第三章习题

习题 3—1

1. 判断下列方程在什么区域上保证初值解存在且唯一.

1） $y' = x + \sin y$；　　2） $y' = x^{-\frac{1}{3}}$；　　3） $y' = \sqrt{|y|}$.

解 1）因为 $f(x,y) = x + \sin y$ 及 $f_y'(x,y) = \cos y$ 在整个 xOy 平面上连续，所以在整个 xOy 平面上满足存在唯一性定理的条件，因此在整个 xOy 平面上初值解存在且唯一.

2）因为 $f(x,y) = x^{-\frac{1}{3}}$ 除 y 轴外，在整个 xOy 平面上连续，$f_y'(x,y) = 0$ 在在整个 xOy 平面上有界，所以除 y 轴外，在整个 xOy 平面上初值解存在且唯一.

3）设 $f(x,y) = \sqrt{|y|}$，则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-y}}, & y < 0, \end{cases}$ 故在 $y \neq 0$ 的任何有界闭区域上，$f(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 都连续，所以除 x 轴外，在整个 xOy 平面上初值解存在且唯一.

2. 求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2, \\ y(-1) = 0, \end{cases} \qquad \text{R：} |x+1| \le 1, |y| \le 1.$$

的解的存在区间.并求第二次近似解，给出在解的存在区间的误差估计.

解 设 $f(x,y) = x^2 - y^2$，则 $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 4$，$a = 1, b = 1$，所以

$$h = \min(a, \frac{b}{M}) = \min(1, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}.$$

显然，方程在 R 上满足解的存在唯一性定理，故过点 $(-1,0)$ 的解的存在区间为：$|x+1| \le \dfrac{1}{4}$.

设 $\varphi(x)$ 是方程的解，$\varphi_2(x)$ 是第二次近似解，则

$$\varphi_0(x) = y(-1) = 0，\quad \varphi_1(x) = 0 + \int_{-1}^{x} (x^2 - 0)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x) = 0 + \int_{-1}^{x} [x^2 - (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3})^2]dx = -\frac{x^7}{63} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{9} + \frac{11}{42}.$$

在区间 $|x+1| \le \dfrac{1}{4}$ 上，$\varphi_2(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的误差为　$|\varphi(x) - \varphi_2(x)| \le \dfrac{ML^2}{(2+1)!} h^3$.

取 $L = \max\limits_{(x,y)\in R} \left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \max\limits_{(x,y)\in R} |-2y| = 2$，故 $|\varphi(x) - \varphi_2(x)| \le \dfrac{4 \times 2^2}{(2+1)!} (\dfrac{1}{4})^3 = \dfrac{1}{24}$.

3. 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件.并求通过点 $O(0,0)$ 的一切解.

解 设 $f(x,y)=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$，则 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}\ (y\neq 0)$.故在 $y\neq 0$ 的任何有界闭区域上 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 都是连续的，因而方程在这种区域中满足解的存在唯一性定理的条件.显然，$y=0$ 是过 $O(0,0)$ 的一个解.

又由 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 解得 $y=\pm(x-C)^{\frac{3}{2}}$.其中 $x-C\geq 0$.

所以通过点 $O(0,0)$ 的一切解为 $y=0$ 及 $y=\begin{cases}0, & x\leq C,\\ (x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C,\end{cases}$ $y=\begin{cases}0, & x\leq C,\\ -(x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C.\end{cases}$ 如图.

4. 试求初值问题

$$\frac{dy}{dx}=x+y+1,\quad y(0)=0,$$

的毕卡序列，并由此取极限求解.

解 按初值问题取零次近似为 $y_0(x)=0$，

一次近似为 $y_1(x)=\int_0^x(s+0+1)ds=x+\frac{1}{2}x^2$,

二次近似为 $y_2(x)=\int_0^x[s+(s+\frac{1}{2}s^2)+1]ds=x+x^2+\frac{1}{6}x^3$,

三次近似为 $y_3(x)=\int_0^x[s+(s+s^2+\frac{1}{6}s^3)+1]ds=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{24}x^4$,

四次近似为 $y_4(x)=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4\times 3}x^4+\frac{1}{5!}x^5=2(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})-x-\frac{x^5}{5!}$,

五次近似为 $y_5(x)=2(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!})-x-\frac{x^6}{6!}$,

$$y(x)=\lim_{n\to+\infty}y_n(x)=2e^x-x-2.$$

5. 设连续函数 $f(x,y)$ 对 y 是递减的，则初值问题 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的右侧解是唯一的.

证 设 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ 是初值问题的两个解，令 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$，则有 $\varphi(x_0)=y_0-y_0=0$.下面要证明的是当 $x\ge x_0$ 时，有 $\varphi(x)\equiv 0$.

用反证法.假设当 $x\ge x_0$ 时，$\varphi(x)$ 不恒等于 0，即存在 $x_1\ge x_0$，使得 $\varphi(x_1)\ne 0$，不妨设 $\varphi(x_1)>0$，由 $\varphi(x)$ 的连续性及 $\varphi(x_0)=0$，必有 $x_0\le\bar{x}_0<x_1$，使得 $\varphi(\bar{x}_0)=0$，$\varphi(x)>0$，$\bar{x}_0<x\le x_1$.

又对于 $x\in[\bar{x}_0,x_1]$，有 $\varphi_1(\bar{x}_0)=\varphi_2(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$，$\varphi_1(x)=\bar{y}_0+\int_{\bar{x}_0}^{x}f[x,\varphi_1(x)]dx$，$\varphi_2(x)=\bar{y}_0+\int_{\bar{x}_0}^{x}f[x,\varphi_2(x)]dx$，则有

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_{\bar{x}_0}^{x}\{f[x,\varphi_1(x)]-f[x,\varphi_2(x)]\}dx,\quad \bar{x}_0<x\le x_1.$$

由 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)>0$（$\bar{x}_0<x\le x_1$）以及 $f(x,y)$ 对 y 是递减的，可以知道：上式左端大于零，而右端小于零.这一矛盾结果，说明假设不成立，即当 $x\ge x_0$ 时，有 $\varphi(x)\equiv 0$.从而证明方程的右侧解是唯一的.

习题 3—3

1. 利用定理 5 证明：线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$ （$x\in I$） (1)

的每一个解 $y=y(x)$ 的（最大）存在区间为 I，这里假设 $a(x),b(x)$ 在区间 I 上是连续的.

证 $f(x,y)=a(x)y+b(x)$ 在任何条形区域 $\{(x,y)|\alpha\le x\le\beta,-\infty<y<\infty\}$（其中 $\alpha,\beta\in I$）中连续，取 $M=\max_{x\in[\alpha,\beta]}|a(x)|$，$N=\max_{x\in[\alpha,\beta]}|b(x)|$，则有

$$|f(x,y)|\le|a(x)||y|+|b(x)|\le M|y|+N.$$

故由定理 5 知道，方程 (1) 的每一个解 $y=y(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 中存在，由于 α,β 是任意选取的，不难看出 $y(x)$ 可被延拓到整个区间 I 上.

2. 讨论下列微分方程解的存在区间：

1）$\frac{dy}{dx}=y(y-1)$； 2）$\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)$； 3）$\frac{dy}{dx}=1+y^2$.

解 1）因 $f(x,y)=y(y-1)$ 在整个 xOy 平面上连续可微，所以对任意初始点 (x_0,y_0)，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在唯一.

这个方程的通解为 $y=\dfrac{1}{1-Ce^{x}}$.显然 $y=0$，$y=1$ 均是该方程在 $(-\infty,\infty)$ 上的解.现以 $y=0$，$y=1$ 为界将整个 xOy 平面分为三个区域来讨论.

i）在区域 $R_1=\{(x,y)\|x|<+\infty,0<y<1\}$ 内任一点 (x_0,y_0)，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解存在唯一.由延伸定理知，它可以向左、右延伸，但不能与 $y=0$，$y=1$ 两直线相交，因而解的存在区间为 $(-\infty,\infty)$.又在 R_1 内，$f(x,y)<0$，则方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 递减，当 $x\to-\infty$ 时，以 $y=1$ 为渐近线，当 $x\to+\infty$ 时，以 $y=0$ 为渐近线.

ii）在区域 $R_2=\{(x,y)\|x|<+\infty,y>1\}$ 中，对任意常数 $C>0$，由通解可推知，解的最大存在区间是 $(-\infty,-\ln C)$，又由于 $f(x,y)>0$，则对任意 $(x_0,y_0)\in R_2$，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 递增.当 $x\to-\infty$ 时，以 $y=1$ 为渐近线，且每个最大解都有竖渐近线，每一条与 x 轴垂直的直线皆为某解的竖渐近线.

iii）在区域 $R_3=\{(x,y)\|x|<+\infty,y<0\}$ 中，类似 R_2，对任意常数 $C>0$，解的最大存在区间是 $(-\ln C,+\infty)$，又由于 $f(x,y)>0$，则对任意 $(x_0,y_0)\in R_3$，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 递增.当 $x\to+\infty$ 时，以 $y=0$ 为渐近线，且每个最大解都有竖渐近线.其积分曲线分布如图（　　）.

2）因 $f(x,y)=y\sin(xy)$ 在整个 xOy 平面上连续，且满足不等式

$$|f(x,y)|=|y\sin(xy)|\le|y|,$$

从而满足定理 5 的条件，故由定理 5 知，该方程的每一个解都以 $-\infty<x<+\infty$ 为最大存在区间.

3）变量分离求得通解 $y=\tan(x-C)$，故解的存在区间为 $(C-\dfrac{\pi}{2},C+\dfrac{\pi}{2})$.

3. 设初值问题

$$(E):\ \frac{dy}{dx}=(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2},\quad y(x_0)=y_0$$

的解的最大存在区间为 $a<x<b$，其中 (x_0,y_0) 是平面上的任一点，则 $a=-\infty$ 和 $b=+\infty$ 中至少有一个成立.

证明　因 $f(x,y)=(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2}$ 在整个 xOy 平面上连续可微，所以对任意初始点 (x_0,y_0)，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在唯一.

很显然 $y=3$，$y=-1$ 均是该方程在 $(-\infty,\infty)$ 上的解.现以 $y=3$，$y=-1$ 为界将整个 xOy 平面分为三个区域来进行讨论.

i）在区域 $R_1=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty,-1<y<3\}$ 内任一点 (x_0,y_0)，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解存在唯一.由延伸定理知，它可以向左、右延伸，但不能与 $y=3$，$y=-1$ 两直线相交，因而解的存在区间为 $(-\infty,\infty)$.这里有 $a=-\infty$，$b=+\infty$.

ii）在区域 $R_2=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty,y<-1\}$ 中，由于 $f(x,y)=(y-3)(y+1)e^{(x+y)^2}>0$，积分曲线单调上升.现设 $P_0(x_0,y_0)$ 位于直线 $y=-1$ 的下方，即 $y_0<-1$，则利用 (E) 的右行解的延伸定理，得出 (E) 的解 Γ 可以延伸到 R_2 的边界.另一方面，直线 $y=-1$ 的下方，积分曲线 Γ 是单调上升的，并且它在向右延伸时不可能从直线 $y=-1$ 穿越到上方.因此它必可向右延伸到区间 $a<x<+\infty$.故至少 $b=+\infty$ 成立.

类似可证，对 $R_3=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty,y>3\}$，至少有 $a=-\infty$ 成立.

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面连续.求证：对任何 x_0，只要 $|y_0|$ 适当小，方程

$$\frac{dy}{dx}=(y^2-e^{2x})f(x,y) \tag{1}$$

的满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解必可延拓到 $x_0\le x<+\infty$.

证明 因为 $f(x,y)$ 在全平面上连续，令 $F(x,y)=(y^2-e^{2x})f(x,y)$，则 $F(x,y)$ 在全平面上连续，且满足 $F(x,e^x)\equiv F(x,-e^x)\equiv 0$.

对任何 x_0，选取 y_0，使之满足 $|y_0|<e^{x_0}$.设方程 (1) 经过点 (x_0,y_0) 的解为 $y=\varphi(x)$，在平面内延伸 $y=\varphi(x)$ 为方程的最大存在解时，它的最大存在区间为 $[x_0,\beta)$，由延伸定理可推知，或 $\beta=+\infty$ 或为有限数且 $\lim\limits_{x\to\beta-0}|\varphi(x)|=+\infty$.下证后一种情形不可能出现.

事实上，若不然，则必存在 $x<\beta$，使 $|\varphi(x)|>e^{\beta}$.不妨设 $\varphi(x)>e^{\beta}$.于是必存在 $\overline{x_0}\in(x_0,\beta)$，使 $\varphi(\overline{x_0})=e^{\overline{x_0}}$，$\varphi(x)<e^x$（$x_0\le x<\overline{x_0}$）.此时必有

$$\varphi'(x)\Big|_{\overline{x_0}}\ge\frac{de^x}{dx}\Big|_{\overline{x_0}}=e^{\overline{x_0}}>0,$$

但 $\varphi'(x)\Big|_{\overline{x_0}}=F(\overline{x_0},\varphi(\overline{x_0}))=F(\overline{x_0},e^{\overline{x_0}})=0$，从而矛盾.

因此，$\beta=+\infty$，即方程 (1) 的解 $y=\varphi(x)$（$y(x_0)=y_0$）必可延拓到 $x_0\le x<+\infty$.

习 题 4—1

1．求解下列微分方程

1） $2y=p^2+4px+2x^2 \qquad (p=\frac{dy}{dx})$

解 利用微分法得 $(2x+p)(\frac{dp}{dx}+1)=0$

当 $\frac{dp}{dx}+1=0$时，得 $p=-x+c$

从而可得原方程的以 P 为参数的参数形式通解

$$\begin{cases} 2y=p^2+4px+2x^2 \\ p=-x+c \end{cases}$$

或消参数 P，得通解

$$y=\frac{1}{2}(c^2+2cx-x^2)$$

当 $2x+p=0$时，则消去 P，得特解 $y=-x^2$

2） $y=px\ln x+(xp)^2$； $\left(p=\frac{dy}{dx}\right)$

解 利用微分法得 $(\ln x+2xp)\left(x\frac{dp}{dx}+p\right)=0$

当$x\frac{dp}{dx}+p=0$时，得 $px=c$

从而可得原方程以 p 为参数的参数形式通解：

$\begin{cases} y=px\ln+(xp)^2 \\ px=c \end{cases}$ 或消 p 得通解 $y=C\ln x+C^2$

当$\ln x+2xp=0$时，消去 p 得特解 $y=-\frac{1}{4}(\ln x)^2$

3） $y=x\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \quad \left(p=\frac{dy}{cx}\right)$

解 利用微分法，得

$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}=-\frac{dx}{x}$ 两边积分得

$$\left(1+P^2+P\sqrt{1+P^2}\right)x=c$$

由此得原方程以 P 为参数形式的通解：

$$y = x(p + \sqrt{1+p^2} \quad , \quad \left(1 + p^2 + p^2\sqrt{1+p^2}\right)x = c.$$

或消去 P 得通解

$$y^2 + (X - C)^2 = C^2$$

1. 用参数法求解下列微分方程

1） $2y^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

解 将方程化为 $\frac{y^2}{2} + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{4}{5}} = 1^2$ 令 $y = \sqrt{2}\sin t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t$

由此可推出 $dx = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t}dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\cos t}d(\sqrt{2}\sin t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dt$ 从而得

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t + c$$

因此方程的通解为 $x = \sqrt{\frac{5}{2}}t + c$ ， $y = \sqrt{2}\sin t$

消去参数 t，得通解

$$y = \sqrt{2}\sin\sqrt{\frac{2}{5}}(x - C)$$

对于方程除了上述通解，还有 $y = \pm\sqrt{2}$， $\frac{dy}{dx} = 0$，显然

$y = \sqrt{2}$ 和 $y = -\sqrt{2}$ 是方程的两个解。

2） $x^2 - 3(\frac{dy}{dx})^2 = 1$

解：令 $x = \csc u$， $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cot u$

又令 $\tan\frac{u}{2} = t$ 则 $x = \frac{1}{\sin u} = \frac{1+t^2}{2t}$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{3}}\cot^2 u = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\cos^2 u}{\sin^3 u}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \Big/ \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})dt$$

积分得， $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{1}{2}t^2 - 2\ln t - \frac{1}{2t^2}) + c$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2 - 4\ln t - \frac{1}{t^2}) + C$$

由此得微分方程的通解为

$x = \frac{1+t^2}{2t}$， $y = \frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2 - 4\ln t - \frac{1}{t^2}) + c$

3） $x^3 + (\frac{dy}{dx})^3 = 4\frac{dy}{dx}$

解：令 $\frac{dy}{dx} = xt$ 则 $x^3 + x^3t^3 = 4x^2t$

解得 $x = \frac{4t}{1+t^3}$ 又

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \bullet \frac{dx}{dt} = \frac{4t^2}{1+t^3} \bullet \frac{4(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{16t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$$

$$= \frac{16}{3}\frac{(1-2t6^3)}{(1+t^3)^3}dt^3 \underline{u=t^3} \frac{16}{3}\frac{1-2u}{(1+u)^3}du$$

$$= 16\frac{du}{(1+u^3)^3} - \frac{32}{3}\frac{du}{(1+u^2}$$

$$\therefore y = -\frac{8}{(1+u)^2} + \frac{32}{3}\frac{1}{1+u^2} + C$$

$\therefore = -\dfrac{8}{(1+t^3)^2} + \dfrac{32}{3}\dfrac{1}{1+t^3} + C$

由此得微分方程的通解为

$x = \dfrac{4t}{1+t^3}$， $y = -\dfrac{8}{(1+t^3)^2} + \dfrac{32}{3}\dfrac{1}{1+t^3} + C$。

习题 4—2

1．得用 P—判别式求下列方程的奇解：

2） $y = x\frac{dy}{dx} + (\dfrac{dy}{dx})^2$

解：方程的 P—判别式为

$y = xp + p^2, x + 2p = 0$

消去 p，得 $y = -\frac{x^2}{4}$

经验证可知 $y = -\frac{x^2}{4}$ 是方程的解。

令 $F(x,y,p) = y - xp - p^2$ 则有 $F_y'(x, -\dfrac{x^2}{4}, -\dfrac{x}{2}) = 1$， $F_{pp}'(x, -\dfrac{x^2}{4}, -\dfrac{x}{2}) = -2$

和 $F_p'(x, -\dfrac{x^2}{4}, -\dfrac{x}{2}) = 0$

因此，由定理 4.2 可知， $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ 是方程的奇解。

2） $y = 2x\dfrac{dy}{dx} + (\dfrac{dy}{dx})^2$

解：方程的 P—判别式为

$y = 2xp + p^2$， $x + p = 0$

消去 P，得 $y = -x^2$，而 $y = -x^2$ 不是方程的解，故 $y = -x^2$ 不是方程的奇解。

3） $(y-1)^2(\dfrac{dy}{dx})^2 = \dfrac{4}{q}y$

解：方程的 P—判别式为

$(y-1)^2 p^2 = \dfrac{4}{9}$ ， $2(y-1)^2 p = 0$

消去 P，得 $y = 0$，显然 $y = 0$ 是方程的解，

令 $F(x,y,p)=(y-1)^2p^2-\frac{4}{9}y$ 则有

$F_y'(x,0,0)=-\frac{4}{9}$　　　　　　$F_{pp}''(x,0,0)=2$

和 $F_p'(x,0,0)=0$

因此，由定理 4.2 知，$y=0$ 是方程的奇解。

2．举例说明，在定理 4.2 的条件 $F_y'(x,x(x),x'(x))\neq 0$

$F_{pp}''(x,x(x),x'(x))\neq 0$ 中的两个不等式是缺一不可的，

解：考虑方程 $(\frac{dy}{dx})^2-y^2=0$

方程（1）的 P—判别式为

$p^2-y^2=0$　　　$2p=0$ 消去 P，得 $y=x(x)=0$

令 $F(x,y,p)=p^2-y^2$，于是有 $F_y'(x,y,p)=-2y$　　$F_p'(x,y,p)=-2p$

$F_{pp}''(x,y,p)=2$ 因此虽然有　　$F_{pp}''(x,y,p)=2\neq 0$ 和 $F_p'(x,0,0)=0$

但是 $F_y'(x,0,0)=0$

又 $y=0$ 虽然是方程的解，且容易求出方程（1）的通解为 $y=xe^{\pm x}$

因此容易验证 $y=0$ 却不是奇解。因此由此例可看出。定理 4.2 中的条件 $F_y'(x(x),x'(x))\neq 0$ 是不可缺少的。

又考虑方程　　$\sin(y\frac{dy}{dx})=y$

方程（2）的 P—判别式为　$\sin(yp)=y$　　$ycos(yp)=0$

消去 P，得 $y=0$。令 $F(x,y,p)=\sin(yp)-y$ 于是有 $F_y'(x,y,p)=pcos(yp)-1$，

$F_p'(x,y,p)=ycos(yp)$　　$F_{pp}''(x,y,p)=y^2\sin(yp)$　　因此，虽然有

$F_y'(x,0,0)=-1\neq 0$ 和 $F_p'(x,0,0)=0$ 但 $F_{pp}''(x,0,0)=0$，而经检验知 $y=0$ 是方程（2）的解，但不是奇解。因此由此例可看出定理 4.2 中的条件 $F_{pp}''(x,x(x),x'(x))\neq 0$ 是不可缺少的。

3．研究下面的例子，说明定理 4.2 的条件 $F_p'(x,x(x),x'(x))=0$ 是不可缺少的

$y=2x+y'-\frac{1}{3}(y')^3$

解：方程的P—判别式为

$y=2x+p-\frac{1}{3}p^3 \qquad 1-p^2=0$

消去P，得 $\quad y=2x\pm\frac{2}{3}$

检验知 $\quad y=2x+\frac{2}{3}$不是解，故不是奇解，而$y=2x-\frac{2}{3}$虽然是解，但不是奇解。

令$F(x,y,p)=y-2x-p+\frac{1}{3}p^3$

$F_y'(x,y,p)=1$， $\quad F_p'(x,y,p)=-1+p^2$

$F_{pp}''(x,y,p)=2p$， $\quad$ 所以虽有

$F_y'(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=1\neq 0$

$F_{pp}''(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=4\neq 0$

但是$F_p'(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=3\neq 0$

因此此例说明定理4.2的条件$F_p'(x,x(x),x'(x)=0$是不可缺少的。

习题 4——3

1．试求克莱罗方程的通解及其包络

解：克莱罗方程 $\quad y=xp+f(p) \quad (p=\frac{dy}{dx})$（1）

其中$f''(p)\neq 0$。

对方程（1）求导值$(x+f'(p))\frac{dp}{dx}=0$

由$\frac{dp}{dx}=0$ $\quad$ 即$p=c$时 $\quad$ 代入（1）得（1）的通解

$y=cx+f(c)$ $\quad$（2）

它的C—判别式为 $\quad \begin{Bmatrix} y=cx+f(c) \\ x+f'(c)=0 \end{Bmatrix}$

由此得 $\quad \Lambda: x=-f'(c))=\varphi(c)$， $\quad y=-cf'(c)+f(c)=\psi(c)$

令 $\qquad V(x,y,c)=cx+f(c)-y \qquad$ 故

$V_x'(\varphi(c),\psi(c),c)=c \qquad\qquad v_y'(\varphi(c),\psi(c),c)=-1$

所以 $(V_x',V_y')\neq(0,0)$ $\qquad$ 又

$(\varphi'(c),\psi'(c))=(-f''(c),-cf''(c))\neq(0,0)$ $\qquad$ （由于 $f''(c)\neq0$ ）

因此 Λ 满足定理 4.5 相应的非蜕化性条件。故 Λ 是积分曲线族（2）的一支包络。

课外补充

1．求下列给定曲线族的包络。

1）$(x-c)^2+(y-c)^2=4$

解：由相应的 C—判别式

$V(x,y,c)=(x-c)^2+(y-c)^2-4=0$

$V_c(x,y,c)=-2(x-c)-2(y-c)=0$

消去 C 得 C—判别曲线 $\qquad (x-y)^2=8$

它的两支曲线的参数表示式为

Λ_1： $x=-\sqrt{2}+c \quad , \quad y=\sqrt{2}+c$

Λ_2： $x=\sqrt{2}+c \quad , \quad y=-\sqrt{2}+c$

对 Λ_1，我们有 $(\varphi'(c),\psi'(c))=(1,1)\neq(0,0)$

$V_x'(\varphi(c),\psi(c),c)=2(-\sqrt{2}+c-c)=-2\sqrt{2}$

$V_y'(\varphi(c),\psi(c),c)=2(\sqrt{2}+c-c)=2\sqrt{2}$

$\therefore (V_x'(\varphi(c),\psi(c),c)v,V_y'(\varphi(c),\psi(c),c))\neq(0,0)$

因此 Λ_1 满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，同理可证，Λ_2 也满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，故 Λ_1，Λ_2 是曲线族的两支包络线。

2．$(x-c)^2+y^2=4c$

解：由相应的 C—判别式

$V(x,y,c)=(x-c)^2+y^2-4c=0$

$$V_c(x,y,c) = -2(x-c)-4=0$$

消去 C 得 C—判别曲线　　$y^2=4(x+1)$　它的两支曲线的参数表示式为

$$\Lambda_1: x=-2+c \quad , \quad y=2\sqrt{c-1}$$

$$\Lambda_2: x=-2+c \quad , \quad y=-2\sqrt{c-1}$$

对 Λ_1，我们有 $(\varphi'(c),\psi'(c))=(1,\dfrac{1}{\sqrt{c-1}})\neq(0,0)$

$$(V_x'(\varphi(c),\psi(c),c)v, V_y'(\varphi(c),\psi(c),c))=(-4,4\sqrt{c-1})\neq(0.0)$$

因此 Λ_1 满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，同理可证，Λ_2 也满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，故 Λ_1，Λ_2 是曲线族的两支包络线。

3. 证：就克莱罗方程来说，P—判别曲线和方程通解的 C—判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解。

证：已知克莱罗方程的形式为

$$y=xp+f(p) \qquad (p=\frac{dy}{dx}, f''(p)\neq0) \quad （1）$$

（1）的通解为　　$y=cx+f(c)$　　　　　　　（2）

（2）的包络由　　$y=cx+f(c)$　　$x+f'(c)=0$ 确定，

即为　　$y=-f'(c)$　　$y=cf'(c)+f(c)$　　（3）

又知方程（1）还有解　　$x+f'(p)=0$　　　$y=xp+f(p)$

由此得　　$x=f'(p)$ ，$y=-pf'(c)+f(p)$　　　（4）

而（4）是方程（1）的 P—判别曲线，它和（3）有相同的形式，因而同样是通解（2）的包络，消去 P 得方程（1）的奇解。

习 题 6 —— 1

1．求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt}=A(t)y$ 的通解，其中 A（t）分别为：（1）$A(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；（2）$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$；（3）$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

解 （1）方程组的分量形式为：

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1+y_2\ ,\quad \frac{dy_2}{dt}=y_2$$

从后一式容易求出 y_2 的通解为 $y_2=ke^t$，其中 K 为任意常数，可分别取 $y_2=0$ 和 $y_2=e^t$，代入前一式得到两个相应的特解，$y_1=e^t$ 和 $y_2=te^t$ 这样就求得方程组的一个解矩阵为

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$ 又 $\det|\Phi(t)|=e^{2t}\neq 0$。因此，$\Phi(t)$ 是方程组的一个基解矩阵，根据定理 6.1，方程的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}te^t\\ e^t\end{pmatrix}$$

（2）方程的分量形式为 $\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}=y_2 & ①\\ \frac{dy_2}{dt}=-y_1 & ②\end{cases}$

由①、②可和 $\frac{d^2y_1}{dt^2}+y_1=0$

由观察法知，$y_1=\cos t$，$y_1=\sin t$ 为此方程的两个特解，将其代入②式可得两个相应的特解，将其代入②式可得两个相应的特解：$y_2=-\sin t$，$y_2=\cos t$。这样就求得方程组的一个解矩阵为 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ 又 $\det=[\Phi(t)]=1\neq 0$，因此 $\Phi(t)$ 中方程组的一个基解矩阵。故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

（3）程组的分量形式为：$\begin{cases}y_1'=y_3 & ①\\ y_2'=y_2 & ②\\ y_3'=y_1 & ③\end{cases}$

解 ①+③得 $\frac{d}{dt}(y_1+y_3)=y_1+y_3$

解 ①-③得 $\frac{d}{dt}(y_1-y_3)=y_1-y_3$

解之得 $y_1+y_3=k_1e^{-t}$ $y_1-y_3=k_2e^{-t}$

由④、⑤可得 $\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}\left(k_1e^t+k_2e^{-t}\right)=c_1e^t+c_3e^{-t} \\ y_3=\frac{1}{2}\left(k_1e^t-k_2e^{-t}\right)=c_1e^t-c_3e^{-t} \end{cases}$

又由②得 $y_2=c_2e^t$

由此可求得方程组的一个解矩阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

显然，$\det[\Phi(t)]=-ze^t\neq 0$，因此 $\Phi(t)$ 是方程组的一个基解矩阵，故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^e \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

2．试证向量函数组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在任意区间 $a<x<b$ 上线性相关，则存在不全为零的三个常数 c_1,c_2,c_3 使得

$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0$, 即 $\begin{matrix} c_1+c_2x+c_3x^2=0 \\ a<x<b \end{matrix}$ ①而①式之左端是一个不高于二次的多项式，它最多只可能有二个零点，同此这与①式在 $a<x<b$ 上恒等于零矛盾，从而得证。

3．试证基解矩阵完全决定齐次线性方程组即如果方程组 $\frac{dy}{dx}=A(x)y$ 与 $\frac{dy}{dx}=B(x)y$

有一个相同的基解矩阵，则 $A(x)=B(x)$

证：设这两个方程组的相同基解矩阵为 $\Phi(x)$ 那么，必有 $\det[\Phi(t)]\neq 0$，故 $\Phi(x)$ 可逆，设逆矩阵为 $\Phi^{-1}(x)$，同而

$A(x)=\frac{d\Phi}{dx}\Phi^{-1}(x)=B(x)$　　证毕

47．设当$a<x<b$时，非齐次线性方程组 $\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$（1）中的$f(x)$不恒为零。证明（1）有且至多有 n+1 个线性无关解。

证　设$y_1(x),\cdots y_n(x)$是方程组（1）的相应齐次方程组的 n 个线性无关的解，$\varphi(x)$是（1）任意一个特解，则 $y_1(x)+\varphi(x),y_2(x)+\varphi(x),\cdots,y_n(x)+\varphi(x)$

是(1)的 n+1 个线性无关解.这是因为,若存在常数 $k_1,k_2,\cdots k_n,k_{n+1}$　使得

$k_1\left(y_1(x)+\varphi\ (x)\right)+\cdots+k_n\left(y_n(x)+\varphi(x)\right)+k_{n+1}\varphi(x)\equiv 0$

则一定有 $k_1=k_2=\cdots$　$=0$ 否则有

$$\varphi(x)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots}y_1(x)+\cdots\qquad\frac{-k_n}{\cdots}y\ (x)$$

这与$\varphi(x)$为(1)的解矛盾,因此,$k_1+k_2+\cdots k_n+k_{n+1}\equiv 0$ 假设可知$k_1=k_2=-=k_n=0$

故$k_{n+1}=0$，所以（1）n+1 个线性无关的解。

又设 $\varphi(x)$是（1）在(a, b)上的任一解，$y_1y_2\cdots$　是（1）的 n+1 个线性无关的解，　那么，$\varphi(x)-y_1(x),\ \varphi(x)-y_2(x)\cdots\ \varphi(x)-y_{n+1}(x)$ 是(1)的对应齐次方程组

$\frac{dy}{dx}=A(x)y$　　　　　　　　　　　　（2）

的解,而(2)最多有 n 个线性无关的解,所以必存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得 $x\in(a,b)$

$k_1\left(\varphi(x)-y_1\right)+k_2\left(\varphi(x)-y_2\right)+k_{n+1}\left(\varphi(x)-y_{n+1}\right)\equiv 0$

即　$\left(k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}\right)\varphi(x)=k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_{n+1}y_{n+1}$ 显然，$k_1+k_2+\cdots k_{n+1}\neq 0$，否则，存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$,使得

$k_1y_1(x)+k_2+y_2(x)+\cdots k_{n+1}y_{n+1}(x)\equiv 0$

这与$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{n+1}(x)$线性无关矛盾，故

$$\varphi(x)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots}y_1(x)+\cdots\qquad\frac{-k_n}{\cdots}y\ \ (x)$$

这说明（1）的任一解，都可由这 n+1 个线性无关的解的线性表出，同时也说明（1）的任意 n+2 个解线性相关，故方程组（1）在（a，b）上至多有 n+1 个线性无关解。