一.

1. $\underline{\alpha^2 x}$ ；$\underline{\alpha^2 x_0 \mathrm{e}^{\alpha t}}$

2. 等于 ；等于

3. $\underline{\dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left(g+\mathrm{a}_0\right)}$ ；$\underline{\mathrm{a}_0 \geq \dfrac{m_{\mathrm{B}} g}{\mu m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{A}}}}$

4. $\underline{\dfrac{4}{3} l}$ ；$\underline{\dfrac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 m l}}}$

5. $\underline{(1-\dfrac{\upsilon}{u}\dfrac{\upsilon t}{\sqrt{L^2+\upsilon^2 t^2}})v_0}$ ；$\underline{(t-\dfrac{\sqrt{L^2+\upsilon^2 t^2}-L}{u})v_0}$

6. $\underline{1-\dfrac{1}{\alpha^3}}$ ；$\underline{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}$

7. 不可能从单一热源吸取热量，使之完全变化有用的功而不产生其它影响；不可能把热量从低温物体转移到高温物体，而不产生其它影响

8. $\underline{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{Q}{R_1}+\dfrac{q}{r}-\dfrac{Q+q}{R_2}+\dfrac{Q+q}{R_3})}$ ；$\underline{\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}}$

9. $\underline{\dfrac{153}{209} r}$ ；$\underline{\dfrac{2}{3} r}$

10. $\underline{\dfrac{\lambda}{4(n_{\mathrm{o}}-n_{\mathrm{e}})}}$ ；线

11. $\underline{6.49\times 10^9}$ ；30

12. $\underline{(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2})^{-1}}$ ；$\underline{\dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^2}}$

二．13.

(1) $\delta = \mathrm{a}\sin\theta \approx \mathrm{a}\dfrac{y}{L}$ (3分)

(2) 第1、3小圆孔出射光相消处，也是第2、4小圆孔出射光相消处，

即为y轴上距O点最近暗点，故应有

$$2\delta_1 = \frac{\lambda}{2}$$

即 $$\delta_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4v} \qquad (3分)$$

(3) 第(2) 小问暗点坐标y_1(取正) 满足下述关系式：

$$\mathrm{a}\frac{y_1}{L} = \delta_1 = \frac{c}{4v}$$

得 $$y_1 = \frac{cL}{4\mathrm{a}v} \qquad (3分)$$

故中央亮纹线宽为

$$\Delta l_0 = 2y_1 = \frac{cL}{2\mathrm{a}v}$$

(4) 圆孔衍射爱里斑半角宽为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{d} = 1.22\frac{c}{vd}$$

故可分辨四个小孔的最小a值应为

$$\mathrm{a}_{\min} = l \cdot \Delta\theta = 1.22\frac{cL}{vd} \qquad (4分)$$

二．14.

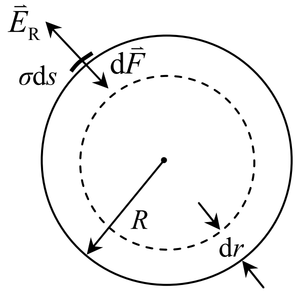
(1) $A = F\Delta l = \sigma E_{\mathrm{S}} S\Delta l$, 或$A = \dfrac{1}{2}\sigma E S\Delta l$, 或$A = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S\Delta l$

$$或A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot S\Delta l \qquad (3分)$$

(2)
$$\omega_{\mathrm{e}} = \frac{A}{S\Delta l} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (2分)$$

(3) 用外力缓慢朝里推移球面电荷，参考题解图，有

$$\mathrm{d}F = (\sigma \mathrm{d}s) E_{\mathrm{R}}\,, \sigma = Q/S,\ S = 4\pi R^2$$



14 题解图

设位移量为dr,则作功

$$\mathrm{d}A = \iint_s \mathrm{d}F \mathrm{d}r = \iint_s \sigma E_{\mathrm{R}} \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}r$$
$$= \sigma E_{\mathrm{R}} s \mathrm{d}r = Q E_{\mathrm{R}} \mathrm{d}r \qquad (4分)$$

外界输入能量即为dA，全部转化为新建场区($\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}r$，$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$) 场能，

即有 $\quad QE_{\mathrm{R}}\mathrm{d}r = \mathrm{d}A = \omega_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 4\pi R^2 \mathrm{d}r = \dfrac{Q^2 \mathrm{d}r}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

得 $$E_{\mathrm{R}} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (4分)$$

二．15.

(1) 软绳质量记为M，参考题解图1，由能量守恒得

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2=\frac{\frac{L}{2}-x}{L}Mg(\frac{L}{2}-x)$$

$$\Rightarrow\upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x)$$

此时软绳向下动量为

$$P=\frac{(L-x)-x}{L}M\upsilon=\frac{M}{2L}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x)^2\qquad(3分)$$

由质点系动量定理,(注意$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\upsilon$)得

$$N=Mg-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=Mg-\frac{2Mg}{L^2}(L-2x)^2$$

N恰好为零时，对应的x便为

$$x=x_0=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})L\qquad(3分)$$

(2) $x=x_0$时，有

$$\upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x_0)=\frac{1}{2}\sqrt{gL}\qquad(1分)$$

取初速方向竖直向下，大小为υ的自由落体参考系S，S系中软绳右侧绳段初速为零，左侧绳段竖直向上初速为

$$\upsilon_0=2\upsilon=\sqrt{gL}$$

初态如题解图2所示。

<u>解法1：动量法</u>

S系中左侧绳段无论剩余多少，向上速度υ_0不变，右侧绳段增长ζ时，向上速度记为υ_ζ，过程态如题解图3所示，有

$$\left[\frac{(L-x_0)+\zeta}{L}M\right]\upsilon_\zeta=(\frac{\zeta}{L}M)\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_\zeta=\frac{\zeta}{L-x_0+\zeta}\upsilon_0$$

得左、右速度差为

$$\upsilon_0-\upsilon_\zeta=\frac{L-x_0}{L-x_0+\zeta}\upsilon_0\qquad(3分)$$

$\mathrm{d}t$ 时间内左侧向右侧输运绳段

$$\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2}(\upsilon_0-\upsilon_\zeta)\,\mathrm{d}t=\frac{L-x_0}{2(L-x_0+\zeta)}\upsilon_0\mathrm{d}t$$

得积分式：

$$\int_0^t\upsilon_0\mathrm{d}t=\int_0^{x_0}\frac{2(L-x_0+\zeta)}{L-x_0}\mathrm{d}\zeta=2x_0+\frac{x_0^2}{L-x_0}=x_0\frac{2L-x_0}{L-x_0}$$

解得 $$t=\frac{2L-x_0}{L-x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0}=\frac{14-9\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad(3分)$$

<u>解法2：质心法</u>

参见题解图2，初态软绳质心C在B端下方，可以算得间距

$$\overline{\mathrm{CB}}=\frac{L^2-4Lx_0+2x_0^2}{2L}$$

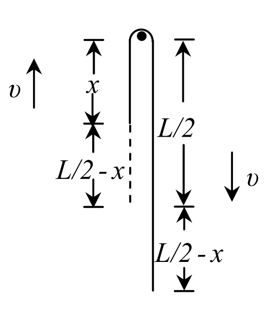
S系中此时B端上行速度为υ_0，质心C上行速度可算得为

$$\upsilon_{\mathrm{C}}=\frac{x_0}{L}\upsilon_0\qquad(3分)$$

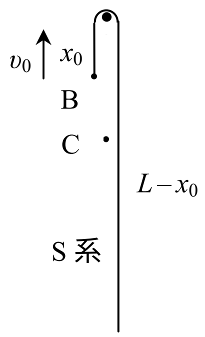
此后B、C在S系中一直作匀速直线运动，经时间t，两者间距增为

$$\overline{\mathrm{CB}}^*=\frac{L}{2}$$

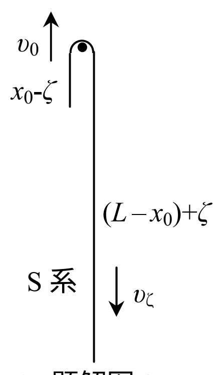
即得 $$t=\frac{(\overline{\mathrm{CB}}^*-\overline{\mathrm{CB}})}{\upsilon_0-\upsilon_{\mathrm{C}}}=\frac{2L-x_0}{L-x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0}=\frac{14-9\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad(3分)$$



15 题解图 1



15 题解图 2



15 题解图 3

二．16.

(1) $Q=\rho_{\mathrm{Q}}\cdot\pi R_1^2=5.5\times10^3\times\pi\times(0.05)^2=43.2\mathrm{J}$　　(1分)

(2) 热平衡时，通过半径为r的单位长度空气柱面向外输送热量为Q，有

$$-K_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\cdot 2\pi r=Q$$

$$\Rightarrow -\int_{T_0}^{T_1}\mathrm{d}T=\frac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

得　$T_1=T_2+\dfrac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\ln\dfrac{R_2}{R_1}=300+\dfrac{43.2}{2\pi\times8.61\times10^{-3}}\ln\dfrac{7.5}{5}=624\mathrm{K}$　　(3分)

(3) 取$r<R_1$的单位长度轴柱面，热平衡时有

$$\rho_{\mathrm{Q}}\pi r^2=-K_{\mathrm{u}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow -\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T=\frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{2K_{\mathrm{u}}}\int_0^{R_1}r\mathrm{d}r=\frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{4K_{\mathrm{u}}}R_1^2$$

得　$T_0=T_1+\dfrac{\rho_{\mathrm{Q}}R_1^2}{4K_{\mathrm{u}}}=624+\dfrac{5.5\times10^{-3}}{4\times46}\times(0.05)^2=624.07\mathrm{K}$

$\Rightarrow T_0\approx T_1=624\mathrm{K}$　　(3分)

(4) 空气层各处压强P相同，由

$P=nkT$,　　n:分子数密度

得　$n(r)T(r)=$常量$\Rightarrow \rho(r)T(r)=$常量

因此　$\gamma=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{T_1}{T_2}=0.481$　　(3分)

三．17.

(1) 参考题解图，碰撞过程中悬挂点O_1提供的水平右向力记为N_1(平均值)，两摆盘间水平碰撞力大小记为N(平均值)，碰撞时间记为Δt。

摆1的动量方程：

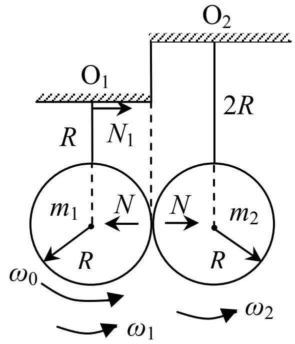
$$N_1\Delta t - N\Delta t = m_1\omega_1\cdot 2R - m_1\omega_0\cdot 2R = 2mR(\omega_1-\omega_0) \qquad (2分)$$

角动量方程(以O_2为参考点)：

摆1：$N_1\Delta t\cdot R - N\Delta t\cdot 3R = (3Rm_1\omega_1\cdot 2R + I_{C1}\omega_1) - (3Rm_1\omega_0\cdot 2R + I_{C1}\omega_0)$ (2分)

摆2：$N\Delta t\cdot 3R = I_2\omega_2$ (1分)

$$I_{C1}=\frac{1}{2}m_1R^2,\quad I_2=\frac{1}{2}m_2R^2+m_2\cdot(3R)^2$$



17 题解图

可简化为 $N_1\Delta t\cdot R - 3N\Delta t\cdot R = \dfrac{13}{2}m_1R^2(\omega_1-\omega_0)$

$$3N\Delta t\cdot R = \frac{57}{4}mR^2\omega_2$$

能量方程： $\dfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \dfrac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \dfrac{1}{2}I_1\omega_0^2$ (2分)

$$I_1=\frac{1}{2}m_1R^2+m_1\cdot(2R)^2$$

上述四个动力学方程，含四个未知量：$N_1\Delta t/m$、$N\Delta t/m$、ω_1和ω_2，可解得

$$\omega_1=-\frac{11}{65}\omega_0,\quad \omega_2=-\frac{36}{65}\omega_0 \qquad (3分)$$

三．18.

同步变化的圆柱形匀强磁场区域如题解图1所示，圆内$\vec{r}$处感应电场$\vec{E}$可表述为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

本题所给磁场区域，可处理为全R圆柱形$\vec{B}$磁场区域与$r=R/2$小圆柱形$(-\vec{B})$磁场区域的叠合。小圆孔区域中任意点A处的感应电场场强便为

$$\vec{E}_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_1\times\vec{k}+\frac{1}{2}(-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t})\vec{r}_2\times\vec{k}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_0\times\vec{k}=\vec{E}_{\mathrm{O'}}\qquad(4分)$$

结论：如题解图2所示，$r=R/2$小圆孔区域内为匀强磁场区。将小圆孔匀强磁场区放大如题解图3所示，P作类斜抛运动，有

$$\mathrm{a}=\frac{qE}{m}，E=\frac{R}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}KR\qquad(2分)$$

水平”射程：$R=\upsilon_0^2\sin 2\theta/\mathrm{a}$ (1分)

射高：$\frac{R}{2}=\upsilon_0^2\sin^2\theta/2\mathrm{a}$ (1分)

得：

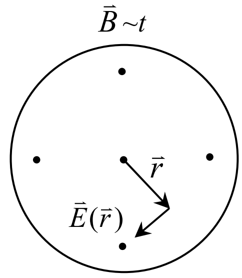
θ：$\sin2\theta=\sin^2\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta\Rightarrow\tan\theta=2$

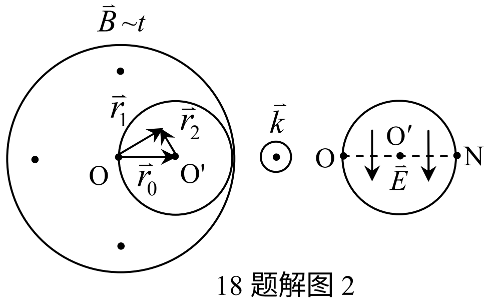
$\Rightarrow\theta=\arctan 2(=63.4°)$ (1分)

υ_0：$\upsilon_0^2=\mathrm{a}R/\sin^2\theta,\ \sin\theta=2/\sqrt{5}$

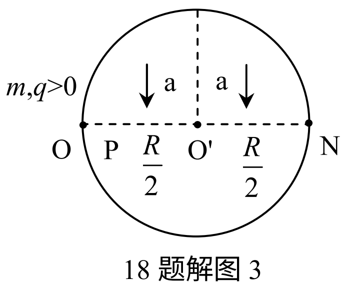
$\Rightarrow\upsilon_0=\frac{\sqrt{5}}{4}R\sqrt{\frac{Kq}{m}}$ (1分)



18 题解图 1



18 题解图 2



18 题解图 3

三．19.

(1) 取ABOA回路，垂直图平面向里的磁通量

$$\Phi=-B\cdot\frac{1}{2}(l\cos\phi)\ (l\sin\phi)=-\frac{1}{4}Bl^2\sin 2\phi$$

即有 $\varepsilon_{\mathrm{ABOA}}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}Bl^2\cos 2\phi\cdot\omega$，$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

由刚体平面平行运动知识，可以导得

$$\upsilon_{\mathrm{A}}=(l\sin\phi)\omega\Rightarrow\omega=\frac{\upsilon_{\mathrm{A}}}{l\sin\phi}$$

即有 $\varepsilon_{\mathrm{AB}}=\varepsilon_{\mathrm{ABOA}}=\dfrac{1}{2}Bl\upsilon_{\mathrm{A}}\cos 2\phi\Big/\sin\phi$ (1.5分)

(2) A到B的电流 $I_{\mathrm{AB}}=\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{AB}}}{R}=\dfrac{Bl}{2R}\upsilon_{\mathrm{A}}\dfrac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$

AB杆所受安培力$\vec{F}$，其正方向的方向矢量$\vec{e}$如题解图所示，有

$$\vec{F}=F\vec{e},\ F=I_{\mathrm{AB}}Bl=\frac{B^2l^2}{2R}\upsilon_{\mathrm{A}}\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$$

$$F_{\mathrm{x}}=-F\cos\phi,\ F_{\mathrm{y}}=-F\sin\phi$$

AB杆中d$\vec{l}$段所受安培力为

$$\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}F\cdot\vec{e}=I_{\mathrm{AB}}B\mathrm{d}l\cdot\vec{e}$$

d$\vec{l}$段的速度记为$\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$，则d$\vec{F}$提供的功率为

$$\mathrm{d}P=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}=I_{\mathrm{AB}}B\mathrm{d}l\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$$

引入质量线密度常量λ，dl段质量$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$，则有

$$\mathrm{d}P=\frac{1}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot(\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l})$$

安培力$\vec{F}$为AB杆提供的总功率为

$$P_{\mathrm{F}}=\int_l\mathrm{d}P=\frac{1}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\int_0^l\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$$

因 $\displaystyle\int_0^l\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}=m\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}$ $\begin{cases}m=\lambda l:\text{细杆质量}\\ \vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}:\text{细杆质心速度}\end{cases}$

便得 $P_{\mathrm{F}}=\dfrac{m}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=lI_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}$

即安培力提供的功率等效于安培力全部作用于质心C处，为质心运动提供的功率。

因 $\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=\upsilon_{\mathrm{cx}}\vec{i}+\upsilon_{\mathrm{cy}}\vec{j}$ $\begin{cases}\upsilon_{\mathrm{cx}}=\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\\ \upsilon_{\mathrm{cy}}=-\dfrac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}\ (\text{注意}\upsilon_{\mathrm{A}}>0)\end{cases}$

得 $$P_{\mathrm{F}}=F_{\mathrm{x}}\upsilon_{\mathrm{cx}}+F_{\mathrm{y}}\upsilon_{\mathrm{cy}}=-\frac{1}{2}F\upsilon_{\mathrm{A}}(\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}-\sin\phi)=-\frac{1}{2}F\upsilon_{\mathrm{A}}\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow -P_{\mathrm{F}}=\frac{B^2l^2}{4R}\upsilon_{\mathrm{A}}^2\frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi}\qquad (6分)$$

又，细杆电阻消耗的电功率为

$$P_{\mathrm{I}}=I_{\mathrm{AB}}^2R=\frac{B^2l^2}{4R}\upsilon_{\mathrm{A}}^2\frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi}\qquad (0.5分)$$

即 $$-P_{\mathrm{F}}=P_{\mathrm{I}}$$

(3) ϕ角位置时，细杆动能

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

$t\to t+\mathrm{d}t$时间间隔对应$\phi\to\phi+\mathrm{d}\phi$，有

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{3}ml^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}ml^2\beta\mathrm{d}\phi$$

重力势能减少量

$$-\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}=\mathrm{d}\left[mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\phi\right)\right]=mg\frac{l}{2}\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

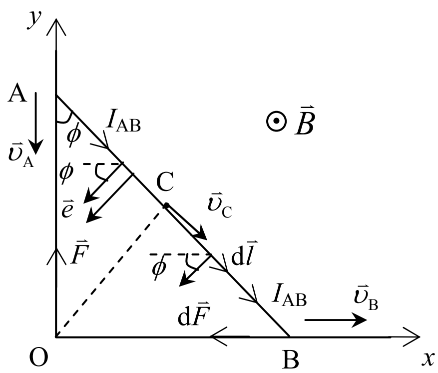
电阻上消耗能量

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{I}}=P_{\mathrm{I}}\mathrm{d}t，\ \phi=45°时P_{\mathrm{I}}=0$$

由功能关系 $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=-\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}-\mathrm{d}W_{\mathrm{I}}$

$\phi=45°$时，得 $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=-\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}\Rightarrow\frac{1}{3}ml^2\beta\mathrm{d}\phi=mg\frac{l}{2}\sin\phi\mathrm{d}\phi$

$$\Rightarrow\beta=\frac{3g}{2l}\sin\phi=\frac{3\sqrt{2}}{4l}g\qquad (2分)$$



19 题解图