快速傅里叶变换与信号频谱分析

实验报告

班级

姓名

学号

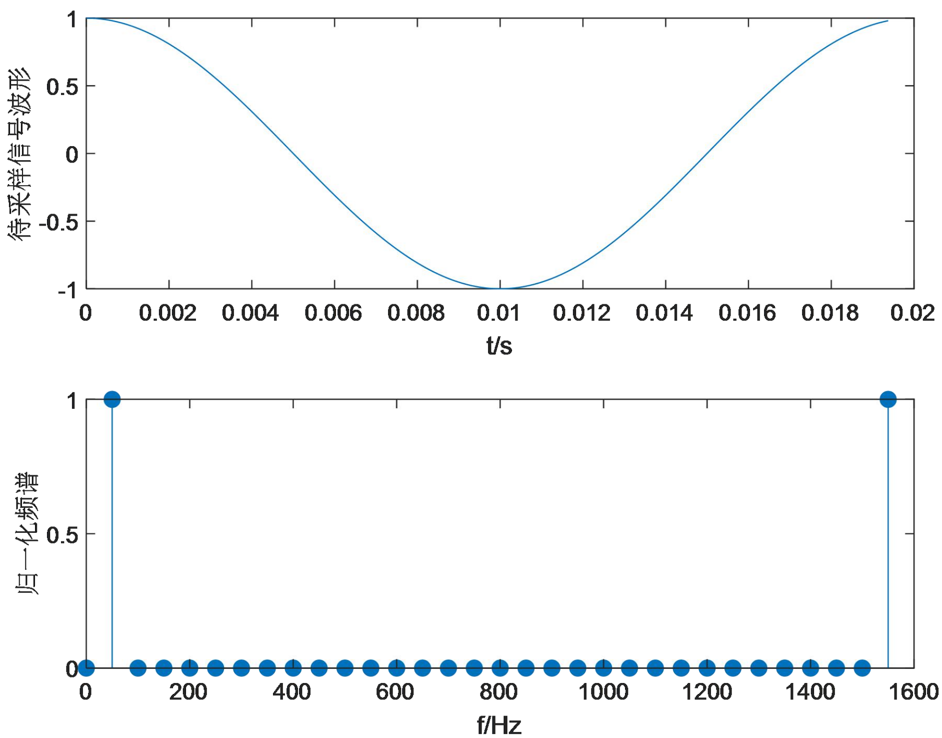
一． 实验目的

1. 在理论学习的基础上，通过本实验加深对离散傅里叶变换的理解。
2. 熟悉并掌握按时间抽取编写快速傅里叶变换（FFT）算法的程序。
3. 了解应用 FFT 进行信号频谱分析过程中可能出现的问题，例如频谱混淆、泄漏、栅栏效应等，以便在实际中正确使用 FFT 算法进行信号处理。

二． 实验内容

在 MATLAB 中用 FFT 算法对信号进行频谱分析的程序，其中抽取方式为按时间抽取。对于七组不同参数下的采样结果分别绘制原信号的时域波形、采样信号的频谱图，并针对每一组采样结果进行分析，结果如下所示。

①信号频率 F＝50Hz，采样点数 N=32，采样间隔 T=0.000625s

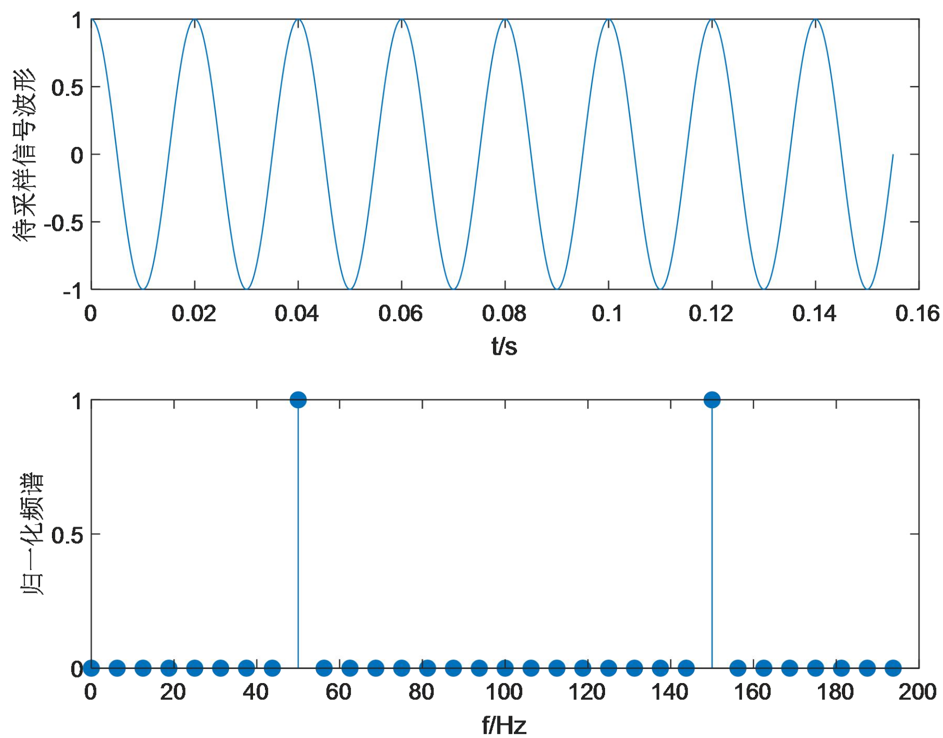


设采样点数为N，采样间隔为T，则采样序列在时域上的范围为$N*T$。由于信号周期为T_0，则一次采样中对时域序列所采到的周期数为

$$m = \frac{N*T}{T_0} = N*T*F \tag{1}$$

由上式计算得，在本次采样中，采样周期为 1，满足整周期采样，故没有出现频谱泄漏。另外，采样频率为 1600Hz，满足奈奎斯特率，故没有频谱混叠，采样后信号的频谱只出现在 50Hz 处。

②信号频率 F＝50Hz，采样点数 N=32，采样间隔 T=0.005s



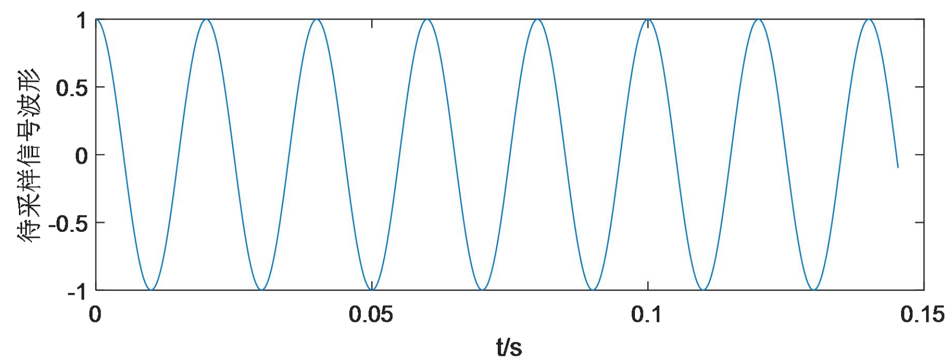
与①中情况类似，本次采样对原始信号采了 8 个周期，仍为整周期采样，故幅频特性曲线中仍只能看到 50Hz 处的两条谱线（由对称性得到），其他频点处均为零。

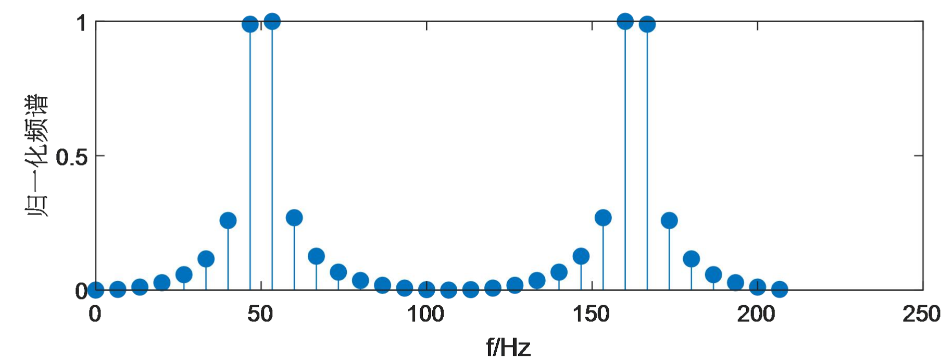
另外，由奈奎斯特定理

$$F_s > 2*F \tag{2}$$

当待采样信号为带限于 F 的信号，且采样频率大于 2*F 时，频谱不发生混叠，信号可以不失真恢复。由(2)式，本次采样中采样频率为 200Hz，满足奈奎斯特定理。

③信号频率 F＝50Hz，采样点数 N=32，采样间隔 T=0.0046875s





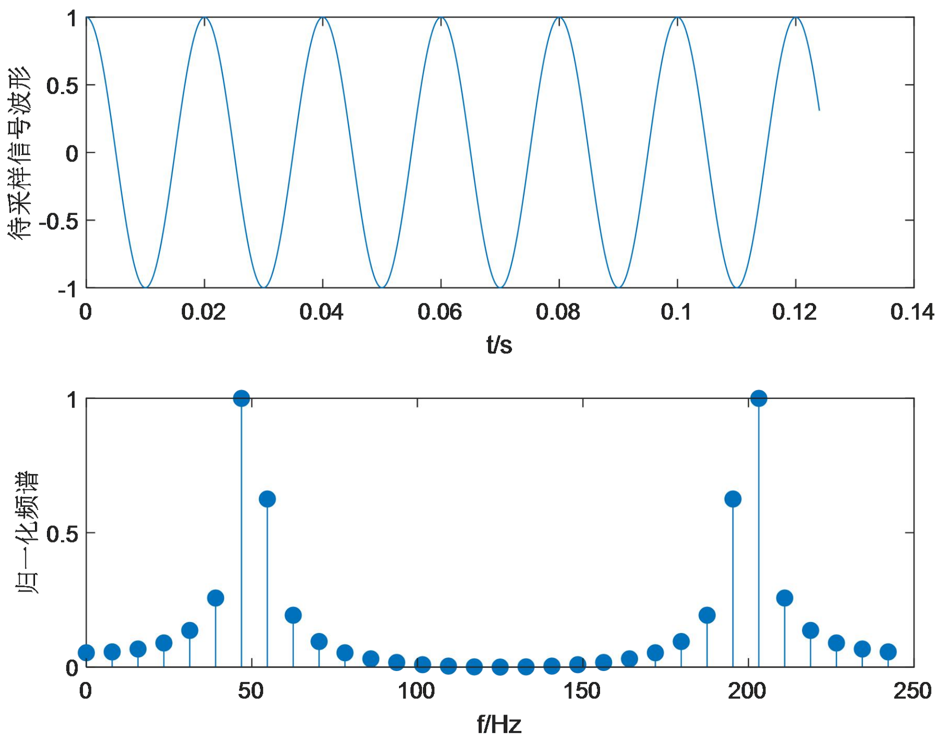
计算可知，本次采样频率为 213.3Hz，满足奈奎斯特定理。对原始信号采了 7.5 个周期，不满足整周期采样，故出现了频谱泄漏。

频谱泄漏是 FFT 不满足整周期采样是出现的问题。

有限长的时域信号可以看作一个无限长原始信号与矩形窗的乘积。矩形窗的傅里叶变换为一个 sinc 函数，其主瓣宽度为 $2/NT_S = 2*F_S/N$，旁瓣宽度为 $1/NT_S = F_S/N$。由时域相乘，频域相卷得，sinc 函数与原始信号的傅里叶变换卷积后，sinc 将搬移原始信号的频率为中心频率。卷积完成后，再以 $\mathrm{k}*2\pi/N$ 对卷积谱结果进行采样。当满足周期截断时，即 $F = \mathrm{m}*F_S/N$，此时除了 sinc 的中心频率外，其它采样点均采到 sinc 的零点处，因此最终的信号将只含有 sinc 的中心频率，即原始信号的频率；当不满足 $F = \mathrm{m}*F_S/N$ 时，将采到 sinc 的非零点位置，因此最终的频域中将含有除原始频率成分外的其他频率，即发生频谱泄漏。

发生频谱泄漏时，采样后信号的频谱与原来的不同，恢复出的信号也产生失真。如，在本次采样中，产生了多余的谱线。

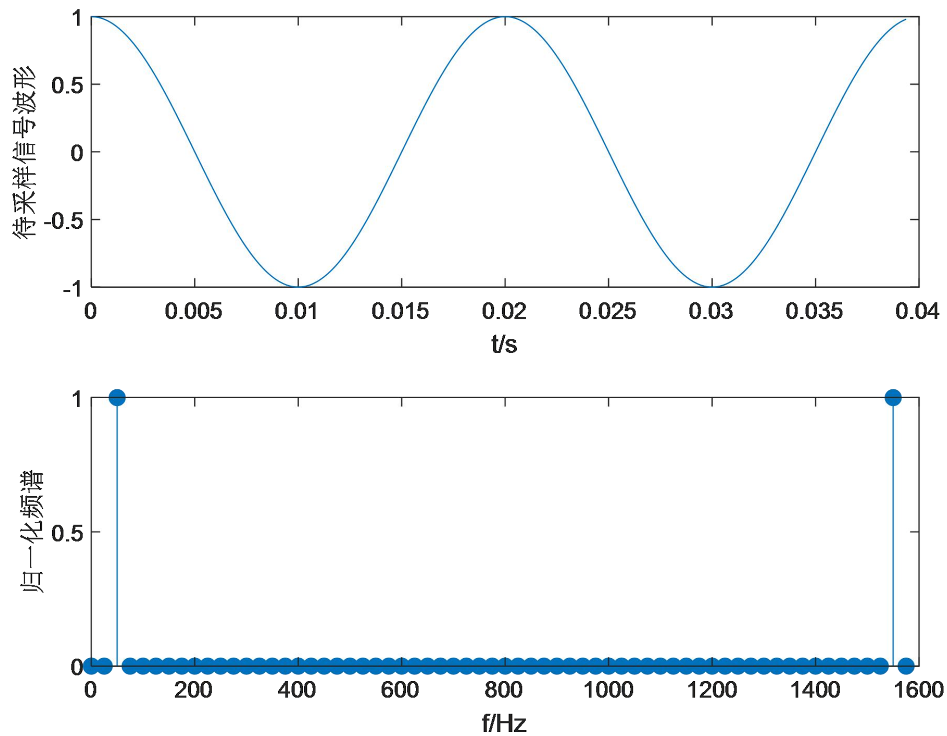
④信号频率 F＝50Hz，采样点数 N=32，采样间隔 T=0.004s



④与③中的情况类似，满足奈奎斯特采样率，但发生了频谱泄漏，分析方法同上。需注意的是，由于谱线间距为Fs/N，故在采样点数相同的情况下，减小采样频率可以使得谱线间距缩小，从而更全面地反映出采样后信号的频谱结构，减弱栅栏效应的影响;但是在减小采样频率的同时需注意采样频率应满足奈奎斯特定理，且需至少采满一个整周期。

⑤信号频率 F＝50Hz，采样点数 N=64，采样间隔 T=0.000625s

与①对比发现，本次采样其他条件均相同，只是改变了采样点数，这使得采样信号的谱线间距变密。

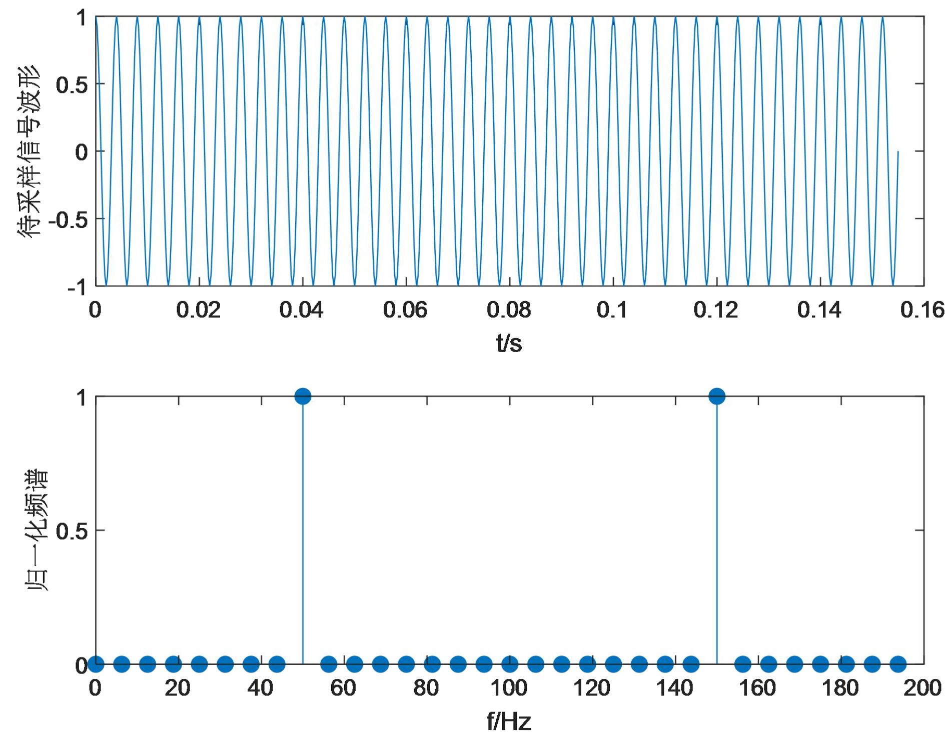


⑥信号频率 F＝250Hz，采样点数 N=32，采样间隔 T=0.005s

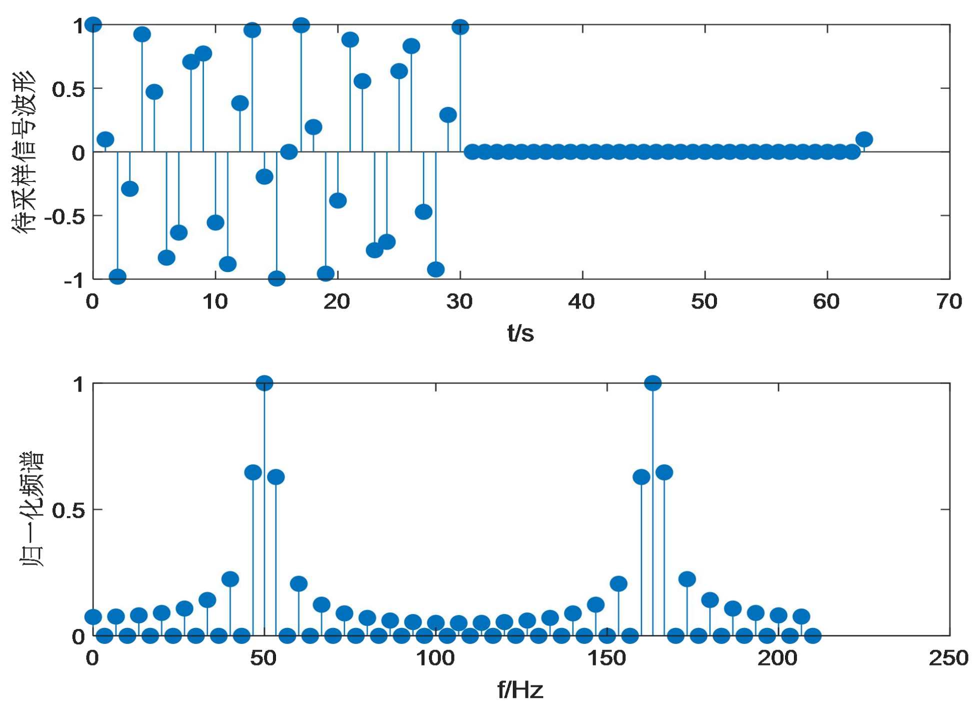
采样为整周期采样，没有发生频谱泄漏。

由于采样频率为 200Hz，小于 2*F=500Hz，故本次采样为欠采样，发生了频谱混叠。但是由于将 250Hz 的谱线以 200Hz 为间隔左右搬移之后，50Hz 处产生了对应的谱线，故频谱图中显示的仍为 50Hz 的正弦波。也即虽然欠采样产生了频谱混叠，但是对于正弦波，采出的频谱经过低通滤波器后仍能恢复出正弦信号的频谱结构。

频谱图如下所示：



⑦将③中信号后补 32 个 0，做 64 点 FFT，并与直接采样 64 个点做 FFT 的结果进行对比



与③中的图进行对比发现，本次采样中产生了许多过零点，这些过零点即为sinc函数的过零点。虽然补零后的信号产生了许多过零点，点数总数增加，但由于过零点没有反映有效的频谱信息，故补零不能提高频谱的分辨率。

三. 思考题

1) 在实验a)、b)、c)和d)中，正弦信号的初始相位对频谱图中的幅度特性是否有影响？为什么？

答：正弦信号的初始相位对频谱图中的幅度特性没有影响，因为初始相位的不同不会影响正弦信号的频谱结构，从而也不会影响采样后信号的频谱。

2) 信号补零后做FFT 是否可以提高信号频谱的分辨率？为什么？

答：信号补零后做FFT 不能提高频谱的分辨率，因为补零虽然增加了幅频特性曲线上离散的点数，但是均为过零点，不会提高频谱的分辨率。

四. MATLAB程序

1) 时域波形和频谱结构的绘制

```
function analyze(F,N,T)
Fs=1/T
i=0:N-1;
x=cos(2*pi*F*i*T);
i_show=0:T/20:(N-1)*T;
x_show=cos(2*pi*F*i_show);
subplot(2,1,1)
plot(i_show,x_show) %画出原始的时域波形
xlabel('t/s')
ylabel('待采样信号波形')
y=fft(x,N);%FFT变换
A=abs(y);
for j=1:N
    A_std(j)=(A(j)-min(A))/(max(A)-min(A));%频谱归一化
end
f=Fs/N*i;
subplot(2,1,2)
stem(f,A_std,'fill')%作出频谱图
xlabel('f/Hz')
ylabel('归一化频谱')
end
```

2）整周期采样和奈奎斯特率的判断

```
function data(F,N,T)
T_sample=N*T; %采样总时间
T_sig=1/F;%信号周期
if (T_sample>T_sig)&&rem(T_sample,T_sig)==0
    fprintf('整周期采样')
    fprintf('\n')
else
    fprintf('非整周期采样')
    fprintf('\n')
end
if 1/T>2*F
    fprintf('满足奈奎斯特率')
    fprintf('\n')
else
    fprintf('欠采样')
    fprintf('\n')
end
```

3）补零函数

```
function testg(F,N,T)
Fs=1/T
i=0:2*N-1;
x=cos(2*pi*F*i*T);
for k=N:2*N-1
    x(k)=0;
end
subplot(2,1,1)
stem(i,x,'filled')
xlabel('t/s')
ylabel('待采样信号波形')
y=fft(x,2*N);
A=abs(y);
for j=1:2*N
    A_std(j)=(A(j)-min(A))/(max(A)-min(A));
end
f=Fs/(2*N)*i;
subplot(2,1,2)
```

```
stem(f,A_std,'filled')
xlabel('f/Hz')
ylabel('归一化频谱')
End
```

4）主函数

```
clc
F=input('F= ');%人机界面实现
N=input('N= ');
T=input('T= ');
flag=input('是否补零?\n 是为 1  否为 0\n');
if flag==0
   analyze(F,N,T)
else
   testg(F,N,T)
end
data(F,N,T)
```