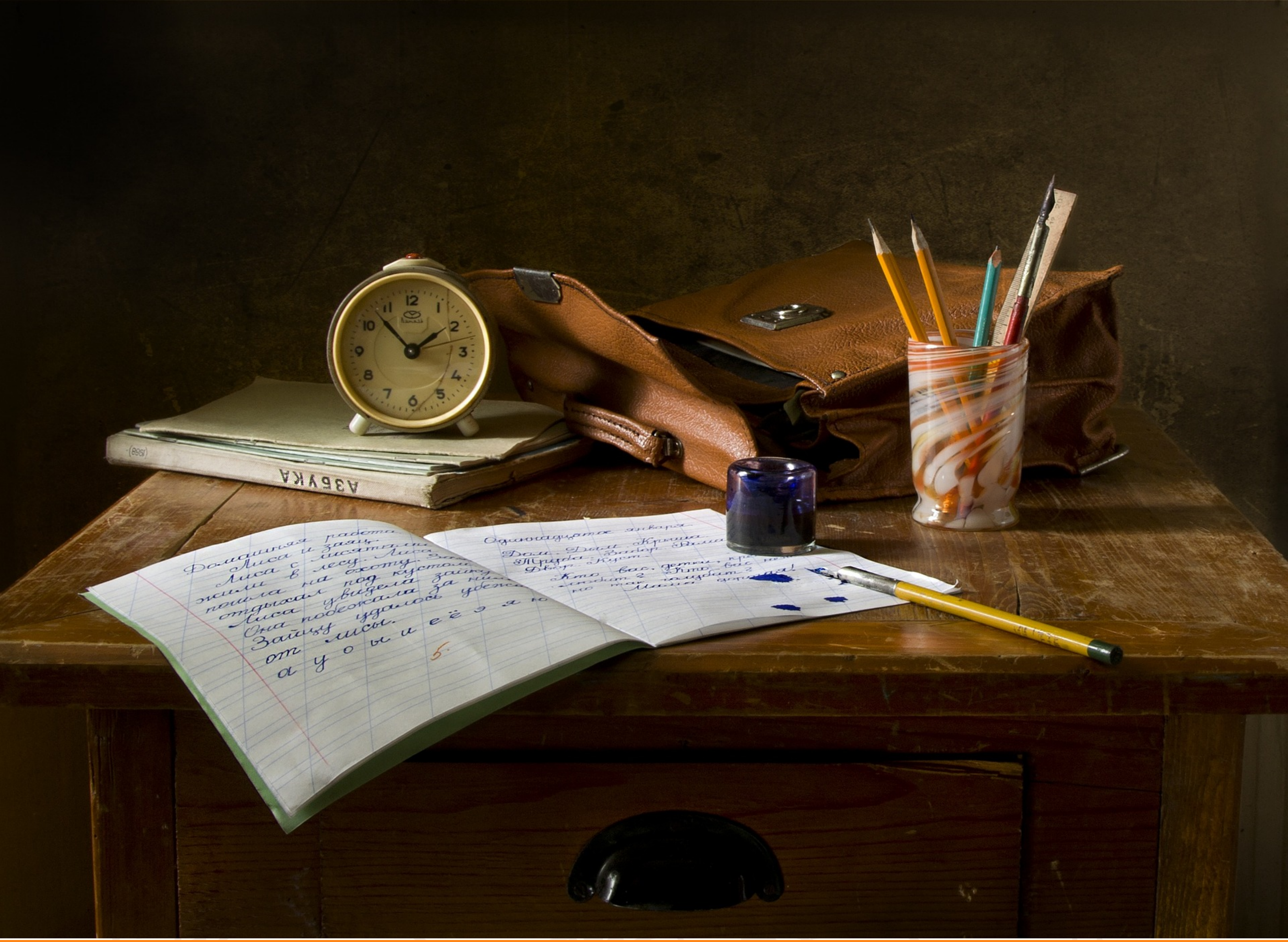

数学分析习题指南——课后习题

数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 23, 2020

版本：1.00

确实，时 间和空间
是有限的。确实，我们总会有
分开的时候。但是正因为这样，
我们才会努力学习，我们才会
努力前进。我们的信仰是
享受数学。因为“数
学穿越时空”。
♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”—*SCIbird*

目　录

1　声明 3

2　分析基础 4

2.1　实数共理、确界、不等式 4
2.2　函数 4
2.3　序列极限 6
2.4　函数极限与连续概念 8
2.5　闭区间上连续函数的性质 9

3　一元函数微分学 11

3.1　导数和微分 11
3.2　微分中值定理 12
3.3　函数的升降、极值、最值问题 12
3.4　函数的凹凸性、拐点及函数作图 13
3.5　洛必达法则与泰勒公式 14
3.6　一元函数微分学的总合应用 15

4　一元函数积分学 17

4.1　不定积分和可积函数类 17
4.2　定积分概念、可积条件与定积分性质 19
4.3　变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法 19
4.4　定积分的应用 22
4.5　广义积分 23

5　级数 24

5.1　级数敛散判别法与性质、上极限与下极限 24
5.2　函数级数 24
5.3　幂函数 24
5.4　傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛 24

6　多元函数积分学 25

6.1　欧式空间、多元函数的极限与连续 25
6.2　偏导数与微分 25
6.3　反函数与隐函数 25
6.4　切空间与极值 25
6.5　含参积分的定积分 25
6.6　含参积分的广义积分 25

7　多元函数积分学　26
7.1　重积分的概念与性质、重积分化累次积分 26
7.2　重积分的变换 26
7.3　曲线积分与格林公式 26
7.4　曲面积分 26
7.5　奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关 26
7.6　场论 26

8　典型综合题分析　27

9　附录及一些说明事项　28

第 1 章 声明

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：Github(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) [1]或者邮箱[2]联系我。

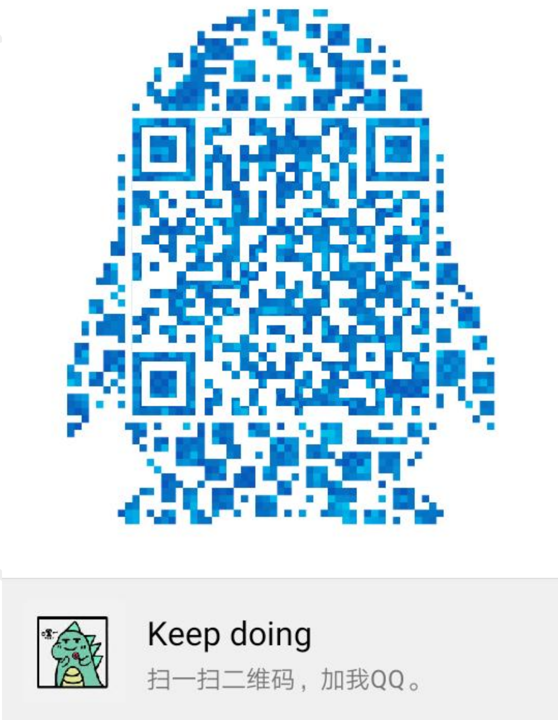

图 1.1: 二维码

点击Github后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

[1]1411279054
[2]1411279054@qq.com

第 2 章 分析基础

2.1 实数共理、确界、不等式

练习题

1. 设 $\max\{a+b,|a-b|\}<\frac{1}{2}$, 求证: $|a|<\frac{1}{2},|b|<\frac{1}{2}$.

   解 $2|a|=|a+b+a-b|\le|a+b|+|a-b|\le 2\max\{a+b,|a-b|\}<1 \therefore |a|<\frac{1}{2}$

   $2|b|=|a+b-(a-b)|\le|a+b|+|a-b|\le 2\max\{a+b,|a-b|\}<1 \therefore |b|<\frac{1}{2}$

2. 求证: 对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$, 有 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\ge\frac{1}{2}$.

   解 $2=|a+b-(a-b)+2(1-b)|\le|a+b|+|a-b|+2|1-b|\le 4\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}$

   $\therefore \max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\ge\frac{1}{2}$

3. 求证: 对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$, 有

   $\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$;

   并解释其几何意义.

   解 易知，$\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b$ ① $\max\{a,b\}-\min\{a,b\}=|a-b|$ ②

   由 ①、② 得 $\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$ $\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$

   几何意义:$\max\{a,b\}$ 指的是 a,b 中较大的那个, $\min\{a,b\}$ 指的是 a,b 中较小的那个。

4. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界，求证:

$$|f(x)-f(y)|\le\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)\quad(\forall x,y\in X)$$

   解 $f(x)-f(y)\le\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)\therefore |f(x)-f(y)|\le|\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)|=\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)$

5. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$① \inf_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

$$② \sup_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\sup_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$$

   解 ① 易知, $\sup_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le f(x)+g(x)$ $(\forall x\in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$, 又 $\because$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le f(x)+g(x)\le f(x)+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 即 $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}-\sup_{x\in X}g(x)\le f(x)$,$(\forall x\in X)$, $\therefore$ $\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$, 所以, $\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}$

   ② 类似上面做法.

2.2 函数

练习题

1. 设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$.
   (1) 求证:$f(x)$ 是奇函数;
   (2) 求证：$|f(x)|\le 2$.
   (3) 求 $\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n次}(x)$.

解

(1) $f(x)=f(-x)$,$\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)=|1+x|-|1-x|\le|1+x+1-x|=2$

(3) 易知，$f(x)$ 是一个分段函数，$f(x)=\begin{cases}-2 & x<-1\\ 2x & -1\le x\le 1\\ 2 & x\ge 1\end{cases}$，下面当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(x)=2x\therefore(f\circ f)(x)=\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2}\\ 4x & \frac{-1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\\ 2 & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore$ 可得，$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=$
$\begin{cases}-2 & x<\frac{-1}{2^{(}n-1)}\\ 2^{(}n-1)x & \frac{-1}{2^{(}n-1)}\le x\le\frac{1}{2^{(}n-1)}\\ 2 & x\ge\frac{1}{2^{(}n-1)}\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $a>0,b>0$. 求证:
   (1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$;
   (2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)$

解

(1) 由已知得, $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降 $\therefore\frac{f(a+b)}{a+b}\le\frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(a+b)}{a+b}\le\frac{f(b)}{b}$,$\therefore af(a+b)\le(a+b)f(a)$, $bf(a+b)\le(a+b)f(b)$, 可得 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$.

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当 $a>0,b>0$ 时，有
   (1) 当 $p>1$ 时, $(a+b)^p\ge a^p+b^p$;
   (2) 当 $0<p<1$ 时，$(a+b)^p\le a^p+b^p$.

解

(1) 令 $f(x)=x^p$, $\frac{f(x)}{x}=x^{p-1}$, $\because p>1, p-1>0$ $\therefore x^{p-1}$ 单调递增, 由第二题可得 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)\therefore(a+b)^p\ge a^p+b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上定义, 且 $f(f(x))\equiv x$.
   (1) 问这种函数有几个?
   (2) 若 $f(x)$ 为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令 $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ $\because f(f(x))\equiv x\therefore f(y)\equiv f^{-1}(y)$, 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线 $y=x$ 对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个, $f(x)\equiv x$

5. 求证: 若 $y=f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 是奇函数, 并且它的图像关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

解 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)=-f(-x)$, 又 $\therefore f(x)$ 关于直线 $x=b(b>0)$ 对称, $f(b+x)=f(b-x)$, 即 $f(b+b+x)=f(-x)=-f(x)$, $f(x+2b)=-f(x)=-f(x+2b-2b)=f(x-2b)$, $\therefore f(x+4b)=f(x)$, 因此 $f(x)$ 是周期函数, 其周期是 $4b$.

6. 设 $f:X\to Y$ 时满射, $g:Y\to Z$. 求证: $g\circ f:X\circ Z$. 有反函数的充分必要条件为 f 和 g 都有反函数存在, 且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

解 $g\circ f:X\circ Z$ 有反函数, 说明 $g\circ f$ 一一对应, 即 f 和 g 都一一对应, 所以, f 和 g 存在反函数, 令 $(g\circ f)$ 的反函数为 H, 假设 $H(a)=b$, 有 $(g\circ f)(b)=a$, 左乘 g^{-1}, 即 $f(b)=g^{-1}(a)$, 再左乘 f^{-1}, 即 $b=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$ $\therefore H=f^{-1}\circ g^{-1}, (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

2.3 序列极限

练习题

1. 设 $x_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
   (1) 当 $a\neq 0$ 时, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$
   (2) 举例说明当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\neq 1$ 可能成立;
   (3) 举例说明当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n\neq 1$ 可能成立.

   解

   (1) 由已知条件知: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据 $\varepsilon-N$ 定义知, $\forall\ \varepsilon>0, \exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$ $\because$ $n>N$, 那么 $n+1>N$, $\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N$, 有 $n+1>N$ $\therefore |a_{n+1}-a|<\varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$.
   (2) 例: $a=\frac{1}{2^n}$.
   (3) 例: $x_n=\frac{n+1}{n}$.

2. 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

   解 令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 其中 $a<1$, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=a$, 又由已知表达式得 $a=1-\sqrt{1-a}$, 解得: $a=0$. 又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}$, 根据洛必达得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$.

3. 设 $c>1$, 求序列 $\sqrt{c}, \sqrt{c\sqrt{c}}, \sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}, \cdots$ 的极限.

   解 根据表达式可得, $x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}$, $x_{n+1}-x_n=\sqrt{c\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt{x}}(\sqrt{c}-x_n^{\frac{3}{4}})$. 假设: $x_n<c^{\frac{3}{2}}$. 下面用归纳法来证明:

   当 $n=1$ 时, $x_1=\sqrt{c}<c^{\frac{3}{2}}$

   当 $n=k$ 时, 假设 $x_n<c^{\frac{3}{2}}$

   那么 $n=k+1$ 时,$x_{n+1}=\sqrt{c\sqrt{x_n}}<\sqrt{c\cdot c^{\frac{3}{2}}}=c^{\frac{5}{4}}<c^{\frac{3}{2}}$, $\therefore x_n<c^{\frac{3}{2}}$, 且 $x_{n+1}-x_n>0$, 由单调有界定理可知数列 x_n 存在极限。令 $\lim\limits_{x_n}=a$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}x_{n+1}=a, a=\sqrt{ca}, a=c$

   $\therefore \lim\limits_{x_n}=c$

4. 设 $A>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})(n=1,2,\cdots)$
   (1) 求证: x_n 单调下降且有界;
   (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   解

   (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})\geq\sqrt{A}$, 说明 x_n 有下界.
   $\because x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}(\frac{A}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2}\frac{A-x_n^2}{x_n}$, 又 $\because x_n\geq\sqrt{A}$ $\therefore x_{n+1}-x_n<0$,

所以, x_n 单调递减且有下界.

(2) 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a \therefore a = \sqrt{A}$ 所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

5. 设 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, 求证: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解 令 $x_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}(x_n > 0)$, 根据表达式有 $\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \ \therefore \frac{x_n}{x_{n+1}} = x_n(1+x_n) > 1$, 即 $x_n > x_{n+1}$, 根据单调有界定理可得 x_n 存在极限, 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a(a > 0) \ \therefore \frac{1}{a} = 1 + a$, 解得: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. 求证:

(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n} - 2\sqrt{n}$ 的极限存在.

解

(1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 而 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(2) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1},\ x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.
$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.\therefore\ x_{n+1} < x_n$, 数列 x_n 是递减数列.

下证: $x_n > -2$;

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 2[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n}] > 2[\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - 1) - x\sqrt{n} > -2$.

7. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

求证: 序列 a_n, b_n 的极限存在.

解

8. 求证: 如下序列的极限存在.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2}).$$

9. 求证: 如下序列的极限存在:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

10. 设 $c > 0$, 求序列

$$\sqrt{c}, \sqrt{c+\sqrt{c}}, \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \cdots$$

的极限.

11. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求证: 若 $\tilde{x} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ 极限存在, 则 x_n 的极限也存在.

12. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, z_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, 且 $c_n \le a_n \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$; 又设 y_n, z_n 极限存在. 求证: x_n 极限也存在.

13. 设序列 x_n 满足 $|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|(n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $0 < q < 1$. 求证: 序列 x_n

的极限存在.

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足条件:

$$|f(x)-f(y)| \le q|x-y| \quad (\forall x,y\in(-\infty,+\infty))$$

其中 $0<q<1$. 对 $\forall x_1\in(-\infty,+\infty)$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 求证: 序列 x_n 的极限存在, 且极限值是 $f(x)$ 的不动点.

15. 设 $x_0=a, x_1=b(b>a)$, 用如下公式定义序列的项:

$$x_{2n}=\frac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3},\ x_{2n+1}=\frac{2x_{2n}+x_{2n-1}}{3} \quad (n=1,2,\cdots)$$

求证: 序列 x_n 极限存在.

2.4 函数极限与连续概念

练习题

1. 设在正实轴上, $h(x)\le f(x)\le g(x)$, 且广义极限

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=A=\lim_{x\to\infty} g(x)$$

存在. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$(分别讨论 $A=+\infty,-\infty,$).

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A(>0)$, 求证:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=+\infty$$

3. 设 $0<x_n<+\infty$, 且满足 $x_n+\frac{4}{x^2}<3$, 求证: 极限 $\lim\limits_{x_n},$.

4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

求证:$f(x)\equiv 0$.

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上定义,$g(x)$ 单调上升, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=+\infty.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

6. 设 $x_n=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot 2}+\frac{1}{n\cdot 1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

8. 设 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

9. 适当定义 $f(0)$, 使函数 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续.

10. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 求证:

(1) $|f(x)|\in C[a,b]$;

(2) $max\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$;

(3) $min\{f(x), g(x)\} \in C[a,b]$.

11. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 单调上升, 且 $a < f(x) < b$ $(\forall x \in [a,b])$. 对 $\forall x_1 \in [a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1,2,\cdots)$ 产生序列 $\{x_n\}$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且其极限值 c 满足 $c = f(c)$.

12. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}) = 2$

13. 求出函数 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判断间断点的类型.

2.5 闭区间上连续函数的性质

练习题

1. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上单调. 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.

2. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且严格单调, 又

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

求证: 方程 $f^3(x) - 6f^2(x) + 9f(x) - 3$ 有且仅有三个根.

3. 设 $f_n(x) = x^n + x$. 求证:

(1) 对任意自然数 $n > 1$, 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根;

(2) 若 $c_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ 是 $f_n(x) = 1$的根, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在, 并求此值.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 求证: $\exists c \in [a,b]$, 使得对 $\forall\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ 上无界.

5. 设 x_n 为有界序列. 求证:x_n 以 a 为极限的充分必要条件是: x_n 的任一收敛子序列都有相同的极限值 a.

6. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$. 求证:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x) + g(x)| \le \max_{a\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|g(x)|.$$

7. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x^*, 又设使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x^*)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

8. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 又设对 $\forall l \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = l$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有有限个解或无解. 求证:

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上无界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

9. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 存在 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 求证:$f(f(x))$ 至少在两个点处取到最小值.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义, $x_0 \in [a,b]$. 如果对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 那么称 $f(x)$ 在点 x_0 处**上半函数**. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都上半连续, 则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个半连续函数. 求证:$[a,b]$ 上的上半连续函数一定有上界.

11. 证明下列函数在实数轴上一致连续:

(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (2) $f(x) = sinx$

12. 证明下列函数在实数轴上不一致连续:

(1) $f(x) = xsinx$; (2) $f(x) = sinx^2$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 对 $\forall h \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(h+n) = A$(有限数). 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = A$.

14. 设存在常数 $L > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 求证: $f(x) + g(x)$ 与 $f(x) \cdot g(x)$ 都在 (a,b) 内一致连续.

16. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 值域含于区间 (a,d), 又 $g(x)$ 在 (c,d) 内一致连续. 求证: $g(f(x))$ 在 (a,b) 内一致连续.

17. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且是周期为 T 的周期函数. 求证: $f(x)$ 在实轴上一致连续.

第 3 章 一元函数微分学

3.1 导数和微分

练习题

1. 用定义求 $f'(0)$, 这里 $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$
2. 设 $f'(x_0)$ 存在. 求证: 对数导数也存在并等于 $f'(x_0)$, 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$$

.

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,α_n,β_n 为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n-f(x_0+\beta_n))}{\alpha_n-\beta_n}=f'(x_0)$$

4. 设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的多项式, M 是它的最大实数. 求证:$P'(M)\geq 0$.
5. 给定曲线 $y=x^2+5x+4$.
   (1) 求曲线在点 $(0,4)$ 处的切线.
   (2) 确定 b 使得直线 $y=3x+b$ 为曲线的切线;
   (3) 求过点 $(0,3)$ 的曲线的切线.
6. 确定常数 a,b 使得函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1 \\ x^2, & x\leq 1 \end{cases}$ 有连续导数.
7. 设曲线由隐式方程 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}(a>0)$ 给出.
   (1) 求证: 曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数;
   (2) 写出曲线的参数式, 利用参数式求导给出上一小题的另一证法.
8. 已知曳物线的参数方程为

$$x=a[\ln(\tan\frac{t}{2})+\cos t],\quad y=a\sin t\quad (a>0,0<t<\pi).$$

求证: 在曳物线的任意切线上, 自切点至该切线与 x 轴交点之间的切线段为一定长.

9. 试确定 λ, 使得曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 与 $xy=\lambda$ 相切, 并求出切线方程.
10. 试确定 m, 使直线 $y=mx$ 为曲线 $y=lnx$ 的切线.
11. 设 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. (1)求证 : $(1-x^2)y'-xy=1$; (2)求$y^{(n)}(0)$.
12. 求 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数.
13. 设 $y=x^(n-1)\ln x$. 求证:$y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.
14. 求证: 双曲线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的向径与切线的夹角等于极角的两倍加 $\frac{\pi}{2}$
15. 设曲线既可用参数式 $x=x(t),y=y(t)$ 表示, 又可用极坐标 $r=r(\theta)$ 表示. 求

证:$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$.

3.2 微分中值定理

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除仅有的一个点都可导. 求证: $\exists c_1, c_2 \in (a,b)$ 及 $\theta \in (0,1)$, 使得
$$f(b) - f(a) = (b-a)[\theta f'(c_1) + (1-\theta)f'(c_2)]$$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且
$$f(a)\cdot f(b) > 0,\ f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0.$$
求证: 对 $\forall k \in R, \exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$.
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (0,3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数. 求证: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$, 使得
$$f'(\xi) < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < f'(\eta).$$
5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f''(x_0) \neq 0$. 求证:
   (1) 如果 $f'(x_0) = 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 0$;
   (2) 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_0)$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f'(\xi) > 0$.
7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0) = 0, f(x) \neq 0 (\forall x \in (0,1))$. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,$f(0) = 0$. 求证: 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒等于零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)\cdot f(\xi) > 0$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a,b)$, 使得 $f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$
   注: 本题与本节例 12 比较, 就是把条件 $f'(a) = f'(b) = 0$ 中的 “=0” 去掉了.
10. 设 $f(x)$ 在 (0,1] 上可导, 且存在有限极限 $\lim\limits_{h\to 0+} \sqrt{x}f'(x)$. 求证:$f(x)$ 在 (0,1] 上一致连续.

3.3 函数的升降、极值、最值问题

练习题

1. 求证:
   (1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 单调增加;
   (2) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$. 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调下降.
3. 求证: 对任何 $n(n>0)$ 次多项式 $P(x), \exists x_0>0$, 使得 $P(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$ 和在 $(x_0,+\infty)$ 上都是严格单调的.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证: 极大值必大于极小值.
5. 设 $a,b>0, k\in R$. 求证: 函数 $f(x)=a^2e^{kx}+b^2e^{-kx}$ 存在与 k 无关的极小值.
6. (1) 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f(x)\neq g(x), g(x)\neq 0$. 求证: $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值的充分必要条件是 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 (a,b) 内无极值.
   (2) 设 $b>a>0$, 求证: $f(x)=\frac{(x-a)(x+b)}{(x-b)(x+a)}$ 无极值.
7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 2.4 所示, 则 $f(x)$ 有 ( ).
   (A) 一个极小值和两个极大值;
   (B) 两个极小值和一个极大值;
   (A) 两个极小值和两个极大值;
   (A) 三个极小值和一个极大值;

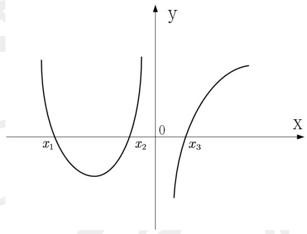

图 2.4

8. (1) 求证: 序列 $\{\frac{\ln n}{n}\}_{n=3}^{\infty}$ 为一递减序列;
   (2) 求序列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.
9. 假设 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 求证:$f(x)$ 在实轴上有真正得最小值.
10. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 在区间 $[a,b]$ 上只有一个极值点. 求证: 如果该点是极大值点必为最大值点; 如果该点是极小值点必为最小值点.
11. 求出满足不等式 $\frac{B}{\sqrt{x}}\leq \ln x\leq A\sqrt{x}\ (\forall\ x>0)$ 的最小正数 A 及最大负数 B.
12. 给定曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$.
    (1) 求过点 $(x_0,\frac{1}{\sqrt{x_0}})$ 的切线.
    (2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线在 x 轴与 y 轴上截距和最小.
13. 设正数 x,y 之和为一常数 $2a(a>0)$, 且指数 x^y 当 $x=a$ 时, 达到最大值. 求证: $a=e$.
14. 给定曲线 $y=\frac{1}{x^2}$.
    (1) 求曲线上横坐标为 x_0 的点处的切线方程;
    (2) 在曲线上求一个点, 使曲线在该点处的切线被坐标轴所截的长度最短.
15. 做一个无盖的圆柱形茶缸, 若体积 V 一定, 问底半径 R 与高 H 成何比例时, 使总面积最小 (即用料最省) ?
16. 有一半径为 a 的半球面形的杯子, 杯内放一长度为 $l(l>2a)$ 的均匀细棒, 求棒的平衡位置 (即求棒重心的最低位置).
17. 把一圆形铁片剪下中心角为 α 的一块扇形部分, 并将其围成一圆锥. 已知圆形铁片的半径为 R, 问 α 多大时, 圆锥的容积最大?

3.4 函数的凹凸性、拐点及函数作图

练习题

1. 设 $a>0, b>0$. 求证: $f(x)=\sqrt{a+bx^2}$ 为凹函数.

2. 求证: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为凹函数.
3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上取正值, 且为凸函数. 求证: $\frac{1}{f(x)}$ 是在 (a,b) 上的凹函数.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微,$f''(x)\geq 0$. 求证:
   (1) $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\in f'(x)\in\frac{f(x+h)-f(x)}{h}(0<h<x)$;
   (2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x)=1$.
5. 作出下列函数的图形:

(1) $y=x^3-x^2-x+1$; (2) $y=x\cdot e^{-x^2}$;
(3) $y=x+\frac{1}{x}$; (4) $y=x\cdot\ln x$.

3.5 洛必达法则与泰勒公式

练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+xf'(x)]=l$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且

$$f(-1)=0,\qquad f(1)=1,\qquad f'(0)=0.$$

求证:$\exists\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 求证:
   (1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微;
   (2) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调下降;
   (3) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹函数;
4. (1) 求证: $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}]=\frac{1}{3}$;
   (2) 设 $0<x_1<1,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.
   (3) 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 求证: 对 $\forall\lambda>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^{\lambda x}}=0.$$

5. 将函数 $(1-x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $x=0$ 处泰勒展开公式至 x^4 阶项.
6. 将拉格朗日函数中值定理, 对 $\forall|x|\leq 1,\exists\theta\in(0,1)$, 使得

$$\arcsin x=\arcsin x-0=x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}.$$

求证:$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且

$$|f(x)| \leq M_0, \qquad |f''(x)| \leq M_2 \quad (\forall x > 0).$$

求证:$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$ $(\forall x > 0)$.

8. 设 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. 求证: a 是 $P(x) = 0$ 的 k 重根的充分必要条件为

$$P^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, k-1), \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

9. 若一实系数多项式 $P(x)$ 的根全是实根, 求证: $P(x)$ 各阶导数产生的多项式的根也全是实根, 且每一高阶导数的根均分布在底阶导数的根之间.

3.6 一元函数微分学的总合应用

1. 求证不等式:$1 + x^2 \leq 2^x$ $(0 \leq x \leq 1)$.
2. (1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $(1 + x)^\alpha \leq 1 + ax$ $(x > -1)$, 且等号仅当 $x = 0$ 时成立;
   (2) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时, $(1 + x)^\alpha \geq 1 + ax$ $(x > -1)$, 且等号仅当 $x = 0$ 时成立.
3. 设 $a > 0, b > 0$. 求证:
   (1) $a^p + b^p \geq 2^{(1-p)}(a + b)^p$ $(p > 1)$;
   (2) $a^p + b^p \leq 2^{1-p}(a + b)^p$ $(0 < p < 1)$.
4. 设 $b \geq a$, 求证: $2\arctan\frac{b-a}{2} \geq \arctan b - \arctan a$.
5. (1) 设 $n \in N$, 求证:

$$(1 + \frac{1}{2n+1})(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{2n})(1 + \frac{1}{n})^n;$$

   (2) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n[e - (1 + \frac{1}{n})^n] = \frac{e}{2}$.
6. 设 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有正根 x_0, 则方程

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必存在小于 x_0 的正根.

7. 试确定方程 $e^x = ax^2 (a > 0)$ 的根的个数, 并指出每一个根所在的范围.
8. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 R 上连续可微, 且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0$, 试证 $f(x) = 0$ 的任何两个相邻实根之间必有 $g(x) = 0$ 的根.
9. (1) 求 $f(x) = \frac{1}{x^2} + px + q (p > 0)$ 的极值点与极值;
   (2) 求方程 $\frac{1}{x^2} + px + q = 0 (p > 0)$ 有三个实根的条件.
10. 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.
11. 对 $\forall n \in N$, 求证:$x^{n+2} - 2x^n - 1$ 只有唯一正跟.
12. 设 $k > 0$, 求证: 方程 $1 + x + \frac{x^2}{2} = ke^x$ 只有唯一实根.
13. 设 n 次多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ 满足下列条件:
    (1) $(\sum_{k=0}^n a_k) \cdot (\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k) < 0$;

(2) $P'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上处处不为零.

求证:$P(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有一个实根.

14. 设 $|f''(x)| \le |f'(x)| + |f(x)| (\forall x \in (a,b))$ 并存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$.
求证:$f(x) \equiv 0\ (\forall x \in (a,b))$.

第 4 章 一元函数积分学

4.1 不定积分和可积函数类

练习题

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$; (3) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}]\mathrm{d}x$;
(5) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}$; (8) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;
(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2}$; (10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$; (11) $\int \sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x$; (12) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x$.

2. 求下列不定积分 $I=\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x, J=\int \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$; (3) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x(a>0)$; (4) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}(a\geq 0)$;
(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$; (6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\mathrm{d}x(a<b)$; (8) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; (2) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$; (3) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x$;
(4) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$; (5) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分:

(1) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; (2) $\int x^\alpha \ln x\mathrm{d}x$;
(3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$; (4) $\int x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$;
(5) $\int x\cos\beta x\mathrm{d}x$; (6) $\int x^2\sin 2x\mathrm{d}x$;
(7) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$; (8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$;
(9) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (10) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{1+\tan x}{\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
(3) $\int(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (4) $\int x(2-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

7. 求下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int \sqrt{x^2-a^2}$;
(3) $\int \arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$
(5) $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

8. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; (2) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$;
(3) $\int x\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$; (4) $\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$;

9. 求下列不定积分的递推公式:

(1) $\int x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; (2) $\int x^n(\ln x)^{\mathrm{d}}x$;
(3) $\int \sin^n x\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}(n \geq 2)$.

10. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{8-2x-x^2}$;
(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x-1)}$; (4) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$;
(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$; (6) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

11. 求下列不定积分:

(1) $\int \cos x\sin^2 x\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$; (3) $\int \tan x\sin^2 x\mathrm{d}x$; (4) $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$;
(5) $\int \cos^4\sin^3 x\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\cos x}$; (8) $\int \frac{\sin 2x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x$.

12. 求下列不定积分:

(1) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$;
(3) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$.

13. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$
(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$;
(5) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$; (6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

14. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;
(3) $\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

15. 问下列积分是否可积 (即原函数是否为初等函数):

(1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; (2) $\int \sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$.

4.2 定积分概念、可积条件与定积分性质

练习题

1. 设 $f(x) \in R[a,b]$, 且 $f(a) \geq a > 0$. 求证:
   (1) $\frac{1}{f(x)} \in R[a,b]$;　　(2) $\ln f(x) \in R[a,b]$.
2. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x = 0$.
3. 设 $f(x) \in R[0,1]$, 且 $f(x) \geq a > 0$. 求证: $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.
4. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 0$.
5. 设 $a,b > 0, f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \in R[a,b]$, 又 $\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$. 求证:
$$\int_{-a}^b x^2 f(x)\mathrm{d}x \leq ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$$
6. 设 $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0(\forall x \in [a,b])$. 求证:
$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x) \in R[a,b]$. 求证:
$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \leq |\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$
8. 设 $f(x) \in R[a,b]$, 且 $a \leq f(x) \leq b$, 又 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凹函数. 求证:
   (1) $\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \varphi'(t)(f(x)-t)(\forall t \in (a,b))$;
   (2) $\int_0^1 \varphi(f(x))\mathrm{d}x \geq \varphi(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)$.
   (3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)} \geq \mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.
9. 求证: 极限 $\lim\limits_{b\to 1}\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x(0 < b < 1)$ 存在, 并且其极限值不超过 1.
10. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x$.

4.3 变限定积分、微积分基本原理、定积分的换元法

1. 设 $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}(x \neq 0); f(0) = 0$
   (1) 问 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上可积?
   (2) 问变上限积分 $\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在点 $x = 0$ 处是否可导?
2. 求下列定积分:

(1) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^\alpha}\mathrm{d}x$;
(2) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$;
(3) $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
(4) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$;
(5) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$;
(6) $\int_0^1 \arctan\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$;

3. 求下列定积分:

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$;
(2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$;
(3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;
(4) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$;
(5) $\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$;
(6) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$.

4. (1) 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1-|t|)\mathrm{d}t$;

(2) 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x$;

5. 设 $f(2)=\frac{1}{2}, f'(x)=0, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x/$

6. 设 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且当 $x \in [0,\pi]$ 时, $f(x) = x$, 求

$$\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

7. 对任意自然数 n, 求证:

$$\int_0^\pi \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 求证:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f''(t)(x-t)\mathrm{d}t \ (\forall x \in [a,b])$$

9. 设 $0 < a < b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并满足

$$f(\frac{ab}{x}) = f(x) \ (\forall x \in [a,b]).$$

求证:

$$\int_a^b f(x)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

10. 设 $a > 0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 并满足

$$f(\frac{a^2}{x}) = f(x) \ (\forall x > 0)$$

求证:

(1) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x}dx$;

(2) $\int_1^a \frac{f(x^2)}{x} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx$;

(3) 如果 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 则 $\int_0^1 g(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a g(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$.

11. (1) 设 $f(x)$ 是奇函数, 求证: $f(x)$ 的任一原函数是偶函数;

(2) 设 $f(x)$ 是偶函数, 求证: $f(x)$ 的任意原函数是奇函数和常数之和.

12. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

13. 设函数 $f(x)$ 二阶可微, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})| \le \frac{M_2}{24}(b-a)^3$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

14. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $\exists m \in N$, 使得

$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0 \quad (n=0,1,\cdots,m)$$

求证:$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $m+1$ 个零点.

15. 设 $S(x) = \int_0^x |\cos t|dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$.

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 求

$$\lim_{a\to0^+} \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a [f(t+a)-f(t-a)]dt$$

.

17. (1) 设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积分, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt = l$$

.

(2) 第 (1) 小题的逆命题是否成立? 如果加上一个条件: “$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升”, 第 (1) 小题的逆命题是否成立?

18. 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = A$$

.

19. 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(x) \geq 0(\forall x \in C[a,b])$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升, 函数

$$F(x) \overset{定义}{=} \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t\mathrm{d}t), & x > 0 \\ f(0+0), & x = 0 \end{cases}$$

求证: 在 $[0,+\infty)$ 上, $F(x)$ 单调上升且右连续.

4.4 定积分的应用

练习题

1. 求
   (1) 椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积;
   (2) 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.
2. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与两平面 $z = 0, z = 2(x + a)$ 所围立体的体积和侧面积.
3. 设心脏线为 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$. 求
   (1) 所围成图形的面积;
   (2) 它的长度;
   (3) 它绕极轴旋转一周所围成立体的体积;
   (4) 它绕极轴旋转一周所产生立体的侧面积.
4. (1) 求半圆 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心.
   (2) 求锥体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ 的重心和绕 z 轴的转动惯量 (设锥体的密度为 1).
5. 有一半径 $R = 3\text{m}$ 的圆形溢水洞, 水半满, 求水作用在闸门上的压力.
6. 已知抛物线 $y = -ax^2 + b(a > 0, b > 0)$. 求 a 和 b 的值, 使满足下面两个条件:
   (1) 抛物线与 x 轴围成的曲边梯形包含正方形

$$(x, y)| - 1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$$

   (2) 抛物线与 x 轴围成的曲边梯形面积最小.
7. 已知抛物线 $x^2 = (p - 4)y + a^2(p \neq 4, a > 0)$. 求 p 和 a 的值, 使满足下面两个条件:
   (1) 抛物线与 $y = x + 1$ 相切;
   (2) 抛物线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转有最大的体积.
8. 某建筑工程打地基时, 需要气锤将桩打进土层, 气锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 k $(k > 0)$), 气锤第一次击打讲桩打进地下 am. 根据设计方案, 要求气锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$. 问

(1) 气锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?
(2) 若击打次数不限, 气锤至多能将桩打进地下多深?

4.5 广义积分

练习题

1. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}}$;

(3) $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-a)}}$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}(p>q)$; (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

2. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^1\ln\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x\ln(1-x)}{x(1-x)\mathrm{d}x}$; (4) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$.

3. 判别广义积分 $displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x(b>a>0)$ 的收敛性.
4. 判别下列广义积分的收敛性与绝对收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\sin x\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}\mathrm{d}x$.

5. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\sin(x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: $\displaystyle\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$$

第 5 章 级数

5.1 级数敛散判别法与性质、上极限与下极限

5.2 函数级数

5.3 幂函数

5.4 傅氏级数的收敛性、平均收敛与一致收敛

第 6 章　多元函数积分学

6.1　欧式空间、多元函数的极限与连续

6.2　偏导数与微分

6.3　反函数与隐函数

6.4　切空间与极值

6.5　含参积分的定积分

6.6　含参积分的广义积分

第 7 章 多元函数积分学

7.1 重积分的概念与性质、重积分化累次积分

7.2 重积分的变换

7.3 曲线积分与格林公式

7.4 曲面积分

7.5 奥氏积分、斯托克斯公式、线积分与路径无关

7.6 场论

第 8 章 典型综合题分析

第 9 章 附录及一些说明事项

附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容Github，另外还有参考文档, 其下载地址为Github。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请Fork Github。