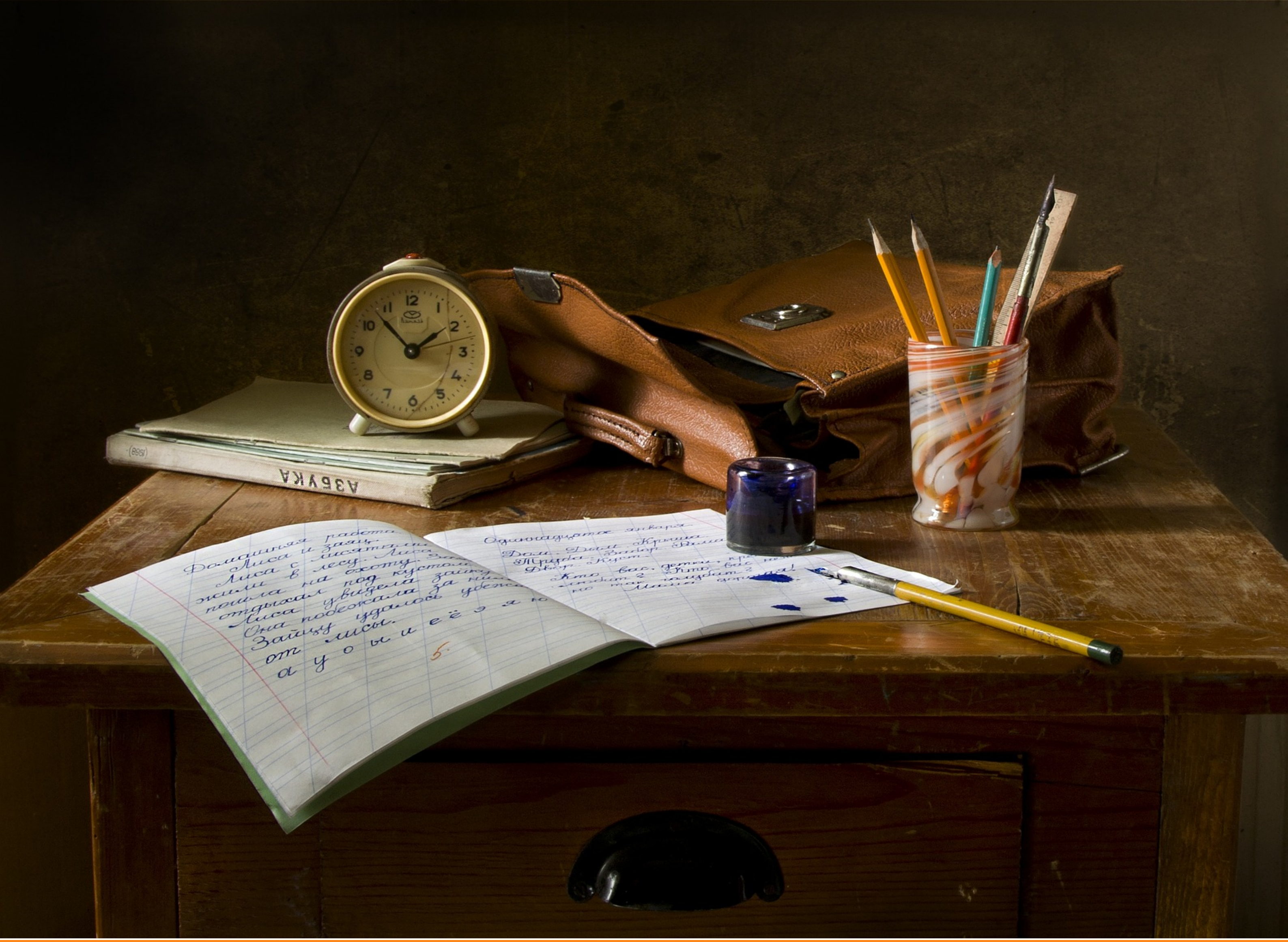

数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 7, 2020

版本：1.00

确实，时　间和空间
是有限的。确实，我们总会有
分开的时候。但是正因为这样，
我们才会努力学习，我们才会
努力前进。我们的信仰是
享受数学。因为“数
学穿越时空”。
♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”—*SCIbird*

目　　录

第 1 章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：Github(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) [1]或者邮箱[2]联系我。

图 1.1: 二维码

点击Github后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

[1]1411279054
[2]1411279054@qq.com

第 2 章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$, 求证: $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$.

解 $2|a| = |a+b+a-b| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

$2|b| = |a+b-(a-b)| \le |a+b| + |a-b| \le 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$.

解 $2 = |a+b-(a-b)+2(1-b)| \le |a+b|+|a-b|+2|1-b| \le 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \ge \frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, 有

$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$;

并解释其几何意义.

解 易知，$\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a+b$ ① $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$ ②

由 ①、② 得 $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

几何意义:$\max\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较大的那个, $\min\{a, b\}$ 指的是 a, b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界，求证:

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

解 $f(x) - f(y) \le \sup\limits_{x\in X} f(x) - \inf\limits_{x\in X} f(x) \therefore |f(x)-f(y)| \le |\sup\limits_{x\in X} f(x) - \inf\limits_{x\in X} f(x)| = \sup\limits_{x\in X} f(x) - \inf\limits_{x\in X} f(x)$

5. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$① \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

$$② \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \inf_{x\in X}\{g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \sup_{x\in X}\{f(x)\} + \sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

解 ① 易知, $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\} + \inf\limits_{x\in X}\{g(x)\} \le f(x)+g(x)$ $(\forall x \in X)$, $\therefore \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\} + \inf\limits_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$, 又 $\because \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le f(x)+g(x) \le f(x) + \sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$, 即 $\inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} - sup\limits_{x\in X} g(x) \le f(x), (\forall x \in X)$, $\therefore \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\} + \sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$, 所以, $\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\} + \inf\limits_{x\in X}\{g(x)\} \le \inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \le \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\} + \sup\limits_{x\in X}\{g(x)\}$

② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$.
   (1) 求证:$f(x)$ 是奇函数;
   (2) 求证：$|f(x)|\leq 2$.
   (3) 求 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)$.

解

(1) $f(x)=f(-x),\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)=|1+x|-|1-x|\leq|1+x+1-x|=2$

(3) 易知，$f(x)$ 是一个分段函数，$f(x)=\begin{cases}-2 & x<-1\\ 2x & -1\leq x\leq 1\\ 2 & x\geq 1\end{cases}$，下面当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=2x\therefore(f\circ f)(x)=\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2}\\ 4x & \frac{-1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 2 & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore$ 可得，$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=$
$\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2^(n-1)}\\ 2^(n-1)x & \frac{-1}{2^(n-1)}\leq x\leq\frac{1}{2^(n-1)}\\ 2 & x\geq\frac{1}{2^(n-1)}\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $a>0,b>0$. 求证:
   (1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$;
   (2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b)\geq f(a)+f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 $\therefore\frac{f(a+b)}{a+b}\leq\frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(a+b)}{a+b}\leq\frac{f(b)}{b}$,$\therefore af(a+b)\leq(a+b)f(a)$, $bf(a+b)\leq(a+b)f(b)$, 可得 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a>0,b>0$ 时，有
   (1) 当 $p>1$ 时, $(a+b)^p\geq a^p+b^p$;
   (2) 当 $0<p<1$ 时，$(a+b)^p\leq a^p+b^p$.

解

(1) 令 $f(x)=x^p$, $\frac{f(x)}{x}=x^{p-1}$, $\because p>1,p-1>0$ $\therefore x^{p-1}$ 单调递增, 由第二题可得 $f(a+b)\geq f(a)+f(b)\therefore(a+b)^p\geq a^p+b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 且 $f(f(x))\equiv x$.
   (1) 问这种函数有几个?
   (2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ $\because f(f(x))\equiv x\therefore f(y)\equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y=x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x)\equiv x$

5. 求证: 若 $y=f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x = b(b > 0)$ 对称, $f(b+x) = f(b-x)$, 即 $f(b+b+x) = f(-x) = -f(x)$, $f(x+2b) = -f(x) = -f(x+2b-2b) = f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b) = f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f: X \to Y$ 时满射, $g: Y \to Z$. 求证：$g \circ f: X \circ Z$. 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

解 $g \circ f: X \circ Z$ 有反函数, 说明 $g \circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g \circ f)$ 的反函数为 H, 假设 $H(a) = b$, 有 $(g \circ f)(b) = a$, 左乘 g^{-1}, 即 $f(b) = g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1}, 即 $b = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \therefore H = f^{-1} \circ g^{-1}, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
   (1) 当 $a \neq 0$ 时, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$
   (2) 举例说明当 $a = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq 1$ 可能成立;
   (3) 举例说明当 $a = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^n \neq 1$ 可能成立.

   解
   (1) 由已知条件知: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 根据 $\varepsilon - N$ 定义知, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon \because\ n > N$, 那么 $n+1 > N$, $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 有 $n+1 > N$ $\therefore |a_{n+1} - a| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a\ \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.
   (2) 例: $a = \frac{1}{2^n}$.
   (3) 例: $x_n = \frac{n+1}{n}$.

2. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

   解 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 其中 $a < 1$, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$, 又由已知表达式得 $a = 1 - \sqrt{1-a}$, 解得: $a = 0$. 又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}$, 根据洛必达得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

3. 设 $c > 1$, 求序列 $\sqrt{c}, \sqrt{c\sqrt{c}}, \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}, \cdots$ 的极限.

   解 根据表达式可得, $x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}}$, $x_{n+1} - x_n = \sqrt{c\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{x}}(\sqrt{c} - x_n^{\frac{3}{4}})$. 假设: $x_n < c^{\frac{3}{2}}$. 下面用归纳法来证明:
   当 $n = 1$ 时, $x_1 = \sqrt{c} < c^{\frac{3}{2}}$
   当 $n = k$ 时, 假设 $x_n < c^{\frac{3}{2}}$
   那么 $n = k+1$ 时,$x_{n+1} = \sqrt{c\sqrt{x_n}} < \sqrt{c \cdot c^{\frac{3}{2}}} = c^{\frac{5}{4}} < c^{\frac{3}{2}}$, $\therefore x_n < c^{\frac{3}{2}}$, 且 $x_{n+1} - x_n > 0$, 由单调有界定理可知数列 x_n 存在极限。令 $\lim\limits_{x_n} = a \therefore \lim\limits_{x\to+\infty} x_{n+1} = a, a = \sqrt{ca}, a = c$
   $\therefore \lim\limits_{x_n} = c$

4. 设 $A > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})\,(n = 1, 2, \cdots)$
   (1) 求证: x_n 单调下降且有界;
   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   解
   (1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \geq \sqrt{A}$, 说明 x_n 有下界.
   $\because x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) - x_n = \frac{1}{2}(\frac{A}{x_n} - x_n) = \frac{1}{2}\frac{A - x_n^2}{x_n}$, 又 $\because x_n \geq \sqrt{A} \therefore x_{n+1} - x_n < 0$,

所以, x_n 单调递减且有下界.

(2) 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

5. 设 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解 令 $x_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}(x_n > 0)$, 根据表达式有 $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \ \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1+x_n) > 1$, 即 $x_n > x_{n+1}$, 根据单调有界定理可得 x_n 存在极限, 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a > 0) \ \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$, 解得: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 求证:

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n} - 2\sqrt{n}$ 的极限存在.

解

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2)

7. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 a_n, b_n.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2^x}(1 + \frac{1}{3^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2})).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

10. 设 $c > 0$, 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.

12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \le a_n \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.

13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|(n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $0 < q < 1$. 求证: 序列 x_n 的极限存在.

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x) - f(y)| \le q|x - y| \quad (\forall x, y \in (-\infty, +\infty))$$

其中 $0 < q < 1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty,+\infty)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0 = a, x_1 = b(b > a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3},\ x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x) \le f(x) \le g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = A = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$(分别讨论 $A = +\infty, -\infty,$).

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A(> 0)$, 求证:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$$

3. 设 $0 < x_n < +\infty$, 且满足 $x_n + \frac{4}{x^2} < 3$, 求证: 极限 $\lim\limits_{x_n},$.

4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

求证:$f(x) \equiv 0$.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上定义,$g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = +\infty.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

6. 设 $x_n = \frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2\cdot(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 2} + \frac{1}{n\cdot 1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

8. 设 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x = 0$ 处连续.

10. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 求证:
    (1) $|f(x)| \in C[a,b]$;
    (2) $max\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$;
    (3) $min\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$.

11. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ $(\forall x \in [a,b])$. 对 $\forall x_1 \in [a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$ 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满

足 $c = f(c)$.

12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}\right) = 2$

13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

第 3 章　一元函数微分学

第 4 章　一元函数积分学

第 5 章 级数

第 6 章 多元函数积分学

第 7 章 多元函数积分学

第 8 章 典型综合题分析

第 9 章 附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容Github，另外还有参考文档, 其下载地址为Github。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请Fork Github。