第 26 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷答案

一．1. $\sqrt{\dfrac{3g}{\mathrm{L}}\sin\theta}$ ， $\dfrac{3g}{2\mathrm{L}}\cos\theta$；　　2. $\sqrt{2gH}$ ， 0 ；

3. $2\sqrt{2}\mathrm{A}_0\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ， $\dfrac{1}{2}k\lambda,\ \ k=0,\pm1,\pm2\cdots$；

4. $\dfrac{10}{\sqrt{91}}$ ， $\dfrac{40}{\sqrt{91}}$；　　5. $\dfrac{2}{13}$ ， $\dfrac{3}{4}=75\%$；　　6. $\varepsilon_{\mathrm{r}}-1$ ， $\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}-1$；

7. $\left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i}$ ， $\dfrac{1}{2}\mu_0\sigma u\vec{k}$；　　8. $\dfrac{2}{3}$ ， 1；　　9. 424nm 和 594nm ， 495nm ；

10. $\sqrt{1-\beta^2}\dfrac{l_0}{\upsilon},\ \ \beta=\dfrac{\upsilon}{c}$ ， $\dfrac{2l_0}{\upsilon\sqrt{1-\beta^2}},\ \ \beta=\dfrac{\upsilon}{c}$；

$$\left(\begin{array}{l} t_1\text{：AB系}\left(x_1'=-l_0,\ t_1'=\dfrac{l_0}{\upsilon}\right),\ \text{S系}\left(x_1,\ t_1\right);\ t_1=\dfrac{t_1'+\dfrac{\upsilon}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{1-\beta^2}\dfrac{l_0}{\upsilon} \\ t_2\text{：AB系}\left(x_2'=0,\ t_2'=2\dfrac{l_0}{\upsilon}\right),\ \text{S系}\left(x_2,\ t_2\right);\ t_2=\dfrac{t_2'+\dfrac{\upsilon}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{2l_0}{\upsilon\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right)$$

二．11.

初态：$\mathrm{P_{AB}}=76\mathrm{cmHg},\ \mathrm{P_{DC}}=\mathrm{P_{AB}}+76\mathrm{cmHg}=2\times76\mathrm{cmHg}$　　(1分)

末态：引入 $x\Rightarrow l_{\mathrm{AB}}=l_0-2x,\ l_0=76\mathrm{cm}$

$$\mathrm{P}'_{\mathrm{AB}}=\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}+\left(76-x\right)\mathrm{cmHg}\qquad(2分)$$

等温关联：$\begin{cases}\mathrm{P_{AB}}l_0=\mathrm{P}'_{\mathrm{AB}}\cdot l_{\mathrm{AB}}=\mathrm{P}'_{\mathrm{AB}}\left(l_0-2x\right) & (3分)\\ \mathrm{P_{DC}}l_0=\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}\left(l_0+2x\right) & (3分)\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}76\times76=\left[\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}+\left(76-x\right)\right]\left(76-2x\right)\\ 2\times76\times76=\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}\left(76+2x\right)\end{cases}\qquad \text{引入}\ x^*=\frac{x}{76}\Rightarrow x=76x^*$$

$$\Rightarrow\begin{cases}76=\left[\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}+76\left(1-x^*\right)\right]\left(1-2x^*\right)\\ 2\times76=\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}\left(1+2x^*\right)\Rightarrow\mathrm{P}'_{\mathrm{DC}}=\dfrac{2\times76}{1+2x^*}\end{cases}$$

$$\Rightarrow76=\left[\frac{2}{1+2x^*}+\left(1-x^*\right)\right]\times76\left(1-2x^*\right)$$

$$\Rightarrow4x^{*3}-4x^{*2}-7x^*+2=0\qquad(4分)$$

用计算器近似计算给出3位有效数字解为

x^*=0.258，$x=19.6\mathrm{cm}$　　$\Rightarrow\ l_{\mathrm{AB}}=l_0-2x=36.8\mathrm{cm}$　　(2分)

二．12. 解.

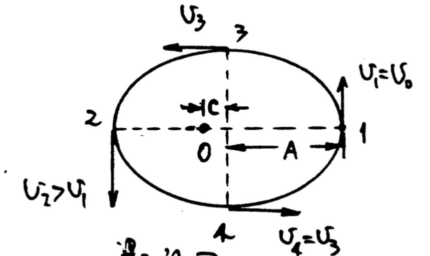
(1) 将P的电量记为$q>0$，质量记为m，由$\gamma=q/m$和

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}-q\upsilon_0 B=\frac{m\upsilon_0^2}{R} \qquad (2分)$$

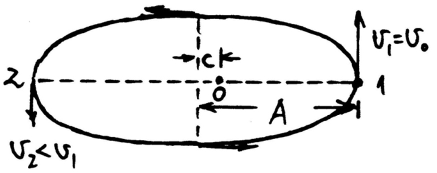
得
$$Q=\frac{4\pi\varepsilon_0\upsilon_0 R}{r}\left(\upsilon_0+\gamma BR\right) \qquad (2分)$$

(2) 设椭圆轨道如题解图1所示，由$\upsilon_1=\upsilon_0$和

$$\begin{cases} A+C=R \\ (A-C)\upsilon_2=(A+C)\upsilon_0 \\ \dfrac{1}{2}m\upsilon_2^2-\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(A-C)}=\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2-\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(A+C)} \end{cases}$$



题解图1.



题解图2

得 $\dfrac{1}{2}m\upsilon_2^2-\dfrac{Qq\upsilon_2}{4\pi\varepsilon_0 R\upsilon_0}=\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2-\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$,

由(1)问可得$\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}=m\upsilon_0^2+q\upsilon_0 BR$, 代入上式，得

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\left(m\upsilon_0^2+q\upsilon_0 BR\right)\frac{\upsilon_2}{\upsilon_0}=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2-\left(m\upsilon_0^2+q\upsilon_0 BR\right),$$

$$\Rightarrow m\upsilon_2^2-2m\upsilon_2\upsilon_0+m\upsilon_0^2=2qBR\left(\upsilon_2-\upsilon_0\right)$$

$$\Rightarrow\left(\upsilon_2-\upsilon_0\right)^2=2\gamma BR\left(\upsilon_2-\upsilon_0\right),$$

要求$\upsilon_2>\upsilon_0=\upsilon_1$， 与题解图1相符。

$$\left(\begin{array}{l}\text{若椭圆轨道取题解图2所示，可将上述公式推演中C改取为}-\text{C，仍可得} \\ \left(\upsilon_2-\upsilon_0\right)^2=2\gamma BR\left(\upsilon_2-\upsilon_0\right)\Rightarrow\upsilon_2>\upsilon_0=\upsilon_1 \qquad (2分) \\ \text{与题解图2矛盾。可见，椭圆轨道只能取题解图1所示。}\end{array}\right)$$

接上，继而可得$\upsilon_2=\upsilon_0+2\gamma BR$ (3分)

再由$\sqrt{A^2-C^2}\upsilon_3=(A+C)\upsilon_0$，$(A-C)\upsilon_2=(A+C)\upsilon_0$

得$\upsilon_3=\sqrt{\dfrac{A+C}{A-C}}\upsilon_0=\sqrt{\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_0}}\upsilon_0=\sqrt{\upsilon_2\upsilon_0}$

$$\Rightarrow\upsilon_3=\sqrt{\left(\upsilon_0+2\gamma BR\right)\upsilon_0} \qquad (1分)$$

即有$\upsilon_1=\upsilon_0$，$\upsilon_2=\upsilon_0+2\gamma BR$，$\upsilon_3=\upsilon_4=\sqrt{\left(\upsilon_0+2\gamma BR\right)\upsilon_0}$

二．13. 解.

(1) 月 心与地-月系统质心C相距

$$r_m=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+m}r_0=3.79\times10^8\,\mathrm{m}$$

（可见C在地球内），由

$$m\omega^2 r_m=\mathrm{G}\frac{\mathrm{M}m}{r_0^2}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{r_0^2 r_m}}=2.67\times10^{-6}/\mathrm{s}$$

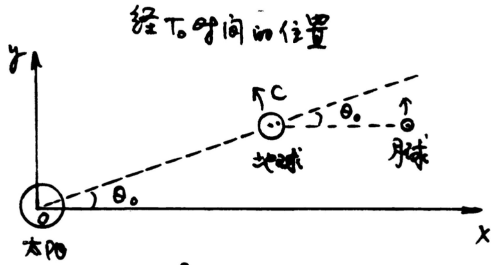
得 $\mathrm{T}_0=\dfrac{2\pi}{\omega}=27.2$天 (4分)

(2) 农历一个月记为T，定义为从地球上观察到的相邻两次“月圆”相隔时间。以天为单位，T不是整数，为了取整，有时T取为29天，有时取为30天，平均值$\overline{\mathrm{T}}$约为29. 5天。可见，相邻两次月圆间隔取$\overline{\mathrm{T}}$更为确切。

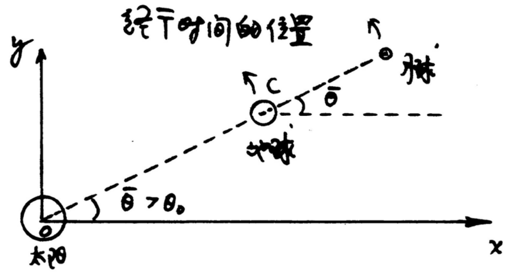
$\overline{\mathrm{T}}=29.5$天 $>\mathrm{T}_0=27.2$天 (3分)

主要原因是T_0计算中未考虑地－月系统绕太阳的旋转（即地球绕太阳的旋转）。

(3) (2分) (2分)



题解图1



题解图2

(4) 参考题解图2，设$\overline{\mathrm{T}}$时间内，地球绕太阳转过$\overline{\theta}$角，在$\overline{\mathrm{T}}-\mathrm{T}_0$时间段内月球中心必须绕C点转过$\overline{\theta}$角，即有

$$\frac{\overline{\mathrm{T}}}{365}\times2\pi=\overline{\theta}=\frac{\overline{\mathrm{T}}-\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0}\times2\pi$$

解得 $\overline{\mathrm{T}}=\left[\mathrm{T}_0^{-1}-(365)^{-1}\right]^{-1}=29.4$天 (4分)

此值与$\overline{\mathrm{T}}$约为29.5天很接近。

二．14. 解.

(1) 导体内 $\mathrm{E}=\mathrm{E}_0-\mathrm{E}', \mathrm{E}'=\sigma/\varepsilon_0$

由 $d\sigma/dt=j=\mathrm{E}/\rho=\dfrac{1}{\rho\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0\mathrm{E}_0-\sigma\right)$

$$\Rightarrow\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{\varepsilon_0\mathrm{E}_0-\sigma}=\int_0^t\frac{dt}{\rho\varepsilon_0}$$

得 $\sigma=\varepsilon_0\mathrm{E}_0\left(1-\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}\right)$

和 $j=\dfrac{d\sigma}{dt}=\dfrac{\mathrm{E}_0}{\rho}\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}$ (8分)

(2.1) 由 $\dfrac{d\sigma}{dt}=j=\dfrac{1}{\rho\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0\mathrm{E}_0\cos\omega t-\sigma\right)\quad\Rightarrow\dfrac{d\sigma}{dt}+\dfrac{1}{\rho\varepsilon_0}\sigma=\dfrac{\mathrm{E}_0}{\rho}\cos\omega t$

得 $\sigma(t)=\mathrm{e}^{-\int dt/\rho\varepsilon_0}\left(\dfrac{\mathrm{E}_0}{\rho}\displaystyle\int\cos\omega t\cdot\mathrm{e}^{\int dt/\rho\varepsilon_0}dt+\mathrm{C}_1\right)=\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}\left(\dfrac{\mathrm{E}_0}{\rho}\displaystyle\int\cos\omega t\cdot\mathrm{e}^{t/\rho\varepsilon_0}dt+\mathrm{C}_1\right)$

将 $\displaystyle\int\cos\omega t\cdot\mathrm{e}^{t/\rho\varepsilon_0}dt=\frac{1/\rho\varepsilon_0}{\omega^2+\left(1/\rho\varepsilon_0\right)^2}\left(\cos\omega t+\rho\varepsilon_0\omega\cdot\sin\omega t\right)\mathrm{e}^{t/\rho\varepsilon_0}+\mathrm{C}_2$

代入，得 $\sigma(t)=\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}\left[\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\left(\cos\omega t+\rho\varepsilon_0\omega\sin\omega t\right)}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\mathrm{e}^{t/\rho\varepsilon_0}+\mathrm{C}\right]$，$\mathrm{C}=\mathrm{C}_1+\dfrac{\mathrm{E}_0}{\rho}\mathrm{C}_2$

$$=\frac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\left(\cos\omega t+\rho\varepsilon_0\omega\sin\omega t\right)+\mathrm{Ce}^{-t/\rho\varepsilon_0}$$

由t=0时$\sigma=0$，得 $\mathrm{C}=\dfrac{-\varepsilon_0\mathrm{E}_0}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}$

$\Rightarrow\sigma(t)=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\left[\left(\cos\omega t+\rho\varepsilon_0\omega\sin\omega t\right)-\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}\right]$ (3分)

继而得 $j(t)=\dfrac{d\sigma}{dt}=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\omega}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\left[\left(\rho\varepsilon_0\omega\cos\omega t-\sin\omega t\right)+\dfrac{1}{\rho\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-t/\rho\varepsilon_0}\right]$ (2分)

(2.2) 由上式，得$t\Rightarrow\infty$时 $j(t)=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\omega}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\left(\rho\varepsilon_0\omega\cos\omega t-\sin\omega t\right)$

$$\Rightarrow j(t)=\frac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\omega}{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}\left(\frac{\rho\varepsilon_0\omega}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}}\cos\omega t-\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}}\sin\omega t\right)$$

令 $\cos\phi=\dfrac{\rho\varepsilon_0\omega}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}}$，$\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}}$

得 $t\Rightarrow\infty$时 $j(t)=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\omega}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\phi\right)$

或 $\begin{cases}j(t)=j_0\cos\left(\omega t+\phi\right)\\ j_0=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{E}_0\omega}{\sqrt{1+\rho^2\varepsilon_0^2\omega^2}},\ \tan\phi=\dfrac{1}{\rho\varepsilon_0\omega}\end{cases}$ (2分)

三. 15. 解.

(1) t时刻飞船（主体与剩余燃料）质量记为M，速度记为υ，经dt时间燃烧掉燃料质量$-\mathrm{dM}=m_0 dt$，飞船速度增为$\upsilon+\mathrm{d}\upsilon$，由动量守恒方程

$$(\mathrm{M}+\mathrm{dM})(\upsilon+\mathrm{d}\upsilon)+(-\mathrm{dM})(\upsilon+\mathrm{d}\upsilon-u)=\mathrm{M}\upsilon$$

得 $\quad \mathrm{Md}\upsilon+u\mathrm{dM}=0 \qquad (1)$

将$\mathrm{dM}=-m_0 dt,\ \mathrm{d}\upsilon=adt$代入，得

$$\begin{cases} a(t)=\dfrac{m_0}{\mathrm{M}}u=\dfrac{m_0}{\mathrm{M_0}+\mathrm{M_R}-m_0 t}u \\ \dfrac{\mathrm{M_R}}{m_0}\ge t\ge 0 \end{cases}$$

即有$a_{\min}=\dfrac{m_0}{\mathrm{M_0}+\mathrm{M_R}}u : t=0$时

$a_{\max}=\dfrac{m_0}{\mathrm{M_0}}u : t=\dfrac{\mathrm{M_R}}{m_0}$时 (6分)

(2) 对(1)式积分，

$$\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{u}+\int_{\mathrm{M_0}+\mathrm{M_R}}^{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{M}}=0$$

得 $\upsilon(t)=u\ln\dfrac{\mathrm{M_0}+\mathrm{M_R}}{\mathrm{M}}\Rightarrow \upsilon_e=u\ln\dfrac{\mathrm{M_0}+\mathrm{M_R}}{\mathrm{M}} \qquad (2)$ (3分)

(3) $t\to t+dt$时间内，$\mathrm{M}\Rightarrow\{\mathrm{M}+\mathrm{dM},-\mathrm{dM}\}$系统动能增量为

$$\mathrm{dE_K}=\left[\frac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{dM})(\upsilon+\mathrm{d}\upsilon)^2+\frac{1}{2}(-\mathrm{dM})(\upsilon-u)^2\right]-\frac{1}{2}\mathrm{M}\upsilon^2$$

$$=(\mathrm{Md}\upsilon+u\mathrm{dM})\upsilon-\frac{1}{2}u^2\mathrm{dM}$$

将(1)式代入，得 $\quad \mathrm{dE_K}=-\dfrac{1}{2}u^2\mathrm{dM}=\dfrac{1}{2}m_0u^2dt$

即得 $\quad \mathrm{P}(\mathrm{t})=\dfrac{\mathrm{dE_K}}{dt}=\dfrac{1}{2}m_0u^2$

$\Rightarrow \mathrm{P_i}=\dfrac{1}{2}m_0u^2,\ \overline{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{2}m_0u^2$ (5分)

(4) 据(2)式，飞船最终获得的动能为

$$E_{Ke}=\frac{1}{2}M_0\upsilon_e^2=\frac{1}{2}M_0u^2\left(\ln\frac{M_0+M_R}{M_0}\right)^2$$

释放的全部燃料内能为

$$U_{内}=\overline{P}\frac{M_R}{m_0}=\frac{1}{2}M_Ru^2$$

所求效率便为

$$\eta=\frac{E_{Ke}}{U_{内}}=\frac{M_0}{M_R}\left(\ln\frac{M_0+M_R}{M_0}\right)^2 \qquad (3分)$$

(5) 将$M_R=\alpha M_0$代入上式，得

$$\eta=\frac{1}{\alpha}\left[\ln(1+\alpha)\right]^2$$

$$\Rightarrow\frac{d\eta}{d\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}\left[\ln(1+\alpha)\right]^2+\frac{2}{\alpha}\left[\ln(1+\alpha)\right]\frac{1}{1+\alpha}=0$$

得α取满足方程： $\frac{2\alpha}{1+\alpha}=\ln(1+\alpha)$

的解，对应的η为极值。由数值计算：

α	1	2	3	4	5
$\frac{2\alpha}{1+\alpha}$	1	1.33	1.5	1.6	1.67
$\ln(1+\alpha)$	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79
η	48%	60%	64%	65%	64%

可知，

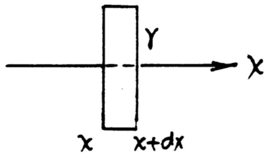
$$\alpha=4时\quad \eta=\eta_{max}=65\% \qquad (3分)$$

三．16. 解.

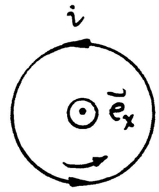
（1）在$\frac{1}{\alpha}>x>0$区域，以r为端面半径，x和$x+dx$为两端面位置，取题解图1所示高斯圆筒面。据磁场高斯定理应有

$$\mathrm{dB}_x\cdot\pi r^2+\mathrm{B_r}\cdot 2\pi r\cdot dx=0$$

$$\Rightarrow \beta r\mathrm{B}_0=\mathrm{B_r}=-\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{\mathrm{dB}_x}{dx}=\frac{\alpha}{2}r\mathrm{B}_0$$



题解图1.



题解图2.

即得 $$\beta=\frac{\alpha}{2}=8\mathrm{m}^{-1}$$

对$0>x>-\frac{1}{\alpha}$区域，同样可据高斯定理导得

$$\beta=\frac{\alpha}{2}=8\mathrm{m}^{-1}\qquad(5分)$$

（2）在$\frac{1}{\alpha}>x>0$区域，将环处于x位置的速度记为υ，沿题解图2（其中$\vec{\mathrm{e}}_x$为x轴方向矢量）方向动生感应电动势记为ε_{v}，感应电流记为i，自感电动势记为ε_{L}，

则有 $$\varepsilon_{\mathrm{v}}+\varepsilon_{\mathrm{L}}=0\qquad(2分)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{v}}=\upsilon\cdot\mathrm{B_r}\cdot 2\pi r_0=\upsilon\beta r_0\mathrm{B}_0\cdot 2\pi r_0=\alpha\pi r_0^2\mathrm{B}_0\upsilon\qquad(2分)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{L}}=-\mathrm{L}\frac{di}{dt}\qquad(2分)$$

$$\Rightarrow di=\frac{\alpha}{\mathrm{L}}\pi r_0^2\mathrm{B}_0\upsilon dt=\frac{\alpha}{\mathrm{L}}\pi r_0^2\mathrm{B}_0dx$$

两边积分，因$x=0$时$i=0$，即得 $i(x)=\frac{\alpha}{\mathrm{L}}\pi r_0^2\mathrm{B}_0x$ (2分)

环因此受安培力$\mathrm{F}_x=-i(x)\mathrm{B_r}\cdot 2\pi r_0=-\frac{\alpha}{\mathrm{L}}\pi r_0^2\mathrm{B}_0x\cdot\frac{\alpha}{2}r_0\mathrm{B}_0\cdot 2\pi r_0$

$$=-\frac{\alpha^2}{\mathrm{L}}\pi^2r_0^4\mathrm{B}_0^2x\qquad(2分)$$

由 $\mathrm{F}_x=m\ddot{x}$，得

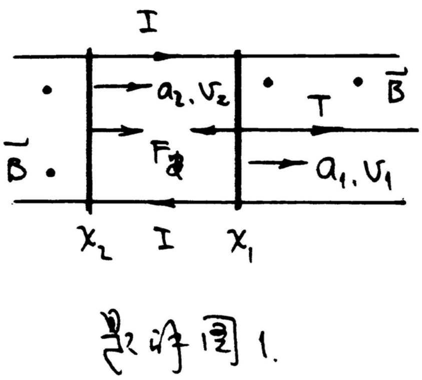
$$\begin{cases}\ddot{x}+\omega_0^2x=0\\ \omega_0=\dfrac{\alpha\pi r_0^2\mathrm{B}_0}{\sqrt{m\mathrm{L}}}=\dfrac{16\pi\times\left(5.0\times10^{-3}\right)^2\times10^{-2}}{\sqrt{5.0\times10^{-5}\times1.3\times10^{-8}}}=15.6/s\end{cases}\qquad(2分)$$

可见，环因初速υ_0离开$x=0$点，进入$\frac{1}{\alpha}>x>0$区域，即作角频率为ω_0的简谐振动，右振幅为 $\mathrm{A}=\sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}=\frac{0.5}{15.6}=3.2\times10^{-2}\mathrm{m}=3.2\mathrm{cm}$ (2分)

经过半个周期，环返回到$x=0$时具有左向速度，大小同为$\upsilon_0=50\mathrm{cm/s}$。因对称，进入$0>x>-\frac{1}{\alpha}$区域，仍作相同的简谐振动，左振幅同为$\mathrm{A}=3.2\mathrm{cm}$

因此，$t>0$后，环沿x轴的运动范围为 $3.2\mathrm{cm}\geq x\geq-3.2\mathrm{cm}$ (1分)

三．17. 解.



参考题解图1，相对桌面参考系，小物块下行和棒1右行加速度值同记为a_1，棒2右行加速度值记为a_2，对应的速度分别记为υ_1、υ_2。回路的动生感应电动势为

$$\varepsilon_{动} = Bl\upsilon_1 - Bl\upsilon_2 \qquad (1分)$$

感应电流I会随t变化，产生的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad (1分)$$

由欧姆定律

$$\varepsilon_{动} + \varepsilon_L = IR = 0 \qquad (1分)$$

得 $$LdI = Bl(\upsilon_1 - \upsilon_2)dt = Bld(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{Bl}{L}\left[(x_1 - x_2) - 2S\right] \qquad (1分)$$

棒1、2所受安培力方向如题解图1所示，其值为

$$(带正负号)\quad F_{安} = IBl = \frac{B^2l^2}{L}\left[(x_1 - x_2) - 2S\right] \qquad (1) \qquad (1分)$$

继而可建立牛顿方程：

$$mg - T = ma_1,\ T - F_{安} = ma_1 \qquad (1分+1分)$$

得 $$mg - F_{安} = 2ma_1 \qquad (2)$$

又有 $$F_{安} = ma_2 \qquad (3) \qquad (1分)$$

将棒1、2构成的系统质心记为C，有$x_{C0} = 0$。由$2m\upsilon_C = m\upsilon_1 + m\upsilon_2$，两边对$t$求导，得

$$a_C = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad (4) \qquad (1分)$$

参考题解图2，相对质心参考系，两杆速度方向相反、大小相同，记为$\upsilon*$,对应的加速度大小也同记为$a*$。对于棒1、2分别有

$$a_1 = a_C + a* \qquad (5)$$
$$a_2 = a_C - a* \qquad (6)$$

将(5)、(6)式代入(2)、(3)式，可得

$$mg - F_{安} = 2m(a_C + a*)$$
$$F_{安} = m(a_C - a*)$$

可解得

$$mg - 3F_{安} = 4ma* \qquad (7)$$
$$mg + F_{安} = 4ma_C \qquad (8)$$

棒1相对质心C的运动：　$\xi=\xi(t)$，$\upsilon^*=\dot{\xi}$，　$a^*=\ddot{\xi}$

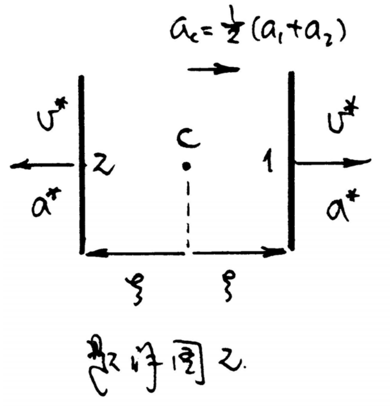
如题解图2所示，棒1在质心C的右侧ξ，应有

$$x_1-x_2=2\xi \qquad (9) \qquad\qquad (1分)$$

结合(1)、(7)式，得

$$mg-\frac{6\mathrm{B}^2l^2}{\mathrm{L}}(\xi-\mathrm{S})=4m\ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\xi}+\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2mL}\xi=\frac{g}{4}+\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}\mathrm{S} \qquad (10)$$



其解为　$\xi=\mathrm{A}\cos\left(\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t+\phi\right)+\frac{m\mathrm{L}}{6\mathrm{B}^2l^2}g+\mathrm{S}$

由初条件　$t=0$时，$\xi=\mathrm{S}\Rightarrow \mathrm{A}\cos\phi=-\frac{m\mathrm{L}}{6\mathrm{B}^2l^2}g$

$$\dot{\xi}=0\Rightarrow\sin\phi=0$$

得$\mathrm{A}=\frac{m\mathrm{L}}{6\mathrm{B}^2l^2}g$，$\phi=\pi$

$$\xi=\frac{m\mathrm{L}}{6\mathrm{B}^2l^2}g\left(1-\cos\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t\right)+\mathrm{S} \qquad (11) \qquad\qquad (5分)$$

质心C相对桌面参考系的运动：$x_{\mathrm{C}}=x_{\mathrm{C}}(t)$

将(9)式、(11)式代入(1)式，得$\mathrm{F}_{安}=\frac{1}{3}mg\left(1-\cos\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t\right) \qquad (12)$

代入(8)式，得　$\frac{d\upsilon_{\mathrm{C}}}{dt}=a_{\mathrm{C}}=\frac{1}{3}g-\frac{1}{12}g\cos\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t$

考虑到$t=0$时，$\upsilon_{\mathrm{C}}=0$，积分后可得

$$\upsilon_{\mathrm{C}}=\frac{1}{3}gt-\frac{1}{12}g\sqrt{\frac{2m\mathrm{L}}{3\mathrm{B}^2l^2}}\sin\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t$$

考虑到$t=0$时，$x_{\mathrm{C}}=0$，积分后可得

$$x_{\mathrm{C}}=\frac{1}{6}gt^2+\frac{m\mathrm{L}}{18\mathrm{B}^2l^2}g\left(\cos\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t-1\right) \qquad (13) \qquad\qquad (4分)$$

棒1相对桌面参考系的运动：$x_1=x_1(t)$

将(11)、(13)式代入到　$x_1=x_{\mathrm{C}}+\xi$

即得　$x_1=\frac{1}{6}gt^2+\frac{m\mathrm{L}}{9\mathrm{B}^2l^2}g\left(1-\cos\sqrt{\frac{3\mathrm{B}^2l^2}{2m\mathrm{L}}}t\right)+\mathrm{S} \qquad (14) \qquad\qquad (1分)$