第一章　集合

1. 证明： $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明　设 $x\in(A\cup(B\cup C))$. 若 $x\in A$, 则 $x\in A\cup B, x\in A\cup C$, 从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 若 $x\in B\cap C$, 则同样有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 得 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, 因此

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

另一方面，设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 若 $x\in A$, 当然有 $x\in A\cup(B\cap C)$. 若 $x\notin A$, 由 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 可知 $x\in B$ 且 $x\in C$, 所以 $x\in B\cap C$, 同样有 $x\in A\cup(B\cap C)$, 因此 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$. 所以 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2. 证明：

(1)$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(2)$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$;

(3)$(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(4)$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(5)$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(6)$A-(A-B)=A\cap B$.

证明　(1)$A-(A\cap B)=A\cap\complement_s(A\cap B)=A\cap(\complement_sA\cup\complement_sB)=(A\cap\complement_sA)\cup(A\cap\complement_sB)=A-B$;

$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\complement_sB=(A\cap\complement_sB)\cup(B\cap\complement_sB)=A-B$;

(2)$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap\complement_s(A\cap C)=(A\cap B)\cap(\complement_sA\cup\complement_sC)=(A\cap B\cap\complement_sA)\cup(A\cap B\cap\complement_sC)=A\cap(B\cap\complement_sC)=A\cap(B-C)$;

(3)$(A-B)-C=(A\cap\complement_sB)\cap\complement_sC=A\cap\complement_s(B\cup C)=A-(B\cup C)$;

(4)$A-(B-C)=A-(B\cap\complement_sC)=A\cap\complement_s(B\cap\complement_sC)=A\cap(\complement_sB\cup C)=(A\cap\complement_sB)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(5)$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\complement_sB)\cap(C\cap\complement_sD)=(A\cap C)\cap\complement_s(B\cup D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(6)$A-(A-B)=A\cap\complement_s(A\cap\complement_sB)=A\cap(\complement_sA\cup B)=A\cap B$.

3. 证明： $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证明　$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\complement_sC=(A\cap\complement_sC)\cup(B\cap\complement_sC)=(A-C)\cup(B-C)$;

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\complement_sB)\cap(A\cap\complement_sC)=A\cap\complement_sB\cap\complement_sC=A\cap\complement_s(B\cup C)=A-(B\cup C)$.

4. 证明： $\complement_s(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\complement_sA_i$.

证明　设 $x\in\complement_s(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$, 则 $x\in S$, 但 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, 因此对任意 i,$x\notin A_i$, 所以 $x\in\complement_sA_i$, 因而

$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \complement_s A_i$. 设 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \complement_s A_i$, 则对任意 i,$x \in \complement_s A_i$, 即 $x \in S$,$x \notin A_i$, 因此 $x \in S$, 但 $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 得 $x \in \complement_s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. 所以 $\complement_s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \complement_s A_i$.

5. 证明：(1) $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) - B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha - B)$;　(2)$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) - B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha - B)$.

证明 (1) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha - B = (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \cap \complement_s B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cap \complement_s B) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha - B)$;

(2) $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha - B = (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \cap \complement_s B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cap \complement_s B) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha - B)$.

6. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，作 $B_1 = A_1, B_n = A_n - (\bigcup_{\nu=1}^{n-1} A_\nu), n > 1$. 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集，而且 $\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{n} B_\nu, 1 \le n \le \infty$.

证明 若 $i \neq j$, 不妨设 $i < j$. 显然 $B_i \subset A_i \quad (1 \le i \le n)$.

$$B_i \cap B_j \subset A_i \cap (A_j - \bigcup_{n=1}^{j-1} A_n) = A_i \cap A_j \cap \complement_s A_1 \cap \complement_s A_2 \cap \cdots \cap \complement_s A_i \cap \cdots \cap \complement_s A_{j-1} = \emptyset.$$

由 $B_i \subset A_i (1 \neq i \neq n)$ 得 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

设 $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 若 $x \in A_1$, 则 $x \in B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 若 $x \notin A_1$, 令 i_n 是最小自然数使 $x \in A_{i_n}$, 即 $x \notin \bigcup_{i=1}^{i_n-1} A_i$ 而 $x \in A_{i_n}$. 这样 $x \in A_{i_n} - \bigcup_{i=1}^{i_n-1} A_i = B_{i_n} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 所以 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

7. 设 $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right), A_{2n} = (0, n), n = 1, 2, \cdots$, 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

解 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0, \infty)$;

设 $x \in (0, \infty)$, 则存在 N, 使 $x < N$, 因此 $n > N$ 时，$0 < x < n$, 即 $x \in A_{2n}$, 所以 x 属于下标比 N 大的一切偶指标集，从而 x 属于无限多 A_n, 得 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, 又显然 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset (0, \infty)$, 所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0, \infty)$.

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \emptyset$;

若有 $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \emptyset$, 则存在 N, 使任意 $n > N$, 有 $x \in A_n$. 因此若 $2n - 1 > N$ 时，$x \in A_{2n-1}$, 即 $0 < x < \frac{1}{n}$. 令 $n \to \infty$ 得 $0 < x \le 0$, 此不可能，所以 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \emptyset$.

8. 证明 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

证明 设 $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, 则存在 N, 使一切 $n > N$,$x \in A_n$, 所以 $x \in \bigcap_{m=n+1}^{\infty} A_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, 所以 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. 设 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, 则有 n, 使 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, 即对任意 $m \ge n$, 有 $x \in A_n$, 所以 $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

因此 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

9. 作出一个 $(-1,1)$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 的一一对应，并写出这一一对应的解析表达式.

解 $\varphi:(-1,1)\to(-\infty,+\infty)$. 对任意 $x\in(-1,1),\varphi(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$. φ 就是 $(-1,1)$ 和 $(-\infty,\infty)$ 的一一对应.

10. 证明：将球面去掉一点以后，余下的点所成的集合和整个平面上的点所成的集合是对等的.

证明 只要证明球面 $S:x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$ 去掉 $(0,0,1)$ 点后与 xOy 平面 M 对等即可. 此可由球极投影来做到：对任意 $(x,y,z)\in S\backslash(0,0,1)$,

$$\varphi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)\in M.$$

易验证 φ 是一一的，映上的，因此 S 与 M 是对等的.

11. 证明：由直线上某些互不相交的开区间作为集 A 的元素，则 A 至多为可数集.

证明 设 $G=\{\triangle_z|\triangle_z$ 是直线上互不相交的开区间 $\}$, 在每一 $\triangle_z$ 中任取一点有理数 r_z, 使 $\triangle_z$ 与 r_z 对应. 因为 $\triangle_z$ 是互相不交的，因此这个对应关系是一对一的，由于有理数是可数的，而 G 与有理数的子集建立了一一的对应关系，所以 G 至多是可数的.

12. 证明：所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

证明 设 A_n 是 n 次有理系数多项式的全体， $n=1,2,\cdots$, 则 $A=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n.A_n$ 由 $n+1$ 个独立的记号所决定，即 n 次多项式的 $n+1$ 个有理数系数，其中首项系数可取除 0 以外的一切有理数，其他系数可取一切有理数，因此每个记号独立地跑遍一个可数集，因此由 §4 定理 6,$\overline{\overline{A}}_n=a$, 又由 §4 定理 4,$\overline{\overline{A}}=a$.

13. 设 A 是平面上以有理点 (即坐标都是有理数) 为中心，有理数为半径的圆的全体，则 A 是可数集.

证明 任意 A 中的圆，由三个独立记号决定 : (x,y,r). 其中 (x,y) 是圆心的坐标， r 是圆半径， x,y 各自跑遍有理数，而 r 跑遍大于 0 的有理数，因而都是可数集. 所以 $\overline{\overline{A}}=a$.

14. 证明：增函数的不连续点最多只是可数多个.

证明 设 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上的增函数. 记不连续点全体为 E, 由数学分析可知：

(1) 任意 $x\in(-\infty,\infty),\lim\limits_{\triangle x\to 0^+}f(x+\triangle x)=f(x+0)$ 及 $\lim\limits_{\triangle x\to 0^-}f(x+\triangle x)=f(x-0)$ 都存在.

(2)$x\in E$ 的充分必要条件为 $f(x+0)>f(x-0)$.

(3) 任意 $x_1,x_2\in E$, 若 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1-0)<f(x_1+0)\le f(x_2-0)<f(x_2+0)$, 因此每一 $x\in E$, 对应于直线上的开区间 $(f(x-0),f(x+0))$, 且由 (3) 可知 E 中点 x 对应的这样的开区间是互相不交的. 因此由第 11 题可知至多是可数的.

15. 试找出使 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 之间一一对应的一种方法.

解 记 $(0,1)$ 中有理数全体 $R=\{r_1,r_2,\cdots\}$, 令

$$\begin{cases}\varphi(0)=r_1,\\ \varphi(1)=r_2,\\ \varphi(r_n)=r_{n+2}, n=1,2,\cdots\\ \varphi(x)=x,\quad x\in((0,1)\backslash R),\end{cases}$$

则 φ 是 [0,1] 到 (0,1) 上的一一映射.

16. 设 A 是一可数集合，则 A 的所有有限子集作成的集合亦必可数.

证明 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$, A 的有限子集的全体为 $\widetilde{A}.A_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, A_n 的子集的全体为 $\widetilde{A}_n$. 易计算 $\widetilde{A}_n$ 中共有 2^n 个元素，而 $\widetilde{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$, 因此 $\widetilde{A}$ 至多为可数的. 又 A 中一个元素组成的集合是可数的，因而 $\widetilde{A}$ 是可数的.

17. 证明： $[0,1]$ 上的全体无理数作成的集合其基数为 c.

证明 记 [0,1] 上无理数全体为 A,[0,1] 上有理数全体为 $\{r_1,r_2,\cdots\}$, 显然

$$B=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\cdots,\frac{\sqrt{2}}{n},\cdots\right\}\subset A$$

令

$$\begin{aligned}&\varphi(\frac{\sqrt{2}}{2n})=\frac{\sqrt{2}}{n+1},\quad && n=1,2,\cdots\\ &\varphi(\frac{\sqrt{2}}{2n+1})=r_n,\quad && n=1,2,\cdots\\ &\varphi(x)=x, && x\notin B.\end{aligned}$$

则 φ 是 A 到 [0,1] 的一一对应，由 [0,1] 的基数为 c, 可知 A 的基数也是 c.

18. 若集 A 中每个元素，由互相独立的可数个指标一对一决定，即 $A=\{a_{x_1x_2x_3\cdots}\}$, 而每个 x_i 取遍一个基数为 c 的集，则 A 的基数也是 c.

证明 设 $x_i\in A_i,\overline{\overline{A}}_i=c,i=1,2,\cdots$. 因而有 A_i 到实数集 R 的一一映射 φ_i. 令 φ 是 A 到 E_∞ 的一映射，对任意 $a_{x_1x_2x_3\cdots}\in A.\varphi(a_{x_1x_2x_3\cdots})=(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\varphi_3(x_3),\cdots)$. 下面证明 φ 是一一映射.

若 $\varphi(a_{x_1x_2x_3\cdots})=\varphi(a_{x_1'x_2'x_3'\cdots})$, 则对任意 $i,\varphi_i(x_i)=\varphi_i(x_i')$. 由于 φ_i 是一对一的，因此 $x_i=x_i'$, 所以 $a_{x_1x_2x_3\cdots}=a_{x_1'x_2'x_3'\cdots}$. 对任意 $(a_1,a_2,a_3,\cdots)\in E_\infty,a_i\in R,i=1,2,\cdots$, 因为 φ_i 是映上的，必有 $x_i\in A_i$, 使 $\varphi_i(x_i)=a_i$. 所以有 $a_{x_1x_2x_3\cdots}\in A$, 使 $\varphi(a_{x_1x_2\cdots})=(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots)=(a_1,a_2,\cdots)$, 即 φ 是一一映射. 所以 A 与 E_∞ 的基数相同，等于 c.

19. 若 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数为 c, 证明：存在 n_0, 使 A_{n_0} 的基数也是 c.

证明 由于 $\overline{\overline{E}}_\infty=c$, 我们不妨设 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=E_\infty$. 用反证法，若 $\overline{\overline{A}}_n<c,n=1,2,\cdots$. 设 P_i 为 E_∞ 到 R 中如下定义的映射：若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in E_\infty$, 则 $P_i(x)=x_i$. 令

$$A_i^*=P_i(A_i),i=1,2,\cdots,$$

则 $\overline{\overline{A_i^*}} < \overline{\overline{A}}_i < c, i = 1, 2, \cdots$. 所以对每个 i, 存在 $\xi_i \in R \backslash A_i^*$, 于是 $\xi = (\xi_i, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in E_\infty$. 下证 $\xi \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 事实上，若 $\xi \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在 i, 使 $\in A_i$, 于是 $\xi_i = P_i(\xi) \in P_i(A_i) = A_i^*$, 这与 $\xi \in R \backslash A_i^*$ 矛盾，所以 $\xi \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E_\infty$, 这又与 $\xi \in E_\infty$ 矛盾，因此至少存在某个 i_0, 使 $\overline{\overline{A}}_{i_0} = c$.

20. 记每项取值为 0 或 1 的数列全体所成的集合为 T, 求证 T 的基数为 c.

证明 设 $T = \{\{\xi_1, \xi_2, \cdots\} \mid \xi_i = 0 \, or \, 1, i = 1, 2, \cdots\}$.

作 T 到 E_∞ 的映射 $\varphi : \{\xi_1, \xi_2, \cdots\} \to \{\xi_2, \xi_3, \cdots\}$, 则 φ 是 T 到 E_∞ 的子集 $\varphi(T)$ 的一一映射，所以 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{E}}_\infty = c$, 反之， (0,1] 区间与 2 进位无穷小数正规表示一一对应，所以每个 $x \in (0, 1]$ 都可唯一地写成 $x = 0.\xi_1\xi_2\cdots$, 其中每个 ξ_i 为 0 或 1, 令 $f(x) = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$, 则 f 是 (0,1] 到 T 的子集 $f((0,1])$ 上的一一映射，因而 $\overline{\overline{T}} \geq \overline{\overline{(0, 1]}} = c$. 综上所述得 $\overline{\overline{A}} = c$.

第二章　点集

注：E^o 表示开核，E' 表示导集，$\bar{E}$ 表示闭包.

1. 证明：$P_0 \in E'$ 的充要条件是对任意含有 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$ (不一定以 P_0 为中心) 中，恒有异于 P_0 的点 P_1 属于 E (事实上，这样的 P_1 还有无穷多个), 而 $P_0 \in E^o$ 的充要条件则是有含有 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$(同样，不一定以 P_0 为中心) 存在，使 $U(P,\delta) \subset E$.

证明　若 $P_0 \in E'$, 则对任一含 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$, 必有以 P_0 为中心的邻域 $U(P_0) \subset U(P,\delta)$, 所以存在 $P_1 \in E \cap U(P_0) \subset E \cap U(P,\delta)$ 且 $P_1 \neq P$, 即任何含有 P_0 的邻域中含有一点 P_1 异于 P_0 属于 E.

反之，若任一含有 P_0 邻域有异于 P_0 的点 P_1 属于 E, 当然对任一 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 中也有异于 P_0 的点 P_1 属于 E, 所以 $P_0 \in E'$.

若 $P_0 \in E^o$, 则有 $U(P_0) \subset E$.

反之，若 $P_0 \in U(P,\delta) \subset E$, 必有 $U(P_0) \subset U(P,\delta) \subset E$, 则 $P_0 \in E^o$.

2. 设 E_1 是 $[0,1]$ 中的全部有理数点，求 E_1 在 R^1 内的 $E_1', E_1^o, \bar{E}_1$.

解　$E_1' = [0,1], \quad E_1^o = \emptyset, \quad \bar{E}_1 = [0,1]$.

3. 设 $E_2 = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$. 求 E_2 在 R^2 内的 $E_2', E_2^o, \bar{E}_2$.

解　$E_2' = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}, \quad E_1^o = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}, \quad \bar{E}_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$.

4. 设 E_3 是函数

$$y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, \text{当} x \neq 0, \\ 0, \qquad \text{当} x = 0 \end{cases}$$

的图形上的点所作成的集合，在 R^2 内讨论 E_3 的 E_3' 与 E_3^o.

解　$E_3' = E_3 \cup \{(0,y)| -1 \leq y \leq 1\}, \quad E_3^o = \emptyset$.

5. 在 R^2 中看第 2 题之 $E_1', E_1^o, \bar{E}_1$ 各是由那些点构成的.

解　$E_1' = \{(x,0)|0 \leq x \leq 1,\}, E_1^o = \emptyset, \bar{E}_1 = E_1'$.

6. 证明：点集 F 为闭集的充要条件是 $\bar{F} = F$.

证明　若 F 是闭集，则 $F' \subset F$, 因此 $\bar{F} = F \cup F' = F$. 若 $\bar{F} = F$, 则 $F' \subset F \cup F' = \bar{F} = F$, 因此 F 是闭集.

7. 证明：开集减闭集后的差集仍是开集；闭集减开集后的差仍是闭集.

证明　设 G 是开集，F 是闭集，则 $\complement G$ 是闭集，$\complement F$ 是开集. 所以 $G - F = G \cap \complement F$ 是开集，$F - G = F \cap \complement G$ 是闭集.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 $a, E = \{x|f(x) > a\}$ 是一开集，而 $E = \{x|f(x) \geq a\}$ 总是一闭集.

证明 若 $x_0 \in E$, 则 $f(x_0) > a$. 因为 $f(x)$ 是连续的，所以存在 $\delta > 0$, 使任意 $x \in (-\infty,\infty), |x-x_0| < \delta$ 就有 $f(x) > a$, 即任意 $x \in U(x_0,\delta)$ 就有 $x \in E$, 所以 $U(x_0,\delta) \subset E$,E 是开集.

若 $x_n \in E$, 且 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 则 $f(x_n) \geq a$, 由于 $f(x)$ 连续， $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq a$, 即 $x_0 \in E$, 因此 E 是闭集.

9. 证明：每个闭集必是可数个开集的交集；每个开集可以表示成可数个闭集的和集.

证明 设 F 是闭集. 令 $G_n = \{x | d(x,F) < \frac{1}{n}\}$,$G_n$ 是开集：任意 $x_0 \in G_n, d(x_0,F) < \frac{1}{n}$, 所以存在 $y_0 \in F$, 使 $d(x_0,y_0) = \delta < \frac{1}{n}$. (否则任意 $y \in F, d(x_0,y) \geq \frac{1}{n}$, 则 $d(x_0,F) = \inf\limits_{y\in F} d(x_0,y) \geq \frac{1}{n}$, 与 $d(x_0,F) < \frac{1}{n}$ 矛盾).

令 $\epsilon = \frac{1}{n} - \delta > 0$, 任意 $x \in U(x_0,\epsilon), d(x_0,x) < \epsilon$.

$$d(x,y_0) \leq d(x_0,x) + d(x_0,y_0) < \epsilon + \delta = \epsilon + \frac{1}{n} - \epsilon = \frac{1}{n}.$$

于是 $d(x,F) = \inf\limits_{y\in F} d(x,y) \leq d(x,y_0) < \frac{1}{n}$, 得 $x \in G_n$. 这样 $U(x_0,\epsilon) \subset G_n$, 故 G_n 是开集.

设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 对任意 $n, x \in G_n, d(x,F) < \frac{1}{n}$. 令 $n \to \infty$, 得 $d(x,F) = 0$. 由于 F 是闭集，必有 $x \in F$(否则 $x \notin F$, 存在 $y_n \in F$, 使 $d(x,y_n) \to 0$, 得 $x \in F' \subset F$, 矛盾), 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$. 又 $G_n \supset F, n = 1,2,\cdots$, 所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \supset F$, 因而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = F$,$F$ 是可数个开集的交集.

若 G 是开集，则 $\complement G$ 是闭集，所以有开集 G_n, 使 $\complement G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 所以

$$G = \complement(\complement G) = \complement(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement G_n,$$

而 $\complement G_n$ 是闭集，因而 G 是可数个闭集的和集.

10. 证明：用十进位小数表示 [0,1] 中的数时，其用不着数字 7 的一切数成一完备集.

证明 [0,1] 中第一位小数必须用到数字 7 的小数是 (0.7,0.8).

[0,1] 中第二位小数必须用到数字 7 的小数是

$$(0.07, 0.08) \quad (0.17, 0.18) \quad \cdots \quad (0.97, 0.98).$$

......

[0,1] 中第 n 位小数必须用到数字 7 的小数是

$$(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}7, 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}8),$$

其中 $a_i (i = 1,2,\cdots,n-1)$ 为 0 到 9 除 7 外的一起自然数， $\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$ 是取遍满足上述条件的各种可能的 $n-1$ 个数．记这些全体开区间为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

因此 [0,1] 上可不用 7 表示的小数是

$$\complement\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup (-\infty,0)\cup(1,\infty)\right).$$

显然 $A_n,(-\infty,0),(1,\infty)$ 是互不相交且无公共端点的开区间，所以 [0,1] 上可不用 7 表示的小数是完备集.

11. 证明：$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数的充分必要条件是对任意实数 c, 集 $E=\{x|f(x)\geq c\}$ 和 $E_1=\{x|f(x)\leq c\}$ 都是闭集.

证明 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，用第 8 题相同的方法得 E 和 E_1 是闭集. 若 E 和 E_1 都是闭集. 若有 $x_0\in[a,b]$. $f(x)$ 在 x_0 点不连续. 则存在 $\epsilon_0>0, x_n\to x_0, f(x_n)\geq f(x_0)+\epsilon_0$ 或 $f(x_n)\leq f(x_0)-\epsilon_0$, 不妨设出现第一种情况. 令 $c=f(x_0)+\epsilon$, 则 $x_n\in E=\{x|f(x)\geq c\}$, 而 $x_0\notin E$(因为 $f(x_0)<f(x_0)+\epsilon_0=c$), 此与 E 是闭集相矛盾. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的.

12. 证明 §2 定理 5: 设 $E\neq\emptyset, E\neq R^n$, 则 E 至少有一界点 (即 $\partial E\neq\emptyset$).

证明 设 $P_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E, P_1=(y_1,\cdots,y_n)\notin E$. 令 $P_t=(ty_1+(1-t)x_1, ty_2+(1-t)x_2,\cdots,ty_n+(1-t)x_n), 0\leq t\leq 1. t_0=\sup\{t|P_t\in E\}$. 现证明 $P_{t_0}\in\partial E$.

若 $P_{t_0}\in E$. 则 $t_0\neq 1$. 任意 $t\in[0,1]$ 满足 $t_0<t\leq 1$, 必有 $P_t\notin E$. 任取 $t_n, 1>t_n>t_0, t_n\to t_0$ 且 $P_{t_n}\in E$, 则 $P_{t_n}\to P_{t_0}$, 所以 $P_{t_0}\in\partial E$.

若 $P_{t_0}\notin E$, 则 $t_0\neq 0$, 且有 $t_n, 0<t_n<t_0, t_n\to t_0, P_{t_n}\to P_{t_0}, P_{t_n}\in E$, 所以同样有 $P_{t_0}\in\partial E$. 因而 $\partial E\neq\emptyset$.

13. 用三进位无限小数表示康托尔集 P 中的数时，完全可以用不着数字 1, 试用此事实证明 P 的基数 c.

证明 先用三进位有限小数表示集 P 的余区间的端点 (都属于 P), 则有

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=(0.1,0.2),$$
$$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)=(0.01,0.02),$$
$$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)=(0.21,0.22),$$
$$\cdots\cdots$$

一般地，第 n 次挖掉的 2^{n-1} 个区间 $I_k^{(n)}, k=1,2,\cdots,2^{n-1}$ 中

$$I_k^{(n)}=(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1, 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2),$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都只是 0 或 2. 因此，在 $[0,1]-P$ 中的数展成三进位小数时，其中至少有一位是 1, 于是把 P 中的数展成三进位无限小数时可以用不着数字 1, 即若 $x\in P$, 则 x 可表示成

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots,$$

其中 a_n 或为 0 或为 2. 记这种小数全体为 A, 则 $A\subset P$. 事实上，由于 $A\subset[0,1]$, 而 $[0,1]-P$ 中的数展成三进位小数时，诸 a_i 中至少有一位是 1, 所以 $[0,1]-P$ 中没有 A 中的数，因此 $A\subset P$.

作 A 到二进位小数全体 B 的映射 ϕ:

$$\phi : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{a_n}{2},$$

其中 $a_n = 0$ 或 2, 则 ϕ 是 A 到 B 上的 1-1 映射, 所以 A 的基数为 c, 由 $A \subset P$, 得 $\bar{\bar{P}} \geq c$, 又 $\bar{\bar{P}} \leq c$, 所以 $\bar{\bar{P}} = c$.

第三章　测度论

1. 证明：若 E 有界，则 $m^*E<+\infty$.

证明　E 有界，必有有限开区间 I 使 $E\subset I$. 因此 $m^*E\leq m^*I<+\infty$.

2. 证明：可数点集的外测度为零.

证明　设 $E=\{x_i\mid i=1,2,\cdots\}$. 对任意 $\epsilon>0$, 存在开区间 I_i, 使 $x_i\in I_i$, 且 $|I_i|=\frac{\epsilon}{2^i}$(在 R^p 空间中取边长为 $\sqrt[p]{\frac{\epsilon}{2^i}}$ 的包含 x_i 的开区间 I_i), 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|=\epsilon$. 由 ϵ 的任意性得 $m^*E=0$.

3. 证明：设 E 是直线上一有界集合， $m^*E>0$, 则对任意小于 m^*E 的正数 c, 恒有 E 的子集 E_1, 使 $m^*E_1=c$.

证明　设 $a=\inf\limits_{x\in E}x, b=\sup\limits_{x\in E}x$, 则 $E\subset[a,b]$. 令 $E_x=[a,x]\cap E, a\leq x\leq b, f(x)=m^*E_x$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数：当 $\triangle x>0$ 时，

$$\begin{aligned}\mid f(x+\triangle x)-f(x)\mid &=\mid m^*E_{x+\triangle x}-m^*E_x\mid\\ &\leq\mid m^*(E_{x+\triangle}-E)\mid\\ &\leq m^*(x,x+\triangle x]=\triangle x.\end{aligned}$$

于是当 $\triangle x\to 0$ 时，$f(x+\triangle x)\to f(x)$, 即 $f(x)$ 是右连续的. 用类似方法可证明 $\triangle x>0,\triangle x\to 0$ 时， $f(x-\triangle x)\to f(x)$, 所以 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

$$f(a)=m^*E_a=m^*(E\cap\{a\})=0$$
$$f(b)=m^*(E\cap[a,b])=m^*E.$$

因此对任意正数 c,$c<m^*E$, 存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=c$. 即 $m^*E_{x_0}=m^*([a,x_0]\cap E)=c$. 令 $E_1=E\cap[a,x_0]\subset E$. 则 $m^*E_1=c$.

4. 证明：设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是一些互不相交的可测集合 ,$E_i\subset S_i, i=1,2.\cdots,n$, 求证

$$m^*(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=m^*E_1+m^*E_2+\cdots+m^*E_n.$$

证明　因为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是两两互相不交的可测集，由此由 §2 定理 3 推论 1, 对任意集合 T, 有 $m^*(T\cap\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)$. 特别取 $T=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$, 则 $T\cap S_i=(\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j)\cap S_i=E_i, T\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$, 所以 $m^*(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i)=m^*(T\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i))=\sum\limits_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}m^*E_i$.

5. 若 $m^*E=0$, 则 E 可测.

证明　任意集合 T,$T=(E\cap T)\cup(T\cap\complement E)$, 所以 $m^*T\leq m^*(E\cap T)+m^*(T\cap\complement E)$.

又 $E\cap T\subset E$, 所以 $m^*(E\cap T)\leq m^*E=0.T\cap\complement E\subset T, m^*(T\cap\complement E)\leq m^*T$, 所以 $m^*(E\cap T)+m^*(T\cap\complement E)\leq m^*T$.

所以 $m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap \complement E)$, 因而 E 是可测的.

6. 证明康托尔 (Cantor) 集合的测度为零.

证明 康托尔集 P 是 $[0,1]$ 上挖去可数个互不相交开区间而成的，第一次挖去的开区间的长度为 $\frac{1}{3}$, 第二次挖去的开区间总的长度为 $\frac{2}{9}, \cdots\cdots$, 第 n 次挖去的开区间总长度为 $\frac{2^{n-1}}{3^n}, \cdots\cdots$. 因此 P 在 $[0,1]$ 上的余集测度为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$(测度的可数可加性). 又因

$$m[0,1] = m(P \cup ([0,1] - P)) = mP + m([0,1] - P).$$

所以， $mP = m[0,1] - m([0,1] - P) = 1 - 1 = 0$, 即康托尔集合的测度为 0.

7. 设 $A, B \subset R^p$ 且 $m^*B < +\infty$. 若 A 是可测集, 证明 $m^*(A \cup B) = mA + m^*B - m^*(A \cap B)$.

证明 因 A 是可测集，由卡拉泰奥多里条件,

$$m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap \complement A) = mA + m^*(B - A).$$

另一方面，又有

$$m^*B = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap \complement A),$$

由 $m^*B < +\infty$, 所以 $m^*(B \cap \complement A) < +\infty$, 于是 $m^*(B - A) = m^*B - m^*(A \cap B)$, 代入前式得

$$m^*(A \cup B) = mA + m^*B - m^*(A \cap B).$$

8. 证明：若 E 可测，则对于任意 $\epsilon > 0$, 恒有开集 G 及闭集 F, 使 $F \subset E \subset G$, 而 $m(G - E) < \epsilon, m(E - F) < \epsilon$.

证明 当 $mE < \infty$ 时，对任意 $\epsilon > 0$, 存在一列开区间 $\{I_i\}, i = 1, 2, \cdots$, 使 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mid I_i \mid < mE + \epsilon$. 令 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, 则 G 为开集， $G \supset E$, 且 $mE \le mG \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mid I_i \mid < mE + \epsilon$, 因此 $mG - mE < \epsilon$, 从而 $m(G - E) < \epsilon$.

当 $mE = \infty$ 时，E 总可表为可数个互不相交的有界可测集的和；$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n (mE_n < \infty)$, 对每个 E_n 应用上面结果，可找到开集 G_n, 使 $G_n \supset E_n$ 且 $m(G_n - E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. 令 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_n, G$ 为开集， $G \supset E$, 且 $G - E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (G_n - E_n)$. 因此

$$m(G - E) \le \bigcup_{n=1}^{\infty} m(G_n - E_n) < \epsilon.$$

又当 E 可测时， $\complement E$ 也可测，所以对任意 $\epsilon > 0$ 有开集 $G, G \supset \complement E$, 且 $m(G - \complement E) < \epsilon$. 因

$$G - \complement E = G \cap E = E \cap \complement(\complement G) = E - \complement G,$$

令 $F = \complement G$, 则 F 是闭集，且 $m(E - F) = m(G - \complement E) < \epsilon$.

9. 设 $E \subset R^q$, 存在两列可测集 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 使得 $A_n \subset E \subset B_n$ 且 $m(B_n - A_n) \to 0 (n \to \infty)$, 则 E 可测.

证明 对任意 $i, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_i$, 所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - E \subset B_i - E$. 又 $E \supset A_i, B_i - E \subset B_i - A_i$, 所以对任意 i,

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n - E\right) \leq m^*(B_i - E) \leq m^*(B_i - A_i) = m(B_i - A_i).$$

令 $i \to \infty$, 由 $m(B_i - A_i) \to 0$, 得 $m^*\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - E\right) = 0$. 所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - E$ 是可测的. 又 B_n 可测, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 也是可测的. 所以 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - E\right)$ 是可测的.

10. 设 $A, B \subset R^p$, 证明成立不等式:

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m^*A + m^*B.$$

证明 若 $m^*A = +\infty$ 或 $m^*B = +\infty$, 则结论成立. 当 $m^*A < +\infty$ 且 $m^*B < +\infty$ 时, 取 G_δ 型集 G_1 与 G_2, 使 $G_1 \supset A, G_2 \supset B$, 并且 $mG_1 = m^*A, mG_2 = m^*B$. 则

$$m^*(A \cup B) \leq m(G_1 \cup G_2), m^*(A \cap B) \leq m(G_1 \cap G_2).$$

所以由第七题,

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m(G_1 \cup G_2) + m(G_1 \cap G_2) = mG_1 + mG_2 = m^*A + m^*B.$$

11. 设 $E \subset R^p$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m^*(E - F) < \epsilon$, 证明 E 是可测集.

证明 由条件对任何正整数 n, 存在闭集 $F_n \subset E$, 使 $m^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$. 令 $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 F 是可测集且 $F \subset E$. 由于对一切正整数 n, 有

$$m^*(E - F) \leq m^*(E - F_n) < \frac{1}{n}.$$

故 $m^*(E - F) = 0$, 所以 $E - F$ 是可测集. 因此

$$E = F \cup (E - F)$$

是可测集.

12. 证明: 直线上所有可测集合作成的类 μ 的基数等于直线上的所有集合类的基数.

证明 设直线上子集的全体为 M, 由 $\mu \subset M$, 得 $\overline{\overline{\mu}} \leq \overline{\overline{M}}$. 又康托尔集是基数为 c 的零测度集, 因而康托尔集的一切子集的外测度为零, 是可测的. 而直线上点的全体基数 c, 因此康托尔集的一切子集与直线上的一切子集是对等的. 因此 $\overline{\overline{\mu}} \geq \overline{\overline{M}}$, 所以 $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\overline{M}}$.

第四章　可测函数

1. 证明：$f(x)$ 在 E 上为可测函数的充要条件是对任一有理数 r, 集 $E[f>r]$ 可测. 如果集 $E[f=r]$ 可测，问 $f(x)$ 是否可测？

证明　若对任有理数 r,$E[f>r]$ 可测, 则对任意实数 α, 记 $\{r_n\}$ 是大于 α 的一切有理数, 则有 $E[f>a]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E[f>r_n]$, 由 $E[f>r_n]$ 可测得 $E[f>\alpha]$ 是可测的，所以 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

若对任有理数 r,$E[f=r]$ 可测,则 $f(x)$ 不一定是可测的. 例如, $E=(-\infty,\infty)$, z 是 $(-\infty,\infty)$ 中不可测集. 对任意 $x\in z, f(x)=\sqrt{3}; x\notin z, f(x)=\sqrt{2}$, 则对任意有理数 r,$E[f=r]=\emptyset$ 是可测的. 而 $E[f>\sqrt{2}]=z$ 是不可测的. 因此 f 不是可测的.

2. 设 $f(x), f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数， k 为正整数，试证：

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k}\right]$$

是 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的点集.

证明　设 A 为 E 中 f_n 收敛的点集. 对任意 $x\in A$, 任意 k, 存在 N, 使 $n>N$ 时, $\mid f_n(x)-f(x)\mid<\frac{1}{k}$, 因此

$$x\in\varliminf_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k}\right].$$

由 k 的任意性，得

$$x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k}\right].$$

对任意 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k}\right]$, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 k_0, 使 $\frac{1}{k_0}<\epsilon$, 由 $x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k_0}\right]$ 可知存在 N, 使 $n>N$ 时， $x\in E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k_0}\right]$, 即 $\mid f_n(x)-f(x)\mid<\frac{1}{k_0}<\epsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 即 $x\in A$. 所以

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left[\mid f_n-f\mid<\frac{1}{k}\right].$$

3. 设 $\{f_n\}$ 为 E 上可测函数列，证明它的收敛点集与发散点集都是可测的.

证明　由 §1 定理 6, $\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 都是 E 上可测函数. 显然 $E[\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n=+\infty]$ 是 f_n 收敛到 $+\infty$ 的点所组成的集， $E[\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n=-\infty]$ 是 f_n 收敛到 $-\infty$ 的点所组成的集, $E[\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n>\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n]$ 是 f_n 不收敛的点所组成的集. 因此 $f_n(x)$ 在 E 上收敛的点所组成的集为

$$E-F[\varliminf_{n\to\infty}f_n=+\infty]-E[\varlimsup_{n\to\infty}f_n=-\infty]-E[\varlimsup_{n\to\infty}f_n>\varliminf f_n].$$

因而是可测集. 而发散点集为 $E[\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = +\infty] \cup E[\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n = -\infty] \cup E[\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n > \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n]$ 也是可测集.

4. 设 E 是 $[0,1]$ 中的不可测集，令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -x, & x \in [0,1] - E. \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测？ $|f(x)|$ 是否可测？

解 $f(x)$ 不可测. 若 $0 \in E$, 则 $E[f \geq 0] = E$ 不可测. 若 $0 \notin E$, 则 $E[f > 0] = E$ 不可测. 所以 $f(x)$ 总不可测.

当 $x \in [0,1]$ 时， $|f(x)| = x$ 是连续函数，所以 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上是可测的.

5. 设 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数列，而 $|f_n|$a.e. 收敛于有限函数 f. 则对任意 $\epsilon > 0$ 存在常数 c 与可测集 $E_0 \subset E, m(E \backslash E_0) < \epsilon$, 使在 E_0 上对一切 n 有 $|f_n(x)| \leq c$. 这里 $mE < \infty$.

证明 由题意， $E[|f_n| = \infty], E[f_n \not\to f]$ 都是零集， $n = 0, 1, 2, \cdots$. 令 $E_1 = E[f_n \not\to f] \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} E[|f_n| = \infty])$, 则 $mE_1 = 0$. 在 $E - E_1$ 上 $f_n(x)$ 都有限，且收敛于 $f(x)$. 令 $E_2 = E - E_1$, 则任意 $x \in E_2, \sup_n |f_n(x)| < \infty$. 因此

$$E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_2[\sup_n |f_n| \leq k], E_2[\sup_n |f_n| \leq k] \subset E_2[\sup_n |f_n| \leq k+1].$$

所以 $mE_2 = \lim_{k\to\infty} mE_2[\sup_n |f_n| \leq k]$. 因此存在 k_0 使 $mE_2 - mE_2[\sup_n |f_n| \leq k_0] < \epsilon$. 令 $E_0 = E_2[\sup_n |f_n| \leq k_0], c = k_0$. 在 E_0 上，对任意 $n, |f_n(x)| \leq c$, 而

$$m(E - E_0) = m(E - E_2) + m(E_2 - E_0) < \epsilon.$$

6. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数， $g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数，则 $f(g(x))$ 是可测函数.

证明 记 $E_1 = (-\infty, \infty), E_2 = [a,b]$. 由于 $f(x)$ 在 E_1 上连续, 故对任意实数 c,$E_1[f < c]$ 是直线上的开集. 设 $E_1[f > c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$, 其中 (α_n, β_n) 是其构成区间 (可能是有限个，α_n 可能为 $-\infty$,β_n 可能为 $+\infty$). 因此 $E_2[f(g) > c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_2[\alpha_n < g < \beta_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_2[g > \alpha_n] \cap E_2[g < \beta_n])$, 因为 g 在 E_2 上可测，因此 $E_2[g > \alpha_n], E_2[g < \beta_n]$ 都可测，故 $E[f(g) > c]$ 可测.

7. 设函数列 $f_n(x), (n = 1, 2, \cdots)$ 在有界集 E 上" 基本上" 一致收敛于 $f(x)$, 证明 $\{f_n\}$a.e. 收敛于 f.

证明 因为 $f_n(x)$ 在 E 上" 基本上" 一致收敛于 $f(x)$, 所以对任意 $\delta > 0$, 存在可测集 $E_\delta \subset E$, 使 $m(E - E_\delta) < \delta$ 而 f_n 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 设 E_0 是 E 中 f_n 不收敛的点的全体，则对任意 δ, $E_0 \subset E - E_\delta$(因为 E_δ 上 f_n 收敛), 所以 $mE_0 \leq m(E - E_0) < \delta$, 令 $\delta \to 0$, 得 $mE_0 = 0$. 所以 $f_n(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$(不必有有界条件).

8. 试证鲁津定理逆定理成立.

证明 鲁津定理逆定理应为： $f(x)$ 是 E 上函数，对任意 $\delta > 0$, 存在闭子集 $E_\delta \subset E$ 使 $f(x)$ 在 E_δ 上是连续函数，且 $m(E - E_\delta) < \delta$, 则 $f(x)$ 是 E 上 a.e. 有限可测函数.

证　对任意 $1/n$, 存在闭子集 $E_n \subset E$, 使 $f(x)$ 在 E_n 上连续. 且

$$m(E - E_n) < \frac{1}{n}.$$

令 $E_0 = E - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则对任意 n, 有 $mE_0 = m(E - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m(E - E_n) < \frac{1}{n}$. 令 $n \to \infty$, 得 $mE_0 = 0$. $E = (E - E_0) \cup E_0 = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \cup E_0 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. 对任意实数 a,$E[f > a] = E_0[f > a] \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n[f > a])$, 由 f 在 E_n 上连续，可知 $E_n[f > a]$ 可测，而 $m^*(E_0[f > a]) \leq m^*E_0 = 0$, 所以 $E_0[f > a]$ 也可测，从而 $E[f > a]$ 是可测的. 因此 f 是可测的. 因为 f 在 E_n 上有限，故在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 上有限，所以 $f(x)$a.e. 有限.

9. 设函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 且 $f_n(x) \leq g(x)$a.e. 于 E,$n = 1, 2, \cdots$. 试证 $f(x) \leq g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

证明 因为 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 则存在 $\{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}$, 使 $f_{n_i}(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛到 $f(x)$. 设 E_0 是 $f_{n_i}(x)$ 不收敛到 $f(x)$ 的点集. $E_n = E[f_n > g]$. 则 $mE_0 = 0, mE_n = 0.m(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} mE_n = 0$. 在 $E - \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ 上 $f_{n_i}(x) \leq g(x)$,$f_{n_i}(x)$ 收敛到 $f(x)$, 所以 $f(x) = \lim f_{n_i}(x) \leq g(x)$ 在 $E - \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ 上成立. 即 $f(x) \leq g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

10. 设在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 且 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ 几乎处处成立， $n = 1, 2, \cdots$, 则几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

证明 因为 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 则存在 $\{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}$, 使 $f_{n_i}(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛到 $f(x)$. 设 E_0 是 $f_{n_i}(x)$ 不收敛到 $f(x)$ 的点集. $E_n = E[f_n < f_{n+1}]$, 则 $mE_0 = 0, mE_n = 0$. 因此

$$m(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} mE_n = 0$$

在 $E - \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ 上， $f_{n_i}(x)$ 收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)$ 是单调的. 因此 $f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$. (单调序列的子列收敛，则序列本身收敛到同一极限). 即除去一个零集 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ 外， $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$, 就是 $f_n(x)$a.e. 收敛到 $f(x)$.

11. 设在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 而 $f_n(x) = g_n(x)$a.e. 成立， $n = 1, 2, \cdots$, 则有 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$.

证明 设 $E_n = E[f_n \neq g_n]$ 则 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mE_n = 0$. 对任意 $\sigma > 0$, $E[| f - g_n | \geq \sigma] \subset (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \cup E[| f - f_n | \geq \sigma]$. 所以

$$mE[| f - g_n | \geq \sigma] \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + mE[| f - f_n | \geq \sigma] = mE[| f - f_n | \geq \sigma].$$

因为 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, 所以 $0 \le \lim mE[| f-g_n | \ge \sigma] \le \lim mE[| f-f_n |] \ge \sigma = 0$ 即 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$.

12. 设 $mE < +\infty$, 证明：在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 的充要条件是，对于 $\{f_n\}$ 的任何子函数列 $\{f_{n_k}\}$, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子函数列 $\{f_{n_{k_j}}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x) = f(x)$,a.e. 于 E.

证明 必要性由黎斯定理立即可得. 下证充分性. 若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)$. 则存在 $\eta_0 > 0$, 使得数列 $\{mE[| f_n - f | \ge \eta_0]\}$ 不收敛于零，故存在正数 $\epsilon_0 > 0$, 以及子函数列 $\{f_{n_k}\}$, 使得

$$mE[| f_{n_k} - f | \ge \eta_0] > \epsilon_0 > 0. \tag{1}$$

但在子函数列 $\{f_{n_k}\}$ 中不存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子函数列. 事实上, 若有子函数列 $\{f_{n_{k_j}}\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 f, 因 $mE < +\infty$, 则由勒贝格定理，在 E 上 $f_{n_{k_j}} \Rightarrow f(x)$, 这与 (1) 式矛盾.

13. 设 $mE < \infty$, 几乎处处有限的可测函数列 $f_n(x)$ 和 $g_n(x), n = 1, 2, \cdots$, 分别依测度收敛于 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明：

(1)$f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$;

(2)$f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$;

(3)$\min\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \min\{f(x), g(x)\}; \max\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \max\{f(x), g(x)\}$.

证明 (1) 由于 $f(x)$a.e. 有限，所以 $mE[| f |= \infty] = 0$.

又 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E[| f | \ge n] = E[| f |= \infty]$, 且 $E[| f | \ge n] \supset E[| f | \ge n+1]$ 和 $E[| f | \ge 1] \subset E, mE[| f | \ge 1] \le mE < \infty$, 所以

$$mE[| f |= \infty] = \lim_{n\to\infty} mE[| f | \ge n] = 0.$$

同理

$$\lim_{n\to\infty} mE[| g | \ge n] = 0.$$

对任意 $\epsilon > 0, \sigma > 0$, 存在 $k, mE[| f | \ge k] < \frac{\epsilon}{5}$ 和 $mE[| g | \ge k] < \frac{\epsilon}{5}$ 同时成立.

令 $\sigma_0 = \min\left(\frac{\sigma}{2(k+1)}, 1\right)$, 由于 $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$, 存在 N, 使 $n > N$ 时， $mE[| g_n - g | \ge \sigma_0] < \frac{\epsilon}{5}, mE[| f_n - f | \ge \sigma_0] < \frac{\epsilon}{5}$ 同时成立，此时

$$E[| g_n | \ge k+1] \subset E[| g | \ge k] \cup E[| g_n - g | \ge 1] \subset E[| g | \ge k] \cup E[| g_n - g | \ge \sigma_0].$$

$$mE[| g_n | \ge k+1] \le mE[| g | \ge k] + mE[| g_n - g | \ge \sigma_0] < \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \frac{2\epsilon}{5}.$$

又

$$E\left[| g_n f_n - g_n f | \ge \frac{\sigma}{2}\right] \subset E[| g_n | \ge k+1] \cup E\left[| f_n - f | \ge \frac{\sigma}{2(k+1)}\right] \subset E[| g_n | \ge k+1] \cup E[| f_n - f | \ge \sigma_0].$$

所以

$$mE\left[| g_n f_n - g_n f | \ge \frac{\sigma}{2}\right] \le mE[| g_n | \ge k+1] + mE[| f_n - f | \ge \sigma_0] < \frac{2\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \frac{3\epsilon}{5}.$$

而

$$E\left[| f g_n - f g | \ge \frac{\sigma}{2}\right] \subset E[| f | \ge k+1] \cup E\left[| g_n - g | \ge \frac{\sigma}{2(k+1)}\right] \subset E[| f | \ge k] \cup E[| g_n - g | \ge \sigma_0].$$

所以

$$mE\left[| fg_n - fg |\geq \frac{\sigma}{2}\right] \leq mE[| f |\geq k] + mE[| g_n - g |\geq \sigma_0] < \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \frac{2\epsilon}{5}.$$

又

$$E[| g_nf_n - gf |\geq \sigma] \subset E\left[| g_nf_n - g_nf |\geq \frac{\sigma}{2}\right] \cup E\left[| fg_n - fg |\geq \frac{\sigma}{2}\right],$$

所以

$$mE[| g_nf_n - gf |\geq \sigma] \leq mE\left[| g_nf_n - g_nf |\geq \frac{\sigma}{2}\right] + mE\left[| fg_n - fg |\geq \frac{\sigma}{2}\right] < \frac{3\epsilon}{5} + \frac{2\epsilon}{5} = \epsilon.$$

即对任意 $\epsilon > 0$,$\sigma > 0$, 存在 N, 使 $n > N$ 时， $mE[| g_nf_n - gf |\geq \sigma] < \epsilon$, 所以 $g_nf_n \Rightarrow gf$.

(2)

$$E[| (f_n + g_n) - (f + g) |\geq \sigma] \subset E\left[| f_n - f |\geq \frac{\sigma}{2}\right] \cup E\left[| g_n - g |\geq \frac{\sigma}{2}\right]$$

所以

$$mE[| (f_n + g_n) - (f + g) |\geq \sigma] \leq mE\left[| f_n - f |\geq \frac{\sigma}{2}\right] + mE\left[| g_n - g |\geq \frac{\sigma}{2}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty} mE[| (f_n + g_n) - (f + g) |\geq \sigma] \leq \lim_{n\to\infty} mE\left[| f_n - f |\geq \frac{\sigma}{2}\right] + \lim_{n\to\infty} mE\left[| g_n - g |\geq \frac{\sigma}{2}\right].$$

即 $f_n + g_n \Rightarrow f + g$.

(3) 先证若 $f_n \Rightarrow f$, 则 $| f_n |\Rightarrow| f |$. 事实上,

$$E[| f_n - f |\geq \sigma] \supset E[|| f_n | - | f ||\geq \sigma].$$

所以 $\lim_{n\to\infty} mE[|| f_n | - | f ||\geq \sigma] \leq \lim_{n\to\infty} mE[| f_n - f |\geq \sigma] = 0$, 即 $| f_n |\Rightarrow| f |$.

再证若 $f_n \Rightarrow f$, 对任意 $a \neq 0, af_n \Rightarrow af$. 事实上，因

$$E[| af_n - af |\geq \sigma] = E\left[| f_n - f |\geq \frac{\sigma}{| a |}\right],$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} mE[| af_n - af |\geq \sigma] = \lim_{n\to\infty} mE\left[| f_n - f |\geq \frac{\sigma}{| a |}\right] = 0.$$

$$\min\{f_n(x), g_n(x)\} = \frac{f_n(x) + g_n(x) - | f_n(x) - g_n(x) |}{2}.$$

由 (2),

$$f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f + g, f_n(x) - g_n(x) \Rightarrow f - g.$$

因而

$$| f_n(x) - g_n(x) |\Rightarrow| f(x) - g(x) |,$$

再由 (2),

$$f_n(x) + g_n(x) - | f_n(x) - g_n(x) |\Rightarrow f(x) + g(x) - | f(x) - g(x) | .$$

所以

$$\frac{f_n(x) + g_n(x) - | f_n(x) - g_n(x) |}{2} \Rightarrow \frac{f(x) + g(x) - | f(x) - g(x) |}{2}.$$

即

$$\min\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \min\{f(x), g(x)\}.$$

同样由

$$\max\{f_n(x), g_n(x)\} = \frac{f_n(x) + g_n(x) + \mid f_n(x) - g_n(x) \mid}{2},$$

得

$$\max\{f_n(x), g_n(x)\} \Rightarrow \max\{f(x), g(x)\}.$$

第五章　积分论

1. 问对于 Lebesgue 意义下的上下积分而言，相应于 Darboux 定理的结论是否成立？

解　相应的 Darboux 定理应是：设 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，对 E 的任何可测分划 $D: E_1, E_2, \cdots, E_n$, 当 $\max\limits_{1\le i\le n} mE_i \to 0$ 时,

$$S(D,f) \to \overline{\int}_E f(x)dx, S(D,f) \to \underline{\int}_E f(x)dx.$$

此结论不一定成立.

例如考察 $[0,1]$ 区间上狄利克雷函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{是 } [0,1] \text{ 中的有理数}, \\ 0, & x\text{是 } [0,1] \text{ 中的无理数}. \end{cases}$$

对每个正整数 n, 作 $[0,1]$ 区间的分划 $D_n = \{E_i^n\}$, 其中 $E_i^n = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, 2, \cdots, n-1, E_n^n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. 则 $\max\limits_{1\le i\le n} mE_i^n = \frac{1}{n} \to 0 (n\to\infty)$. 但

$$S(D,f) = \sum_{i=1}^n \sup_{x\in E_i^n} mE_i^n = \sum_{i=1}^n 1\cdot\frac{1}{n} = 1.$$

另一方面，因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上勒贝格可积，故

$$\overline{\int}_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx = 0.$$

因此相应的 Darboux 定理不成立.

2. 设在 Cantor 集 P_0 上定义函数 $f(x) = 0$, 而在 P_0 的余集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间上定义为 $n (n = 1, 2, \cdots)$, 试证 $f(x)$ 可积分，并求出积分值.

证明　$f(x)$ 是非负可测函数，因而积分确定，只要证明积分有限即可. 设 E_n 是 P_0 的余集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间之并，则 $mE_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, 因此

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty nmE_n = \sum_{n=1}^\infty n\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n} = 3.$$

所以 $f(x)$ 可积，且积分值为 3.

3. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，　$e_n = E[|f| \ge n]$, 则

$$\lim_n n\cdot me_n = 0.$$

证明　由于 $f(x)$ 在 E 上可积，故为 E 上 a.e. 有限的可测函数，所以 $mE[|f| = \infty] = 0$. 另一方面，由 $e_n \supset e_{n+1}, me_1 \le mE < \infty$ 以及 $\bigcap\limits_{n=1}^\infty e_n = E[|f| = \infty]$, 得

$$\lim_n me_n = mE[|f| = \infty] = 0.$$

由于 $|f(x)|$ 可积，由积分的绝对连续性，对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $e\subset E$ 且 $me<\delta$ 时，

$$\int_e |f(x)|\,dx<\epsilon.$$

对此 $\delta>0$, 存在 N, 使当 $n>N$ 时， $me_n<\delta$, 故

$$n\cdot me_n\le\int_{e_n}|f(x)|\,dx<\epsilon.$$

即 $\lim\limits_n n\cdot me_n=0$.

4. 设 $mE<\infty, f(x)$ 为 E 上可测函数， $E_n=E[n-1\le f<n]$, 则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|n|\,mE_n<\infty$.

证明 先证必要性．若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $|f(x)|$ 在 E 上可积．

当 $n\ge1$ 时，在 E_n 上， $n-1\le|f(x)|=f(x)<n$.

当 $n\le0$ 时，在 E_n 上， $|n|\le|f|\le|n-1|=1-n$, 因此

$$\begin{aligned}\infty>\int_E|f(x)|\,dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|\,dx+\sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f|\,dx\ge\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)mE_n+\sum_{n=0}^{-\infty}|n|\,mE_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|n|\,mE_n+\sum_{n=0}^{-\infty}|n|\,mE_n-\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=\sum_{-\infty}^{\infty}|n|\,mE_n-\sum_{n=1}^{\infty}mE_n,\end{aligned}$$

因为 E_n 是两两不交的 E 的子集,

$$\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=m(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)\le mE<\infty,$$

因此 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|n|\,mE_n<\infty$.

再证充分性．若 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|n|\,mE_n$, 则

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|\,dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|\,dx+\sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f|\,dx\le\sum_{n=1}^{\infty}nmE_n+\sum_{n=0}^{-\infty}|n-1|\,mE_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|n|\,mE_n+\sum_{n=0}^{-\infty}|n|\,mE_n+\sum_{n=0}^{-\infty}mE_n\le\sum_{-\infty}^{\infty}|n|\,mE_n+mE<\infty.\end{aligned}$$

所以 $|f(x)|$ 可积，因而 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都可积， $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ 也可积．

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 反常积分存在 (可积), 证明： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积的充要条件为 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 R 反常积分存在 (可积) , 并且此时成立

$$\int_{[a,b]}f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 反常积分存在 (可积), 所以对任意的 $0<\epsilon<b-a, f(x)$ 在 $[a+\epsilon,b]$ 上 R 可积，因而 $|f(x)|$ 在 $[a+\epsilon,b]$ 上也 R 可积．于是由 §2 定理 4 得

$$(R)\int_{a+\epsilon}^b|f(x)|\,dx=\int_{[a+\epsilon,b]}|f(x)|\,dx.$$

在上式两边令 $\epsilon \to 0$, 则

$$(R)\int_a^b |f(x)|dx = \int_{[a,b]} |f(x)|dx.$$

因此， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积的充要条件为 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分存在，最后再由 §5 定理 7, 有

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f^+(x)dx - \int_{[a,b]} f^-(x)dx = (R)\int_a^b f^+(x)dx - (R)\int_a^b f^-(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

6. 设 $\{f_n\}$ 为 E 上非负可积函数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 0$, 则 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

证明 对任意 $\sigma > 0$, 由 f_n 非负可知

$$\sigma mE[|f_n| \geq \sigma] \leq \int_{E[|f_n|\geq\sigma]} f_n(x)dx \leq \int_E f_n dx.$$

因此

$$mE[|f_n| \geq \sigma] \leq \frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)dx,$$

$$\lim mE[|f_n| \geq \sigma] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)dx = 0.$$

即 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

7. 设 $mE < \infty$,$\{f_n\}$ 为 a.e. 有限可测函数列．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0$$

的充要条件是 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

证明 先证充分性．当 $f_n \Rightarrow 0$ 时,

$$E\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \sigma\right] \subset E[|f_n| \geq \sigma],$$

$$\lim mE\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \sigma\right] \leq \lim mE[|f_n| \geq \sigma] = 0.$$

即 $\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \Rightarrow 0$, 又 $0 \leq \frac{|f_n|}{1+|f_n|} < 1(n = 1,2,\cdots)$, $mE < \infty$. 用勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = \int_E 0dx = 0.$$

再证必要性．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0$, 由第 6 题可知 $\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \Rightarrow 0$. 又函数 $y = \frac{x}{1+x}$, 当 $x > -1$ 时严格增加，因此

$$E\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right] = E[|f_n| \geq \sigma],$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[|f_n| \geq \sigma] = \lim\limits_{n\to\infty} mE\left[\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\right] = 0$, 即 $f_n \Rightarrow 0$.

8. 设 $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}, 0 < x \leq 1$, 讨论 α 为何值时， $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上 L 可积函数或不可积函数.

解 当 $\alpha \geq 1$ 时,

$$\int_0^1 |f(x)|dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}|\sin\frac{1}{x}|dx \geq \int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{x}|\sin\frac{1}{x}|dx = \int_\pi^\infty |\frac{\sin y}{y}|dy = \infty,$$

因此当 $\alpha \geq 1$ 时, $f(x)L$ 不可积.

当 $\alpha < 1$ 时,在 $[0,1]$ 中 $\frac{1}{x^\alpha}$ 可积, $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{|x^\alpha|}$, 所以 $f(x)L$ 可积.

9. 设由 $[0,1]$ 中取出 n 个可测子集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, 假定 $[0,1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个,试证必有一集,它的测度大于或等于 q/n.

证明 设 $\varphi_i(x)$ 是 E_i 的特征函数,由于 $[0,1]$ 中任一点至少属于 q 个可测集,因此在 $[0,1]$ 上 $\sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(x) \geq q$. 因为 $mE_i = \int_{[0,1]} \varphi_i(x)dx$, 所以

$$\sum_{i=1}^n mE_i = \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)dx \geq \int_{[0,1]} qdx = q.$$

所以必有某 E_i, 使 $mE_i \geq \frac{q}{n}$.

10. 设 $mE \neq 0, f(x)$ 在 E 上可积, , 如果对于任何有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

则 $f(x) = 0$ a.e. 于 E.

证明 对任意 $\delta > 0$, 设 $\varphi(x)$ 是 $E[f > \delta]$ 的特征函数,则

$$\delta mE[f \geq \delta] \leq \int_{E[f\geq\delta]} f(x)dx = \int_E f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

所以 $mE[f \geq \delta] = 0$. 同样可证 $mE[f \leq -\delta] = 0$, 所以 $mE[|f| \geq \delta] = 0$. 又因

$$E[f \neq 0] = \bigcup_{n=1}^\infty E\left[|f| \geq \frac{1}{n}\right].$$

所以 $mE[f \neq 0] \leq \sum\limits_{n=1}^\infty mE\left[|f| \geq \frac{1}{n}\right] = 0$, 即 $f(x) = 0$ a.e. 于 E.

11. 证明:

$$\lim_n \int_{(0,\infty)} \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

证明 当 $t \in (0,1)$ 时,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(n > 2);$$

当 $t \in [1,\infty)$ 及 $n > 2$ 时,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(1+t+\frac{n-1}{2n}t^2+\cdots\right)t^{\frac{1}{n}}} < \frac{2n}{t^2(n-1)} < \frac{4}{t^2}.$$

令
$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t\in(0,1),\\ \dfrac{4}{t^2}, & t\in[1,\infty),\end{cases}$$
则
$$\int_{(0,\infty)}F(x)dx=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}+\int_1^\infty\frac{4dt}{t^2}=6,$$
因此 $F(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积，于是由勒贝格控制收敛定理，
$$\lim_n\int_{(0,\infty)}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=\int_{(0,\infty)}\lim_n\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}dt=\int_{(0,\infty)}\frac{dt}{e^t}=1.$$

12. 试从 $\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots, 0<x<1,$ 求证
$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

证明 在 $[0,1]$ 上， $x^n-x^{n+1}\geq 0,$ 由第五章 §5 定理 3 得
$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\sum_{n=0}^\infty\int_0^1(x^{2n}-x^{2n+1})dx=\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$
而 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$, 故 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$

13. 设 $f(x,t)$ 当 $|t-t_0|<\delta$ 时为 x 的在 $[a,b]$ 上的可积函数，又有常数 K, 使
$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leq K,\quad a\leq x\leq b,\quad |t-t_0|<\delta,$$
则
$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dt=\int_a^b f_t'(x,t)dx.$$

证明 任取一列 h_n, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ 且 $h_n\neq 0$. 由于
$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_a^b[f(x,t+h_n)-f(x,t)]dx,$$
而
$$\left|\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\right|=\left|\frac{f_t'(x,t+\theta h_n)\cdot h_n}{h_n}\right|=|f_t'(x,t+\theta h_n)|\leq K,$$
其中 $0<\theta<1, a\leq x\leq b, t_0-\delta<t+\theta h_n<t_0+\delta$. 故由勒贝格控制收敛定理得
$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dt=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}dx=\int_a^b f_t'(x,t)dx.$$

14. 求证
$$\int_0^1\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(p+n)^2}\quad(p>-1).$$

证明 因为

$$\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)x^p \ln\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+p}\ln\frac{1}{x},$$

而当 $x \in (0,1)$ 时， $x^{n+p}\ln\frac{1}{x} \geq 0$, 故

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{n+p}\ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}.$$

15. 设 $\{f_n\}$ 为 E 上可积函数列， $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$a.e. 于 E, 且

$$\int_E |f_n(x)|dx < K, K\text{为常数},$$

则 $f(x)$ 可积.

证明 由法都引理,

$$\int_E |f(x)|dx = \int_E \lim_{n\to\infty}|f_n(x)|dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx \leq K,$$

故 $|f(x)|$ 可积，所以 $f(x)$ 可积.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ 上可积分，则

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x+t) - f(x)|dx = 0.$$

证明 由第五章 §4 的例 1, 对任意 $\sigma > 0$, 存在 $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ 上连续函数 $\varphi(x)$, 使

$$\int_{a-\epsilon}^{b+\epsilon} |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\sigma}{3}.$$

又因 $\varphi(x)$ 在 $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$(不妨取 $\delta < \epsilon$), 使对任意 $x', x'' \in [a-\epsilon, b+\epsilon]$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\sigma}{3(b-a)}.$$

因此，当 $0 < t < \delta$ 时，对一切 $x \in [a,b]$, 恒有

$$|\varphi(x+t) - \varphi(t)| < \frac{\sigma}{3(b-a)},$$

于是

$$\int_a^b |f(x+t) - f(x)|dx \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx + \int_a^b |f(x+t) - \varphi(x+t)|dx + \int_a^b |\varphi(x+t) - \varphi(x)|dx$$
$$< \frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma}{3(b-a)}\cdot(b-a) = \sigma.$$

所以

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x+t) - f(x)|dx = 0.$$

17. 设 $f(x), f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上可积函数，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$a.e. 于 E, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx=\int_E |f(x)|dx,$$

试证，在任意可测子集 $e\subset E$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx=\int_e |f(x)|dx.$$

证明 由法都引理，

$$\int_e |f(x)|dx=\int_e \varliminf_{n\to\infty}|f_n(x)|dx\le \varliminf_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx.$$

下面证明

$$\int_e |f(x)|dx\ge \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx.$$

事实上，若

$$\int_e |f(x)|dx<\varlimsup_{n\to\infty}|f_n(x)|dx,$$

则有子列 $\{f_{n_i}(x)\}$, 使

$$\lim_{i\to\infty}\int_e |f_{n_i}(x)|dx=\varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx>\int_e |f(x)|dx,$$

因此，

$$\lim_{i\to\infty}\int_{E-e}|f_{n_i}(x)|dx=\lim_{i\to\infty}\int_E |f_{n_i}(x)|dx-\lim_{i\to\infty}\int_e |f_{n_i}(x)|dx<\int_E |f(x)|dx-\int_e |f(x)|dx=\int_{E-e}|f(x)|dx,$$

这与法都引理矛盾，所以

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx\ge\int_e |f(x)|dx\ge\varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dx=\int_e |f(x)|dx.$$

18. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积分，且一致连续，则

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

证明 由于 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积, 故 $|f(x)|$ 在 $(0,\infty)$ 上也可积. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$, 则存在 $\epsilon_0>0$ 及 $x_n\in(0,\infty)$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, 但 $|f(x_n)|\ge\epsilon_0$. 因 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致连续，则存在 $\delta>0$, 使对任意 $x',x''\in(0,\infty)$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时，便有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon_0}{2}$. 因此，当 $x\in(x_n-\delta,x_n+\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_n)|<\frac{\epsilon_0}{2}$. 故

$$|f(x)|\ge|f(x_n)|-\frac{\epsilon_0}{2}\ge\frac{\epsilon_0}{2}.$$

因为 $x_n\to\infty$, 因此必有子列 $\{x_{n_i}\}$, 使 $x_{n_i}<x_{n_{i+1}}$, 且 $|x_{n_{i+1}}-x_{n_i}|>2\delta, i=1,2,\cdots$. 令 $E_{n_i}=(x_{n_i}-\delta,x_{n_i}+\delta)$, 则 $\{E_{n_i}\}$ 互不相交，因此，

$$\int_{(0,\infty)}|f(x)|dx\ge\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{n_i}}|f(x)|dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_{n_i}}|f(x)|dx\ge\frac{\epsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{\infty}mE_{n_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\epsilon_0=\infty,$$

此与 $|f(x)|$ 在 $(0,\infty)$ 上可积矛盾．故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

19. 设 $f(x)$ 在 R^p 上可积， $g(y)$ 在 R^q 上可积，试证 $f(x)\cdot g(y)$ 在 $R^p\times R^q$ 上可积分.

证明　$f(x)$ 在 R^p 上可积，因此必是 R^p 上可测函数，把它看作 $R^p\times R^q$ 上的函数也是可测的．同理 $g(y)$ 也在 $R^p\times R^q$ 上可测，因而 $f(x)g(y)$ 在 $R^p\times R^q$ 上可测.

当 $f(x),g(y)$ 都是非负时，由 §6 定理 4, $f(x)g(y)$ 在 $R^p\times R^q$ 在上积分有意义，且

$$\iint_{R^p\times R^q} f(x)g(x)dxdy=\int_{R^p}dx\int_{R^q}f(x)g(y)dy=\int_{R^p}f(x)dx\cdot\int_{R^q}g(y)dy<\infty,$$

当 $f(x),g(x)$ 都是一般的可积函数时, 设 $f(x)=f^+(x)-f^-(x), g(y)=g^+(y)-g^-(y), f^+(x), f^-(x), g^+(y), g^-(y)$ 都是非负可积． $f(x)g(y)=f^+(x)g^+(y)+f^-(x)g^-(y)-f^-(x)g^+(y)-f^+(x)g^-(y)$ 每一项都可积，因此 $f(x)g(y)$ 也是可积的.

20. 在 $D:-1\geq x\geq 1,-1\geq y\geq 1$ 上定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 的两个累次积分存在且相等，但 $f(x,y)$ 在 D 上不可积分.

证明　当 x,y 中一个固定时， $f(x,y)$ 是另一个变量的连续奇函数，所以积分 $\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx$ 与 $\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy$ 都存在，并且积分值都为零，因此

$$\int_{-1}^1dy\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_{-1}^1dx\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=0.$$

但 $f(x,y)$ 在 D 上不可积，否则 $f(x,y)$ 也必在 $D_1: 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ 上可积，于是二次几分 $\int_0^1dy\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx$ 应存在．但这是不对的，因为

$$\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{1}{2y}-\frac{y}{2(y^2+1)}$$

在 [0,1] 上不可积．因此 $f(x,y)$ 在 D 上不可积.

21. 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上非负可测函数且 $f(x)g(x)$ 在 E 上可积．令 $E_y=E[g\geq y]$. 证明：

$$F(y)=\int_{E_y}f(x)dx$$

对一切 $y>0$ 都存在，且成立

$$\int_0^{+\infty}F(y)dy=\int_E f(x)g(x)dx.$$

证明　因 $f(x),g(x)$ 是 E 上非负可测函数, 所以对任意 $y>0, E_y$ 是可测集, 故 $F(y)=\int_{E_y}f(x)dx$ 存在 (可为 $+\infty$) 且 $F(y)\geq 0$. 又由富比尼定理,

$$\int_0^{+\infty}F(y)dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_{E_y}f(x)dx\right)dy=\int_0^{\infty}\left(\int_E\chi_{E_y}(x)f(x)dx\right)dy=\int_E f(x)\left(\int_0^{g(x)}dy\right)dx=\int_E f(x)g(x)dx.$$

第六章　微分与不定积分

1. 区间 (a,b) 上任何两个单调函数，若在一稠密集上相等，则它们有相同的连续点.

证明　设 $f(x),g(x)$ 为 (a,b) 上两个单调函数，E 是 (a,b) 中的稠密集, 在 E 上，$f(x)=g(x)$. 令 M 是 $f(x)$ 的连续点全体， N 是 $g(x)$ 的连续点全体.

任取 $x_0\in M$, 则 $f(x_0+0)=f(x_0)=f(x_0-0)$. 因 E 在 (a,b) 中稠密，故存在 $x_n\in E$, 使 $x_n\le x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 于是

$$f(x_0-0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_0-0).$$

同理可证 $f(x_0+0)=g(x_0+0)$, 所以 x_0 是 $g(x)$ 的连续点，即 $x_0\in E$, 因此 $M\subset N$. 同样可得 $N\subset M$, 所以 $M=N$, 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的连续点.

2. 设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 上一列有界变差函数列， $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$, 并且 $f(x)$ 是有限函数. 如果 $\bigvee\limits_a^b(f_n)<K,(n=1,2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 为有界变差函数.

证明　对于 $[a,b]$ 的任何分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$,

$$\sum_{i=1}^m|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\le\bigvee_a^b(f_n)<K,n=1,2,\cdots.$$

所以

$$\sum_{i=1}^m|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^m|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\le K.$$

因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，并且 $\bigvee\limits_a^b(f)\le K$.

3. 讨论函数 $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}(0\le x\le1;\alpha,\beta>0)$ 是否有界变差和绝对连续.

解　若 $\alpha\le\beta$, 在 $[0,1]$ 上取分点

$$x_0=0,x_k=\left[((n-1)-k)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^{-\frac{1}{\beta}},k=1,2,\cdots,n-1,x_n=1.$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|&=\sum_{k=1}^n\left|x_k^\alpha\sin\frac{1}{x_k^\beta}-x_{k-1}^\alpha\sin\frac{1}{x_{k-1}^\beta}\right|\\&\ge\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{((n-1)-k)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}+\left[\frac{1}{(n-k)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}\\&\ge\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{((n-1)-k)\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(n-k)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]\\&>\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-k)\pi}+\frac{1}{(n-k+1)\pi}\right]\\&>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(n-k+1)\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\infty$, 所以

$$\bigvee_0^1(f)=\sup\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\infty,$$

因此 $f(x)$ 不是 [0,1] 上有界变差函数，从而也不是绝对连续函数.

若 $\alpha>\beta>0$. 因为

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}},$$

所以

$$|f'(x)|\le\alpha x^{\alpha-1}+\beta x^{\alpha-\beta-1}.$$

由 $\alpha>\beta>0$ 可知， $\alpha-1>1,\alpha-\beta-1>-1$. 故 $|f'(x)|$ 在 [0,1] 上 R 可积，因此 L 可积，并且 $f'(x)$ 在 [0,1] 上处处存在且有限．由于

$$(L)\int_0^x f'(t)dt=\lim_{\delta\to0}(L)\int_{\delta}^x f'(t)dt=\lim_{\delta\to0}(R)\int_{\delta}^x f'(t)dt=\lim_{\delta\to0}\left[t^{\alpha}\sin\frac{1}{t^{\beta}}\right]_{\delta}^x=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}-0=f(x)-f(0).$$

所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt.$$

因此 $f(x)$ 在 [0,1] 上绝对连续.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，且 $f'(x)\ge0$a.e. 于 $[a,b]$, 则 $f(x)$ 为增函数.

证明 任取 $x_1,x_2\in[a,b],x_2>x_1$. 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，因此

$$f(x_1)=f(a)+\int_a^{x_1}f'(t)dt;$$

$$f(x_2)=f(a)+\int_a^{x_2}f'(t)dt.$$

于是

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f'(t)dt.$$

由于 $f'(x)\ge0$a.e. 于 $[a,b]$, 因此 $\int_{x_1}^{x_2}f'(t)dt\ge0$, 所以 $f(x_2)\ge f(x_1)$, 即 $f(x)$ 是增函数.

5. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，若存在 $M>0$, 使对任何 $\epsilon>0$ 都有

$$\bigvee_{a+\epsilon}^{b}(f)\le M,$$

则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数.

证明 $\forall x\in(a,b)$, 因

$$|f(x)-f(b)|\le\bigvee_x^b(f)\le M,$$

所以 $|f(x)|\le M+|f(b)|$, 对于 $[a,b]$ 的任何分划 T,

$$T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

则对应于分划 T 的变差

$$v = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(a)| + \sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$\leq |f(x_1)| + |f(a)| + \bigvee_{x_1}^{b}(f) \leq 2M + |f(b)| + |f(a)|,$$

因此

$$\bigvee_{a}^{b}(f) \leq 2M + |f(b)| + |f(a)| < \infty,$$

即 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

6. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一列绝对连续的增函数列. 若级数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明 对任意的 n, 因为 $f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数，所以

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

又因为每个 $f_n(x)$ 是增函数，故 $f_n'(x) \geq 0$,a.e. 于 $[a,b]$. 显然 $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的增函数，故 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积，且

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt.$$

由勒贝格逐项积分定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)dt.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 处处收敛，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n'(t)dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(b) - f_n(a)] < \infty.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积. 从而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt$$

为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

7. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上一有限函数，那么下列两件事等价：

(1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件,

(2)$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上某个有界可积函数的不定积分.

证明 有 (2) 推出 (1). 设

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

其中 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，设 $|g(x)|\le K, x\in[a,b]$. 对于 $[a,b]$ 中任意两点 x', x'', 不妨设 $x' > x''$, 有

$$|f(x')-f(x'')| = \left|\int_{x''}^{x'} g(t)dt\right| \le K|x'-x''|,$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件.

由 (1) 推出 (2). 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 因此

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

对任意的 $x,y\in[a,b]$, 有

$$\left|\int_y^x f'(t)dt\right| = |f(x)-f(y)| \le K|x-y|,$$

其中 K 为 Lipschitz 常数. 所以 $|f'(x)|\le K$,a.e. 于 $[a,b]$. 记

$$g(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{当}|f'(x)|\le K, \\ K, & \text{当}|f'(x)|>K, \end{cases}$$

则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界可积函数，且

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g'(t)dt.$$

8. 试证：如果用”确界式”定义 S 积分，则不与原来的积分等价.

证明 ”确界式”定义： $f(x), \alpha(x)$ 为 $[a,b]$ 上有限函数. 对 $[a,b]$ 的任何分划

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记 M_i 与 m_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界与下确界 $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$S(T,f,\alpha) = \sum_{i=1}^n M_i(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})),$$

$$s(T,f,\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})).$$

令

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \inf_T S(T,f,\alpha),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \sup_T s(T,f,\alpha),$$

若 $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$, 则称 $f(x)$ 关于 $\alpha(x)S$ 可积.

此”确界式”定义与”极限式”定义是不等价的. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right], \\ 1, & x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right],\\ 1, & x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).\end{cases}$$

对 $[-1,1]$ 作一分划 $T:-1=x_0<\cdots<x_{i-1}<-\frac{1}{2}<x_i<\cdots<x_{j-1}<\frac{1}{2}<x_j<\cdots<x_n=1$, 则

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]=f(\xi_i)-f(\xi_j)\\&=\begin{cases}1, & \xi_i>-\dfrac{1}{2},\xi_j>\dfrac{1}{2},\\ 0, & \xi_i>-\dfrac{1}{2},\xi_j<\dfrac{1}{2}\text{或}\xi_i<-\dfrac{1}{2},\xi_j>\dfrac{1}{2},\\ -1, & \xi_i<-\dfrac{1}{2},\xi_j<\dfrac{1}{2},\end{cases}\end{aligned}$$

于是 σ 的极限不存在，因此 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 中关于 $\alpha(x)$ 的 S 积分是不存在的.

但用”确界式”定义， $f(x)$ 是 S 可积的. 对任何分划 $T:-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, 若 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ 在同一区间 (x_{i-1},x_i) 中，则 $\alpha(x_0)=\alpha(x_1)=\cdots=\alpha(x_n)=0$. 故 $S(T,f,\alpha)=0,s(T,f,\alpha)=0$; 若 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ 不在同一区间， $-\frac{1}{2}\in[x_{i-1},x_i],\frac{1}{2}\in[x_{j-1},x_j]$, 则

$$S(T,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}M_k(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}))=1-1=0,$$

$$s(T,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}m_k(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1}))=0,$$

所以 $\overline{\int}_{-1}^{1}f(x)d\alpha(x)=\underline{\int}_{-1}^{1}f(x)d\alpha(x)$, 故 $f(x)$ 是 S 可积的.

8. 试证：如果改变增函数 $\alpha(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上不连续点的函数值 (仍成一增函数) 不影响由它确定的 $L-S$ 测度.

证明 先证对任何 $E\subset R^1$,

$$m_\alpha^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m_\alpha^*(a_i,b_i),\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\}.$$

由 α 是单调增函数可知， $\alpha(b_i)\geq\alpha(b_i-0),\alpha(a_i)\leq\alpha(a_i+0)$, 故

$$|I_i|=\alpha(b_i)-\alpha(a_i)\geq\alpha(b_i-0)-\alpha(a_i+0)=m_\alpha^*(a_i,b_i),$$

所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E,\quad \sum_{i=1}^{\infty}m_\alpha^*(a_i,b_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|,$$

于是

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m_\alpha^*(a_i,b_i)\right\}\leq\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\right\}=m_\alpha^*E,$$

对于任意的 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\subset E$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{\alpha}^*(a_i,b_i) \geq m_{\alpha}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right) \geq m_{\alpha}^* E,$$

因此

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m_{\alpha}^*(a_i,b_i), \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\} \geq m_{\alpha}^* E.$$

故等号成立.

改变 $\alpha(x)$ 不连续点的值得到新的单调函数 $\alpha'(x)$. 由于不连续点至多可数, 而连续点处处稠密, 故对任何 x, 必有 $\alpha(x-0)=\alpha'(x-0), \alpha(x+0)=\alpha'(x+0)$, 因此 $m_{\alpha}^*(a_i,b_i)=m_{\alpha'}^*(a_i,b_i)$. 对于任意的 $E\subset R^1$, 有

$$\begin{aligned}
m_{\alpha}^* E &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m_{\alpha}^*(a_i,b_i), \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha(b_i-0),\alpha(a_i+0)), \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha'(b_i-0),\alpha'(a_i+0)), \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m_{\alpha'}^*(a_i,b_i), \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E\right\} \\
&= m_{\alpha'}^* E.
\end{aligned}$$

由 $L-S$ 积分定义可知, $L-S$ 积分完全取决于由 α 引出的 $L-S$ 测度, 而 $L-S$ 测度又完全由 $L-S$ 外测度决定的, 因此改变增函数 $\alpha(x)$ 的不连续点的函数值, 不影响由它确定的 $L-S$ 积分.