

# Lambda Calculus

## # 간단한 예시

[ 수학 ]

$$f(x) = x + 2$$

[ Lambda Calculus ]

$$\lambda x. x + 2$$

:: 위의 예제에서, x 에 값을 넣는다면

[ 수학 ]

$$f(3) = 3 + 2$$

[ Lambda Calculus ]

$$(\lambda x. x + 2)3$$

## # 용어정리

::  $\lambda x. t$  에서

x 는 변수 (variable), t 는 lambda term,  $\lambda x. t$  는 lambda Abstraction 이라 한다.

:: t, s 가 모두 lambda term 일 때,

ts 는 lambda term 이면서 application 이라 한다.

::  $\lambda x. xy$  에서

x 는 bound variable,

y 는 free variable 이라고 하고,

$M = \lambda x. xy$  일 때  $FV(M) = y$  이다.

## # 일반적인 특징

:: 결합 방식은 왼쪽 결합이다.

$$fxy = (fx)y$$

:: 일반적으로 인수는 하나인데, 만일 두 가지 인수가 필요한 경우에는

$$\lambda x(\lambda y. x - y)7\ 2 \text{ or } (\lambda xy. x - y)7\ 2$$

위와 같은 형식으로 쓴다.

:: 각 boundary 의 변수들은 모양이 같아도 서로 다른 변수다. 즉,  
 $(\lambda x. x)(\lambda x. x)$   
 에서 왼쪽의 x 와 오른쪽의 x 는 서로 다른 변수이다.

## # Substitution (대치)

:: 대치 관계

$$1) x[N/y] = \begin{cases} N & (x = y) \\ x & (x \neq y) \end{cases}$$

$$2) (MN)[P/x] = M[P/x]N[P/x]$$

$$3) (\lambda y. M)[N/x] = \begin{cases} \lambda y. M & (y = x) \\ \lambda y(M[N/x]) & (y \notin FV(N)) \\ \lambda z(M[z/y])[N/x] & (z : new) \end{cases}$$

## # 변환규칙

$$1) \alpha - conversion : \lambda x. M = \lambda y. M[y/x] \quad (y \notin FV(M))$$

$$\text{ex) } \lambda x. x = \lambda z. x[z/x] = \lambda z. z$$

$$2) \beta - reduction : (\lambda x. M)N = M[N/x]$$

$$\text{ex) } (\lambda x. x)c = x[c/x] = c$$

$$3) \eta - conversion : \lambda x. Mx = M \quad (x \notin FV(M))$$

$$\text{ex) } (\lambda x. fx) = f$$

## # Normal Form

:: 더이상 beta reduction 을 수행할 수 없는 lambda term

## # Church-Rosser 정리

::  $M \Rightarrow M_1, M \Rightarrow M_2$  이면

$M_1 \Rightarrow M_3$ 이고  $M_2 \Rightarrow M_3$ 인  $M_3$ 가 존재한다.

:: 즉, 각 lambda term 은 최대 한 개의 정규형을 가진다.