一. 解: 设 A_i $(i=1,2,3,4)$ 分别表示乘坐飞机、火車、轮船、汽車. B表示误期到达. 则成立

$p(A_1)=5\%$, $p(A_2)=15\%$, $p(A_3)=30\%$

$p(A_4)=50\%$, 且 $p(B|A_1)=1-p(\bar{B}|A_1)$
$=1-100\%=0$

$p(B|A_2)=1-70\%=30\%$, $p(B|A_3)=40\%$,

$p(B|A_4)=10\%$.

于是, 所求即为

$$p(A_2|B)=\frac{A(B|A_2)p(A_2)}{p(B)}$$

$$=\frac{30\%\times15\%}{5\%\times0+15\%\times30\%+30\%\times40\%+50\%\times10\%}$$

$$=\underline{9/43}.$$

#

二. 解

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	
0	a	b	$\frac{1}{9}$	$a+b+\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	c	0	$\frac{2}{9}+c$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
	$\frac{3}{9}+a$	$b+c$	$\frac{1}{9}$	

(1) 由 $E\xi=\frac{2}{3}$，得 $0+1\cdot(\frac{2}{9}+c)+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$，

解得 $c=\frac{2}{9}$

又由 $E\eta=\frac{2}{3}$，得 $0+1\cdot(b+c)+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$，

解得 $b=\frac{2}{9}$，

再由规范性知 $a=1-(b+c+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9})$

$=\frac{1}{9}$.

(2) ξ,η 的边际分布列分别为

ξ	0	1	2
p	$4/9$	$4/9$	$1/9$

及

η	0	1	2
p	$4/9$	$4/9$	$1/9$

且由 $p\{\xi=2,\eta=2\}=0 \neq \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=p\{\xi=2\}\cdot p\{\eta=2\}$

即知 ξ 与 η 不独立.

(3) 由(1)知

(ξ,η)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
p	$1/9$	$2/9$	$1/9$	$2/9$	$2/9$	0	$1/9$	0	0
$\min\{\xi,\eta\}$	0	0	0	0	1	1	0	1	2

故而有

$\zeta=\min\{\xi,\eta\}$	0	1	2
p	$7/9$	$2/9$	0

于是 $F_\zeta(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ 7/9, & 0\le z<1 \\ 1, & 1\le z \end{cases}$

(4) 由(3)知有

$\xi\eta$	0	1	2	4
P	7/9	2/9	0	0

故 $E(\xi\eta) = 2/9$. #

三. 解：依题意，可设正常工作的部件完好的数目为 μ_n，则 $\mu_n \sim B(n, p)$，其中 $p = 1 - 0.1 = 0.9$.

于是 $E\mu_n = np = 0.9n$，$D\mu_n = 0.09n$.

故由二项分布的中心极限定理知有

$$P\{\mu_n \geq 80\% n\} = P\left\{\frac{\mu_n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\right]$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95$$

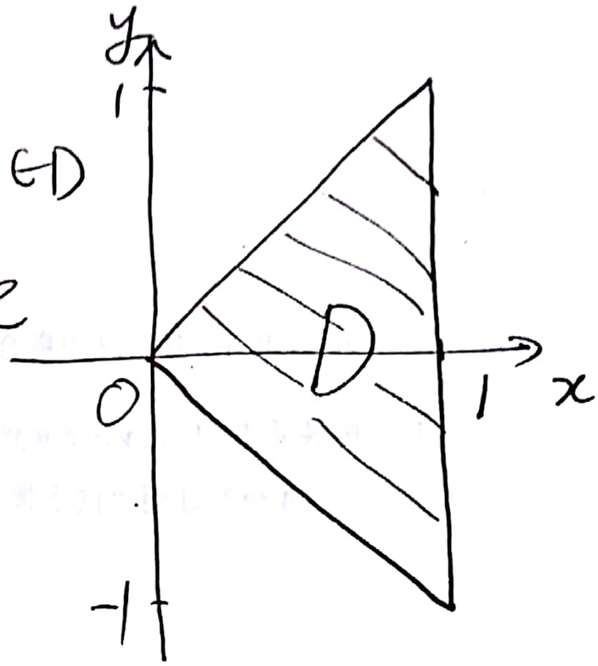
查表，得 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645$

解之得 $n \geq 24.354$

故 n 至少为 25……

林

四．解：画图如右：



故 $p_{XY}(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$

于是

(1) $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{XY}(x,y)dy$

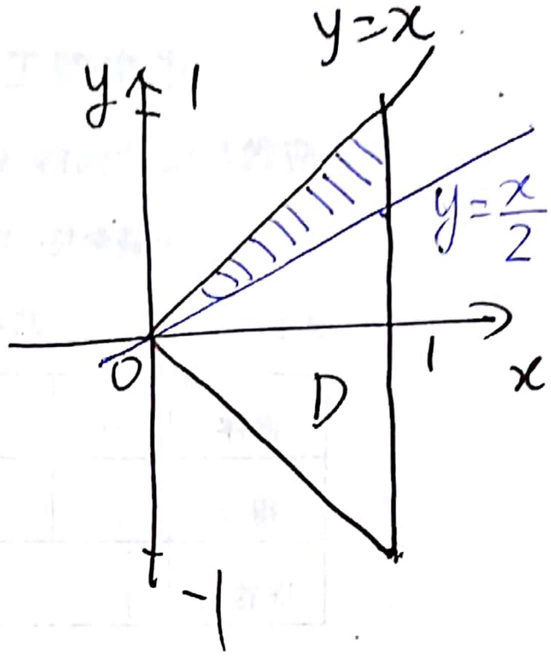
$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{XY}(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

四(2)

解：



$$P\{Y>\frac{X}{2}\} = \iint\limits_{y>\frac{x}{2}} P_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{x} 1 \quad dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}.$$

#

五.

解：(1) 由 $\overline{X}=EX=mp$ 得 $\hat{p}_1=\frac{1}{m}\overline{X}$

又 $E(\hat{p}_1)=E(\frac{1}{m}\overline{X})=\frac{1}{m}E(\overline{X})=\frac{1}{m}E(\frac{1}{n}\sum X_i)$

$$=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(mp)=p.$$

故 $\hat{p}_1$ 是 p 的无偏估计

(2) 极大似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}$$

$$=p^n\cdot(1-p)^{\sum x_i-n}$$

取对数，$\ln L(p)=n\ln p+(\sum x_i-n)\ln(1-p)$

求导数，并令其为0 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}n-\frac{1}{(1-p)}(\sum x_i-n)=0$

解之得 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

#

六.

解：依题意，有 $n=36$, $\bar{x}=64.5$, $S_{n-1}=15$.

$\alpha=0.05$. 于是

(1) 设 $H_0: \mu=70$, $H_1: \mu\neq70$

选取统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_{n-1}}\sqrt{n}$ $(\sim t(n-1))$

计算得 $\hat{T}=\frac{64.5-70}{15}\sqrt{36}=-2.2$

而拒绝域 $W_1=(-\infty, -t_{0.975}^{(35)})\cup(t_{0.975}^{(35)}, +\infty)$

查表得 $t_{0.975}(35)=2.03$. 故

$W_1=(-\infty, -2.03)\cup(2.03, +\infty)$

于是由 $\hat{T}\in W_1$. 可知应拒绝 H_0. 即

不认为平均成绩为70.

六(2)

解：依题意，应选取枢轴量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \quad (\sim \chi^2(n-1))$$

由 $1-\alpha=0.95$，知 $\alpha=0.05$，查表知

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(35)=20.569$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)=53.203$

故置信区间为

$$\left[\frac{(36-1)\cdot 15^2}{53.203}, \frac{(36-1)\cdot 15^2}{20.569}\right]$$

$$=[148.018, 382.858]$$

#

七. 填空题.

1. $C_5^2/C_{10}^3 = \underline{1/12}$

2. 解: 显然 $1<a<3$. 且 $p(B)=1-p(A)$. 由

$$\frac{7}{9}=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A)p(B)$$
$$=1-p(A)[1-p(A)]$$

解之得 $p(A)=\frac{1}{3}$ 或 $p(A)=\frac{2}{3}$ (舍)

于是 由 $\frac{1}{3}=p(A)=\int_1^a \frac{1}{3-1}dx=\frac{1}{2}(a-1)$

解得 $\underline{a=\frac{5}{3}}$.

3. 解: $p\{2<X<20\}=p\{2-11<X-11<20-11\}$

$=p\{|X-11|<9\}\geq 1-\frac{9}{9^2}=\underline{\frac{8}{9}}$.

$$\boxed{p\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D\cancel{X}}{\varepsilon^2}}$$

七.(续)

4. 解：由 $X \sim U(0,3)$ 知 $DX = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}$，

又 Y 为指数分布，且 $\lambda = \frac{1}{4}$. 于是 $DY = 16$.

故而 $D(2X-3Y+4)$

$= 4DX + 9DY = 3 + 144 = 147$.

5. 解：易知 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，$i=1,2,\cdots,9$.

故 $U = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(3)$，

$V = \sum_{i=4}^{9} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(6)$

而 $Y = \frac{U/3}{V/6}$，故 $Y \sim F(3,6)$.

6. (1) 相关系数 $= 0.960058$;

(2) $\hat{Y} = -4.46883 + 0.8696996X$

八. 选择题

$\boxed{1}$. 性质"若 $A\subset B$, 则 $P(A)\le P(B)$".
选 (A)

$\boxed{2}$. "对立事件". 选 (C).

$\boxed{3}$. 由密度函数的非零区域不是矩形, 即知选 (B).

$\boxed{4}$ 利用 $y=e^x$ 的单调性. 以及性质

$$u(x)^{v(x)}=e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}.$$

即知选 (D)

$\boxed{5}$. 由密度函数的"规范性", 即

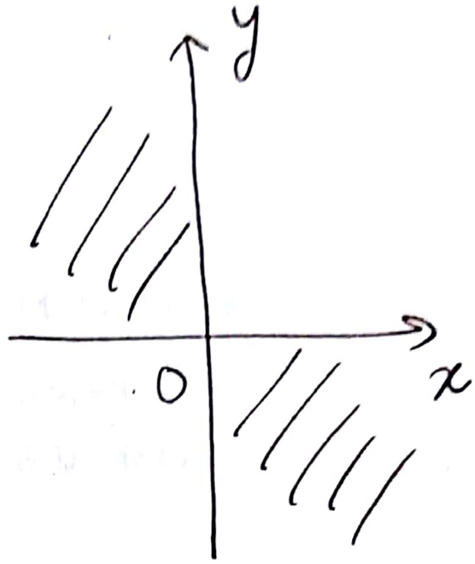
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)\,dx$$

结合 $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$. $f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

知选 (C)

八(续)

6. $P\{\frac{X}{Y}<0\}$



$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}<0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$ 选(A).

7. 设 $X=\frac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中 $U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(n)$.

则 $Y=\frac{1}{X^2}=\frac{V/n}{U^2/1}\sim F(n,1)$. 选(D).

8. 由泊松分布的"可加性"知

$\xi+\eta\sim P(0.5+0.5)=P(1)$. 于是

$P\{\xi+\eta=3\}=\frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}$ 选(A).

八.6. $P\left\{\frac{X}{Y}<0\right\}=?$ 另解.

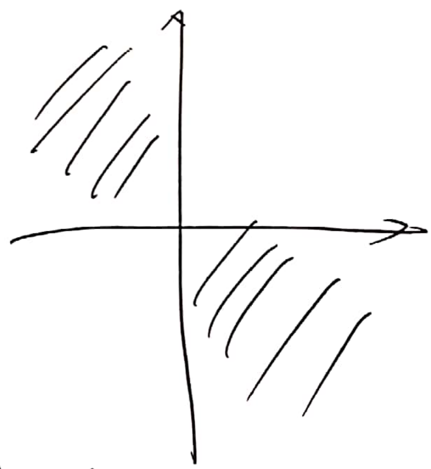
法一：$P\left\{\frac{X}{Y}<0\right\}=P\{X>0,Y<0\}+P\{X<0,Y>0\}$

$=P\{X>0\}P\{Y<0\}+P\{X<0\}\cdot P\{Y>0\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}.$

法二. 几何概型角度考虑.



$P\left\{\frac{X}{Y}<0\right\}$

$=\iint\limits_{(x,y)\in \mathrm{II}\cup\mathrm{IV}} p(x,y)\,dx\,dy$

$=\frac{1}{2}$ （利用二维标准正态分布图像的对称性和规范性）.

注：相信其他同学也很有可能还有其他解法，希望广大同学踊跃提供

补充题：

1. 解：(1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[-2,2]\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P\{Y_1=1,Y_2=1\}=P\{X>0,X>1\}=P\{X>1\}$

$=\int_1^2 \frac{1}{4}dx=1/4.$

同理 $P\{Y_1=1,Y_2=0\}=\frac{1}{4}$，

$P\{Y_1=0,Y_2=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y_1=0,Y_2=1\}=0.$

故有联合分布列：

$Y_1 \backslash Y_2$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/2	0	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$p_{\cdot j}$	3/4	1/4	

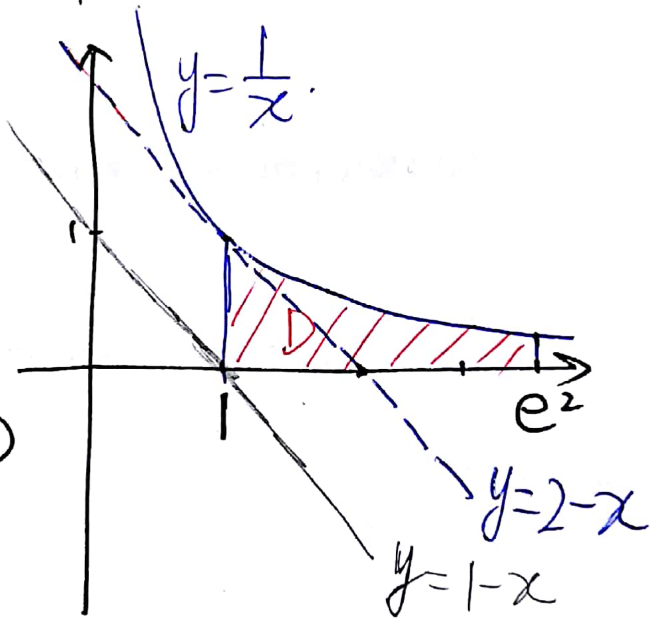
(2) $EY_1=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1/2$，$EY_2=1/4$.

且 $E(Y_1Y_2)=1\cdot1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

所以

$$Cov(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-EY_1\cdot EY_2$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.\quad \#$$

2. 解：画图如右：



$S_{阴}=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$.

$\therefore f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$

于是

$$P\{X+Y\geq1\}=\iint\limits_{x+y\geq1}f(x,y)dxdy=\underline{1}$$

引申：$P\{X+Y\geq2\}=?$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}, & 1\leq x\leq e^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$f_X(2)=\underline{\frac{1}{4}}$. $\quad\#$

3. $\boxed{\text{知识点：二项分布＋连续分布}}$

解：$Y \sim B(3, p)$，其中

$$p = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 1/4$$

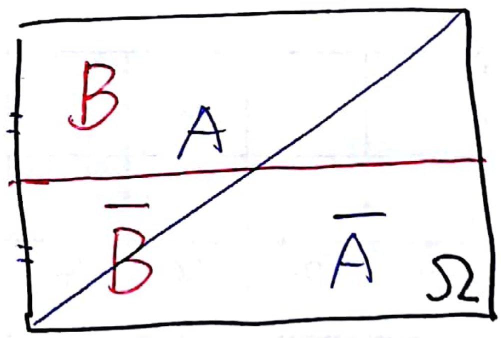
$$\therefore \underline{P\{Y=2\}} = C_3^2 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \left(1-\tfrac{1}{4}\right)^1 = \underline{9/64}.$$

4. $\underline{9/4}$

5. (B)

6. (A)

(B).(C).(D)均不成立的反例 $\Longrightarrow$



7. 解：

$\because f(x)=F'(x)=\left[0.6\Phi(x)+0.4\Phi\left(\frac{x-10}{2}\right)\right]'$

$=0.6\varphi(x)+0.4\varphi\left(\frac{x-10}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0.6\cdot x\cdot\varphi(x)dx+$

$\int_{-\infty}^{+\infty}0.2x\cdot\varphi\left(\frac{x-10}{2}\right)dx$

$=0+\int_{-\infty}^{+\infty}0.2x\cdot\varphi\left(\frac{x-10}{2}\right)dx$

$\xlongequal[\text{则 } dx=2dt]{\text{令 } \frac{x-10}{2}=t}0.2\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+10)\varphi(t)\cdot 2dt$

$=0.4\left[\int_{-\infty}^{+\infty}2t\varphi(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}10\varphi(t)dt\right]$

$=0.4[0+10]=4.$

#