一、（本题满分 9 分）有两箱同种类的零件，第一箱装 20 只，其中 10 只为一等品；第二箱装 15 只，其中 12 只为一等品. 今从两箱中任挑一箱，然后从该箱中依次不返回地取件两次, 每次任取零件一只, 记 $A_i=$ “第 i 次从箱中取到的零件是一等品”（$i=1,2$）. 求：（1）$P(A_1)$；（2）$P(A_2|A_1)$.

解：设 $H=$ “从第一箱中取零件”，则 $\overline{H}=$ “从第二箱中取零件”，且

$$P(H)=P(\overline{H})=\frac{1}{2}，\ P(A_1|H)=\frac{1}{2},P(A_1|\overline{H})=\frac{4}{5}$$

（1）根据全概公式，可知

$$P(A_1)=P(H)P(A_1|H)+P(\overline{H})P(A_1|\overline{H})=\frac{13}{20}=0.65$$ ---------4 分

（2）$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{20}{13}\left[P(H)P(A_1A_2|H)+P(\overline{H})P(A_1A_2|\overline{H})\right]$$

$$=\frac{20}{13}\left(\frac{1}{2}\times\frac{10}{20}\times\frac{9}{19}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{15}\times\frac{11}{14}\right)=\frac{1151}{1729}\approx 0.6657$$ ----5 分

二、（本题满分 5 分）设随机变量 X 都服从参数 λ 的指数分布，问 λ 为何值时，能使得概率 $P\{1<X\le 2\}$ 达到最大.

解： X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，则

$$P\{1<X\le 2\}(=\int_1^2 \lambda e^{-\lambda x}dx)=(1-e^{-2\lambda})-(1-e^{-\lambda})=e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}$$ --3 分

令 $f(\lambda)=P\{1<X<2\}$，则 $f'(\lambda)=2e^{-2\lambda}-e^{-\lambda}$，解得驻点 $\lambda=\ln 2$

根据问题的实际意义, 因为驻点唯一，所以 $\lambda=\ln 2=0.6931$

-----------2 分

三、（本题满分 8 分）设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：（1）X 的边际密度函数；（2）条件概率密度 $p_{Y|X}(y|x)$；

（3）判断 X 与 Y 是否互相独立.

解：（1）当 $x \le 0$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$；

当 $x>0$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x}>0$.

故 X 的边际密度函数 $p_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ --------------------3 分

（2）条件概率密度 $p_{Y|X}(y|x)$ 为:

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ ---------2 分

（3）Y 的边际密度函数 $p_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，因为 $p_{Y|X}(y|x)\neq p_Y(y)$，或者因为 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立 -----------------------3 分

四、（本题满分 11 分）设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases} 1, & (x,y)\in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中联合密度非零的区域为三角形区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<y<1, 0<x<2-2y\}$.

求：（1）$Cov(X,Y)$；　（2）随机变量 $Z=X+2Y$ 的概率密度函数 $p_Z(z)$.

解：（1）$EX=\iint\limits_D xp(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}xdy=\dfrac{2}{3}$ ---------------1 分

$$EY=\iint\limits_D yp(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{2-2y}ydx=(\int_0^2 dx\int_0^{1-x/2}ydy)=\frac{1}{3}$$ ---------1 分

$$E(XY)=\iint\limits_D xyp(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{2-2y}xydx=(\int_0^2 dx\int_0^{1-x/2}xydy)=\frac{1}{6}$$ -----1 分

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=-\dfrac{1}{18}$ ------2 分（只写对公式得 1 分）

（2）设 $Z=X+2Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z}p(x,y)dxdy.$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(\varnothing)=0$；当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P(\Omega)=1$； ---------2 分

当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{(z-x)/2}dy=(\int_0^{z/2}dy\int_0^{z-2y}dx)=\dfrac{z^2}{4}$ ---------2 分

(或利用几何概型, 面积比求解)

故 $p_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2} & 0\le z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ---------2 分

五、(本题满分 8 分) 设切割机切割所得金属棒的长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 10 根，算得样本均值 $\overline{X}=10.4$，样本方差 $S_{n-1}^2=0.029$. 在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，

(1) 是否可以认为切割机切出的金属棒长度的平均值 $\mu=10.5$？

(2) 是否可以认为切割机切出的金属棒长度的标准差 $\sigma=0.15$？

解：(1) 零假设为 $H_0:\mu=10.5$，备择假设为 $H_1:\mu\neq 10.5$

总体方差未知，故取 t 统计量为 $T=\frac{\overline{X}-10.5}{S_{n-1}}\sqrt{n}$，

算得观测值为 $\hat{T}=\frac{10.4-10.5}{\sqrt{0.029}}\sqrt{10}=-1.857$ ------2 分

显然，$|\hat{T}|<t_{0.975}(9)=2.262$，故不拒绝（或接受）零假设，即不能认为金属棒长度的平均值不是10.5厘米. ------2 分

(2) 零假设为 $H_0:\sigma^2=0.15^2$，备择假设为 $H_1:\sigma^2\neq 0.15^2$

取 χ^2 统计量为 $\chi^2=\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{0.15^2}$，算得观测值为 $\hat{\chi}^2=11.6$ ------2 分

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$ 和自由度 $n-1=9$，查得 ${\chi^2}_{0.025}(9)=2.700,\quad {\chi^2}_{0.975}(9)=19.023$，显然 ${\chi^2}_{0.025}(9)<\hat{\chi}^2<{\chi^2}_{0.975}(9)$，不拒绝（或接受）零假设，即不能认为金属棒长度的标准差不是0.15

------2 分

六、(本题满分 10 分) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(-\mu,2\sigma^2)$，且 X,Y 互相独立，其中 $\sigma>0$ 为未知参数，令 $Z=X+Y$. 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 是来自总体 Z 的简单随机样本.

(1) 写出 Z 的分布； (2) 求 σ^2 的矩法估计；

（3）求σ^2的极大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；　　（4）证明σ^2的极大似然估计是无偏的.

解：（1）因为X,Y互相独立，所以$Z = X + Y \sim N(0,3\sigma^2)$.　　---------2 分

（2） 因为$E(Z^2) = DZ + (EZ)^2 = 3\sigma^2$，由$E(Z^2) = \overline{Z^2}$，得$3\sigma^2 = \overline{Z^2}$， 故$\sigma^2$的矩法估计为

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{3}\overline{Z^2} = (\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2)$$ -------------2 分

（3） 设$z_1, z_2, \cdots, z_n$为$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$的一组样本观测值，因为Z的概率密度为

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}\quad ,$$

故极大似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} p(z_i) = \frac{1}{(\sqrt{6\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$ ---------2 分

取对数，得对数似然函数

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - n\ln\frac{1}{\sqrt{6\pi}} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2$$

两边对σ^2求导，得$\frac{d}{d\sigma^2}\ln L(\sigma^2) = \frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{n}{2\sigma^2}$，解得驻点为$\sigma^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$，

以Z_i换z_i，即得极大似然估计量$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = (\frac{1}{3}\overline{Z^2})$.　　---------2 分

（4）因为$EZ_i = EZ = 0, DZ_i = DZ = 3\sigma^2$，所以

$$E\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} EZ_i^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}[DZ_i + (EZ_i)^2] = \frac{1}{3n}\cdot 3n\sigma^2 = \sigma^2.$$ -----2 分

七、填空题（每小题 4 分，满分 28 分，请将正确答案添入表格中对应位置）

1	2	3		4	5		6	7
$\frac{1}{3}$	0.25	-1	20	$\frac{3}{80}$=0.0375	2	大数定理 或中心极限定理	$1-\alpha$	0.88

1、袋中共有 30 个乒乓球，其中黄球 20 个，白球 10 个，小红、小黑和小明三

人依次从袋中无放回地各取一球，则小明取到白球的概率是__________.

2、已知$P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，则$P(B|A\bigcup\bar{B})=$__________.

3、抛一个均匀的骰子 36 次，出现点数 1 的次数为X，出现点数大于 1 的次数为Y，则X与Y的相关系数为_________；$X-Y$的方差$D(X-Y)=$_______.

4、设随机变量$X\sim E(3)$，$Y=e^{-X}$，则$DY=$_____________.

5、设（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）为取自二项分布$B(10,0.2)$的样本，如果样本容量充分大，进行大量的重复抽样，并把得到的样本均值分别标在坐标轴上，会发现样本均值在________附近波动，其理论依据是___________.

6．在显著性水平α下对参数θ的检验，原假设和备择假设分别是$H_0:\theta=\theta_0$和$H_1:\theta\neq\theta_0$，则在原假设为真情况下，原假设$H_0:\theta=\theta_0$被接受的概率为______.

7. 用线性回归模型拟和一组给定的数据，经计算得残差平方和 SSE 为 12，总离差平方和 SST 为 100，则该回归的判定系数为________________.

八、选择题（每小题 3 分，满分 21 分，请将正确答案添入表格中对应位置）

1	2	3	4	5	6	7
B	D	C	B	D	D	C

1、设随机变量$X\sim P(\lambda)$，且$P\{X\leq1\}=4P\{X=2\}$，则参数$\lambda=$【 B 】

（A）0.5　（B）1　（C）2　（D）3

2、抛一枚均匀硬币 200 次，根据切比雪夫不等式，可知出现正面次数在 80~120 之间的概率p满足【 D 】

（A）$p\leq0.125$　（B）$p\geq0.125$　（C）$p\leq0.875$　（D）$p\geq0.875$

3、设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$（$i=1,2$），且$P\{X_1X_2=0\}=1$，则$P\{X_1+X_2=1\}=$【 C 】

（A）0　（B）0.25　（C）0.5　（D）1

4、设随机变量X,Y都服从正态分布，且X与Y不相关，则【 B 】

（A）X与Y一定独立　　（B）X与Y未必独立

（C）(X,Y)服从二维正态分布　　（D）$X+Y$服从一维正态分布

5、设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是独立 同分布的随机变量序列，且均服从$E(\lambda)$，其中

参数$\lambda>0$，记$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则【 D 】

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{Y-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)$　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{Y-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\}=\Phi(x)$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{Y-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\}=\Phi(x)$　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\lambda Y-n}{\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)$

6、设随机变量$X\sim t(n)$，其中自由度$n>1$，若$Y=\frac{1}{X^2}$，则【 D 】

（A）$Y\sim\chi^2(n-1)$　（B）$Y\sim\chi^2(n)$　（C）$Y\sim F(1,n)$　（D）$Y\sim F(n,1)$

7、某次《概率论与数理统计》课程考试后，全体考生的标准差为 12 分，随机抽取 49 名学生，算得他们的平均成绩为 70 分，则该次考试中，学生平均成绩置信度为 95%的置信区间为【 C 】

（A）70 ± 0.48　（B）70 ± 1.96　（C）70 ± 3.36　（D）70 ± 4.52