



# 数学分析习题指南——课后习题

## 数分、数分、数分

作者：CharlesLC

组织：the stdio of LC

时间：February 2, 2020

版本：1.00

确实，时间和空间是有限的。确实，我们总会有分开的时候。但是正因为这样，我们才会努力学习，我们才会努力前进。我们的信仰是享受数学。因为“数学穿越时空”。



“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。” —SCIbird

# 目 录

1	声明	2
2	分析基础	3
2.1	实数共理、确界、不等式 . . . . .	3
2.2	函数 . . . . .	3
2.3	序列极限 . . . . .	5
2.4	函数极限与连续概念 . . . . .	5
2.5	闭区间上连续函数的性质 . . . . .	5
3	一元函数微分学	6
4	一元函数积分学	7
5	级数	8
6	多元函数积分学	9
7	多元函数积分学	10
8	典型综合题分析	11
9	附录及一些说明事项	12

## 第 1 章 声明

---

本产品不用与任何商业用途，最新版下载地址为：[Github](#)(点击即可下载)，不保证题目和答案的正确性 (因为本人能力有限)，但如有错误可通过 QQ(见图1.1) <sup>1</sup>或者邮箱<sup>2</sup>联系我。



Keep doing

扫一扫二维码，加我QQ。

图 1.1: 二维码

点击[Github](#)后，找到 main.ptf 后点击，点击 download 即可。

---

<sup>1</sup>1411279054

<sup>2</sup>1411279054@qq.com

## 第2章 分析基础

### 2.1 实数共理、确界、不等式

#### 练习题

1. 设  $\max\{a+b, |a-b|\} < \frac{1}{2}$ , 求证:  $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$ .

解  $2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |a| < \frac{1}{2}$

$2|b| = |a+b-(a-b)| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2\max\{a+b, |a-b|\} < 1 \therefore |b| < \frac{1}{2}$

2. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有  $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$ .

解  $2 = |a+b-(a-b)+2(1-b)| \leq |a+b| + |a-b| + 2|1-b| \leq 4\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\}$

$\therefore \max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$

3. 求证: 对  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2};$$

并解释其几何意义.

解 易知,  $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a+b$  ①  $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a-b|$  ②

由 ①、② 得  $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$   $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$

几何意义:  $\max\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较大的那个,  $\min\{a, b\}$  指的是  $a, b$  中较小的那个。

4. 设  $f(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \quad (\forall x, y \in X)$$

解  $f(x) - f(y) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \therefore |f(x) - f(y)| \leq |\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)| = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$

5. 设  $f(x), g(x)$  在集合  $X$  上有界, 求证:

$$\textcircled{1} \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

$$\textcircled{2} \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$$

解 ① 易知,  $\sup_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) + g(x) (\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$ , 又  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$ , 即  $\inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X} \{g(x)\} \leq f(x) (\forall x \in X)$ ,  $\therefore \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$ , 所以,  $\inf_{x \in X} \{f(x)\} + \inf_{x \in X} \{g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in X} \{f(x)\} + \sup_{x \in X} \{g(x)\}$

② 类似上面做法.

### 2.2 函数

#### 练习题

1. 设  $f(x) = |1+x| - |1-x|$ .
- (1) 求证:  $f(x)$  是奇函数;
  - (2) 求证:  $|f(x)| \leq 2$ .
  - (3) 求  $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\text{次}}(x)$ .

解

(1)  $f(x) = f(-x)$ ,  $\therefore f(x)$  是奇函数.

(2)  $f(x) = |1+x| - |1-x| \leq |1+x+1-x| = 2$

(3) 易知,  $f(x)$  是一个分段函数,  $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$ , 下面当  $-1 \leq x \leq 1$

时,  $f(x) = 2x \therefore (f \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2} \\ 4x & \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \therefore \text{可得}, (f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

$\begin{cases} -2 & x < \frac{-1}{2^{(n-1)}} \\ 2^{(n-1)}x & \frac{-1}{2^{(n-1)}} \leq x \leq \frac{1}{2^{(n-1)}} \\ 2 & x \geq \frac{1}{2^{(n-1)}} \end{cases}$

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上定义,  $a > 0, b > 0$ . 求证:

- (1) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降, 则  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ ;
- (2) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调上升, 则  $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$

解

(1) 由已知得,  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降  $\therefore \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(a)}{a}, \frac{f(a+b)}{a+b} \leq \frac{f(b)}{b} \therefore af(a+b) \leq (a+b)f(a), bf(a+b) \leq (a+b)f(b)$ , 可得  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ .

(2) 与第一小题类似.

3. 利用上题证明: 当  $a > 0, b > 0$  时, 有

- (1) 当  $p > 1$  时,  $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ ;
- (2) 当  $0 < p < 1$  时,  $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ .

解

(1) 令  $f(x) = x^p, \frac{f(x)}{x} = x^{p-1}, \therefore p > 1, p-1 > 0 \therefore x^{p-1}$  单调递增, 由第二题可得  $f(a+b) \geq f(a) + f(b) \therefore (a+b)^p \geq a^p + b^p$

(2) 与第一小题类似

4. 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上定义, 且  $f(f(x)) \equiv x$ .

- (1) 问这种函数有几个?
- (2) 若  $f(x)$  为单调增加函数, 问这种函数有几个?

解

(1) 令  $y = f(x), x = f^{-1}(y) \therefore f(f(x)) \equiv x \therefore f(y) \equiv f^{-1}(y)$ , 说明其原函数等于反函数, 说明函数图像关于直线  $y = x$  对称, 其这样的函数有无数多个.

(2) 一个,  $f(x) \equiv x$

5. 求证: 若  $y = f(x) (x \in (-\infty, +\infty))$  是奇函数, 并且它的图像关于直线  $x = b (b > 0)$  对称, 则函数  $f(x)$  是周期函数并求其周期.

**解**  $\because f(x)$  是奇函数,  $\therefore f(x) = -f(-x)$ , 又  $\therefore f(x)$  关于直线  $x = b(b > 0)$  对称,  $f(b+x) = f(b-x)$ , 即  $f(b+b+x) = f(-x) = -f(x)$ ,  $f(x+2b) = -f(x) = -f(x+2b-2b) = f(x-2b)$ ,  $\therefore f(x+4b) = f(x)$ , 因此  $f(x)$  是周期函数, 其周期是  $4b$ .

6. 设  $f: X \rightarrow Y$  时满射,  $g: Y \rightarrow Z$ . 求证:  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数的充分必要条件为  $f$  和  $g$  都有反函数存在, 且  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**解**  $g \circ f: X \rightarrow Z$  有反函数, 说明  $g \circ f$  一一对应, 即  $f$  和  $g$  都一一对应, 所以,  $f$  和  $g$  存在反函数, 令  $(g \circ f)$  的反函数为  $H$ , 假设  $H(a) = b$ , 有  $(g \circ f)(b) = a$ , 左乘  $g^{-1}$ , 即  $f(b) = g^{-1}(a)$ , 再左乘  $f^{-1}$ , 即  $b = (f^{-1} \circ g^{-1})(a)$ .  $\therefore H = f^{-1} \circ g^{-1}$ ,  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

## 2.3 序列极限

### 练习题

1. 设  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

## 2.4 函数极限与连续概念

## 2.5 闭区间上连续函数的性质

## 第 3 章 一元函数微分学



## 第 4 章 一元函数积分学





## 第 5 章 级数



## 第 6 章 多元函数积分学



## 第 7 章 多元函数积分学



## 第 8 章 典型综合题分析



## 第 9 章 附录及一些说明事项

---

### 附录及一些说明事项

1. 本书参考此作者编写的内容[Github](#)，另外还有参考文档, 其下载地址为[Github](#)。
2. 另外，由于本人能力有限，对于一些没有完成的习题，若你有能力帮助，敬请[Fork Github](#)。