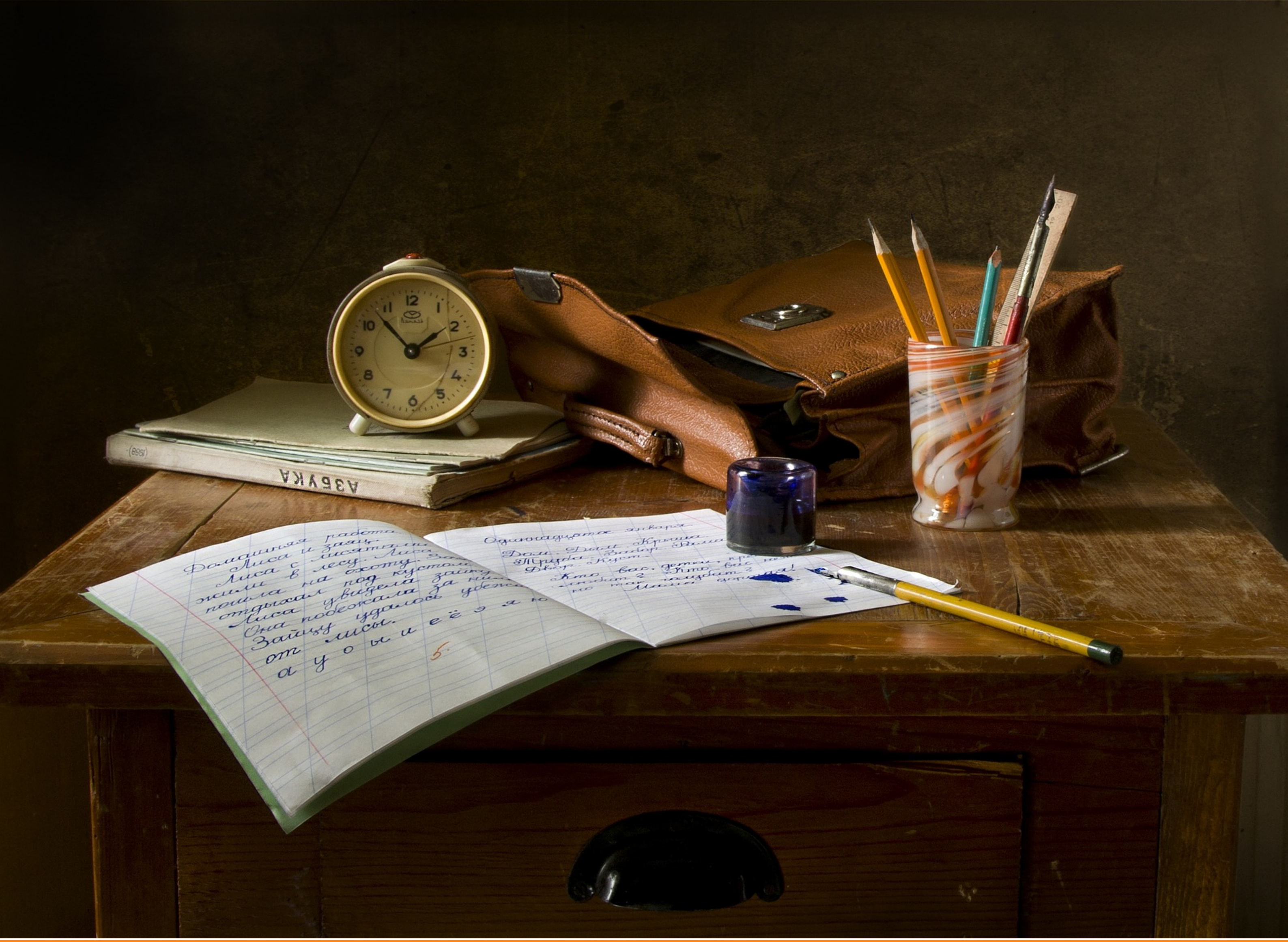

数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 3, 2020

版本：1.00

确实，时间和空间是有限的。确实，我们总会有分开的时候。但是正因为这样，我们才会努力学习，我们才会努力前进。我们的信仰是享受数学。因为“数学穿越时空”。

♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”*—SCIbird*

目　录

第 1 章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：Github(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) [1]或者邮箱[2]联系我。

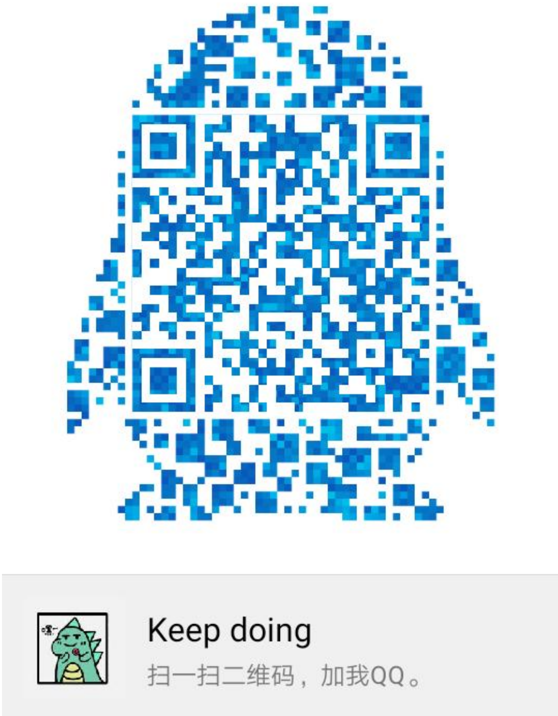

图 1.1: 二维码

点击Github后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

[1]1411279054
[2]1411279054@qq.com

第 2 章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b,|a-b|\}<\frac{1}{2}$, 求证: $|a|<\frac{1}{2},|b|<\frac{1}{2}$.

解 $2|a|=|a+b+a-b|\le|a+b|+|a-b|\le 2\max\{a+b,|a-b|\}<1\ \therefore |a|<\frac{1}{2}$

$2|b|=|a+b-(a-b)|\le|a+b|+|a-b|\le 2\max\{a+b,|a-b|\}<1\ \therefore |b|<\frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$, 有 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\ge\frac{1}{2}$.

解 $2=|a+b-(a-b)+2(1-b)|\le|a+b|+|a-b|+2|1-b|\le 4\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\ge\frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$, 有

$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$;

并解释其几何意义.

解 易知，$\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b$ ① $\max\{a,b\}-\min\{a,b\}=|a-b|$ ②

由 ① 、 ② 得 $\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$

几何意义:$\max\{a,b\}$ 指的是 a,b 中较大的那个, $\min\{a,b\}$ 指的是 a,b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界，求证:

$$|f(x)-f(y)|\le\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)\quad(\forall x,y\in X)$$

解 $f(x)-f(y)\le\sup\limits_{x\in X}f(x)-\inf\limits_{x\in X}f(x)\ \therefore |f(x)-f(y)|\le|\sup\limits_{x\in X}f(x)-\inf\limits_{x\in X}f(x)|=\sup\limits_{x\in X}f(x)-\inf\limits_{x\in X}f(x)$

5. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$① \inf_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

$$② \sup_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\sup_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

解 ① 易知, $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}+\inf\limits_{x\in X}\{g(x)\}\le f(x)+g(x)\ (\forall x\in X)$, $\therefore\ \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}+\inf\limits_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$, 又$\because\ \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le f(x)+g(x)\le f(x)+\sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$, 即 $\inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}-sup\underset{x\in X}{}g(x)\le f(x),(\forall x\in X)$, $\therefore\ \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}+\sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$, 所以, $\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}+\inf\limits_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}+\sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$

② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$.
   (1) 求证:$f(x)$ 是奇函数;
   (2) 求证：$|f(x)|\le 2$.
   (3) 求 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)$.

解

(1) $f(x)=f(-x),\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)=|1+x|-|1-x|\le|1+x+1-x|=2$

(3) 易知，$f(x)$ 是一个分段函数，$f(x)=\begin{cases}-2 & x<-1\\ 2x & -1\le x\le 1\\ 2 & x\ge 1\end{cases}$，下面当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(x)=2x\therefore(f\circ f)(x)=\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2}\\ 4x & \frac{-1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\\ 2 & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore$ 可得，$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=$

$$\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2^{(}n-1)}\\ 2^{(}n-1)x & \frac{-1}{2^{(}n-1)}\le x\le\frac{1}{2^{(}n-1)}\\ 2 & x\ge\frac{1}{2^{(}n-1)}\end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $a>0,b>0$. 求证:
   (1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$;
   (2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 $\therefore\frac{f(a+b)}{a+b}\le\frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(a+b)}{a+b}\le\frac{f(b)}{b}$,$\therefore af(a+b)\le(a+b)f(a)$, $bf(a+b)\le(a+b)f(b)$, 可得 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a>0,b>0$ 时，有
   (1) 当 $p>1$ 时, $(a+b)^p\ge a^p+b^p$;
   (2) 当 $0<p<1$ 时，$(a+b)^p\le a^p+b^p$.

解

(1) 令 $f(x)=x^p$, $\frac{f(x)}{x}=x^{p-1}$, $\because p>1,p-1>0$ $\therefore x^{p-1}$ 单调递增, 由第二题可得 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)\therefore(a+b)^p\ge a^p+b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 且 $f(f(x))\equiv x$.
   (1) 问这种函数有几个?
   (2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ $\because f(f(x))\equiv x\therefore f(y)\equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y=x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x)\equiv x$

5. 求证: 若 $y=f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)=-f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, $f(b+x)=f(b-x)$, 即 $f(b+b+x)=f(-x)=-f(x)$, $f(x+2b)=-f(x)=-f(x+2b-2b)=f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b)=f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f:X\to Y$ 时满射, $g:Y\to Z$. 求证：$g\circ f:X\circ Z$. 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

   解 $g\circ f:X\circ Z$ 有反函数, 说明 $g\circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g\circ f)$ 的反函数为 H, 假设 $H(a)=b$, 有 $(g\circ f)(b)=a$, 左乘 g^{-1}, 即 $f(b)=g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1}, 即 $b=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)\therefore H=f^{-1}\circ g^{-1}, (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
   (1) 当 $a\neq 0$ 时, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$
   (2) 举例说明当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\neq 1$ 可能成立;
   (3) 举例说明当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n\neq 1$ 可能成立.
2. 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1}$.
3. 设 $c>1$, 求序列 $\sqrt{c},\sqrt{c\sqrt{c}},\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}},\cdots$ 的极限.
4. 设 $A>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\,(n=1,2,\cdots)$
   (1) 求证: x_n 单调下降且有界;
   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
5. 设 $F_0=F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
6. 求证:
   (1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$;
   (2) 序列 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n}-2\sqrt{n}$ 的极限存在.
7. 设 $0<a_1<b_1$, 令
$$a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot b_n},\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\ (n=1,2,\cdots)$$
   求证: 序列 a_n, b_n.
8. 求证: 如下序列的极限存在.
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^x}(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2})).$$
9. 求证: 如下序列的极限存在：
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$
10. 设 $c>0$, 求序列
$$\sqrt{c},\sqrt{c+\sqrt{c}},\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.
12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \le a_n \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.
13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}| (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $0 < q < 1$. 求证: 序列 x_n 的极限存在.
14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x) - f(y)| \le q|x - y| \quad (\forall x, y \in (-\infty, +\infty))$$

其中 $0 < q < 1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty, +\infty)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0 = a, x_1 = b (b > a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \ x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x) \le f(x) \le g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = A = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$(分别讨论 $A = +\infty, -\infty,$).

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = A(> 0)$, 求证:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$$

3. 设 $0 < x_n < +\infty$, 且满足 $x_n + \frac{4}{x^2} < 3$, 求证: 极限 $\lim\limits_{x_n},$.
4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

求证:$f(x) \equiv 0$.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上定义,$g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$

6. 设 $x_n = \frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2\cdot(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 2} + \frac{1}{n\cdot 1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$
8. 设 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$.
9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x = 0$ 处连续.
10. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 求证:
    (1) $|f(x)| \in C[a,b]$;
    (2) $max\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$;
    (3) $min\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$.
11. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ $(\forall x \in [a,b])$. 对 $\forall x_1 \in [a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$ 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满足 $c = f(c)$.
12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}) = 2$
13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

第 3 章 一元函数微分学

第 4 章　一元函数积分学

第 5 章 级数

第 6 章　多元函数积分学

第 7 章 多元函数积分学

第 8 章 典型综合题分析

第 9 章 附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容Github，另外还有参考文档, 其下载地址为Github。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请Fork Github。