



# 数学分析习题指南——课后习题

## 数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：March 13, 2020

版本：1.00

确实，时间和空间是有限的。确实，我们总会有分开的时候。但是正因为这样，我们才会努力学习，我们才会努力前进。我们的信仰是享受数学。因为“数学穿越时空”。



“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —SCIbird

# 目 录

<b>1</b>	<b>声明</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>分析基础</b>	<b>4</b>
2.1	实数共理、确界、不等式	4
2.2	函数	4
2.3	序列极限	6
2.4	函数极限与连续概念	8
2.5	闭区间上连续函数的性质	9
<b>3</b>	<b>一元函数微分学</b>	<b>11</b>
3.1	导数和微分	11
3.2	微分中值定理	12
3.3	函数的升降、极值、最值问题	12
3.4	函数的凹凸性、拐点及函数作图	13
3.5	洛必达法则与泰勒公式	14
3.6	一元函数微分学的总合应用	15
<b>4</b>	<b>一元函数积分学</b>	<b>17</b>
4.1	不定积分和可积函数类	17
4.2	定积分概念、可积条件与定积分性质	19
4.3	变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法	19
4.4	定积分的应用	22
4.5	广义积分	23
<b>5</b>	<b>级数</b>	<b>24</b>
5.1	级数敛散判别法与性质、上极限与下极限	24
5.2	函数级数	26
5.3	幂函数	28
5.4	傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛	30
<b>6</b>	<b>多元函数积分学</b>	<b>33</b>
6.1	欧式空间、多元函数的极限与连续	33
6.2	偏导数与微分	35
6.3	反函数与隐函数	39
6.4	切空间与极值	41
6.5	含参积分的定积分	43
6.6	含参积分的广义积分	44

<b>7 多元函数积分学</b>	<b>46</b>
7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分	46
7.2 重积分的变换	48
7.3 曲线积分与格林公式	51
7.4 曲面积分	54
7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关	55
7.6 场论	57
<b>8 典型综合题分析</b>	<b>58</b>
<b>9 附录及一些说明事项</b>	<b>59</b>



## 第1章 声明

---

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：[Github](#)(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1)<sup>1</sup>或者邮箱<sup>2</sup>联系我。



Keep doing

扫一扫二维码，加我QQ。

图 1.1: 二维码

点击[Github](#)后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

---

<sup>1</sup>1411279054

<sup>2</sup>1411279054@qq.com

## 第2章 分析基础

### 2.1 实数共理、确界、不等式

#### 练习题

1. 设  $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$ , 求证:  $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$ .

解  $2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

$2|b| = |a+b-(a-b)| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有  $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$ .

解  $2 = |a+b-(a-b)| + 2|1-b| \leq |a+b| + |a-b| + 2|1-b| \leq 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$

3. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2};$$

并解释其几何意义.

解 易知,  $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a+b$  ①  $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$  ②

由 ①、② 得  $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$   $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

几何意义:  $\max\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较大的那个,  $\min\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较小的那个。

4. 设  $f(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

解  $f(x) - f(y) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \therefore |f(x) - f(y)| \leq |\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)| = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$

5. 设  $f(x), g(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$\textcircled{1} \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

$$\textcircled{2} \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

解 ① 易知,  $\sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) + g(x) \quad (\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$ , 又  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$ ,

即  $\inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x)$ ,  $(\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} +$

$\sup_{x \in X} \{g(x)\}$ , 所以,  $\inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$

② 类似上面做法.

### 2.2 函数

#### 练习题

1. 设  $f(x) = |1+x| - |1-x|$ .
- (1) 求证:  $f(x)$  是奇函数;
  - (2) 求证:  $|f(x)| \leq 2$ .
  - (3) 求  $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{次}}(x)$ .

解

(1)  $f(x) = f(-x)$ ,  $\therefore f(x)$  是奇函数.

(2)  $f(x) = |1+x| - |1-x| \leq |1+x+1-x| = 2$

(3) 易知,  $f(x)$  是一个分段函数,  $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$ , 下面当  $-1 \leq x \leq 1$

时,  $f(x) = 2x \therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < -\frac{1}{2} \\ 4x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore$  可得,  $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

$\begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^{(n-1)}} \\ 2^{(n-1)}x & \frac{-1}{2^{(n-1)}} \leq x \leq \frac{1}{2^{(n-1)}} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{cases}$

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上定义,  $a > 0, b > 0$ . 求证:

(1) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降, 则  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ ;

(2) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调上升, 则  $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得,  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降  $\therefore \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(a)}{a}, \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(b)}{b} \therefore af(a+b) \leq (a+b)f(a), bf(a+b) \leq (a+b)f(b)$ , 可得  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ .

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当  $a > 0, b > 0$  时, 有

(1) 当  $p > 1$  时,  $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ ;

(2) 当  $0 < p < 1$  时,  $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ .

解

(1) 令  $f(x) = x^p, \frac{f(x)}{x} = x^{p-1}, \therefore p > 1, p-1 > 0 \therefore x^{p-1}$  单调递增, 由第二题可得  $f(a+b) \geq f(a) + f(b) \therefore (a+b)^p \geq a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上定义, 且  $f(f(x)) \equiv x$ .

(1) 问这种函数有几个?

(2) 若  $f(x)$  为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令  $y = f(x), x = f^{-1}(y) \therefore f(f(x)) \equiv x \therefore f(y) \equiv f^{-1}(y)$ , 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线  $y = x$  对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个,  $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若  $y = f(x) (x \in (-\infty, +\infty))$  是奇函数, 并且它的图像关于直线  $x = b (b > 0)$  对称, 则函数  $f(x)$  是周期函数并求其周期.

**解**  $\because f(x)$  是奇函数,  $\therefore f(x) = -f(-x)$ , 又  $\therefore f(x)$  关于直线  $x = b(b > 0)$  对称,  $f(b+x) = f(b-x)$ , 即  $f(b+b+x) = f(-x) = -f(x)$ ,  $f(x+2b) = -f(x) = -f(x+2b-2b) = f(x-2b)$ ,  $\therefore f(x+4b) = f(x)$ , 因此  $f(x)$  是周期函数, 其周期是  $4b$ .

6. 设  $f: X \rightarrow Y$  为满射,  $g: Y \rightarrow Z$ . 求证:  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数的充分必要条件为  $f$  和  $g$  都有反函数存在, 且  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**解**  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数, 说明  $g \circ f$  一一对应, 即  $f$  和  $g$  都一一对应, 所以,  $f$  和  $g$  存在反函数, 令  $(g \circ f)$  的反函数为  $H$ , 假设  $H(a) = b$ , 有  $(g \circ f)(b) = a$ , 左乘  $g^{-1}$ , 即  $f(b) = g^{-1}(a)$ , 再左乘  $f^{-1}$ , 即  $b = (f^{-1} \circ g^{-1})(a) \therefore H = f^{-1} \circ g^{-1}, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

## 2.3 序列极限

### 练习题

1. 设  $x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

(1) 当  $a \neq 0$  时, 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

(2) 举例说明当  $a = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq 1$  可能成立;

(3) 举例说明当  $a = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n \neq 1$  可能成立.

**解**

(1) 由已知条件知:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 根据  $\varepsilon - N$  定义知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .  $\because n > N$ , 那么  $n+1 > N$ ,  $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 有  $n+1 > N$   $\therefore |a_{n+1} - a| < \varepsilon$ ,  $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ .

(2) 例:  $a = \frac{1}{2^n}$ .

(3) 例:  $x_n = \frac{n+1}{n}$ .

2. 设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

**解** 令  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 其中  $a < 1$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a$ , 又由已知表达式得  $a = 1 - \sqrt{1 - a}$ , 解得:  $a = 0$ . 又  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{x_n}$ , 根据洛必达得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ .

3. 设  $c > 1$ , 求序列  $\sqrt{c}, \sqrt{c\sqrt{c}}, \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}, \dots$  的极限.

**解** 根据表达式可得,  $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}}, x_{n+1} - x_n = \sqrt{c\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} = \sqrt{\sqrt{x_n}}(\sqrt{c} - x_n^{\frac{3}{4}})$ . 假设:  $x_n < c^{\frac{3}{2}}$ . 下面用归纳法来证明:

当  $n = 1$  时,  $x_1 = \sqrt{c} < c^{\frac{3}{2}}$

当  $n = k$  时, 假设  $x_n < c^{\frac{3}{2}}$

那么  $n = k+1$  时,  $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}} < \sqrt{c \cdot c^{\frac{3}{2}}} = c^{\frac{5}{4}} < c^{\frac{3}{2}}, \therefore x_n < c^{\frac{3}{2}}$ , 且  $x_{n+1} - x_n > 0$ ,

由单调有界定理可知数列  $x_n$  存在极限. 令  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = a \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a, a = \sqrt{ca}, a = c \therefore \lim_{x_n} = c$

4. 设  $A > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) (n = 1, 2, \dots)$

(1) 求证:  $x_n$  单调下降且有界;

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解**

(1)  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \geq \sqrt{A}$ , 说明  $x_n$  有下界.

$\because x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) - x_n = \frac{1}{2}(\frac{A}{x_n} - x_n) = \frac{1}{2} \frac{A - x_n^2}{x_n}$ , 又  $\because x_n \geq \sqrt{A} \therefore x_{n+1} - x_n < 0$ ,

所以,  $x_n$  单调递减且有下界.

(2) 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$  所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}$ .

5. 设  $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

解 令  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} (x_n > 0)$ , 根据表达式有  $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1 + x_n) > 1$ , 即  $x_n > x_{n+1}$ , 根据单调有界定理可得  $x_n$  存在极限, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a > 0) \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$ , 解得:  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

6. 求证:

(1)  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ;

(2) 序列  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  的极限存在.

解

(1)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ , 而  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2)  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ .

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \therefore x_{n+1} < x_n$ , 数列  $x_n$  是递减数列.

下证:  $x_n > -2$ ;

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 2[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n}] > 2[\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - 1) - 2\sqrt{n} > -2$ .

7. 设  $0 < a_1 < b_1$ , 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列  $a_n, b_n$  的极限存在.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2}).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设  $c > 0$ , 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设  $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 求证: 若  $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$  极限存在, 则  $x_n$  的极限也存在.

12. 设  $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ , 且  $c_n \leq a_n \leq b_n (n = 1, 2, \cdots)$ ; 又设  $y_n, z_n$  极限存在. 求证:  $x_n$  极限也存在.

13. 设序列  $x_n$  满足  $|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| (n = 1, 2, \cdots)$ , 其中  $0 < q < 1$ . 求证: 序列  $x_n$



的极限存在.

14. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \quad (\forall x, y \in (-\infty, +\infty))$$

其中  $0 < q < 1$ . 对  $\forall x_1 \in (-\infty, +\infty)$ , 令  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ . 求证: 序列  $x_n$  的极限存在, 且极限值是  $f(x)$  的不动点.

15. 设  $x_0 = a, x_1 = b (b > a)$ , 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \quad x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求证: 序列  $x_n$  极限存在.

## 2.4 函数极限与连续概念

### 练习题

1. 设在正实轴上,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且广义极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

存在. 求证:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  (分别讨论  $A = +\infty, -\infty, \cdot$ ).

2. 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A (> 0)$ , 求证:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$$

3. 设  $0 < x_n < +\infty$ , 且满足  $x_n + \frac{4}{x_n^2} < 3$ , 求证: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

4. 设  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的周期函数, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

求证:  $f(x) \equiv 0$ .

5. 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, +\infty)$  上定义,  $g(x)$  单调上升, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

6. 设  $x_n = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot 2} + \frac{1}{n \cdot 1}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

7. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

8. 设  $x_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$ .

9. 适当定义  $f(0)$ , 使函数  $f(x) = (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$  在点  $x = 0$  处连续.

10. 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , 求证:

(1)  $|f(x)| \in C[a, b];$

(2)  $\max\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$ ;

(3)  $\min\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$ .

11. 设  $f(x) \in C[a, b]$  单调上升, 且  $a < f(x) < b$  ( $\forall x \in [a, b]$ ). 对  $\forall x_1 \in [a, b]$ , 由递推公式  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 产生序列  $\{x_n\}$ . 求证: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且其极限值  $c$  满足  $c = f(c)$ .

12. 设序列  $\{x_n\}$  由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \right) = 2$

13. 求出函数  $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$  的间断点, 并判断间断点的类型.

## 2.5 闭区间上连续函数的性质

### 练习题

1. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上单调. 求证:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不变号.
2. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且严格单调, 又

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程  $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3 = 0$  有且仅有三个根.

3. 设  $f_n(x) = x^n + x$ . 求证:
  - (1) 对任意自然数  $n > 1$ , 方程  $f_n(x) = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且仅有一个根;
  - (2) 若  $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$  是  $f_n(x) = 1$  的根, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  存在, 并求此值.
4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 求证:  $\exists c \in [a, b]$ , 使得对  $\forall \delta > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$  上无界.
5. 设  $x_n$  为有界序列. 求证:  $x_n$  以  $a$  为极限的充分必要条件是:  $x_n$  的任一收敛子序列都有相同的极限值  $a$ .
6. 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

7. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且有唯一的取到  $f(x)$  最大值的点  $x^*$ , 又设使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x^*)$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .
8. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ , 又设对  $\forall l \in \mathbf{R}$ , 方程  $f(x) = l$  在  $[0, +\infty)$  上只有有限个解或无解. 求证:
  - (1) 如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在;
  - (2) 如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上无界, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$ .
9. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 存在  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$ , 且  $f(x)$  的最小值  $f(a) < a$ . 求证:  $f(f(x))$  至少在两个点处取到最小值.

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上定义,  $x_0 \in [a, b]$ . 如果对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ , 那么称  $f(x)$  在点  $x_0$  处上半函数. 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上每一点都上半连续, 则称  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的一个半连续函数. 求证:  $[a, b]$  上的上半连续函数一定有上界.

11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:

(1)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$       (2)  $f(x) = \sin x$

12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:

(1)  $f(x) = x \sin x$ ;      (2)  $f(x) = \sin x^2$ .

13. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 对  $\forall h \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(h+n) = A$  (有限数). 求证:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

14. 设存在常数  $L > 0$ , 使得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

求证:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续.

15. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续. 求证:  $f(x) + g(x)$  与  $f(x) \cdot g(x)$  都在  $(a, b)$  内一致连续.

16. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 值域含于区间  $(a, d)$ , 又  $g(x)$  在  $(c, d)$  内一致连续. 求证:  $g(f(x))$  在  $(a, b)$  内一致连续.

17. 设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且是周期为  $T$  的周期函数. 求证:  $f(x)$  在实轴上一致连续.

## 第3章 一元函数微分学

### 3.1 导数和微分

#### 练习题

1. 用定义求  $f'(0)$ , 这里  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
2. 设  $f'(x_0)$  存在. 求证: 对数导数也存在并等于  $f'(x_0)$ , 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

3. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导,  $\alpha_n, \beta_n$  为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 + \beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = f'(x_0)$$

4. 设  $P(x)$  是最高次项系数为 1 的多项式,  $M$  是它的最大实数. 求证:  $P'(M) \geq 0$ .
5. 给定曲线  $y = x^2 + 5x + 4$ .

- (1) 求曲线在点  $(0, 4)$  处的切线.
- (2) 确定  $b$  使得直线  $y = 3x + b$  为曲线的切线;
- (3) 求过点  $(0, 3)$  的曲线的切线.

6. 确定常数  $a, b$  使得函数  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$  有连续导数.

7. 设曲线由隐式方程  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} (a > 0)$  给出.

- (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
- (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.

8. 已知曳物线的参数方程为

$$x = a[\ln(\tan \frac{t}{2}) + \cot t], \quad y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi).$$

求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与  $x$  轴交点之间的切线段为一定长.

9. 试确定  $\lambda$ , 使得曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  与  $xy = \lambda$  相切, 并求出切线方程.
10. 试确定  $m$ , 使直线  $y = mx$  为曲线  $y = \ln x$  的切线.
11. 设  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . (1) 求证:  $(1-x^2)y' - xy = 1$ ; (2) 求  $y^{(n)}(0)$ .
12. 求  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  的  $n$  阶导数.
13. 设  $y = x^{(n-1)} \ln x$ . 求证:  $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ .
14. 求证: 双曲线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  的向径与切线的夹角等于极角的两倍加  $\frac{\pi}{2}$ .
15. 设曲线既可用参数式  $x = x(t), y = y(t)$  表示, 又可用极坐标  $r = r(\theta)$  表示. 求



证:  $\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ .

## 3.2 微分中值定理

### 练习题

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内除仅有的一个点都可导. 求证:  $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$  及  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(b) - f(a) = (b - a)[\theta f'(c_1) + (1 - \theta)f'(c_2)]$$

2. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且

$$f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0.$$

求证: 对  $\forall k \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = kf(\xi)$ .

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 但非线性函数. 求证:  $\exists \xi, \eta \in (0, 3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 但非线性函数. 求证:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\eta).$$

5. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f''(x_0) \neq 0$ . 求证:

(1) 如果  $f'(x_0) = 0$ , 则存在  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_1) - f(x_2) = 0$ ;

(2) 如果  $f'(x_0) \neq 0$ , 则存在  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$ .

6. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$ . 求证: 如果  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上不恒等于零, 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$ .

7. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0, 1))$ . 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

8. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $f(0) = 0$ . 求证: 如果  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上不恒等于零, 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$ .

9. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(a) = f'(b)$ . 求证:  $\exists c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) - f(a) = (c - a)f'(c)$

注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件  $f'(a) = f'(b) = 0$  中的 “=0” 去掉了.

10. 设  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上可导, 且存在有限极限  $\lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x)$ . 求证:  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上一致连续.

## 3.3 函数的升降、极值、最值问题

### 练习题

1. 求证:

(1) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  单调增加;

(2)  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上二次可导, 且  $f(0) = 0, f''(x) < 0$ . 求证:  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, a]$  上单调下降.
3. 求证: 对任何  $n(n > 0)$  次多项式  $P(x), \exists x_0 > 0$ , 使得  $P(x)$  在  $(-\infty, -x_0)$  和在  $(x_0, +\infty)$  上都是严格单调的.
4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且在  $(a, b)$  内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证: 极大值必大于极小值.
5. 设  $a, b > 0, k \in \mathbb{R}$ . 求证: 函数  $f(x) = a^2 e^{kx} + b^2 e^{-kx}$  存在与  $k$  无关的极小值.
6. (1) 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(x) \neq g(x), g(x) \neq 0$ . 求证:  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $(a, b)$  内无极值的充分必要条件是  $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$  在  $(a, b)$  内无极值.  
(2) 设  $b > a > 0$ , 求证:  $f(x) = \frac{(x-a)(x+b)}{(x-b)(x+a)}$  无极值.
7. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图 2.4 所示, 则  $f(x)$  有 ( ).  
(A) 一个极小值和两个极大值;  
(B) 两个极小值和一个极大值;  
(A) 两个极小值和两个极大值;  
(A) 三个极小值和一个极大值;
8. (1) 求证: 序列  $\{\frac{\ln n}{n}\}_{n=3}^{\infty}$  为一递减序列;  
(2) 求序列  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的最大项.
9. 假设  $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ . 求证:  $f(x)$  在实轴上有真正得最小值.
10. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 在区间  $[a, b]$  上只有一个极值点. 求证: 如果该点是极大值点必为最大值点; 如果该点是极小值点必为最小值点.
11. 求出满足不等式  $\frac{B}{\sqrt{x}} \leq \ln x \leq A\sqrt{x} (\forall x > 0)$  的最小正数  $A$  及最大负数  $B$ .
12. 给定曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$ .  
(1) 求过点  $(x_0, \frac{1}{\sqrt{x_0}})$  的切线.  
(2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线在  $x$  轴与  $y$  轴上截距和最小.
13. 设正数  $x, y$  之和为一常数  $2a(a > 0)$ , 且指数  $x^y$  当  $x = a$  时, 达到最大值. 求证:  $a = e$ .
14. 给定曲线  $y = \frac{1}{x^2}$ .  
(1) 求曲线上横坐标为  $x_0$  的点处的切线方程;  
(2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线被坐标轴所截的长度最短.
15. 做一个无盖的圆柱形茶缸, 若体积  $V$  一定, 问底半径  $R$  与高  $H$  成何比例时, 使总面积最小 (即用料最省)?
16. 有一半径为  $a$  的半球面形的杯子, 杯内放一长度为  $l(l > 2a)$  的均匀细棒, 求棒的平衡位置 (即求棒重心的最低位置).
17. 把一圆形铁片剪下中心角为  $\alpha$  的一块扇形部分, 并将其围成一圆锥. 已知圆形铁片的半径为  $R$ , 问  $\alpha$  多大时, 圆锥的容积最大?

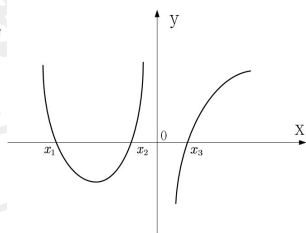


图 2.4

### 3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

#### 练习题

1. 设  $a > 0, b > 0$ . 求证:  $f(x) = \sqrt{a + bx^2}$  为凹函数.

- 求证: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为凹函数.
- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上取正值, 且为凸函数. 求证:  $\frac{1}{f(x)}$  是在  $(a, b)$  上的凹函数.
- 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上二次可微,  $f''(x) \geq 0$ . 求证:
  - $\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \in f'(x) \in \frac{f(x+h)-f(x)}{h} (0 < h < x)$ ;
  - 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ .
- 作出下列函数的图形:

$$\begin{aligned} (1) y &= x^3 - x^2 - x + 1; & (2) y &= x \cdot e^{-x^2}; \\ (3) y &= x + \frac{1}{x}; & (4) y &= x \cdot \ln x. \end{aligned}$$

### 3.5 洛必达法则与泰勒公式

#### 练习题

- 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + xf'(x)] = l$ . 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 且

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

求证:  $\exists \xi \in (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

- 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  求证:

- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶连续可微;
- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调下降;
- $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是凹函数;
- 求证:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}] = \frac{1}{3}$ ;
  - 设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n = \sqrt{3}$ .
  - 设  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . 求证: 对  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^{\lambda x}} = 0.$$

- 将函数  $(1-x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  在点  $x=0$  处泰勒展开公式至  $x^4$  阶项.
- 将拉格朗日函数中值定理, 对  $\forall |x| \leq 1, \exists \theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\arcsin x = \arcsin x - 0 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}.$$

求证:  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

7. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可微, 且

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2 \quad (\forall x > 0).$$

求证:  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \quad (\forall x > 0)$ .

8. 设  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ . 求证:  $a$  是  $P(x) = 0$  的  $k$  重根的充分必要条件为

$$P^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, k-1), \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

9. 若一实系数多项式  $P(x)$  的根全是实根, 求证:  $P(x)$  各阶导数产生的多项式的根也全是实根, 且每一高阶导数的根均分布在底阶导数的根之间.

### 3.6 一元函数微分学的总合应用

1. 求证不等式:  $1 + x^2 \leq 2^x \quad (0 \leq x \leq 1)$ .
2. (1) 当  $0 < \alpha < 1$  时,  $(1+x)^\alpha \leq 1+ax \quad (x > -1)$ , 且等号仅当  $x=0$  时成立;  
(2) 当  $\alpha < 0$  或  $\alpha > 1$  时,  $(1+x)^\alpha \geq 1+ax \quad (x > -1)$ , 且等号仅当  $x=0$  时成立.
3. 设  $a > 0, b > 0$ . 求证:  
(1)  $a^p + b^p \geq 2^{(1-p)}(a+b)^p \quad (p > 1)$ ;  
(2)  $a^p + b^p \leq 2^{1-p}(a+b)^p \quad (0 < p < 1)$ .
4. 设  $b \geq a$ , 求证:  $2\arctan \frac{b-a}{2} \geq \arctan b - \arctan a$ .
5. (1) 设  $n \in N$ , 求证:

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

- (2) 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n[e - (1 + \frac{1}{n})^n] = \frac{e}{2}$ .
6. 设  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$  有正根  $x_0$ , 则方程

$$na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必存在小于  $x_0$  的正根.

7. 试确定方程  $e^x = ax^2 \quad (a > 0)$  的根的个数, 并指出每一个根所在的范围.
8. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $R$  上连续可微, 且  $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0$ , 试证  $f(x) = 0$  的任何两个相邻实根之间必有  $g(x) = 0$  的根.
9. (1) 求  $f(x) = \frac{1}{x^2} + px + q \quad (p > 0)$  的极值点与极值;  
(2) 求方程  $\frac{1}{x^2} + px + q = 0 \quad (p > 0)$  有三个实根的条件.
10. 讨论曲线  $y = 4\ln x + k$  与  $y = 4x + \ln^4 x$  的交点个数.
11. 对  $\forall n \in N$ , 求证:  $x^{n+2} - 2x^n - 1$  只有唯一正根.
12. 设  $k > 0$ , 求证: 方程  $1 + x + \frac{x^2}{2} = ke^x$  只有唯一实根.
13. 设  $n$  次多项式  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  满足下列条件:  
(1)  $(\sum_{k=0}^n a_k) \cdot (\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k) < 0$ ;



(2)  $P'(x)$  在  $[-1, 1]$  上处处不为零.

求证:  $P(x)$  在  $[-1, 1]$  上有且仅有一个实根.

14. 设  $|f''(x)| \leq |f'(x)| + |f(x)| (\forall x \in (a, b))$  并存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ .

求证:  $f(x) \equiv 0 (\forall x \in (a, b))$ .



## 第4章 一元函数积分学

### 4.1 不定积分和可积函数类

#### 练习题

1. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{llll} (1) \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx; & (2) \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}; & (3) \int \sqrt{x}\sqrt{x} dx; & (4) \int [\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}] dx; \\ (5) \int \tan^2 x dx; & (6) \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx; & (7) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}; & (8) \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx; \\ (9) \int \frac{dx}{3x^2}; & (10) \int \frac{dx}{2-3x^2}; & (11) \int \sqrt[3]{1-3x} dx; & (12) \int x \cdot \sqrt[3]{1-3x} dx. \end{array}$$

2. 求下列不定积分  $I = \int \frac{1}{1+x^4} dx$ ,  $J = \int \frac{x^2}{1+x^4} dx$ .

3. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{llll} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}; & (2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; & (3) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx (a > 0); & (4) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} (a \geq 0); \\ (5) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}; & (6) \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx; & (7) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} dx (a < b); & (8) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx. \end{array}$$

4. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}; & (2) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx; & (3) \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx; \\ (4) \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx; & (5) \int x^2\sqrt{4-x^2} dx; & (6) \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

5. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \ln(1+x^2) dx; & (2) \int x^\alpha \ln x dx; \\ (3) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx; & (4) \int x^2 e^{-2x} dx; \\ (5) \int x \cos \beta x dx; & (6) \int x^2 \sin 2x dx; \\ (7) \int x \arctan x dx; & (8) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \\ (9) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx; & (10) \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx. \end{array}$$

6. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx; & (2) \int \frac{1+\tan x}{\cos x} e^x dx. \\ (3) \int (\cos x - \sin x) e^{-x} dx; & (4) \int x(2-x) e^{-x} dx. \end{array}$$

7. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \sqrt{a^2-x^2} dx; & (2) \int \sqrt{x^2-a^2}; \\ (3) \int \arctan \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx; & (4) \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx; \\ (5) \int x \arctan x \ln(1+x^2) dx; & (6) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \end{array}$$

8. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \sin(\ln x) dx$ ; (2)  $\int \cos(\ln x) dx$ ;  
(3)  $\int x e^x \cos x dx$ ; (4)  $\int x e^x \sin x dx$ ;

9. 求下列不定积分的递推公式:

- (1)  $\int x^n e^x dx$ ; (2)  $\int x^n (\ln x)^d dx$ ;  
(3)  $\int \sin^n x dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{\sin^n x} (n \geq 2)$ .

10. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$ ; (2)  $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$ ;  
(3)  $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}$ ; (4)  $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1} dx$ ;  
(5)  $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ ; (6)  $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$ .

11. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \cos x \sin^2 x dx$ ; (2)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ ; (3)  $\int \tan x \sin^2 x dx$ ; (4)  $\int \tan^3 x dx$ ;  
(5)  $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$ ; (6)  $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ ; (7)  $\int \frac{dx}{\sin^2 \cos x}$ ; (8)  $\int \frac{\sin 2x}{2+\tan^2 x} dx$ .

12. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \sec^3 x dx$ ; (2)  $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ ;  
(3)  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{2\cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$ .

13. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ ; (2)  $\int \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ ;  
(3)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ ;  
(5)  $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}} dx$ ; (6)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ ;

14. 求下列不定积分:

- (1)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ ; (2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$ ;  
(3)  $\int \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$ ; (4)  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ .

15. 问下列积分是否可积 (即原函数是否为初等函数):

- (1)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ ; (2)  $\int \sqrt{\cos x} dx$ .

## 4.2 定积分概念、可积条件与定积分性质

## 练习题

1. 设
- $f(x) \in R[a, b]$
- , 且
- $f(a) \geq a > 0$
- . 求证:

(1)  $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$ ; (2)  $\ln f(x) \in R[a, b]$ .

2. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0$ .

3. 设  $f(x) \in R[0, 1]$ , 且  $f(x) \geq a > 0$ . 求证:  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x) dx}$ .

4. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 0$ .

5. 设  $a, b > 0, f(x) \geq 0$ , 且  $f(x) \in R[a, b]$ , 又  $\int_{-a}^b x f(x) dx = 0$ . 求证:

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx.$$

6. 设
- $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0 (\forall x \in [a, b])$
- . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

7. 设
- $f(x)$
- 在
- $[a, b]$
- 上可导, 且
- $f'(x) \in R[a, b]$
- . 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

8. 设
- $f(x) \in R[a, b]$
- , 且
- $a \leq f(x) \leq b$
- , 又
- $\varphi(x)$
- 是
- $[a, b]$
- 上的凹函数. 求证:

(1)  $\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \varphi'(t)(f(x) - t) (\forall t \in (a, b))$ ;

(2)  $\int_0^1 \varphi(f(x)) dx \geq \varphi\left(\int_0^1 f(x) dx\right)$ .

(3)  $\int_0^1 e^{f(x)} dx \geq e^{\int_0^1 f(x) dx}$ .

9. 求证: 极限
- $\lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx (0 < b < 1)$
- 存在, 并且其极限值不超过 1.

10. 求证:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx$ .

## 4.3 变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法

1. 设
- $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} (x \neq 0); f(0) = 0$

(1) 问  $f(x)$  是  $[-1, 1]$  上可积?

(2) 问变上限积分  $\int_{-1}^x f(t) dt$  在点  $x = 0$  处是否可导?

2. 求下列定积分:



$$\begin{aligned}
 (1) & \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^\alpha} dx; & (2) & \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx; \\
 (3) & \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}; & (4) & \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx; \\
 (5) & \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx; & (6) & \int_0^1 \arctan \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;
 \end{aligned}$$

3. 求下列定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx; & (2) & \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx; \\
 (3) & I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x} dx; & (4) & I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx; \\
 (5) & \int_0^1 \frac{x}{e^x} + e^{1-x} dx; & (6) & \int_0^\pi \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

4. (1) 设  $x \geq -1$ , 求  $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$ ;

(2) 求  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx$ ;

5. 设  $f(2) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(x) = 0$ ,  $\int_0^2 f(x)dx = 1$ , 求  $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$ ;

6. 设  $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$ , 且当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f(x) = x$ , 求

$$\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$$

7. 对任意自然数  $n$ , 求证:

$$\int_0^\pi \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微, 求证:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f''(t)(x-t)dt \quad (\forall x \in [a, b])$$

9. 设  $0 < a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 并满足

$$f\left(\frac{ab}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x \in [a, b]).$$

求证:

$$\int_a^b f(x) \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln(ab)}{2} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx.$$

10. 设  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 并满足

$$f\left(\frac{a^2}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x > 0)$$

求证:

$$(1) \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(2) \int_1^a \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(3) \text{ 如果 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上连续, 则 } \int_0^1 g(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} = \int_1^a g(x + \frac{a^2}{x}) \frac{dx}{x}.$$

11. (1) 设  $f(x)$  是奇函数, 求证:  $f(x)$  的任一原函数是偶函数;

(2) 设  $f(x)$  是偶函数, 求证:  $f(x)$  的任意原函数是奇函数和常数之和.

$$12. \text{ 求证: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

13. 设函数  $f(x)$  二阶可微, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2})| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3$$

其中  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ .

14. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $\exists m \in N$ , 使得

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, m)$$

求证:  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $m+1$  个零点.

$$15. \text{ 设 } S(x) = \int_0^x |\cos t| dt.$$

(1) 当  $n$  为正整数, 且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 证明  $2n \leq S(x) < 2(n+1)$ .

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$ .

16. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续导数, 求

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$$

17. (1) 设  $f(x)$  在任意有限区间上可积分, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = l$$

(2) 第(1)小题的逆命题是否成立? 如果加上一个条件: “ $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调上升”, 第(1)小题的逆命题是否成立?

18. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = A$$

19. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $f(x) \geq 0 (\forall x \in C[a, b])$ . 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

20. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调上升, 函数

$$F(x) \stackrel{\text{定义}}{=} \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & x > 0 \\ f(0+0), & x = 0 \end{cases}$$

求证: 在  $[0, +\infty)$  上,  $F(x)$  单调上升且右连续.

## 4.4 定积分的应用

### 练习题

1. 求

- (1) 椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的面积;
- (2) 椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

2. 求圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  与两平面  $z = 0, z = 2(x + a)$  所围立体的体积和侧面积.

3. 设心脏线为  $r = a(1 + \cos\theta)$  ( $a > 0$ ). 求

- (1) 所围成图形的面积;
- (2) 它的长度;
- (3) 它绕极轴旋转一周所围成立体的体积;
- (4) 它绕极轴旋转一周所产生立体的侧面积.

4. (1) 求半圆  $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的重心.

- (2) 求锥体  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$  的重心和绕  $z$  轴的转动惯量 (设锥体的密度为 1).

5. 有一半径  $R = 3\text{m}$  的圆形溢水洞, 水半满, 求水作用在闸门上的压力.

6. 已知抛物线  $y = -ax^2 + b$  ( $a > 0, b > 0$ ). 求  $a$  和  $b$  的值, 使满足下面两个条件:

- (1) 抛物线与  $x$  轴围成的曲边梯形包含正方形

$$(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$$

- (2) 抛物线与  $x$  轴围成的曲边梯形面积最小.

7. 已知抛物线  $x^2 = (p - 4)y + a^2$  ( $p \neq 4, a > 0$ ). 求  $p$  和  $a$  的值, 使满足下面两个条件:

- (1) 抛物线与  $y = x + 1$  相切;
- (2) 抛物线与  $x$  轴围成的图形绕  $x$  轴旋转有最大的体积.

8. 某建筑工程打地基时, 需要气锤将桩打进土层, 气锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为  $k$  ( $k > 0$ )), 气锤第一次击打讲桩打进地下  $am$ . 根据设计方案, 要求气锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数  $r$  ( $0 < r < 1$ ). 问

- (1) 气锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?  
 (2) 若击打次数不限, 气锤至多能将桩打进地下多深?

## 4.5 广义积分

### 练习题

1. 判别下列广义积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx;$$

$$(3) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} (p > q);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}};$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx;$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

2. 判别下列广义积分的收敛性:

$$(1) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x(1-x)} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \ln \sin x dx;$$

$$(4) \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)} dx.$$

3. 判别广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx (b > a > 0)$  的收敛性.

4. 判别下列广义积分的收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx.$$

5. 判别下列广义积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin(x + \frac{1}{x}) dx.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x} dx;$$

6. 设  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , 且  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛. 求证:  $\int_a^{+\infty} h(x) dx$  收敛.

7. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调下降, 且  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$$



## 第5章 级数

### 5.1 级数敛散判别法与性质、上极限与下极限

#### 练习题

1. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}.$$

2. 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!} \cdot 2^n}{n^{\frac{n}{2}}};$$

$$(7) \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots.$$

3. 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{\sqrt{n}}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{\sqrt{n}}};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} (p > 1).$$

4. 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(2) \lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} [(n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1]$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n})(a > 0);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^p (p > 0).$$

5. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(B)$  皆收敛, 且  $a = n \leq c_n \leq b_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ . 试证级数

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$  收敛; 若级数  $(A), (B)$  皆收敛, 问级数  $(C)$  的收敛性如何?

6. 若正向级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $a_n$  单调递减. 求证:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} na_k = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0.$$

7. 若正向级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的项  $a_n$  单调递减, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  收敛, 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

8. 设  $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$ . 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  收敛的充分必要条件为下面的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

9. 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+100};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

10. 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^n n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{a^n}{1+a^n} (a > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}.$$

11. 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot e^{-nx}.$$

12. 讨论下列级数的收敛性于绝对收敛性 ( $p > 0$ ):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+(-1)^{n-1})^p}.$$

13. 求证: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  收敛, 则下列级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

皆收敛.

14. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ . 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

15. (1) 设正项数列  $\{x_n\}$  单调上升. 求证: 当  $x_n$  有界时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$$

收敛, 当  $\{x_n\}$  无界时, 该级数发散.

- (2) 设  $\alpha \geq 1, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+\alpha} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ . 求证:  $(n^\alpha a_n)$  是收敛数列.

16. 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  的平方 (指柯西乘积) 是发散的.
17. 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  的平方 (指柯西乘积) 是收敛的.
18. 用级数方法证序列  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}}$  的极限存在 ( $n \rightarrow +\infty$ ).
19. 设  $p_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  收敛, 求证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \text{ 收敛}$$

20. 设  $a_n, b_n$  满足关系式  $a_{n+1} = b_n - qa_n (0 < q < 1)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  存在, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.
21. 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$ . 求证:
- (1)  $1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其极限值.
22. 设序列  $\{a_n\}$  有界, 并满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + 2a_n) = 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
23. 求证  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \leq 1 (S_n \geq 0)$  的充要条件为: 对任一大于 1 的数为  $l$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{l^n} = 0$ .
24. 设  $0 \leq x_{n+m} \leq x_n \cdot x_m (x, m \in N)$ . 求证: 序列  $\{\sqrt[n]{x_n}\}$  极限存在.
25. (1) 设  $0 < q < l$ , 求证:  $\exists r \in (q, 1)$ , 使  $n$  充分大时, 有

$$1 + \frac{q}{n} < (1 + \frac{1}{n})^r (n > N);$$

- (2) 设  $a_n > 0$ , 求证:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}) - 1 \geq 1$ .

## 5.2 函数级数

### 练习题

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性:
- (1)  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, i) 0 \leq x \leq b < 1; ii) 0 \leq x \leq 1; iii) 1 < a \leq x < +\infty$ .
- (2)  $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}), i) x \leq 0; ii) x < 0$ .
2. 设  $f(x)$  在  $(A, B)$  内有连续导数  $f'(x)$ , 且

$$f_n(x) \stackrel{\text{记为}}{=} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)].$$

求证: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_n(x)$  在闭区间  $[a, b] \subset (A, B)$  上一致收敛于  $f'(x)$ .

3. 求证下列级数在所示区间上的一致收敛性:

- (1)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} (|x| < +\infty);$
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} (-\pi + \delta \leq x \leq \pi - \delta, \delta > 0);$
- (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n} x^{n+a} (0 < a < 1, 0 \leq x \leq 1);$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{x^2+n^2}} \quad (|x| < +\infty).$$

4. 设  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续而且非负,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$  收敛, 且和函数  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$

上连续, 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

5. 求证: 级数  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^N \sin^2 \pi x$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

6. 给定序列  $f_n(x) = nxe^{-nx^2} (n = 1, 2, \dots)$ . 求证:

$$(1) \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty}] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx;$$

(2) 序列  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

7. 求证下列级数在  $[0, 1]$  上不一致收敛:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

8. 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  在  $(0, 2\pi)$  上不一致收敛.

9. 设  $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛, 且

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{R} f(x) \quad (n \rightarrow \infty),$$

求证:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

10. 设  $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $n \rightarrow \infty$  时,

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{[a, b]} f(x).$$

又设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无零点, 求证:

(1) 当  $n$  充分大时,  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上无零点;

$$(2) \frac{1}{f_n(x)} \xrightarrow[\text{一致}]{[a, b]} \frac{1}{f(x)} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

11. 设  $f_n(x) \in C[a, b] (n = 1, 2, \dots)$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[\text{一致}]{[a, b]} f(x)$ . 求证:

(1)  $\exists M$ , 使  $|f_n(x)| \leq M, |f(x)| \leq M (a \leq x \leq b, n = 1, 2, \dots)$ ;

(2) 若  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则  $g(f_n(x)) \xrightarrow[\text{一致}]{[a, b]} g(f(x))$ .

12. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-nx}$ , 求证:

(1)  $f(x)$  在  $x \geq 0$  上连续;

(2)  $f(x)$  在  $x > 0$  上连续可微.

13. 求证:

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln^2 x$  在  $[0, 1]$  上一致连续;

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}.$$

14. 求证:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \ln t dt \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上一致收敛};$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

15. 设函数  $f(x)$  在  $(-a, a)$  上无穷多次可微, 且序列  $f^n(x)$  在  $(-a, a)$  上一致收敛到函数  $\varphi(x) = Ce^x$  ( $C$  为常数).

16. 求证: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - \frac{1}{n}|}{2^n}$$

在  $(0, 1)$  上连续, 除点  $x_k = \frac{1}{k}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) 处不可微.

17. 设  $x_n$  是  $(0, 1)$  内一个序列, 即  $0 < x_n < 1$  且  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ). 求证: 函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$  在  $(0, 1)$  中除点  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 处不连续外皆连续.

### 5.3 幂函数

#### 练习题

1. 求下列幂函数的收敛半径, 并讨论收敛区间端点的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n} x^n) x^{2n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} x^n;$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}) x^n.$$

2. 求下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} [x(1+x)]^{3^n}.$$

3. 给定零阶贝塞尔函数:

$$y = J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}},$$

求证: 它在实轴上满足方程:

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

4. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n! 2^n} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

5. 求下列级数的和:



- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ ;  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ .

6. 设  $0 < a < 1$ , 求证:

(1)  $\int_0^b \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} b^{n+a} \quad (0 \leq b < 1);$

(2) 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} b^{n+a}$  对在  $[0, 1]$  上一致收敛;

(3)  $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}.$

7. 已知零阶贝塞尔函数:

$$J_0(x) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta,$$

求证:  $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$

8. 设对  $\forall k \in N, |f^{(k)}(x)| \leq M^k \quad (|x| < a)$ , 其中  $M$  为与  $k$  和  $x$  都无关的常数. 求证:

(1)  $f(x)$  可以在  $(-a, a)$  上展开成幂级数;

(2)  $f(x)$  可以开拓到  $(-\infty, +\infty)$ , 且在  $(-\infty, +\infty)$  上无穷多次可微.

9. 把下列函数在  $x = 0$  点展开成幂级数:

(1)  $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ ;

(2)  $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ ;

(3)  $\cos^2 x$ ;

(4)  $\ln(1+x+x^2)$ ;

(5)  $\ln(1+x+x^2+x^3)$

(5)  $\ln \frac{1+x}{1-x}.$

10. 求证下列展开式成立:

(1)  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1);$

(2)  $\arctan \frac{2x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{x^{2n+1}}{2^{n(2n+1)}} \quad (|x| \leq \sqrt{2}).$

11. (1) 将  $(\arctan x)^2$  在  $x = 0$  点展开为幂级数;

(2) 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1})$  的和.

12. 求下列幂级数的收敛半径, 并讨论收敛区间端点的收敛性;

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{q^n n!};$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}.$

13. (1) 求证: 函数  $y = \arcsin x / \sqrt{1-x^2}$  满足方程

$$(1-x^2)y' - xy = 1,$$

并由此求出  $y^{(n)}(0)/n!$ ;

(2) 求证:  $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \quad (|x| < 1);$

(3) 求证:  $(\arctan x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad (|x| \leq 1).$

14. 设  $0 < \theta < 2\pi$ , 利用幂级数的乘法求证:

$$(1) \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta x^{n-1} \quad (|x| < 1).$$

15. 求下列函数的幂级数展开式:

$$(1) \arctan \frac{x \sin \theta}{1 - x \cos \theta};$$

$$(2) -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2).$$

16. 设  $0 < \theta < 2\pi$ , 求证:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln 2 \sin \frac{\theta}{2};$$

(3) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$  在  $(0, 2\pi)$  上不一致收敛.

17. 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径为 1, 求

$$F(x) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{f(x)}{1-x}$$

的幂级数展开式, 并求出它的收敛半径.

18. 设  $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , 又已知这两个级数的柯西乘积产生的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$$

收敛. 求证: 乘积级数的积等于  $A \cdot B$ .

## 5.4 傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛

### 练习题

- (1)  $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$  是  $[0, \pi]$  上的正交系;  
 (2)  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  是  $[0, \pi]$  上的正交系;  
 (3)  $l, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cdots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cdots$  是  $[-l, l]$  上的正交系.

2. 将下列函数展开成傅氏级数:

$$(1) f(x) = \sin^4 x \quad (-\pi < l x \leq \pi);$$

$$(2) f(x) = \sec x \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(3) f(x) = \sin \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(4) f(x) = |\sin x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

3. 将  $f(x) = |x|$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展开成傅氏级数, 并求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

4. 将  $f(x) = e^x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展开成傅氏级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$  的和.

5. 将  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < a < 1, \\ 2, & h \leq x \leq \pi \end{cases}$

(1) 按余弦展开;

(2) 按正弦展开.

6. 求证:

(1)  $\frac{\pi}{\tan a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (0 < a < 1)$

(2)  $\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} (0 < x < \pi);$

(3)  $\frac{1}{\sin^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2} \right] (0 < x < \pi).$

7. 求证:

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx| dx = 4 (n \in N);$

(2) 若  $\forall a \in N$ , 设  $T_n(x)$  是任意的  $n$  阶三角矩阵, 其中  $\cos nx$  的系数为 1, 则

$$\max_{|x| \leq \pi} |T_n(x)| \geq \frac{\pi}{4}.$$

8. 求证:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{x}} \right) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x dx.$

(2)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

9. 设  $f(x) \in C[0, T], g(x)$  是周期为  $T$  的连续周期函数, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx \cdot \int_0^T g(x)dx$$

10. 设  $0 < a < 1$ , 求证:

(1)  $\lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n};$

(2)  $\lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-n};$

(3)  $\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi};$

(4)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

11. 设  $f(x), g(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 求证:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) + g(x)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx = 2 \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx \right]$$

12. 设  $f(x), g(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 它们的傅氏级数分别记为  $a_n, b_n; \alpha_n, \beta_n$ . 求证:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

13. 利用上题结果, 求证: 如果  $f(x) \in LR^2[-\pi, \pi]$ , 那么  $f(x)$  的傅氏级数可逐项积分, 即

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt.$$

14. 利用逐项积分定理, 将  $f(x) = x^4$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展开为傅氏级数, 并用下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

15. 将如下定义的函数  $f(x)$  展开为傅氏级数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/2h, & 2 \leq |x| \leq 2h, \\ 0, & 2h \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

并求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nh}{n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 nh}{n^4}.$$

16. 求证: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (0 < x < 2\pi)$$

不可能是某个黎曼可积函数的傅氏级数.

17. 将函数  $f(x) = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 展开为傅氏级数.

18. 将如下定义的函数  $f(x)$  展开为傅氏级数:

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

19. 设  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 且  $f(x)$  是奇函数, 它的傅氏级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

求证: 对  $\forall h > 0$ , 函数

$$F(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-k}^{x+k} f(t)dt \quad (|x| \leq \pi)$$

也是奇函数, 并求它的傅氏级数.

## 第6章 多元函数积分学

### 6.1 欧式空间、多元函数的极限与连续

#### 练习题

1.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ . 证明:  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2)$ , 并说明等式的几何意义.
2. 证明下列三个命题等价:
  - (1)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ ;
  - (2)  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ ;
  - (3)  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$ .
3. 设  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$  为常向量,  $c$  为常数, 证明:
  - (1)  $H = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} < c\}$  是开集;
  - (2)  $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \geq c\}$  是闭集.
4. 试画出下列集合  $\Omega$  的图形:
  - (1)  $\{(x, y) | y > 0, x > y, x < 1\}$ ;
  - (2)  $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 2y + 2\}$
  - (3)  $\{(x, y) | 1 \leq xy \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 1\}$ ;
  - (4)  $\{(x, y, z) | 0 < x < y < z < 1\}$ .
5. 证明:
  - (1)  $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ ;
  - (2)  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} + \overline{B}$ .
6. 设  $A, B$  为  $\mathbf{R}^m$  中的有界集. 证明:
  - (1)  $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ ;
  - (2)  $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ .
7. 设  $A, B$  是  $\mathbf{R}^m$  中不相交的闭集, 求证: 存在开集  $W$  和  $V$ , 满足  $A \subset W, B \subset V$ , 而  $W \cap V = \emptyset$ .
8. 设  $E \subset \mathbf{R}^m$ , 证明:  $E = \{\mathbf{x} | \rho(\mathbf{x}, E) = 0\}$ .
9. 设  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  是  $\mathbf{R}^m$  中的有界闭集列, 满足  $F_n \supset F_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ , 又  $F_n$  的直径  $d_n = d(F_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 求证: 存在惟一的一点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ , 使得  $\mathbf{x}_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ .
10. 设  $E, F$  为  $\mathbf{R}^m$  中的闭集,  $E, F$  中至少有一为有界集, 求证:  $\exists \mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F$ , 使得  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(E, F)$ .
11. 设  $D$  为  $\mathbf{R}^m$  中的凸集, 证明:  $\overline{D}$  也是凸集.
12. 证明:
  - (1)  $|\mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}| = |\mathbf{x}| (a \neq 0)$ ;
  - (2)  $|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}| = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$ ;
  - (3) 设  $|\mathbf{x}| |\mathbf{y} - \mathbf{x}| / |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}| |\mathbf{x} - \mathbf{y}| / |\mathbf{y}|^2$ .
13. 确定并画出下列函数的定义域, 指出后两题的等位面是什么曲面 (或曲线):



(1)  $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ ;

(2)  $u = \sqrt{\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-x}}$ ;

(3)  $u = \arcsin \frac{y}{x}$ ;

(4)  $u = \ln(-1-x^2-y^2+z^2)$ .

14. 求下列函数的极限:

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y}$ ;

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^{3/2}}{x^4 + y^2}$ ;

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$ ;

(4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ .

15. 对下列函数  $f(x, y)$ , 证明  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  不存在:

(1)  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ;

(2)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$ .

16. 问下列函数是否在全平面连续, 为什么?

(1)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0; \end{cases}$

(3)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} e^{-\frac{x^4}{y^2}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$

(4)  $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

17. 设函数  $f(x, y)$  在半开平面  $x > 0$  上连续, 且对  $\forall y_0$ , 极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \varphi(y_0)$$

存在. 当函数  $f$  在  $y$  轴上补充定义  $\varphi(y)$  后, 证明: 函数  $f(x, y)$  在闭半平面  $x \geq 0$  上连续.18. 设函数  $f(x, y)$  在开半平面  $x > 0$  上一致连续. 证明:

(1)  $\forall y_0$ , 极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \varphi(y_0)$  存在;

(2) 函数在  $y$  轴上补充定义  $\varphi(y)$  后, 所得函数  $f(x, y)$  在  $x \geq 0$  上一致连续.19. 设  $u = f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$  点连续, 且  $f(\mathbf{x}_0) > 0$ . 证明: 存在  $\mathbf{x}_0$  的一个邻域  $U(\mathbf{x}_0; \delta)$ , 使得  $f(\mathbf{x})$  在  $U(\mathbf{x}_0; \delta)$  上取正值.20. 设  $E$  是  $\mathbf{R}^m$  中任意点集, 求证:  $\rho(\mathbf{x}, E)$  在  $\mathbf{R}^m$  上一致连续.21. 设  $f(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ , 对任意实数  $\alpha$ , 作集合

$$G = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) > \alpha\}, \quad F = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}.$$

求证:  $G$  是  $\mathbf{R}^m$  中的开集,  $F$  是  $\mathbf{R}^m$  中的闭集.

22. 设  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . 求证 L
- (1)  $\exists a > 0, b > 0$ , 使得  $a|\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| \leq b|\mathbf{x}|$ ;
  - (2)  $\exists a > 0, b > 0$ , 使得  $a|\mathbf{x}| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq b|\mathbf{x}|$ .
23. 设  $A$  是  $m \times m$  矩阵,  $\det A \neq 0$ , 求证:  $\exists a > 0$ , 使得

$$|A\mathbf{x}| \geq a|\mathbf{x}| \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m).$$

24. 设  $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^m$  是有界闭区域,  $f(\mathbf{x}) \in C(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^m)$ , 且是单叶的. 求证:  $f^{-1}(x)$  在  $f(\bar{\Omega})$  上连续.
25. 设  $f(x, y)$  除直线  $x = a$  与  $y = b$  外有定义, 且满足:
- (1)  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \varphi(x)$  存在;
  - (2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \phi(y)$  一致存在 (即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$ , 时,  $\forall y \neq b$ , 有  $|f(x, y) - \phi(y)| < \epsilon$ ). 证明:

- I. 累次极限  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = c$  存在。
- II. 累次极限  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \phi(y) = c$
- III. 全面极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = c$ .

## 6.2 偏导数与微分

### 练习题

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(2) u = \tan \frac{x^2}{y};$$

$$(3) u = \sin(x \cos y);$$

$$(4) u = e^{\frac{x}{y}};$$

$$(5) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(6) u = \arctan \frac{x+y}{1-xy};$$

$$(7) u = \left(\frac{x}{y}\right)^z;$$

$$(8) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2. 设置  $f(x, y)$  在圆  $\Omega$  上的偏导数  $f'_x, f'_y$  存在且有界. 证明:  $f(x, y)$  在  $\Omega$  上一致连续. 若  $\Omega$  是任意区间, 问区间是否成立. 考察例子

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

$\Omega$  用极坐标表示为  $1 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi$ .

3. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:

- (1)  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点连续;

- (2)  $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$  存在;  
 (3)  $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$  在  $(0,0)$  点不连续;  
 (4)  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  点不可微.

4. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0, \end{cases}$$

证明:  $f(x,y)$  在平面上可微.

5. 求下列复合函数的偏导数:

- (1)  $u = f(\frac{xz}{y})$ ; (2)  $u = f(x+y, z)$ ;  
 (3)  $u = f(x, xy, xyz)$ ; (4)  $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ ;  
 (5)  $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$ ; (6)  $u = f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$ .

6. 设  $u = x^n f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ , 其中  $f$  可微. 证明  $u$  满足方程:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = n \cdot u.$$

7. 证明:  $f(x,y,z)$  为  $n$  次齐次函数的充要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x,y,z).$$

8. 作自变量变换:  $x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{wu}, z = \sqrt{uv}$ , 它把函数  $f(x,y,z)$  变为  $F(u,v,w)$ . 证明:

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = u F'_u + v F'_v + w F'_w.$$

9. 令  $\xi = 2xy, \eta = x^2 - y^2$ , 解下列方程 (解可含任意函数):

- (1)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ; (2)  $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

10. 令  $\xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x$ , 求方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  的解.

11. 设  $u(x,y), v(x,y)$  为连续可微函数, 且满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

作自变量变换:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 证方程组变成为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

12. 再对上题所得方程组做变换:  $R = \sqrt{u^2 + v^2}, \Phi = \arctan \frac{v}{u}$ . 证明方程组变为

$$\frac{\partial \ln R}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\partial \ln R}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

13. 设  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, (x_0, y_0) = (1, 1)$ .

- (1) 若方向  $l$  与基  $e_1, e_2$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$  和  $\frac{5\pi}{6}$ , 求方向导数  $\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}$ ;  
 (2) 求在怎样的方向上方向导数  $\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}$  有最大值、最小值、等于零.

14. 设  $u = f(x, y, z)$ , 令

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi.$$

在  $(x, y, z)$  点作三个互相正交的向量  $e_r, e_\varphi, e_\theta$ . 向量  $e_r$  表示  $\varphi, \theta$  固定沿着  $r$  增加的方向, 其余两个作类似理解. 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial e_r} = \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial e_\varphi}, \frac{\partial u}{\partial e_\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

15. 设在第一卦限上连续可微函数  $u(x, y), v(x, y)$  满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

且  $u$  只是  $\sqrt{x^2 + y^2}$  的函数, 试求出  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$ .

16. 设  $f(x)$  定义在凸函数  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$  上, 对  $\forall x_1, x_2 \in \Omega, t \in [0, 1]$ , 满足

$$f[t x_1 + (1-t)x_2] \leq t f(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

则称  $f$  为凹函数. 若  $f(x)$  是凸域  $\Omega$  上的可微凹函数, 证明:

- (1)  $f(x) - f(x_0) \geq \frac{f[x_0 + t(x-x_0)] - f(x_0)}{t}, x, x_0 \in \Omega$ ;  
 (2)  $f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ .

17. 求下列函数的二阶偏导数:

$$(1) u = xy + \frac{y}{x}; \quad (2) u = (xy)^z.$$

18. 对下列函数求指定阶的偏导数:

- (1)  $u = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ , 求所有三阶偏导数;  
 (2)  $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ , 求  $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$ ;  
 (3)  $u = e^{xyz}$ , 求  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ;  
 (4)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ .

19. 求高阶导数:

$$(1) u = (x-a)^p (y-b)^q, \text{ 求 } \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}; \quad (2) u = \frac{x+y}{x-y} (x \neq y), \text{ 求 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n};$$

$$(3) u = \ln(ax + by), \text{ 求 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}; \quad (4) u = xyz e^{x+y+z}, \text{ 求 } \frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

20. 求下列函数的二阶偏导数:

- (1)  $u = f(x + y, xy)$ ; (2)  $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ ;  
 (3)  $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$ ; (4)  $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$ .

21. 验证下列函数满足调和方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(1)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

(2)  $u = \arctan \frac{y}{x}$ .

22. 证明: 函数  $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$  ( $a, b$  为实数) 当  $t > 0$  时满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

23. 设  $x = f(u, v), y = g(u, v)$  满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

又设  $w = w(x, y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . 证明:

- (1) 函数  $\omega = \omega[f(u, v), g(u, v)]$  满足方程:  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$ ;  
 (2)  $\frac{\partial^2 (fg)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 (fg)}{\partial v^2} = 0$ .  
 24. 作变量替换  $\xi = x + t, \eta = x - t$ , 求解方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ , 并验证之.  
 25. 求下列函数在  $(0, 0)$  点领域展开为带皮亚诺余项的四阶泰勒公式:

(1)  $u = \sin(x^2 + y^2)$ ;

(2)  $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ;

(3)  $u = \ln(1 + x)\ln(1 + y)$ ;

(4)  $u = e^{\cos y}$ .

26. 设函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x$ , 试求出函数  $f(x, y)$ .

27. 设  $\Omega$  为含原点的凸域,  $u = f(x, y)$  在  $\Omega$  上可微, 且满足

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

求证:  $f(x, y)$  在  $\Omega$  上恒为常数. 若  $\Omega$  不含原点, 问  $f(x, y)$  是否为常数. 考察例子  $u = \arctan \frac{y}{x}$ .

28. 求下列函数  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ) 的微分:

(1)  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$ , 其中  $A$  为  $n \times m$  矩阵,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ ;

(2)  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$ .

29. 设  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l, g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  是可微函数. 试用复合函数求导公式, 证明公式

$$Df(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})Dg(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})Df(\mathbf{x}).$$

30. 设  $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ .



- (1) 求  $Df(\mathbf{x})$ ;
  - (2) 取方向  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , 求方向导数  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ ;
  - (3) 取方向  $\mathbf{l}$  满足  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{x} = 0$ , 求方向导数  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ ;
  - (4) 求导数的范数  $\|Df(\mathbf{x})\|$ .
31. 求下列变换的雅可比行列式:
- (1)  $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$ , 求  $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)}$ .
  - (2)  $x_1 = r \cos \theta_1, x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2$ , 求  $\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)}$ ;
  - (3) 
$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \\ \vdots \\ x_{m-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1}, \\ x_m = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{m-1}, \end{cases} \quad \begin{aligned} &r \geq 0, 0 < \theta_1, \cdots, \theta_{m-2} < \pi, \\ &0 < \theta_{m-1} < 2\pi \end{aligned}$$
 试求用数学归纳法求  $\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{m-1})}$ .
32. 设  $\Omega$  为  $\mathbf{R}^m$  中的凸区域,  $f(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ . 若  $f$  的海色矩阵  $H_f(\mathbf{x})$  是半正定的. 证明:  $f(\mathbf{x})$  是  $\Omega$  上的凹函数.

## 6.3 反函数与隐函数

### 练习题

1. 求由下列方程定义的函数  $y$  的一阶、二阶导数:
  - (1)  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ ;
  - (2)  $xy + 2^y = 0$ .
2. 对下列方程所确定的  $x = z(x, y)$ , 求一阶偏导数:
  - (1)  $x^n + y^n + z^n = a^n$ ;
  - (2)  $x + y + z = e^{x+y+z}$ .
3. 对下列方程所确立的  $z = z(x, y)$ , 求二阶偏导数:
  - (1)  $xy + yz + zx = 1$ ;
  - (2)  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ .
4. 求由下列方程所确定的  $z = z(x, y)$  的微分:
  - (1)  $f(xy, z - y) = 0$ ;
  - (2)  $f(x, x + y, x + y + z) = 0$ .
5. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = yf(\frac{z}{y})$  所确定, 证明:

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

6. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  所确定, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

7. 设  $u = u(x, y, z)$  由方程  $F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$  所确立, 证明:

$$\frac{u'_x}{x} + \frac{u'_y}{y} + \frac{u'_z}{z} = \frac{1}{u}.$$

8. 设  $u = u(x, y, z)$  由方程  $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$  所确立, 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z}.$$

9. 求函数  $z = f(x + y, z + y)$  的二阶偏导数.

10. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} z = ax + y\varphi(a) + \psi(a), \\ 0 = x + y\varphi'(a) + \phi'(a) \end{cases}$$

所确立的函数  $z = z(x, y)$  满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

11. 若  $z = z(x, y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ . 证明: 若把  $z = z(x, y)$  中的  $y$  看成  $x, z$  的函数, 则它满足同样形状的方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2 = 0.$$

12. 设  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ . 求证:

(1) 当  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  时,  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ , 但变换不是一一的;

(2) 记  $\Omega = \{(x, y) | 0 < 2y < 2\pi, -\infty < x < +\infty\}$ , 这时变换在  $\Omega$  是一一变换的, 并求出逆变换.

13. 求下列变换的雅可比行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ :

$$(1) \begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{x}{y}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

14. 由下列方程组求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$ :

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

15. 求由方程组  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$  所确定的函数  $z = z(x, y)$  的一阶、二阶偏导

数.

16. 设  $u = f(x - ut, y - ut, z - ut), g(x, y, z) = 0$ . 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ , 并问这时  $t$  是自变量还是因变量?
17. 设  $z = z(x, y)$  满足方程组  $f(x, y, z, t) = 0, g(x, y, z, t) = 0$ , 求  $dz$ .
18. 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$  是凸函数,  $f(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m), Df(\mathbf{x})$  在  $\Omega$  上是正定矩阵. 求证:  $f(\mathbf{x})$  是  $\Omega$  上的单叶函数.
19. 设  $x \in \mathbf{R}^m, f(x) \in C^2(U(x_0), \mathbf{R}), Df(x_0) = 0, \det H_f(x_0) \neq 0$ . 求证:  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in U(x_0; \delta) \setminus \{x_0\}$  时,  $Df(x) \neq 0$ .
20. 假设  $f(x) \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ , 并存在  $\mathbf{R}^m$  上  $\det Df(x) \neq 0$ , 又当  $|x| \rightarrow +\infty$  时,  $|f(x)| \rightarrow +\infty$ . 证明:  $f(\mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^m$ .

## 6.4 切空间与极值

### 练习题

1. 求曲线  $z = x^2 + y^2, 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$  在  $(1, 1, 2)$  点的切线方程.
2. 在曲线  $y = x^2, z = x^3$  上求一点, 使该点的切线平行于平面

$$x + 2y + z = 4$$

3. 求下列曲线在指定点的切线方程和切线方程:

- |                               |                    |
|-------------------------------|--------------------|
| (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ , | $M(3, 4, 12)$ ;    |
| (2) $z = \arctan(x/y)$ ,      | $M(1, 1, \pi/4)$ ; |
| (3) $3x^2 + 2y^2 = 2z + 1$ ,  | $M(1, 1, 2)$ ;     |
| (4) $z = y + \ln(x/z)$ ,      | $M(1, 1, 1)$ .     |

4. 求曲面  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$  在  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$  点的切平面方程.
5. 求曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  的平行于平面  $x + 4y + 6z = 0$  的个切平面.
6. 求曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  的切平面, 使其垂直于平面

$$x - y - z = 2 \text{ 和 } x - y - z/2 = 2.$$

7. 试确定正数  $\lambda$ , 使曲面  $xyz = \lambda$  与椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的某点相切.
8. 证明: 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  的切平面在坐标轴上割下的诸线段之和是为常量.
9. 证明: 曲面  $F(x - az, y - bz) = 0$  的切平面与某一定直线平行, 其中  $a, b$  为常数.
10. 证明: 曲面  $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$  在  $M(a_0, y_0, z_0)$  点的法向量与向量  $(x_0, y_0, z_0)$  及  $(a, b, c)$  共面.
11. 求下列函数的极值:
  - (1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ ;
  - (2)  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$  ( $0 \leq x, y \leq \pi$ );
  - (3)  $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ .

12. 确立最小正数  $A$  和最大负数  $B$ , 时使不等式

$$\frac{B}{xy} \leq \ln(x^2 + y^2) \leq A(x^2 + y^2)$$

在第一象限内成立.

13. 求函数  $f(a, b) = \int_0^1 [x^2 - a - bx]^2 dx$  的最小值.
14. 作容器为  $V$  的闭口长方形容器, 问长、宽、高成何比例时用料最省?
15. 有一块铁片, 宽  $b = 24\text{cm}$ , 要它的两边折起来做一个槽, 使得容积最大, 求每边的倾角  $\alpha$  和折起来的宽度  $x$ .
16. 在椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  内接长方体, 求体积为最大的那个长方体.
17. 给定曲面  $z = 1 - x^2 - y^2$ , 求过第一象限中的曲面切平面, 使它与第一象限坐标面所围的四面体体积最小.
18. 设  $u(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上连续, 在  $x^2 + y^2 < 1$  上满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u,$$

且在  $x^2 + y^2 = 1$  上  $u(x, y) > 0$ . 证明:

- (1) 当  $x^2 + y^2 \leq 1$  时,  $u(x, y) \geq 1$ ;
- (2) 当  $x^2 + y^2 \leq 1$  时,  $u(x, y) > 0$ .
19. 设  $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$ , 则方程  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$  表示椭圆. 试证该椭圆的面积为  $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$ .
20. (1) 在  $x^2 + y^2 = 1$  的条件下, 求  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  的最大值与最小值;
- (2) 利用 (1) 证明: 当  $a > 0, ac - b^2 > 0$  时, 二次型  $f(x, y)$  是正定的; 当  $a < 0, ac - b^2 > 0$  时, 二次型  $f(x, y)$  是负定的.
21. 求圆的内接  $n$  边形中面积最大者.
22. 求圆的外切  $n$  阶边形中面积最小者.
23. 证明: 椭圆的内接三角形中, 面积最大的三角形的顶点处的椭圆法线必与三角形的该顶点的对边垂直; 由此求出面积最大的内接三角形.
24. 给定椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
- (1) 求第一象限中椭球的切平面, 使它与坐标平面围成的四面体体积最小;
- (2) 证明体积最小的椭球外切八面体体积  $\leq 4\sqrt{3}abc$ .
25. 设凸四边形各边长分别为  $a, b, c, d$ . 求证: 凸四边形对角和为  $\pi$  时面积最大.
26. 长为  $a$  的铁丝切成两段, 一段围成一个正方形, 另一段围成一个圆. 这两段的长各为多少时, 由它们所围正方形面积和圆面积之和最大?
27. 要制定一个中间是圆柱, 两端为相同的正圆锥的空浮标, 它的体积是一定的, 要使用材料最省, 圆柱和圆锥的尺寸因成何比例?
28. 求抛物线  $y = x^2$  和直线  $x - y = 1$  间的最短距离.
29. 在  $\mathbf{R}^m$  中给定超平面  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - c = 0$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^m, c$  为实数.  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ , 试求  $\mathbf{x}_0$  到超平面的距离.

## 6.5 含参积分的定积分

## 练习题

1. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dy;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos xy dy;$

(3)  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}.$

2. 设  $f(x)$  连续,  $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$ , 求  $F^{(n)}(x)$ .3. 设  $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ ,  $F(x) \in C^1(-\infty, \infty)$ ,

$$u = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2n} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy.$$

求证: 当  $-\infty < x < \infty, t \geq 0$  时,  $u(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  连续, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x).$$

4. 求  $F'(x)$ :

(1)  $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^x \sqrt{1-y^2} dy;$

(2)  $F(x) = \int_{a+x}^{b+x} \frac{\sin xy}{y} dy;$

(3)  $F(x) = \int_0^x \int_{t^2}^{x^2} f(t, s) ds dt.$

5. 设  $f(x) \in R[-\pi, \pi]$ , 求函数

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^n n(\alpha_k \cos ks + \beta_k \sin ks)]^2 dx$$

的最小值.

6. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的连续函数.  $a_n, b_n$  为其傅氏系数,  $A_n, B_n$  是卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)dt$$

的傅氏级数. 求证:

(1)  $A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2, B_n = 0 (n = 1, 2, \dots);$

(2)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$

7. 设  $F(x) = \int_0^{2x} e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta$ , 求证:  $F(x) \equiv 2\pi$ .8. 计算积分  $\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx.$



## 6.6 含参积分的广义积分

## 练习题

1. 证明下列积分在所在区间上一致收敛:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2 + y^2} dy (x \geq a > 0);$$

$$(2) \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx (a \leq \alpha \leq b);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p} dx (p \geq 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx (a \geq 0).$$

2. 设  $f(x) \in C[0, +\infty]$  且有界,  $f(0) > 0$ . 讨论函数

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx.$$

的连续性.

3. 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx (b > a > 0)$ .

4. 通过引入参数, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx.$$

5. 通过引入收敛因子  $e^{-ax}$  的方法, 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx (b > a > 0).$$

6. 利用已知积分求下列积分 ( $b > a > 0$ ):

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x^2} dx.$$

7. 利用已知积分求下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{a^2}{x^2})} dx (a > 0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - \cos x}{x^2} dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(\beta x)}{x} dx.$$

8. 利用已知积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$  求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 0).$$

9. 利用  $B$  函数和  $\Gamma$  函数计算下列积分:

- (1)  $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$ ;
- (2)  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \ (a > 0)$
- (3)  $\int_0^1 \frac{x^n}{(1-x^2)^{1/2}} dx \ (n \text{ 为自然数})$ ;
- (4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$ ;
- (5)  $\int_0^\infty \frac{dy}{1+x}$ ;
- (6)  $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$ .

10. 证明:

$$\int_{-1}^1 (1+x)^p (1-x)^q dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1) \ (p > -1, q > -1).$$

11. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}\right).$$

12. 证明:

(1)  $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \ (n > 0)$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = 1$ .

13. 设  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  存在, 求证:

(1)  $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续;

(2)  $F(u)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

14. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可积,  $\forall A > 0, f(x) \in R[0, A]$ . 求证:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

## 第7章 多元函数积分学

### 7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分

#### 练习题

1. 试求  $\mathbf{R}^2$  中点集  $E = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \text{ 和 } y \text{ 至少有一为有理数}\}$  的内容度和外容度. 问  $E$  是否是可测图形?
2. 设  $A, B, C$  是  $\mathbf{R}^m$  中的可测图形, 证明:
  - (1)  $V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B)$ ;
  - (2)  $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$ ;
  - (3)  $V(A \cup B \cup C) = V(A) + V(B) + V(C) - V(A \cap B) - V(A \cap C) - V(B \cap C) + V(A \cap B \cap C)$ .
3. 举例说明  $\mathbf{R}^m$  中两个点集  $E_1$  和  $E_2$  都不是可测函数, 但是  $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$  都是可测函数. 问是否还可能有  $E_1 \setminus E_2$  也是可测图形.
4. 设  $\Omega$  为  $\mathbf{R}^m$  中一可测图形. 证明:  $\Omega^\circ$  和  $\bar{\Omega}$  为可测图形, 且  $V(\Omega^\circ) = V(\Omega) = V(\bar{\Omega})$ .
5. 在  $\mathbf{R}^2$  的区域  $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  上给定函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x, y \text{ 都是有理数,} \\ 2, & \text{当 } x, y \text{ 至少有一是无理数.} \end{cases}$$

问  $f(x, y)$  是否在  $D$  上可积.

6. 设  $\mathbf{R}^m$  中的开集  $\Omega$  为可测图形,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, f \in C(\Omega)$ , 且  $f(x) \geq 0 (x \in \Omega)$ , 但不恒为零. 证明:  $\int_{\Omega} f(x) dV > 0$ . 如果  $\Omega$  不是开集, 上述论证是否正确? 举例说明.
7. 设定义在可测图形  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$  上的两个函数  $f, g$  有界、可积, 而且  $g(x)$  在  $\Omega$  上之值非负. 令

$$m = \inf_{x \in \Omega} \{f(x)\}, \quad M = \sup_{x \in \Omega} \{f(x)\}.$$

证明:

- (1)  $F(t) = \int_{\Omega} [f(x-t)]g(x)dV$  是  $[m, M]$  上的连续函数;
- (2) 存在  $\mu \in [m, M]$ , 使得

$$\int_{\Omega} f \cdot g dV = \mu \cdot \int_{\Omega} g dV.$$

- (3) 设  $f(x) \in R[-1, 1]$ , 证明:  $f(x-y) \in R([0 \times 1] \times [0, 1])$ .
- (4) 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$  为测度图形,  $Q$  为长方体,  $\Omega \subset Q^\circ, f(x) \in R(\Omega)$ . 定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

求证:  $F(x) \in R(Q)$ .

8. 设  $\Omega$  为  $\mathbf{R}^m$  中点集,  $Q$  为长方体,  $\Omega \subset Q^\circ$ . 定义函数

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega. \end{cases}$$

若  $\chi(\mathbf{x})$  在  $Q$  上可积, 证明:  $\Omega$  为可测图形.

9. 在下列积分中改变积分的顺序:

$$(1) \int_0^3 dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{3y} f(x, y) dx.$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy.$$

10. 计算下列二重积分:

(1)  $\Omega$  是由  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 与  $x = \frac{p}{2}$  围成的区域, 求

$$\iint_{\Omega} x^m y^k dx dy \quad (m > 0, k \text{ 为正整数});$$

(2)  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2+x, x \leq 2\}$ , 求  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ ;

(3)  $\Omega$  是由  $y = \sqrt{1-x^2}, y = 0$  围成, 求  $\iint_{\Omega} (x^2 + 3xy^2) dx dy$ ;

(4)  $\Omega$  是由  $y = e^x, y = 1, x = 0$  及  $x = 1$  围成, 求  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ ;

(5)  $\Omega$  是以  $(1, 1), (2, 3), (3, 1)$  和  $(4, 3)$  为顶点的四边形, 求

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy;$$

(6)  $\Omega$  是由  $y = x^2, y = 4x$  和  $y = 4$  围成, 求  $\iint_{\Omega} \sin x dx dy$ .

11. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx.$$

12. 设在  $D = [a, b] \times [c, d]$  上定义的二元函数  $f(x, y) \in C^2(D)$ , 证明:

$$(1) \iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy = \iint_D f''_{yx}(x, y) dx dy;$$

(2) 利用 (1) 证明  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y), (x, y) \in D$  (这里不准用偏导与秩序无关定理).

13. 设  $f(x), g(x) \in R[a, b], D = [a, b] \times [a, b]$ , 考虑  $[f(x)g(y) - g(x)f(y)]^2$  在  $D$  上的重积分, 证明:  $\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ .

14. 求下列立体  $\Omega$  的体积:

- (1)  $\Omega$  是由曲线  $z = xy, x + y + z = 1$  和  $z = 0$  围成;  
 (2)  $\Omega$  是由  $y^2 + z^2 = 1, |x + y| = 1, |x - y| = 1$  围成.  
 15. 证明: 若  $b > a > 0$ , 则有

$$(1) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dx \int_a^b e^{-xy} dy = \ln \frac{b}{a}; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

16. 设  $f(t)$  在  $t \geq 0$  上连续可微, 而且  $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  收敛. 证明: 当  $b > a > 0$  时, 有

$$(1) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dx \int_a^b f'(xy) dy = -f(0) \ln \frac{b}{a};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

17. 设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq R^2$  上可积,  $0 < h < R$ , 令

$$F(\xi, \eta) = \iint_{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leq h^2} f(x, y) dx dy.$$

证明:  $F(\xi, \eta)$  在  $\xi^2 + \eta^2 \leq (R - h)^2$  上连续.

18. 证明下列三重积分化为累次积分的顺序 (只写出  $dx, dz$  互换的顺序):

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} dz;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f dz.$$

19. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz, \Omega \text{ 是由曲面 } z = xy, y = x, x = 1, z = 0 \text{ 所围成};$$

$$(2) \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}, \Omega \text{ 是由曲面 } x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \text{ 所围成};$$

$$(3) \iiint_{\Omega} \cos az dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2;$$

$$(4) \iiint_{\Omega} (1 + x^4) dx dy dz, \Omega \text{ 是由曲面 } x^2 = y^2 + z^2, x = 2, x = 1 \text{ 所围成}.$$

20. 计算三重积分

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 y \sqrt{1 + z^4} dz.$$

## 7.2 重积分的变换

### 练习题

1. 计算下列积分:

$$(1) \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \Omega \text{ 是由曲线 } (x^2 + y^2)^2 = 2xy \text{ 围成};$$

$$(2) \iint_{\Omega} x dx dy, \Omega \text{ 是由阿基米德螺线 } r = \theta \text{ 和半射线 } \theta = \pi \text{ 围成};$$



(3)  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ ,  $\Omega$  是由对数螺线  $r = e^{\theta}$  和半射线  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$  围成.

2. 求下列曲面围成的体积:

(1)  $z = xy, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ ;

(2)  $z = x^2 + y^2, x + y + z = 1$ ;

(3)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq a|x| (a > 0)$ .

3. 求下列积分:

(1)  $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ ,  $\Omega$  是由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  围成;

(2)  $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $\Omega$  是由  $x^4 + y^4 = 1$  围成;

(3)  $\iint_{\Omega} (x + y) dx dy$ ,  $\Omega$  是由  $y = 4x^2, y = 9x^2, x = 4y^2, x = 9y^2$  围成;

(4)  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ ,  $\Omega$  是由  $xy = 2, xy = 4, y = x, y = 2x$  围成.

4.  $D$  是以  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  为顶点, 面积为  $A (> 0)$  的三角形, 求

$$\iint_{\Omega} x^2 dx dy$$

5. (1) 计算积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2}} dx dy \quad (h > R)$$

(2) 写出圆的单单位势

$$u(a, b) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} dx dy \quad (a^2 + b^2 > R^2)$$

6. 设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上连续可微, 求

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{xf'_y - yf'_x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

7. 给定积分  $I = \iint_D [(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2] dx dy$ , 作正则变换  $x = u(x, y), y = y(u, v)$ , 区域  $D$  变为  $\Omega$ , 如果变换满足:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明:

$$I = \iint_{\Omega} [(\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2] du dv.$$

8. 求下列积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 dx dy dz$ ,  $\Omega$  由曲面  $z = x^2 + y^2, z = 1, z = 2$  围成;
- (2)  $\iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2})^3 dx dy dz$ ,  $\Omega$  由曲面  $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$  围成;
- (3)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $\Omega$  由曲面  $z = 16(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2), z = 16$  围成.

9. 求下列积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} x^3 dx dy dz$ ,  $\Omega$  由  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  所确定;
- (2)  $\iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5 dx dy dz$ ,  $\Omega$  由不等式  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  所确定;
- (3)  $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$ ,  $\Omega$  是由  $x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$  所确定.

10. 求下列积分:

- (1)  $\Omega$  由  $z = \frac{x^2 + y^2}{a}, z = \frac{x^2 + y^2}{b}, xy = c, xy = d, y = \alpha x, y = \beta x$  围成 (其中  $0 < a < b, 0 < c < d, 0 < \alpha < \beta$ ), 求

$$\iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz;$$

- (2)  $\Omega$  由  $x = az^2, x = bz^2 (z > 0, 0 < a < b), x = \alpha y, x = \beta y (0 < \alpha < \beta)$  以及  $x = h (> 0)$  围成, 求

$$\iiint_{\Omega} y^4 dx dy dz.$$

- (3)  $\Omega$  由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  围成, 求

$$\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz.$$

11. 设一元函数  $f(t) \in C[0, +\infty)$ . 令

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz,$$

其中  $\Omega_t = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq t^2\}$ . 证明:

- (1)  $F(t) \in C^1[0, +\infty)$ ; (2) 求出  $F'(t)$  的表达式.

12. 设  $\Omega$  是由平面  $x + y + z = 1, y = 0, z = 0, x = 0$  围成的区域. 证明

$$\iiint_{\Omega} x^p y^q z^s (1 - x - y - z)^t dx dy dz = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(p+q+s+t+4)},$$

其中  $p \geq 0, q \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$ .

13. 设  $\Omega$  是以  $(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3, 4)$  为顶点, 体积为  $V(> 0)$  的四面体, 求

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz.$$

14. 用广义球坐标求  $n$  维球的体积, 即求  $x_1^2, x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$  的体积. 所谓广义球坐标即为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, & r \geq 0, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, & 0 \leq \theta_i \leq \pi, \\ \vdots & i = 1, \cdots, n-2, \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, & 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi, \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{cases}$$

15. 求  $n$  面体:  $x_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n), x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a (a > 0)$  的容积.

16. 证明

$$\int \cdots \int_{\substack{0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq a \\ x_i \geq 0 (i=1, \cdots, n)}} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^a f(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx.$$

## 7.3 曲线积分与格林公式

### 练习题

1. 求下列第一型曲线积分:

(1)  $\int_L y^2 ds$ ,  $L$  为摆线的一拱:  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  其中,  $(0 \leq t \leq 2\pi)$ ;

(2)  $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$ ,  $L$  为内摆线:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

(3)  $\int_L xyz ds$ ,  $L$  为螺线:  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt (0 \leq t \leq 2\pi) (0 < a < b)$ .

2. 计算第一型曲线积分:

(1)  $\int_L (xy + yz + zx) ds$ ,  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  之交线;

(2)  $\int_L xyz ds$ ,  $L$  同上.

3. (1) 求第一型曲线积分:

$$I = \int_{x^2+y^2=R^2} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-b)^2}} ds \quad (h \neq R);$$

(2) 写出圆周的单层位势:

$$U(a, b) = \int_{x^2+y^2=R^2} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} ds,$$

其中  $a^2 + b^2 \neq R^2$ .

4. 设  $f(x, y)$  在  $L$  上连续,  $L$  是一封闭的逐段光滑. 证明:

$$u(x, y) = \oint_L f(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} ds$$

当  $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$  时趋于零的充要条件是  $\oint_L f(\xi, \eta) ds = 0$ .

5. 设  $u(x, y)$  在  $R^2$  上连续, 对任意  $r > 0$ . 证明: 等式

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 \leq r^2} u(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

成立的充要条件是等式

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi r} \int_{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 = r^2} u(\xi, \eta) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) d\theta \quad (\forall r > 0)$$

成立.

6. 求下列第二型曲线积分:

(1)  $\int_{\widehat{AB}} (x - 2xy^2)dx + (y - 2x^2y)dy$ , 其中  $A(0, 0), B(2, 4), \widehat{AB}: y = x^2$ ;

(2)  $\int_{\widehat{AB}} (x + y)dx + xydy$ , 其中  $A(0, 0), B(2, 0), \widehat{AB}: y = 1 - |1 - x|$ ;

(3)  $\int_{\widehat{AB}} (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz$ , 其中  $A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), \widehat{AB}: x = t, y = t^2, z = t^3$ ;

(4)  $\int_{\widehat{AB}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 其中  $A(\alpha, 0, 0), B(\alpha, 0, 2\pi\gamma), \widehat{AB}: x = a\cos t, y = \beta\sin t, z = \gamma t$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  为正数).

7. 求第二型曲线积分

$$\int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz.$$

(1)  $L$  为球面三角形  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的边界线, 从球的外侧看去,  $L$  的方向为逆时针方向;

(2)  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  和柱面  $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$  的交线位于  $xy$  平面上方部分, 从  $x$  轴上  $(b, 0, 0) (b > a)$  点看去,  $L$  的方向是顺时针方向.

8. 求第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

(1)  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 逆时针方向;

(2)  $L$  为正方形  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  的边界, 逆时针方向.

9. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy,$$

$L$  为圆周  $x^2 + y^2 = ax$ , 逆时针方向.

10. 设  $P, Q, R$  为  $L$  上的连续函数,  $L$  为光滑弧段, 弧长为  $l$ . 证明:

$$\left| \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \right| \leq M \cdot l,$$

其中  $M = \max_{(x,y,z) \in L} \{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\}$ .

11. 计算下列积分:

(1)  $\oint \partial D xy^2 dy - yx^2 dx, D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1;$

(2)  $\oint_{\partial D} (x^2 + y^3)dx - (x^3 - y^2)dy, D: x^2 + y^2 \leq 1;$

(3)  $\oint_{\partial D} e^y \sin x dx + e^{-x} \sin y dy, D: 0 \leq x \leq b, c \leq y \leq d.$

12. 计算下列积分:

(1)  $\int_{\widehat{AO}} (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy, A(a, 0), O(0, 0), \widehat{AO}: x^2 + y^2 = ax (y \geq 0);$

(2)  $\int_{\widehat{OA}} e^x [1 - \cos y dx - (y - \sin y) dy], A(\pi, 0), O(0, 0), \widehat{OA}: y = \sin x;$

(3)  $\oint_{\widehat{OA}} e^{-(x^2 + y^2)} [x(1 - x^2 - y^2)dx + y(1 + x^2 + y^2)dy], A(1, 1), O(0, 0), \widehat{OA}: y = x^2.$

13. 设  $C$  为光滑的简单闭曲线, 求下列积分:

(1)  $\oint_C \cos \langle l, n \rangle ds, l$  为给定的方向,  $n$  为  $C$  的外法线方向;

(2)  $\oint_C \cos \langle r, n \rangle ds, r = xi + yj, n$  为  $C$  的外法线方向.

14. (1) 设  $f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 (a^2 + b^2 \neq R^2)}}$ , 试证函数在圆  $x^2 + y^2 = R^2$  上每点沿外法线方向  $n$  的方向导数为  $\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{(x-a)\cos\langle \tau, j \rangle - (y-b)\cos\langle \tau, i \rangle}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ , 其中  $\tau$  为圆的切向量,  $i, j$  分别为  $x$  轴,  $y$  轴上的单位向量;

(2) 求圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  的双层位势

$$u(a, b) = \int_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2} (a^2 + b^2 \neq R^2)$$

15. (1) 求积分  $I = \int_{\partial D} e^{-(R^2 - y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy), D: |x| \leq R, 0 \leq y \leq b;$

(2) 证明:  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(R^2 - y^2)} \sin 2Ry dy = 0;$

(3) 证明:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$

16. 设  $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$ , 求证:

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{AC - B^2}, L: x^2 + y^2 = R^2.$$



17. 设  $f(x, y)$  在上半平面  $y > 0$  上连续可微. 证明: 对上平面上的任一光滑闭曲线  $C$ , 等式

$$\oint_C f(x, y)(x dy - y dx) = 0$$

成立的充要条件是:  $f(x, y)$  为 2 次齐次函数.

18. 计算线积分

$$I = \oint_L \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin y) dy + (x \sin y - y \cos y) dx],$$

其中  $L$  是包含原点在其内部的光滑简单闭曲线.

19. 设  $C$  是逐段光滑简单闭曲线, 它围成的区域记作  $D$ , 函数  $u(x, y), v(x, y) \in C^2(\bar{D})$ . 证明

$$\oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx dy + \iint_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy.$$

20. 设  $C$  和  $D$  的条件同上题,  $u(x, y)$  是  $D$  上调和函数. 证明: 若  $u(x, y)|_C = 0$ , 则  $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D$ .

## 7.4 曲面积分

### 练习题

- 球环面  $x = (b + a \cos \phi) \cos \theta, y = (b + a \cos \phi) \sin \theta, z = a \sin \phi (0 < a < b)$  被两条经线  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  和两条纬线  $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$  所围成的那部分面积, 并求出整个环面面积.
- 求螺旋面  $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = h \phi, (0 < r < a, 0 < \phi < 2\pi)$  的面积.
- 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  包含在柱体  $y^2 + z^2 \leq 1 (a > 1)$  中那部分的面积.
- 求曲面  $z = \sqrt{2xy}$  被平面  $x + y = 1, x = 1$  及  $y = 1$  所截下的那部分面积.
- 求曲面  $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, \sqrt{2}x + z = 2a (a > 0)$  围成的立体的表面积.
- 平面上一椭圆绕其长轴旋转得一旋转椭球  $\Omega$ , 求  $\Omega$  之表面积.
- 求下列第一型曲面积分:
  - $\iint_S (x^2 + y^2) dS, S$  为立体  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x \leq 2$  的边界面;
  - $\iint_S |xyz| dS, S$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $z = 1$  割下的部分;
  - $\iint_S z^2 dS, S$  为螺旋面:  $x = u \cos v, y = \sin v, z = v (0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi)$ ;
  - $\iint_S (x^2 + y^2) dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
- 设  $f(x)$  为一元连续函数. 证明: 普阿松公式

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \iint_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \xi) d\xi,$$

其中  $S$  为球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

9. 计算  $F(t) = \iint_S f(x, y, z) dS$ , 其中  $S$  是一平面  $x + y + z = t$ , 而

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 1, \end{cases}$$

并做出  $F(t)$  的图形.

10. 求下列第二型曲面积分:

(1)  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的外侧.

(2)  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S$  是立体  $\Omega$  的边界线的外侧,  $\Omega$  的表达式为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\};$$

(3)  $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ ,  $S$  为球面

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

的上半部分的上侧;

(4)  $\iint_S \left( \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} \right)$ ,  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

## 7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关

### 练习题

1. 利用奥氏公式求下列积分:

(1)  $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ ,  $S: (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ , 外侧;

(2)  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S: x^2 + y^2 \leq z \leq h$  的边界线, 外侧;

(3)  $\iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dzdx + (z - x + y) dxdy$ ,  $S$  为曲面.

$$|x - y - z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$$

的外侧.

2. 计算下列曲面积分

(1)  $\iint_S (x^2 - y^2) dydz + (y^2 - z^2) dzdx + (z^2 - x^2) dxdy$ ,  $S$  是  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0)$  的上侧;

(2)  $(x + \cos y) dydz + (y + \cos z) dzdx + (z + \cos x) dxdy$ , 其中  $S$  为  $x + y + z = \pi$  在第一卦限部分, 上侧.

3. 求

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq R^2)$$

沿球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上各点外法线方向的方向导数;

4. 求球面的双层位势

$$u(a, b, c) = \iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{(x-a)dx dz + (y-b)dz dx + (z-c)dx dy}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq R^2)$$

5. 设  $V$  为可测闭区域,  $\partial V = S$  为光滑闭曲面, 函数  $u(x, y, z), v(x, y, z) \in C^2(V)$ . 证明:

$$\iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz + \iiint_V \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz$$

其中  $n$  为  $S$  的外法线方向.

6. 设  $V, S$  条件同上题,  $u(x, y, z)$  为调和函数:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , 且  $u(x, y, z)|_S = 0$  (即函数  $u$  在边界  $S$  上取值为零). 证明:

$$u(x, y, z) \equiv 0 \quad (x, y, z) \in V.$$

7. 设  $V, S$  条件同上,  $u$  为调和函数,  $v(x, y, z)|_S = 0$ . 证明:

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz = 0$$

8. 设  $V, S$  条件同上,  $u, w \in C^2(V)$ ,  $u$  是调和函数, 且

$$[w(x, y, z) - u(x, y, z)]|_S = 0.$$

证明:

$$\iiint_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \leq \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

9. 求下列曲线积分:

- (1)  $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 式中  $L$  为椭圆, 即  $x^2 + y^2 = R^2$  与  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  ( $a > 0, h > 0$ ) 的交线, 若从  $Ox$  轴正向看去, 此椭圆是以反时针方向进行的;
- (2)  $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 式中  $L$  为圆周, 即  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与  $y = x \tan \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ) 的交线, 若从  $Ox$  轴的正向看去, 圆周是依反时针方向进行的;
- (3)  $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , 式中  $L$  为维维安尼曲线:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$  ( $z \geq 0, a > 0$ ), 若从  $Ox$  轴正向看去, 曲线是依反时针方向进行的;

- (4)  $\oint_L (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ , 式中  $L$  是曲线:  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx$  ( $0 < r < R, z > 0$ ), 此曲线是如下进行的: 由它所包围的在球  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  外表面上的最小区域保持在左方.
10. 下列被积表达式是否是恰当, 并求线积分:
- (1)  $w = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$ , 求  $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} w$ ;
- (2)  $w = (yze^{xyz} + 2x)dx + (zxe^{xyz} + 3y^2)dy + (xye^{xyz} + 4z^3)dz$ , 求  $\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} w$ ;
- (3)  $w = [2x\sin(x+y+z) + x^2\cos(x+y+z)]dx + x^2\cos(x+y+z)(dy+dz)$ , 求  $\int_{(1,2,3)}^{(x,y,z)} w$ .
11. 设  $\Omega$  为包含原点的单连通区域, 线积分  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  在  $R$  上与路径无关, 若  $P, Q, R$  皆为  $n$  次齐次函数, 证明: 线积分

$$\int_{AB} xP + yQ + zR$$

也在  $\Omega$  上与路径无关.

12. 设  $\Omega$  是包含原点的凸区域,  $P, Q, R \in C^1(\Omega)$ . 证明下面四个命题等价:
- (1)  $w = Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$  的曲面积分与曲面无关, 即  $S_1, S_2$  为定向光滑曲面,  $\partial S_1 = \partial S_2$ , 由  $S_1, S_2$  的定向决定的边界正定向相同, 则有

$$\iint_{S_1} w = \iint_{S_2} w;$$

- (2) 设  $S$  为  $\Omega$  内一光滑闭曲面, 则有  $\iint_S w = 0$ ;
- (3) 被积表达式  $w$  是封闭的, 即外微分  $dw = 0$ , 或

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$$

- (4)  $w$  是恰当的, 即存在

$$\begin{aligned} \eta = & \int_0^1 t[zQ(tx, ty, tz) - yR(tx, ty, tz)]dt dx \\ & + \int_0^1 t[xR(tx, ty, tz) - zP(tx, ty, tz)]dt dy \\ & + \int_0^1 t[yP(tx, ty, tz) - xQ(tx, ty, tz)]dt dz, \end{aligned}$$

使  $dy = w$ .

## 7.6 场论

## 第8章 典型综合题分析





## 第 9 章 附录及一些说明事项

---

### 附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容[Github](#)，另外还有参考文档，其下载地址为[Github](#)。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请[Fork Github](#)。