rightarrow a + b$$

$$-a - b \rightarrow -a + b$$

Recordar lo visto anteriormente como diferencia de cuadrados:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$



$$1.- \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$2.- \frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 2\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 2\sqrt{2})} = \\ = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$3.- \frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (5 + 2\sqrt{6})}{(5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \\ = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

3.26. Ejercicios propuesto para Radicales

1.-. Resolver

a) $\sqrt[4]{10.000} =$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

c) $\sqrt[4]{625 \cdot 81} =$

d) $\sqrt{4 \cdot 25} =$

3.- Racionalizar

a) $\frac{5}{2\sqrt{2}} =$

b) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$

4.- Extraer fuera del signo radical

a) $\sqrt[5]{5 \square 120}$

b) $\sqrt[4]{32} \boxed{} \frac{1}{169}$

5.- Introducir dentro del signo radical

a) $4\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{9}}$

6.- Resolver

a) $2\sqrt[3]{8} \boxed{} \sqrt[3]{32} \boxed{} \sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[3]{3} \boxed{} \sqrt[3]{4\sqrt[3]{5}} \boxed{} \sqrt[3]{4\sqrt[3]{27}} \boxed{} \sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[4]{2} \boxed{} \sqrt[4]{4} \boxed{} \sqrt[3]{5} \boxed{} \sqrt[3]{25}$

3.27. Logaritmo

Antiguamente los logaritmos eran utilizados para resolver cuentas extremadamente grandes, con el advenimiento de la calculadora hoy se los utiliza para resolver ecuaciones solamente. Pero eso no quiere decir que se los utilice menos sino que se han agilizado los cálculos y ustedes no tienen que perder tiempo resolviendo cuentas. El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo a la base, x el número e y el logaritmo



1. - $\log_2 4 = 2 \quad 2^2 = 4$

2. - $\log_2 1 = 0 \quad 2^0 = 1$

3. - $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad y = 2$

4. - $\log_{\sqrt{5}} 125 = y \quad \sqrt{5}^y = 125 \quad 5^{\frac{1}{2}y} = 5^3 \quad y = 6$

5. - $\log 0.001 = y \quad 10^y = 0.001 \quad 10^y = 10^{-3} \quad y = -3$

6. - $\ln \frac{1}{e^5} = y \quad e^y = \frac{1}{e^5} \quad e^y = e^{-5} \quad y = -5$

7. - $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y \quad \sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}} \quad 3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}} \quad y = -\frac{8}{5}$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

- 1.- No existe el logaritmo de un número con base negativa $\log_{-a} x$
- 2.- No existe el logaritmo de un número negativo $\log_a (-x)$
- 3.- No existe el logaritmo de cero $\log_a 0$
- 4.- El logaritmo de 1 es cero $\log_a 1 = 0$
- 5.- El logaritmo en base a de a es uno $\log_a a = 1$
- 6.- El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente
 $\log_a a^n = n$

3.28. Propiedades de Logaritmo

1.- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

 Ejemplo $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

2.- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

 Ejemplo $\log_2 \left(\frac{8}{4} \right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$

3.- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

 Ejemplo $\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

4.- El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

 Ejemplo $\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

5.- Cambio de base: El concepto de cambio de base deriva de la definición de logaritmo.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

 Ejemplo

$x = \log_2 32$ (por definición de logaritmo)

$2x = 32$ (aplicamos logaritmo, recuerden que sucede con la potencia)

$x \cdot \log 2 = \log 32$ (despejamos x)

$$x = \frac{\log 32}{\log 2} = \frac{1,50515}{0,30103} = 5$$



$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Se cambió la base del logaritmo aplicada a la operación transformándola en una división del logaritmo de la base y el logaritmo del número. En este caso, el principio estaba en base dos y se cambió a diez.

3.29. Logaritmo decimal y neperiano

Estos se pueden calcular directamente en las calculadoras científicas.

Logaritmos decimales:

Son Logaritmos de base diez: Cuando se escribe la palabra "log" y no aclaramos de que base se trata, se toma (por convención o acuerdo) que la base es diez. Se representan por log (x).

En la calculadora se encuentra una tecla que dice log. Esta tecla halla automáticamente el logaritmo de base diez.

Log 2 =

En la mayoría de las calculadoras basta con poner el 2 y después apretar la tecla log. El resultado es la potencia a la que se tiene que elevar a 10 para que de 2.

10 = 2

Si tenemos el valor del logaritmo y queremos saber el valor del número al que le hemos efectuado esta operación también se utiliza la calculadora:

log = 0,301029996

Para ello se teclea este número en la calculadora, se aprieta Shift o 2ndf, según la calculadora (suele aparecer con otro color), después la tecla log.

Logarítmos neperianos:

Son los que tienen base e (2,718281828). Se representan por ln (x) o L(x) Para calcularlo también se puede utilizar la calculadora, basta con teclear el número y luego la tecla ln, que automáticamente calcula el logaritmo de base e. El resultado es la potencia a la que tienes que elevar a e para que te de 2.

3.30. Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo. Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

1.- Las propiedades de los logaritmos

- a) $\log_a 1 = 0$
 b) $\log_a a = 1$
 c) $\log_a a^n = n$
 d) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
 e) $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
 f) $\log_a (x^n) = n \log_a x$
 g) $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$
- 2.- $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$
 3.- $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$

4.- Además tenemos que comprobar las soluciones para verificar que no tenemos logaritmos nulos o negativos

3.31. Resolución de ecuaciones logarítmicas



$$\begin{aligned} \log 2 + \log(11 - x^2) &= 2 \log(5 - x) \\ \log[2(11 - x^2)] &= \log(5 - x)^2 \\ 2(11 - x^2) &= (5 - x)^2 \\ 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ x = 3 &\quad 11 - 3^2 > 0 \quad 5 - 3 > 0 \\ x = \frac{1}{3} &\quad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \quad 5 - \frac{1}{3} > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2 \log x &= 3 + \log \frac{x}{10} \\ 2 \log x &= 3 + \log x - \log 10 \\ \log x &= 3 - 1 \quad \log x = 2 \quad x = 100 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log x + \log(x + 3) &= 2 \log(x + 1) \\ \log[x(x + 3)] &= \log(x + 1)^2 \\ x(x + 3) &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \quad x = 1$$



$$\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$$

$$\log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4)$$

$$\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2 \quad (16 - x^2) = (3x - 4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0 \quad x = 0 \quad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

3.32. Problemas que se resuelven con logaritmos

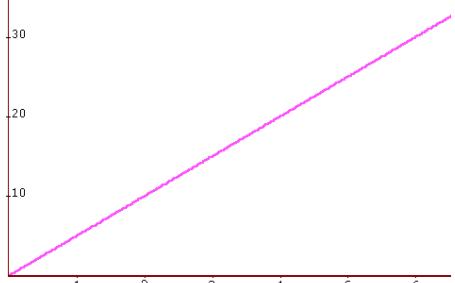


"En un criadero de conejos cada hembra tiene cinco crías cada tres meses de gestación, si contamos a la cría de una sola pareja, indicar cuantos conejos habrá en cinco períodos de cría:

1 ^{er} Período	2 ^{do} Período	3 ^{er} Período	4 ^{to} Período	5 ^{to} Período
	$5 + 5 = 10$	$10 + 5 = 15$	$15 + 5 = 20$	$20 + 5 = 25$

¿Qué hacer para calcular la cantidad de conejos en cada período?, sencillamente a la cantidad de crías del período anterior le sumamos cinco.

Si llevamos estos datos a un par de ejes cartesianos de manera que los períodos se ubiquen sobre las abscisas y la cantidad de crías en las ordenadas, a partir del gráfico, podemos indicar la cantidad de crías que tendrían en cualquier período.



Siendo "x" el número de períodos y "C_(x)" la cantidad de crías ¿Cómo expresaríamos con una ecuación la cantidad de crías en función del tiempo (períodos)? Los períodos sucesivos los encontramos sumando el anterior 5, o sea multiplicamos en número del período por cinco.

$$C_{(x)} = 5x$$

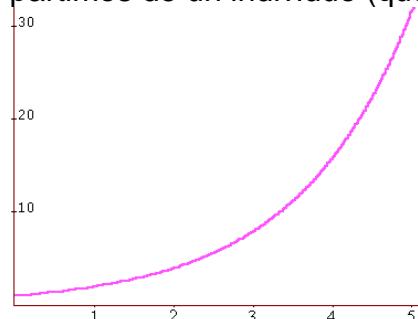
b) Supongamos que ahora analizamos un cultivo de bacterias, las que se reproducen cada 0,2 seg. (Se dividen por la mitad). Completemos el cuadro de los primeros cinco períodos.

	1 ^{er} Período	2 ^{do} Período	3 ^{er} Período	4 ^{to} Período	5 ^{to} Período	

2	$2 \cdot 2 = 4$	$4 \cdot 2 = 8$	$8 \cdot 2 = 16$	$16 \cdot 2 = 32$	
----------	-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	--

¿Qué se hace para calcular la cantidad de bacterias en cada período? Nuevamente utilizamos la cantidad de individuos del período anterior, sólo que esta vez lo multiplicamos por 2.

Si llevamos estos datos a un par de ejes cartesianos de manera que los períodos se ubiquen sobre las abscisas y la cantidad de bacterias en las ordenadas, a partir del gráfico, podemos indicar la cantidad de estos microbios que habría en cualquier período. La diferencia con el anterior es que tenemos que tener en cuenta que partimos de un individuo (que al partirse se convierte en dos).



En este caso la ecuación matemática a la que responde la división de las bacterias es diferente a la anterior de los conejos. Sigamos utilizando a la x para indicar el número del período.

En el primer período tenemos 2, en el segundo $2 \cdot 2 = 2^2$, en el tercero $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, si generalizamos tenemos que en el período " n " el número de bacterias es 2^n .

Así que la ecuación es: $C(x) = 2^x$

Volvamos al problema de los conejos.

Si tenemos 125 crías ¿cuántos períodos han pasado? Utilizando la ecuación que encontramos: $5x = 125$, despejemos, $x = 125 / 5 = 25$. Necesitamos 25 períodos.

Si tenemos 512 bacterias ¿Cuántos períodos han pasado?

Utilicemos la ecuación: $2^x = 512$

Evidentemente el problema se complica un poco. Para encontrar la respuesta a esta cuestión debemos hallar el exponente al que está elevado

Primero recordemos algo de primer año:

Cuando en primer año viste potencia se dijo que : "la base (a) elevada al exponente (b) nos da como resultado igual que multiplicar "b" veces "a"

$$a^b = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_b = C$$

$$\text{Ejemplo: } 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

Ahora estamos buscando el exponente al que está elevado, número que pusiste en la fórmula para hallar la cantidad de bacterias, para ello nos vemos obligados a buscar una operación matemática que no conocías, el *logaritmo*.

Por definición :

$$\log_a C = b \text{ únicamente si } a^b = C$$

(Se lee "logaritmo en base a de C")

De allí que para calcular el período en que tenemos 512 bacterias necesitamos conocer el exponente al que hemos elevado a "2".

Entonces:

Matemática

	512	2
	256	2
	128	2
Por que $2^9 = 512$	64	2
	32	2
$\log_2 512 = 9$	16	2
	8	2
	4	2
	2	2
	1	

Ya que trabajamos con potencias vamos a descubrir las cuatro propiedades que deberemos aplicar de ahora en adelante en logaritmos.

$$\text{Resolvemos: } 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{(2+3+4)} = 2^9$$

El "producto de potencias de igual base" es una propiedad que nos indica que podemos sumar las potencias cuando operamos con multiplicaciones de este tipo. Como trabajamos con potencias al aplicar logaritmos, traslademos esta propiedad al tema que estamos tratando. Si tenemos una multiplicación y aplicamos logaritmos se transformará en este se transformará en suma.

En cuanto a la división, como las potencias se restan, al aplicar logaritmos se transforman en resta.

$$\text{Ejemplo: } x = a^b \quad \log x = \log a + \log b$$

$$\text{Resolver: } (a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

$$\text{Resumiendo: } (a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

En "potencia de potencia", las potencias se multiplican. Por eso, cuando aplicas logaritmo a un número elevado a una potencia, el exponente pasa multiplicando al logaritmo de la base. En cuanto a la raíz, que es una potencia fraccionaria, la fracción baja para multiplicar al logaritmo. La fracción es una división entre enteros, así que el denominador, en realidad, está dividiendo.

$$\text{Ej.: } x = a^b \quad \log x = b \cdot \log a$$

$$x = \sqrt[b]{a} \rightarrow x = a^{\frac{1}{b}} \Rightarrow \log x = \frac{1}{b} \log a \rightarrow \log x = \frac{\log a}{b}$$

3.33. Ejercicios propuesto para logaritmos

1.- Calcular por la definición de logaritmo el valor de y.

a) $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$

c) $\ln \frac{1}{e^5} = y$

d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

2.- Calcular el valor de x aplicando la definición de logaritmo

a) $\log_2 32 = x$

b) $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

c) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

d) $\log_2 x^3 = 6$

3.- Resolver

a) $2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$

b) $4 \log \left(\frac{x}{5} \right) + \log \left(\frac{625}{4} \right) = 2 \log x$

c) $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$

d) $\log(25 - x^3) - 3 \log(4 - x) = 0$

4.- Calcular el valor de las siguientes expresiones

a) $\log_a 8 = 3$

b) $\log_2 a = 5$

5.- Para determinar la edad de una roca la ciencia actualmente ha podido desarrollar una técnica basada en la concentración de material radiactivo en su interior. Cuanto más joven es la roca mayor concentración de material radiactivo encontraremos. $C(x) = k \cdot 3^{-t}$ es la fórmula que se utiliza, donde $C(x)$ representa la concentración del material radiactivo, t el tiempo transcurrido medido en cientos de años y "k" la concentración del elemento en el momento de formarse la roca. Si $k = 4500$ a) ¿Cuánto tiempo debe haber pasado para que hallemos una concentración de 1500?; b) ¿Qué concentración tendríamos al cabo de dos siglos?; c) ¿En qué tiempo se acabaría este material?. Rta.: a) como $t = 1$, pasaron cien años. b) $1,7 \cdot 10 - 92$ c) La ecuación no tiene como resultado el número cero, por lo que teóricamente siempre quedaría un mínimo resto de material radiactivo.

3.34. Actividades de Autoevaluación del Capítulo 3

Resuelve y obtiene tu evaluación según el porcentaje de respuestas correctas

Racionalizar

a) $\frac{2}{3 + \sqrt{3}} =$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

2.- Introducir dentro del signo radical

a) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

b) $2 \sqrt[4]{\frac{5}{12}}$

3.-Calcular

a) $\log_6 216 =$
b) $\log 100000 =$

4.- Resolver aplicando las propiedades de logaritmos

a) $\log (23 \cdot 3) =$
b) $\log (2 \cdot 3 : 4)5 =$

c) $\log \frac{\sqrt{3.5}}{2}$

5.- Calcular el valor de x

a) $5 \cdot 2^x + 2^{x+2} = 18$
b) $2^x = 16$

3.35. Respuesta a los Ejercicios de Autoevaluación

$$1.- \text{ a) } \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$1.- \text{ b) } \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2^2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{3 - 2} = 2 + \sqrt{6}$$

$$2.- \text{ a) } \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \text{ b) } 2 \sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{2^2}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$$

3.- a) 3, b) 5

4.- a) $\log 3$, b) 5. ($\log 2 + \log 3 - \log 4$), c) $\frac{1}{2} (\log 3 + \log 5) - \log 2$.

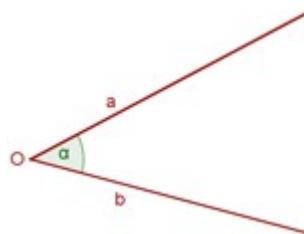
5.- a) 1, b) 4



4. Capítulo 4: Trigonometría

4.1. Sistemas de medición de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.



El ángulo es positivo si se orienta en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.

Para medir ángulos **se utilizan siguientes unidades:**

<p>Sistema sexagesimal, la unidad es el Grado sexagesimal ($^{\circ}$)</p> <p>Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.</p> <p>Un grado tiene 60 minutos ('') y un minuto tiene 60 segundos (").</p> <p>(el nombre <i>sexagesimal</i> proviene de dividir a la circunferencia en seis partes de 60° cada una, obteniendo un giro completo de 360°).</p>	<p>Dos rectas perpendiculares contenidas en un plano al cortarse determinan cuatro partes iguales, cada una de ellas recibe el nombre de ángulo recto y el plano se divide en cuatro cuadrantes:</p> <p>1^{er} cuadrante: 0° a 90° 2^{do} cuadrante: 90° a 180° 3^{er} cuadrante: 180° a 270° 4^{to} cuadrante: 270° a 360°</p>
<p>Sistema centesimal, la unidad es el Grado centesimal, que se define expresando que es la centésima parte de una ángulo recto:</p> <p>$1^G = 1 R / 100$, entonces $1 R = 1^G$</p> <p>las unidades secundarias son:</p> <p>el minuto centesimal, que es la centésima parte del grado centesimal: $1'' = 1^G / 100$ y</p> <p>el segundo centesimal, que es la centésima parte del minuto centesimal : $1''' = 1'' / 100$</p>	<p>Cada cuadrante o ángulo recto mide 100^G</p>

Matemática

Sistema radial o circular cuya unidad de medida es el **Radián (rad)**

Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide un radio**.

La medida de la **circunferencia** con respecto a su radio es

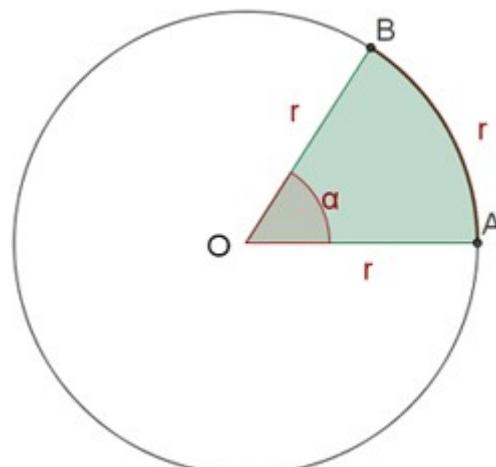
$$(2 \square r / 1 r) = 2 \square$$

En consecuencia, el ángulo de un giro mide $2 \square$ en este sistema, el de medio giro \square y el de un cuarto de giro $\square/2$.

$$2 \pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\frac{\square}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$



Ángulo que mide un radián

4.2. Equivalencia entre los sistemas:

Sistema Angulo	Sexagesimal	Centesimal	Radial
De un giro	360°	400^G	$2 \square$
Llano	180°	200^G	\square
Recto	90°	100^G	$\square/2$

4.3. El número

Las primeras civilizaciones indoeuropeas ya tenían conciencia de que el área del círculo es proporcional al cuadrado de su radio, y de que su circunferencia lo es al diámetro. Sin embargo no se sabe cuándo se comprendió por vez primera que ambas razones son la misma constante, simbolizada en nuestros días por la letra griega pi (El símbolo del que toma nombre la constante lo introdujo en 1706 el escritor y matemático inglés William Jones y lo popularizó el matemático suizo Leonhard Euler (v.) en el siglo XVIII.)

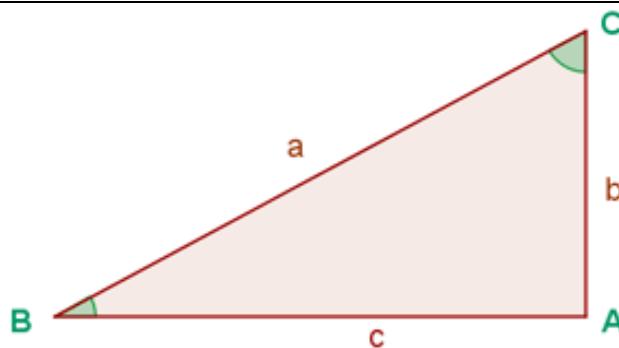
Arquímedes de Siracusa (v.), el mayor matemático de la antigüedad, estableció rigurosamente la equivalencia de ambas razones en su tratado *Medición de un círculo*.



<i>Usando polígonos de 96 lados inscritos (idea de Antífono) y circunscritos (idea de Brisón de Heraclea) (y sin conocer las funciones trigonométricas!), llegó a que $310/71 < \pi < 310/7$ y dedujo un laborioso procedimiento para calcular (π) con cualquier precisión.</i>	
---	--

4.4. Funciones Trigonométricas

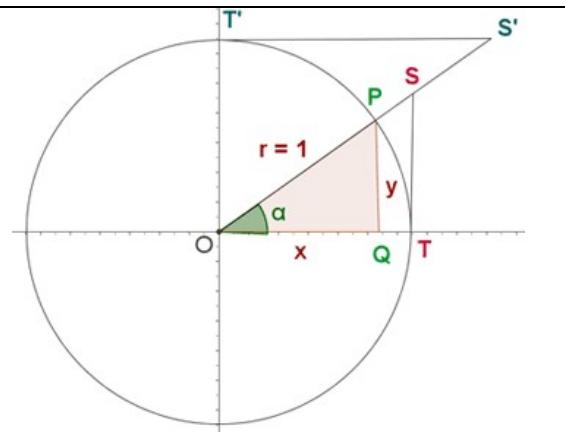
4.4.1. Definición de las relaciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo



Seno Seno del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa . $\sen B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$	Cosecante Cosecante del ángulo B: es la razón inversa del seno de B . $\cosec B = \frac{1}{\sen B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$
Coseno Coseno del ángulo B: es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa . $\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$	Secante Secante del ángulo B: es la razón inversa del coseno de B . $\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$
Tangente Tangente del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo . $\tg B = \frac{\sen B}{\cos B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{a}$	Cotangente Cotangente del ángulo B: es la razón inversa de la tangente de B . $\cotg B = \frac{1}{\tg B} = \frac{\cos B}{\sen B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$

4.4.2. Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Primeramente definiremos la **circunferencia trigonométrica**, que es la circunferencia cuyo centro coincide con el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, su radio es unitario, el origen de sus arcos es el punto de la intersección de la circunferencia con el semieje positivo del eje de las abscisas (T). Los ejes delimitan cuatro cuadrantes.



Ahora dibujamos un ángulo α en el primer cuadrante de dicha circunferencia, el término del ángulo α y la circunferencia trigonométrica tienen un punto en común designado con la letra P. La ordenada del punto P recibe el nombre de **seno del ángulo α** , y la abscisa de ese mismo punto se llama **coseno del ángulo α** .

Por el punto T, trazamos la recta perpendicular al eje de abscisas. La ordenada del punto perteneciente al término del ángulo α o a su semirrecta opuesta que tiene abscisa unitaria, recibe el nombre de **tangente del ángulo α** en la gráfica este punto es el designado con la letra S.

Por el punto T', se traza la recta perpendicular al eje de ordenadas. La abscisa del punto perteneciente al término del ángulo α o a su semirrecta opuesta que tiene ordenada unitaria recibe el nombre de **cotangente del ángulo α** en la gráfica este punto es el que se designó con la letra S'.

La **secante del ángulo α** está representada por OS mientras que la **cosecante del ángulo α** está por OS' como se deduce en lo que sigue.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = \textcolor{green}{PQ} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = \textcolor{teal}{OS'}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{OQ}{OP} = \textcolor{green}{OQ} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = \textcolor{red}{OS}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = \textcolor{red}{ST} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = \textcolor{teal}{S'T'}$$

Las funciones trigonométricas toman signos diferentes según a que cuadrante pertenece el lado término del ángulo. Tenemos los siguientes signos:

Función / Signo	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
SENO	+	+	-	-
COSENO	+	-	-	+
TANGENTE	+	-	+	-
COTANGENTE	+	-	+	-

Matemática

SECANTE	+	+	-	+
COSECANTE	+	-	-	-

4.4.3. Ángulos notables

Se llaman ángulos notables: 0° , 30° , 45° , 60° y 90° (en radianes 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente)

A continuación se dan los valores de las funciones trigonométricas de los mismos

Ángulos \ Funciones	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

4.4.4. Relaciones fundamentales (sólo algunas)

Relación pitagórica: La suma del cuadrado del seno y coseno de un mismo ángulo, es siempre igual a la unidad (igualdad que se deduce del teorema de Pitágoras) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$	A partir de esta identidad se puede obtener otras muy utilizadas: $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$ $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$
La tangente de un ángulo, es el cociente entre el seno y el coseno de ese ángulo	$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ (se deduce a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas)
La cotangente de un ángulo es la recíproca de la tangente de ese ángulo	$\cot a = \frac{1}{\tan a} = \frac{\cos a}{\sin a}$
La secante de un ángulo es la recíproca del coseno de ese ángulo.	$\sec a = \frac{1}{\cos a}$
La cosecante de un ángulo es la recíproca del seno de ese ángulo	$\csc a = \frac{1}{\sin a}$

4.4.5. Ejercicios y problemas

Matemática

- 1) Dadas las siguientes tres ángulos, ordenarlos de mayor a menor
a) $\square = 123^\circ 18' 20''$

$$\square = 5/8 \square$$

$$\square = 148^\circ 27' 32''$$

- b) $\square = 200^\circ 25''$

$$\square = 7/8 \square$$

$$\square = 210^\circ 10''$$

- 2) Expresar las siguientes medidas de ángulos en radianes

$$\square\square\square\square\square\square = 156^\circ$$

$$\square = 125^\circ 20'' \square$$

$$\square\square = 5^\circ 34' 53''$$

- 3) Expresar las siguientes medidas de ángulos en grados, minutos y segundos:

$$\square\square\square\square\square\square = \square/6$$

$$\square = 3/7 \square$$

$$\square\square = 3,5 \square$$

- 4) Determine la medida de un ángulo congruente a 7.080° , que sea positiva y menor que un giro.

- 5) Recordando que para determinar la medida de un ángulo en radianes debe efectuar el siguiente cálculo \square (en radianes) = (medida del arco)/(medida del radio).

Resuelva los siguientes casos:

- a) Determinar la medida en grados del ángulo que corresponde a un arco de 12 cm, en el círculo cuyo radio es de 9 cm.

- b) Determinar la longitud del arco distendido entre los lados de un ángulo que mide \square radianes. El radio de la circunferencia es de 4 cm.

- 6) En una circunferencia trigonométrica trace los ángulos \square y \square que pertenecen al primer cuadrante, sabiendo que $\sin \square = 0.36$ y $\cos \square = 0.75$. Luego represéntelos y compruebe geométricamente si los ha trazado bien midiendo con un transportador.

- 7) Indique a qué cuadrante o cuadrantes pertenece el ángulo para que satisfagan las siguientes condiciones:

- a) $\operatorname{Tg} \square > 0$ y $\operatorname{sen} \square < 0$

- b) $\operatorname{Tg} \square$ y $\operatorname{cos} \square$ tienen el mismo signo.

- c) $\operatorname{sen} \square$ y $\operatorname{cos} \square$ tienen el mismo signo

- d) Todas las funciones trigonométricas tienen el mismo signo.

- e) $\operatorname{sen} \square$ y $\operatorname{tg} \square$ tienen signos opuestos.

- f) $\operatorname{Cos} \square > 0$ y $\operatorname{Tg} \square < 0$

- 8) Aplicando los valores de los ángulos notables calcular la siguiente expresión:

a) $\operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{cos} 60^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ =$

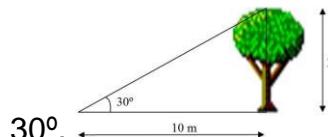
- b) $\cos 0^\circ - \sin 45^\circ + \tan 45^\circ =$
 c) $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ$
 d) $\tan 60^\circ + \cos 90^\circ - \sin 30^\circ$
 e) $\sin 90^\circ - \cos 90^\circ =$
- 9) Sabiendo que el $\sin \square = 0.7$ y , calcular el valor de las restantes funciones trigonométricas.
- 10) Si la $\tan \square = -0.33$ calcular el resto de las funciones trigonométricas.
- 11) Si la $\cot \square = -1/2$ calcular el resto de las funciones trigonométricas.
- 12) Si la $\cos \square = -0.886$ calcular el resto de las funciones trigonométricas.
- 13) Si la $\sin \square = 0.37$ calcular el resto de las funciones trigonométricas.
- 14) Hallar el valor numérico de x:

- a) $x = (\sin 90^\circ + \tan 45^\circ)(\sin 30^\circ + \cos 90^\circ)$
 b) $x = \sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ$
 c) $x = \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ - \tan 90^\circ$

4.5. Actividades de Autoevaluación

Resuelve y obtiene tu evaluación según el porcentaje de respuestas correctas

- 1) Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de



- 2) Pasar 135° a radianes-
 3) Pasar $5\square/4$ a grados
 4) Calcular seno, coseno y tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuyo cateto contiguo mide a y opuesto mide 3^a
 5) Calcular las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60° y 120° y que sus lados miden 6cm.

4.5.1. Respuestas:

- 1) $y \square 10 / \sqrt{3}$

2) $3\Box/4$ 3) 225° 4) $\sin \Box = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \Box = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y $\tan \Box = 3$ 5) Diagonal mayor mide $6\sqrt{3}$ cm y la diagonal menor mide 6 cm.

Referencias Bibliográficas

- Apunte para ingreso- área matemática- Año:2002- Ing. Claudia Santander- Ing. Isabel Demaldé- UNLaR
- De Simone – Turner, Matemática, Guías teórico-prácticas, Editorial A-Z Editora, Bogotá, Colombia, enero 1999,
- <http://soko.com.ar/matem/matematica/polinomio.htm>
- <http://www.vitutor.com>
- <http://www.ematematicas.net>
- <http://thales.cica.es>
- <http://www.escolared.com.ar/nuevacarpeta/Factoreo.html>
- http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/marco_reales.htm
- <http://www.disfrutalasmaticas.com/algebra/ecuacion-linea-recta.html>
- <http://www.librosvivos.net>
- http://essa.uncoma.edu.ar/Ingreso_09
- www.vadenumeros.es
- sipan.inictel.gob.pe
- <http://www.fisicanet.com.ar/>
- <http://www.juntadeandalucia.es/>
- <http://bitacoraed.wordpress.com>
- <http://www.sectormatematica.cl>
- <http://www.aulafacil.com>
- <http://www.arrakis.es>
- <http://www.telefonica.net>
- <http://www.nuevaalejandria.com>
- <http://www.rena.edu.ve>
- <http://www.mailxmail.com>
- <http://www.kalipedia.com/>
- <http://www.ditutor.com/>
- <http://www.biografiasyvidas.com>
- www.telpin.com.a
- cmapspublic.ihmc.us
- <http://www.encuentro.gov.ar>
- <http://www.acienciasgalilei.com>
- <http://www.educa.madrid.org>
- <http://www.escolar.com/avanzado/matema058.htm>