数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 10, 2020

版本：1.00

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”*—SCIbird*

目　录

第 1 章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：Github(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) [1]或者邮箱[2]联系我。

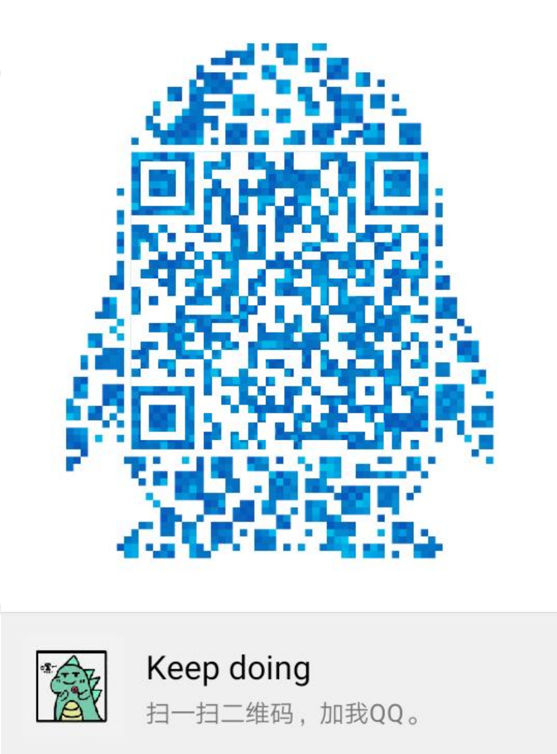

图 1.1: 二维码

点击Github后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

[1] 1411279054
[2] 1411279054@qq.com

第 2 章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$, 求证: $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$.

   解 $2|a| = |a+b+a-b| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

   $2|b| = |a+b-(a-b)| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$.

   解 $2 = |a+b-(a-b)+2(1-b)| \le |a+b|+|a-b|+2|1-b| \le 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

   $\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有

   $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$;

   并解释其几何意义.

   解 易知，$\max\{a,b\} + \min\{a,b\} = a+b$ ① $\max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b|$ ②

   由 ① 、 ② 得 $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

   几何意义:$\max\{a,b\}$ 指的是 a, b 中较大的那个, $\min\{a,b\}$ 指的是 a, b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界，求证:

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

   解 $f(x) - f(y) \le \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) \therefore |f(x)-f(y)| \le |\sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)| = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)$

5. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$① \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

$$② \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

   解 ① 易知, $\sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le f(x) + g(x)$ $(\forall x \in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$, 又 $\because$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le f(x)+g(x) \le f(x) + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 即 $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} - \sup_{x\in X} g(x) \le f(x), (\forall x \in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 所以, $\inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$

   ② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x) = |1+x| - |1-x|$.
   (1) 求证:$f(x)$ 是奇函数;
   (2) 求证：$|f(x)| \le 2$.
   (3) 求 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n次})(x)$.

解

(1) $f(x) = f(-x)$,∴ $f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x) = |1+x| - |1-x| \le |1+x+1-x| = 2$

(3) 易知，$f(x)$ 是一个分段函数，$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \le x \le 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$，下面当 $-1 \le x \le 1$ 时，$f(x) = 2x$ ∴ $(f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2} \\ 4x & \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ ∴ 可得，$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^(n-1)} \\ 2^(n-1)x & \frac{-1}{2^(n-1)} \le x \le \frac{1}{2^(n-1)} \\ 2 & x \ge \frac{1}{2^(n-1)} \end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $a > 0, b > 0$. 求证:
   (1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b) \le f(a) + f(b)$;
   (2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b) \ge f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 ∴ $\frac{f(a+b)}{a+b} \le \frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(a+b)}{a+b} \le \frac{f(b)}{b}$,∴ $af(a+b) \le (a+b)f(a)$, $bf(a+b) \le (a+b)f(b)$, 可得 $f(a+b) \le f(a) + f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a > 0, b > 0$ 时，有
   (1) 当 $p > 1$ 时, $(a+b)^p \ge a^p + b^p$;
   (2) 当 $0 < p < 1$ 时，$(a+b)^p \le a^p + b^p$.

解

(1) 令 $f(x) = x^p$, $\frac{f(x)}{x} = x^{p-1}$, ∵ $p > 1, p-1 > 0$ ∴ x^{p-1} 单调递增, 由第二题可得 $f(a+b) \ge f(a) + f(b)$ ∴ $(a+b)^p \ge a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$.
   (1) 问这种函数有几个?
   (2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ ∵ $f(f(x)) \equiv x$ ∴ $f(y) \equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y = x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若 $y = f(x)(x \in (-\infty, +\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x = b(b > 0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)=-f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, $f(b+x)=f(b-x)$, 即 $f(b+b+x)=f(-x)=-f(x)$, $f(x+2b)=-f(x)=-f(x+2b-2b)=f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b)=f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f:X\to Y$ 时满射, $g:Y\to Z$. 求证: $g\circ f:X\circ Z$. 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

解 $g\circ f:X\circ Z$ 有反函数, 说明 $g\circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g\circ f)$ 的反函数为 H, 假设 $H(a)=b$, 有 $(g\circ f)(b)=a$, 左乘 g^{-1}, 即 $f(b)=g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1}, 即 $b=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$ $\therefore H=f^{-1}\circ g^{-1}, (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
   (1) 当 $a\neq 0$ 时, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$
   (2) 举例说明当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\neq 1$ 可能成立;
   (3) 举例说明当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n\neq 1$ 可能成立.

   解

   (1) 由已知条件知: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据 $\varepsilon-N$ 定义知, $\forall\,\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$ $\because$ $n>N$, 那么 $n+1>N$, $\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N$, 有 $n+1>N$ $\therefore|a_{n+1}-a|<\varepsilon$, $\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$.
   (2) 例: $a=\frac{1}{2^n}$.
   (3) 例: $x_n=\frac{n+1}{n}$.

2. 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

   解 令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 其中 $a<1$, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a$, 又由已知表达式得 $a=1-\sqrt{1-a}$, 解得: $a=0$. 又 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}$, 根据洛必达得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$.

3. 设 $c>1$, 求序列 $\sqrt{c},\sqrt{c\sqrt{c}},\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}},\cdots$ 的极限.

   解 根据表达式可得, $x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}$, $x_{n+1}-x_n=\sqrt{c\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt{x}}(\sqrt{c}-x_n^{\frac{3}{4}})$. 假设: $x_n<c^{\frac{3}{2}}$. 下面用归纳法来证明:
   当 $n=1$ 时, $x_1=\sqrt{c}<c^{\frac{3}{2}}$
   当 $n=k$ 时, 假设 $x_n<c^{\frac{3}{2}}$
   那么 $n=k+1$ 时,$x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}<\sqrt{c\cdot c^{\frac{3}{2}}}=c^{\frac{5}{4}}<c^{\frac{3}{2}}$, $\therefore x_n<c^{\frac{3}{2}}$, 且 $x_{n+1}-x_n>0$, 由单调有界定理可知数列 x_n 存在极限。令 $\lim\limits_{x_n}=a$ $\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}x_{n+1}=a, a=\sqrt{ca}, a=c$
   $\therefore\lim\limits_{x_n}=c$

4. 设 $A>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\,(n=1,2,\cdots)$
   (1) 求证: x_n 单调下降且有界;
   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   解

   (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\geq\sqrt{A}$, 说明 x_n 有下界.
   $\because x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}(\frac{A}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2}\frac{A-x_n^2}{x_n}$, 又 $\because x_n\geq\sqrt{A}\therefore x_{n+1}-x_n<0$,

所以, x_n 单调递减且有下界.

(2) 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

5. 设 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解 令 $x_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}(x_n > 0)$, 根据表达式有 $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1+x_n) > 1$,即$x_n > x_{n+1}$, 根据单调有界定理可得 x_n 存在极限, 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a>0) \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$, 解得: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 求证:

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n} - 2\sqrt{n}$ 的极限存在.

解

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.
$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.\therefore x_{n+1} < x_n$, 数列 x_n 是递减数列.
下证: $x_n > -2$(数学归纳法)
$n = 1$ 时, $x_1 = -1 > -2$ 成立
假设 $n = k$ 时, $x_n > -2$
那么当 $n = k+1$ 时，$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} >$

7. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 a_n, b_n.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2^x}(1 + \frac{1}{3^2})\cdots(1 + \frac{1}{n^2})).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设 $c > 0$, 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c+\sqrt{c}}, \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.

12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \leq a_n \leq$

$b_n(n=1,2,\cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.

13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1}-x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|(n=1,2,\cdots)$, 其中 $0<q<1$. 求证: 序列 x_n 的极限存在.
14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x)-f(y)| \le q|x-y| \quad (\forall x,y \in (-\infty,+\infty))$$

其中 $0<q<1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty,+\infty)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0=a, x_1=b(b>a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n}=\frac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3},\ x_{2n+1}=\frac{2x_{2n}+x_{2n-1}}{3} \quad (n=1,2,\cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x)\le f(x)\le g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = A = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$(分别讨论 $A=+\infty,-\infty,$).

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=A(>0)$, 求证:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=+\infty$$

3. 设 $0<x_n<+\infty$, 且满足 $x_n+\frac{4}{x^2}<3$, 求证: 极限 $\lim\limits_{x_n},$.
4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

求证:$f(x)\equiv 0$.

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上定义,$g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=+\infty.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$

6. 设 $x_n=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot 2}+\frac{1}{n\cdot 1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$
8. 设 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.
9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续.

10. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 求证:
    (1) $|f(x)| \in C[a,b]$;
    (2) $max\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$;
    (3) $min\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$.
11. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ $(\forall x \in [a,b])$. 对 $\forall x_1 \in [a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$ 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满足 $c = f(c)$.
12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}) = 2$
13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

练习题

1. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上单调. 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.
2. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且严格单调, 又

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程 $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3$ 有且仅有三个根.
3. 设 $f_n(x) = x^n + x$. 求证:
    (1) 对任意自然数 $n > 1$, 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根;
    (2) 若 $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ 是 $f_n(x) = 1$的根, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在, 并求此值.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 求证: $\exists c \in [a,b]$, 使得对 $\forall \delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ 上无界.
5. 设 x_n 为有界序列. 求证:x_n 以 a 为极限的充分必要条件是: x_n 的任一收敛子序列都有相同的极限值 a.
6. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$. 求证:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| \le \max_{a\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|g(x)|.$$

7. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x^*, 又设使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x^*)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.
8. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 又设对 $\forall l \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = l$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有有限个解或无解. 求证:
    (1) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在;
    (2) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上无界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

9. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 存在 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 求证:$f(f(x))$ 至少在两个点处取到最小值.
10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义, $x_0 \in [a,b]$. 如果对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 那么称 $f(x)$ 在点 x_0 处**上半函数**. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都上半连续, 则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个半连续函数. 求证:$[a,b]$ 上的上半连续函数一定有上界.
11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:
(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (2) $f(x) = sinx$
12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:
(1) $f(x) = xsinx$; (2) $f(x) = sinx^2$.
13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 对 $\forall h \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(h+n) = A$(有限数). 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = A$.
14. 设存在常数 $L > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad \forall x,y \in [a,b].$$

求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.
15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 求证: $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$ 都在 (a,b) 内一致连续.
16. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 值域含于区间 (a,d), 又 $g(x)$ 在 (c,d) 内一致连续. 求证: $g(f(x))$ 在 (a,b) 内一致连续.
17. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且是周期为 T 的周期函数. 求证: $f(x)$ 在实轴上一致连续.

第 3 章 一元函数微分学

3.1 导数和微分

练习题

1. 用定义求 $f'(0)$, 这里 $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$
2. 设 $f'(x_0)$ 存在. 求证: 对数导数也存在并等于 $f'(x_0)$, 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

.

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,α_n,β_n 为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n-f(x_0+\beta_n))}{\alpha_n-\beta_n}=f'(x_0)$$

4. 设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的多项式, M 是它的最大实数. 求证:$P'(M)\geq 0$.
5. 给定曲线 $y=x^2+5x+4$.
   (1) 求曲线在点 $(0,4)$ 处的切线.
   (2) 确定 b 使得直线 $y=3x+b$ 为曲线的切线;
   (3) 求过点 $(0,3)$ 的曲线的切线.
6. 确定常数 a,b 使得函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1\\ x^2, & x\leq 1\end{cases}$ 有连续导数.
7. 设曲线由隐式方程 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}(a>0)$ 给出.
   (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
   (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.
8. 已知曳物线的参数方程为

$$x=a[\ln(\tan\frac{t}{2})+\cos t],\quad y=a\sin t\quad (a>0, 0<t<\pi).$$

   求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与 x 轴交点之间的切线段为一定长.
9. 试确定 λ, 使得曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 与 $xy=\lambda$ 相切, 并求出切线方程.
10. 试确定 m, 使直线 $y=mx$ 为曲线 $y=lnx$ 的切线.
11. 设 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. (1)求证 : $(1-x^2)y'-xy=1$; (2)求$y^{(n)}(0)$.
12. 求 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数.
13. 设 $y=x^(n-1)\ln x$. 求证:$y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.
14. 求证: 双曲线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的向径与切线的夹角等于极角的两倍加 $\frac{\pi}{2}$
15. 设曲线既可用参数式 $x=x(t),y=y(t)$ 表示, 又可用极坐标 $r=r(\theta)$ 表示. 求

证:$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$.

3.2 微分中值定理

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除仅有的一个点都可导. 求证: $\exists c_1, c_2 \in (a,b)$ 及 $\theta \in (0,1)$, 使得
$$f(b) - f(a) = (b-a)[\theta f'(c_1) + (1-\theta) f'(c_2)]$$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且
$$f(a)\cdot f(b) > 0,\ f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0.$$
求证: 对 $\forall k \in R, \exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$.
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (0,3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$, 使得
$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < f'(\eta).$$
5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f''(x_0) \neq 0$. 求证:
   (1) 如果 $f'(x_0) = 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 0$;
   (2) 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_0)$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f'(\xi) > 0$.
7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(0) = 0$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f(\xi) > 0$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a,b)$, 使得 $f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$
   注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件 $f'(a) = f'(b) = 0$ 中的“=0”去掉了.
10. 设 $f(x)$ 在 (0,1] 上可导, 且存在有限极限 $\lim\limits_{h\to 0+} \sqrt{x} f'(x)$. 求证:$f(x)$ 在 (0,1] 上一致连续.

3.3 函数的升降、极值、最值问题

练习题

1. 求证:
   (1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 单调增加;
   (2) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$. 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调下降.
3. 求证: 对任何 $n(n>0)$ 次多项式 $P(x), \exists x_0>0$, 使得 $P(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$ 和在 $(x_0,+\infty)$ 上都是严格单调的.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证: 极大值必大于极小值.
5. 设 $a,b>0, k\in R$. 求证: 函数 $f(x)=a^2e^{kx}+b^2e^{-kx}$ 存在与 k 无关的极小值.
6. (1) 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f(x)\neq g(x), g(x)\neq 0$. 求证: $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值的充分必要条件是 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值.
   (2) 设 $b>a>0$, 求证: $f(x)=\frac{(x-a)(x+b)}{(x-b)(x+a)}$ 无极值.
7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 2.4 所示, 则 $f(x)$ 有 ( ).

3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

3.5 洛必达法则与泰勒公式

3.6 一元函数微分学的总合应用

第 4 章　一元函数积分学

第 5 章 级数

第 6 章 多元函数积分学

第 7 章 多元函数积分学

第 8 章 典型综合题分析

第 9 章 附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容Github，另外还有参考文档, 其下载地址为Github。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请Fork Github。