第三次作业

Cantjie cantjie@stu.xjtu.edu.cn

1.考虑单天线点对点通信平坦瑞利衰落信道下采用 QPSK 调制的数字通信系统，每个符号间隔内的接收信号为 :$y = hx + w$,其中 :$h \sim \mathcal{CN}(0,1)$,$w \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$。

1.a 请给出 AWGN 信道下 QPSK 的符号错误概率。通过计算机仿真给出 AWGN 信道下 QPSK 的符号错误概率曲线，横轴为E_b/N_0；

$$P_e = 2Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right),$$

where $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$, $d_{min} = 2\sqrt{E} = 2\sqrt{E_b}$ and $Q(\cdot)$ is the Gaussian Q function. Thus, we have

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

符号错误概率曲线见 Fig.1

其中 MC -蒙特卡洛仿真结果

Theory-理论值曲线

1.b 通过计算机仿真给出该系统的符号错误概率曲线，横轴为E_b/N_0；对比平坦瑞利衰落和 AWGN 信道下的 QPSK 符号错误概率曲线。

衰落条件下对应图例中第三、第四条曲线，相比 AWGN 信道，由于信道有衰落存在，因此性能下降十分严重。

理论分析过程

$$\begin{aligned} P_{e|h} &= 2Q\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right) - Q^2\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right) \\ &< 2Q\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right) \end{aligned}$$

where $SNR = E_b/N_0$. Let $x = |h|^2$, so that $X \sim \exp(1)$, meaning PDF of X: $f_X(x) = e^{-x}, x \geq 0$.

$$\begin{aligned} P_e &= \int P_{e|h} f_X(x) dx \\ &< \int_0^{\infty} 2Q\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right) e^{-x} dx \\ &= 1 - \sqrt{\frac{SNR}{1+SNR}} \end{aligned}$$

when $SNR \to \infty$, $P_e \to \frac{1}{2SNR}$.

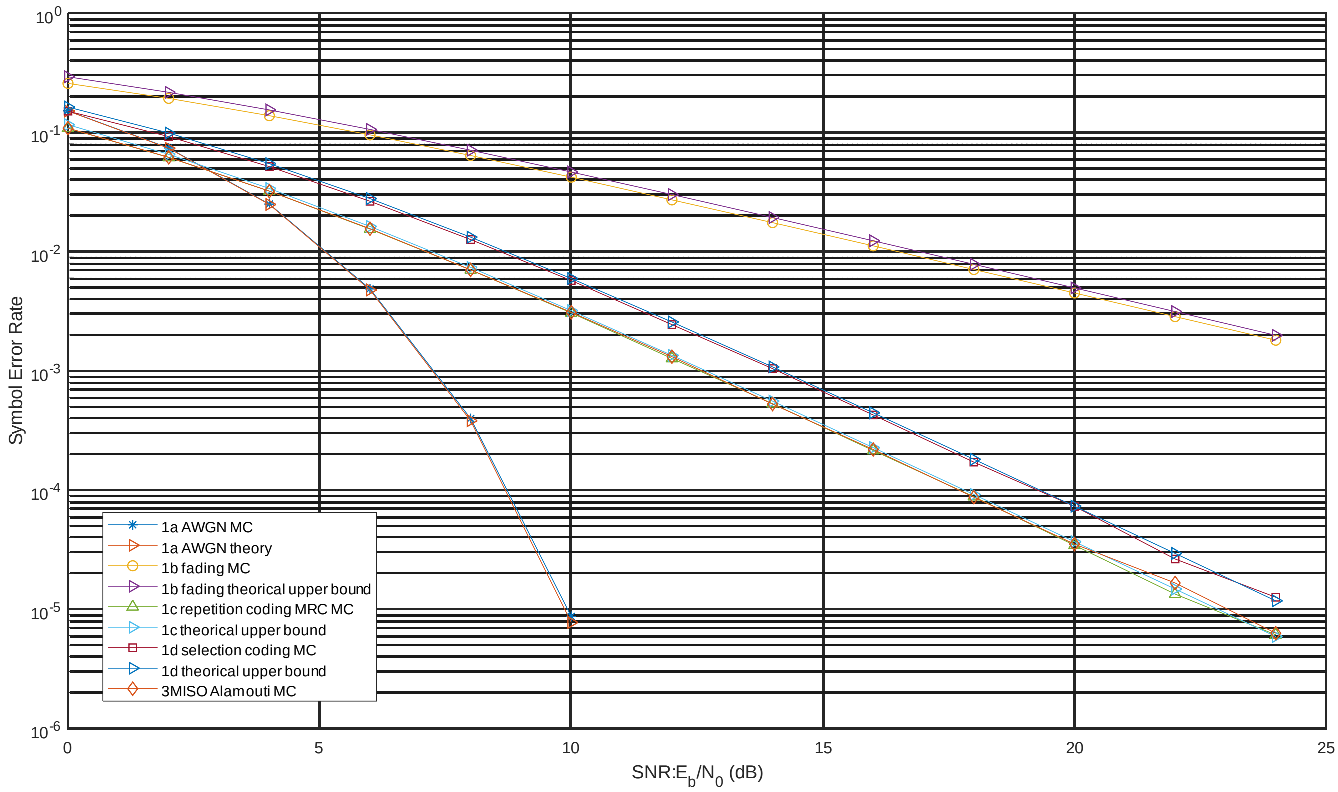

Fig.1 SERs

1.c 假设系统采用重复编码方案获取时间分集，分集支路为 2，接收机采用最大比合并算法。通过计算机仿真给出此时系统符号错误概率曲线。

可以看到在 SNR 较大的地方，1c 对应的曲线的斜率是 1b 的两倍。说明了分集增益为 2.

1.d 包含 L 条分集支路的重复编码的最优相干接收机为最大比合并器，出于实现的原因，实际中也有可能采用更为简单的接收机结构，其中比较典型的一种就是选择合并器（selection combiner），它仅根据增益最强的支路上的接收信号进行检测，并忽略其他信号。在接收机采用选择合并器的情况下重新完成(b)中的仿真，并比较选择合并与最大比合并之间的性能差异。

可以看到在 SNR 较大的地方，1d 对应的曲线的斜率是 1b 的两倍。说明了分集增益为 2. 同时可以看到 1d 曲线在 1c 曲线下方，说明了选择合并相较于 MRC 有大约 1.5dB 的损失。

1.e 尝试从理论上证明以上最大比合并器和选择合并器的分集阶数。

In the case where there are $L=2$ branches, first we analyze MRC as follows. The probability of error is given by

$$P_{e|\boldsymbol{h}} = Q\left(\sqrt{2\|\boldsymbol{h}\|^2 SNR}\right).$$

Let $x=2\|\boldsymbol{h}\|^2=2|h_1|^2+2|h_2|^2$, thus $X\sim\chi^2(4)$, which means we have PDF of x

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{4\Gamma(2)} x e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}, x>0 \end{aligned}$$

As $P_e=\int P_{e|\boldsymbol{h}} f_X(x)dx$, we get

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^\infty Q(\sqrt{xSNR})\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}dx \\ &= \int_0^\infty Q\left(\sqrt{xSNR}\right)\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[xe^{-\frac{x}{2}}Q\left(\sqrt{xSNR}\right)\ \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dxQ\left(\sqrt{xSNR}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dxQ\left(\sqrt{xSNR}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}Q\left(\sqrt{xSNR}\right)dx + \int_0^\infty xe^{-\frac{x}{2}}dQ\left(\sqrt{xSNR}\right)\right]. \end{aligned}$$

We calculate the first term of the above formula:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} Q\left(\sqrt{xSNR}\right) dx$$
$$=-2\left[e^{-\frac{x}{2}} Q\left(\sqrt{xSNR}\right) \quad |_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} dQ\left(\sqrt{xSNR}\right)\right].$$

As $dQ\left(\sqrt{xSNR}\right) = -\frac{SNR}{2\sqrt{2\pi xSNR}} e^{-\frac{SNR}{2}x} dx$, we derive

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} Q\left(\sqrt{xSNR}\right) dx = 1 - \frac{\sqrt{SNR}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\left(-\frac{1+SNR}{2}\right)x} dx.$$
$$= 1 - \left(\frac{1+SNR}{2}\right)^{-1} \sqrt{\frac{SNR}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{SNR}{1+SNR}}$$
$$= 1 - \left(1 + \frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

And the second term of P_e being

$$\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{2}} dQ\left(\sqrt{xSNR}\right) = -\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\frac{1+SNR}{2}} dx$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{SNR}}{\sqrt{SNR+1}^3}$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{SNR} \left(1 + \frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Hence we present P_e by

$$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{SNR} \left(1 + \frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

By using $lim_{x \to 0} (1+x)^b \approx 1 + bx$, we get approximation of P_e when $SNR \to \infty$

$$P_e \approx \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2SNR}\right) - \frac{1}{2} \frac{1}{SNR} \left(1 - \frac{3}{2SNR}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{8} \frac{1}{SNR^2}$$

indicating the diversity gain being 2.

As for the selection combiner,

令 $X_i = |h_i|^2$, i.i.d

则 $X_i \sim exp(1)$

即 $f_X(x) = e^{-x}, x \geq 0$

令 $Y = \max\limits_i X_i$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$
$$= P\{X_1 \le y\} P\{X_2 \le y\}$$
$$= \int_0^y e^{-x}dx \int_0^y e^{-x}dx$$
$$= \left(\int_0^y e^{-x}dx\right)^2$$
$$= \left(-e^{-x}\Big|_0^y\right)^2$$
$$= (1-e^{-y})^2 \quad , y \ge 0$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$
$$= 2(1-e^{-y}) \cdot e^{-y}$$
$$= 2e^{-y} - 2e^{-2y}, \ y \ge 0$$

$$P_{e|h} = Q\left(\sqrt{2\ SNR \cdot \max(x_i)}\right)$$
$$= Q\left(\sqrt{2SNR \cdot y}\right)$$

$$P_e = \int_0^\infty Q(\sqrt{2SNRy}) \cdot f_Y(y)dy$$
$$= 2\int_0^\infty Q(\sqrt{2SNRy}) \cdot e^{-y}dy - 2\int_0^\infty Q(\sqrt{2SNRy})e^{-2y}dy$$
$$= -2\int_0^\infty Q(\sqrt{2SNRy})de^{-y} + \int_0^\infty Q(\sqrt{2SNRy})de^{-2y}$$
$$= -2\left[Q(\sqrt{2SNRy})e^{-y}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-y}dQ(\sqrt{2SNRy})\right]$$
$$+ \left[Q(\sqrt{2SNRy})e^{-2y}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-2y}dQ(\sqrt{2SNRy})\right]$$

$$= -2\times\left[0-\frac{1}{2} - \int_0^\infty e^{-y}dQ(\sqrt{\ })\right]$$
$$+\left[0-\frac{1}{2} - \int_0^\infty e^{-2y}dQ(\sqrt{\ })\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty e^{-y}dQ(\sqrt{\ }) - \int_0^\infty e^{-2y}dQ(\sqrt{\ })$$

$$\int_0^\infty e^{-y}dQ(\sqrt{\ }) = \int_0^\infty e^{-y}(-1)\cdot\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{\pi y}}e^{-SNRy}dy$$
$$= -\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-(1+SNR)y}dy$$
$$= -\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{1+SNR}}{1+SNR} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{SNR}}{\sqrt{1+SNR}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2y}\, dQ(\sqrt{\ }) = \int_0^\infty e^{-2y}\cdot(-1)\cdot\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y}}e^{-SNRy}dy$$

$$= -\frac{\sqrt{SNR}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-(SNR+2)y}dy$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{SNR}}{\sqrt{2+SNR}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2} - \left(1+\frac{1}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{SNR}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

由 $x \to 0$ 时 $(1+x)^b \approx 1 + bx + \frac{b(b-1)}{2}\cdot x^2$

得. $P_e = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{SNR} + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\frac{1}{SNR^2}\right) + \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{1}{SNR} + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{4}{SNR^2}\right)$

$$= \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{SNR^2}$$

$$= \frac{3}{8}\frac{1}{SNR^2}$$

上述分析中少了个系数 2，即

$$P_{e,QPSK} \approx 2Q\left(\sqrt{2|h_{equ}|^2 SNR}\right)$$

因此可得采用 MRC 时

$$P_e \approx 1 - \sqrt{\frac{SNR}{1+SNR}} - \frac{1}{2SNR}\sqrt{\left(\frac{SNR}{1+SNR}\right)^3}$$
$$\to \frac{3}{4SNR^2}(SNR \to \infty)$$

采用选择合并时

$$P_e \approx 1 - 2\sqrt{\left(\frac{a}{1+a}\right)} + \sqrt{\frac{a}{a+2}}$$
$$\to \frac{3}{4SNR^2}(SNR \to \infty)$$

我感觉我哪里解错了，感觉$P_e^{selection}$和P_e^{MRC}中的常数因子应该不一样。但若不考虑$SNR \to \infty$时采用的$(1+x)^b \to 1 + bx + \frac{b(b-1)}{2}x^2$引入的近似，理论曲线和仿真曲线还是很契合的

2.若想在瑞利衰落信道中获得 L 阶分集增益 ,请问有哪些办法？分别利用了什么资源？请分别举例说明。

a）重复编码，重复次数 L，或交织编码，块长度 L。利用了时间资源。

b）使用 L 个频率发送同样的内容。利用了频率资源。

c）使用 L 个天线接收并用 MRC 或选择合并。利用了接收端空间资源。

d）发射端多天线时的空时编码。比如 OSTBC 码，即双天线时的 Alamouti 码。利用了发射端的空间资源。

考虑 2 发 1 收和 1 发 2 收的点对点无线通信系统，接收机有 CSI 而发射机没有。分别为两个系统设计能获得分集的传输方案，并比较二者的误码率性能。请描述并分析仿真结果。

考虑 2 发 1 收，采用 Alamouti 空时编码方案，分析可得该方案的增益和 1 发 2 收时采用 MRC 方案的增益一样。

考虑 1 发 2 收，采用最大比合并，可获得增益为 2。

这两种利用了天线资源，相比重复编码，获得的增益相同，但是没有速率损失，2 发 1 收方案中空时编码也引入了一定延迟，但仅有一个码元的延迟，因此可以忽略不计，1 发 2 收方案没有引入延迟。

以上仿真条件即环境：

SNR 范围：0~10dB（AWGN，步长 2），0~25dB（其他，步长 2）;

给定 SNR 下信道实现次数（发送符号数）:$10^7 \times L$（L=1 或 2）;

仿真软件 matlab2016b 学生注册版；