第 28 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

参考答案

1. $v_{\perp}=v_0$，　$v_{\parallel}=2v_0\cot\theta$；　2.各边中点，　$\frac{1}{4}Ma^2$；　3. $\sqrt{\frac{k}{m}}$，　$\frac{ma_0}{k}$；

4. $n_0e^{-mgh/kT}$，　$p_0e^{-mgh/kT}$；　5. $\frac{1}{13}$，　$\frac{1}{12}$；　6. $\frac{mv_0\sin\phi}{qB}$，$\frac{2\pi mv_0\cos\phi}{qB}$；

7. $\frac{\mu_0IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$，　$\frac{\mu_0\pi r^2R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$；　8. $1.22\frac{\lambda}{d}$.　3.36×10^{-4}；

9. $\frac{D}{a}\lambda$，　$\sqrt{2}\frac{b}{a}\lambda$；　10. $\arctan\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，　$\sqrt{1-\beta^2+\beta^4}\,l_0$

11.解：由牛顿第二定律和角动量守恒，得

$$m\omega_0^2R_0=G\frac{M_0m}{R_0^2}\Rightarrow\quad\omega_0^2=G\frac{M_0}{R_0^3}\qquad(1)\qquad(3分)$$

$$m\omega^2R=G\frac{(M_0-\Delta M)m}{R^2}\Rightarrow\quad\omega^2=G\frac{(M_0-\Delta M)}{R^3}\quad(2)\qquad(2分)$$

$$m\omega R^2=m\omega_0R_0^2\qquad\Rightarrow\omega=\omega_0\frac{R_0^2}{R^2}\qquad(3)\qquad(3分)$$

将（3）式代入（2）式，得

$$\frac{\omega_0^2R_0^4}{R^4}=G\frac{M_0-\Delta M}{R^3}\qquad\Rightarrow R=\frac{\omega_0^2R_0^4}{G(M_0-\Delta M)}\quad(4)$$

将（1）式代入（4）式，得

$$R=\frac{GM_0R_0^4}{GR_0^3(M_0-\Delta M)}=\frac{R_0}{(1-\frac{\Delta M}{M_0})}$$

即得

$$R=R_0(1+\frac{\Delta M}{M_0})\qquad(5)\qquad(4分)$$

将（5）式代入（3）式，得

$$\omega=\frac{\omega_0R_0^2}{R_0^2\left(1+\frac{\Delta M}{M_0}\right)^2}=\omega_0\left(1+\frac{\Delta M}{M_0}\right)^{-2}$$

即得

$$\omega=-\omega_0\left(1-\frac{2\Delta M}{M_0}\right)\qquad(3分)$$

12. 解：（1）A 第一次朝下移动时，气缸内的气体压强增大，使 K_1 关闭，K_2 打开。A 到达 B 处时，由 $p_1 \times \frac{3}{2}L = p_0 \times 5L$ 得 $p_1 = \frac{10}{3}p_0$ (5分）

（2）A 从 B 处朝上拉时，C 上方气体体积增大，压强减小，K_2 即关闭。C 下方气体压强 p_1 不变，上方气体压强继续减小，直到 A 距 C 高为 h 时压强降到 p_0，由

$p_0 h = p_1 \times \frac{L}{2}$ 得 $h = \frac{5}{3}L < 4L$ (4分）

A 继续朝上拉动时，因 K_1 已打开，外部大气进入气缸内。

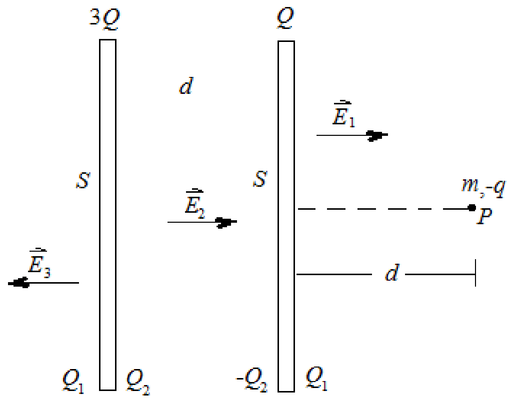
（3）将 A 第 N+1 次下行到 B 后 C 下方气体压强记为 p_{N+1}，则有

$$p_{N+1} \times \frac{3}{2}L = p_0 \times 4L + P_N \times L$$

当 C 下方气体压强达极大值 p_e 时，应有 $p_{N+1} = p_N = p_e$

即解得 $p_e = 8p_0$ (6分）

13.解：由高斯定理和导体板内 $\vec{E} = 0$，得电荷、电场分布如题解图所示，有



$$Q_1 + Q_2 = 3Q \quad Q_1 - Q_2 = Q \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 2Q \\ Q_2 = Q \end{cases}$$

P 的运动分为三个阶段。

第一阶段：从初位到右板

$$E_1 = \frac{2Q}{\varepsilon_0 S},\ a_1 = \frac{qE_1}{m} = \frac{2qQ}{\varepsilon_0 mS}$$

$$v_1 = \sqrt{2a_1 d} = \sqrt{\frac{4qQd}{\varepsilon_0 mS}},$$

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 mSd}{qQ}} \quad \text{(4分）}$$

第二阶段：板间运动

$$E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},\ a_2 = \frac{qE_2}{m} = \frac{qQ}{\varepsilon_0 mS} \qquad v_2^2 = v_1^2 + 2a_2 d = \frac{6qQd}{\varepsilon_0 mS}$$

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a_2} = (\sqrt{6} - 2)\sqrt{\frac{\varepsilon_0 mSd}{qQ}} \quad \text{(4分）}$$

第三阶段：从左板朝左到停止运动。

$$a_3 = a_1 = \frac{2qQ}{\varepsilon_0 mS},\quad t_3 = \frac{v_2}{a_3} = \sqrt{\frac{3\varepsilon_0 mSd}{2qQ}} \qquad d_{左} = \frac{v_2^2}{2a_3} = \frac{3}{2}d \quad \text{(4分）}$$

小结： $T = 2(t_1 + t_2 + t_3) == (3\sqrt{6} - 2)\sqrt{\frac{\varepsilon_0 mSd}{qQ}}$ (2分）

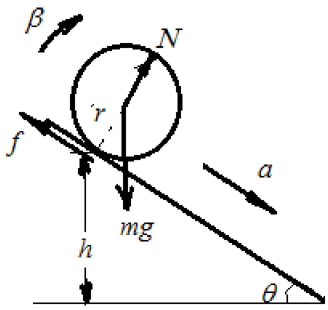
$S = 2(d_1 + d_2 + d_{左}) = 7d$ (1分）

14.解：小球质量记为 m。μ_1 取值范围：参考题解图 1，有

$N = mg\cos\theta,\quad mg\sin\theta - f = ma,\quad fr = I_C\beta$

与 $\quad a = \beta r, I_C = \frac{2}{5}mr^2$ 联立，可解得

$$f = \frac{2}{7}mg\sin\theta,\quad \mu_1 \ge \frac{f}{N} = \frac{2}{7}\tan\theta \quad (5分)$$



题解图1

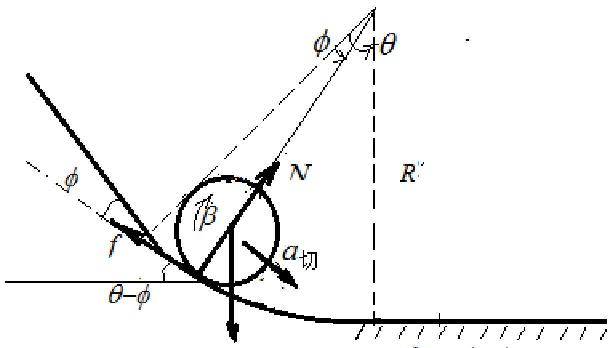
μ_2 取值范围：参考题解图 2，有

$\mathrm{N} = mg\cos(\theta-\phi) + m\frac{v^2}{R-r}$ 。

$mg\sin(\theta-\phi) - f = ma_{切}$

$fr = I_C\beta, \beta = \frac{a_{切}}{r}$

$$mg\{h + (R-r)[\cos(\theta-\phi) - \cos\theta]\} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2\Big|_{\omega = v/r} = \frac{7}{10}mv^2$$



题解图2

解得 $\quad f = \frac{2}{7}mg\sin(\theta-\phi)$

$$N = \frac{1}{7}mg\left[\frac{10h}{R-r} + 17\cos(\theta-\phi) - 10\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \mu_2 \ge \frac{f}{N} = 2\sin(\theta-\phi)\Bigg/\left[\frac{10h}{R-r} + 17\cos(\theta-\phi) - 10\cos\theta\right] \qquad (8分)$$

等式右边最大值出现在 $\phi = 0$ 处，故取

$$\Rightarrow \mu_2 \ge 2\sin\theta\Bigg/\left(\frac{10h}{R-r} + 7\cos\theta\right)$$

μ_3 取值范围：到达水平地面，摩擦力消失，继续匀速纯滚，故

$\mu_3 \ge 0$，即 μ_3 可取任意（正的）值（包括零） （2 分）

15.解：

（1）$U_{AB}(0^-)=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\varepsilon$，$I_1(0^-)=I_2(0^-)=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2}$，$Q(0^-)=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}C\varepsilon$ （3分）

（2）在$t=0^-$到 $t=0^+$的无穷短的$\mathrm{d}t$时间内，电容器上方极板电量Q可能会变化，此种变化必定通过有限电流 I_C实现，增量必为无穷小量。无穷小增量$\mathrm{d}Q$，使

$$U_{AB}(0^+)=U_{AB}(0^-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\varepsilon$$

成立，便得 $I_1(0^+)=\left[\varepsilon-U_{AB}(0^+)\right]\big/R_1=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2}=I_1(0^-)$；

$$I_2(0^+)=U_{AB}(0^+)\big/R_2=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=I_2(0^-)；$$

$$I_3(0^+)=U_{AB}(0^+)\big/R_3=\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)}\varepsilon$$

$$I_C(0^+)=I_1(0^+)-I_2(0^+)-I_3(0^+)=-I_3(0^+)=-\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)}\varepsilon$$

因 $\mathrm{d}Q=I_C(0^+)\mathrm{d}t=-\dfrac{R_2}{R_3(R_1+R_2)}\varepsilon\mathrm{d}t<0$，且为无穷小量，故

$$Q(0^+)=Q(0^-)+\mathrm{d}Q=Q(0^-)=-\frac{R_2}{R_1+R_2}C\varepsilon \qquad （6分）$$

可见在$t=0^-$到 $t=0^+$的无穷短的时间内， $I_C(0^+)$与图示方向相反，成为新增的 $I_3(0^+)$电流。

（3）由$\varepsilon=I_1R_1+I_2R_2$， $I_1=I_2+I_3+I_C\Rightarrow\varepsilon=I_2(R_1+R_2)+I_3R_1+I_CR_1$

$$I_3R_3=I_2R_2\Rightarrow\varepsilon=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}I_2+I_CR_1$$

$$I_2R_2=\frac{Q}{C}\Rightarrow\varepsilon=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{CR_2R_3}Q+I_CR_1$$

$$I_C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\varepsilon=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{CR_2R_3}Q+R_1\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

得 $$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-(AQ-B)\begin{cases}A=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{CR_1R_2R_3}\\ B=\varepsilon\big/R_1\end{cases}$$

$Q(t)$的求解：

$$\int_{Q(0^+)}^{Q(t)}\frac{\mathrm{d}Q}{AQ-B}=\int_{0^+}^{t}-\mathrm{d}t\Rightarrow\frac{1}{A}\ln\frac{AQ(t)-B}{AQ(0^+)-B}=-t$$

得 $$Q(t)=\left[Q(0^+)-\frac{B}{A}\right]e^{-At}+\frac{B}{A}$$

$$\Rightarrow Q(t)=\frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}C\varepsilon\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-At}+R_3\right)$$

$I_2(t)$、$I_3(t)$ 的求解：

$$I_2=\frac{Q}{CR_2}\Rightarrow I_2(t)=\frac{\varepsilon}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-At}+R_3\right)$$

$$I_3=\frac{R_2}{R_3}I_2\Rightarrow I_3(t)=\frac{R_2\varepsilon}{R_3(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-At}+R_3\right)$$

$I_C(t)$、$I_1(t)$ 的求解：

$$I_C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\Rightarrow I_C(t)=\frac{-R_2\varepsilon}{R_3(R_1+R_2)}e^{-At}$$

$$I_1=I_2+I_3+I_C\Rightarrow I_1(t)=\frac{\varepsilon}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\left((R_2+R_3)-\frac{R_2^2}{R_1+R_2}e^{-At}\right)\qquad(11分)$$

16.解（1）引入由 x 轴出发沿逆时针方向旋转角 ϕ，$2\pi\geq\phi\geq0$。

基本公式：$x_C=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$，$y_C=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$

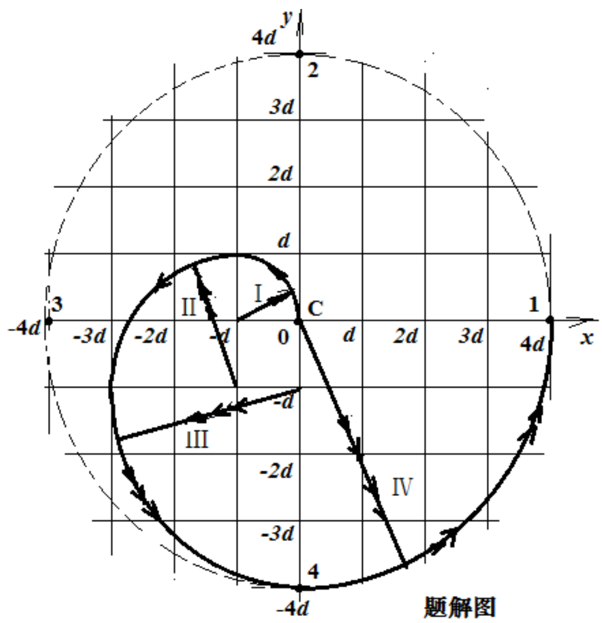
第Ⅰ阶段：$\frac{\pi}{2}>\phi\geq0$

$$x_1=4d\cos\phi, x_2=0, x_3-4d, x_4=0$$

$$y_1=4d\sin\phi, y_2=4d, y_3=0, y_4=-4d$$

$$x_C=d\cos\phi-d, y_C=d\sin\phi\Rightarrow(x_C+d)^2+y_C^2=d^2\qquad(2分)$$

轨迹：如图解图曲线段Ⅰ所示，为圆心（$-d$，0），半径 d 的四分之一圆弧。



题解图

第Ⅱ阶段：$\pi>\phi\geq\frac{\pi}{2}$

$$x_1=x_2=4d\cos\phi, x_3=-4d, x_4=0$$

$$y_1=y_2=4d\sin\phi, y_3=0, y_4=-4d$$

$$x_C=2d\cos\phi-d, y_C=2d\sin\phi-d$$

$$\Rightarrow(x_C+d)^2+(y_C+d)^2=(2d)^2\quad(2分)$$，

轨迹：如题解图曲线段Ⅱ所示，为圆心（$-d$，$-d$），半径 $2d$ 的四分之一圆弧。

第Ⅲ阶段：$\frac{3\pi}{2}>\phi\geq\pi$

$$x_1=x_2=x_3=4d\cos\phi, x_4=0$$

$$y_1=y_2=y_3=4d\sin\phi, y_4=-4d$$

$$x_C=3d\cos\phi, y_C=3d\sin\phi-d\Rightarrow x_C^2+(y_C+d)^2=(3d)^2\quad(2分)，$$

轨迹：如题解图曲线段Ⅲ所示，为圆心（0，$-d$），半径 $3d$ 的四分之一圆弧。

第Ⅳ阶段：$2\pi\geq\phi\geq\frac{3\pi}{2}$

$$x_1=x_2=x_3=x_4=4d\cos\phi，\quad y_1=y_2=y_3=y_4=4d\sin\phi$$

$$x_C=4d\cos\phi, y_C=4d\sin\phi\Rightarrow x_C^2+y_c^2=(4d)^2\quad(1分)，$$

轨迹：如题解图曲线段Ⅳ所示，为圆心（0，0），半径 $4d$ 的四分之一圆弧。

(2)推力 $\vec{F}$ 和摩擦力 $\vec{f}$，分别与木块 1 无穷小位移同方向和反方向。第 I 阶段中通过题解图可知，质心无穷小位移方向与木块 1 无穷小位移方向始终相同。第 II 、III、IV阶段中也是如此。全过程中合外力对质心所作元功便为

$$(\vec{F}+\vec{f})\cdot \mathrm{d}\vec{l}_C=(F-f)\mathrm{d}l_C$$

由质心动能定理 $W_{合外力}=\Delta E_{KC}$，考虑到全过程应有 $\Delta E_{KC}=0$

即得

$$(F-\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi d)+(F-2\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi\cdot 2d)+(F-3\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi\cdot 3d)$$

$$+(F-4\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi\cdot 4d)=0$$

可解得 $F=3\mu mg$ (5分)

（3）由 $F=3\mu mg$ 可知，在木块 3 被推动前，以环心为参考点，系统所受外力力矩之和大于零，系统角动量一直在增大。木块 3 被推动后，外力力矩之和为零，系统角动量达到最大值，直到木块 4 被推动前此值不变。木块 4 被推动后，外力力矩之和小于零，系统角动量开始减小。

木块 3 被推动时，有

$$(F-\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi d)+(F-2\mu mg)\frac{1}{4}(2\pi\cdot 2d)=\frac{1}{2}m_C v_C^2$$

$$F=3\mu mg,\quad m_C=4m\Rightarrow v_C=\sqrt{\pi\mu gd}$$

系统动量大小为 $P=P_C=m_C v_C=4m\sqrt{\pi\mu gd}$

对应 $L_{\max}=R_{环}P=4dP=16md\sqrt{\pi\mu gd}$ (4分)

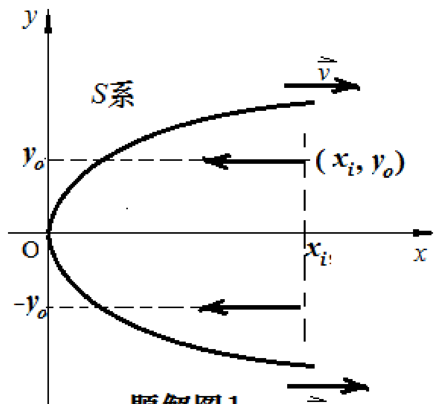
木块 3 被推动时，质心动量值达最大，为 $P_{C,\max}=4m\sqrt{\pi\mu gd}$

木块 3 被推动后，虽然此值不变，但参考题解图可知，木块 1、2、3 一起靠近木块 4 的过程中，$\vec{r}_C$ 的方向逐渐与 $\vec{P}_C$ 垂直，r_C 大小逐渐增到 $4d$ 值。因此，质心相对环心角动量的最大值出现在木块 4 被碰撞时刻，即有

$$L_{C,\max}=4d\cdot P_{C,\max}=16md\sqrt{\pi\mu gd}\qquad (4分)$$

以后，P_C 减小，L_C 也随之减小。

17.解：（1）直接在 S 系中运用费马原理求解本题。S 系中 $t=0$ 时刻，，取一个位于 $x_i>0$ 的波阵面，它在 o-xy 平面上表现为题解图中的一段虚直线，其上任意一点的 y 坐标统记为 y_0。

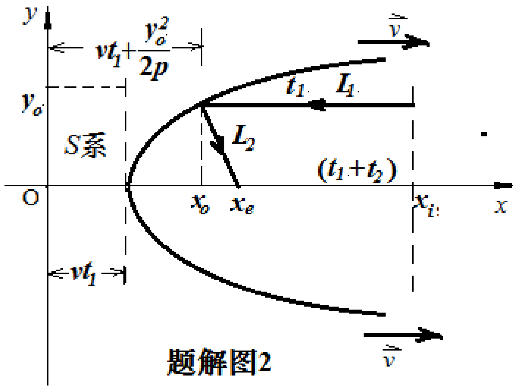


题解图1

如题解图 2 所示，设 (x_i, y_0) 点朝左的光线经光程 L_1，于 t_1 时刻遇投影抛物线，交于 $(x_0=vt_1+\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ 点。反射光线经光程 L_2，于 t_1+t_2 时刻与 x 轴交于 $(x_e,0)$ 点。(注意，t_1+t_2 时刻题解图 2 所画 t_1 时刻的投影抛物线在 S 系中的位置又将右移 vt_2 距离。）总光程便为

$$L=L_1+L_2,\qquad \begin{cases}L_1=x_i-x_0\\ L_1=ct_1\end{cases},\quad \begin{cases}L_2=\sqrt{y_0^2+(x_e-x_0)^2}\\ L_2=ct_2\end{cases},\quad x_0=\frac{y_0^2}{2p}+vt_1\quad (6分)$$

为需要，将t_1、x_0、t_2、L均表述成x_i、y_0、x_e的函数。



题解图2

$t_1 \sim x_i$，y_0：

$$ct_1 = x_i - x_0 = x_i - \left(\frac{y_0^2}{2p} + vt_1\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{c+v}(x_i - \frac{y_0^2}{2p})$$

$x_0 \sim x_i$，y_0：

$$x_0 = \frac{y_0^2}{2p} + vt_1 \Rightarrow x_0 = \frac{\beta}{1+\beta}x_i + \frac{1}{1+\beta}\frac{y_0^2}{2p}$$

$t_2 \sim x_i$，y_0, x_e：

$$ct_2 = L_2 = \sqrt{y_0^2 + (x_e - x_0)^2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{c}\sqrt{y_0^2 + \left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2}$$

$L \sim x_i$，y_0, x_e：

$$L = c(t_1 + t_2) \Rightarrow L = \frac{1}{1+\beta}(x_i - \frac{y_0^2}{2p}) + \sqrt{y_0^2 + \left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2}$$

据费马原理，若对于给定的x_i，任意的y_0点都能得到同一个x_e，使得$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y_0} = 0$。则表明真实的反射光束中每一条光线均过 x 轴上的x_e点，即反射光束成像于x_e点。

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y_0} = 0 \Rightarrow x_e$点的确定：

$$0 = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y_0} = -\frac{1}{1+\beta}\frac{y_0}{p} + \frac{1}{2}\frac{2y_0 + 2\left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]\left(-\frac{1}{1+\beta}\frac{y_0}{p}\right)}{\sqrt{y_0^2 + \left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+\beta}\frac{1}{p}\right)^2 \left\{y_0^2 + \left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2\right\} = \left\{1 - \frac{1}{1+\beta}\frac{1}{p}\left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]\right\}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^2 \frac{1}{p^2}y_0^2 + \left(\frac{1}{1+\beta}\frac{1}{p}\right)^2\left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2$$

$$= 1 - \frac{2}{1+\beta}\frac{1}{p}\left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right] + \left(\frac{1}{1+\beta}\frac{1}{p}\right)^2\left[x_e - \frac{1}{1+\beta}(\beta x_i + \frac{y_0^2}{2p})\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^2 \frac{1}{p^2}y_0^2 = 1 - \frac{2}{1+\beta}\frac{1}{p}x_e + \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^2 \frac{2}{p}\beta x_i + \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^2 \frac{1}{p^2}y_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+\beta}\frac{1}{p}x_e = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^2 \frac{2}{p}\beta x_i + 1$$

即得反射光束成像点坐标为 $\Rightarrow x_e = \dfrac{\beta}{1+\beta}x_i + \dfrac{1+\beta}{2}p$ x_i 大，t_1 也大，使 x_e 也大。

f 的计算：因 $f = x_e - vt,\quad t = t_1 + t_2$ 与 y_0 取值无关，故取 $y_0 = 0$ 来计算。此时有

$$x_i = (c+v)t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_i}{c+v}, \qquad ct_2 = x_e - vt_1 \Rightarrow t_2 = \frac{x_e}{c} - \beta t_1$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{x_e}{c} + (1-\beta)t_1 = \frac{x_e}{c} + \frac{1-\beta}{c+v}x_i$$

$$\Rightarrow f = x_e - v(t_1+t_2) = x_e - \beta x_e - \frac{v(1-\beta)}{c+v}x_i = (1-\beta)x_e - \frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}x_i = (1-\beta)(x_e - \frac{\beta}{1+\beta}x_i)$$

将前面已得的 x_e 表达式代入，即得 $f = \dfrac{1-\beta^2}{2}p$

反之，x_e 也可表述成 $x_e = f + v(t_1+t_2) = \dfrac{1-\beta^2}{2}p + vt$

结论：反射光束在 x 轴上成一点像，对应的 f 值如上式所示。 （14 分）

（2）相对论知识结合静态抛物线光学聚焦知识求解本题：

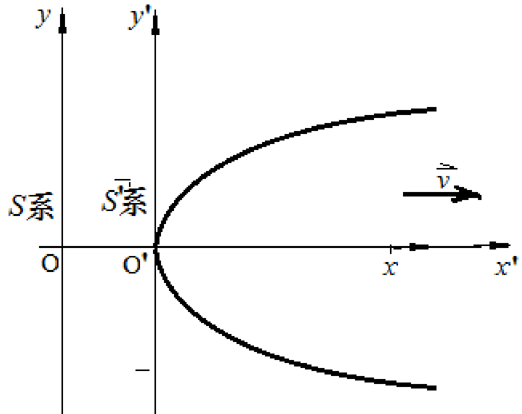
如题解图 3 所示，设置相对旋转曲面静止的惯性参考系 S'，曲面顶点取为坐标原点 O'，且令 O'、O 重合时，$t = t' = 0$。在 S 系中的投影抛物线方程

$$y^2 = 2p(x - vt)$$

经洛伦兹变换

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = y \\ x - vt = \sqrt{1-\beta^2}\,x' \end{cases}$$



题解图3

可得在 S'系中的静态曲线方程为 $y'^2 = 2p_0 x' \qquad p_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,p$

于是，S 系中投影抛物线方程可改成

$$y^2 = 2\frac{p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}x - \frac{2p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}vt \qquad (3分)$$

S' 系中静态旋转曲面即为静态旋转抛物面，平行光束经表面反射成像于焦点（$x' = \dfrac{p_0}{2}, y' = 0$）处。S 系观察到的必定也是一个点像，其位置可由洛伦兹变换得到

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = \sqrt{1-\beta^2}\,x' + vt = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{2}p_0 + vt \end{cases}$$

确定为 $\left(x = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{2}p_0 + vt, y = 0\right)$ 或 $\left(x = \dfrac{1-\beta^2}{2}p + vt, y = 0\right)$ （3 分）

此结果与（1）所得一致。