第32届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

参考答案

2015.12.

1. $\dfrac{2}{3}\omega a$，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\omega a$。

2. $\sqrt{\dfrac{g}{L}}l$，$\lambda\dfrac{g}{L}(L-2l)l$。

3. $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}\sqrt{Rg}$，$\dfrac{19}{10\sqrt{3}}Mg$。

4. $\dfrac{p_A-p_B}{4\eta L}\left(R^2-r^2\right)$，$8\eta L/\pi R^4$。

5. $\dfrac{m}{2\pi kT}e^{-m\left(v_x^2+v_y^2\right)/2kT}$，$2\pi v\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)e^{-mv^2/2kT}$。

6. $I_1=I_2+I_3$，$-I_2R_2+I_3R_3+\varepsilon_2-\varepsilon_3$。

7. 0，$\dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$。

8.（2）和（3），$\oint_L\vec{E}\bullet d\vec{l}=-\iint_{S_L}\left(\vec{j}_m+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$（2）和$\oiint_S\vec{B}\bullet d\vec{s}=\iiint_{V_S}\rho_m dV$（3）。

9. $mr^*v^*=mbv_0$，$\dfrac{1}{2}mv^{*2}+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^*}=\dfrac{1}{2}mv_0^2$。

10. $(n+\dfrac{1}{6})d$，$(n+\dfrac{5}{6})d$。

解：因绳子只形成驻波，若取绳子在墙上的固定端为原点，则驻波各点的振幅$A(x)$为

$$A(x)=2A_0\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|、$$

式中λ为波长，有 $\lambda=2d$

设振动端与最接近的节点之间的距离为b，若改取该节点为坐标原点，则因振动端的振幅为A，利用上式可得

$$A_0=2A_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\right)\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}b=\begin{cases}\pi/6\\ \text{或}5\pi/6\end{cases}\Rightarrow b=\begin{cases}d/6\\ \text{或}5d/6\end{cases}$$

故绳长为

$$L=nd+b=\begin{cases}(n+\dfrac{1}{6})d\\ \text{或}(n+\dfrac{5}{6})d\end{cases}$$

11.（15 分）

解：肥皂膜反射光相干叠加获最大增强的条件是

$$\text{光程差}\delta = 2nh + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \Rightarrow k = \frac{2nh}{\lambda} + \frac{1}{2} \qquad （4 分）$$

其中 $n = 1.35$，$h = 0.550\mu m$，再将 $4000\overset{o}{\mathrm{A}}$、$7000\overset{o}{\mathrm{A}}$ 代入，分别计算得 $k = 4.2$、$k = 2.6$。据此可知得到增强的光波长分别为

$$\Rightarrow \lambda_1 = \left.\frac{2nh}{k_1 - \frac{1}{2}}\right|_{k_1=4} = 424nm，\Rightarrow \lambda_2 = \left.\frac{2nh}{k_2 - \frac{1}{2}}\right|_{k_2=3} = 594nm \qquad （4 分）$$

反射光干涉相消的条件是

$$\text{光程差}\delta = 2nh + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow k = \frac{2nh}{\lambda} \qquad （4 分）$$

得 $4000\overset{o}{\mathrm{A}}$ 对应 $k = 3.7$、$7000\overset{o}{\mathrm{A}}$ 对应 $k = 2.1$

反射光干涉相消的光波波长为

$$\lambda = \left.\frac{2nh}{k}\right|_{k=3} = 495nm \qquad （3 分）$$

12.（15 分）

解：（1）$t = 0$ 合上电键 K 后，电容充电的暂态过程方程为

$$iR + \frac{Q}{C} = \varepsilon \qquad i = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CR} = \frac{\varepsilon}{R} \qquad \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{T} = \frac{C\varepsilon}{T}$$

$t = 0$ 到 $t = T$ 有

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{t}{T} \qquad \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{T} = \frac{C\varepsilon_0 t}{T^2} \qquad t = 0 \text{时} Q = 0$$

解得该时间段内有

$$Q(t) = C\varepsilon_0\left(\frac{t}{T} - 1\right) + C\varepsilon_0 e^{-t/T}$$

得 $$Q_1 = C\varepsilon_0 / e \qquad （6 分）$$

（2）$t = T$ 到 $t = 2T$ 时间段内，因初始条件改取为 $t = T$ 时 $Q = Q_1$，故改取时间参量 $t' = t - T$

则（1）问解答中最后的微分方程改述为

$$\frac{dQ}{dt'} + \frac{Q}{T} = \frac{C\varepsilon_0 t'}{T^2} \qquad t' = 0 \text{时} Q = \frac{C\varepsilon_0}{e}$$

解得该时间段内有

$$Q(t')=C\varepsilon_0\left(\frac{t'}{T}-1\right)+C\varepsilon_0\left(e^{-1}+1\right)e^{-t'/T}$$

取 $t'=T$，即得 $$Q_2=C\varepsilon_0\frac{e^{-1}+1}{e}$$ （5 分）

（3）将上述求解过程继续下去，不难得到 $t_N=NT$ 时有

$$Q_N=C\varepsilon_0\left\{\cdots\left\{\left[\left(e^{-1}+1\right)e^{-1}+1\right]e^{-1}+1\right\}e^{-1}+\cdots\right\}$$

$$=C\varepsilon_0\left(e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-N}\right)=C\varepsilon_0 e^{-1}\left(1+e^{-1}+\cdots+e^{-N+1}\right)$$

$$\Rightarrow Q_N=\frac{1-e^{-N}}{e-1}C\varepsilon_0$$

得 $$\lim_{N\to\infty}Q_N={C\varepsilon_0}\Big/{e-1}$$ （4 分）

13.（15 分）

解：本题中若两物块始终沿斜面向下运动，所受摩擦力恒向上，质心下滑加速度为定值，质心作匀加速直线运动，在质心系中两物块相对质心运动是连续的单一简谐运动。弹簧为原长的初态与弹簧第一次恢复到原长的末态，两物块相对速度方向相反，大小不变（同为 $1.50m/s$）。

可是解题开始时，不能预知两物块必定始终沿斜面下滑，考虑到这一因素，作答如下。

（补充说明：

m_1 下滑初速度 $v_{10}=0.50m/s$ 小于 m_2 下滑初速度 $v_{20}=2.0m/s$，开始时弹簧伸长，为 m_1、m_2 分别提供向下和向上拉力。这样的拉力会使 m_1 下滑加速度大于 m_2 下滑加速度，m_1 继续下滑，其下滑速度向 m_2 下滑速度靠近（注意，开始时拉力较小，m_2 下滑加速度必定为正，下滑速度也在增大）。随着弹簧继续伸长，m_1 下滑速度越来越接近 m_2 的下滑速度。当 m_1 下滑速度等于 m_2 下滑速度时，弹簧伸长量达最大值。既然此时 m_1 是下滑，m_2 也必定是下滑，故两者所受摩擦力均为向上。如果此时弹簧拉力早已大到使 m_2 加速度向上，那么以后运动过程中尽管弹簧长度要回缩，但也有可能使 m_2 运动速度从向下改变为向上，m_2 所受摩擦力也会反向。

下面的解答中发现弹簧最大伸长时，m_2 所受合力仍是向下，以后弹簧长度回缩过程中，m_2 加速度和速度也始终向下，所受摩擦力仍然向上。）

第一阶段：弹簧伸长 （10 分）

将弹簧拉力大小记为 f，则 m_1、m_2 沿斜面向下加速度（带正负号）分别为

$$a_1=g\sin\theta-\mu g\cos\theta+\frac{f}{m_1}$$

$$a_2=g\sin\theta-\mu g\cos\theta-\frac{f}{m_2}$$

m_1 相对 m_2 的向下加速度为

$$a_1 - a_2 = \frac{f}{m_1} + \frac{f}{m_2}，\quad f = kx，\quad x：\text{弹簧伸长量}$$

得
$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} = \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = -\frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$$

dt 时间内弹簧伸长量为 $\quad dx = (v_2 - v_1)dt$

引入
$$v^* = v_2 - v_1 = \frac{dx}{dt}$$

即有
$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = -\frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \omega = \sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} / s \simeq 2.12 / s \end{cases} \qquad x \sim t：\text{简谐振动}$$

利用初条件 $t = 0$ 时，$x_0 = 0$，$v_0^* = 1.50 m/s$，得

$$x = A\cos\omega t，\quad A = {v_0^*}\big/{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

（这一结果表明，弹簧伸长量最大时，$f = kA = 0.3\sqrt{2}N \simeq 0.424N$，$m_2$ 所受向下合力

$$m_2 g\sin\theta - \mu m_2 g\cos\theta - f \simeq 1.175N > 0$$

此时合力向下，a_2 仍是向下，故弹簧回缩时，m_2 所受合力仍向下，继续下行，摩擦力仍向上。）

第二阶段：弹簧回缩　（5 分）

过程中　$x \le A$，$f \le kA$

$$a_1 = g\sin\theta - \mu g\cos\theta + \frac{f}{m_1} > a_2$$

$$a_2 = g\sin\theta - \mu g\cos\theta - \frac{f}{m_2} \ge g\sin\theta - \mu g\cos\theta - \frac{kA}{m_2} \simeq 5.9 m/s^2$$

这表明 m_1、m_2 始终下行，摩擦力方向不变。此阶段动力学方程与第一阶段相同，弹簧相对原长的伸长量 x 随时间 t 的变化关系仍是简谐振动关系。当弹簧回复到原长时，$x = 0$，m_1 相对 m_2 的速度 $v_e^* = dx/dt$ 与第一阶段初态时相对速度 v_0^* 方向相反，大小相同，即为

$$v_e^* = -v_0^* = -1.50 m/s$$

$$\Rightarrow |v_e^*| = 1.50 m/s$$

14.（15 分）

解：（1）瓶上方内壁的水珠是瓶从 $t=27^oC$ 环境移入 $t_0=0^oC$ 的冰箱时，瓶内部分（饱和）水蒸气凝结而成。　　　　　　（3 分）

（2）瓶内水蒸气都是饱和水蒸气。为简化，将 $t_0=0^oC$ 时上方区域水珠全部等效移动到下方水区域内。室温 $t>0^oC$ 时水的密度为

$$\rho=\rho_0/1+\alpha t$$

列方程组

气：初态　$pV_{气}=\nu RT$，$V_{气}=h\pi r^2$，$T=300K$；ν 为未知量　　（1）

末态　$p_0V_{气0}=(\nu-\Delta\nu)RT_0$，$T_0=273K$；$V_{气0}$、$\Delta\nu$ 为未知量（2）

水：初态　$M=\rho V_{水}=\dfrac{\rho_0}{1+\alpha t}V_{水}$，$V_{水}=H\pi R^2$；$M$ 为未知量　　（3）

末态　$M_0=M+\Delta\nu\mu_{水}$；M_0 为未知量　　（4）

体积总和不变：$\dfrac{M_0}{\rho_0}+V_{气0}=V_{水}+V_{气}$　　（5）

由（1）、（2）式可得

$$p_0V_{气0}=\nu RT_0-\Delta\nu RT_0=pV_{气}\frac{T_0}{T}-\Delta\nu RT_0\Rightarrow\Delta\nu=\frac{pV_{气}}{RT}-\frac{p_0V_{气0}}{RT_0}\qquad（6）$$

由（3）、（4）、（6）式可得

$$M_0=\frac{\rho_0}{1+\alpha t}V_{水}+\frac{pV_{气}}{RT}\mu_{水}-\frac{p_0V_{气0}}{RT_0}\mu_{水}$$

代入（5）式可得

$$\frac{V_{水}}{1+\alpha t}+\frac{pV_{气}}{RT\rho_0}\mu_{水}+\left(1-\frac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}\right)V_{气0}=V_{水}+V_{气}$$

即解得

$$\begin{cases}V_{气0}=\left[\left(1-\dfrac{1}{1+\alpha t}\right)V_{水}+\left(1-\dfrac{p\mu_{水}}{RT\rho_0}\right)V_{气}\right]\Big/\left(1-\dfrac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}\right)\\ V_{水}=H\pi R^2,V_{气}=h\pi r^2\end{cases}\qquad（7）\quad（9 分）$$

（3）由所给数据可得

$$\frac{1}{1+\alpha t}=0.996,\quad\frac{p\mu_{水}}{RT\rho_0}=2.567\times10^{-5},\quad\frac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}=0.484\times10^{-5}$$

$$V_{水}=3h\pi(2r)^2=12h\pi r^2=12V_{气}$$

一起代入（7）式，可算得

$$V_{气0}=1.048V_{气}=\beta V_{气}\Rightarrow\beta=1.048\qquad（3 分）$$

15.（20 分）

解：（1）由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$

得 $$b^4x^2+a^4y^2=b^4x^2+a^4b^2-a^2b^2x^2=a^4b^2-b^2x^2(a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow b^4x^2+a^4y^2=b^2(a^4-c^2x^2)$$

$$\Rightarrow \rho=\left[b^2(a^4-c^2x^2)\right]^{\frac{3}{2}}\Big/a^4b^4$$

即 $$\rho=(a^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}\Big/a^4b \qquad \text{（4 分）}$$

再由 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

得 $$\tan\phi=-b^2x\big/a^2y$$

考虑到 取第 III 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$2\pi>\phi\geq\frac{3}{2}\pi \qquad \sin\phi<0$

取第 IV 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\frac{\pi}{2}>\phi\geq0 \qquad \sin\phi>0$

取第 I 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\pi>\phi\geq\frac{\pi}{2} \qquad \sin\phi>0$

取第 II 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\frac{3\pi}{2}>\phi\geq\pi \qquad \sin\phi<0$

故取

$$\sin\phi=b^2x\Big/\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}\begin{cases}>0 & \text{取第IV、I象限}\frac{1}{4}\text{椭圆时}x>0\\<0 & \text{取第II、III象限}\frac{1}{4}\text{椭圆时}x<0\end{cases}$$

或改述为

$$\sin\phi=bx\Big/\sqrt{a^4-c^2x^2} \qquad \text{（4 分）}$$

（2）初位置处，有

$$mv_0^2=\rho qE_0=b^2qE_0\big/a\Rightarrow v_0=b\sqrt{qE_0/ma} \qquad \text{（2 分）}$$

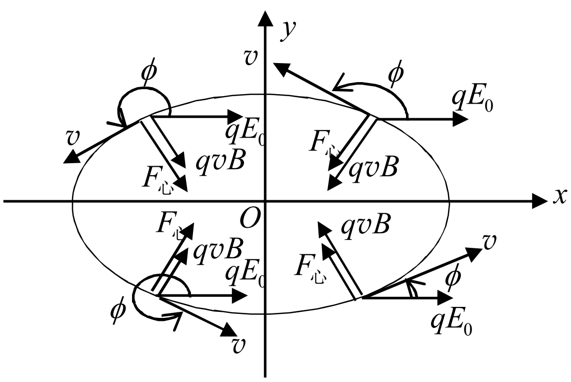
（3）参考题解图，有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+qE_0(a+x)$$

$$mv^2=mv_0^2+2qE_0(a+x)$$

$$=\frac{b^2qE_0}{a}+2qE_0(a+x)$$

$$=qE_0\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]$$



题解图

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_{心} = qvB - qE_0 \sin\phi$$

得

$$B = \frac{1}{v}\left(E_0 \sin\phi + \frac{mv^2}{q\rho}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{qE_0}{m}\left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x)\right]}}\left\{\frac{E_0 bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}} + \frac{a^4 bE_0\left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x)\right]}{(a^4 - c^2x^2)^{3/2}}\right\}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{mE_0}\, b}{\sqrt{q\left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x)\right]}\sqrt{a^4 - c^2x^2}}\left\{x + \frac{a^4\left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x)\right]}{a^4 - c^2x^2}\right\} \qquad （10 分）$$

16.（20 分）

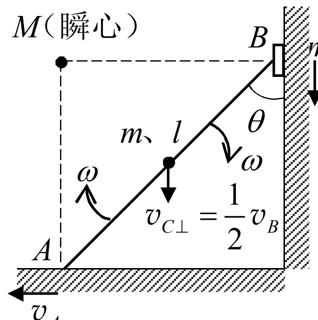
解：（1）下滑过程态及相应的参量如题解图 1 所示，有

$$v_B = \omega l \sin\theta \Rightarrow \omega = v_B / l\sin\theta$$

$$E_{K杆} = \frac{1}{2}I_M\omega^2，\ I_M = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$E_{K柱} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$E_K = E_{K杆} + E_{K柱} = \frac{1}{2}mv_B^2\left(1 + \frac{1}{3\sin^2\theta}\right)$$



题解图 1

$v_B \sim \theta$ 的确定：

$$mgl(1-\cos\theta) + mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2\left(1 + \frac{1}{3\sin^2\theta}\right)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 9gl\frac{\sin^2\theta(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta + 1}$$

$a_B \sim \theta$ 的确定：

$$2v_B a_B = \frac{\left[2\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta) + \sin^3\theta\right](3\sin^2\theta + 1) - \sin^2\theta(1-\cos\theta)6\sin\theta\cos\theta}{\left(3\sin^2\theta + 1\right)^2} \bullet \omega \bullet 9gl$$

$$= \frac{\left[2\cos\theta(1-\cos\theta) + \sin^2\theta\right](3\sin^2\theta + 1) - 6\sin^2\theta\cos\theta(1-\cos\theta)}{\left(3\sin^2\theta + 1\right)^2} \bullet 9gv_B$$

$$=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\bullet 9gv_B$$

$$\Rightarrow a_B=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\bullet\frac{9}{2}g$$

$N\sim\theta$ 的确定：

$$P_\perp=mv_B+mv_{C\perp}\Big|_{v_{C\perp}=\frac{1}{2}v_B}=\frac{3}{2}mv_B$$

$$2mg-N=\frac{dP_\perp}{dt}=\frac{3}{2}ma_B$$

$$\Rightarrow N=2mg-\frac{3}{2}ma_B=2mg-\frac{27}{4}mg\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}$$

$$=\frac{8\left(3\sin^2\theta+1\right)^2-27\bullet\left[2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)\right]}{4\bullet\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg$$

$$\Rightarrow N=\frac{29-9\sin^4\theta-54\cos\theta+33\cos^2\theta}{4\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg$$

$$\text{或}=\frac{62-42\sin^2\theta+9\sin^2\theta\cos^2\theta-54\cos\theta}{4\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg \qquad \text{（5 分）}$$

可算得 $\theta=45^o$ 时，$N=0.2027mg$ （1 分）

（2）杆落地前瞬间，相关运动学量为

B 端竖直向下速度 $v_{B0}=\dfrac{3}{2}\sqrt{gl}$

细杆中心点 C 的竖直向下速度 $v_{C0}=\dfrac{1}{2}v_{B0}$

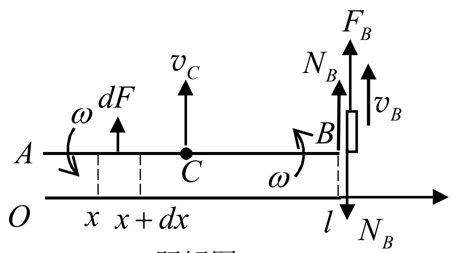
细杆绕 C 点旋转角速度 $\omega_0=v_{B0}/l$

细杆中与 A 端相距 x 处的竖直向下速度 $v_0(x)=\omega_0 x=\dfrac{x}{l}v_{B0}$

（2.1）碰后运动学量以及与碰撞相关的竖直方向作用力，已在题解图 2 中示出，其中桌面提供的碰撞力都用字符 F 标记，且有

$$F_B=fm=\alpha v_{B0}m$$

$$dF=fdm=\left[\alpha v_0(x)\right]\bullet\left(\frac{dx}{l}m\right)=\alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}xdx$$



题解图 2

下面将要列出的 5 个独立方程中含有 5 个独立未知量：

$$\alpha\Delta t\text{，}N_B\Delta t\text{，}v_B\text{，}v_C\text{，}\omega$$

小柱体的动量方程：

$$F_B\Delta t - N_B\Delta t = m\left(v_B + v_{B0}\right) \Rightarrow mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) - N_B\Delta t = m\left(v_B + v_{B0}\right)$$

杆的动量方程：

$$\left(\int_0^l dF\right)\Delta t + N_B\Delta t = m\left(v_C + v_{C0}\right)，\quad v_{C0} = \frac{1}{2}v_{B0}，\int_0^l dF = \alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}\int xdx = \frac{1}{2}\alpha v_{B0}m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) + N_B\Delta t = m\left(v_C + \frac{1}{2}v_{B0}\right)$$

杆的质心参考系中杆的定轴转动方程：

$$\left[\int_0^l dF\bullet(x-\frac{l}{2}) + N_B\bullet\frac{l}{2}\right]\Delta t = \left(I_C\beta\right)\Delta t = I_C\left(\omega+\omega_0\right)，\quad I_C = \frac{1}{12}ml^2$$

$$\int_0^l dF\bullet(x-\frac{l}{2}) = \int_0^l\left(\alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}xdx\right)\bullet(x-\frac{l}{2}) = \frac{1}{12}\alpha v_{B0}ml$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}mv_{B0}l\left(\alpha\Delta t\right) + \frac{l}{2}\left(N_B\Delta t\right) = \frac{1}{12}ml^2\left(\omega+\omega_0\right)$$

系统动能方程：

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{B0}^2 + \frac{1}{2}mv_{C0}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_0^2\bigg|_{I_C=\frac{1}{12}ml^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega^2 = \frac{2}{3}mv_{B0}^2$$

运动关联方程：

$$v_B = v_C + \omega\bullet\frac{l}{2}$$

小结：5个独立方程如下

$$mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) - N_B\Delta t = m\left(v_B + v_{B0}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) + N_B\Delta t = m\left(v_C + \frac{1}{2}v_{B0}\right) \tag{2}$$

$$\frac{1}{12}mv_{B0}l\left(\alpha\Delta t\right) + \frac{l}{2}\left(N_B\Delta t\right) = \frac{1}{12}ml^2\left(\omega+\omega_0\right) \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega^2 = \frac{2}{3}mv_{B0}^2 \tag{4}$$

$$v_B = v_C + \omega\bullet\frac{l}{2} \tag{5}$$

将（1）式所得 $N_B\Delta t = mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) - m\left(v_B + v_{B0}\right)$ （1）'

代入（2）、（3）式，再改写（4）、（5）式，得

$$\frac{3}{2}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) = v_C + v_B + \frac{3}{2}v_{B0} \tag{2'}$$

$$\frac{7}{6}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right) - \left(v_B + v_{B0}\right) = \frac{1}{6}l\left(\omega+\omega_0\right) \tag{3'}$$

$$v_B^2+v_C^2+\frac{1}{12}l^2\omega^2=\frac{4}{3}v_{B0}^2 \qquad （4）'$$

$$v_C=v_B-\frac{1}{2}\omega l \qquad （5）'$$

将（5）'式代入（2）' 、（4）'式，保留（3）'式，得

$$\frac{3}{2}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)=2v_B-\frac{1}{2}\omega l+\frac{3}{2}v_{B0} \qquad （2）''$$

$$\frac{7}{6}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)=v_B+v_{B0}+\frac{1}{6}l\left(\omega+\omega_0\right) \qquad （3）''$$

$$2v_B^2-\omega l v_B+\frac{1}{3}\omega^2 l^2=\frac{4}{3}v_{B0}^2 \qquad （4）''$$

合并（2）''、（3）''式，消去$\alpha\Delta t$，得

$$\frac{10}{21}v_B+\frac{1}{7}v_{B0}=\frac{10}{21}\omega l+\frac{1}{7}\omega_0 l \qquad （6）$$

将$v_{B0}=\omega_0 l$代入（6）式，得

$$v_B=\omega l \qquad （7）$$

将（7）式代入（4）''式，得

$$v_B=v_{B0} \qquad （8）$$

将（7）、（8）式代入（5）'式和（2）''式，得

$$v_C=\frac{1}{2}v_{B0} \qquad （9）$$

$$\alpha\Delta t=2 \qquad （10）$$

再将（8）式、（10）式代入（1）'式，得

$$N_B\Delta t=0 \qquad （11）$$

本问所求量的解便分别为

$$v_C=\frac{1}{2}v_{B0}=\frac{3}{4}\sqrt{gl}，\ \omega=v_B/l=v_{B0}/l=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}，\ \alpha\Delta t=2，\ N_B\Delta t=0$$ （10分）

（2.2）上问解答中已设碰后瞬间速度、角速度方向与碰前瞬间速度、角速度方向相反，推导结果所得

$$v_B=v_{B0}，\ v_C=\frac{1}{2}v_{B0}=v_{C0}，\ \omega=v_B/l=v_{B0}/l=\omega_0$$

又显示，碰后瞬间速度、角速度大小与碰前瞬间速度、角速度大小相同。这意味着碰后运动为碰前运动的反演，故为周期性运动，

碰前运动周期$T/2$，可由

$$dt=d\theta/\omega，\ \omega=v_B/l\sin\theta，\ v_B=3\sin\theta\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta+1}gl}$$

得
$$\frac{T}{2}=\int_{\theta_0}^{90^o}dt=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta_0}^{90^o}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta，\ \theta_0=1^o$$

$$\Rightarrow T=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{1^o}^{90^o}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta$$

数值积分，得

$$\int_{1^o}^{90^o}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta=7.82$$

即有 $$T=5.21\sqrt{\frac{l}{g}}$$ （4 分）

17.（20 分）

解：（1）s' 系中，A、B 碰前瞬间速度大小同为

$$u'_{ye}=\sqrt{2a_0l}=\frac{3}{5}c$$

质量同为

$$m'_e=m_0\Bigg/\sqrt{1-\frac{u'^2_{ye}}{c^2}}=\frac{5}{4}m_0$$

碰撞前后能量守恒，有

$$M'c^2=2m'_ec^2\Rightarrow M'=2m'_e$$

得 $$M'=\frac{5}{2}m_0$$ （2 分）

（2）s' 系中，t' 时刻 A、B 速度大小同记为 u'_y，s 系中对应的 t 时刻 A、B 沿 y 轴速度大小同为

$$u_y=\sqrt{1-\beta^2}u'_y\Bigg/\left(1-\frac{v}{c^2}u'_x\right)\Bigg|_{u'_x=0}=\sqrt{1-\beta^2}u'_y$$

且有 $$t=\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)\Bigg/\sqrt{1-\beta^2}$$

s 系中 A、B 加速度大小即为沿 y 轴方向加速度大小，有

$$a=\frac{du_y}{dt}=\sqrt{1-\beta^2}du'_y\Bigg/\frac{dt'+\frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}\Bigg|_{dx'=0}=\left(1-\beta^2\right)\frac{du'_y}{dt'}$$

即得 $$a=\left(1-\beta^2\right)a_0=\frac{16}{25}a_0$$

在 s' 系中大质点静止，故有

$$M_0=M'=\frac{5}{2}m_0$$

s 系中大质点速度即为沿 x 轴方向的速度 v，静质量 M_0 不变，（动）质量即为

$$M = M_0 \Big/ \sqrt{1-\beta^2}\text{，}\quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{4}{5}$$

得 $$M = \frac{25}{8} m_0 \qquad \text{（4 分）}$$

（3）s' 系中

$$F'_y = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2_y}{c^2}}}u'_y\right) = \frac{d}{du'_y}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2_y}{c^2}}}u'_y\right)\frac{du'_y}{dt'}$$

因 $du'_y \big/ dt' = a_0$，得

$$F'_y = m_0 a_0 \Big/ \left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}$$

s 系中 A 的速度平方值为

$$u^2 = u_y^2 + v^2\text{，}\quad u_y^2 = \left(1-\beta^2\right)u'^2_y$$

有 $$F_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{du_y}\left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)\frac{du_y}{dt}\text{，}\quad \frac{du_y}{dt} = a = \left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$= m_0\left[\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}+\frac{u_y^2}{c^2}\right)\Big/\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right]\left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$= \left(1-\beta^2\right)^2 m_0 a_0 \Big/ \left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

因 $$1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2} = 1-\frac{\left(1-\beta^2\right)u'^2_y}{c^2}-\beta^2 = \left(1-\beta^2\right)\left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)$$

得 $$F_y = \sqrt{1-\beta^2}\, m_0 a_0 \Big/ \left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}$$

即 $$F_y = \sqrt{1-\beta^2}\, F'_y \qquad \text{（4 分）}$$

（4）s 系中

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right) = m_0 v \frac{d}{du_y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)\frac{du_y}{dt}\text{，}\quad \frac{du_y}{dt} = \left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$=m_0 v\left[\frac{u_y}{c^2}\Big/\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right]\left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$=\left[m_0\frac{vu_y}{c^2}\Big/\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\left(1-\beta^2\right)a_0,\quad \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,m_0 a_0}{\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=F_y$$

$$=\frac{vu_y}{c^2}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right)F_y$$

即得

$$F_x=\frac{vu_y}{c^2}\frac{F_y}{1-\beta^2}\qquad（4 分）$$

（5）s' 系中 F_y' 作功 W' 等于 A 的能量增量，有

$$W'=m_e'c^2-m_0c^2=\frac{5}{4}m_0c^2-m_0c^2$$

$$\Rightarrow W'=\frac{1}{4}m_0c^2$$

s 系中 F_y 对 A 作功

$$W_y=\int_{-l}^{0}F_y dy,\quad F_y=\sqrt{1-\beta^2}F_y',\quad dy=dy'$$

$$\Rightarrow W_y=\sqrt{1-\beta^2}\int_{-l}^{0}F_y'dy'=\sqrt{1-\beta^2}W'$$

$$\Rightarrow W_y=\frac{1}{5}m_0c^2$$

s 系中 A 的能量增量为

$$\Delta E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u_{ye}^2+v^2}{c^2}}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad 1-\frac{u_{ye}^2+v^2}{c^2}=\left(1-\beta^2\right)\left(1-\frac{u_{ye}'^2}{c^2}\right)\Bigg|_{u_{ye}'=\frac{3}{5}c}$$

$$\Rightarrow \Delta E=\left(\frac{5}{4}\right)^2m_0c^2-\frac{5}{4}m_0c^2=\frac{5}{16}m_0c^2$$

此增量等于 F_y 对 A 作功 W_y 与 F_x 对 A 作功 W_x 之和，即有

$$\Delta E=W_y+W_x\Rightarrow W_x=\Delta E-W_y=\frac{5}{16}m_0c^2-\frac{1}{5}m_0c^2$$

$$\Rightarrow W_x=\frac{9}{80}m_0c^2\qquad（6 分）$$