命题逻辑（续）

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 永真式
- 命题等价
- 命题的范式
- 命题等价的判定
- 命题的可满足性
- 推理规则及论证

命题表达式的真值表

$$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \vee \neg p$
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \wedge \neg p$
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如：$\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

逻辑等价

- p和q逻辑等价：在所有可能情况下p和q都有相同的真值。
  - 也就是说，$p \leftrightarrow q$是永真式。
  - 记法：$p \equiv q$，或者$p \Leftrightarrow q$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$$

$$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$$

还有哪些永真式？

常用的逻辑等价(1)

名称	等价
双重否定律	$A \equiv \neg\neg A$
幂等律	$A \equiv A \vee A,\ A \equiv A \wedge A$
交换律	$A \vee B \equiv B \vee A,\ A \wedge B \equiv B \wedge A$
结合律	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

常用的逻辑等价(2)

否定律

名称	等价
支配律	$A\vee T \equiv T, A\wedge F \equiv F$
恒等律	$A\vee F \equiv A, A\wedge T \equiv A$
排中律	$A\vee \neg A \equiv T$
矛盾律	$A\wedge \neg A \equiv F$
	$A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$
	$A\leftrightarrow B \equiv (A\rightarrow B)\wedge(B \rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B \equiv \neg B\rightarrow\neg A$
	$A\leftrightarrow B \equiv \neg B\leftrightarrow\neg A$
归缪论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \equiv \neg A$

逻辑等价的判定

- $\neg(p\rightarrow q)$和$p\wedge\neg q$是否逻辑等价？

$$\neg(p\rightarrow q) \equiv \neg(\neg p\vee q)$$
$$\equiv \neg(\neg p)\vee \neg q$$
$$\equiv p \vee \neg q$$

- $p\wedge q \rightarrow p\vee q$是否永真？

$$p\wedge q \rightarrow p\vee q \equiv \neg(p\wedge q) \vee (p\vee q)$$
$$\equiv (\neg p\vee \neg q) \vee (p\vee q)$$
$$\equiv \neg p\vee p \vee\neg q \vee q$$
$$\equiv \mathrm{T}$$

通过逻辑等价进行推理（续）

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

通过逻辑等价进行推理（续）

- **We set :**
  - **P1 = Bill is from Boston**
  - **P2 = Jim is from Chicago.**
  - **P3 = Sam is from Boston**
  - **P4 = Bill is from Chicago.**
  - **P5 = Jim is from Boston**
  - **P6 = Bill is from Detroit.**

$p_1 \wedge p_3$ **is False**
$p_1 \wedge p_4$ **is False**
$p_2 \wedge p_4$ **is False**
$p_2 \wedge p_5$ **is False**
……

- **So, We have:**
  - $((p1 \wedge \sim p2) \vee (\sim p1 \wedge p2)) \wedge ((p3 \wedge \sim p4) \vee (\sim p3 \wedge p4)) \wedge ((p5 \wedge \sim p6) \vee (\sim p5 \wedge p6))$ **is true**

通过逻辑等价进行推理（续）

We have:

$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_3 \wedge p_4)) \wedge ((p_5 \wedge \sim p_6) \vee (\sim p_5 \wedge p_6))$

Note: $((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4)$

And $(\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \wedge ((p_5 \wedge \sim p_6) \vee (\sim p_5 \wedge p_6))$

$\equiv (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4 \wedge \sim p_5 \wedge p_6)$ **is True**

So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

Note: Normal Form

析取（合取）范式的存在性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg r)$ （消去↔ ）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律、结合律）

主析取（合取）范式的唯一性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r\leftrightarrow\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

逻辑等价的判定

- 命题逻辑等价的可判定性
  - 基于主析取（合取）范式的唯一性
  - 还没有（在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法
- 命题表达式的可满足性
  - 转化为命题的逻辑等价问题
  - $\neg p \equiv \mathrm{T}$?

Sudoku谜题（九宫格数独游戏）

- **$3^2 \times 3^2$的网格，3^2个3×3的子网格。**
- **每行、每列及每宫填入数字1-9且不能重复。**

4 →

	2	9				4		
			5		4	1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Sudoku谜题（命题可满足问题）

- s_{xyz}：第x行第y列的格子里填上数字z.

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigvee_{z=1}^{9} s_{xyz}$$

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{8}\bigwedge_{i=z+1}^{9}(\neg s_{xyz} \vee \neg s_{xyi})$$

$$\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{x=1}^{9} s_{xyz}$$

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{y=1}^{9} s_{xyz}$$

$$\bigvee_{z=1}^{9}\bigwedge_{i=0}^{2}\bigwedge_{j=0}^{2}\bigwedge_{x=1}^{3}\bigwedge_{y=1}^{3} s_{(3i+x)(3j+y)z}$$

……

设计Sudoku谜题，使得它有唯一解。

命题逻辑的推理规则

附加	$1.\ A \Rightarrow (A \vee B)$
化简	$2.\ (A \wedge B) \Rightarrow A$
假言推理	$3.\ A \to B, A \Rightarrow B$
取拒式	$4.\ A \to B, \neg B \Rightarrow \neg A$
析取三段论	$5.\ A \vee B, \neg B \Rightarrow A$
假言三段论	$6.\ A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$
消解	$7.\ A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$

用推理规则建立论证

- “今天下午不出太阳并且比昨天冷”，“只有今天下午出太阳，我们才去游泳”，“若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览”，“若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家”，结论“我们将在黄昏时回家”。
- p: 今天下午出太阳，q: 今天比昨天冷，r: 我们将去游泳，
- s: 我们将乘独木舟游览，t: 我们将在黄昏时回家。
  - $\neg p \wedge q$
  - $r \rightarrow p$
  - $\neg r \rightarrow s$
  - $s \rightarrow t$

$\neg p$	化简
$\neg r$	取拒式
s	假言推理
t	假言推理

用推理规则建立论证

- 已知$(p \land q) \lor r$和 $r \to s$
- $p \lor s$ 是否为真？
  - $(p \land q) \lor r \equiv (p \lor r) \land (p \lor q)$
  - $r \to s \equiv \neg r \lor s$

$p \lor r$ 化简

$p \lor s$ 消解

消解：$r \lor p, \neg r \lor s \Rightarrow p \lor s$

论证中的谬误（举例）

- $p \to q,\ q \Rightarrow p$ ×
- $p \to q,\ \neg p \Rightarrow \neg q$ ×

$p \to q,\ p \Rightarrow q$

$p \to q,\ \neg q \Rightarrow \neg p$

作业

- 教材[1.2] P21-23
  - 6, 24
  - 41, 43
  - 46, 47, 52
  - 60
- 教材[1.5] P54-57
  - 12, 33