



数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 9, 2020

版本：1.00

确实，时间和空间是有限的。确实，我们总会有分开的时候。但是正因为这样，我们才会努力学习，我们才会努力前进。我们的信仰是享受数学。因为“数学穿越时空”。



“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —SCIbird

目 录

1	声明	3
2	分析基础	4
2.1	实数共理、确界、不等式	4
2.2	函数	4
2.3	序列极限	6
2.4	函数极限与连续概念	8
2.5	闭区间上连续函数的性质	9
3	一元函数微分学	11
3.1	导数和微分	11
3.2	微分中值定理	12
3.3	函数的升降、极值、最值问题	13
3.4	函数的凹凸性、拐点及函数作图	13
3.5	洛必达法则与泰勒公式	13
3.6	一元函数微分学的总合应用	13
4	一元函数积分学	14
4.1	不定积分和可积函数类	14
4.2	定积分概念、可积条件与定积分性质	14
4.3	变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法	14
4.4	定积分的应用	14
4.5	广义积分	14
5	级数	15
5.1	级数敛散判别法与性质、上极限与下极限	15
5.2	函数级数	15
5.3	幂函数	15
5.4	傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛	15
6	多元函数积分学	16
6.1	欧式空间、多元函数的极限与连续	16
6.2	偏导数与微分	16
6.3	反函数与隐函数	16
6.4	切空间与极值	16
6.5	含参积分的定积分	16
6.6	含参积分的广义积分	16

7 多元函数积分学	17
7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分	17
7.2 重积分的变换	17
7.3 曲线积分与格林公式	17
7.4 曲面积分	17
7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关	17
7.6 场论	17
8 典型综合题分析	18
9 附录及一些说明事项	19

第1章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：[Github](#)(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1)¹或者邮箱²联系我。



Keep doing

扫一扫二维码，加我QQ。

图 1.1: 二维码

点击[Github](#)后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

¹1411279054

²1411279054@qq.com

第2章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$, 求证: $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$.

解 $2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

$2|b| = |a+b-(a-b)| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$.

解 $2 = |a+b-(a-b)| + 2|1-b| \leq |a+b| + |a-b| + 2|1-b| \leq 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2};$$

并解释其几何意义.

解 易知, $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a+b$ ① $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$ ②

由 ①、② 得 $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

几何意义: $\max\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较大的那个, $\min\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

解 $f(x) - f(y) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \therefore |f(x) - f(y)| \leq |\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)| = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$

5. 设 $f(x), g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$\textcircled{1} \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

$$\textcircled{2} \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

解 ① 易知, $\sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) + g(x) (\forall x \in X)$, $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$, 又 $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$,

即 $\inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) (\forall x \in X)$, $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\sup_{x \in X} \{g(x)\}$, 所以, $\inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$

② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x) = |1+x| - |1-x|$.
- (1) 求证: $f(x)$ 是奇函数;
 - (2) 求证: $|f(x)| \leq 2$.
 - (3) 求 $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\text{次}}(x)$.

解

(1) $f(x) = f(-x)$, $\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x) = |1+x| - |1-x| \leq |1+x+1-x| = 2$

(3) 易知, $f(x)$ 是一个分段函数, $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$, 下面当 $-1 \leq x \leq 1$

时, $f(x) = 2x \therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < -\frac{1}{2} \\ 4x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore$ 可得, $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

$\begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^{(n-1)}} \\ 2^{(n-1)}x & \frac{-1}{2^{(n-1)}} \leq x \leq \frac{1}{2^{(n-1)}} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上定义, $a > 0, b > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 $\therefore \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(a)}{a}, \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(b)}{b} \therefore af(a+b) \leq (a+b)f(a), bf(a+b) \leq (a+b)f(b)$, 可得 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a > 0, b > 0$ 时, 有

(1) 当 $p > 1$ 时, $(a+b)^p \geq a^p + b^p$;

(2) 当 $0 < p < 1$ 时, $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

解

(1) 令 $f(x) = x^p, \frac{f(x)}{x} = x^{p-1}, \therefore p > 1, p-1 > 0 \therefore x^{p-1}$ 单调递增, 由第二题可得 $f(a+b) \geq f(a) + f(b) \therefore (a+b)^p \geq a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$.

(1) 问这种函数有几个?

(2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y = f(x), x = f^{-1}(y) \therefore f(f(x)) \equiv x \therefore f(y) \equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y = x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若 $y = f(x) (x \in (-\infty, +\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x = b (b > 0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x = b(b > 0)$ 对称, $f(b+x) = f(b-x)$, 即 $f(b+b+x) = f(-x) = -f(x)$, $f(x+2b) = -f(x) = -f(x+2b-2b) = f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b) = f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为满射, $g: Y \rightarrow Z$. 求证: $g \circ f: X \rightarrow Z$ 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

解 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 有反函数, 说明 $g \circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g \circ f)$ 的反函数为 H , 假设 $H(a) = b$, 有 $(g \circ f)(b) = a$, 左乘 g^{-1} , 即 $f(b) = g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1} , 即 $b = (f^{-1} \circ g^{-1})(a)$. $\therefore H = f^{-1} \circ g^{-1}$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(1) 当 $a \neq 0$ 时, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

(2) 举例说明当 $a = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq 1$ 可能成立;

(3) 举例说明当 $a = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n \neq 1$ 可能成立.

解

(1) 由已知条件知: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 根据 $\varepsilon - N$ 定义知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\because n > N$, 那么 $n+1 > N$, $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 有 $n+1 > N$. $\therefore |a_{n+1} - a| < \varepsilon$, $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$. $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

(2) 例: $a = \frac{1}{2^n}$.

(3) 例: $x_n = \frac{n+1}{n}$.

2. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

解 令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 其中 $a < 1$, 那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$, 又由已知表达式得 $a = 1 - \sqrt{1 - a}$, 解得: $a = 0$. 又 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{x_n}$, 根据洛必达得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

3. 设 $c > 1$, 求序列 $\sqrt{c}, \sqrt{c\sqrt{c}}, \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}, \dots$ 的极限.

解 根据表达式可得, $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}}$, $x_{n+1} - x_n = \sqrt{c\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} = \sqrt{\sqrt{x_n}}(\sqrt{c} - x_n^{\frac{3}{4}})$. 假设: $x_n < c^{\frac{3}{2}}$. 下面用归纳法来证明:

当 $n = 1$ 时, $x_1 = \sqrt{c} < c^{\frac{3}{2}}$

当 $n = k$ 时, 假设 $x_n < c^{\frac{3}{2}}$

那么 $n = k+1$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}} < \sqrt{c \cdot c^{\frac{3}{2}}} = c^{\frac{5}{4}} < c^{\frac{3}{2}}$, $\therefore x_n < c^{\frac{3}{2}}$, 且 $x_{n+1} - x_n > 0$,

由单调有界定理可知数列 x_n 存在极限. 令 $\lim_{x_n} = a$. $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a, a = \sqrt{ca}, a = c$. $\therefore \lim_{x_n} = c$

4. 设 $A > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) (n = 1, 2, \dots)$

(1) 求证: x_n 单调下降且有界;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解

(1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \geq \sqrt{A}$, 说明 x_n 有下界.

$\because x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) - x_n = \frac{1}{2}(\frac{A}{x_n} - x_n) = \frac{1}{2} \frac{A - x_n^2}{x_n}$, 又 $\because x_n \geq \sqrt{A} \therefore x_{n+1} - x_n < 0$,

所以, x_n 单调递减且有下界.

(2) 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}$.

5. 设 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解 令 $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} (x_n > 0)$, 根据表达式有 $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1 + x_n) > 1$, 即 $x_n > x_{n+1}$, 根据单调有界定理可得 x_n 存在极限, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a > 0) \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$, 解得: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 求证:

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ 的极限存在.

解

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \therefore x_{n+1} < x_n$, 数列 x_n 是递减数列.

下证: $x_n > -2$ (数学归纳法)

$n = 1$ 时, $x_1 = -1 > -2$ 成立

假设 $n = k$ 时, $x_k > -2$

那么当 $n = k+1$ 时, $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 2\sqrt{k+1} = x_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k} >$

7. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 a_n, b_n .

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^x} \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设 $c > 0$, 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.

12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \leq a_n \leq$

$b_n(n=1,2,\cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.

13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| (n=1,2,\cdots)$, 其中 $0 < q < 1$. 求证: 序列 x_n 的极限存在.
14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \quad (\forall x, y \in (-\infty, +\infty))$$

其中 $0 < q < 1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty, +\infty)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n) (n=1,2,\cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0 = a, x_1 = b (b > a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \quad x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \quad (n=1,2,\cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (分别讨论 $A = +\infty, -\infty, \cdot$).

2. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A (> 0)$, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$$

3. 设 $0 < x_n < +\infty$, 且满足 $x_n + \frac{4}{x^2} < 3$, 求证: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.
4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上定义, $g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

6. 设 $x_n = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot 2} + \frac{1}{n \cdot 1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

8. 设 x_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x) = (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x = 0$ 处连续.

10. 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 求证:

- (1) $|f(x)| \in C[a, b]$;
- (2) $\max\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$;
- (3) $\min\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$.

11. 设 $f(x) \in C[a, b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ ($\forall x \in [a, b]$). 对 $\forall x_1 \in [a, b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满足 $c = f(c)$.

12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \right) = 2$

13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

练习题

1. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上单调. 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号.
2. 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且严格单调, 又

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程 $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3$ 有且仅有三个根.

3. 设 $f_n(x) = x^n + x$. 求证:

- (1) 对任意自然数 $n > 1$, 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根;
- (2) 若 $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 存在, 并求此值.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 求证: $\exists c \in [a, b]$, 使得对 $\forall \delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$ 上无界.
5. 设 x_n 为有界序列. 求证: x_n 以 a 为极限的充分必要条件是: x_n 的任一收敛子序列都有相同的极限值 a .
6. 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

7. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x^* , 又设使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x^*)$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.
8. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 又设对 $\forall l \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = l$ 在 $[0, +\infty)$ 上只有有限个解或无解. 求证:

- (1) 如果 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 则极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在;
- (2) 如果 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无界, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

9. 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 存在 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 求证: $f(f(x))$ 至少在两个点处取到最小值.
10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, $x_0 \in [a, b]$. 如果对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 那么称 $f(x)$ 在点 x_0 处上半函数. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点都上半连续, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的一个半连续函数. 求证: $[a, b]$ 上的上半连续函数一定有上界.
11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:
(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (2) $f(x) = \sin x$
12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:
(1) $f(x) = x \sin x$; (2) $f(x) = \sin x^2$.
13. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 对 $\forall h \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(h+n) = A$ (有限数). 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = A$.
14. 设存在常数 $L > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内一致连续. 求证: $f(x) + g(x)$ 与 $f(x) \cdot g(x)$ 都在 (a, b) 内一致连续.
16. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续, 值域含于区间 (a, d) , 又 $g(x)$ 在 (c, d) 内一致连续. 求证: $g(f(x))$ 在 (a, b) 内一致连续.
17. 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且是周期为 T 的周期函数. 求证: $f(x)$ 在实轴上一致连续.

第3章 一元函数微分学

3.1 导数和微分

练习题

1. 用定义求 $f'(0)$, 这里 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
2. 设 $f'(x_0)$ 存在. 求证: 对数导数也存在并等于 $f'(x_0)$, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, α_n, β_n 为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 + \beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = f'(x_0)$$

4. 设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的多项式, M 是它的最大实数. 求证: $P'(M) \geq 0$.
5. 给定曲线 $y = x^2 + 5x + 4$.

- (1) 求曲线在点 $(0, 4)$ 处的切线.
- (2) 确定 b 使得直线 $y = 3x + b$ 为曲线的切线;
- (3) 求过点 $(0, 3)$ 的曲线的切线.

6. 确定常数 a, b 使得函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ 有连续导数.

7. 设曲线由隐式方程 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} (a > 0)$ 给出.

- (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
- (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.

8. 已知曳物线的参数方程为

$$x = a[\ln(\tan \frac{t}{2}) + \cot t], \quad y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi).$$

求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与 x 轴交点之间的切线段为一定长.

9. 试确定 λ , 使得曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与 $xy = \lambda$ 相切, 并求出切线方程.
10. 试确定 m , 使直线 $y = mx$ 为曲线 $y = \ln x$ 的切线.
11. 设 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. (1) 求证: $(1-x^2)y' - xy = 1$; (2) 求 $y^{(n)}(0)$.
12. 求 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数.
13. 设 $y = x^{(n-1)} \ln x$. 求证: $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$.
14. 求证: 双曲线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 的向径与切线的夹角等于极角的两倍加 $\frac{\pi}{2}$
15. 设曲线既可用参数式 $x = x(t), y = y(t)$ 表示, 又可用极坐标 $r = r(\theta)$ 表示. 求

证: $\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$.

3.2 微分中值定理

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内除仅有的一个点都可导. 求证: $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$ 及 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(b) - f(a) = (b - a)[\theta f'(c_1) + (1 - \theta)f'(c_2)]$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0.$$

求证: 对 $\forall k \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (0, 3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\eta).$$

5. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f''(x_0) \neq 0$. 求证:

(1) 如果 $f'(x_0) = 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 0$;

(2) 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a, b)$, 使得 $f(c) - f(a) = (c - a)f'(c)$.

注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件 $f'(a) = f'(b) = 0$ 中的 “=0” 去掉了.

10. 设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上可导, 且存在有限极限 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x)$. 求证: $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

3.3 函数的升降、极值、最值问题

3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

3.5 洛必达法则与泰勒公式

3.6 一元函数微分学的总合应用



第 4 章 一元函数积分学

4.1 不定积分和可积函数类

4.2 定积分概念、可积条件与定积分性质

4.3 变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法

4.4 定积分的应用

4.5 广义积分



第 5 章 级数

5.1 级数敛散判别法与性质、上极限与下极限

5.2 函数级数

5.3 幂函数

5.4 傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛



第 6 章 多元函数积分学

6.1 欧式空间、多元函数的极限与连续

6.2 偏导数与微分

6.3 反函数与隐函数

6.4 切空间与极值

6.5 含参积分的定积分

6.6 含参积分的广义积分



第 7 章 多元函数积分学

7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分

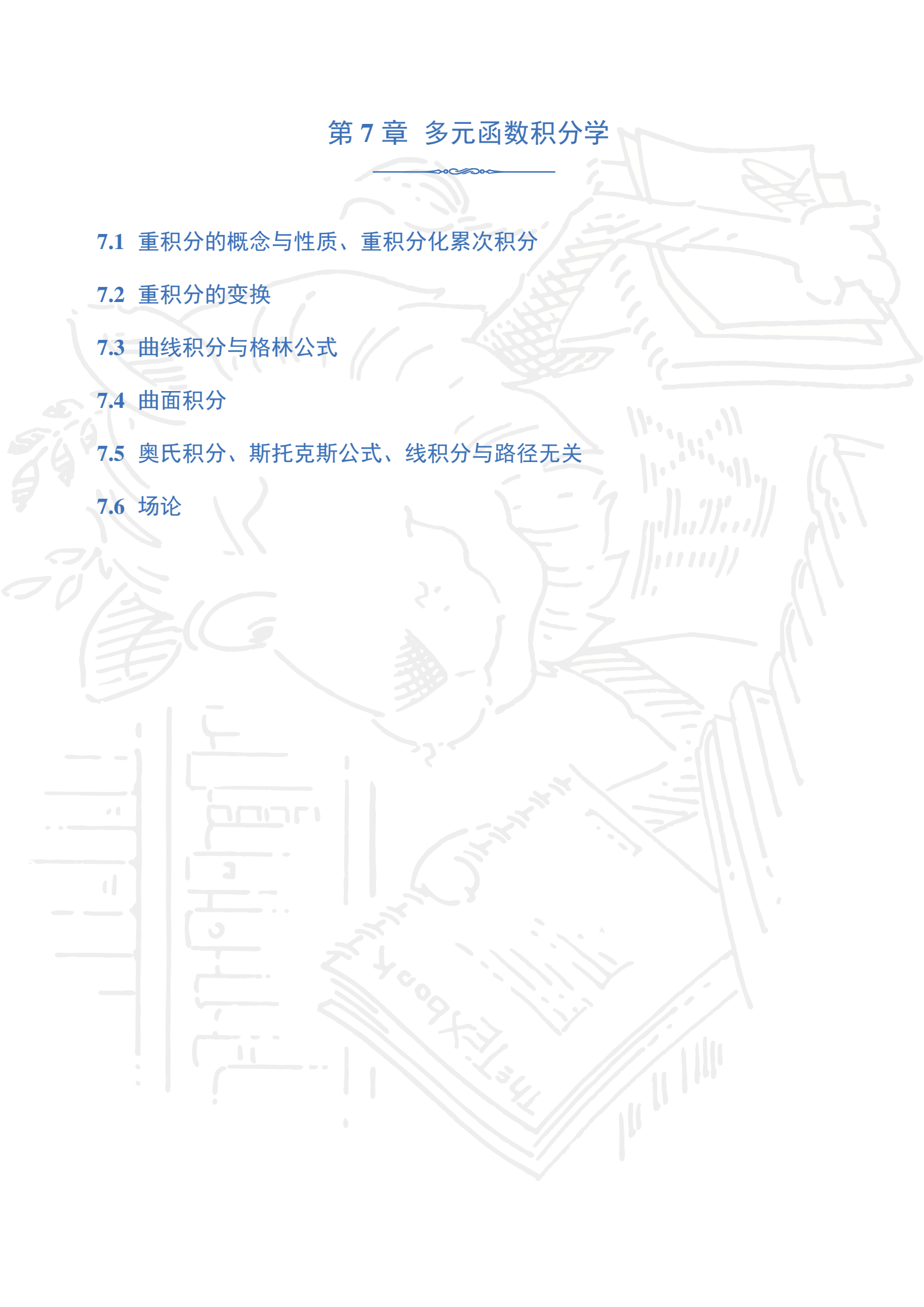
7.2 重积分的变换

7.3 曲线积分与格林公式

7.4 曲面积分

7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关

7.6 场论



第8章 典型综合题分析



第 9 章 附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容[Github](#)，另外还有参考文档，其下载地址为[Github](#)。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请[Fork Github](#)。