



西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 数字信号处理 实验报告

班级：\_\_\_\_\_XXXX\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_XXXX\_\_\_\_\_

学号：\_\_\_\_\_XXXXXXXXX\_\_\_\_\_

# 频率采样型滤波器

## 一、实验目的

1. 学习使用频率采样型结构实现 FIR 滤波器，初步熟悉 FIR 滤波器的线性相位特点。
2. 直观体会频率采样型滤波器所具有的“滤波器组”特性，即在并联结构的每条支路上可以分别得到输入信号的各次谐波。
3. 学习使用周期冲激串检测所实现滤波器的频域响应。

## 二、实验内容

1. 构造滤波器输入信号  $s(t) = \sum_{k=0}^3 s_k(t)$ ，其中  $s_k(t) = A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$ ，基波频率  $f_0 = 50\text{Hz}$ ， $A_0 = 0.5$ ， $A_1 = 1$ ， $A_2 = 0.5$ ， $A_3 = 2$ ， $\phi_0 = 0$ ， $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ ， $\phi_2 = \pi$ ， $\phi_3 = -\frac{\pi}{2}$ 。设时域信号  $s(t)$  的采样频率  $f_s = Nf_0$ ，绘制出采样时刻从 0 到  $L-1$  的采样信号波形，其中采样点数为  $L = 2N$ ，确认时域信号采样正确。

结果及分析：

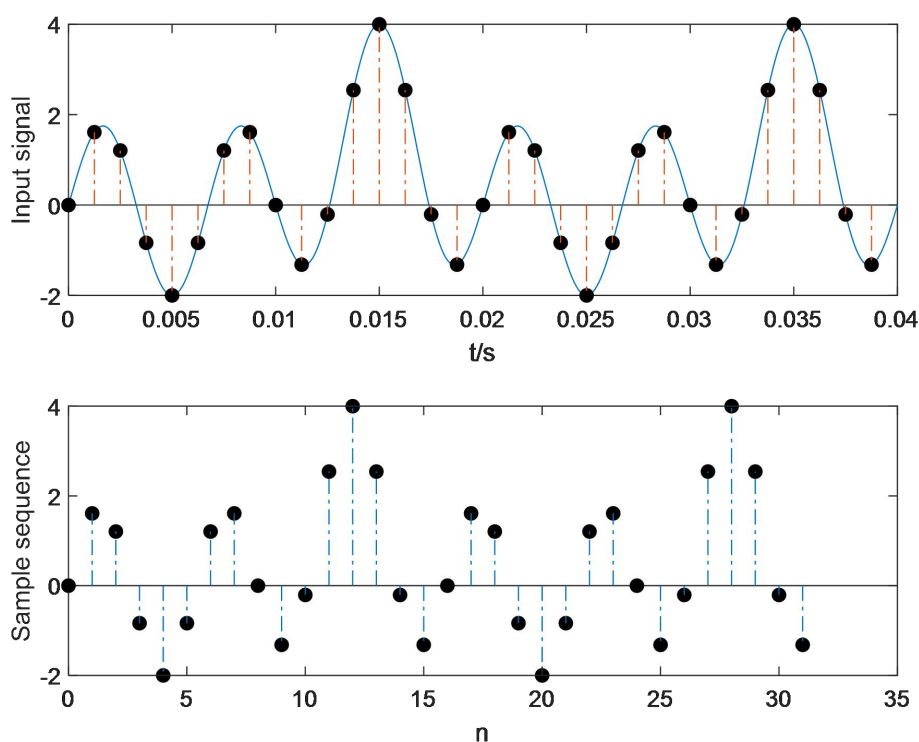


图 1 滤波器输入信号原始波形及采样波形对照图

实验结果如图 1 所示,滤波器输入信号  $s(t)$  的原始波形如图中蓝色实线所示,采样信号波形如图中实心点所示。由采样频率  $f_s = Nf_0 = 800\text{Hz}$  得,采样周期为  $T_s = 0.00125\text{s}$ ,从实验结果图中可以看出,采样信号波形与输入波形相吻合,说明时域信号采样正确。

2. 对采样信号的第二个周期 ( $n = N, N+1, \dots, L-1$ ) 进行离散傅里叶变换,画出幅频特性和相频特性图,观察并分析其特点。

结果及分析:

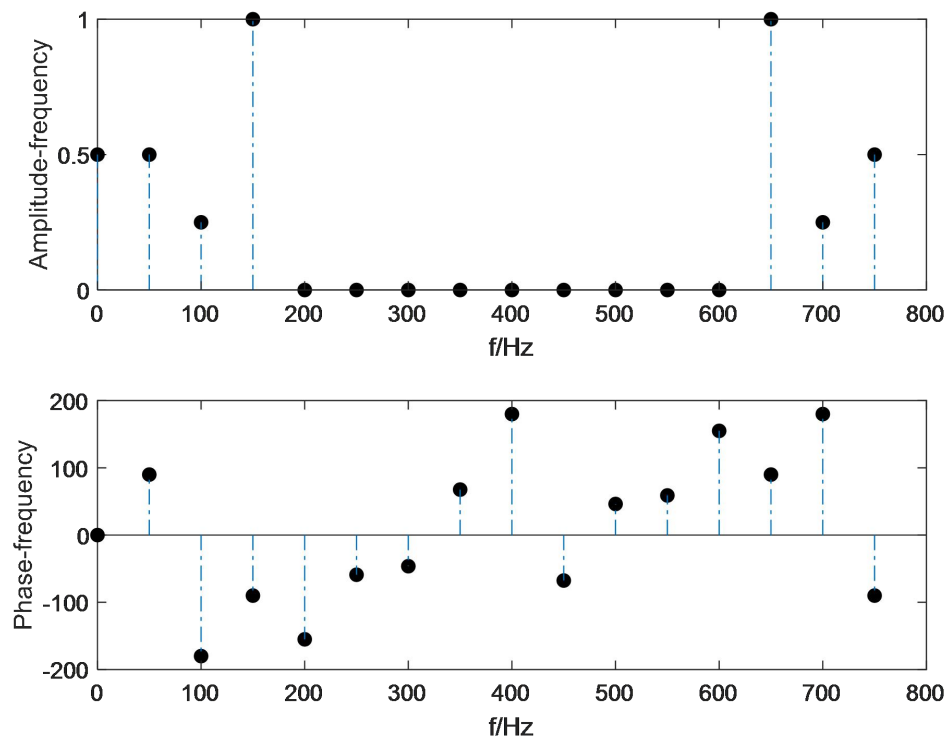


图 2 采样信号第二周期的幅频和相频特性图

如图 2 所示,上图为采样信号第二周期的幅频特性图,下图为其相频特性图。分析输入信号,可知其为一合成波,包含的频率分量分别有基波  $f_0 = 50\text{Hz}$  和一、二、三次谐波,对应的输入分别为  $s_0(t) = A_0$ ,  $s_1(t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$ ,  $s_2(t) = 0.5 \cos(2\pi * 2 f_0 t + \pi)$ ,  $s_3(t) = 2 \cos(2\pi * 3 f_0 t - \frac{\pi}{2})$ 。

在频谱图上，基波分量的幅度应为  $A_0 = 0.5$ ，对于各次谐波分量，由于在正、负频率处对称分布，故幅度依次应为  $\frac{1}{2}A_1 = 0.5$ 、 $\frac{1}{2}A_2 = 0.25$ 、 $\frac{1}{2}A_3 = 1$ ，这与实验结果图相符；而从理论上分析，基波分量和各次谐波分量的相位应分别为  $\phi_0$ 、 $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $\phi_3$ ，与实验结果相符。另外，从结果图还可以看出，在四处频点之外的其他频率分量处，相位不为 0，可能是调用 FFT 指令时计算机精度不够引起的。

3. 设  $H(0) = 1$ ， $H(1) = \exp(-\frac{j\pi(N-1)}{N})$ ， $H(2) = \exp(-\frac{j2\pi(N-1)}{N})$ ， $H(3) = H(4) = \dots = H(13) = 0$ ， $H(14) = -\exp(-\frac{j14\pi(N-1)}{N})$ ， $H(15) = -\exp(-\frac{j15\pi(N-1)}{N})$ ，计算滤波器抽头系数  $h(n)$ ， $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，画出该滤波器的频谱图，观察并分析其幅频特性和相频特性。

### 结果及分析：

计算所得的滤波器抽头系数  $h(n)$  如下，其图像如图 3 所示：

$h =$

1 至 7 列

0.0554-0.0000i	0.0064-0.0000i	-0.0548-0.0000i	-0.0774-0.0000i
-0.0286+0.0000i	0.0841+0.0000i	0.2143+0.0000i	

8 至 14 列

0.3006+0.0000i	0.3006+0.0000i	0.2143+0.0000i	0.0841+0.0000i
-0.0286+0.0000i	-0.0774-0.0000i	-0.0548-0.0000i	

15 至 16 列

0.0064-0.0000i	0.0554-0.0000i
----------------	----------------

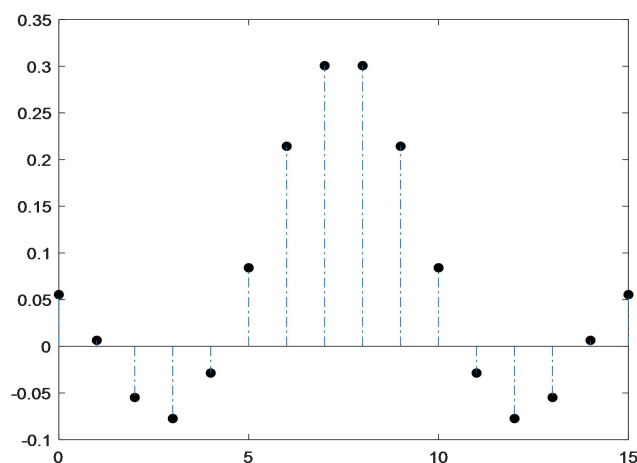


图 3 单位脉冲响应  $h(n)$

由  $H(k)$  得到的滤波器的幅频、相频特性及其内插恢复如图 4 所示。

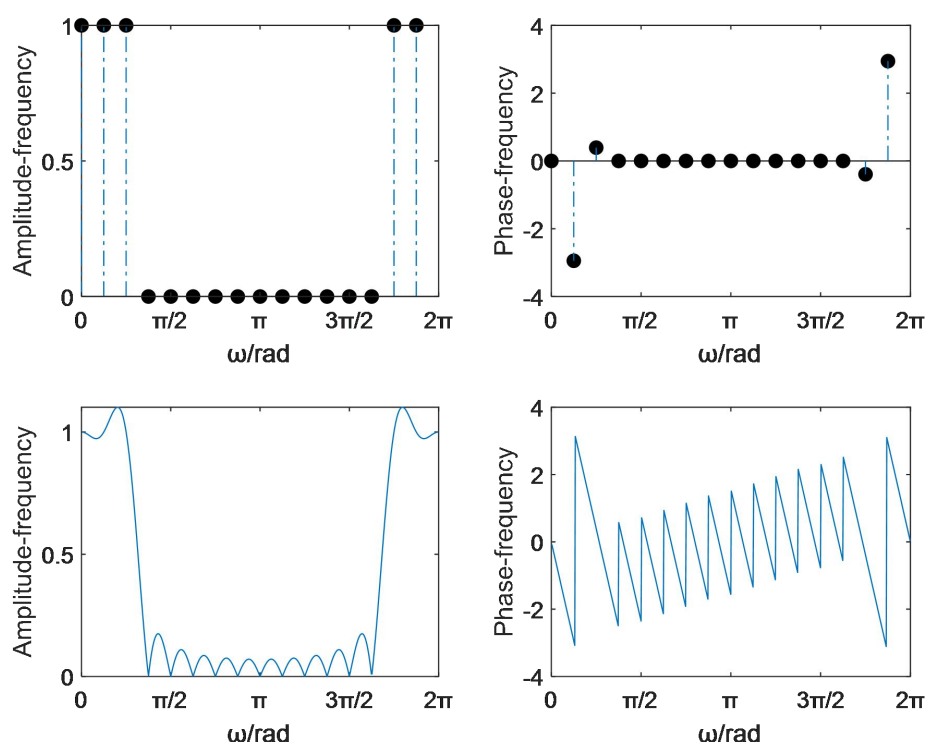


图 4 滤波器的幅频和相频特性图

由图 4 可以看出，在数字频域上两谱线间距为  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{16}$ ，其中，在  $0$ 、 $\Delta\omega$ 、 $2\Delta\omega$ 、 $14\Delta\omega$ 、 $15\Delta\omega$  处，频率响应的幅度为 1，其它点处为 0；各点处的相位也与给定值  $H(k)$  相吻合。由于  $H(k)$  可看作对  $H(z)$  在频率上的采样，利用内插公式对滤波器的  $H(z)$  进行恢复，如图 4 下方所示。分析幅频曲线，可以看出在各采样点处  $H(z)$  的幅度与  $H(k)$  相等，而其他点处的响应幅度则是由各采样值的内插函数延伸叠加所形成；分析相频曲线，可以看出内插函数具有线性相移的特点。此外，可以看出频率响应满足模偶对称，相位奇对称的特点，这与计算结果中  $h(n)$  均为实数的特性相符。

4. 编程实现图 5 所示的频率采样型滤波器结构，其中  $r = 0.999$ ， $H(k)$  取第 3 步中的值。将第 1 步生成的采样信号通过该滤波器，画出输出信号第二个周期

( $n = N, N+1, \dots, L-1$ ) 的时域波形和频谱，并与第 2 步的频谱进行对比，观察并分析二者的区别。

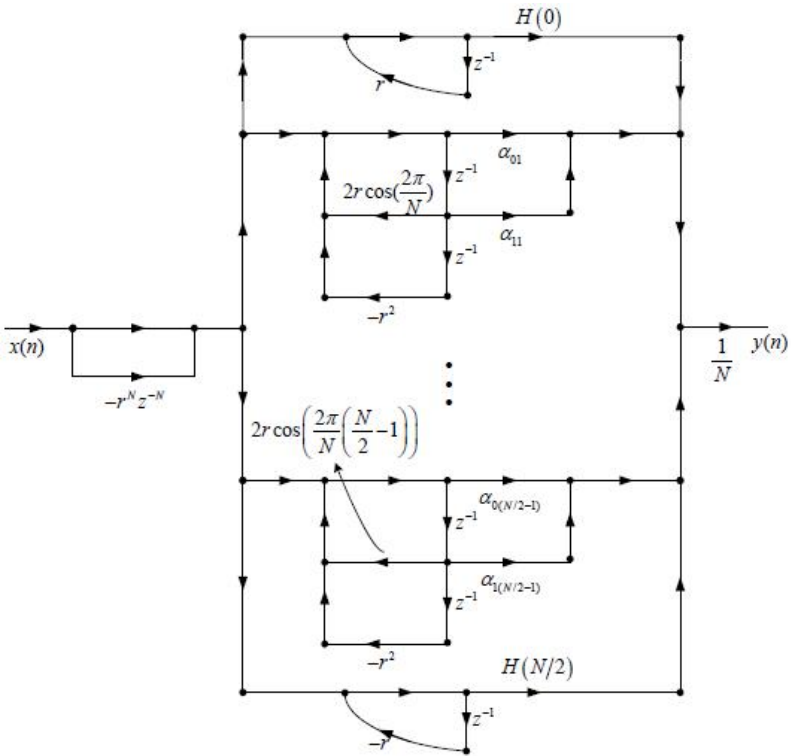


图 5 频率采样型滤波器结构

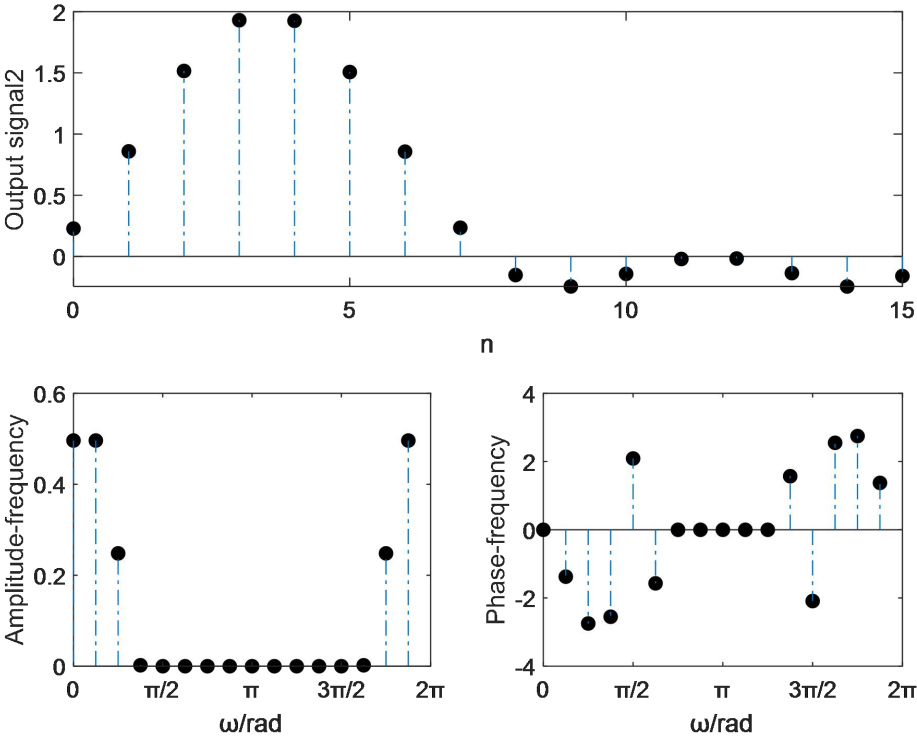


图 6 输出信号第二周期的时域波形和频谱

输出信号第二周期的时域波形和频谱如图 6 所示，设第二步中采样信号的第二个周期的频谱为  $X(z)$ ，则输出信号的频谱为  $|Y(\omega)| = |X(\omega)| \times |H(\omega)|$ ，根据此原理， $k=0、1、2、14、15$  处的谱线高度应依次为 0.5、0.5、0.25、0.25、0.5，而其余点处谱线为 0，由图 6 可以看出实验结果很好地印证了理论分析。

5. 分别画出图 1 中前 4 路谐振器的输出信号第二个周期 ( $n = N, N+1, \dots, L-1$ ) 的时域波形，观察并分析输出信号的特点。

结果及分析：

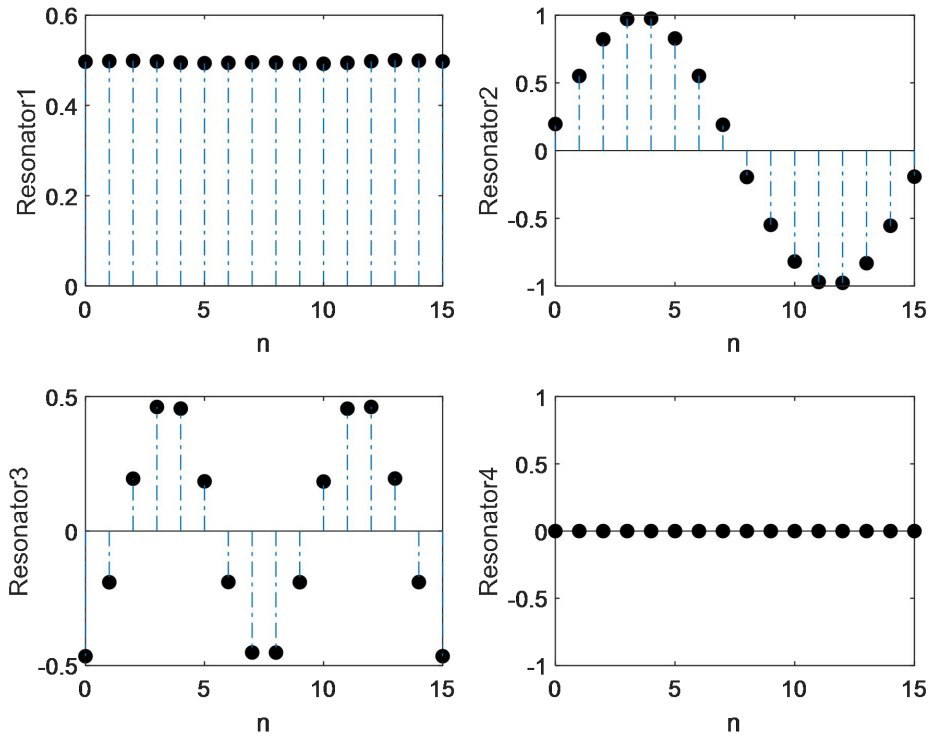


图 7 前四路谐振器输出信号（第二周期）

实验结果图如图 7 所示，内插函数  $H(z) = \frac{1-r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}}$  可以分解为一个梳状滤波器  $H_1(z) = 1-r^N z^{-N}$  和一组谐振器  $H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}}$ 。其中，梳状滤波器在单位圆上有  $N$  个等分的零点  $z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}$  ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ) 每个谐振器

$H_k(z)$  在单位圆上有一个极点  $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 。对于每一路谐振器  $H_k(z)$ ，只有极点  $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$  与该点处谐振器的零点相抵消，故该频点处的响应等于  $H(k)$ ，其他频点处的响应为零。

对各路谐振器理论输出进行分析，第一路谐振器对应零频，输出应为  $|H(0)|s_0(t) = 0.5$ ，第二路谐振器对应基波分量，输出为  $|H(1)|s_1(t) = \cos(2\pi f_0 + \frac{\pi}{2})$ ，第三路谐振器对应二次谐波，输出为  $|H(2)|s_2(t) = 0.5 \cos(2\pi * 2f_0 + \pi)$ ，第四路谐振器对应三次谐波，输出为  $|H(3)|s_3(t) = 0$ 。由图 7 可以看出各路谐振器的实际输出结果与上述分析相吻合。

6. 将输入信号换成周期为  $N$  的冲激串，画出输出信号第二个周期 ( $n = N, N+1, \dots, L-1$ ) 的幅频特性，并与第 3 步的滤波器幅频特性进行对比，观察并分析二者的关系。

结果及分析：

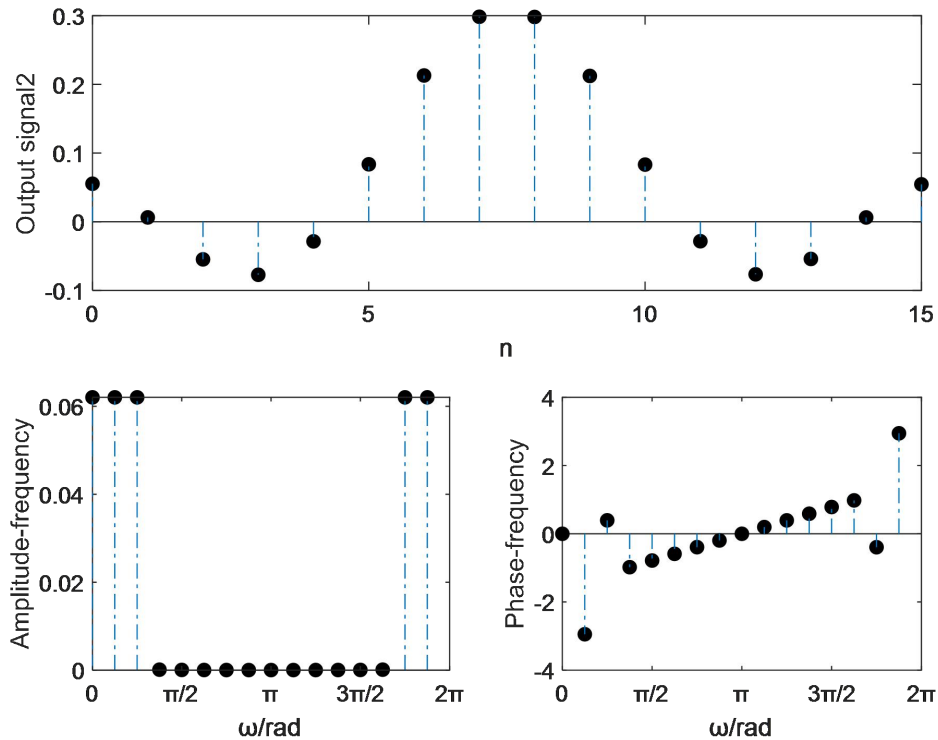


图 8 冲击串输入下输出信号的时域波形及频谱



图 8 中输出信号的第二个周期时域波形图与第三步中滤波器单位脉冲响应的时域波形图一致，这验证了输出信号的正确性。由于冲击串在各个频点处的谱线高度均相等，故输出波形的频谱与滤波器的频谱形状相同，幅度上存在由系数决定的增益。

### 三、思考题

1. 在第 2 步的幅频特性中，各次谐波的幅度与相应的时域信号幅度有什么关系？

答：各次谐波的时域表达式可写为如下形式

$$s_k(t) = A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \frac{A_k}{2} (e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)})$$

故直流分量的幅度与时域信号的幅度相同，各次谐波的幅度等于时域信号幅度的一半。

2. 实验中为什么要观察第二个周期，如果直接观察第一个周期会怎么样？

答：

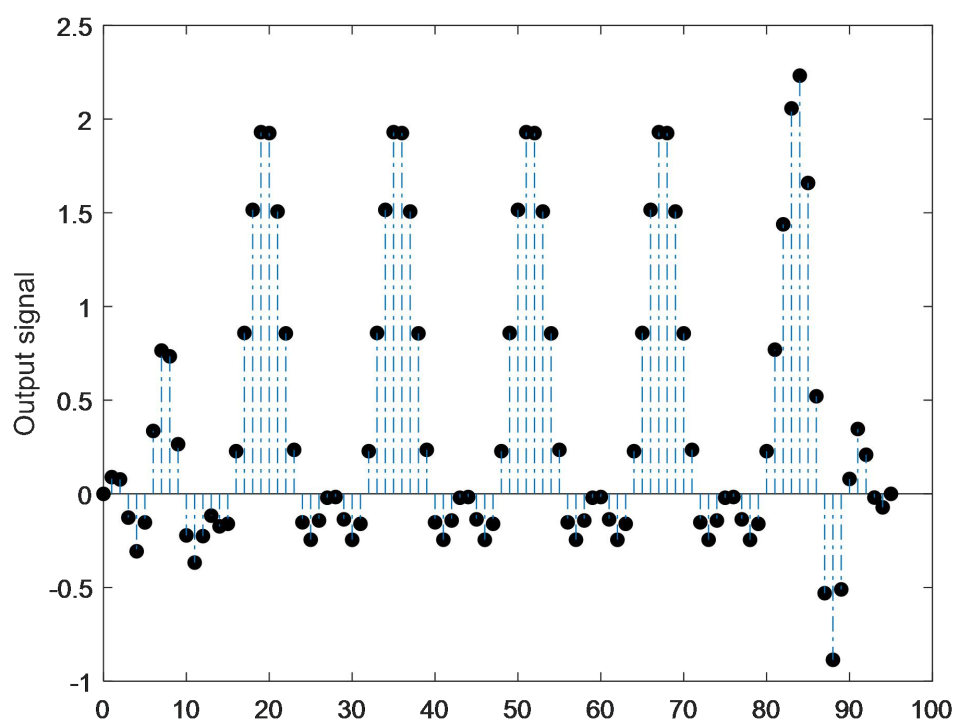


图 9  $L=5N$  时输出信号时域波形

将输入信号变为  $5N$ ，并画出输入信号通过滤波器后输出信号的时域波形如

图 9 所示,根据卷积公式  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k) \times x(k)$ , 当周期序列  $x(n)$  与  $h(n)$  进行卷积时, 由于输入信号的起始和末尾部分只与  $h(n)$  的一部分进行了卷积, 故这两部分的输出与中间完全卷积的输出波形不同。在实际应用中, 为了更好地逼近输出信号的频谱, 减缓栅栏效应, 我们希望采样序列尽可能长。然而输入信号不可能为无限长序列, 这时取输出信号的第二个周期进行观察, 得到的输出波形与无限长序列输出波形一致。

3. 如果取  $r=0.95$ , 观察会出现什么情况。

答: 输入为采样序列时,  $r=0.95$  时的输出信号第二周期的波形图如图 10 所示; 输入为冲击串时,  $r=0.95$  时的输出信号的第二个周期的波形图如图 11 所示; 将图 10、图 11 与图 6、图 8 进行对比, 发现滤波器幅频特性的幅度减小。产生上述现象的原因是响应幅度由原来单位圆上的采样点幅值  $|H(k)|$  变为修正点处的幅值  $|H_r(k)|$ 。观察图 11 的频谱, 发现三次谐波及更高次的谐波分量没有被完全滤掉, 原因是修正后虽然各滤波器的各零极点与单位圆上滤波器的零极点非常相近, 但仍存在微小误差, 故减小  $r$  后滤波器的性能受到影响。

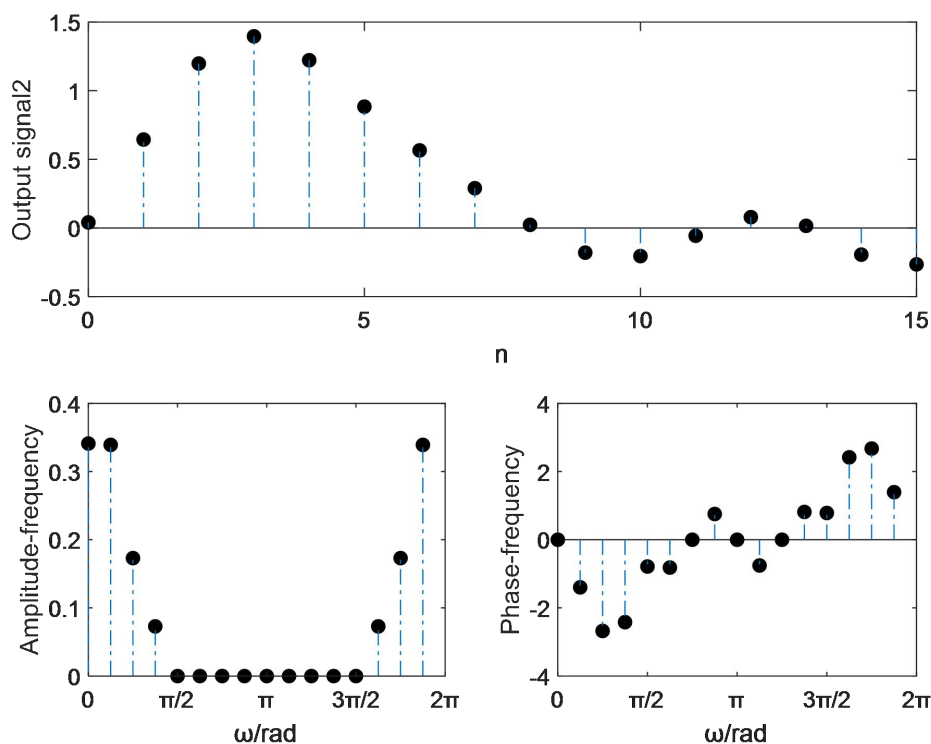


图 10 输出信号第二周期波形图 (输入为采样序列,  $r=0.95$ )

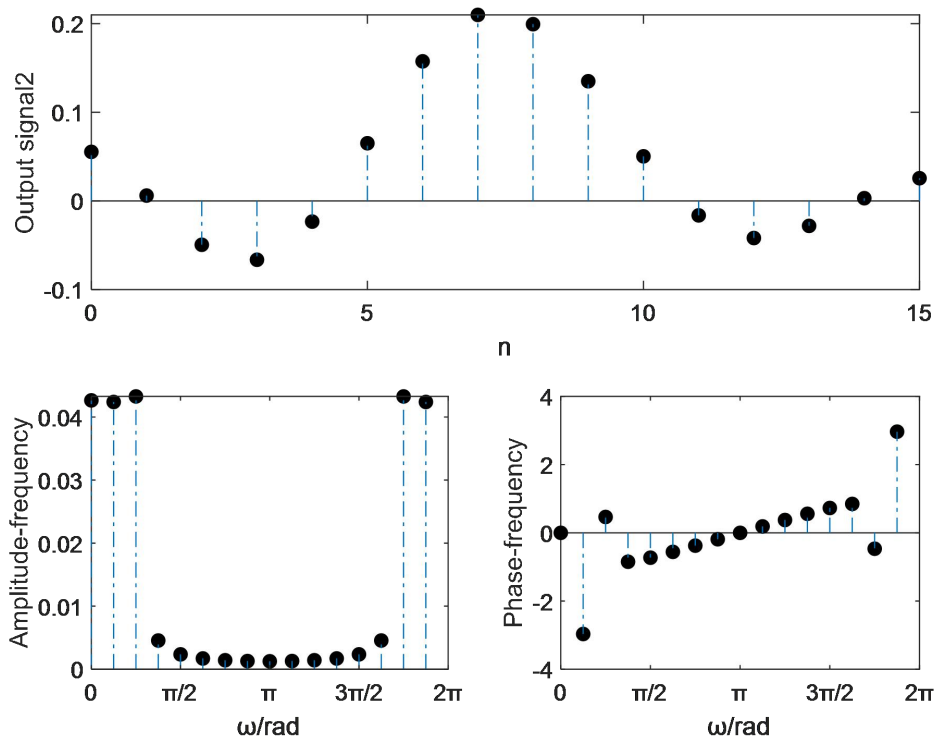


图 11 输出信号第二周期波形图（输入为冲击串， $r=0.95$ ）

在输入为采样序列的情况下，绘制出前四路谐振器输出信号第二周期的波形图如图 11 所示，谐振器输出有失真。

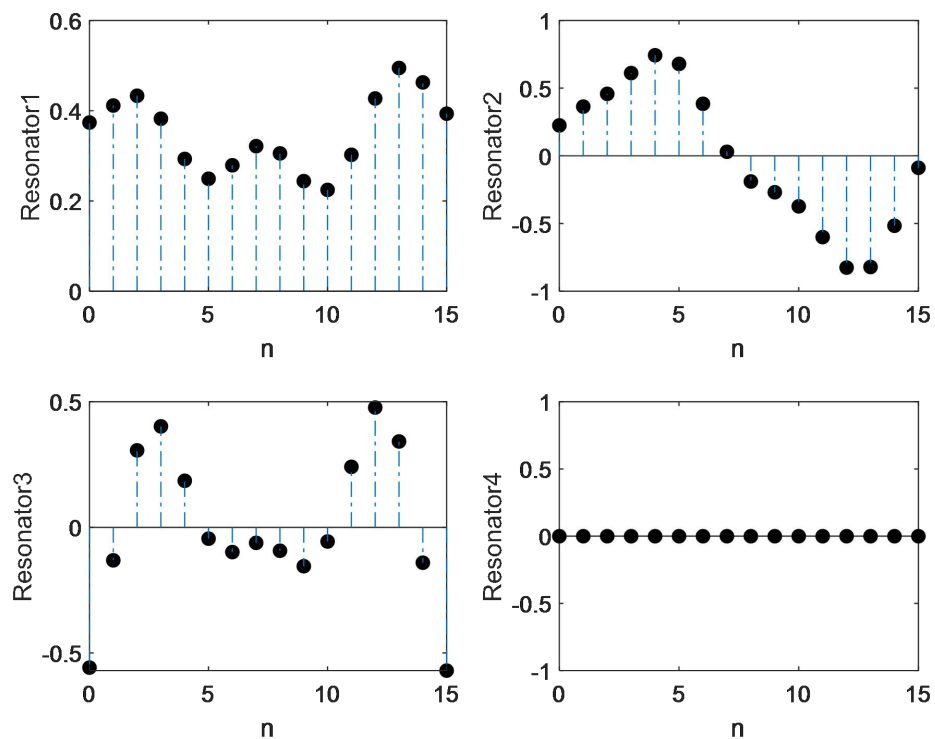


图 11 前四路谐振器输出信号第二周期（ $r=0.95$ ）

## 四、MATLAB 程序

### 1. 主函数 main.m

```
N=16;
r=0.999;
H=zeros(1,N);
H(1)=1;
H(2)=exp(-1i*pi*(N-1)/N);
H(3)=exp(-1i*2*pi*(N-1)/N);
H(4:14)=0;
H(15)=-exp(-1i*14*pi*(N-1)/N);
H(16)=-exp(-1i*15*pi*(N-1)/N);

x=siginput()
h=hn(H)
figure(4)
fir(x,H,r)
res_4(x,H,r)
in=zeros(1,2*N);
in(1)=1;
in(N+1)=1;
figure(6)
fir(in,H,r)
k=0:15;
figure(7)
stem(k,real(h),'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k',
'MarkerEdgeColor','k')
save all;
```

### 2. 输入信号的构造与采样 siginput.m

```
function s_sam=input_sig()
f0=50;
N=16;
L=2*N;
fs=N*f0;

t=0:0.0001:0.04;%画原始输入信号波形
s0=0.5*cos(t*0);
s1=cos(2*pi*50*t+0.5*pi);
s2=0.5*cos(2*pi*2*50*t+pi);
s3=2*cos(2*pi*3*50*t-0.5*pi);
s=s0+s1+s2+s3;
```

```

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,s)
hold on

t0=(0:L-1)*(1/fs)%画采样序列，并与输入波形相对照
s00=0.5*cos(t0*0);
s10=cos(2*pi*50*t0+0.5*pi);
s20=0.5*cos(2*pi*2*50*t0+pi);
s30=2*cos(2*pi*3*50*t0-0.5*pi);
s_sam=s00+s10+s20+s30;
stem(t0,s_sam,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('t/s')
ylabel('Input signal')

i=0:length(s_sam)-1;%在另一张图上单独画出采样序列波形
subplot(2,1,2)
stem(i,s_sam,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('n')
ylabel('Sample sequence')

x=s_sam(1,N+1:L);
y=fft(x,N);%FFT 变换
f=(0:N-1)*(fs/N);
a_fre=abs(y/N);%画幅频特性曲线
figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(f,a_fre,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('f/Hz')
ylabel('Amplitude-frequency')
ph_fre=rad2deg(angle(y));%相频特性
subplot(2,1,2)
stem(f,ph_fre,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('f/Hz')
ylabel('Phase-frequency')

End

```

### 3. 抽头系数计算与滤波器频谱分析 hn.m

```
function h = hn(H)
N=16;
h=zeros(1,N);
h=ifft(H);
a_fre=abs(H);
ph_fre=angle(H);
i=(0:N-1)*(2*pi/N);
figure(3)
subplot(2,2,1)
stem(i,a_fre,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','M
arkerEdgeColor','k')
set(gca,'XLim',[0 2*pi]);
set(gca,'XTick',[0:pi/2:2*pi]);
set(gca,'xtickLabel',{'0',' $\pi/2$ ',' $\pi$ ',' $3\pi/2$ ',' $2\pi$ '});

xlabel('ω/rad')
ylabel('Amplitude-frequency')
subplot(2,2,2)
stem(i,ph_fre,'LineStyle','-','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','
MarkerEdgeColor','k')
xlabel('ω/rad')
ylabel('Phase-frequency')
set(gca,'XLim',[0 2*pi]);
set(gca,'XTick',[0:pi/2:2*pi]);
set(gca,'xtickLabel',{'0',' $\pi/2$ ',' $\pi$ ',' $3\pi/2$ ',' $2\pi$ '});

theta=0:0.01:2*pi;%内插函数
z=exp(1i*theta);
H_z=zeros(1,length(theta));
W=zeros(1,N);
for i =1:length(z)
    for n=1:N
        W(n)=exp(1i*2*pi/N*(n-1));
        H_z(i)=H_z(i)+(1/N)*(1-(z(i)^(-N)))*H(n)/(1-W(n)*(z(i)^(-1)));
    end
end
a_f=abs(H_z);
subplot(2,2,3)
plot(theta,a_f)
xlabel('ω/rad')
ylabel('Amplitude-frequency')
set(gca,'XLim',[0 2*pi]);
set(gca,'XTick',[0:pi/2:2*pi]);
```

```

set(gca, 'xtickLabel', {'0', ' $\pi/2$ ', ' $\pi$ ', ' $3\pi/2$ ', ' $2\pi$ '});

p_f=angle(H_z);
subplot(2,2,4)
plot(theta,p_f)
xlabel(' $\omega/\text{rad}$ ')
ylabel('Phase-frequency')
set(gca, 'XLim', [0 2*pi]);
set(gca, 'XTick', [0:pi/2:2*pi]);
set(gca, 'xtickLabel', {'0', ' $\pi/2$ ', ' $\pi$ ', ' $3\pi/2$ ', ' $2\pi$ '});

```

#### 4. 频率采样型滤波器的构造 fir.m

```

function fir(x,H,r)
N=16;
y=CombFilter(x,N,r);
w=zeros(1,length(Resonator2(y,N,r,1,H(2))));
for i=0:N/2
    z=Resonator2(y,N,r,i,H(i+1));
    w=w+z;
end
w=w./N;
w_show=w(1,N+1:2*N);
subplot(2,2,[1,2])
k=0:length(w_show)-1;
stem(k,w_show, 'LineStyle', '-.', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor', 'k', 'MarkerEdgeColor', 'k')
xlabel('n')
ylabel('Output signal2')

f=(0:N-1)*(2*pi/N);
w_fft=fft(w_show);
a_f=abs(w_fft/N);
p_f=angle(w_fft);
subplot(2,2,3)
stem(f,a_f, 'LineStyle', '-.', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor', 'k', 'MarkerEdgeColor', 'k')
set(gca, 'XLim', [0 2*pi]);
set(gca, 'XTick', [0:pi/2:2*pi]);
set(gca, 'xtickLabel', {'0', ' $\pi/2$ ', ' $\pi$ ', ' $3\pi/2$ ', ' $2\pi$ '});
xlabel(' $\omega/\text{rad}$ ')
ylabel('Amplitude-frequency')

subplot(2,2,4)

```

```

stem(f,p_f,'LineStyle','-.','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
set(gca,'XLim',[0 2*pi]);
set(gca,'XTick',[0:pi/2:2*pi]);
set(gca,'xtickLabel',{'0',' $\pi/2$ ',' $\pi$ ',' $3\pi/2$ ',' $2\pi$ '});
xlabel('ω/rad')
ylabel('Phase-frequency')

```

## 5. 绘制前四路谐振器输出 res\_4.m

```

function res_4(x,H,r)
N=16;
y=CombFilter(x,N,r)
y0=Resonator2(y,N,r,0,H(1))./N;
y1=Resonator2(y,N,r,1,H(2))./N;
y2=Resonator2(y,N,r,2,H(3))./N;
y3=Resonator2(y,N,r,3,H(4))./N;

k=0:N-1;
figure(5)
subplot(2,2,1)
stem(k,y0(N+1:2*N),'LineStyle','-.','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('n')
ylabel('Resonator1')

subplot(2,2,2)
stem(k,y1(N+1:2*N),'LineStyle','-.','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('n')
ylabel('Resonator2')

subplot(2,2,3)
stem(k,y2(N+1:2*N),'LineStyle','-.','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('n')
ylabel('Resonator3')

subplot(2,2,4)
stem(k,y3(N+1:2*N),'LineStyle','-.','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('n')
ylabel('Resonator4')

```