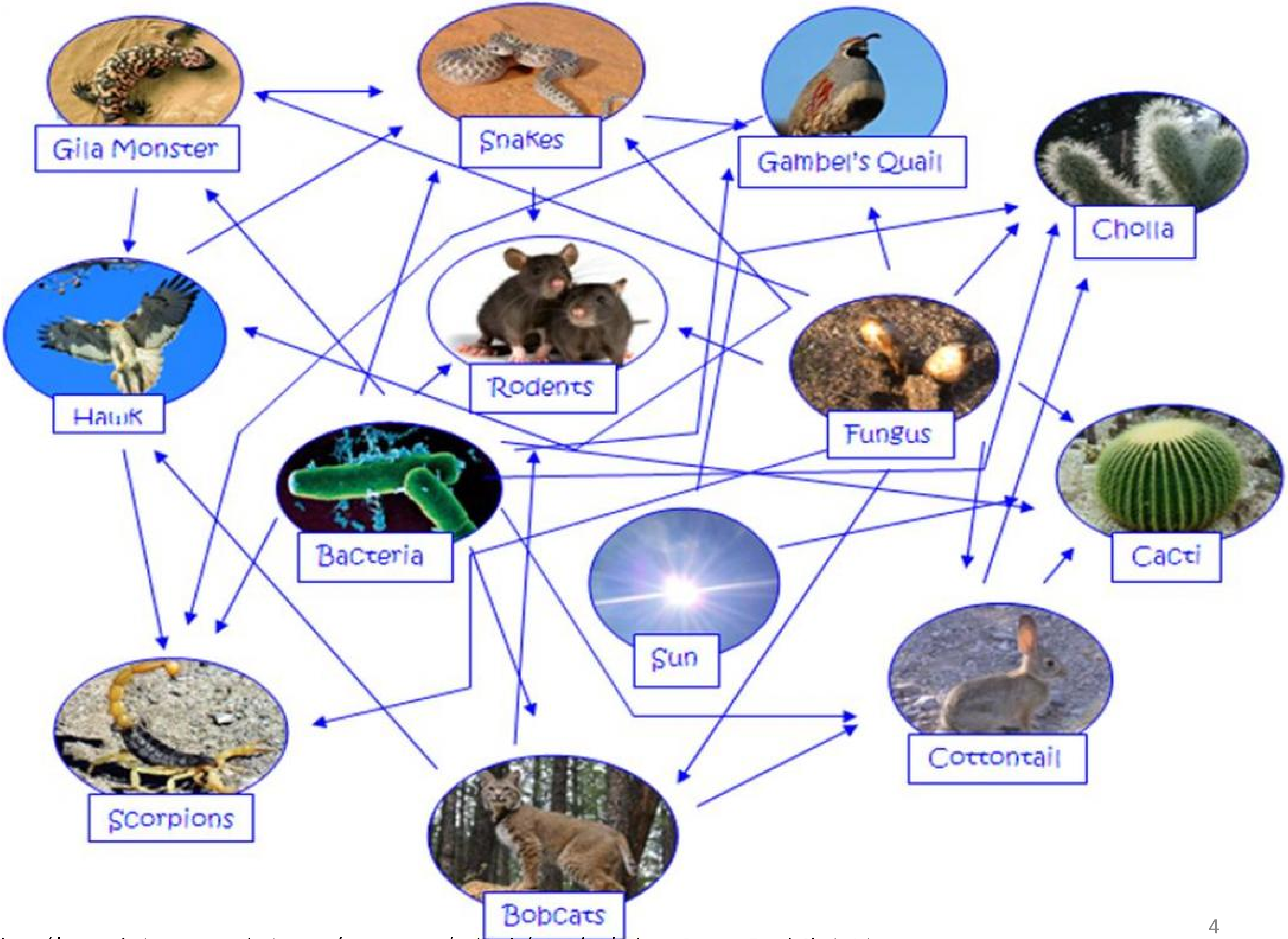
图的基本概念

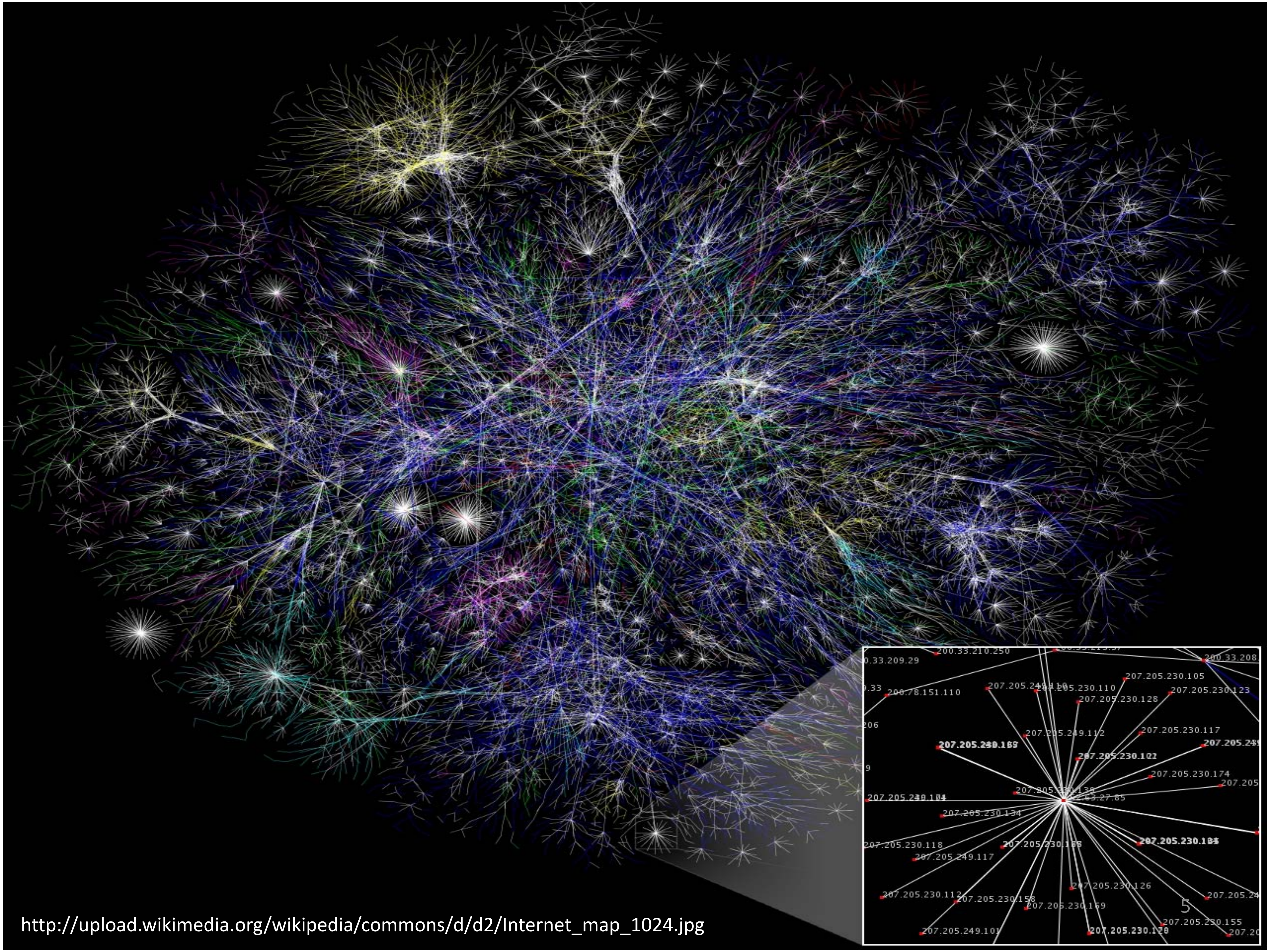
程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

图，就在我们身边

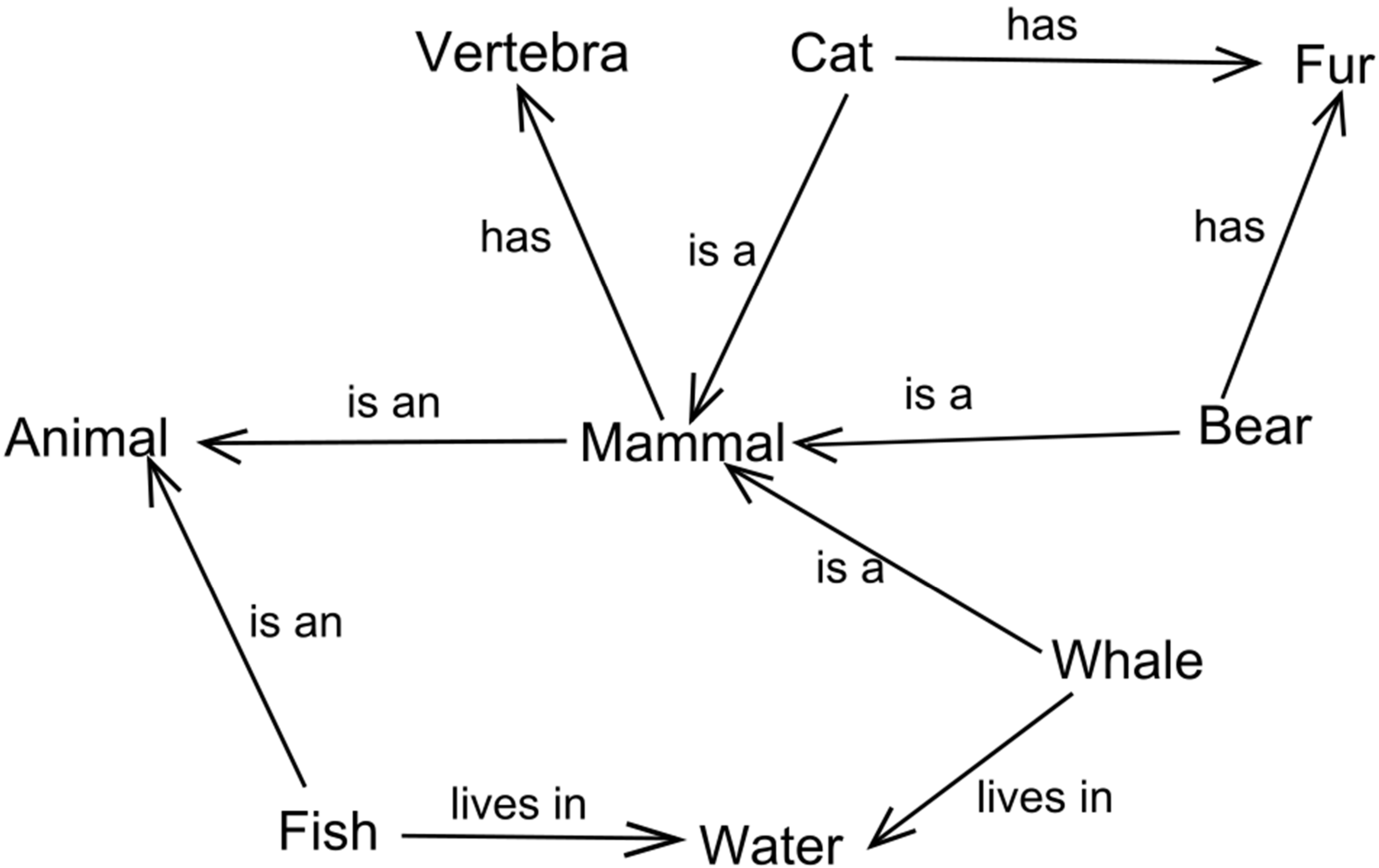
http://currentcatholic.files.wordpress.com/2011/01/social-networking.jpg



http://www.chainconveyordesign.net/wp-content/uploads/2012/01/Sahara-Desert-Food-Chain1.jpg

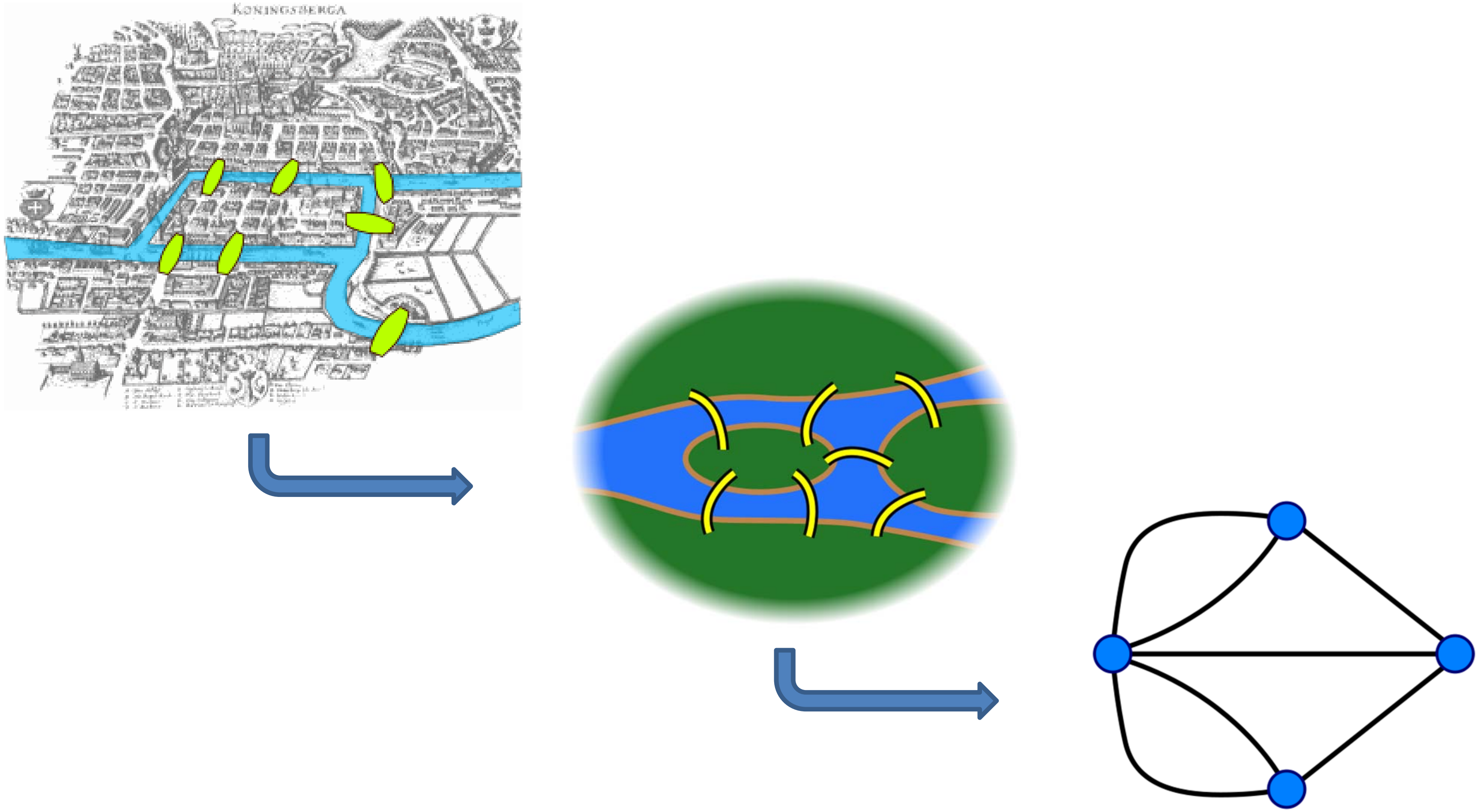


http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/67/Semantic_Net.svg/1000px-Semantic_Net.svg.png

一切都源于柯尼斯堡的七座桥



http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

本节课的主要内容

1.1 图的基本概念

1.5 图的中心与中位点

1.6 图的矩阵表示

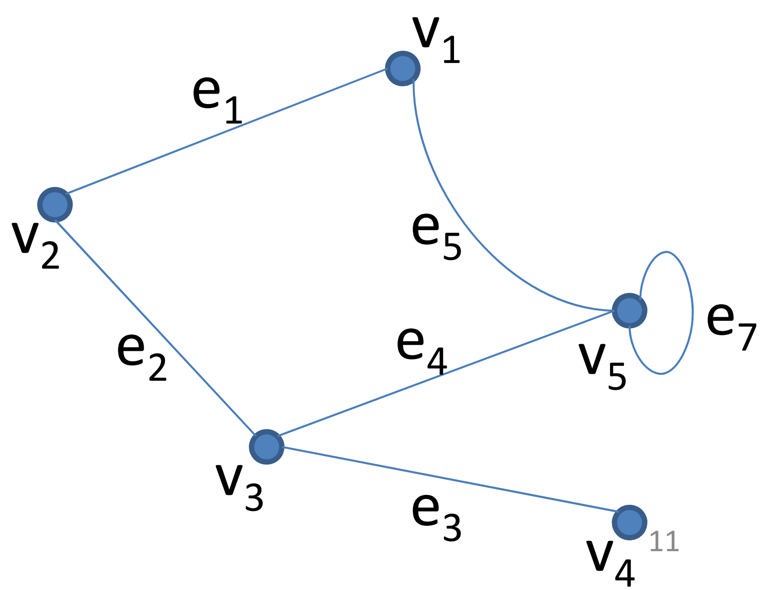
集合、无序对

- 集合 (set)
  - 一组不重复的对象
  - 例：$S=\{v_1, v_2, v_3\}=\{v_3, v_2, v_1\}=\{v_1, v_1, v_2, v_3\}$
- 无序对 (unordered pair)
  - 含有2个或1个元素的集合
  - 例：$\{v_1, v_2\}$，$\{v_2\}$
  - 常记作：(v_1, v_2)，(v_2, v_2)

- 如无特殊说明，本课程中
  - 用()表示无序对
  - 用<>表示有序对

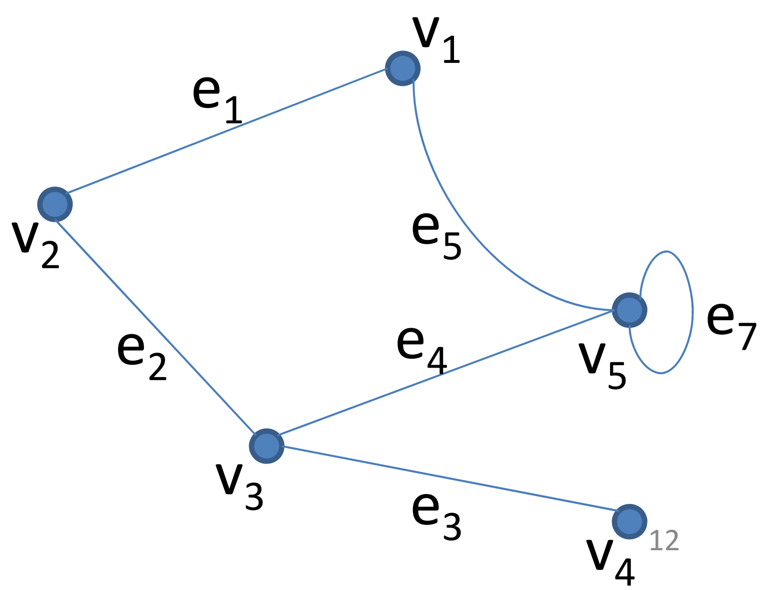
图、顶点、边

- 图： G=<V,E>
  - 顶点集 (vertex set)： V或V(G)
  - 边集 (edge set)： E或E(G)
  - E(G)要满足什么条件？
    - $\forall e \in E(G), (|e| \in \{1,2\})$
      $\forall e \in E(G), (e \subseteq V(G))$
- 图的规模
  - 阶 (order)： ν(G)=|V(G)| //读音“纽”
  - 边数 (size)： ε(G)=|E(G)|
- 边的几种记法： e=(u, v)=uv

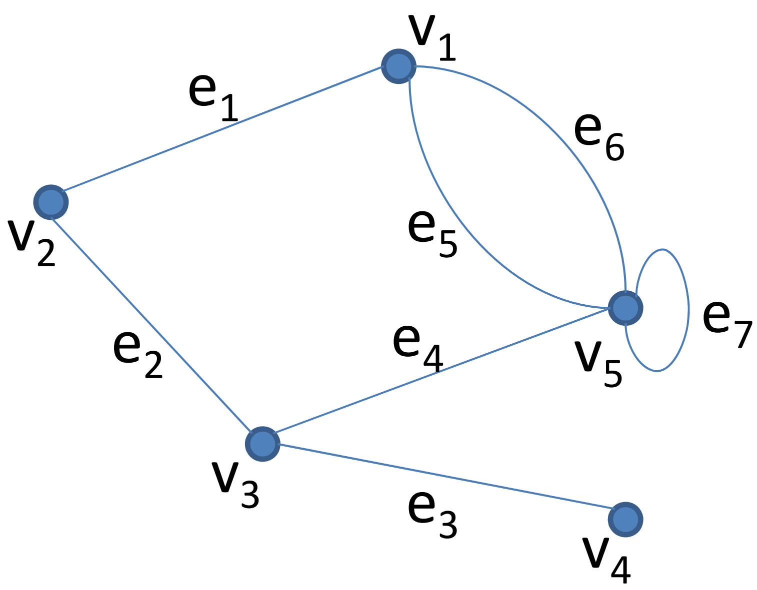


图、顶点、边(续)

- 一些术语
  - v_1、v_2是e_1的端点 (endpoint)
  - v_1、v_2和e_1关联 (incident)
  - v_1和v_2相邻 (adjacent)
  - e_1和e_2相邻 (adjacent)
  - e_7是环边 (loop)

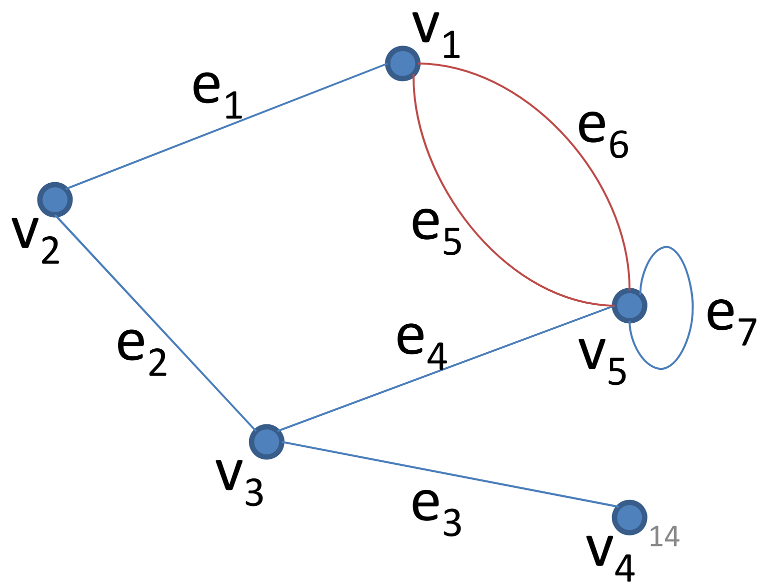


- 如果我们用刚才的集合表示法来表示这个图，你觉得会不会有什么问题？



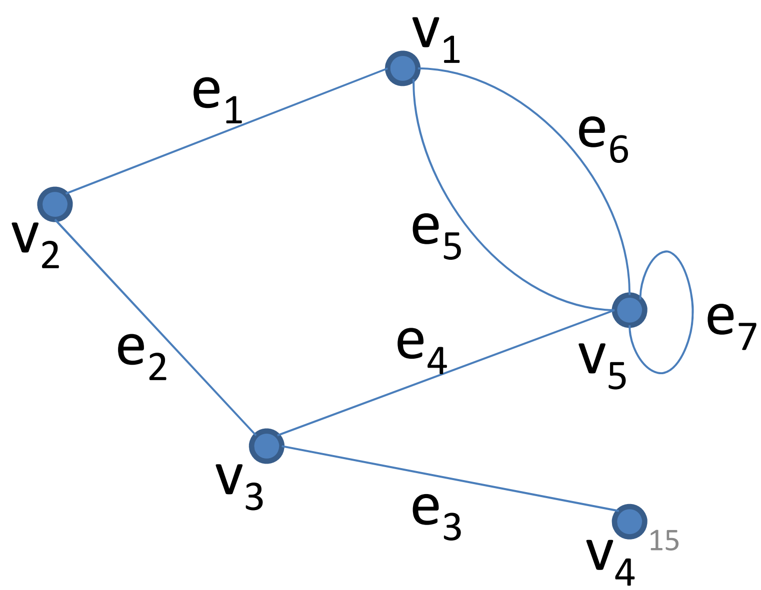
多重集合、重边

- 多重集合 (multiset)
  - 一组可重复的对象
  - 例：S={v1, v2, v3}={v3, v2, v1}≠{v1, v1, v2, v3}
- 重边 (multiple edges)
  - 例：e_5和e_6
  - $E(G)=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_5)\}$



度

- 顶点的度 (degree)
  - 顶点关联的边的数量，环边计2次
  - 例：$d(v_1)=3$，$d(v_5)=5$
- 图的度
  - 最大度：$\Delta(G)=\max_{v\in V(G)} d(v)$
  - 最小度：$\delta(G)=\min_{v\in V(G)} d(v)$



推论1.1.1

- 任何图中，奇度顶点的个数总是偶数（包括0）。

证明：

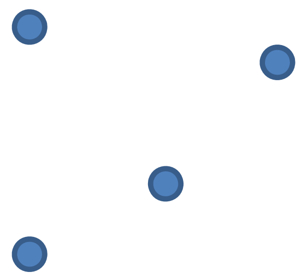
1. 顶点度数之和为偶数。
2. 奇度顶点的个数不能是奇数。

一些重要类型的图

- 零图 **(null graph)**
  - V(G)=Ø
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- **空图 (empty graph)**
  - E(G)=Ø
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

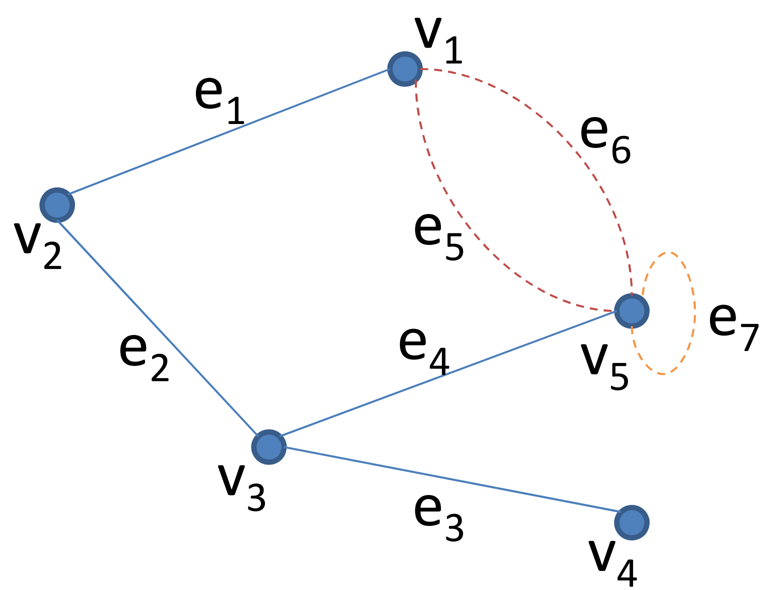


一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- **平凡图 (trivial graph)**
  - $\nu(G)=1$的空图
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

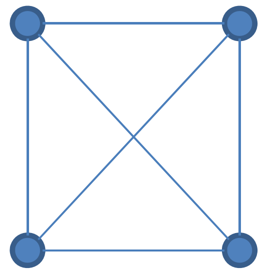
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- **简单图 (simple graph)**
  - 没有环边和重边
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



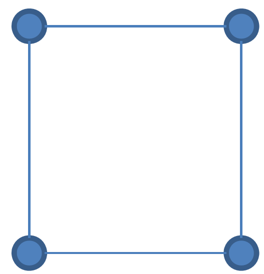
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- **完全图 (complete graph)**
  - 每对顶点都相邻的简单图，记作$K_{v(G)}$
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



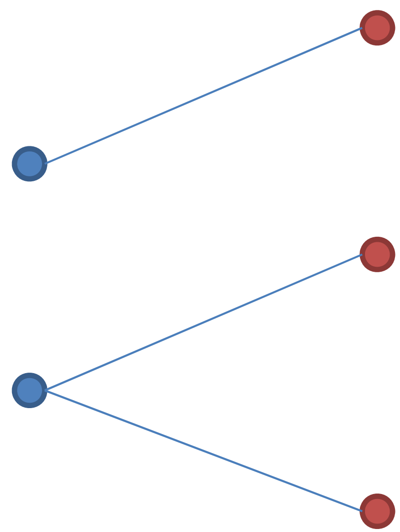
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- **k-正则图 (k-regular graph)**
  - $\forall v \in V(G), (d(v) = k)$
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



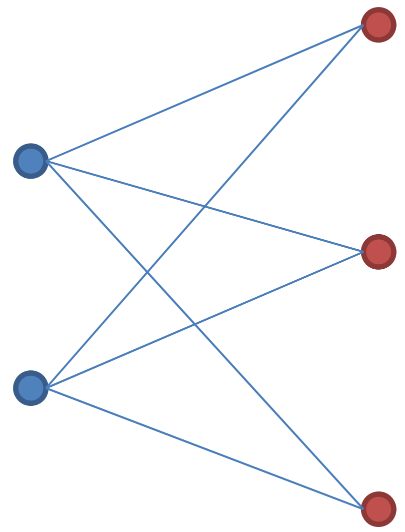
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- **二部图 (bipartite graph)**
  - $V(G) = X \cup Y, X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing, X \cap Y = \varnothing$
  - $\forall e \in E(G), ((e \cap X \neq \varnothing) \wedge (e \cap Y \neq \varnothing))$
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



一些重要类型的图

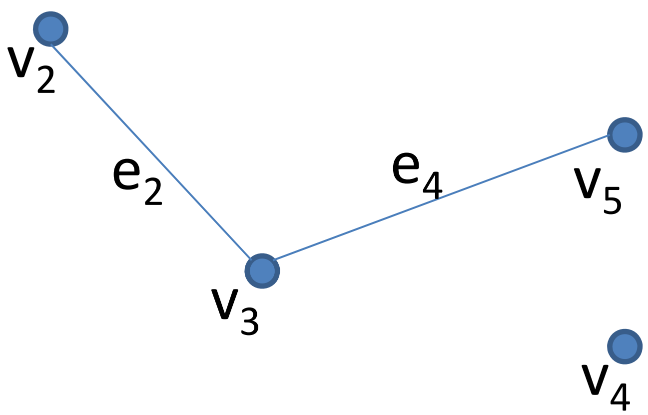
- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- **完全二部图 (complete bipartite graph)**
  - 每对X-Y顶点都相邻的简单图，记作$K_{|X|,|Y|}$

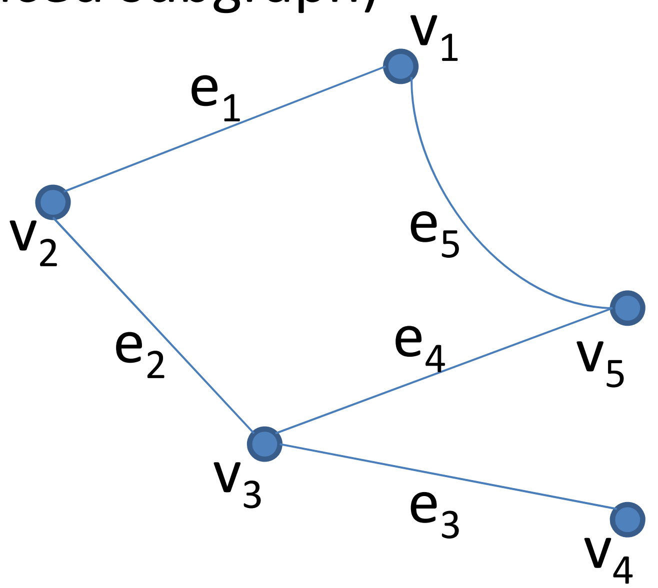


- 如无特殊说明，本课程讨论的是简单图

图的关系1：父子

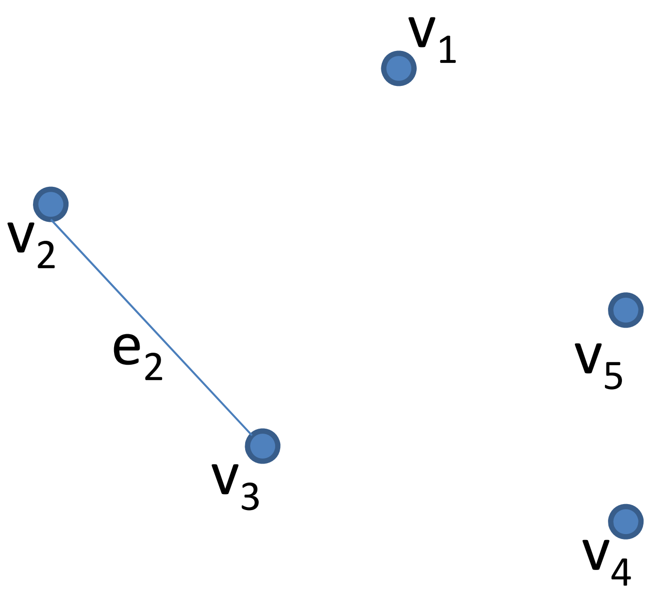
- **H是G的子图 (subgraph)**
  - V(H)⊆V(G)
  - E(H)⊆E(G)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)
- H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)

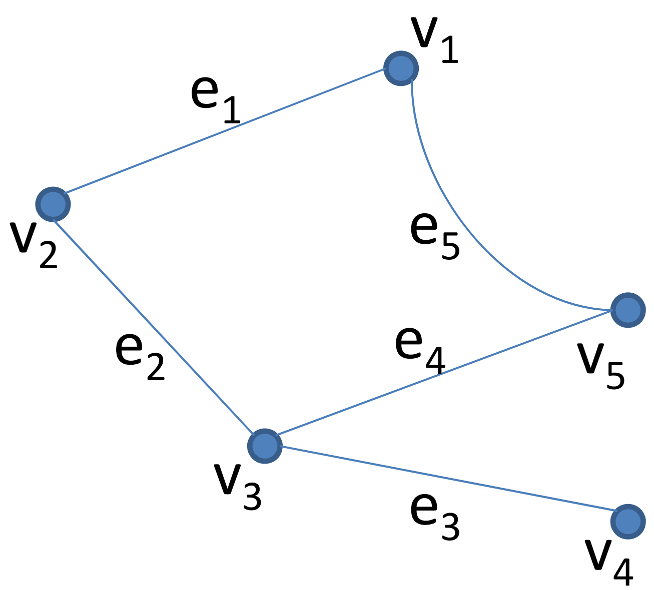




图的关系1：父子

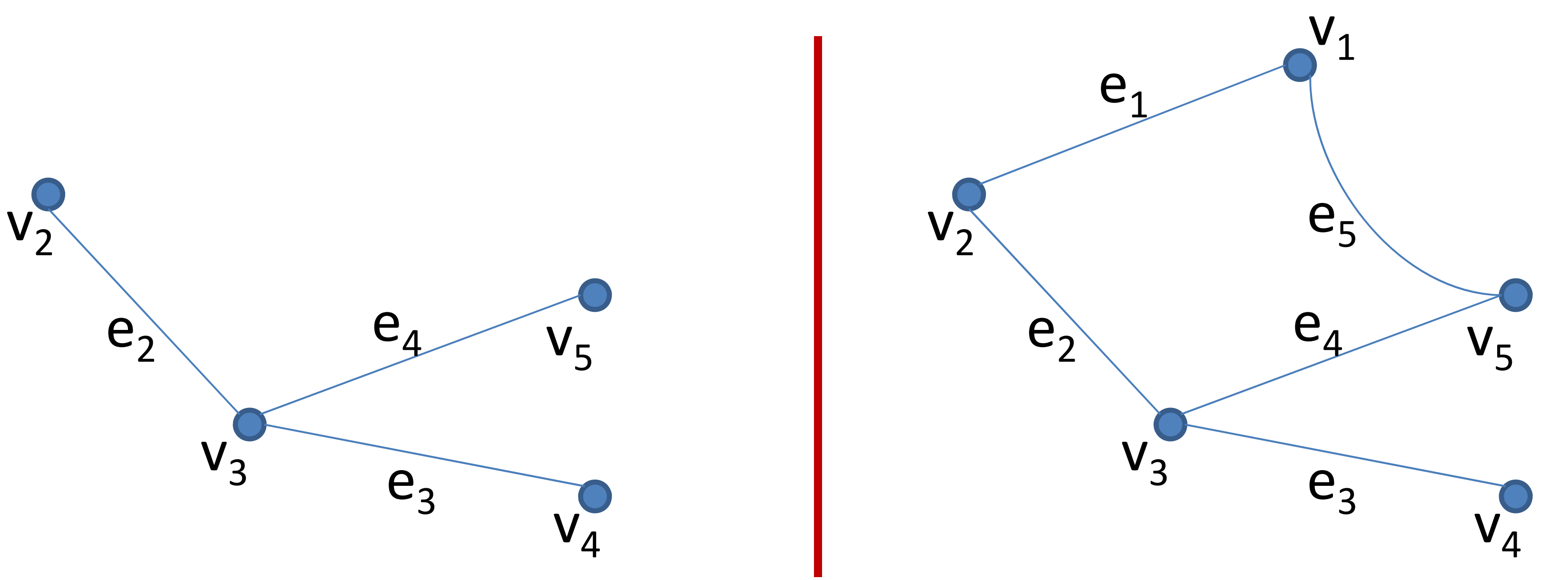
- H是G的子图 (subgraph)
- **H是G的生成子图 (spanning subgraph)**
  - V(H)=V(G)
- H是G的V'-点导出子图 (induced subgraph)
- H是G的E'-边导出子图 (edge-induced subgraph)





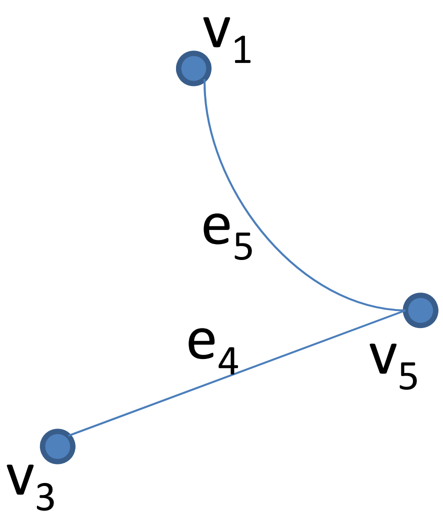
图的关系1：父子

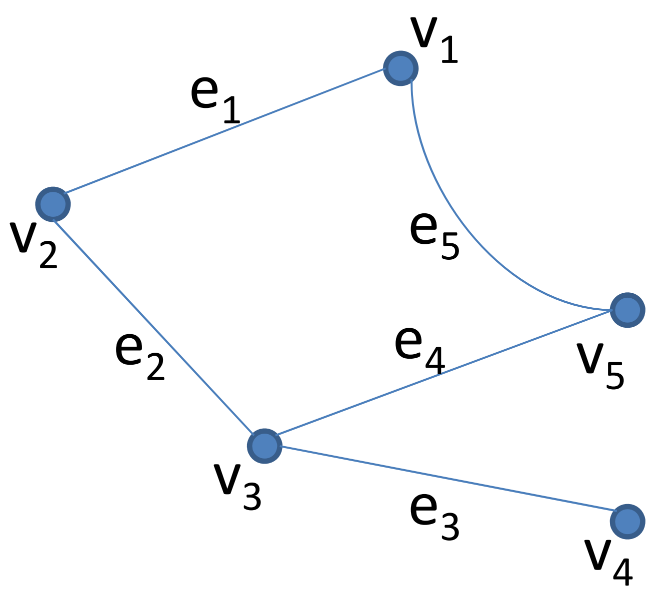
- H是G的子图 (subgraph)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- **H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)**
  - $\forall v_i, v_j \in V' = V(H), ((v_i, v_j) \in E(G) \rightarrow (v_i, v_j) \in E(H))$，记作H=G[V’]
- H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)



图的关系1：父子

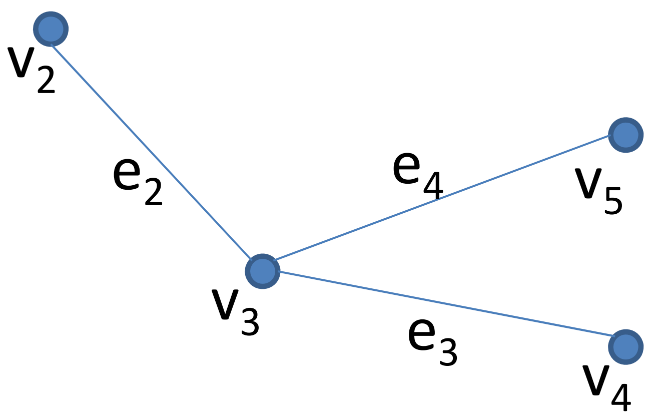
- H是G的子图 (subgraph)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)
- **H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)**
  - $V(H)=\bigcup_{e\in E'=E(H)} e$ ，记作H=G[E’]

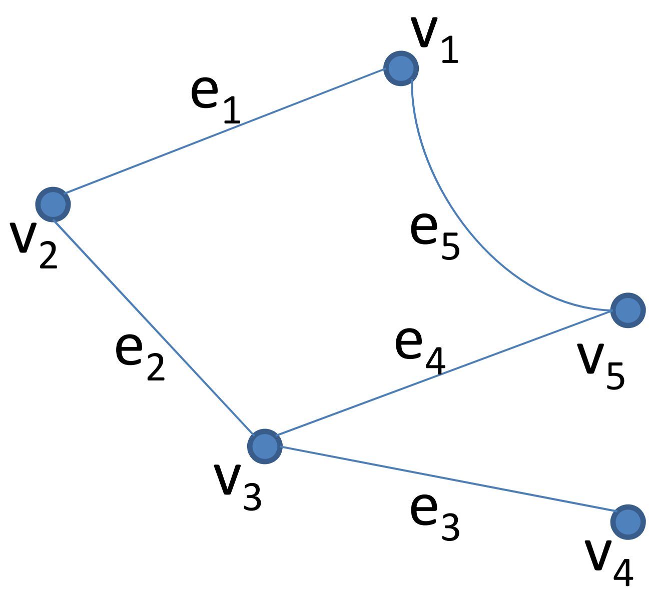




图的关系1：父子(续)

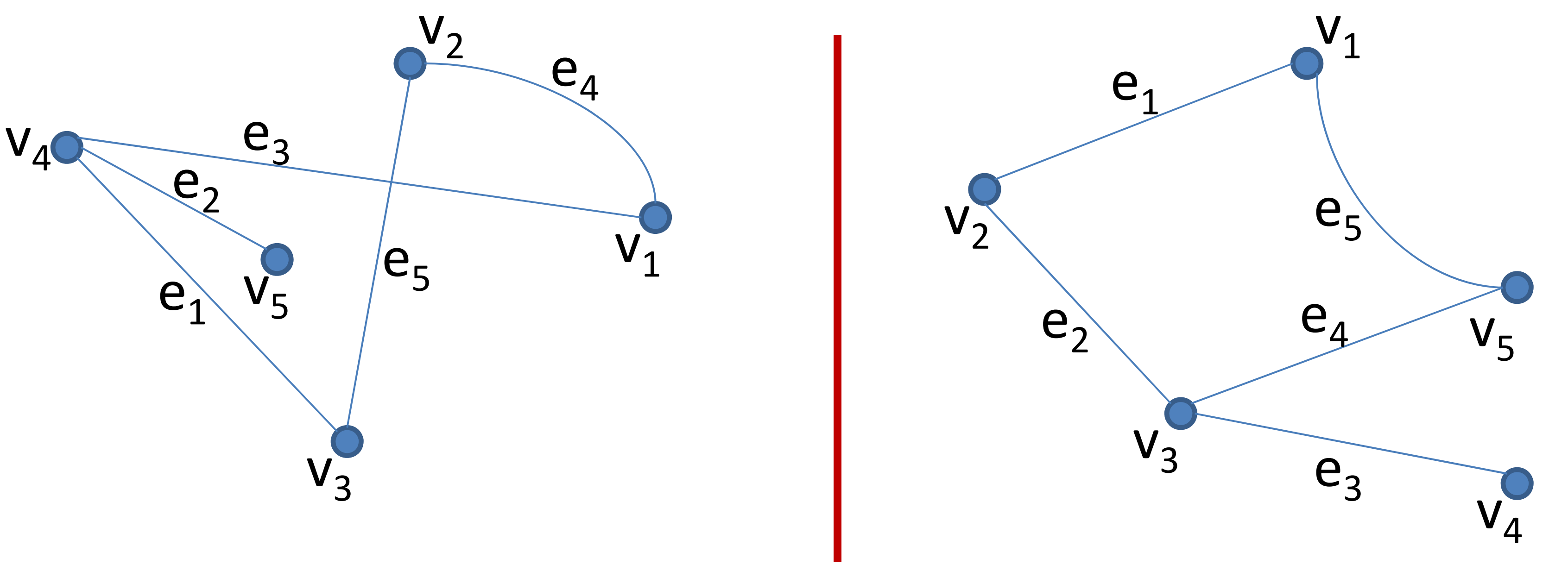
- 一些记法
  - G-V’： G[V(G)\V’]
  - G-v： G-{v}
  - G-E’： <V(G), E(G)\E’>
  - G-e： G-{e}





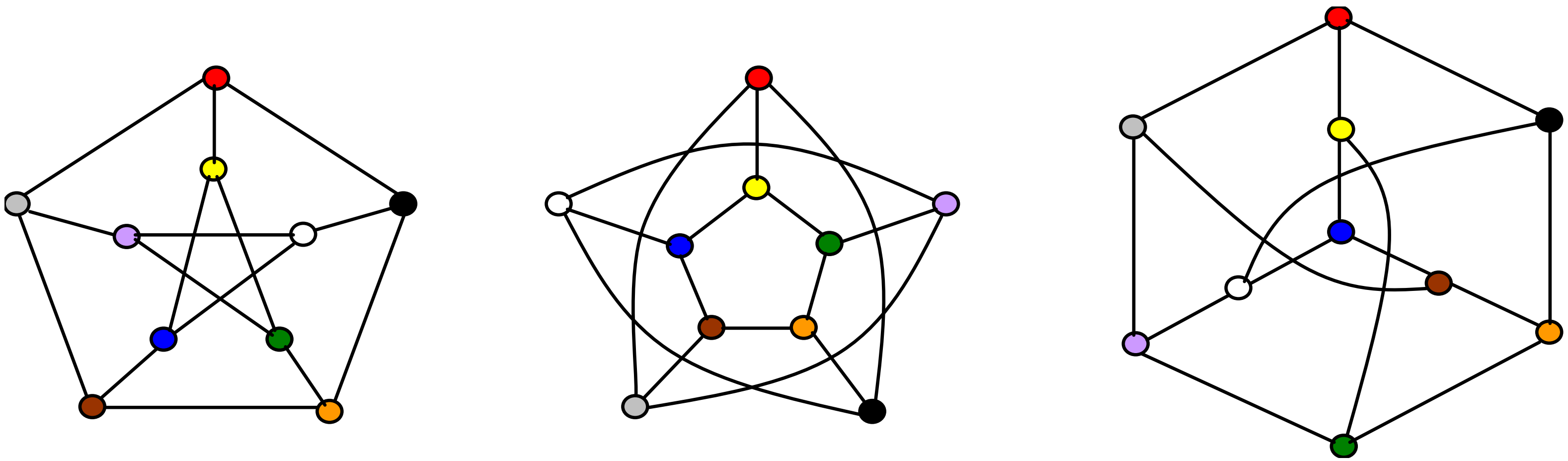
图的关系2：同构

- G和H同构 (isomorphism)
  - 存在双射α: V(G)→V(H)
  - (u, v)∈E(G) iff. (α(u), α(v))∈E(H)
- 记作 $G \cong H$
- 图的同构关系是等价关系（自反、对称、传递）



图的关系2：同构(续)

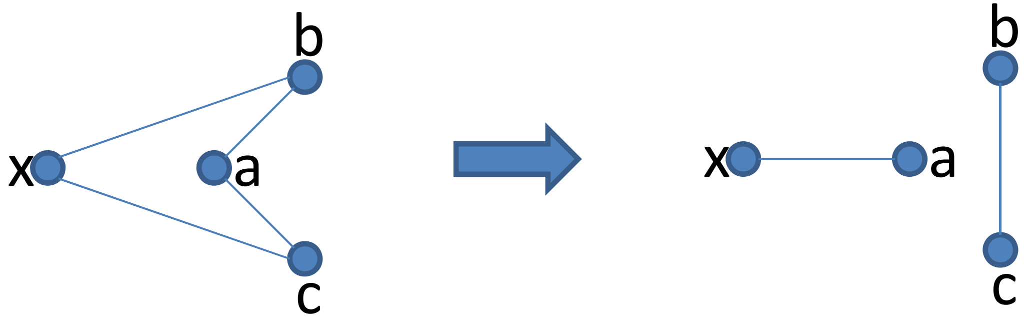
- 你是如何判定图是否同构的？
- 属于NP，但属于P还是NPC？还不知道！



图片来自陈道蓄老师

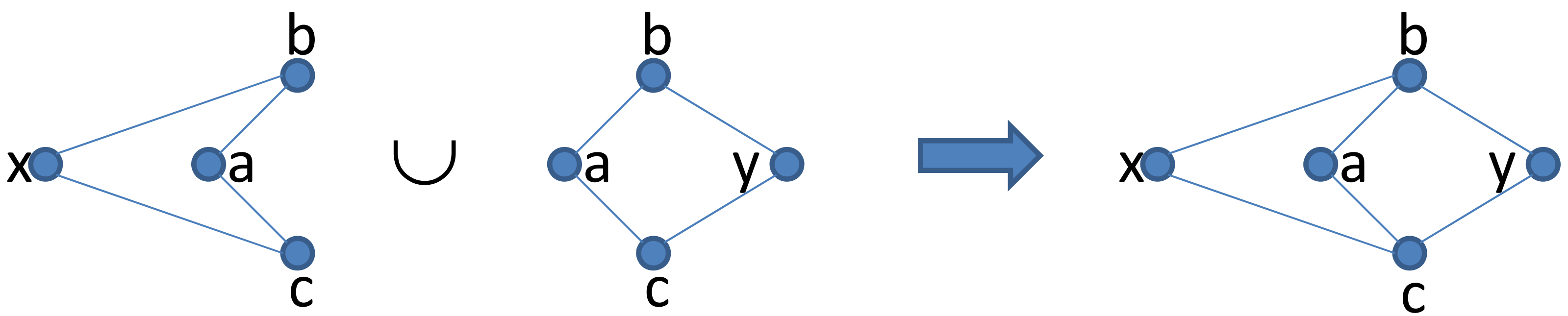
图的运算

- **G的补图 (complement)**
  - $\overline{G}=\langle V(G),\{(x,y)\notin E(G)\}\rangle$
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



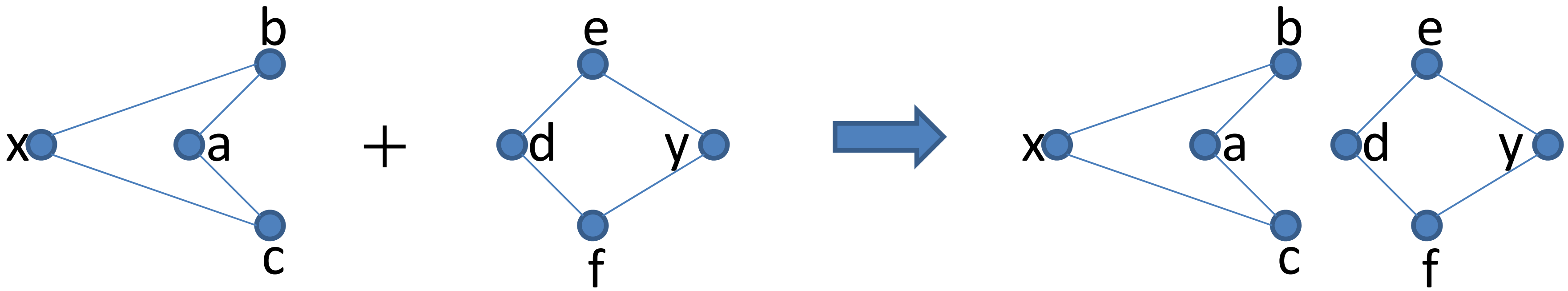
图的运算

- G的补图 (complement)
- **G和H的并 (union)**
  - $G \cup H = \langle V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \rangle$
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



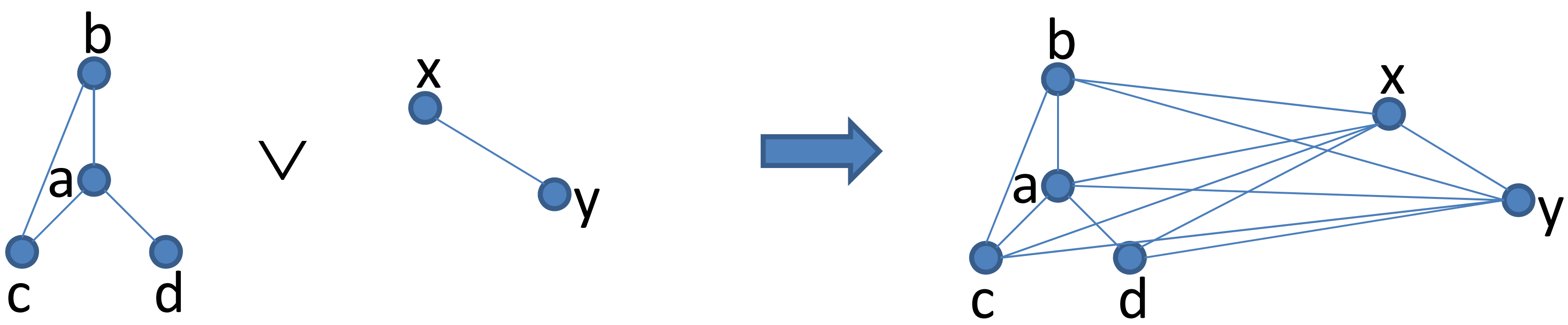
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- **G和H的不交并/和 (addition)** 仅当$V(G)\cap V(H)=\varnothing$
  - $G+H=\langle V(G)\cup V(H), E(G)\cup E(H)\rangle$
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



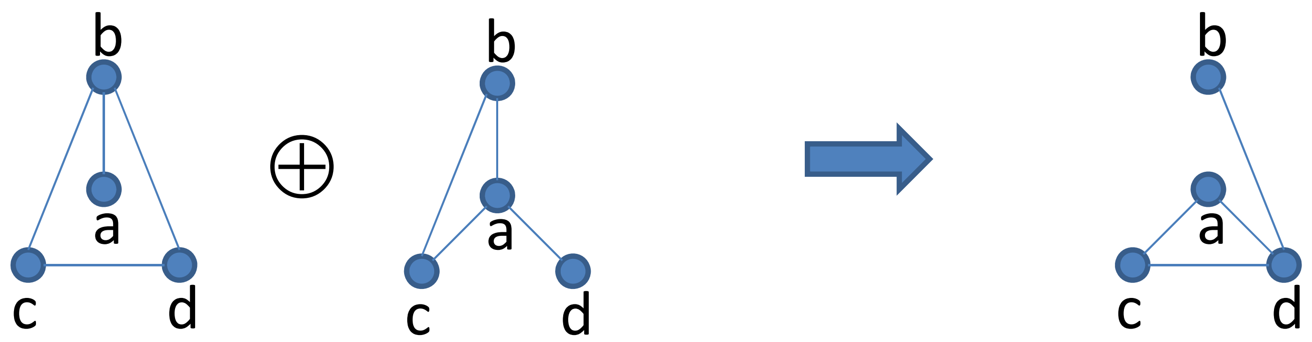
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- **G和H的联/连接 (join)** 仅当$V(G)\cap V(H)=\varnothing$
  - $G\vee H=\langle V(G)\cup V(H), E(G)\cup E(H)\cup\{(x,y)\mid x\in V(G)\wedge y\in V(H)\}\rangle$
- G和H的对称差 (symmetric difference)



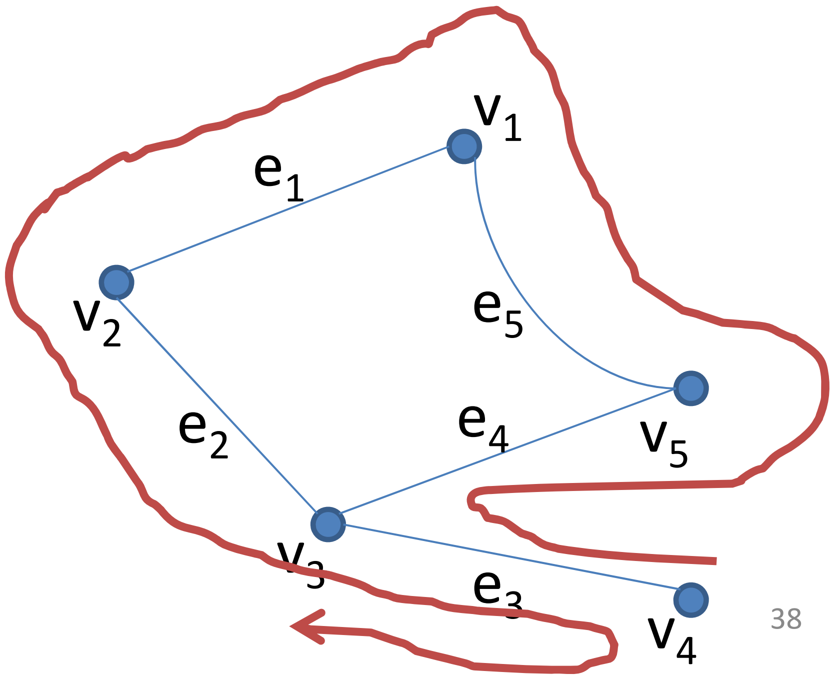
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- **G和H的对称差 (symmetric difference)** 仅当$V(G)=V(H)=V$
  - $G \oplus H = \langle V, (E(G) \cup E(H)) \setminus (E(G) \cap E(H)) \rangle$



途经、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列v_0, e_1, v_1, …, e_k, v_k
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

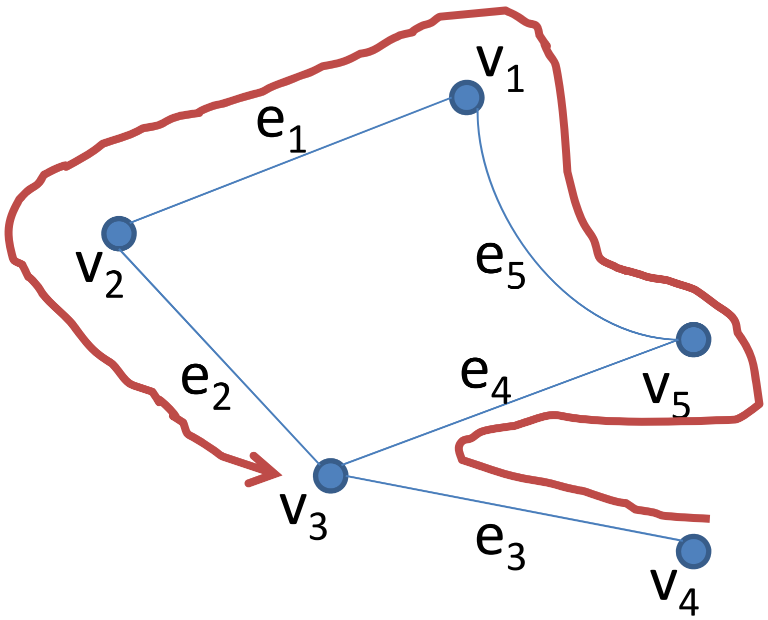


途经、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

边不重复出现

迹 (trail)



途经、迹、路、圈

途径 (walk)

•顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, …, e_k, v_k$

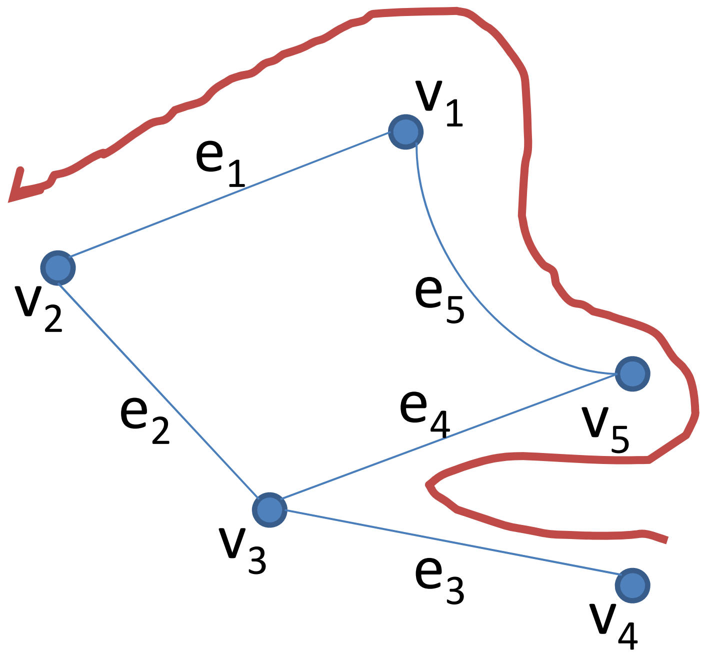
•$e_i=(v_{i-1}, v_i)$

•v_0和v_k分别称作起点和终点

边不重复出现 → 迹 (trail)

顶点不重复出现 → 路 (path)

简单图中，路的记法中可以省略边



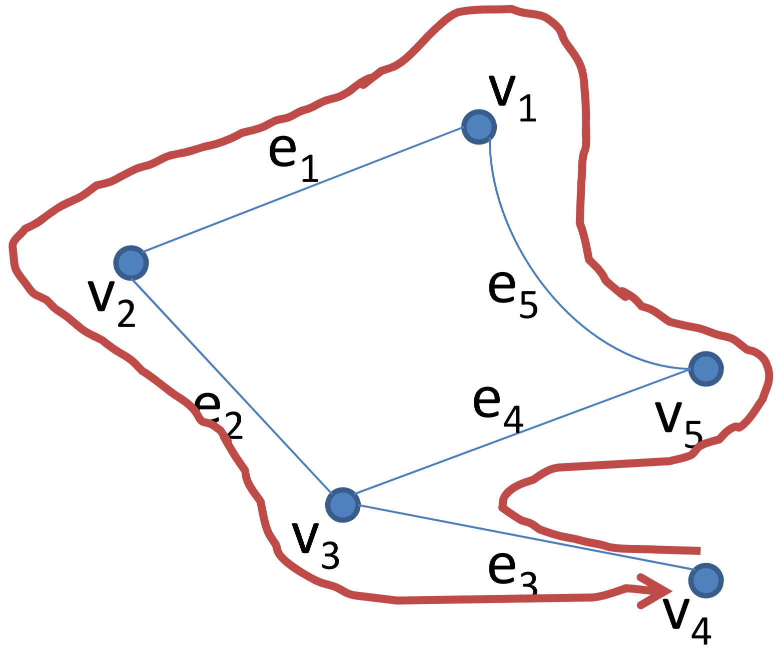
途经、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同 → 闭途径 (closed walk)

边不重复出现 → 迹 (trail)

顶点不重复出现 → 路 (path)



途经、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同

闭途径 (closed walk)

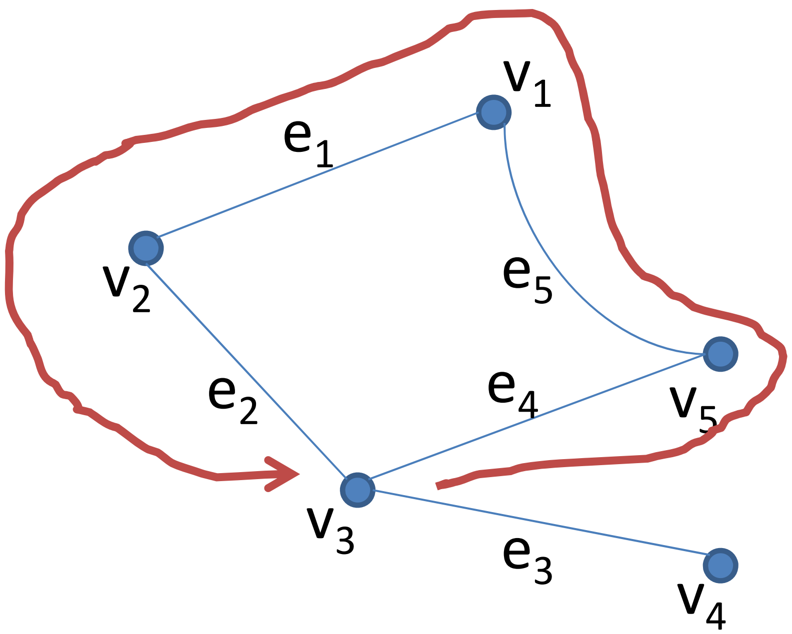
边不重复出现

迹 (trail)

闭迹 (closed trail)

顶点不重复出现

路 (path)



途经、迹、路、圈

途径 (walk)

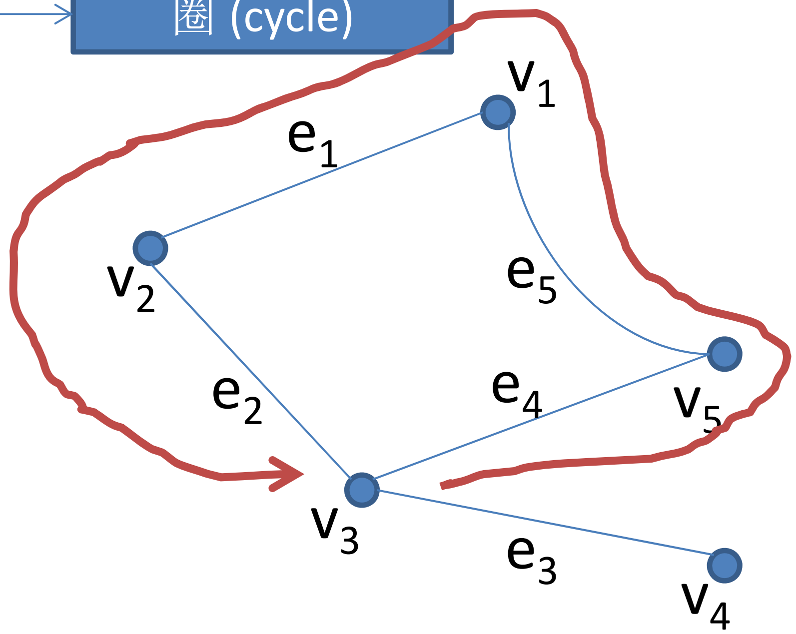
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同 → 闭途径 (closed walk)

边不重复出现 → 迹 (trail) → 闭迹 (closed trail)

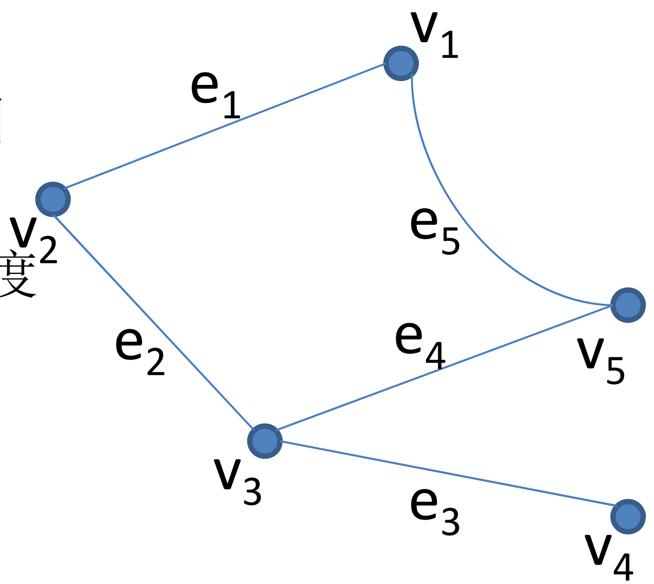
顶点不重复出现 → 路 (path) （起点和终点除外） → 圈 (cycle)

闭途径 (closed walk) → 闭迹 (closed trail) → 圈 (cycle)



长度

- 途径的长度 (length)
  - 边的数量
- 路的长度
  - u到v的最短路 (shortest path)：u到v的长度最小的路
  - 距离 (distance)：最短路的长度，记作d(u, v)
- 圈的长度
  - 奇圈 (odd cycle)：长度为奇数的圈
  - 偶圈 (even cycle)：长度为偶数的圈
  - 围长 (girth)：最短圈的长度
  - 周长 (circumference)：最长圈的长度

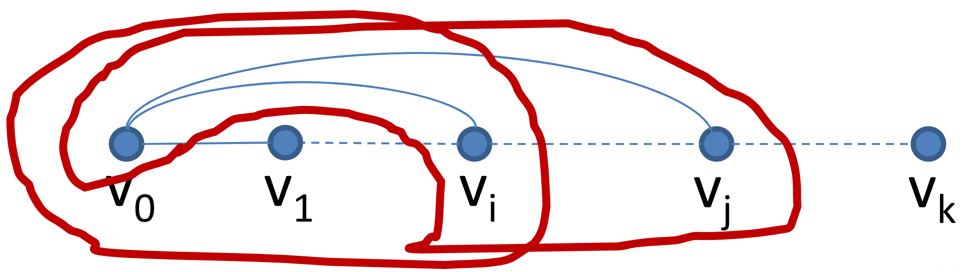


例1.1.3

- 设G是简单图，若$\delta(G)\geq 3$，则G必有偶圈。

证明：

1. G有最长路，记作P=v_0, ..., v_k
2. v_0在P上有两个不同于v_1的相邻顶点v_i和v_j
   - i或j是奇数，存在偶圈
   - i和j是偶数，存在偶圈

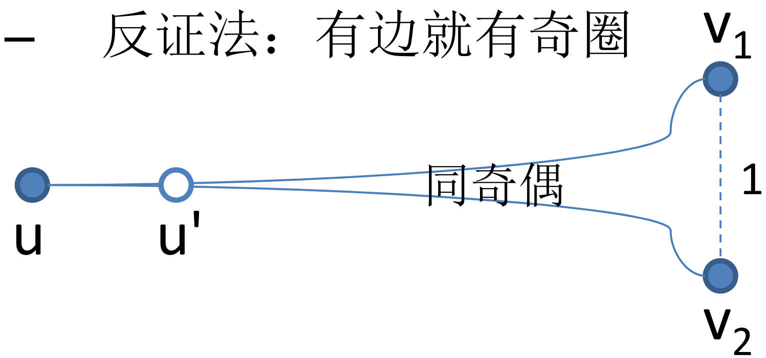


定理1.1.2

- 一个非平凡图是二部图当且仅当它不含奇圈。

证明：

1. 必要性：
   – 每次走回起点，都要经过偶数条边
2. 充分性：
   – 提示：将所有顶点分为X和Y两部分，证明X和Y的内部不可能有边
   – 任取顶点u，定义：X={与u距离为奇数的顶点}，Y={与u距离为偶数的顶点}
   – 反证法：有边就有奇圈

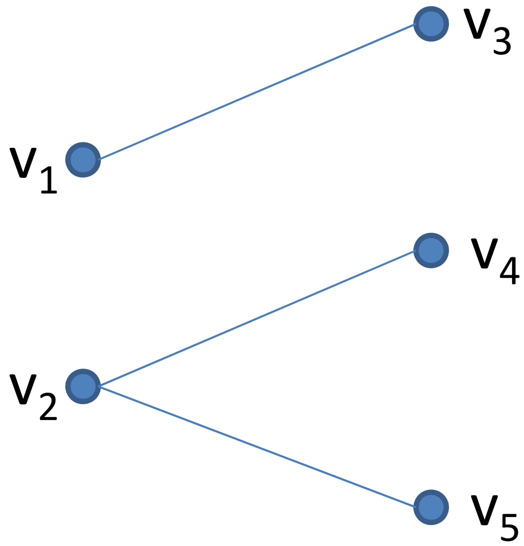


思考：u’ 恰是v_1或v_2怎么办？
思考：u无路可达的顶点怎么办？

连通

- 连通 (connected)
  – 两顶点间有路
- 连通图 (connected graph)
  – 每对顶点都连通
- 连通分支 (connected component)
  – 极大连通子图

- G的连通分支数记作w(G)

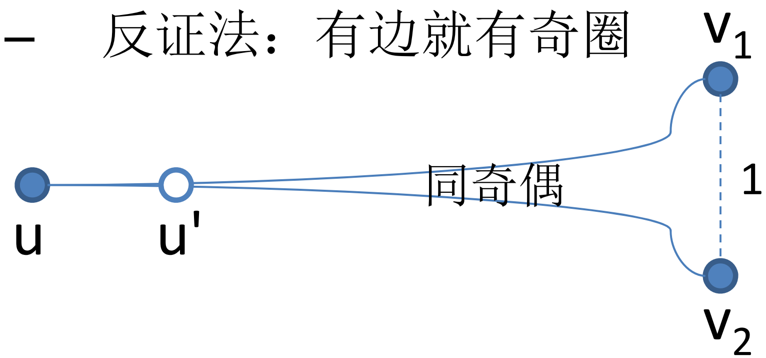


定理1.1.2 (续)

- 一个非平凡图是二部图当且仅当它不含奇圈。

证明：

1. 必要性：
   - 每次走回起点，都要经过偶数条边
2. 充分性：
   - 提示：将所有顶点分为X和Y两部分，证明X和Y的内部不可能有边
   - 任取顶点u，定义：X={与u距离为奇数的顶点}，Y={与u距离为偶数的顶点}
   - 反证法：有边就有奇圈



思考：u′ 恰是v_1或v_2怎么办？

思考：u无路可达的顶点怎么办？

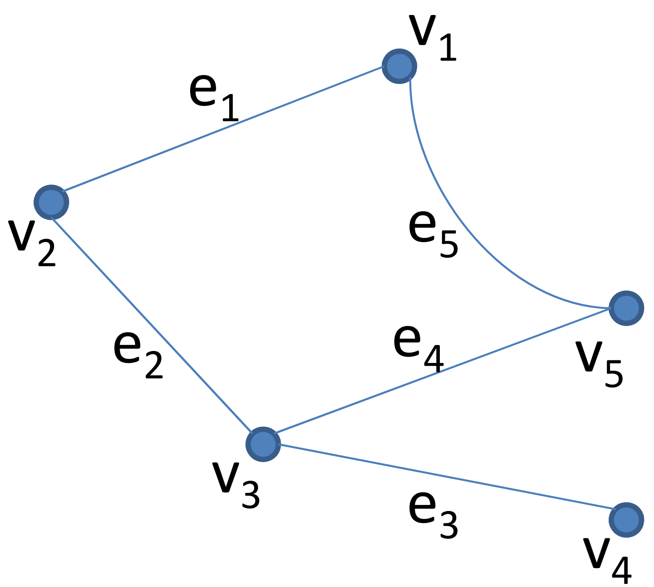
每个连通分支都是二部图

连通图的性质

- 若图G连通，则ε(G)≥v(G)-1。

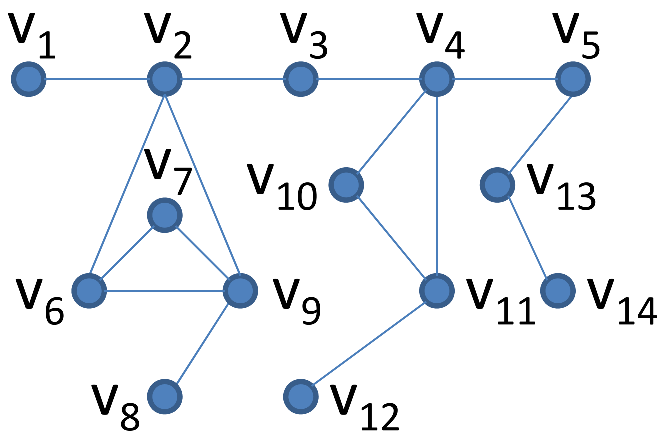
证明：

1. 从空图开始，每添加一条边，w最多减少1



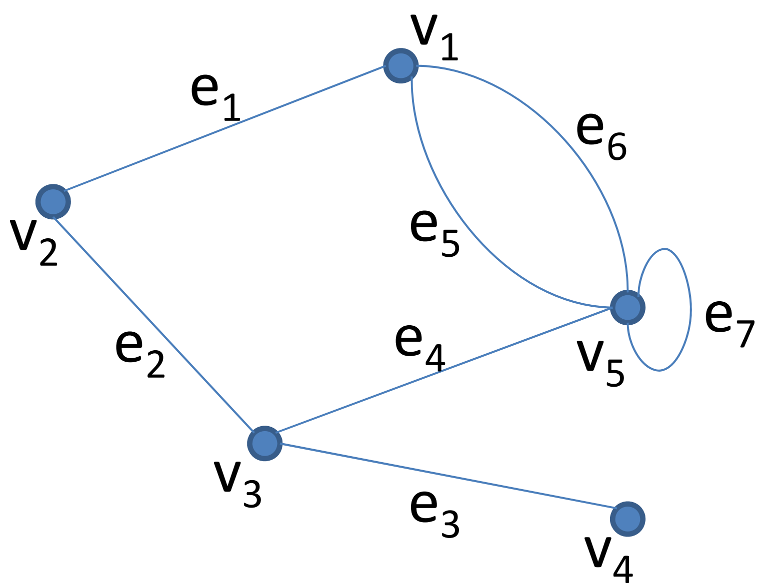
连通图的中心和中位点

- 离心率 (eccentricity)
  - $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u)$
- 中心 (center)
  - $\arg\min_{v \in V(G)} e(v)$
- 半径 (radius)
  - $rad(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$
- 直径 (diameter)
  - $diam(G) = \max_{v \in V(G)} e(v)$
- 中位点 (median)
  - $\arg\min_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} d(v,u)$



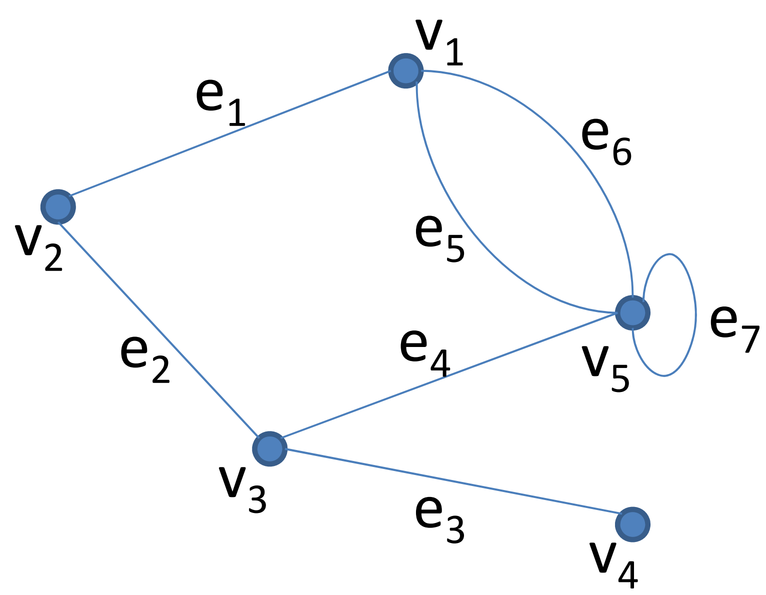
图的关联矩阵 (incidence matrix)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1				1	1	
v_2	1	1					
v_3		1	1	1			
v_4			1				
v_5				1	1	1	2



图的邻接矩阵 (adjacency matrix)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		1			2
v_2	1		1		
v_3		1		1	1
v_4			1		
v_5	2		1		1



邻接矩阵的性质

- 邻接矩阵是对称矩阵。
- 第i行和=第i列和=顶点v_i的度 (环边特殊对待)。
- 定理1.6.1：设A是v阶图G的邻接矩阵，则A^n的第i行第j列元素$a_{ij}^{(n)}$等于G中从v_i到v_j的长度为n的途径的数目 (1≤n<v)。
  - $a_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{v} a_{ir}^{(n-1)} a_{rj}$
- 推论1.6.3：设A是v阶图G的邻接矩阵 (v≥3)，$R=A+A^2+...+A^{v-1}$，则图G连通的充分必要条件是矩阵R中每个元素均不为零。
- 推论1.6.4：设A是连通图G的邻接矩阵，$R_k=A+A^2+...+A^k$，则G的顶点v_i的离心率$e(v_i)$等于使得矩阵R_k的第i行没有零元素的最小k值 (对角线除外)。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		1			2
v_2	1		1		
v_3		1		1	1
v_4			1		
v_5	2		1		1

作业

- 1.4 //度
- 1.35 (同构要写出双射，不同构要说明原因) //同构
- 1.23 //长度
- 1.31 //连通
- 1.63 //离心率