



# 数学分析习题指南——课后习题

## 数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 22, 2020

版本：1.00

确实，时间和空间是有限的。确实，我们总会有分开的时候。但是正因为这样，我们才会努力学习，我们才会努力前进。我们的信仰是享受数学。因为“数学穿越时空”。



“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —SCIbird

# 目 录

<b>1</b>	<b>声明</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>分析基础</b>	<b>4</b>
2.1	实数共理、确界、不等式	4
2.2	函数	4
2.3	序列极限	6
2.4	函数极限与连续概念	8
2.5	闭区间上连续函数的性质	9
<b>3</b>	<b>一元函数微分学</b>	<b>11</b>
3.1	导数和微分	11
3.2	微分中值定理	12
3.3	函数的升降、极值、最值问题	12
3.4	函数的凹凸性、拐点及函数作图	13
3.5	洛必达法则与泰勒公式	14
3.6	一元函数微分学的总合应用	15
<b>4</b>	<b>一元函数积分学</b>	<b>17</b>
4.1	不定积分和可积函数类	17
4.2	定积分概念、可积条件与定积分性质	19
4.3	变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法	19
4.4	定积分的应用	22
4.5	广义积分	22
<b>5</b>	<b>级数</b>	<b>23</b>
5.1	级数敛散判别法与性质、上极限与下极限	23
5.2	函数级数	23
5.3	幂函数	23
5.4	傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛	23
<b>6</b>	<b>多元函数积分学</b>	<b>24</b>
6.1	欧式空间、多元函数的极限与连续	24
6.2	偏导数与微分	24
6.3	反函数与隐函数	24
6.4	切空间与极值	24
6.5	含参积分的定积分	24
6.6	含参积分的广义积分	24

<b>7 多元函数积分学</b>	<b>25</b>
7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分	25
7.2 重积分的变换	25
7.3 曲线积分与格林公式	25
7.4 曲面积分	25
7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关	25
7.6 场论	25
<b>8 典型综合题分析</b>	<b>26</b>
<b>9 附录及一些说明事项</b>	<b>27</b>



## 第1章 声明

---

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：[Github](#)(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1)<sup>1</sup>或者邮箱<sup>2</sup>联系我。



Keep doing

扫一扫二维码，加我QQ。

图 1.1: 二维码

点击[Github](#)后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

---

<sup>1</sup>1411279054

<sup>2</sup>1411279054@qq.com

## 第2章 分析基础

### 2.1 实数共理、确界、不等式

#### 练习题

1. 设  $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$ , 求证:  $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$ .

解  $2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

$2|b| = |a+b-(a-b)| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有  $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$ .

解  $2 = |a+b-(a-b)| + 2|1-b| \leq |a+b| + |a-b| + 2|1-b| \leq 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$

3. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2};$$

并解释其几何意义.

解 易知,  $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a+b$  ①  $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$  ②

由 ①、② 得  $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$   $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

几何意义:  $\max\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较大的那个,  $\min\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较小的那个。

4. 设  $f(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

解  $f(x) - f(y) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \therefore |f(x) - f(y)| \leq |\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)| = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$

5. 设  $f(x), g(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$\textcircled{1} \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

$$\textcircled{2} \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

解 ① 易知,  $\sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) + g(x) (\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$ , 又  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$ ,

即  $\inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) (\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\sup_{x \in X} \{g(x)\}$ , 所以,  $\inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$

② 类似上面做法.

### 2.2 函数

#### 练习题

1. 设  $f(x) = |1+x| - |1-x|$ .
- (1) 求证:  $f(x)$  是奇函数;
  - (2) 求证:  $|f(x)| \leq 2$ .
  - (3) 求  $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{次}}(x)$ .

解

(1)  $f(x) = f(-x)$ ,  $\therefore f(x)$  是奇函数.

(2)  $f(x) = |1+x| - |1-x| \leq |1+x+1-x| = 2$

(3) 易知,  $f(x)$  是一个分段函数,  $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$ , 下面当  $-1 \leq x \leq 1$

时,  $f(x) = 2x \therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < -\frac{1}{2} \\ 4x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore$  可得,  $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

$\begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^{(n-1)}} \\ 2^{(n-1)}x & \frac{-1}{2^{(n-1)}} \leq x \leq \frac{1}{2^{(n-1)}} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{cases}$

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上定义,  $a > 0, b > 0$ . 求证:

(1) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降, 则  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ ;

(2) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调上升, 则  $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得,  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降  $\therefore \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(a)}{a}, \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(b)}{b} \therefore af(a+b) \leq (a+b)f(a), bf(a+b) \leq (a+b)f(b)$ , 可得  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ .

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当  $a > 0, b > 0$  时, 有

(1) 当  $p > 1$  时,  $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ ;

(2) 当  $0 < p < 1$  时,  $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ .

解

(1) 令  $f(x) = x^p, \frac{f(x)}{x} = x^{p-1}, \therefore p > 1, p-1 > 0 \therefore x^{p-1}$  单调递增, 由第二题可得  $f(a+b) \geq f(a) + f(b) \therefore (a+b)^p \geq a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上定义, 且  $f(f(x)) \equiv x$ .

(1) 问这种函数有几个?

(2) 若  $f(x)$  为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令  $y = f(x), x = f^{-1}(y) \therefore f(f(x)) \equiv x \therefore f(y) \equiv f^{-1}(y)$ , 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线  $y = x$  对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个,  $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若  $y = f(x) (x \in (-\infty, +\infty))$  是奇函数, 并且它的图像关于直线  $x = b (b > 0)$  对称, 则函数  $f(x)$  是周期函数并求其周期.

**解**  $\because f(x)$  是奇函数,  $\therefore f(x) = -f(-x)$ , 又  $\because f(x)$  关于直线  $x = b(b > 0)$  对称,  $f(b+x) = f(b-x)$ , 即  $f(b+b+x) = f(-x) = -f(x)$ ,  $f(x+2b) = -f(x) = -f(x+2b-2b) = f(x-2b)$ ,  $\therefore f(x+4b) = f(x)$ , 因此  $f(x)$  是周期函数, 其周期是  $4b$ .

6. 设  $f: X \rightarrow Y$  为满射,  $g: Y \rightarrow Z$ . 求证:  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数的充分必要条件为  $f$  和  $g$  都有反函数存在, 且  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**解**  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数, 说明  $g \circ f$  一一对应, 即  $f$  和  $g$  都一一对应, 所以,  $f$  和  $g$  存在反函数, 令  $(g \circ f)$  的反函数为  $H$ , 假设  $H(a) = b$ , 有  $(g \circ f)(b) = a$ , 左乘  $g^{-1}$ , 即  $f(b) = g^{-1}(a)$ , 再左乘  $f^{-1}$ , 即  $b = (f^{-1} \circ g^{-1})(a)$ .  $\therefore H = f^{-1} \circ g^{-1}$ ,  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

## 2.3 序列极限

### 练习题

1. 设  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

(1) 当  $a \neq 0$  时, 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

(2) 举例说明当  $a = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq 1$  可能成立;

(3) 举例说明当  $a = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n \neq 1$  可能成立.

**解**

(1) 由已知条件知:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 根据  $\varepsilon - N$  定义知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .  $\because n > N$ , 那么  $n+1 > N$ ,  $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 有  $n+1 > N$ .  $\therefore |a_{n+1} - a| < \varepsilon$ ,  $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$ .  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ .

(2) 例:  $a = \frac{1}{2n}$ .

(3) 例:  $x_n = \frac{n+1}{n}$ .

2. 设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

**解** 令  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 其中  $a < 1$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$ , 又由已知表达式得  $a = 1 - \sqrt{1 - a}$ , 解得:  $a = 0$ . 又  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{x_n}$ , 根据洛必达得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ .

3. 设  $c > 1$ , 求序列  $\sqrt{c}, \sqrt{c\sqrt{c}}, \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}, \dots$  的极限.

**解** 根据表达式可得,  $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}}$ ,  $x_{n+1} - x_n = \sqrt{c\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} = \sqrt{\sqrt{x_n}}(\sqrt{c} - x_n^{\frac{3}{4}})$ . 假设:  $x_n < c^{\frac{3}{2}}$ . 下面用归纳法来证明:

当  $n = 1$  时,  $x_1 = \sqrt{c} < c^{\frac{3}{2}}$

当  $n = k$  时, 假设  $x_n < c^{\frac{3}{2}}$

那么  $n = k+1$  时,  $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}} < \sqrt{c \cdot c^{\frac{3}{2}}} = c^{\frac{5}{4}} < c^{\frac{3}{2}}$ ,  $\therefore x_n < c^{\frac{3}{2}}$ , 且  $x_{n+1} - x_n > 0$ ,

由单调有界定理可知数列  $x_n$  存在极限. 令  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = a$ .  $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a, a = \sqrt{ca}, a = c$ .  $\therefore \lim_{x_n} = c$

4. 设  $A > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) (n = 1, 2, \dots)$

(1) 求证:  $x_n$  单调下降且有界;

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解**

(1)  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \geq \sqrt{A}$ , 说明  $x_n$  有下界.

$\because x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) - x_n = \frac{1}{2}(\frac{A}{x_n} - x_n) = \frac{1}{2} \frac{A - x_n^2}{x_n}$ , 又  $\because x_n \geq \sqrt{A} \therefore x_{n+1} - x_n < 0$ ,

所以,  $x_n$  单调递减且有下界.

(2) 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$  所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}$ .

5. 设  $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

解 令  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} (x_n > 0)$ , 根据表达式有  $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1 + x_n) > 1$ , 即  $x_n > x_{n+1}$ , 根据单调有界定理可得  $x_n$  存在极限, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a > 0) \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$ , 解得:  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

6. 求证:

(1)  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ;

(2) 序列  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  的极限存在.

解

(1)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ , 而  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2)  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ .

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \therefore x_{n+1} < x_n$ , 数列  $x_n$  是递减数列.

下证:  $x_n > -2$ ;

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 2[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n}] > 2[\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - 1) - 2\sqrt{n} > -2$ .

7. 设  $0 < a_1 < b_1$ , 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列  $a_n, b_n$  的极限存在.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2}).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设  $c > 0$ , 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设  $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 求证: 若  $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$  极限存在, 则  $x_n$  的极限也存在.

12. 设  $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ , 且  $c_n \leq a_n \leq b_n (n = 1, 2, \cdots)$ ; 又设  $y_n, z_n$  极限存在. 求证:  $x_n$  极限也存在.

13. 设序列  $x_n$  满足  $|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| (n = 1, 2, \cdots)$ , 其中  $0 < q < 1$ . 求证: 序列  $x_n$



的极限存在.

14. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \quad (\forall x, y \in (-\infty, +\infty))$$

其中  $0 < q < 1$ . 对  $\forall x_1 \in (-\infty, +\infty)$ , 令  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ . 求证: 序列  $x_n$  的极限存在, 且极限值是  $f(x)$  的不动点.

15. 设  $x_0 = a, x_1 = b (b > a)$ , 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \quad x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求证: 序列  $x_n$  极限存在.

## 2.4 函数极限与连续概念

### 练习题

1. 设在正实轴上,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且广义极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

存在. 求证:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  (分别讨论  $A = +\infty, -\infty, \cdot$ ).

2. 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A (> 0)$ , 求证:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$$

3. 设  $0 < x_n < +\infty$ , 且满足  $x_n + \frac{4}{x_n^2} < 3$ , 求证: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

4. 设  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的周期函数, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

求证:  $f(x) \equiv 0$ .

5. 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, +\infty)$  上定义,  $g(x)$  单调上升, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

6. 设  $x_n = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot 2} + \frac{1}{n \cdot 1}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

7. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

8. 设  $x_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$ .

9. 适当定义  $f(0)$ , 使函数  $f(x) = (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$  在点  $x = 0$  处连续.

10. 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , 求证:

(1)  $|f(x)| \in C[a, b];$

- (2)  $\max\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$ ;  
 (3)  $\min\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$ .
11. 设  $f(x) \in C[a, b]$  单调上升, 且  $a < f(x) < b$  ( $\forall x \in [a, b]$ ). 对  $\forall x_1 \in [a, b]$ , 由递推公式  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 产生序列  $\{x_n\}$ . 求证: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且其极限值  $c$  满足  $c = f(c)$ .
12. 设序列  $\{x_n\}$  由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \right) = 2$

13. 求出函数  $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$  的间断点, 并判断间断点的类型.

## 2.5 闭区间上连续函数的性质

### 练习题

1. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上单调. 求证:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不变号.  
 2. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且严格单调, 又

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程  $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3 = 0$  有且仅有三个根.

3. 设  $f_n(x) = x^n + x$ . 求证:  
 (1) 对任意自然数  $n > 1$ , 方程  $f_n(x) = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且仅有一个根;  
 (2) 若  $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$  是  $f_n(x) = 1$  的根, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  存在, 并求此值.
4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 求证:  $\exists c \in [a, b]$ , 使得对  $\forall \delta > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$  上无界.
5. 设  $x_n$  为有界序列. 求证:  $x_n$  以  $a$  为极限的充分必要条件是:  $x_n$  的任一收敛子序列都有相同的极限值  $a$ .
6. 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

7. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且有唯一的取到  $f(x)$  最大值的点  $x^*$ , 又设使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x^*)$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .
8. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ , 又设对  $\forall l \in \mathbf{R}$ , 方程  $f(x) = l$  在  $[0, +\infty)$  上只有有限个解或无解. 求证:  
 (1) 如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在;  
 (2) 如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上无界, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$ .
9. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 存在  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$ , 且  $f(x)$  的最小值  $f(a) < a$ . 求证:  $f(f(x))$  至少在两个点处取到最小值.
10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上定义,  $x_0 \in [a, b]$ . 如果对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ , 那么称  $f(x)$  在点  $x_0$  处上半连续. 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上每一点都上半连续, 则称  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的一个半连续函数. 求证:  $[a, b]$  上的上半连续函数一定有上界.

11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:

(1)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$       (2)  $f(x) = \sin x$

12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:

(1)  $f(x) = x \sin x$ ;      (2)  $f(x) = \sin x^2$ .

13. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 对  $\forall h \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(h+n) = A$  (有限数). 求证:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

14. 设存在常数  $L > 0$ , 使得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

求证:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续.

15. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续. 求证:  $f(x) + g(x)$  与  $f(x) \cdot g(x)$  都在  $(a, b)$  内一致连续.

16. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 值域含于区间  $(a, d)$ , 又  $g(x)$  在  $(c, d)$  内一致连续. 求证:  $g(f(x))$  在  $(a, b)$  内一致连续.

17. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且是周期为  $T$  的周期函数. 求证:  $f(x)$  在实轴上一致连续.

## 第3章 一元函数微分学

### 3.1 导数和微分

#### 练习题

1. 用定义求  $f'(0)$ , 这里  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
2. 设  $f'(x_0)$  存在. 求证: 对数导数也存在并等于  $f'(x_0)$ , 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

3. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导,  $\alpha_n, \beta_n$  为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 + \beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = f'(x_0)$$

4. 设  $P(x)$  是最高次项系数为 1 的多项式,  $M$  是它的最大实数. 求证:  $P'(M) \geq 0$ .
5. 给定曲线  $y = x^2 + 5x + 4$ .

- (1) 求曲线在点  $(0, 4)$  处的切线.
- (2) 确定  $b$  使得直线  $y = 3x + b$  为曲线的切线;
- (3) 求过点  $(0, 3)$  的曲线的切线.

6. 确定常数  $a, b$  使得函数  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$  有连续导数.

7. 设曲线由隐式方程  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} (a > 0)$  给出.

- (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
- (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.

8. 已知曳物线的参数方程为

$$x = a[\ln(\tan \frac{t}{2}) + \cot t], \quad y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi).$$

求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与  $x$  轴交点之间的切线段为一定长.

9. 试确定  $\lambda$ , 使得曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  与  $xy = \lambda$  相切, 并求出切线方程.
10. 试确定  $m$ , 使直线  $y = mx$  为曲线  $y = \ln x$  的切线.
11. 设  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . (1) 求证:  $(1-x^2)y' - xy = 1$ ; (2) 求  $y^{(n)}(0)$ .
12. 求  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  的  $n$  阶导数.
13. 设  $y = x^{(n-1)} \ln x$ . 求证:  $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ .
14. 求证: 双曲线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  的向径与切线的夹角等于极角的两倍加  $\frac{\pi}{2}$
15. 设曲线既可用参数式  $x = x(t), y = y(t)$  表示, 又可用极坐标  $r = r(\theta)$  表示. 求



证:  $\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ .

## 3.2 微分中值定理

### 练习题

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内除仅有的一个点都可导. 求证:  $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$  及  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(b) - f(a) = (b - a)[\theta f'(c_1) + (1 - \theta)f'(c_2)]$$

2. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且

$$f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0.$$

求证: 对  $\forall k \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = kf(\xi)$ .

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 但非线性函数. 求证:  $\exists \xi, \eta \in (0, 3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 但非线性函数. 求证:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\eta).$$

5. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f''(x_0) \neq 0$ . 求证:

(1) 如果  $f'(x_0) = 0$ , 则存在  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_1) - f(x_2) = 0$ ;

(2) 如果  $f'(x_0) \neq 0$ , 则存在  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$ .

6. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$ . 求证: 如果  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上不恒等于零, 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$ .

7. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$ . 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

8. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $f(0) = 0$ . 求证: 如果  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上不恒等于零, 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$ .

9. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(a) = f'(b)$ . 求证:  $\exists c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) - f(a) = (c - a)f'(c)$ .

注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件  $f'(a) = f'(b) = 0$  中的 “=0” 去掉了.

10. 设  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上可导, 且存在有限极限  $\lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x)$ . 求证:  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上一致连续.

## 3.3 函数的升降、极值、最值问题

### 练习题

1. 求证:

(1) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  单调增加;

(2)  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上二次可导, 且  $f(0) = 0, f''(x) < 0$ . 求证:  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, a]$  上单调下降.
3. 求证: 对任何  $n(n > 0)$  次多项式  $P(x), \exists x_0 > 0$ , 使得  $P(x)$  在  $(-\infty, -x_0)$  和在  $(x_0, +\infty)$  上都是严格单调的.
4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且在  $(a, b)$  内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证: 极大值必大于极小值.
5. 设  $a, b > 0, k \in \mathbb{R}$ . 求证: 函数  $f(x) = a^2 e^{kx} + b^2 e^{-kx}$  存在与  $k$  无关的极小值.
6. (1) 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(x) \neq g(x), g(x) \neq 0$ . 求证:  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $(a, b)$  内无极值的充分必要条件是  $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$  在  $(a, b)$  内无极值.  
(2) 设  $b > a > 0$ , 求证:  $f(x) = \frac{(x-a)(x+b)}{(x-b)(x+a)}$  无极值.
7. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图 2.4 所示, 则  $f(x)$  有 ( ).  
(A) 一个极小值和两个极大值;  
(B) 两个极小值和一个极大值;  
(A) 两个极小值和两个极大值;  
(A) 三个极小值和一个极大值;
8. (1) 求证: 序列  $\{\frac{\ln n}{n}\}_{n=3}^{\infty}$  为一递减序列;  
(2) 求序列  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的最大项.
9. 假设  $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ . 求证:  $f(x)$  在实轴上有真正得最小值.
10. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 在区间  $[a, b]$  上只有一个极值点. 求证: 如果该点是极大值点必为最大值点; 如果该点是极小值点必为最小值点.
11. 求出满足不等式  $\frac{B}{\sqrt{x}} \leq \ln x \leq A\sqrt{x} (\forall x > 0)$  的最小正数  $A$  及最大负数  $B$ .
12. 给定曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$ .  
(1) 求过点  $(x_0, \frac{1}{\sqrt{x_0}})$  的切线.  
(2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线在  $x$  轴与  $y$  轴上截距和最小.
13. 设正数  $x, y$  之和为一常数  $2a(a > 0)$ , 且指数  $x^y$  当  $x = a$  时, 达到最大值. 求证:  $a = e$ .
14. 给定曲线  $y = \frac{1}{x^2}$ .  
(1) 求曲线上横坐标为  $x_0$  的点处的切线方程;  
(2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线被坐标轴所截的长度最短.
15. 做一个无盖的圆柱形茶缸, 若体积  $V$  一定, 问底半径  $R$  与高  $H$  成何比例时, 使总面积最小 (即用料最省)?
16. 有一半径为  $a$  的半球面形的杯子, 杯内放一长度为  $l(l > 2a)$  的均匀细棒, 求棒的平衡位置 (即求棒重心的最低位置).
17. 把一圆形铁片剪下中心角为  $\alpha$  的一块扇形部分, 并将其围成一圆锥. 已知圆形铁片的半径为  $R$ , 问  $\alpha$  多大时, 圆锥的容积最大?

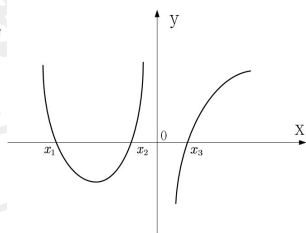


图 2.4

### 3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

#### 练习题

1. 设  $a > 0, b > 0$ . 求证:  $f(x) = \sqrt{a + bx^2}$  为凹函数.

- 求证: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为凹函数.
- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上取正值, 且为凸函数. 求证:  $\frac{1}{f(x)}$  是在  $(a, b)$  上的凹函数.
- 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上二次可微,  $f''(x) \geq 0$ . 求证:
  - $\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \in f'(x) \in \frac{f(x+h)-f(x)}{h} (0 < h < x)$ ;
  - 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ .
- 作出下列函数的图形:

$$\begin{aligned} (1) y &= x^3 - x^2 - x + 1; & (2) y &= x \cdot e^{-x^2}; \\ (3) y &= x + \frac{1}{x}; & (4) y &= x \cdot \ln x. \end{aligned}$$

### 3.5 洛必达法则与泰勒公式

#### 练习题

- 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + xf'(x)] = l$ . 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 且

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

求证:  $\exists \xi \in (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

- 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  求证:

- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶连续可微;
- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调下降;
- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是凹函数;
- 求证:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}] = \frac{1}{3}$ ;
  - 设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n = \sqrt{3}$ .
  - 设  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . 求证: 对  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^{\lambda x}} = 0.$$

- 将函数  $(1-x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  在点  $x=0$  处泰勒展开公式至  $x^4$  阶项.
- 将拉格朗日函数中值定理, 对  $\forall |x| \leq 1, \exists \theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\arcsin x = \arcsin x - 0 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}.$$

求证:  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

7. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可微, 且

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2 \quad (\forall x > 0).$$

求证:  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \quad (\forall x > 0)$ .

8. 设  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ . 求证:  $a$  是  $P(x) = 0$  的  $k$  重根的充分必要条件为

$$P^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, k-1), \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

9. 若一实系数多项式  $P(x)$  的根全是实根, 求证:  $P(x)$  各阶导数产生的多项式的根也全是实根, 且每一高阶导数的根均分布在底阶导数的根之间.

### 3.6 一元函数微分学的总合应用

1. 求证不等式:  $1 + x^2 \leq 2^x \quad (0 \leq x \leq 1)$ .
2. (1) 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad (x > -1)$ , 且等号仅当  $x = 0$  时成立;  
(2) 当  $\alpha < 0$  或  $\alpha > 1$  时,  $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad (x > -1)$ , 且等号仅当  $x = 0$  时成立.
3. 设  $a > 0, b > 0$ . 求证:  
(1)  $a^p + b^p \geq 2^{(1-p)}(a+b)^p \quad (p > 1)$ ;  
(2)  $a^p + b^p \leq 2^{1-p}(a+b)^p \quad (0 < p < 1)$ .
4. 设  $b \geq a$ , 求证:  $2\arctan \frac{b-a}{2} \geq \arctan b - \arctan a$ .
5. (1) 设  $n \in N$ , 求证:

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

- (2) 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n[e - (1 + \frac{1}{n})^n] = \frac{e}{2}$ .
6. 设  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$  有正根  $x_0$ , 则方程

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必存在小于  $x_0$  的正根.

7. 试确定方程  $e^x = ax^2 \quad (a > 0)$  的根的个数, 并指出每一个根所在的范围.
8. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $R$  上连续可微, 且  $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0$ , 试证  $f(x) = 0$  的任何两个相邻实根之间必有  $g(x) = 0$  的根.
9. (1) 求  $f(x) = \frac{1}{x^2} + px + q \quad (p > 0)$  的极值点与极值;  
(2) 求方程  $\frac{1}{x^2} + px + q = 0 \quad (p > 0)$  有三个实根的条件.
10. 讨论曲线  $y = 4\ln x + k$  与  $y = 4x + \ln^4 x$  的交点个数.
11. 对  $\forall n \in N$ , 求证:  $x^{n+2} - 2x^n - 1$  只有唯一正根.
12. 设  $k > 0$ , 求证: 方程  $1 + x + \frac{x^2}{2} = ke^x$  只有唯一实根.
13. 设  $n$  次多项式  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  满足下列条件:  
(1)  $(\sum_{k=0}^n a_k) \cdot (\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k) < 0$ ;



(2)  $P'(x)$  在  $[-1, 1]$  上处处不为零.

求证:  $P(x)$  在  $[-1, 1]$  上有且仅有一个实根.

14. 设  $|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)| (\forall x \in (a, b))$  并存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ .

求证:  $f(x) \equiv 0 (\forall x \in (a, b))$ .



## 第4章 一元函数积分学

### 4.1 不定积分和可积函数类

#### 练习题

1. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{llll} (1) \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx; & (2) \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}; & (3) \int \sqrt{x}\sqrt{x} dx; & (4) \int [\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}] dx; \\ (5) \int \tan^2 x dx; & (6) \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx; & (7) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}; & (8) \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx; \\ (9) \int \frac{dx}{3x^2}; & (10) \int \frac{dx}{2-3x^2}; & (11) \int \sqrt[3]{1-3x} dx; & (12) \int x \cdot \sqrt[3]{1-3x} dx. \end{array}$$

2. 求下列不定积分  $I = \int \frac{1}{1+x^4} dx$ ,  $J = \int \frac{x^2}{1+x^4} dx$ .

3. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{llll} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}; & (2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; & (3) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx (a > 0); & (4) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} (a \geq 0); \\ (5) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}; & (6) \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx; & (7) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} dx (a < b); & (8) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx. \end{array}$$

4. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}; & (2) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx; & (3) \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx; \\ (4) \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx; & (5) \int x^2\sqrt{4-x^2} dx; & (6) \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

5. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \ln(1+x^2) dx; & (2) \int x^\alpha \ln x dx; \\ (3) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx; & (4) \int x^2 e^{-2x} dx; \\ (5) \int x \cos \beta x dx; & (6) \int x^2 \sin 2x dx; \\ (7) \int x \arctan x dx; & (8) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \\ (9) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx; & (10) \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx. \end{array}$$

6. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx; & (2) \int \frac{1+\tan x}{\cos x} e^x dx. \\ (3) \int (\cos x - \sin x) e^{-x} dx; & (4) \int x(2-x) e^{-x} dx. \end{array}$$

7. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \sqrt{a^2-x^2} dx; & (2) \int \sqrt{x^2-a^2}; \\ (3) \int \arctan \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx; & (4) \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx; \\ (5) \int x \arctan x \ln(1+x^2) dx; & (6) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \end{array}$$

8. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \sin(\ln x) dx$ ; (2)  $\int \cos(\ln x) dx$ ;  
 (3)  $\int x e^x \cos x dx$ ; (4)  $\int x e^x \sin x dx$ ;

9. 求下列不定积分的递推公式:

- (1)  $\int x^n e^x dx$ ; (2)  $\int x^n (\ln x)^d dx$ ;  
 (3)  $\int \sin^n x dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{\sin^n x} (n \geq 2)$ .

10. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$ ; (2)  $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$ ;  
 (3)  $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}$ ; (4)  $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1} dx$ ;  
 (5)  $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ ; (6)  $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$ .

11. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \cos x \sin^2 x dx$ ; (2)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ ; (3)  $\int \tan x \sin^2 x dx$ ; (4)  $\int \tan^3 x dx$ ;  
 (5)  $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$ ; (6)  $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ ; (7)  $\int \frac{dx}{\sin^2 \cos x}$ ; (8)  $\int \frac{\sin 2x}{2+\tan^2 x} dx$ .

12. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \sec^3 x dx$ ; (2)  $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ ;  
 (3)  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{2\cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$ .

13. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ ; (2)  $\int \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ ;  
 (3)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ ;  
 (5)  $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}} dx$ ; (6)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ ;

14. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ ; (2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$ ;  
 (3)  $\int \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ .

15. 问下列积分是否可积 (即原函数是否为初等函数):

- (1)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ ; (2)  $\int \sqrt{\cos x} dx$ .

## 4.2 定积分概念、可积条件与定积分性质

## 练习题

1. 设
- $f(x) \in R[a, b]$
- , 且
- $f(a) \geq a > 0$
- . 求证:

(1)  $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$ ; (2)  $\ln f(x) \in R[a, b]$ .

2. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0$ .

3. 设  $f(x) \in R[0, 1]$ , 且  $f(x) \geq a > 0$ . 求证:  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x) dx}$ .

4. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 0$ .

5. 设  $a, b > 0, f(x) \geq 0$ , 且  $f(x) \in R[a, b]$ , 又  $\int_{-a}^b x f(x) dx = 0$ . 求证:

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx.$$

6. 设
- $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0 (\forall x \in [a, b])$
- . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

7. 设
- $f(x)$
- 在
- $[a, b]$
- 上可导, 且
- $f'(x) \in R[a, b]$
- . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

8. 设
- $f(x) \in R[a, b]$
- , 且
- $a \leq f(x) \leq b$
- , 又
- $\varphi(x)$
- 是
- $[a, b]$
- 上的凹函数. 求证:

(1)  $\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \varphi'(t)(f(x) - t) (\forall t \in (a, b))$ ;

(2)  $\int_0^1 \varphi(f(x)) dx \geq \varphi\left(\int_0^1 f(x) dx\right)$ .

(3)  $\int_0^1 e^{f(x)} dx \geq e^{\int_0^1 f(x) dx}$ .

9. 求证: 极限
- $\lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx (0 < b < 1)$
- 存在, 并且其极限值不超过 1.

10. 求证:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx$ .

## 4.3 变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法

1. 设
- $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} (x \neq 0); f(0) = 0$

(1) 问  $f(x)$  是  $[-1, 1]$  上可积?

(2) 问变上限积分  $\int_{-1}^x f(t) dt$  在点  $x = 0$  处是否可导?

2. 求下列定积分:



$$\begin{aligned}
 (1) & \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^\alpha} dx; & (2) & \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx; \\
 (3) & \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}; & (4) & \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx; \\
 (5) & \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx; & (6) & \int_0^1 \arctan \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;
 \end{aligned}$$

3. 求下列定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx; & (2) & \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx; \\
 (3) & I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x} dx; & (4) & I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx; \\
 (5) & \int_0^1 \frac{x}{e^x} + e^{1-x} dx; & (6) & \int_0^\pi \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

4. (1) 设  $x \geq -1$ , 求  $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$ ;

(2) 求  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx$ ;

5. 设  $f(2) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $\int_0^2 f(x)dx = 1$ , 求  $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$ ;

6. 设  $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$ , 且当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f(x) = x$ , 求

$$\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$$

7. 对任意自然数  $n$ , 求证:

$$\int_0^\pi \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微, 求证:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f''(t)(x-t)dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

9. 设  $0 < a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 并满足

$$f\left(\frac{ab}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x \in [a, b]).$$

求证:

$$\int_a^b f(x) \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln(ab)}{2} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx.$$

10. 设  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 并满足

$$f\left(\frac{a^2}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x > 0)$$

求证:

$$(1) \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(2) \int_1^a \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(3) \text{ 如果 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上连续, 则 } \int_0^1 g(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} = \int_1^a g(x + \frac{a^2}{x}) \frac{dx}{x}.$$

11. (1) 设  $f(x)$  是奇函数, 求证:  $f(x)$  的任一原函数是偶函数;

(2) 设  $f(x)$  是偶函数, 求证:  $f(x)$  的任意原函数是奇函数和常数之和.

12. 求证:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$

13. 设函数  $f(x)$  二阶可微, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2})| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3$$

其中  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$

14. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $\exists m \in N$ , 使得

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, m)$$

求证:  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $m+1$  个零点.

15. 设  $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt.$

(1) 当  $n$  为正整数, 且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 证明  $2n \leq S(x) < 2(n+1).$

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}.$

16. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续导数, 求

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$$

17. (1) 设  $f(x)$  在任意有限区间上可积分, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = l$$

(2) 第 (1) 小题的逆命题是否成立? 如果加上一个条件: “ $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调上升”, 第 (1) 小题的逆命题是否成立?

18. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = A$$

19. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $f(x) \geq 0 (\forall x \in C[a, b])$ . 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

20. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调上升, 函数

$$F(x) \stackrel{\text{定义}}{=} \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & x > 0 \\ f(0+0), & x = 0 \end{cases}$$

求证: 在  $[0, +\infty)$  上,  $F(x)$  单调上升且右连续.

## 4.4 定积分的应用

### 练习题

## 4.5 广义积分

## 第 5 章 级数

---

5.1 级数敛散判别法与性质、上极限与下极限

5.2 函数级数

5.3 幂函数

5.4 傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛





## 第 6 章 多元函数积分学

---

6.1 欧式空间、多元函数的极限与连续

6.2 偏导数与微分

6.3 反函数与隐函数

6.4 切空间与极值

6.5 含参积分的定积分

6.6 含参积分的广义积分



## 第 7 章 多元函数积分学

---

7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分

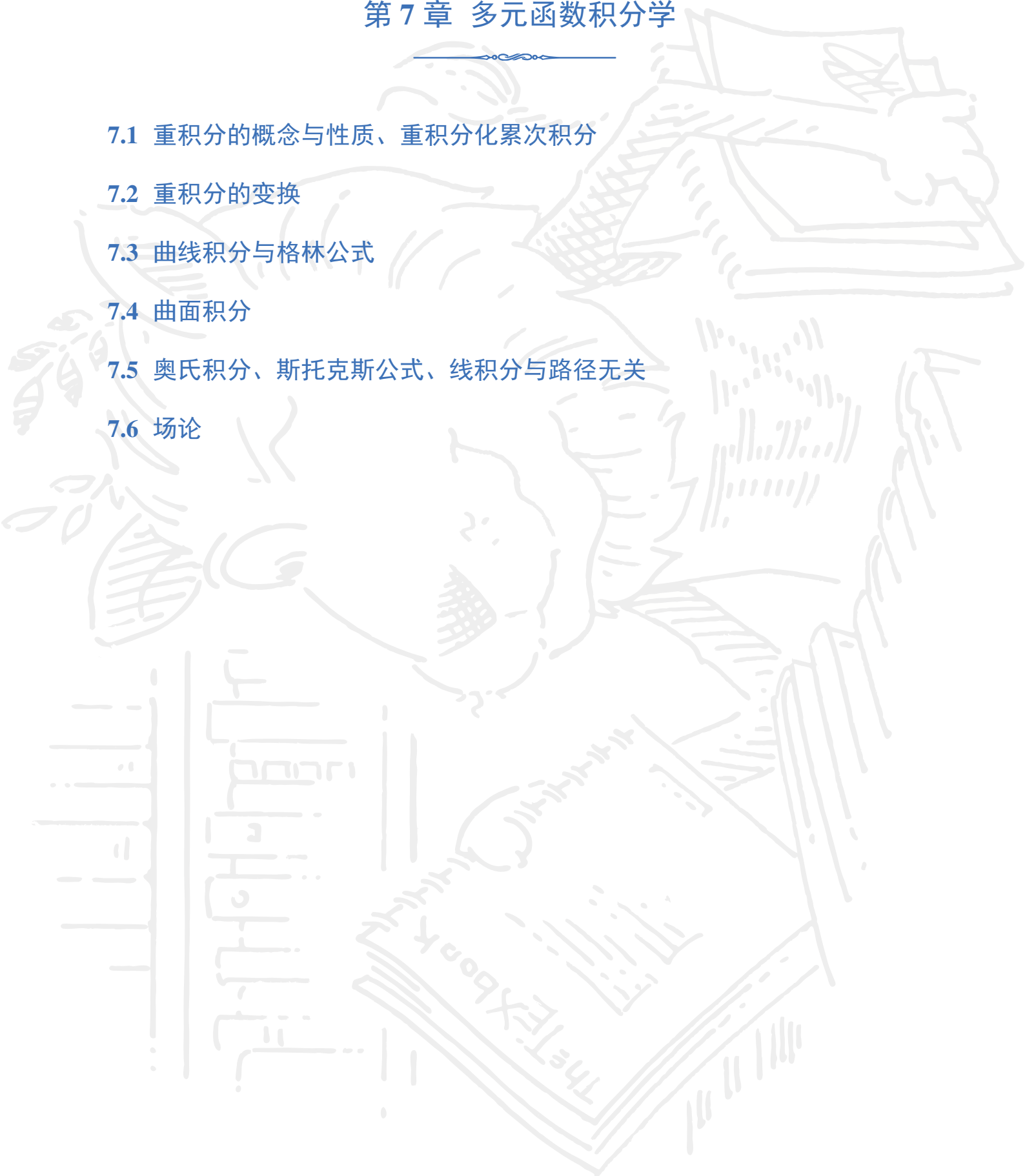
7.2 重积分的变换

7.3 曲线积分与格林公式

7.4 曲面积分

7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关

7.6 场论



## 第8章 典型综合题分析



## 第 9 章 附录及一些说明事项

---

### 附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容[Github](#)，另外还有参考文档，其下载地址为[Github](#)。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请[Fork Github](#)。