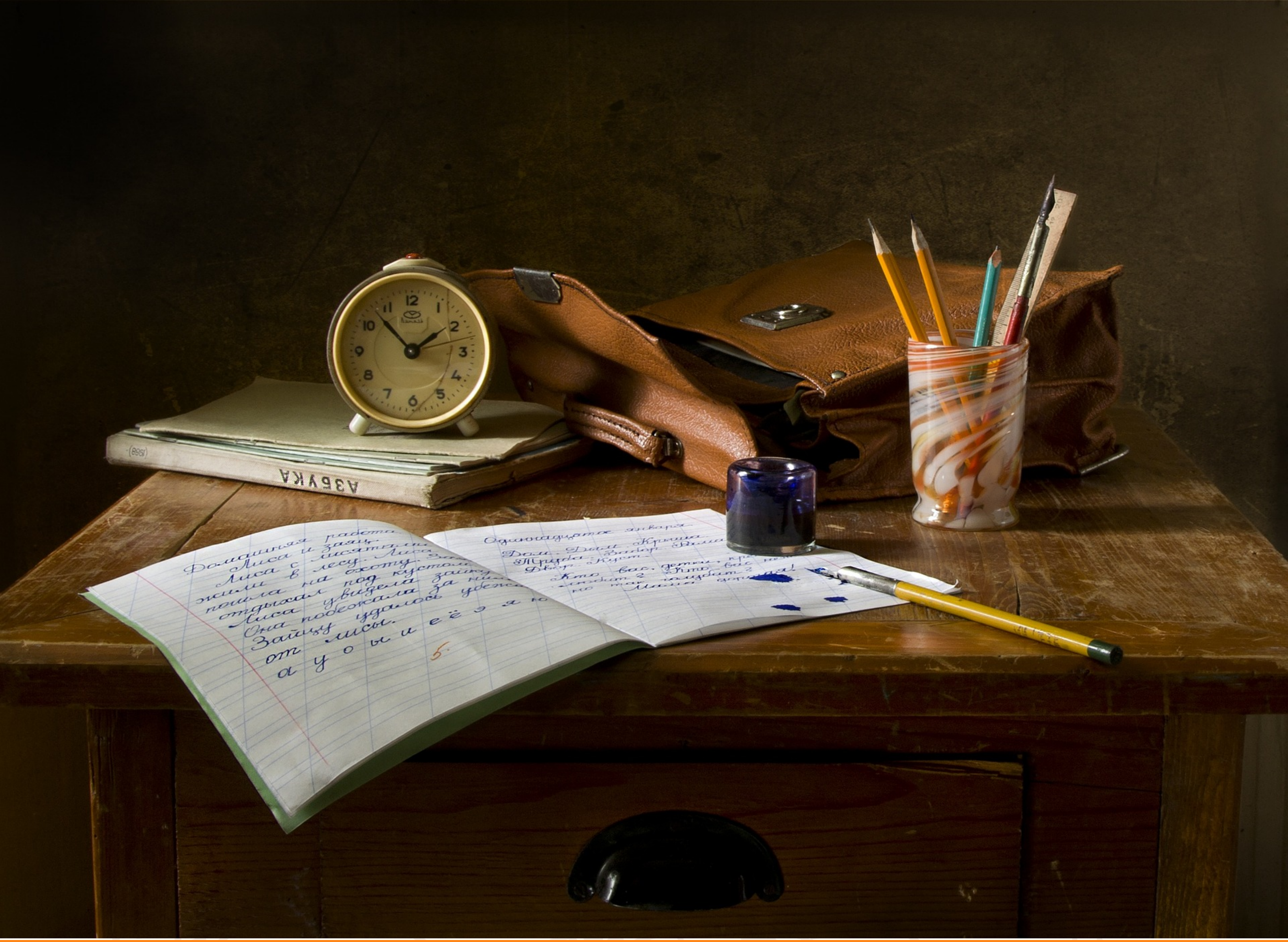

数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：March 15, 2020

版本：1.00

确实，时 间和空间
是有限的。确实，我们总会有
分开的时候。但是正因为这样，
我们才会努力学习，我们才会
努力前进。我们的信仰是
享受数学。因为“数
学穿越时空”。
♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —*SCIbird*

目　录

第 1 章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：Github(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) [1]或者邮箱[2]联系我。

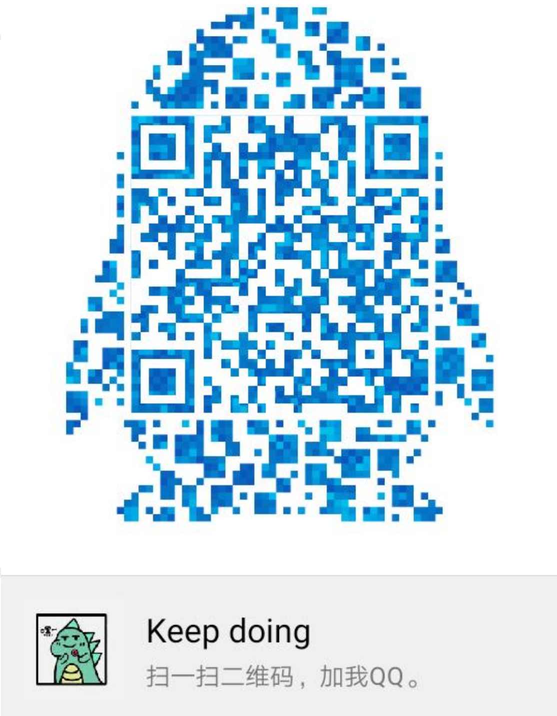

图 1.1: 二维码

点击Github后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

[1] 1411279054
[2] 1411279054@qq.com

第 2 章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$, 求证: $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$.

   解 $2|a| = |a+b+a-b| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

   $2|b| = |a+b-(a-b)| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$.

   解 $2 = |a+b-(a-b)+2(1-b)| \le |a+b|+|a-b|+2|1-b| \le 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

   $\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有

   $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$, $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$;

   并解释其几何意义.

   解 易知，$\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$ ① $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$ ②

   由 ① 、 ② 得 $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

   几何意义:$\max\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较大的那个, $\min\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界，求证:

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

   解 $f(x) - f(y) \le \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) \therefore |f(x) - f(y)| \le |\sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)| = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)$

5. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$① \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

$$② \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

   解 ① 易知, $\sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le f(x) + g(x)$ $(\forall x \in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$, 又 $\because$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le f(x)+g(x) \le f(x) + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 即 $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} - \sup_{x\in X} g(x) \le f(x), (\forall x \in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 所以, $\inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$

   ② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x) = |1 + x| - |1 - x|$.
   (1) 求证:$f(x)$ 是奇函数;
   (2) 求证：$|f(x)| \leq 2$.
   (3) 求 $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n次}(x)$.

解

(1) $f(x) = f(-x), \therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x) = |1 + x| - |1 - x| \leq |1 + x + 1 - x| = 2$

(3) 易知，$f(x)$ 是一个分段函数，$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$，下面当 $-1 \leq x \leq 1$ 时，$f(x) = 2x \therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2} \\ 4x & \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\therefore$ 可得，$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

$$\begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^{(n-1)}} \\ 2^{(n-1)}x & \frac{-1}{2^{(n-1)}} \leq x \leq \frac{1}{2^{(n-1)}} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $a > 0, b > 0$. 求证:
   (1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$;
   (2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a + b) \geq f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 $\therefore \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(b)}{b}$, $\therefore af(a + b) \leq (a + b)f(a)$, $bf(a + b) \leq (a + b)f(b)$, 可得 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a > 0, b > 0$ 时，有
   (1) 当 $p > 1$ 时, $(a + b)^p \geq a^p + b^p$;
   (2) 当 $0 < p < 1$ 时，$(a + b)^p \leq a^p + b^p$.

解

(1) 令 $f(x) = x^p$, $\frac{f(x)}{x} = x^{p-1}$, $\because p > 1, p - 1 > 0$ $\therefore x^{p-1}$ 单调递增, 由第二题可得 $f(a + b) \geq f(a) + f(b) \therefore (a + b)^p \geq a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$.
   (1) 问这种函数有几个?
   (2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ $\because f(f(x)) \equiv x \therefore f(y) \equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y = x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若 $y = f(x)(x \in (-\infty, +\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x = b(b > 0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)=-f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, $f(b+x)=f(b-x)$, 即 $f(b+b+x)=f(-x)=-f(x)$, $f(x+2b)=-f(x)=-f(x+2b-2b)=f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b)=f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f:X\to Y$ 时满射, $g:Y\to Z$. 求证：$g\circ f:X\circ Z$. 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

解 $g\circ f:X\circ Z$ 有反函数, 说明 $g\circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g\circ f)$ 的反函数为 H, 假设 $H(a)=b$, 有 $(g\circ f)(b)=a$, 左乘 g^{-1}, 即 $f(b)=g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1}, 即 $b=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)\therefore H=f^{-1}\circ g^{-1}, (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
   (1) 当 $a\neq 0$ 时, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$
   (2) 举例说明当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\neq 1$ 可能成立;
   (3) 举例说明当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n\neq 1$ 可能成立.

   解

   (1) 由已知条件知: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据 $\varepsilon-N$ 定义知, $\forall\,\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon\because\ n>N$, 那么 $n+1>N$, $\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N$, 有 $n+1>N$ $\therefore|a_{n+1}-a|<\varepsilon$, $\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a\ \therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$.
   (2) 例: $a=\frac{1}{2^n}$.
   (3) 例: $x_n=\frac{n+1}{n}$.

2. 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

   解 令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 其中 $a<1$, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a$, 又由已知表达式得 $a=1-\sqrt{1-a}$, 解得: $a=0$. 又 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}$, 根据洛必达得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$.

3. 设 $c>1$, 求序列 $\sqrt{c},\sqrt{c\sqrt{c}},\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}},\cdots$ 的极限.

   解 根据表达式可得, $x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}$, $x_{n+1}-x_n=\sqrt{c\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt{x}}(\sqrt{c}-x_n^{\frac{3}{4}})$. 假设: $x_n<c^{\frac{3}{2}}$. 下面用归纳法来证明:
   当 $n=1$ 时, $x_1=\sqrt{c}<c^{\frac{3}{2}}$
   当 $n=k$ 时, 假设 $x_n<c^{\frac{3}{2}}$
   那么 $n=k+1$ 时,$x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}<\sqrt{c\cdot c^{\frac{3}{2}}}=c^{\frac{5}{4}}<c^{\frac{3}{2}}$, $\therefore x_n<c^{\frac{3}{2}}$, 且 $x_{n+1}-x_n>0$, 由单调有界定理可知数列 x_n 存在极限。令 $\lim\limits_{x_n}=a\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}x_{n+1}=a, a=\sqrt{ca}, a=c$
   $\therefore\lim\limits_{x_n}=c$

4. 设 $A>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\,(n=1,2,\cdots)$
   (1) 求证: x_n 单调下降且有界;
   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   解

   (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\geq\sqrt{A}$, 说明 x_n 有下界.
   $\because x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}(\frac{A}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2}\frac{A-x_n^2}{x_n}$, 又 $\because x_n\geq\sqrt{A}\therefore x_{n+1}-x_n<0$,

所以, x_n 单调递减且有下界.

(2) 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

5. 设 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解 令 $x_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}(x_n > 0)$, 根据表达式有 $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1 + x_n) > 1$,即$x_n > x_{n+1}$, 根据单调有界定理可得 x_n 存在极限, 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a > 0) \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$, 解得: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 求证:

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n} - 2\sqrt{n}$ 的极限存在.

解

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1},\ x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.\therefore\ x_{n+1} < x_n$, 数列 x_n 是递减数列.

下证: $x_n > -2$;

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 2[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n}] > 2[\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - 1) - x\sqrt{n} > -2$.

7. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 a_n, b_n 的极限存在.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2}).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设 $c > 0$, 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.

12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \le a_n \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.

13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|(n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $0 < q < 1$. 求证: 序列 x_n

的极限存在.

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x)-f(y)| \le q|x-y| \quad (\forall x,y \in (-\infty,+\infty))$$

其中 $0<q<1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty,+\infty)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0=a, x_1=b(b>a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n}=\frac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3},\ x_{2n+1}=\frac{2x_{2n}+x_{2n-1}}{3} \quad (n=1,2,\cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x)\le f(x)\le g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=A=\lim_{x\to\infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$(分别讨论 $A=+\infty,-\infty,$).

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=A(>0)$, 求证:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=+\infty$$

3. 设 $0<x_n<+\infty$, 且满足 $x_n+\frac{4}{x^2}<3$, 求证: 极限 $\lim\limits_{x_n},.$

4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

求证:$f(x)\equiv 0$.

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上定义,$g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=+\infty.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$

6. 设 $x_n=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot 2}+\frac{1}{n\cdot 1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

8. 设 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0.$

9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续.

10. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 求证:

(1) $|f(x)|\in C[a,b]$;

(2) $max\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$;

(3) $min\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$.

11. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ ($\forall x \in [a,b]$). 对 $\forall x_1 \in [a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$ 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满足 $c = f(c)$.

12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}) = 2$

13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

练习题

1. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上单调. 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.

2. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且严格单调, 又

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程 $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3$ 有且仅有三个根.

3. 设 $f_n(x) = x^n + x$. 求证:

(1) 对任意自然数 $n > 1$, 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根;

(2) 若 $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ 是 $f_n(x) = 1$的根, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在, 并求此值.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 求证: $\exists c \in [a,b]$, 使得对 $\forall \delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ 上无界.

5. 设 x_n 为有界序列. 求证:x_n 以 a 为极限的充分必要条件是: x_n 的任一收敛子序列都有相同的极限值 a.

6. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$. 求证:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| \le \max_{a\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|g(x)|.$$

7. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x^*, 又设使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x^*)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

8. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 又设对 $\forall l \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = l$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有有限个解或无解. 求证:

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上无界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

9. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 存在 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 求证:$f(f(x))$ 至少在两个点处取到最小值.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义, $x_0 \in [a,b]$. 如果对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 那么称 $f(x)$ 在点 x_0 处**上半函数**. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都上半连续, 则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个半连续函数. 求证:$[a,b]$ 上的上半连续函数一定有上界.

11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:

(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (2) $f(x) = sinx$

12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:

(1) $f(x) = xsinx$; (2) $f(x) = sinx^2$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 对 $\forall h \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(h+n) = A$(有限数). 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = A$.

14. 设存在常数 $L > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 求证: $f(x) + g(x)$ 与 $f(x) \cdot g(x)$ 都在 (a,b) 内一致连续.

16. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 值域含于区间 (a,d), 又 $g(x)$ 在 (c,d) 内一致连续. 求证: $g(f(x))$ 在 (a,b) 内一致连续.

17. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且是周期为 T 的周期函数. 求证: $f(x)$ 在实轴上一致连续.

第 3 章 一元函数微分学

3.1 导数和微分

练习题

1. 用定义求 $f'(0)$, 这里 $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$
2. 设 $f'(x_0)$ 存在. 求证: 对数导数也存在并等于 $f'(x_0)$, 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

.

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,α_n,β_n 为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n-f(x_0+\beta_n))}{\alpha_n-\beta_n}=f'(x_0)$$

4. 设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的多项式, M 是它的最大实数. 求证:$P'(M)\geq 0$.
5. 给定曲线 $y=x^2+5x+4$.
   (1) 求曲线在点 $(0,4)$ 处的切线.
   (2) 确定 b 使得直线 $y=3x+b$ 为曲线的切线;
   (3) 求过点 $(0,3)$ 的曲线的切线.
6. 确定常数 a,b 使得函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1\\ x^2, & x\leq 1\end{cases}$ 有连续导数.
7. 设曲线由隐式方程 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}(a>0)$ 给出.
   (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
   (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.
8. 已知曳物线的参数方程为

$$x=a[\ln(\tan\frac{t}{2})+\cos t],\quad y=a\sin t\quad (a>0,0<t<\pi).$$

   求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与 x 轴交点之间的切线段为一定长.
9. 试确定 λ, 使得曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 与 $xy=\lambda$ 相切, 并求出切线方程.
10. 试确定 m, 使直线 $y=mx$ 为曲线 $y=lnx$ 的切线.
11. 设 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. (1)求证 : $(1-x^2)y'-xy=1$; (2)求$y^{(n)}(0)$.
12. 求 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数.
13. 设 $y=x^(n-1)\ln x$. 求证:$y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.
14. 求证: 双曲线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的向径与切线的夹角等于极角的两倍加 $\frac{\pi}{2}$
15. 设曲线既可用参数式 $x=x(t),y=y(t)$ 表示, 又可用极坐标 $r=r(\theta)$ 表示. 求

证:$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$.

3.2 微分中值定理

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除仅有的一个点都可导. 求证: $\exists c_1, c_2 \in (a,b)$ 及 $\theta \in (0,1)$, 使得
$$f(b) - f(a) = (b-a)[\theta f'(c_1) + (1-\theta)f'(c_2)]$$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且
$$f(a)\cdot f(b) > 0,\ f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0.$$
求证: 对 $\forall k \in R, \exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$.
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (0,3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$, 使得
$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < f'(\eta).$$
5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f''(x_0) \neq 0$. 求证:
   (1) 如果 $f'(x_0) = 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 0$;
   (2) 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_0)$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f'(\xi) > 0$.
7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(0) = 0$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f(\xi) > 0$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a,b)$, 使得 $f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$
   注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件 $f'(a) = f'(b) = 0$ 中的“=0”去掉了.
10. 设 $f(x)$ 在 (0,1] 上可导, 且存在有限极限 $\lim\limits_{h\to 0+}\sqrt{x}f'(x)$. 求证:$f(x)$ 在 (0,1] 上一致连续.

3.3 函数的升降、极值、最值问题

练习题

1. 求证:
   (1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 单调增加;
   (2) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$. 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调下降.
3. 求证: 对任何 $n(n>0)$ 次多项式 $P(x), \exists x_0>0$, 使得 $P(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$ 和在 $(x_0,+\infty)$ 上都是严格单调的.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证: 极大值必大于极小值.
5. 设 $a,b>0, k\in R$. 求证: 函数 $f(x)=a^2e^{kx}+b^2e^{-kx}$ 存在与 k 无关的极小值.
6. (1) 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f(x)\neq g(x), g(x)\neq 0$. 求证: $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值的充分必要条件是 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值.
   (2) 设 $b>a>0$, 求证: $f(x)=\frac{(x-a)(x+b)}{(x-b)(x+a)}$ 无极值.
7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 2.4 所示, 则 $f(x)$ 有 ( ).
   (A) 一个极小值和两个极大值;
   (B) 两个极小值和一个极大值;
   (A) 两个极小值和两个极大值;
   (A) 三个极小值和一个极大值;

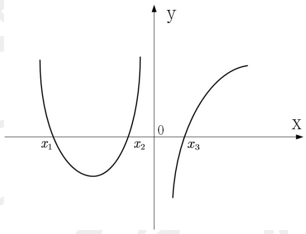

图 2.4

8. (1) 求证: 序列 $\{\frac{\ln n}{n}\}_{n=3}^{\infty}$ 为一递减序列;
   (2) 求序列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.
9. 假设 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 求证:$f(x)$ 在实轴上有真正得最小值.
10. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 在区间 $[a,b]$ 上只有一个极值点. 求证: 如果该点是极大值点必为最大值点; 如果该点是极小值点必为最小值点.
11. 求出满足不等式 $\frac{B}{\sqrt{x}}\leq \ln x\leq A\sqrt{x}\ (\forall\ x>0)$ 的最小正数 A 及最大负数 B.
12. 给定曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$.
    (1) 求过点 $(x_0,\frac{1}{\sqrt{x_0}})$ 的切线.
    (2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线在 x 轴与 y 轴上截距和最小.
13. 设正数 x,y 之和为一常数 $2a(a>0)$, 且指数 x^y 当 $x=a$ 时, 达到最大值. 求证: $a=e$.
14. 给定曲线 $y=\frac{1}{x^2}$.
    (1) 求曲线上横坐标为 x_0 的点处的切线方程;
    (2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线被坐标轴所截的长度最短.
15. 做一个无盖的圆柱形茶缸, 若体积 V 一定, 问底半径 R 与高 H 成何比例时, 使总面积最小 (即用料最省) ?
16. 有一半径为 a 的半球面形的杯子, 杯内放一长度为 $l(l>2a)$ 的均匀细棒, 求棒的平衡位置 (即求棒重心的最低位置).
17. 把一圆形铁片剪下中心角为 α 的一块扇形部分, 并将其围成一圆锥. 已知圆形铁片的半径为 R, 问 α 多大时, 圆锥的容积最大?

3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

练习题

1. 设 $a>0, b>0$. 求证: $f(x)=\sqrt{a+bx^2}$ 为凹函数.

2. 求证: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为凹函数.
3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上取正值, 且为凸函数. 求证: $\frac{1}{f(x)}$ 是在 (a,b) 上的凹函数.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微,$f''(x) \geq 0$. 求证:
   (1) $\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \in f'(x) \in \frac{f(x+h)-f(x)}{h}(0 < h < x)$;
   (2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x) = 1$.
5. 作出下列函数的图形:

   (1) $y = x^3 - x^2 - x + 1$; (2) $y = x \cdot e^{-x^2}$;
   (3) $y = x + \frac{1}{x}$; (4) $y = x \cdot \ln x$.

3.5 洛必达法则与泰勒公式

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) + xf'(x)] = l$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且

$$f(-1) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f'(0) = 0.$$

求证:$\exists\xi \in (-1,1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 求证:
   (1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微;
   (2) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调下降;
   (3) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹函数;
4. (1) 求证: $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}] = \frac{1}{3}$;
   (2) 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.
   (3) 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. 求证: 对 $\forall\lambda > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^{\lambda x}} = 0.$$

5. 将函数 $(1 - x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $x = 0$ 处泰勒展开公式至 x^4 阶项.
6. 将拉格朗日函数中值定理, 对 $\forall|x| \leq 1, \exists\theta \in (0,1)$, 使得

$$\arcsin x = \arcsin x - 0 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}.$$

求证:$\lim\limits_{x\to0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且

$$|f(x)| \le M_0, \qquad |f''(x)| \le M_2 \quad (\forall x > 0).$$

求证:$|f'(x)| \le 2\sqrt{M_0M_2}$ $(\forall x > 0)$.

8. 设 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. 求证: a 是 $P(x) = 0$ 的 k 重根的充分必要条件为

$$P^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, k-1), \quad P^{(k)}(a) \ne 0.$$

9. 若一实系数多项式 $P(x)$ 的根全是实根, 求证: $P(x)$ 各阶导数产生的多项式的根也全是实根, 且每一高阶导数的根均分布在底阶导数的根之间.

3.6 一元函数微分学的总合应用

1. 求证不等式:$1 + x^2 \le 2^x$ $(0 \le x \le 1)$.
2. (1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $(1+x)^\alpha \le 1 + ax$ $(x > -1)$, 且等号仅当 $x = 0$ 时成立;
   (2) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时, $(1+x)^\alpha \ge 1 + ax$ $(x > -1)$, 且等号仅当 $x = 0$ 时成立.
3. 设 $a > 0, b > 0$. 求证:
   (1) $a^p + b^p \ge 2^{(1-p)}(a+b)^p$ $(p > 1)$;
   (2) $a^p + b^p \le 2^{1-p}(a+b)^p$ $(0 < p < 1)$.
4. 设 $b \ge a$, 求证: $2\arctan\frac{b-a}{2} \ge \arctan b - \arctan a$.
5. (1) 设 $n \in N$, 求证:

$$(1 + \frac{1}{2n+1})(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{2n})(1 + \frac{1}{n})^n;$$

   (2) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n[e - (1 + \frac{1}{n})^n] = \frac{e}{2}$.
6. 设 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有正根 x_0, 则方程

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必存在小于 x_0 的正根.

7. 试确定方程 $e^x = ax^2 (a > 0)$ 的根的个数, 并指出每一个根所在的范围.
8. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 R 上连续可微, 且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0$, 试证 $f(x) = 0$ 的任何两个相邻实根之间必有 $g(x) = 0$ 的根.
9. (1) 求 $f(x) = \frac{1}{x^2} + px + q (p > 0)$ 的极值点与极值;
   (2) 求方程 $\frac{1}{x^2} + px + q = 0 (p > 0)$ 有三个实根的条件.
10. 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.
11. 对 $\forall n \in N$, 求证:$x^{n+2} - 2x^n - 1$ 只有唯一正跟.
12. 设 $k > 0$, 求证: 方程 $1 + x + \frac{x^2}{2} = ke^x$ 只有唯一实根.
13. 设 n 次多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ 满足下列条件:
    (1) $(\sum_{k=0}^n a_k) \cdot (\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k) < 0$;

(2) $P'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上处处不为零.

求证:$P(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有一个实根.

14. 设 $|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)|(\forall x \in (a,b))$ 并存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$.

求证:$f(x) \equiv 0$ $(\forall x \in (a,b))$.

第 4 章 一元函数积分学

4.1 不定积分和可积函数类

练习题

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$; (3) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}]\mathrm{d}x$;
(5) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}$; (8) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;
(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2}$; (10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$; (11) $\int \sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x$; (12) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x$.

2. 求下列不定积分 $I = \int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x, J = \int \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$; (3) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x(a>0)$; (4) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}(a\geq 0)$;
(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$; (6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\mathrm{d}x(a<b)$; (8) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; (2) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$; (3) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x$;
(4) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$; (5) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分:

(1) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; (2) $\int x^\alpha \ln x\mathrm{d}x$;
(3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$; (4) $\int x^2 e^{-2x}\mathrm{d}x$;
(5) $\int x\cos\beta x\mathrm{d}x$; (6) $\int x^2\sin 2x\mathrm{d}x$;
(7) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$; (8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$;
(9) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (10) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{1+\tan x}{\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
(3) $\int(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (4) $\int x(2-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

7. 求下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int \sqrt{x^2-a^2}$;
(3) $\int \arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$
(5) $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

8. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int x\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$;

9. 求下列不定积分的递推公式:

(1) $\int x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int x^n(\ln x)^{\mathrm{d}}x$;

(3) $\int \sin^n x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}(n \geq 2)$.

10. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{8-2x-x^2}$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x-1)}$;　　(4) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$;　　(6) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

11. 求下列不定积分:

(1) $\int \cos x\sin^2 x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;　　(3) $\int \tan x\sin^2 x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$;

(5) $\int \cos^4\sin^3 x\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$;　　(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\cos x}$;　　(8) $\int \frac{\sin 2x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x$.

12. 求下列不定积分:

(1) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$;

(3) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$.

13. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2}$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$;

(5) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

14. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

(3) $\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

15. 问下列积分是否可积 (即原函数是否为初等函数):

(1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;　　(2) $\int \sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$.

4.2 定积分概念、可积条件与定积分性质

练习题

1. 设 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $f(a)\geq a>0$. 求证:
   (1) $\frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$; (2) $\ln f(x)\in R[a,b]$.
2. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=0$.
3. 设 $f(x)\in R[0,1]$, 且 $f(x)\geq a>0$. 求证: $\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq\frac{1}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.
4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=0$.
5. 设 $a,b>0, f(x)\geq 0$, 且 $f(x)\in R[a,b]$, 又 $\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0$. 求证:
$$\int_{-a}^b x^2f(x)\mathrm{d}x\leq ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$$
6. 设 $f(x)\geq 0, f''(x)\leq 0(\forall x\in[a,b])$. 求证:
$$\max_{a\leq x\leq b}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\in R[a,b]$. 求证:
$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$
8. 设 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $a\leq f(x)\leq b$, 又 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凹函数. 求证:
   (1) $\varphi(f(x))\geq\varphi(t)+\varphi'(t)(f(x)-t)(\forall t\in(a,b))$;
   (2) $\int_0^1\varphi(f(x))\mathrm{d}x\geq\varphi(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)$.
   (3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\geq\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.
9. 求证: 极限 $\lim\limits_{b\to 1}\int_0^b\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x(0<b<1)$ 存在, 并且其极限值不超过 1.
10. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\mathrm{d}x$.

4.3 变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法

1. 设 $f(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}(x\neq 0); f(0)=0$
   (1) 问 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上可积?
   (2) 问变上限积分 $\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x=0$ 处是否可导?
2. 求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^\alpha}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;　　(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$;

3. 求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x+\sin^2 x}$.

4. (1) 设 $x \geq -1$, 求 $\displaystyle\int_{-1}^x (1-|t|)\mathrm{d}t$;

(2) 求 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x$;

5. 设 $f(2)=\frac{1}{2}, f'(x)=0, \displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$, 求 $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x/$

6. 设 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且当 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)=x$, 求

$$\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

7. 对任意自然数 n, 求证:

$$\int_0^\pi \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\mathrm{d}x = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 求证:

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=\int_a^x f''(t)(x-t)\mathrm{d}t\ (\forall x\in[a,b])$$

9. 设 $0<a<b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并满足

$$f(\frac{ab}{x})=f(x)\ (\forall x\in[a,b]).$$

求证:

$$\int_a^b f(x)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

10. 设 $a>0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 并满足

$$f(\frac{a^2}{x})=f(x)\ (\forall x>0)$$

求证:

(1) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x}dx$;

(2) $\int_1^a \frac{f(x^2)}{x} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx$;

(3) 如果 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 则 $\int_0^1 g(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a g(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$.

11. (1) 设 $f(x)$ 是奇函数, 求证: $f(x)$ 的任一原函数是偶函数;

(2) 设 $f(x)$ 是偶函数, 求证: $f(x)$ 的任意原函数是奇函数和常数之和.

12. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

13. 设函数 $f(x)$ 二阶可微, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2})| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

14. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $\exists m \in N$, 使得

$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0 \quad (n = 0,1,\cdots,m)$$

求证:$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $m+1$ 个零点.

15. 设 $S(x) = \int_0^x |\cos t|dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$.

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 求

$$\lim_{a\to0^+} \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a [f(t+a)-f(t-a)]dt$$

.

17. (1) 设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积分, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt = l$$

.

(2) 第 (1) 小题的逆命题是否成立? 如果加上一个条件: “$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升”, 第 (1) 小题的逆命题是否成立?

18. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = A$$

.

19. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(x) \geq 0(\forall x \in C[a,b])$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升, 函数

$$F(x) \overset{定义}{=} \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t\mathrm{d}t), & x > 0 \\ f(0+0), & x = 0 \end{cases}$$

求证: 在 $[0,+\infty)$ 上, $F(x)$ 单调上升且右连续.

4.4 定积分的应用

练习题

1. 求
   (1) 椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积;
   (2) 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.
2. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与两平面 $z = 0, z = 2(x + a)$ 所围立体的体积和侧面积.
3. 设心脏线为 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$. 求
   (1) 所围成图形的面积;
   (2) 它的长度;
   (3) 它绕极轴旋转一周所围成立体的体积;
   (4) 它绕极轴旋转一周所产生立体的侧面积.
4. (1) 求半圆 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心.
   (2) 求锥体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ 的重心和绕 z 轴的转动惯量 (设锥体的密度为 1).
5. 有一半径 $R = 3\text{m}$ 的圆形溢水洞, 水半满, 求水作用在闸门上的压力.
6. 已知抛物线 $y = -ax^2 + b(a > 0, b > 0)$. 求 a 和 b 的值, 使满足下面两个条件:
   (1) 抛物线与 x 轴围成的曲边梯形包含正方形

$$(x,y)| - 1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$$

   (2) 抛物线与 x 轴围成的曲边梯形面积最小.
7. 已知抛物线 $x^2 = (p - 4)y + a^2(p \neq 4, a > 0)$. 求 p 和 a 的值, 使满足下面两个条件:
   (1) 抛物线与 $y = x + 1$ 相切;
   (2) 抛物线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转有最大的体积.
8. 某建筑工程打地基时, 需要气锤将桩打进土层, 气锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 k $(k > 0)$), 气锤第一次击打讲桩打进地下 am. 根据设计方案, 要求气锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$. 问

(1) 气锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?
(2) 若击打次数不限, 气锤至多能将桩打进地下多深?

4.5 广义积分

练习题

1. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}}$;

(3) $\displaystyle\int_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-a)}}$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}(p>q)$; (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

2. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{1}\ln x\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{1}\ln\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x\ln(1-x)}{x(1-x)\mathrm{d}x}$; (4) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$.

3. 判别广义积分 *displaystyle* $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x(b>a>0)$ 的收敛性.
4. 判别下列广义积分的收敛性与绝对收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\sin x\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}\mathrm{d}x$.

5. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\sin(x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: $\displaystyle\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$$

第 5 章 级数

5.1 级数敛散判别法与性质、上极限与下极限

练习题

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$.

2. 判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}\cdot 2^n}{n^{\frac{n}{2}}}$;

(7) $\frac{3}{1} + \frac{3\cdot5}{1\cdot4} + \frac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{1\cdot4\cdot7\cdot10} + \cdots$.

3. 判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\sqrt{n}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}(p > 1)$.

4. 判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$;　　(2) $\lim\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1]$　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n})(a > 0)$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^p (p > 0)$.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(A)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(B)$ 皆收敛, 且 $a = n \le c_n \le b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(C)$ 收敛; 若级数 $(A), (B)$ 皆收敛, 问级数 (C) 的收敛性如何?

6. 若正向级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,a_n 单调递减. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=[\frac{n}{2}]+1} na_k = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

7. 若正向级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项 a_n 单调递减, 且 $\sum \lim\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. 设 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 收敛的充分必要条件为下面的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

9. 判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

10. 判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{a^n}{1+a^n}(a>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}$.

11. 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot e^{-nx}$.

12. 讨论下列级数的收敛性于绝对收敛性 $(p>0)$:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+(-1)^{n-1})^p}$.

13. 求证: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则下列级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot b_n, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$$

皆收敛.

14. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

15. (1) 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调上升. 求证: 当 x_n 有界时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$$

收敛, 当 $\{x_n\}$ 无界时, 该级数发散.

(2) 设 $\alpha \geq 1, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+\alpha}(n=1,2,3,\cdots)$. 求证:$(n^{\alpha}a_n)$ 是收敛数列.

16. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的平方 (指柯西乘积) 是发散的.
17. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的平方 (指柯西乘积) 是收敛的.
18. 用级数方法证序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}}$ 的极限存在 $(n \to +\infty)$.
19. 设 $p_n > 0(n = 1,2,\cdots)$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛, 求证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\text{收敛}$$

20. 设 a_n, b_n 满足关系式 $a_{n+1} = b_n - qa_n(0 < q < 1)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 存在, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.
21. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}(n = 1,2,\cdots)$. 求证:
    (1) $1 \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \le 2$
    (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求其极限值.
22. 设序列 $\{a_n\}$ 有界, 并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} + 2a_n) = 0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
23. 求证 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \le 1(S_n \ge 0)$ 的充要条件为: 对任一大于 1 的数为 l, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{l^n} = 0$.
24. 设 $0 \le x_{n+m} \le x_n \cdot x_m\ (x, m \in N)$. 求证: 序列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 极限存在.
25. (1) 设 $0 < q < l$, 求证:$\exists r \in (q, 1)$, 使 n 充分打时, 有

$$1 + \frac{q}{n} < (1 + \frac{1}{n})^r\ (n > N);$$

    (2) 设 $a_n > 0$, 求证:$\varlimsup\limits_{n\to\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}) - 1 \ge 1$.

5.2 函数级数

练习题

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性:
    (1) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, i)\ 0 \le x \le b < 1; ii)\ 0 \le x \le 1; iii)\ 1 < a \le x < +\infty$.
    (2) $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1 + e^{-nx}),\ i)\ x \le 0;\ ii)\ x < 0$.
2. 设 $f(x)$ 在 (A, B) 内有连续导数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) \overset{\text{记为}}{=} n[f(x + \frac{1}{n} - f(x))].$$

求证: 当 $n \to \infty$ 时, $f_n(x)$ 在闭区间 $[a, b] \subset (A, B)$ 上一致收敛于 $f'(x)$.
3. 求证下列级数在所示区间上的一致收敛性:
    (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}\ (|x| < +\infty)$;
    (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\ \ (-\pi + \delta \le x \le \pi - \delta, \delta > 0)$;
    (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}x^{n+a}\ \ (0 < a < 1, 0 \le x \le 1)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{x^2+n^2}}$ $(|x| < +\infty)$.

4. 设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续而且非负, $\lim\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 收敛, 且和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a.b]$ 上连续, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

5. 求证: 级数 $\lim\limits_{n=0}^{\infty} x^N \sin^2 \pi x$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

6. 给定序列 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}(n = 1,2,\cdots)$. 求证:

(1) $\int_0^1 [\lim\limits_{n\to\infty}]\mathrm{d}x \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$;

(2) 序列 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

7. 求证下列级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \ln x$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

8. 求证: 级数 $\int\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上不一致收敛.

9. 设 $f_n(x)\ (n = 1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 且

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{R} f(x) \quad (n \to \infty),$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

10. 设 $f_n(x)\ (n = 1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $n \to \infty$ 时,

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{[a,b]} f(x).$$

又设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点, 求证:

(1) 当 n 充分大时, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也无零点;

(2) $\frac{1}{f_n(x)} \xrightarrow[\text{一致}]{[a,b]} \frac{1}{f(x)}$ $(n \to +\infty)$

11. 设 $f_n(x) \in C[a,b]\ (n = 1,2,\cdots)$, $f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{[a.b]} f(x)$. 求证:

(1) $\exists M$, 使 $|f_n(x)| \leq M, |f(x)| \leq M\ (a \leq x \leq b, n = 1,2,\cdots)$;

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 $g(f_n(x)) \xrightarrow[\text{一致}]{[a,b]} g(f(x))$.

12. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-nx}$, 求证:

(1) $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 $x > 0$ 上连续可微.

13. 求证:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \ln^2 x$ 在 $[0,1]$ 上一致连续;

(2) $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x}\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$.

14. 求证:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛; (2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上无穷多次可微, 且序列 $f^n(x)$ 在 $(-a,a)$ 上一致收敛到函数 $\varphi(x) = Ce^x$ (C为常数).

16. 求证: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-\frac{1}{n}|}{2^n}$$

在 $(0,1)$ 上连续, 除点 $x_k = \frac{1}{k}$ $(k = 2,3,\cdots)$ 处不可微.

17. 设 x_n 是 $(0,1)$ 内一个序列, 即 $0 < x_n < 1$ 且 $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$. 求证: 函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在 $(0,1)$ 中除点 $x_n(n = 1,2,\cdots)$ 处不连续外皆连续.

5.3 幂函数

练习题

1. 求下列幂函数的收敛半径, 并讨论收敛区间端点的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}x^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}^{n^2})x^{2n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}\infty\frac{2^n+3^n}{n}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n x^n$.

2. 求下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[x(1+x)]^{3^n}$.

3. 给定零阶贝塞尔函数:

$$y = J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}},$$

求证: 它在实轴上满足方程:

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!2^n}x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$.

5. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$.

6. 设 $0<a<1$, 求证:

(1) $\displaystyle\int_0^b\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}b^{n+a}\ (0\le b<1)$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}b^{n+a}$ 对在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}$.

7. 已知零阶贝塞尔函数:

$$J_0(x)\overset{\text{定义}}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

求证: $J_0(x)=\int\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$.

8. 设对 $\forall k\in N,|f^{(k)}(x)|\le M^k\ (|x|<a)$, 其中 M 为与 k 和 x 都无关的常数. 求证:

(1) $f(x)$ 可以在 $(-a,a)$ 上展开成幂级数;

(2) $f(x)$ 可以开拓到 $(-\infty,+\infty)$, 且在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷多次可微.

9. 把下列函数在 $x=0$ 点展开成幂级数:

(1) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;

(2) $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$;

(3) $\cos^2x$;

(4) $\ln(1+x+x^2)$;

(5) $\ln(1+x+x^2+x^3)$

(5) $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

10. 求证下列展开式成立:

(1) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (|x|\le 1)$;

(2) $\mathrm{artan}\frac{2x}{2-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\ (|x|\le\sqrt{2})$.

11. (1) 将 $(\arctan x)^2$ 在 $x=0$ 点展开为幂级数;

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1})$ 的和.

12. 求下列幂级数的收敛半径, 并讨论收敛区间端点的收敛性;

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^nx^n}{n!}$.

13. (1) 求证: 函数 $y=\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$ 满足方程

$$(1-x^2)y'-xy=1,$$

并由此求出 $y^{(n)}(0)/n!$;

(2) 求证: $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\ \ (|x|<1)$;

(3) 求证: $(\arctan x)^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{n+1}\ (|x|\le 1)$.

14. 设 $0<\theta<2\pi$, 利用幂级数的乘法求证:

(1) $\frac{\cos\theta-x}{1-2x\cos\theta+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\theta x^{n-1}\ \ (|x|<1)$.

15. 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $\arctan\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}$; (2) $-\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$.

16. 设 $0<\theta<2\pi$, 求证:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln 2\sin\frac{\theta}{2}$;

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上不一致收敛.

17. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 1, 求

$$F(x)\overset{\text{定义}}{=}\frac{f(x)}{1-x}$$

的幂级数展开式, 并求出它的收敛半径.

18. 设 $A=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n, B=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$, 又已知这两个级数的柯西乘积产生的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_n+\cdots+a_nb_0)$$

收敛. 求证: 乘积级数的积等于 $A\cdot B$.

5.4 傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛

练习题

1. (1) $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[0,\pi]$ 上的正交系;

(2) $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[0,\pi]$ 上的正交系;

(3) $l,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots$ 是 $[-l,l]$ 上的正交系.

2. 将下列函数展开成傅氏级数:

(1) $f(x)=\sin^4x\ \ (-\pi<lex\le\pi)$;

(2) $f(x)=\sec x\ \ (-\pi\le<x\le\pi)$;

(3) $f(x)=\sin\frac{x}{2}\ \ (-\pi<x<\pi)$;

(4) $f(x)=|\sin x|\ \ (-\pi\le x\le\pi)$.

3. 将 $f(x)=|x|(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅氏级数, 并求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

4. 将 $f(x)=e^x(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅氏级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和.

5. 将 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<a<1,\\ 2, & h\le x\le\pi\end{cases}$

(1) 按余弦展开; (2) 按正弦展开.

6. 求证:

(1) $\frac{\pi}{\tan a\pi}=\frac{1}{a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $(0<a<1)$

(2) $\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ $(0<x<\pi)$;

(3) $\frac{1}{\sin^2}=\frac{1}{x^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(x-n\pi)^2}+\frac{1}{(x+n\pi)^2}]$ $(0<x<\pi)$.

7. 求证:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|\mathrm{d}x=4$ $(n\in N)$;

(2) 若 $\forall a\in N$, 设 $T_n(x)$ 是任意的 n 阶三角矩阵, 其中 $\cos nx$ 的系数为 1, 则

$$\max_{|x|\le\pi}|T_n(x)|\ge\frac{\pi}{4}.$$

8. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{x}})\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

9. 设 $f(x)\in C[0,T], g(x)$ 是周期为 T 的连续周期函数, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

.

10. 设 $0<a<1$, 求证:

(1) $\lim\limits_{b\to1}\int_0^b\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}$;

(2) $\lim\limits_{b\to1}\int_0^b\frac{x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}$;

(3) $\int\limits_0^1\frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin a\pi}$;

(4) $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

11. 设 $f(x),g(x)\in LR^2[-\pi,\pi]$, 求证:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x=2[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)\mathrm{d}x]$$

.

12. 设 $f(x),g(x)\in LR^2[-\pi,\pi]$, 它们的傅氏级数分别记为 a_n,b_n; α_n,β_n. 求证:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

.

13. 利用上题结果, 求证: 如果 $f(x) \in LR^2[-\pi,\pi]$, 那么 $f(x)$ 的傅氏级数可逐项积分, 即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

14. 利用逐项积分定理, 将 $f(x) = x^4\ (-\pi \le x \le \pi)$ 展开为傅氏级数, 并用下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$.

15. 将如下定义的函数 $f(x)$ 展开为傅氏级数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/2h, & 2 \le |x| \le 2h, \\ 0, & 2h \le |x| \le \pi. \end{cases}$$

并求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nh}{n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 nh}{n^4}$.

16. 求证: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\quad (0 < x < 2\pi)$$

不可能是某个黎曼可积函数的傅氏级数.

17. 将函数 $f(x) = x\ (0 \le x \le 1)$ 展开为傅氏级数.

18. 将如下定义的函数 $f(x)$ 展开为傅氏级数:

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l \le x \le 2l. \end{cases}$$

19. 设 $f(x) \in C[-\pi,\pi], f(-\pi) = f(\pi)$, 且 $f(x)$ 是奇函数, 它的傅氏级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

求证: 对 $\forall h > 0$, 函数

$$F(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-k}^{x+k} f(t)\mathrm{d}t\quad (|x| \le \pi)$$

也是奇函数, 并求它的傅氏级数.

第 6 章 多元函数积分学

6.1 欧式空间、多元函数的极限与连续

练习题

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^m$. 证明: $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = 2(|\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2)$, 并说明等式的几何意义.
2. 证明下列三个命题等价:
   (1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$;
   (2) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$;
   (3) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$.
3. 设 $z \in \boldsymbol{R}^m$ 为常向量, c 为常数, 证明:
   (1) $H = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{x} \cdot z < c\}$ 是开集;
   (2) $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{x} \cdot z \geq c\}$ 是闭集.
4. 试画出下列集合 Ω 的图形:
   (1) $\{(x, y) | y > 0, x > y, x < 1\}$;
   (2) $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 2y+2\}$
   (3) $\{(x, y) | 1 \leq xy \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 1\}$;
   (4) $\{(x, y, z) | 0 < x < y < z < 1\}$.
5. 证明:

(1) $(A \cup B)^{\circ} \supset A^{\circ} \cup B^{\circ}$;　　(2) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} + \overline{B}$。

6. 设 A, B 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的有界集. 证明:

(1) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$;　　(2) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

7. 设 A, B 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中不相交的闭集, 求证: 存在开集 W 和 V, 满足 $A \subset W, B \subset V$, 而 $W \cap V = \varnothing$.
8. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^m$, 证明: $E = \{\boldsymbol{x} | \rho(\boldsymbol{x}, E) = 0\}$.
9. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的有界闭集列, 满足 $F_n \supset F_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$, 又 F_n 的直径 $d_n = d(F_n) \to 0\ (n \to \infty)$. 求证: 存在惟一的一点 $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{R}^m$, 使得 $\boldsymbol{x_0} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.
10. 设 E, F 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的闭集, E, F 中至少有一为有界集, 求证: $\exists \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F$, 使得 $\rho(x, y) = \rho(E, F)$.
11. 设 D 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的凸集, 证明: $\overline{D}$ 也是凸集.
12. 证明:
    (1) $|\boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\frac{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}|^2}{|}| = |\boldsymbol{x}|\ (\boldsymbol{a} \neq 0)$;
    (2) $|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}| - \frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}| = \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$;
    (3) 设 $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^2| = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}/|\boldsymbol{y}|^2|$.
13. 确定并画出下列函数的定义域, 指出后两题的等位面是什么曲面 (或曲线):

(1) $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; (2) $u=\sqrt{\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-x}}$;

(3) $u=\arcsin\frac{y}{x}$; (4) $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

14. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{\cos x+\sin y}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$; (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

15. 对下列函数 $f(x,y)$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在:

(1) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$; (2) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

16. 问下列函数是否在全平面连续, 为什么?

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{y^2}}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

17. 设函数 $f(x,y)$ 在半开平面 $x>0$ 上连续, 且对 $\forall y_0$, 极限

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y)=\varphi(y_0)$$

存在. 当函数 f 在 y 轴上补充定义 $\varphi(y)$ 后, 证明: 函数 $f(x,y)$ 在闭半平面 $x\geq 0$ 上连续.

18. 设函数 $f(x,y)$ 在开半平面 $x>0$ 上一致连续. 证明:

(1) $\forall y_0$, 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}}=\varphi(y_0)$ 存在;

(2) 函数在 y 轴上补充定义 $\varphi(y)$ 后, 所得函数 $f(x,y)$ 在 $x\geq 0$ 上一致连续.

19. 设 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x_0}\in\boldsymbol{R}^m$ 点连续, 且 $f(\boldsymbol{x_0})>0$. 证明: 存在 $\boldsymbol{x_0}$ 的一个领域 $U(\boldsymbol{x_0};\delta)$, 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x_0};\delta)$ 上取正值.

20. 设 E 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中任意点集, 求证: $\rho(\boldsymbol{x},E)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 上一致连续.

21. 设 $f(\boldsymbol{x})\in C(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{R})$, 对任意实数 α, 作集合

$$G=\boldsymbol{x}|f(\boldsymbol{x}>\alpha),\quad F=\boldsymbol{x}|f(\boldsymbol{x})\geq\alpha.$$

求证: G 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集, F 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的闭集.

22. 设 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$. 求证 L
  (1) $\exists a > 0, b > 0$, 使得 $a|\boldsymbol{x}| \leq \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i| \leq b|\boldsymbol{x}|$;
  (2) $\exists a > 0, b > 0$, 使得 $a|\boldsymbol{x}| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq b|\boldsymbol{x}|$.

23. 设 A 是 $m \times m$ 矩阵, $\det A \neq 0$, 求证: $\exists a > 0$, 使得

$$|A\boldsymbol{x}| \geq a|\boldsymbol{x}| \ (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m).$$

24. 设 $\overline{\Omega} \subset \boldsymbol{R}^m$ 是有界闭区域, $f(\boldsymbol{x}) \in C(\overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^m)$, 且是单叶的. 求证:$f^{-1}(x)$ 在 $f(\overline{\Omega})$ 上连续.

25. 设 $f(x, y)$ 除直线 $x = a$ 与 $y = b$ 外有定义, 且满足:
  (1) $\lim\limits_{y \to b} f(x, y) = \varphi(x)$ 存在;
  (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \phi(y)$ 一致存在 (即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, 当$0 < |x - a| < \delta$,时,$\forall y \neq b$,有$|f(x, y) - \phi(y)| < \epsilon$). 证明:
    I. 累次极限 $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x, y) = \lim\limits_{x \to a} \phi(x) = c$ 存在。
    II. 累次极限 $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \lim\limits_{y \to b} \phi(y) = c$
    III. 全面极限 $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = c$.

6.2 偏导数与微分

练习题

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $u = \tan\frac{x^2}{y}$;

(3) $u = \sin(x\cos y)$; (4) $u = e^{\frac{x}{y}}$;

(5) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; (6) $u = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$;

(7) $u = (\frac{x}{y})^z$; (8) $u = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. 设置 $f(x, y)$ 在园 Ω 上的偏导数 f'_x, f'_y 存在且有界. 证明:$f(x, y)$ 在 Ω 上一致连续. 若 Ω 是任意区间, 问区间是否成立. 考察例子

$$f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}),$$

Ω 用极坐标表示为 $1 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi$.

3. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:
  (1) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续;

(2) $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在;
(3) $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续;
(4) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

4. 设
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$
证明: $f(x,y)$ 在平面上可微.

5. 求下列复合函数的偏导数:

(1) $u=f(\frac{xz}{y})$;
(2) $u=f(x+y,z)$;
(3) $u=f(x,xy,xyz)$;
(4) $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$;
(5) $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$;
(6) $u=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$.

6. 设 $u=x^nf(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$, 其中 f 可微. 证明 u 满足方程:
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=n\cdot u.$$

7. 证明: $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z).$$

8. 作自变量变换: $x=\sqrt{vw}, y=\sqrt{wu}, z=\sqrt{uv}$, 它把函数 $f(x,y,z)$ 变为 $F(u,v,w)$. 证明:
$$xf'_x+yf'_y+af'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

9. 令 $\xi=2xy,\eta=x^2-y^2$, 解下列方程 (解可含任意函数):

(1) $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;
(2) $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

10. 令 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$, 求方程 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ 的解.

11. 设 $u(x,y),v(x,y)$ 为连续可微函数, 且满足方程组
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$
作自变量变换: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 证方程组变成为
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

12. 再对上题所得方程组做变换:$R=\sqrt{u^2+v^2},\Phi=\arctan\frac{v}{u}$. 证明方程组变为
$$\frac{\partial \ln R}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\theta}, \frac{1}{r}=\frac{\partial \ln R}{\partial \theta}=-\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

.

13. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2,(x_0,y_0)=(1,1)$.
   (1) 若方向 $\boldsymbol{l}$ 与基 $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\partial\pi 6$, 求方向导数 $\frac{\partial f(1,1)}{\partial \boldsymbol{l}}$;
   (2) 求在怎样的方向上方向导数 $\frac{\partial f(1,1)}{\partial \boldsymbol{l}}$ 有最大值、最小值、等于零.
14. 设 $u=f(x,y,z)$, 令

$$x=r\sin\varphi cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi.$$

在 (x,y,z) 点作三个互相正交的向量 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_\theta$. 向量 $\boldsymbol{e}_r$ 表示 φ,θ 固定沿着 r 增加的方向, 其余两个作类似理解. 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}_r}=\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}_\varphi},\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}_\theta}=\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

15. 设在第一卦限上连续可微函数 $u(x,y),v(x,y)$ 满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x},$$

且 u 只是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的函数, 试求出 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$.
16. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在凸函数 $\boldsymbol{\Omega}\subset\boldsymbol{R}^m$ 上, 对 $\forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{\Omega},t\in[0,1]$, 满足

$$f[t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2]\le tf(\boldsymbol{x}_1)+(1-t)f(\boldsymbol{x}_2),$$

则称 f 为凹函数. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸域 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的可微凹函数, 证明:
   (1) $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})\ge\frac{f[\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})]-f(\boldsymbol{x_0})}{t}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x_0}\in\boldsymbol{\Omega}$;
   (2) $f(\boldsymbol{x})\ge f(\boldsymbol{x_0})+\mathrm{D}f(\boldsymbol{x_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}))$.
17. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $u=xy+\frac{y}{x}$;　　(2) $u=(xy)^z$.

18. 对下列函数求指定阶的偏导数:
   (1) $u=x^4+y^4-2x^2y^2$, 求所有三阶偏导数;
   (2) $u=x^3\sin y+y^3\sin x$, 求 $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$;
   (3) $u=\mathrm{e}^{xyz}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;
   (4) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$.
19. 求高阶导数:

(1) $u=(x-a)^p(y-b)^q$, 求 $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$;　　(2) $u=\frac{x+y}{x-y}(x\ne y)$, 求 $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$;
(3) $u=\ln(ax+by)$, 求 $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$;　　(4) $u=xyze^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.

20. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $u=f(x+y,xy)$; (2) $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$;

(3) $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$; (4) $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

21. 验证下列函数满足调和方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(1) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (2) $u=\arctan\frac{y}{x}$.

22. 证明: 函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ $(a,b$ 为实数) 当 $t>0$ 时满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

23. 设 $x=f(u,v),y=g(u,v)$ 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u},$$

又设 $w=w(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$. 证明:

(1) 函数 $\omega=\omega[f(u,v),g(u,v)]$ 满足方程: $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$;

(2) $\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$.

24. 作变量替换 $\xi=x+t,\eta=x-t$, 求解方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 并验证之.

25. 求下列函数在 $(0,0)$ 点领域展开为带皮亚诺余项的四阶泰勒公式:

(1) $u=\sin(x^2+y^2)$; (2) $u=\sqrt{1+x^2+y^2}$;

(3) $u=\ln(1+x)\ln(1+y)$; (4) $u=\mathrm{e}^{\cos y}$.

26. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x$, 试求出函数 $f(x,y)$.

27. 设 Ω 为含原点的凸域, $u=f(x,y)$ 在 Ω 上可微, 且满足

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

求证: $f(x,y)$ 在 Ω 上恒为常数. 若 Ω 不含原点, 问 $f(x,y)$ 是否为常数. 考察例子 $u=\arctan\frac{y}{x}$.

28. 求下列函数 $f(\boldsymbol{x})$ $(x\in\boldsymbol{R}^m)$ 的微分:

(1) $f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$, 其中 A 为 $n\times m$ 矩阵, $b\in\boldsymbol{R}^n$;

(2) $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$.

29. 设 $f:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^l,g:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ 是可微函数. 试用复合函数求导公式, 证明公式

$$Df(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})Dg(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})Df(\boldsymbol{x}).$$

30. 设 $f(\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}),\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^m$.

(1) 求 $Df(\boldsymbol{x})$;

(2) 取方向 $\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$, 求方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$;

(3) 取方向 l 满足 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{x} = 0$, 求方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$;

(4) 求导数的范数 $||Df(\boldsymbol{x})||$.

31. 求下列变换的雅可比行列式:

(1) $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$, 求 $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}$.

(2) $x_1 = r\cos\theta_1, x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2$, 求 $\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta_1,\theta 1_2)}$;

(3) $$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, & r \geq 0, 0 < \theta_1, \cdots, \theta_{m-2} < \pi, \\ \quad\vdots & 0 < \theta_{m-1} < 2\pi \\ x_{m-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1}, \\ x_m = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-1}, , \end{cases}$$

试求用数学归纳法求 $\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})}$.

32. 设 $\boldsymbol{\Omega}$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的凸区域, $f(\boldsymbol{x}) \in C^2(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{R})$. 若 f 的海色矩阵 $H_f(\boldsymbol{x})$ 是半正定的. 证明: $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的凹函数.

6.3 反函数与隐函数

练习题

1. 求由下列方程定义的函数 y 的一阶、二阶导数:

(1) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$;　　(2) $xy + 2^y = 0$.

2. 对下列方程所确定的 $x = z(x,y)$, 求一阶偏导数:

(1) $x^n + y^n + z^n = a^n$;　　(2) $x + y + z = e^{x+y+z}$.

3. 对下列方程所确立的 $z = z(x,y)$, 求二阶偏导数:

(1) $xy + yz + zx = 1$;　　(2) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

4. 求由下列方程所确定的 $z = z(x,y)$ 的微分:

(1) $f(xy, z-y) = 0$;　　(2) $f(x, x+y, x+y+z) = 0$.

5. 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf(\frac{z}{y})$ 所确定, 证明:

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

6. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定, 证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

7. 设 $u = u(x, y, z)$ 由方程 $F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$ 所确立, 证明:

$$\frac{u'_x}{x} + \frac{u'_y}{y} + \frac{u'_z}{z} = \frac{1}{u}.$$

8. 设 $u = u(x, y, z)$ 由方程 $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$ 所确立, 证明:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 = 2x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

9. 求函数 $z = f(x + y, z + y)$ 的二阶偏导数.

10. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} z = ax + y\varphi(a) + \psi(a), \\ 0 = x + y\varphi'(a) + \phi'(a) \end{cases}$$

所确立的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 0,$$

11. 若 $z = z(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 0$. 证明: 若把 $z = z(x, y)$ 中的 y 看成 x, z 的函数, 则它满足同样形状的方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - (\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z})^2 = 0.$$

12. 设 $u = \mathrm{e}^x \cos y, v = \mathrm{e}^x \sin y$. 求证:
    (1) 当 $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ 时, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, 但变换不是一一的;
    (2) 记 $\boldsymbol{\Omega} = \{(x, y) | 0 < 2y < 2\pi, -\infty < x < +\infty\}$, 这时变换在 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一一变换的, 并求出逆变换.

13. 求下列变换的雅可比行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$:

$$(1) \begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{x}{y}; \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

14. 由下列方程组求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$:

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

15. 求由方程组 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 的一阶、二阶偏导

数.

16. 设 $u = f(x-ut, y-ut, z-ut), g(x,y,z) = 0$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, 并问这时 t 是自变量还是因变量?
17. 设 $z = z(x,y)$ 满足方程组 $f(x,y,z,t) = 0, g(x,y,z,t) = 0$, 求 $\mathrm{d}z$.
18. 设 $\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{R}^m$ 是凸函数, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C^1(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{R}^m), D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是正定矩阵. 求证: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的单叶函数.
19. 设 $x \in \boldsymbol{R}^m, f(\boldsymbol{x} \in C^2(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x_0}), R)), Df(\boldsymbol{x_0}) = 0, \det H_f(\boldsymbol{x_0}) \neq 0$. 求证: $\exists\delta > 0$, 当 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x_0};\delta)\{\boldsymbol{x_0}\}$ 时, $\mathrm{D}f(\boldsymbol{x}) \neq 0$.
20. 假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C^1(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^m)$, 并存在 $\boldsymbol{R}^m$ 上 $\det D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, 又当 $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$ 时, $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \to +\infty$. 证明: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}^m) = \boldsymbol{R}^m$.

6.4 切空间与极值

练习题

1. 求曲线 $z = x^2 + y^2, 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ 在 $(1,1,2)$ 点的切线方程.
2. 在曲线 $y = x^2, z = x^3$ 上求一点, 使该点的切线平行于平面
$$x + 2y + z = 4$$
3. 求下列曲线在指定点的切线方程和切线方程:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$,	$M(3,4,12)$;
(2) $z = \arctan(x/y)$,	$M(1,1,\pi/4)$;
(3) $3x^2 + 2y^2 = 2z + 1$,	$M(1,1,2)$;
(4) $z = y + \ln(x/z)$,	$M(1,1,1)$.

4. 求曲面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ 在 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$ 点的切平面方程.
5. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的个切平面.
6. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 的切平面, 使其垂直于平面
$$x - y - z = 2 \text{ 和 } x - y - z/2 = 2.$$
7. 试确定正数 λ, 使曲面 $xyz = \lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的某点相切.
8. 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ 的切平面在坐标轴上割下的诸线段之和是为常量.
9. 证明: 曲面 $F(x - az, y - bz) = 0$ 的切平面与某一定直线平行, 其中 a, b 为常数.
10. 证明: 曲面 $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$ 在 $M(a_0, y_0, z_0)$ 点的法向量与向量 (x_0, y_0, z_0) 及 (a,b,c) 共面.
11. 求下列函数的极值:
    (1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;
    (2) $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)\ (0 \le x, y \le \pi)$;
    (3) $f(x,y,z) = (x + y + z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

12. 确立最小正数 A 和最大负数 B, 时使不等式

$$\frac{B}{xy} \le \ln(x^2+y^2) \le A(x^2+y^2)$$

在第一象限内成立.

13. 求函数 $f(a,b)=\int_0^1 [x^2-a-bx]^2\mathrm{d}x$ 的最小值.

14. 作容器为 V 的闭口长方形容器, 问长、宽、高成何比例时用料最省?

15. 有一块铁片, 宽 $b=24\text{cm}$, 要把它的两边折起来做一个槽, 使得容积最大, 求每边的倾角 α 和折起来的宽度 x.

16. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内接长方体, 求体积为最大的那个长方体.

17. 给定曲面 $z=1-x^2-z^2$, 求过第一象限中的曲面切平面, 使它与第一象限坐标面所围的四面体体积最小.

18. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u,$$

且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$. 证明:

(1) 当 $x^2+y^2\le 1$ 时, $u(x,y)\ge 1$;

(2) 当 $x^2+y^2\le 1$ 时, $u(x,y)>0$.

19. 设 $a>0, c>0, ac-b^2>0$, 则方程 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 表示椭圆. 试证该椭圆的面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$.

20. (1) 在 $x^2+y^2=1$ 的条件下, 求 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 的最大值与最小值;

(2) 利用 (1) 证明: 当 $a>0, ac-b^2>0$ 时, 二次型 $f(x,y)$ 是正定的; 当 $a<0, ac-b^2>0$ 时, 二次型 $f(x,y)$ 是负定的.

21. 求圆的内接 n 边形中面积最大者.

22. 求圆的外切 n 阶边形中面积最小者.

23. 证明: 椭圆的内接三角形中, 面积最大的三角形的顶点处的椭圆法线必与三角形的该顶点的对边垂直; 由此求出面积最大的内接三角形.

24. 给定椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(1) 求第一象限中椭球的切平面, 使它与坐标平面围成的四面体体积最小;

(2) 证明体积最小的椭球外切八面体体积 $\le 4\sqrt{3}abc$.

25. 设凸四边形各边长分别为 a,b,c,d. 求证: 凸四边形对角和为 π 时面积最大.

26. 长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成一个正方形, 另一段围成一个圆. 这两段的长各为多少时, 由它们所围正方形面积和圆面积之和最大?

27. 要制定一个中间是圆柱, 两端为相同的正圆锥的空浮标, 它的体积是一定的, 要使所用材料最省, 圆柱和圆锥的尺寸因成何比例?

28. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

29. 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中给定超平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}-c=0$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^m$,$c$ 为实数. $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^m$, 试求 $\boldsymbol{x}_0$ 到超平面的距离.

6.5 含参积分的定积分

练习题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{0}^{2}y^2\cos xy\mathrm{d}y$; (3) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{a}^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$.

2. 设 $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$, 求 $F^{(n)}(x)$.

3. 设 $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$, $F(x)\in C^1(-\infty,\infty)$,

$$u=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2n}\int_{x-at}^{x+at}F(y)\mathrm{d}y.$$

求证: 当 $-\infty<x<\infty, t\geq 0$ 时, $u(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 连续, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ u(x,0)=f(x)\,,\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x).$$

4. 求 $F'(x)$:
   (1) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$;
   (2) $F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$;
   (3) $F(x)=\int_0^x\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$.

5. 设 $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, 求函数

$$F(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi 1}^{\pi}[f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}n(\alpha_k\cos ls+\beta_k\sin kx)]^2\mathrm{d}x$$

的最小值.

6. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数. a_n, b_n 为其傅氏系数, A_n, B_n 是卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$$

的傅氏级数. 求证:
   (1) $A_0=a_0^2, A_n=a_n^2+b_n^2, B_n=0\ (n=1,2,\cdots)$;
   (2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

7. 设 $F(x)=\int_0^{2x}\mathrm{e}^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, 求证: $F(x)\equiv 2\pi$.

8. 计算积分 $\int_0^1\frac{x^2-x}{\ln x}\mathrm{d}x$.

6.6 含参积分的广义积分

练习题

1. 证明下列积分在所在区间上一致收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2} dy (x \geq a > 0)$; (2) $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx (a \leq \alpha \leq b)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx (p \geq 0)$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx (\alpha \geq 0)$.

2. 设 $f(x) \in C[0, +\infty]$ 且有界, $f(0) > 0$. 讨论函数

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2+y^2} dx.$$

的连续性.

3. 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx (b > a > 0)$.

4. 通过引入参数, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

5. 通过引入收敛因子 e^{-ax} 的方法, 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx \ (b > a > 0).$$

6. 利用已知积分求下列积分 $(b > a > 0)$:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx$.

7. 利用已知积分求下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx \ (a > 0)$; (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} dx \ (a > 0)$;

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - \cos x}{x^2} dx$; (6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cos(\beta x)}{x} dx$.

8. 利用已知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$ 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \ (n\text{为自然数}, a > 0).$$

9. 利用 B 函数和 Γ 函数计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$

(3) $\int_0^1 \frac{x^n}{(1-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$($n$为自然数); (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+x}$; (6) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}$.

10. 证明:

$$\int_{-1}^1 (1+x)^p(1-x)^q\mathrm{d}x = 2^{p+q+q}B(p+1,q+1)\ (p>-1,q>-1).$$

11. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{a+1}{2}).$$

12. 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})\ (n>0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x = 1$.

13. 设 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在, 求证:

(1) $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续;

(2) $F(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可积, $\forall A>0, f(x)\in R[0,A]$. 求证:

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

第 7 章 多元函数积分学

7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分

练习题

1. 试求 $\boldsymbol{R}^2$ 中点集 $E = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x和y至少有一为有理数\}$ 的内容度和外容度. 问 E 是否是可测图形?
2. 设 A, B, C 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的可测图形, 证明:
   (1) $V(A\backslash B) = V(A) - V(A \cap B)$;
   (2) $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$;
   (3) $V(A\cup B\cup C) = V(A)+V(B)+V(C)-V(A\cap B)-V(A\cap C)-V(B\cap C)+V(A\cup B\cup C)$.
3. 举例说明 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个点集 E_1 和 E_2 都不是可测函数, 但是 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 都是可测函数. 问是否还可能有 $E_1\backslash E_2$ 也是可测图形.
4. 设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中一可测图形. 证明: Ω° 和 $\overline{\Omega}$ 为可测图形, 且 $V(\Omega^\circ) = V(\Omega) = V(\overline{\Omega})$.
5. 在 $\boldsymbol{R}^2$ 的区域 $D = \{(x,y)||x| \le 1, |y| \le 1\}$ 上给定函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 当x,y都是有理数, \\ 2, & 当x,y当x,y至少有一是无理数. \end{cases}$$

   问 $f(x,y)$ 是否在 D 上可积.
6. 设 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 Ω 为可测图形, $f: \Omega \to \boldsymbol{R}, f \in C(\Omega)$, 且 $f(\boldsymbol{x}) \ge 0$ $(\boldsymbol{x} \in \Omega)$, 但不恒为零. 证明: $\displaystyle\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V > 0$. 如果 Ω 不是开集, 上述论证是否正确? 举例说明.
7. 设定义在可测图形 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^m$ 上的两个函数 f, g 有界、可积, 而且 $g(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上之值非负. 令

$$m = \inf_{x\in\Omega}\{f(\boldsymbol{x})\},\ M = \sup_{x\in\Omega}\{f(\boldsymbol{x})\}.$$

   证明:
   (1) $F(t) = \displaystyle\int_\Omega [f(\boldsymbol{x}-t)]g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V$ 是 $[m, M]$ 上的连续函数;
   (2) 存在 $\mu \in [m, M]$, 使得

$$\int_\Omega f \cdot g\mathrm{d}V = \mu \cdot \int_\Omega g\mathrm{d}V.$$

   (3) 设 $f(x) \in R[-1,1]$, 证明: $f(x-y) \in R([0 \times 1] \times [0,1])$.
   (4) 设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^m$ 为测度图形, Q 为长方体, $\Omega \subset Q^\circ$, $f(\boldsymbol{x}) \in R(\Omega)$. 定义

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0, & \boldsymbol{x} \in Q\backslash\Omega. \end{cases}$$

   求证: $F(\boldsymbol{x}) \in R(Q)$.

8. 设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中点集, Q 为长方体, $\Omega \subset Q^\circ$. 定义函数

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega\backslash\Omega. \end{cases}$$

若 $\chi(\boldsymbol{x})$ 在 Q 上可积, 证明: Ω 为可测图形.

9. 在下列积分中改变积分的顺序:

(1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y.$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{3y} f(x,y)\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y;$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\mathrm{d}y.$

10. 计算下列二重积分:

(1) Ω 是由 $y^2 = 2px\ (p > 0)$ 与 $x = \frac{p}{2}$ 围成的区域, 求

$$\iint_\Omega x^m y^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \ (m > 0, k\text{为正整数});$$

(2) $\Omega = \{(x,y)|0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 2 + x, x \le 2\}$, 求 $\displaystyle\iint_\Omega xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(3) Ω 是由 $y = \sqrt{1-x^2}, y = 0$ 围成, 求 $\displaystyle\iint_\Omega (x^2 + 3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(4) Ω 是由 $y = \mathrm{e}^x, y = 1, x = 0$ 及 $x = 1$ 围成, 求 $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(5) Ω 是以 $(1,1),(2,3),(3,1)$ 和 $(4,3)$ 为顶点的四边形, 求

$$\iint_\Omega (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(6) Ω 是由 $y = x^2, y = 4x$ 和 $y = 4$ 围成, 求 $\displaystyle\iint_\Omega \sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

11. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

12. 设在 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上定义的二元函数 $f(x,y) \in C^2(D)$, 证明:

(1) $\displaystyle\iint_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f''_{yx}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(2) 利用 (1) 证明 $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y), (x,y) \in D$(这里不准用偏导与秩序无关定理).

13. 设 $f(x), g(x) \in R[a,b], D = [a,b]\times[a,b]$, 考虑 $[f(x)g(y) - g(x)f(y)]^2$ 在 D 上的重积分, 证明: $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$

14. 求下列立体 Ω 的体积:

(1) Ω 是由曲线 $z = xy, x + y + z = 1$ 和 $z = 0$ 围成;

(2) Ω 是由 $y^2 + z^2 = 1, |x + y| = 1, |x - y| = 1$ 围成.

15. 证明: 若 $b > a > 0$, 则有

(1) $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = \ln\dfrac{b}{a}$; (2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\dfrac{b}{a}$.

16. 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上连续可微, 而且 $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ 收敛. 证明: 当 $b > a > 0$ 时, 有

(1) $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{d}x \int_a^b f'(xy)\mathrm{d}y = -f(0)\ln\frac{b}{a}$;

(2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

17. 设 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上可积, $0 < h < R$, 令

$$F(\xi, \eta) = \iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leq h^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明:$F(\xi, \eta)$ 在 $\xi^2 + \eta^2 \leq (R - h)^2$ 上连续.

18. 证明下列三重积分化为累次积分的顺序 (只写出 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}z$ 互换的顺序):

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} \mathrm{d}z$; (2) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f\mathrm{d}z$.

19. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围成;

(2) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3}$, Ω 是由曲面 $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所围成;

(3) $\iiint\limits_\Omega \cos az\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$;

(4) $\iiint\limits_\Omega (1 + x^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 是由曲面 $x^2 = y^2 + z^2, x = 2, x = 1$ 所围成.

20. 计算三重积分

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_y^1 y\sqrt{1 + z^4}\mathrm{d}z.$$

7.2 重积分的变换

练习题

1. 计算下列积分:

(1) $\iint\limits_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ 围成;

(2) $\iint\limits_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由阿基米德螺线 $r = \theta$ 和半射线 $\theta = \pi$ 围成;

(3) $\iint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由对数螺线 $r = \mathrm{e}^{\theta}$ 和半射线 $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 围成.

2. 求下列曲面围成的体积:

(1) $z = xy, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$;

(2) $z = x^2 + y^2, x + y + z = 1$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \le a|x| (a > 0)$.

3. 求下列积分:

(1) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 围成;

(2) $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由 $x^4 + y^4 = 1$ 围成;

(3) $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由 $y = 4x^2, y = 9x^2, x = 4y^2, x = 9y^2$ 围成;

(4) $\iint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Ω 是由 $xy = 2, xy = 4, y = x, y = 2x$ 围成.

4. D 是以 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为顶点, 面积为 $A (> 0)$ 的三角形, 求

$$\iint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

5. (1) 计算积分

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}} \quad (h > R)$$

(2) 写出圆的单层位势

$$u(a, b) = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (a^2 + b^2 > R^2)$$

6. 设 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \le 1$ 上连续可微, 求

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{xf_y' - yf_x'}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7. 给定积分 $I = \iint\limits_{D} [(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 作正则变换 $x = u(x, y), y = y(u, v)$, 区域 D 变为 Ω, 如果变换满足:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明:

$$I = \iint\limits_{\Omega} [(\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

8. 求下列积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 由曲面 $z=x^2+y^2, z=1, z=2$ 围成;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2})^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 由曲面 $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16, z^2=x^2+y^2, z\geq 0$ 围成;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 由曲面 $z=16(x^2+y^2), z=4(x^2+y^2), z=16$ 围成.

9. 求下列积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 由 $x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 所确定;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 由不等式 $x^2+y^2+z^2\leq 2z$ 所确定;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 是由 $x^2+y^2\leq z^2, x^2+y^2+z^2\leq 8$ 所确定.

10. 求下列积分:

(1) Ω 由 $z=\frac{x^2+y^2}{a}, z=\frac{x^2+y^2}{b}, xy=c, xy=d, y=\alpha x, y=\beta x$ 围成 (其中 $0<a<b, 0<c<d, 0<\alpha<\beta$), 求

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

(2) Ω 由 $x=az^2, x=bz^2 (z>0, 0<a<b), x=\alpha y, x=\beta y\ (0<\alpha<\beta)$ 以及 $x=h(>0)$ 围成, 求

$$\iiint\limits_{\Omega}y^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(3) Ω 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成, 求

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

11. 设一元函数 $f(t)\in C[0,+\infty)$. 令

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_t=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq t^2\}$. 证明:

(1) $F(t)\in C^1[0,+\infty)$; (2) 求出 $F'(t)$ 的表达式.

12. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1, y=0, z=0, x=0$ 围成的区域. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}x^py^qz^s(1-x-y-z)^t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(p+q+s+t+4)},$$

其中 $p \geq 0, q \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$.

13. 设 Ω 是以 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1,2,3,4)$ 为顶点, 体积为 $V(>0)$ 的四面体, 求

$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

14. 用广义球坐标求 n 维球的体积, 即求 $x_1^2, x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq \boldsymbol{R}^2$ 的体积. 所谓广义球坐标即为

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, & r \geq 0, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, & 0 \leq \theta_i \leq \pi, \\ \quad\vdots & \quad i = 1, \cdots, n-2, \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{\theta_{n-2}}\cos\theta_{n-1}, & 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi. \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, & \end{cases}$$

15. 求 n 面体: $x_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n), x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a$ $(a > 0)$ 的容积.

16. 证明

$$\underset{\substack{0 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq a \\ x_i \geq 0 (i=1,\cdots,n)}}{\int \cdots \int} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^a f(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\mathrm{d}x}.$$

7.3 曲线积分与格林公式

练习题

1. 求下列第一型曲线积分:
   (1) $\int_L y^2\mathrm{d}s$, L 为摆线的一拱: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 其中, $(0 \leq t \leq 2\pi)$;
   (2) $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$, L 为内摆线: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
   (3) $\int_L xyz\mathrm{d}s$, L 为螺线: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ $(0 \leq t \leq 2\pi)(0 < a < b)$.
2. 计算第一型曲线积分:
   (1) $\int_L (xy + yz + zx)\mathrm{d}s$, L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 之交线;
   (2) $\int_L xyz\mathrm{d}s$, L 同上.
3. (1) 求第一型曲线积分:

$$I = \int_{x^2+y^2=R^2} \ln\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-b)^2}}\mathrm{d}s \quad (h \neq R);$$

(2) 写出圆周的单层位势:

$$U(a,b)=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\mathrm{d}s,$$

其中 $a^2+b^2\neq R^2$.

4. 设 $f(x,y)$ 在 L 上连续, L 是一封闭的逐段光滑. 证明:

$$u(x,y)=\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\mathrm{d}s}}$$

当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时趋于零的充要条件是 $\oint_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s=0$.

5. 设 $u(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上连续, 对任意 $r>0$. 证明: 等式

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(\xi-x)^2+(y-\eta)^2\leq r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

成立的充要条件是等式

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\ \ (\forall r>0)$$

成立.

6. 求下列第二型曲线积分:

(1) $\int_{\widehat{AB}}(x-2xy^2)\mathrm{d}x+(y-2x^2y)\mathrm{d}y$, 其中 $A(0,0),B(2,4),\widehat{AB}:y=x^2$;

(2) $\int_{\widehat{AB}}(x+y)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$, 其中 $A(0,0),B(2,0),\widehat{AB}:y=1-|1-x|$;

(3) $\int_{\widehat{AB}(x-y)\mathrm{d}x+(y-z)\mathrm{d}y+(z-x)\mathrm{d}z}$, 其中 $A(0,0,0),B(1,1,1),\widehat{AB}:x=t,y=t^2,z=t^3$;

(4) $\int_{\widehat{AB}}y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 $A(\alpha,0,0),B(\alpha,0,2\pi\gamma),\widehat{AB}:x=a\cos t,y=\beta\sin t,z=\gamma t$ (α,β,γ为正数).

7. 求第二型曲线积分

$$\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z.$$

(1) L 为球面三角形 $x^2+y^2+z^2=1,x\geq0,y\geq0,z\geq0$ 的边界线, 从球的外侧看去, L 的方向为逆时针方向;

(2) L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线位于 xy 平面上方部分, 从 x 轴上 $(b,0,0)$ $(b>a)$ 点看去, L 的方向是顺时针方向.

8. 求第二型曲线积分

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

(1) L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针方向;

(2) L 为正方形 $|x| \le 1, |y| \le 1$ 的边界, 逆时针方向.

9. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y,$$

L 为圆周 $x^2+y^2 = ax$, 逆时针方向.

10. 设 P, Q, R 为 L 上的连续函数, L 为光滑弧段, 弧长为 l. 证明:

$$|\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z| \le M \cdot l,$$

其中 $M = \max\limits_{(x,y,z)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\}$.

11. 计算下列积分:

(1) $\oint \partial D xy^2\mathrm{d}y - yx^2\mathrm{d}x, D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$;

(2) $\oint_{\partial D} (x^2+y^3)\mathrm{d}x - (x^3-y^2)\mathrm{d}y, D : x^2+y^2 \le 1$;

(3) $\oint_{\partial D} e^y\sin x\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x}\sin y\mathrm{d}y, D : 0 \le x \le b, c \le y \le d$.

12. 计算下列积分:

(1) $\int_{\widehat{AO}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y, A(a,0), O(0,0), \widehat{AO}: x^2+y^2=ax\ (y\ge 0)}$;

(2) $\int_{\widehat{OA}\mathrm{e}^x[1-\cos y\mathrm{d}x-(y-\sin y\mathrm{d}y)]}, A(\pi, 0), O(0,0), \widehat{AO} : y = \sin x$;

(3) $\oint_{\widehat{OA}} \mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}[x(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x + y(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y], A(1,1), O(0,0), \widehat{OA} : y = x^2$.

13. 设 C 为光滑的简单闭曲线, 求下列积分:

(1) $\oint_c \cos < \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} > \mathrm{d}s$, $\boldsymbol{l}$ 为给定的方向, $\boldsymbol{n}$ 为 C 的外法线方向;

(2) $\oint_C \cos < \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n} > \mathrm{d}s, \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n}$ 为 C 的外法线方向.

14. (1) 设 $f(x,y) = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2(a^2+b^2\ne R^2)}}$, 试证函数在圆 $x^2+y^2 = R^2$ 上每点沿外法线方向 n 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{(x-a)\cos<\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{j}>-(y-b)\cos<\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{i}}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为圆的切向量, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴, y 轴上的单位向量;

(2) 求圆周 $x^2+y^2 = R^2$ 的双层位势

$$u(a,b) = \int\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{(x-a)\mathrm{d}y - (y-b)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(y-b)^2}\ (a^2+b^2 \ne R^2)$$

15. (1) 求积分 $I = \int_{\partial D\mathrm{e}^{-(R^2-y^2)}(\cos 2xy\mathrm{d}x+\sin 2xy\mathrm{d}y)}, D : |x| \le R, 0 \le y \le b$;

(2) 证明: $\lim\limits_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{-(R^2-y^2)}\sin 2Ry\mathrm{d}y = 0$;

(3) 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-b^2}$.

16. 设 $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$, 求证:

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2} = \frac{2\pi}{AC-B^2},\ L : x^2+y^2 = R^2.$$

17. 设 $f(x,y)$ 在上半平面 $y>0$ 上连续可微. 证明: 对上平面上的任一光滑闭曲线 C, 等式

$$\oint_C f(x,y)(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = 0$$

成立的充要条件是: $f(x,y)$ 为 2 次齐次函数.

18. 计算线积分

$$I = \oint_L \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}[(x\cos y + y\sin y)\mathrm{d}y + (x\sin y - y\cos y)\mathrm{d}x],$$

其中 L 是包含原点在其内部的光滑简单闭曲线.

19. 设 C 是逐段光滑简单闭曲线, 它围成的区域记作 D, 函数 $u(x,y), v(x,y) \in C^2(\overline{D})$. 证明

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_D v[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

20. 设 C 和 D 的条件同上题, $u(x,y)$ 是 D 上调和函数. 证明: 若 $u(x,y)|_C = 0$, 则 $u(x,y) \equiv 0, (x,y) \in D$.

7.4 曲面积分

练习题

1. 球环面 $x = (b + a\cos\phi)\cos\theta, y = (b + a\cos\phi)\sin\theta, z = a\sin\phi (0 < a < b)$ 被两条经线 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和两条纬线 $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$ 所围成的那部分面积, 并求出整个环面面积.
2. 求螺旋面 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = h\phi, (0 < r < a, 0 < \phi < 2\pi)$ 的面积.
3. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱体 $y^2 + z^2 \leq 1 (a > 1)$ 中那部分的面积.
4. 求曲面 $z = \sqrt{2xy}$ 被平面 $x + y = 1, x = 1$ 及 $y = 1$ 所截下的那部分面积.
5. 求曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, \sqrt{2}x + z = 2a\ (a > 0)$ 围成的立体的表面积
6. 平面上一椭圆绕其长轴旋转得一旋转椭球 Ω, 求 Ω 之表面积.
7. 求下列第一型曲面积分:
   (1) $\iint_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}S$, S 为立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x \leq 2$ 的边界面;
   (2) $\iint_S |xyz|\mathrm{d}S$, S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 割下的部分;
   (3) $\iint_S z^2\mathrm{d}S$, S 为螺旋面: $x = u\cos v, y = \sin v, z = v\ (0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi)$;
   (4) $\iint_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}S$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
8. 设 $f(x)$ 为一元连续函数. 证明: 普阿松公式

$$\iint_S f(ax + by + cz)\mathrm{d}S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 S 为球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. 计算 $F(t)=\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中 S 是一平面 $x+y+z=t$, 而

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1,\end{cases}$$

并做出 $F(t)$ 的图形.

10. 求下列第二型曲面积分:

(1) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

(2) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 是立体 Ω 的边界线的外侧, Ω 的表达式为

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\};$$

(3) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

的上半部分的上侧;

(4) $\iint\limits_S\left(\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$, S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关

练习题

1. 利用奥斯公式求下列积分:

(1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $S:\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 外侧;

(2) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $S:\ x^2+y^2\le z\le h$ 的边界线, 外侧;

(3) $\iint\limits_s(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为曲面.

$$|x-y-z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

的外侧.

2. 计算下列曲面积分

(1) $\iint\limits_S(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(z\ge 0)$ 的上侧;

(2) $(x+\cos y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+\cos z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为 $x+y+z=\pi$ 在第一卦限部分, 上侧.

3. 求

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\ (a^2+b^2+c^2\neq R^2)$$

沿球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上各点外法线方向的方向导数;

4. 求球面的双层位势

$$u(a,b,c)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2}\frac{(x-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(y-b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}\ (a^2+b^2+c^2\neq R^2)$$

.

5. 设 V 为可测闭区域, $\partial V=S$ 为光滑闭曲面, 函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)\in C^2(V)$. 证明:

$$\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V v(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向.

6. 设 V,S 条件同上题, $u(x,y,z)$ 为调和函数: $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$, 且 $u(x,y,z)|_S=0$ (即函数 u 在边界 S 上取值为零). 证明:

$$u(x,y,z)\equiv 0\ \ (x,y,z)\in V.$$

7. 设 V,S 条件同上, u 为调和函数, $v(x,y,z)|_S=0$. 证明:

$$\iiint\limits_V\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

8. 设 V,S 条件同上, $u,w\in C^2(V)$, u 是调和函数, 且

$$[w(x,y,z)-u(x,y,z)]|_S=0.$$

证明:

$$\iiint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leq\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

.

9. 求下列曲线积分:

(1) $\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 式中 L 为椭圆, 即 $x^2+y^2=R^2$ 与 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,h>0)$ 的交线, 若从 Ox 轴正向看去, 此椭圆是以反时针方向进行的;

(2) $\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 式中 L 为圆周, 即 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y=x\tan\alpha(0<\alpha<\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2})$ 的交线, 若从 Ox 轴的正向看去, 圆周是依反时针方向进行的;

(3) $\oint_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 式中 L 为维维安尼曲线: $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2=ax$ $(z\geq 0,a>0)$, 若从 Ox 轴正向看去, 曲线是依反时针方向进行的;

(4) $\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$, 式中 L 是曲线: $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx\ (0<r<R, z>0)$, 此曲线是如下进行的: 由它所包围的在球 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方.

10. 下列被积表达式是否是恰当, 并求线积分:

(1) $w=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$, 求 $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} w$;

(2) $w=(yze^{xyz}+2x)\mathrm{d}x+(zxe^{xyz}+3y^2)\mathrm{d}y+(xye^{xyz}+4z^3)\mathrm{d}z$, 求 $\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} w$;

(3) $w=[2x\sin(x+y+z)+x^2\cos(x+y+z)]\mathrm{d}x+x^2\cos(x+y+z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$, 求 $\int_{(1,2,3)}^{(x,y,z)} w$.

11. 设 Ω 为包含原点的单连通区域, 线积分 $\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在 R 上与路径无关, 若 P,Q,R 皆为 n 次齐次函数, 证明: 线积分

$$\int_{\widehat{AB} x\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+z\mathrm{d}R}$$

也在 Ω 上与路径无关.

12. 设 Ω 是包含原点的凸区域, $P,Q,R\in C^1(\Omega)$. 证明下面四个命题等价:

(1) $w=P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的曲面积分与曲面无关, 即 S_1,S_2 为定向光滑曲面, $\partial S_1=\partial S_2$, 由 S_1,S_2 的定向决定的边界正定向相同, 则有

$$\iint_{S_1} w=\iint_{S_2} w;$$

(2) 设 S 为 Ω 内一光滑闭曲面, 则有 $\iint_S w=0$;

(3) 被积表达式 w 是封闭的, 即外微分 $\mathrm{d}w=0$, 或

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$$

(4) w 是恰当的, 即存在

$$\begin{aligned}\eta=&\int_0^1 t[zQ(tx,ty,tz)-yR(tx,ty,tz)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&+\int_0^1 t[xR(tx,ty,tz)-zP(tx,ty,tz)]\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\&+\int_0^1 t[yP(tx,ty,tz)-xQ(tx,ty,tz)]\mathrm{d}t\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

使 $\mathrm{d}\eta=w$.

7.6 场论

练习题

1. 设 $u(x,y,z)\in C^2, f(t)\in C^2$. 求

(1) $\mathrm{grad}\, f(u)$; (2) $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\, f(u)$.

2. c 为常向量, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r)$ 可微. 求

(1) $\mathrm{div}[\mathrm{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$; (2) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$.

3. 证明: (1) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$; (2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=0$.

4. 设 $u=u(x,y,z)$, 作柱坐标变换: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$. 令 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k}$ 为两两正交的单位向量. 证明

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

5. 设 $u=u(x,y,z)$, 作球坐标变换: $x=r\cos\theta\sin\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\phi$. 令 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_\theta$ 为两两正交的单位向量. 证明

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

6. 设物体 Ω 以一定角速度 w 绕轴 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 旋转.
   (1) 求物体 Ω 上各点的速度, 即求速度场 $\boldsymbol{v}$;
   (2) 求 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$.

7. 证明: 场 $\boldsymbol{F}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 是保守场, 并求势函数.

8. 设 $f(x,y,z)$ 是一次齐次函数, $\boldsymbol{F}=\frac{1}{4}f(x,y,z)\boldsymbol{r}$. 试证:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=f(x,y,z)$$

9. 设 $\boldsymbol{R}^3$ 空间有一变换 $T: x_i=x_i(p_1,p_2,p_3)\ (i=1,2,3)$, 或记作 $\boldsymbol{x}=T(\boldsymbol{p})$. 又设向量 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_1},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_2},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_3}$ 两两相互正交, 记 $H_i=|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_i}|\ (i=1,2,3)$ 单位向量 $\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_i}\ (i=1,2,3)$. 又 $\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{e}_1+F_2\boldsymbol{e}_2+F_3\boldsymbol{e}_3$. 则有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial p_i}(F_i\frac{H_1H_2H_3}{H_i}).$$

试利用此公式求下列各式:
   (1) 在空间柱坐标系, 求 $\mathrm{div\ grad}u(r,\theta,z)$;
   (2) 在空间极坐标系, 求 $\mathrm{div\ grad}u(r,\theta)$
   (3) 在空间球坐标系, 求 $\mathrm{div\ grad}u(r,\alpha,\theta)$.

第 8 章 典型综合题分析

综合练习题

1. 试求保证不等式
$$e^x + e^{-x} \le 2\mathring{e}^{cx^2} \quad (\forall\ x \in (-\infty, \infty))$$
成立的实数 c 的条件.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 又设 $\exists c \in [a,b]$, 使得 $f'(c) = 0$. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得
$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}.$$
3. 设 $f(x)$ 在实轴上有界且可微, 并满足
$$|f(x) + f'(x)| \le 1\ (\forall x \in (-\infty, \infty))$$
求证: $|f(x)| \le l(\forall \in (-\infty, \infty))$
4. 设 $f(x)$ 为一连续函数, 且 $0 \le f(x) < 1(|x| \le 1)$. 求证:
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \ge \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1 - \int_0^1 f(x)dx}.$$
5. 求证: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.
6. 设 $|x| < 1$, 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - x^2\cos^2\theta)d\theta$.
7. 设 $\rho(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}$, 其中 ξ, x 为任意实数, y 为正实数. 求证:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi - x|^{\frac{1}{2}}\rho(\xi)d\xi = \sqrt{2y}.$$
8. $I_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}dx$, 求证:

(1) $\lim n \to \infty I_n = 0$; (2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 存在, 并求出此极限值.

9. 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.
10. 设 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}(n = 2, 3, \cdots)$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 的收敛半径, 并求其和函数.
11. 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的一致连续函数, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 求证:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

12. 求证: $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

13. 设 $\rho(t)$ 是实轴上的连续函数, 满足

(1) 当 $|t| \geq 1$ 时, $\rho(t) = 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\mathrm{d}t = 0$; (3) $\int_{-\infty}^{+\infty} t\rho(t)\mathrm{d}t = 1$

又设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 求证:

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2}\rho(\frac{t-x}{\lambda})f(t)\mathrm{d}t = f'(x).$$

14. 求证: $z = x^n\phi(\frac{y}{x}) - x^{-n}\psi(\frac{y}{x})$ 满足方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z.$$

15. 求 $\iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2\leq 1}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$.

16. (1) 计算积分 $A = \int_0^1\int_0^1 |xy - \frac{1}{4}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) 设 $z = f(x,y)$ 在闭正方形 $D: 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ 上连续, 且满足下列条件:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ \iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

求证: $\exists(\xi,\eta)\in D$ 使得 $|f(\xi,\eta)| \geq \frac{1}{A}$.

17. 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 在任意有穷区间上有界并可积, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x < +\infty$. 又设 a 是一实常数, $\frac{1}{2} < a < 1$. 求证: 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{|x-t|^a}\mathrm{d}x\ \ (\forall t\in(-\infty,+\infty))$$

收敛, 且 $\phi(t) \overset{定义}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{|x-t|^a}\mathrm{d}x$ 在实轴上连续.

18. 给定重积分

$$\iiint\limits_D\left[\frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{xz}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $D = (x,y,z)|1\leq yz\leq 2, 1\leq xz\leq 2, 1\leq xy\leq 2$, $F\in C^1(D)$. 试将积分做下面变换: $u = yz, v = xz, w = xy$. 要求变换后的积分中出现 u,v,w 和 F 关于 u,v,w 的偏导数.

19. 设 $0\leq a\leq 4$, 记 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求证:

$$\iiint_{R^3}\frac{|x|+|y|+|z|}{\mathrm{e}^{ra}} - 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

收敛且其值为 $6\pi\int_0^{+\infty}\frac{\rho^3}{\mathrm{e}^{ra}} - 1\mathrm{d}\rho$.

20. 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数, 而且对以 $\forall(x_0, y_0) \in \boldsymbol{R}^2$ 为中心, 以 $\forall r > 0$ 为半径的上半圆 C:

$$x = x_0 + r\cos\theta,\ y = y_0 + r\sin\theta\ (0 \le \theta \le \pi),$$

都有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

. 求证: $P(x,y) = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0 (\forall(x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$.

第 9 章　附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容Github，另外还有参考文档, 其下载地址为Github。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请Fork Github。