集合及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
  - 交并补、广义交、广义并
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式
- 自然数的构造

集合的定义

- 直观的定义
  - 一个集合是一组无序的对象，这些对象称为这个集合的元素或成员。
  - $a \in A$表示a是集合A的一个成员， $a \notin A$ 表示a不是A的成员。
- Georg Cantor的描述
  - **[English translation] A set is a collection into a whole of <u>definite, distinct objects</u> of our intuition or our thought. The objects are called <u>elements (member) of the set</u>.**

Naïve set theory，朴素集合论

集合的描述

- 罗列、枚举
  - **V={*a*, *e*, *i*, *o*, *u*}**
  - **{1, 3, 5, 7, 9}**
- 集合构造符号
  - $Z^+=\{x\in Z \mid x>0\}$
  - $Q=\{p/q \mid p\in Z, q\in Z, q\neq 0\}$
  - $[a, b]=\{x\in R \mid a\leq x\leq b\}$

N={0, 1, 2, 3, …}

Z={…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

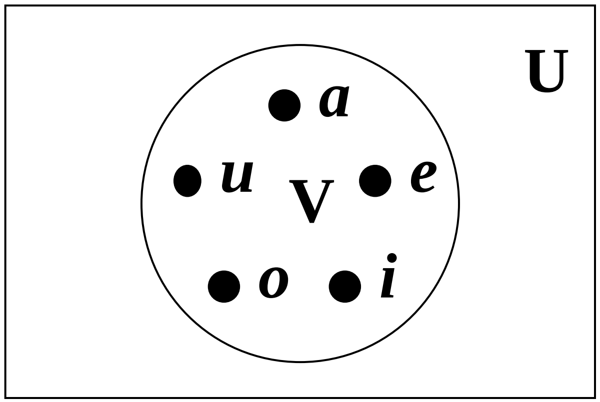
R: 实数集

{N, Z, Q, R}

{ }

集合的描述

- 文氏图（**Venn diagrams** ）**//John Venn**



集合相等、子集关系

- 集合相等当且仅当它们有同样的元素
  - **A=B** 当且仅当 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ //外延原则
- 集合A称为集合B的子集， 记作$A \subseteq B$
  - $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$
- 如果$A \subseteq B$, 但$A \neq B$，则A是B的真子集，记作$A \subset B$
- 对任意集合A和B, A=B 当且仅当:
  - $A \subseteq B$, 且$B \subseteq A$

子集关系的一个性质

- 证明：如果X$\subseteq$Y且Y$\subseteq$Z, 则X$\subseteq$Z
- 要证明：“对任意的 a, 如果 $a\in$X, 则 $a\in$Z”
- 证明：
  - 对任意的 $a\in$X
  - 根据已知的“X$\subseteq$Y”，可得：$a\in$Y
  - 根据已知的“Y$\subseteq$Z”，可得：$a\in$Z
  - 所以，$\forall a\ (a\in X \to a\in Z)$, 即X$\subseteq$Z

集合的大小

- 有限集合及其基数
  - 若**S**恰有n个不同的元素，n是自然数，就说**S**是有限集合，而n是**S**的基数，记作$|S|=n$。
- 无限集合
  - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

空集

- 存在一个没有任何元素的集合：空集Ø
- 关于空集的一些性质：
  - 空集是任何集合的子集。
    - Ø⊆A，即 $\forall x(x\in Ø \rightarrow x\in A)$
  - 空集是唯一的，可以用 Ø表示
    - 如果 $Ø_1, Ø_2$都是空集，则 $Ø_1\subseteq Ø_2$ 和 $Ø_2\subseteq Ø_1$ 均为真

关于空集的讨论

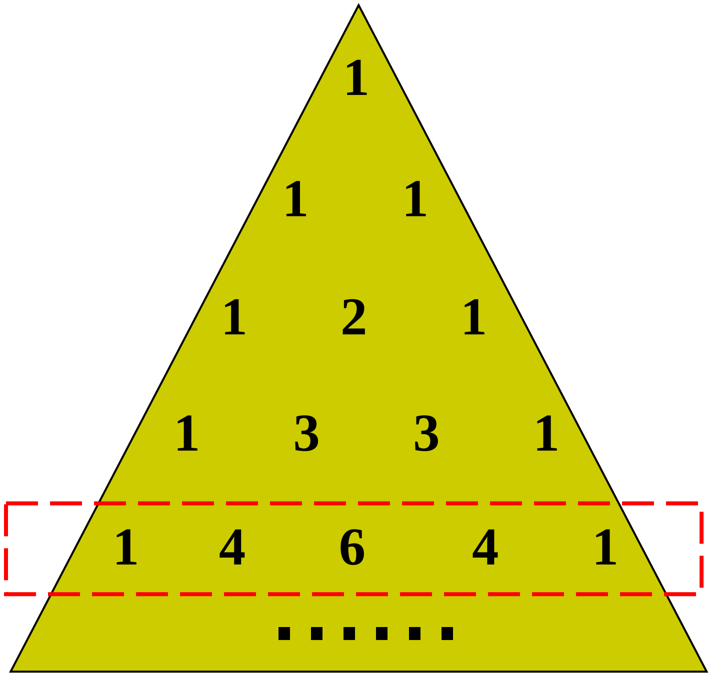
- 空集本身可以是一个对象，可以是某个集合的元素
  - $\varnothing \in \{\varnothing\}, \varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
- 事实上，我们从空集开始构造整个集合世界！
  - 自然数
  - 有理数
  - 实数（幂集运算）
  - …

幂集

- **S是一个集合，S的幂集是S的所有子集的集合**
  - $\rho(S)=\{x \mid x \subseteq S\}$
- 举例
  - $\rho(\{a, b\}) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a, b\}\}$
  - $\rho(\varnothing) = \{\varnothing\}$

If $\rho(A)\in\rho(B)$, then $A\in B$

有限集合的所有子集



如果 $|A|=n$, 则 $|\rho(A)|=2^n$

幂集的另一种记法: 2^A

$C(4, 0)+ C(4, 1)+ C(4, 2)+ C(4, 3)+ C(4, 4) =2^4$

$A=\{1, .., n\}$

$\Sigma_{k=0\ldots n} C(n, k) =2^n$

笛卡尔乘积

- 集合A和B的笛卡尔乘积
  - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- 何种情形下，$A \times B = B \times A$
- 集合$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔乘积
  - $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots n\}$

集合与谓词逻辑

- 在量化逻辑表达式中使用集合符号
  - $\forall x\in S(P(x))$代表$\forall x(x\in S\rightarrow P(x))$
  - $\exists x\in S(P(x))$代表$\exists x(x\in S\wedge P(x))$
  - 举例
    - $\forall x\in R(x^2\geq 0)$: $\forall x(x\in R\rightarrow (x^2\geq 0))$
    - $\exists x\in Z(x^2=1)$: $\exists x(x\in Z\wedge x^2=1)$
- 逻辑表达式的真值集合，$\{x\in D|\ P(x)\}$
  - 举例：$\{x\in Z|\ |x|=x\}$，$\{x\in Z|\ x^2=2\}$，$\{x|\ x\in Z\wedge x^2=2\}$

集合悖论

- A={x | P(x)}, 实际上不能保证：对任意的性质 P，这样的定义都有意义。
- 例如：
  - 1)存在不以自己为元素的集合，称它们为“平凡集”
    - 天上的星星、教室里的同学
  - 2)定义包含所有“平凡集”的集合
    - A = $\{x|x\notin x\}$
- Russell 悖论：

  定义 $R=\{x \mid x\notin x\}$。则如果R存在，定有: $R\in R$ iff. $R\notin R$
  - 理发师悖论：“我给所有不给自己理发的人理发”

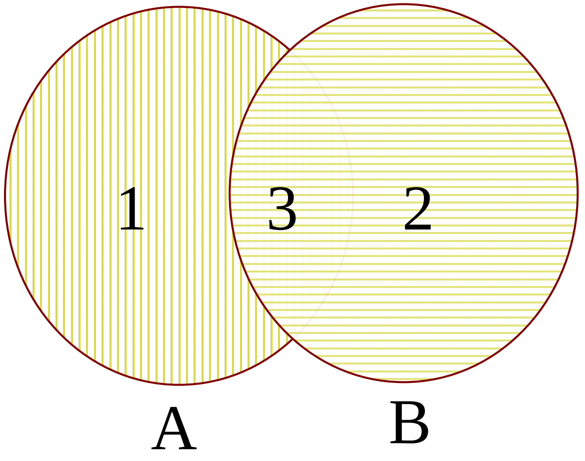
公理集合论（Axiomatic set theory）

- 用公理来约束集合世界，以摆脱悖论
  - 集合相等（=）和元素属于集合的关系（∊）
  - 某种集合存在性，亦即给定合法集合构造原则
- **Z**ermelo–**F**raenkel set theory with the axiom of **C**hoice（**ZFC集合论**）参见附录

外延公理 正则公理 分离公理模式 配对公理 并集公理	替代公理模式 无穷公理 幂集公理 选择公理

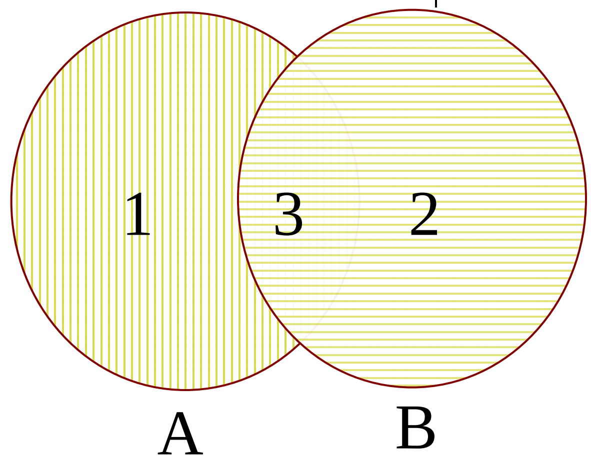
集合运算的定义

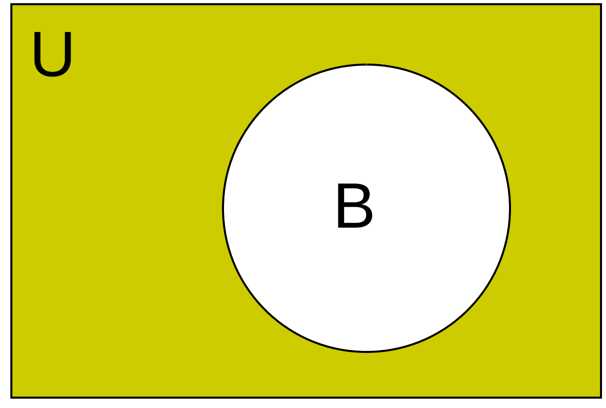
- 运算定义的基本方式：将结果定义为一个新的集合
  - 并：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
    - 并集: {1, 2 , 3}
  - 交：$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
    - 交集: {3}



相对补（差）

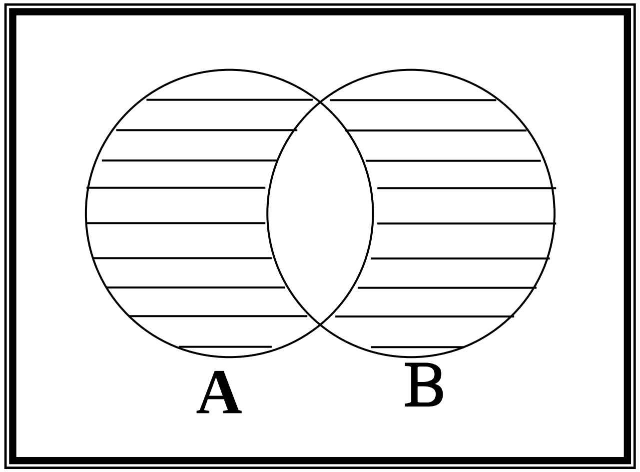
- **B对于A的补集**
  - **A-B={ x | x∈A ∧ x∉B }**
- 举例，**A-B={1}**
- 若有一个我们关心的“所有”对象的集合，称为全集，常用**U**表示，**U-B**称为**B**的“补集”，记为~**B**
  - x∈~**B** ↔ x∉**B**





对称差

- 对称差
  - **$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$**
- 证明: **$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$**
  - **$(A-B) \cup (B-A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$**
  - **$(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A-B) \cup (B-A)$**



广义并和广义交

- 广义并
  - 设**A**为集合，**A**的所有元素的并，记为∪**A**; 定义为 $\cup \mathbf{A} = \{x \mid \exists y \in \mathbf{A}, x \in y\}$

- 广义交
  - 设**A**为非空集合，**A**的所有元素的交，记为∩**A**, 定义为： $\cap \mathbf{A} = \{x \mid \forall y \in \mathbf{A} \rightarrow x \in y\}$
    - 注意：限制条件为**A**非空，∩Ø无意义

运算的重要性质

- 包含关系下两个集合的最小上界和最大下界
  - 最小上界：
    - **$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$** ----A和B的上界
    - 对任意X，若$A \subseteq X$, $B \subseteq X$,则$A \cup B \subseteq X$ ----最小上界
  - 最大下界：
    - **$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$** ----A和B的下界
    - 对任意X，若$X \subseteq A$, $X \subseteq B$,则$X \subseteq A \cap B$ ----最大下界

集合相关命题的基本证明方式

- 直接使用集合包含、相等定义
  - $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$
  - 证明：
  - 对任何x, 假设$x \in A$
  - 由集合并定义：$x \in A \cup B$
  - 由已知条件： $A \cup B = B$
  - $\therefore x \in B$
  - 因此： $A \subseteq B$

基本证明方式

- 利用运算定义作逻辑等值式推演
  - 例：$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$$A-(B\cup C)=\{x|x\in A\wedge x\notin B\cup C\}$$
$$=\{x|\ x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C)\}$$
$$=\{x|(x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C)\}$$
$$= (A-B) \cap (A-C)$$

等价的描述方式：

$$x\in A-(B\cup C) \Leftrightarrow (x\in A) \wedge (x\notin(B\cup C)) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B \wedge x\notin C$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B) \wedge (x\in A\wedge x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in(A-B)) \wedge (x\in(A-C))$$
$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$$

基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例：$\mathbf{A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing}$

$A \cap B = A \Rightarrow A - B = \varnothing$:

$A - B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = A$:

$A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$

$= A \cap (B \cup \sim B) = A \cap U = A$

基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例：已知$A\oplus B=A\oplus C$，证明$B=C$

$$
\begin{aligned}
B &= \varnothing\oplus B \\
&= (A\oplus A)\oplus B \\
&= A\oplus(A\oplus B) \\
&= A\oplus(A\oplus C) \\
&= C
\end{aligned}
$$

集合恒等式（1）

等 式	名 称
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\sim(\sim A) = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律

集合恒等式（2）

等 式	名 称
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	结合律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	分配律
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	德摩根定律
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	吸收律
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\varnothing$	补律

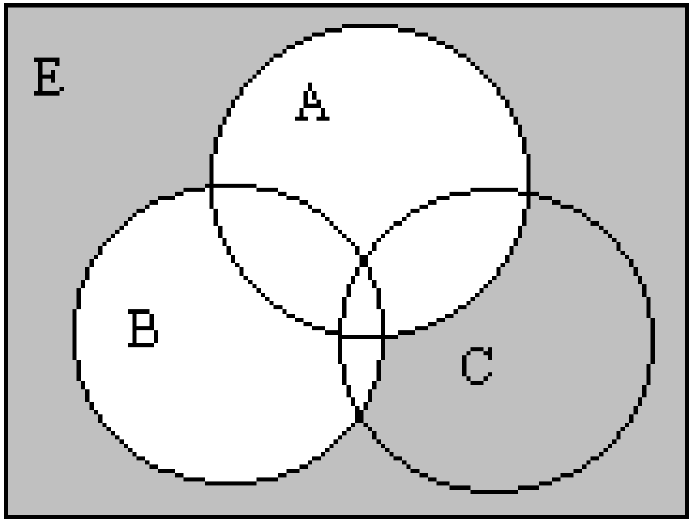
基本证明方式

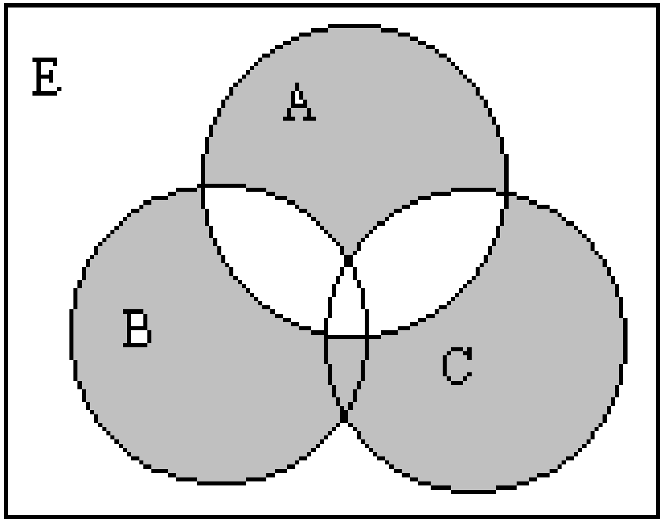
- 利用成员表证明集合恒等式
  - $A\cup(A\cap B)=A$

A	B	$A\cap B$	$A\cup(A\cap B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

文氏图的更多例子

- $\sim A \cap \sim B$
- $(A-(B \cup C)) \cup ((B \cup C)-A)$

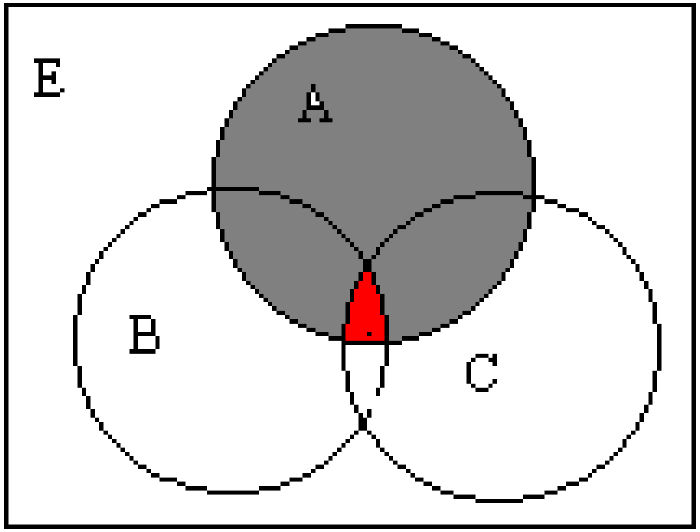




文氏图与数学证明

- 文氏图不能代替数学证明, 但可以帮助推测结论
- 例子:
  - **(A-B)∪(A-C)=A?**

充要条件：A∩B∩C=Ø



用集合定义自然数

- 设a为集合, 称$a\cup\{a\}$为a的后继, 记为或a^+, 或s(a)。
- 设A是集合，若A满足下列条件，称A为归纳集:
  - $\varnothing\in A$
  - $\forall a(a\in A\rightarrow a+\in A\}$
- 自然数集合N是所有归纳集的交集。
  - 因此：$N = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots \}$
  - N的每一个元素称为一个自然数。
  - $\varnothing$记为0，0^+记为1，1^+记为2，2^+记为3，余此类推

再具体一点

- 记号0表示：$\varnothing$
- 记号1表示0^+：$\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- 记号2表示1^+：$\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- 记号3表示2^+:$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
- $3 \cup 2 = ?$ $3 \cap 2 = ?$
- $2 \in 3?$ $1 \in 3?$
- $1 \subseteq 2?$ $2 \subseteq 5?$

自然数上的小于关系？

自然数上的运算

- 加法（递归定义）
  - $m+0=m$
  - $m+n^{+}=(m+n)^{+}$
- 乘法（递归定义）
  - $m*0=0$
  - $m*n^{+}=m + m*n$
- 序关系
  - $a\leq b$ iff $\exists c\in N.\ a+c=b$

皮亚诺公理
(Peano axioms for natural numbers)

- 零是个自然数.
- 每个自然数都有一个后继（也是个自然数）.
- 零不是任何自然数的后继.
- 不同的自然数有不同的后继.
- （归纳公理）设由自然数组成的某个集合含有零，且每当该集合含有某个自然数时便也同时含有这个数的后继，那么该集合定含有全部自然数.

- 备注：另有4个与自然数相等有关的公理

作业

- 教材[2.1, 2.2]
  - P87-89：22, 33
  - P95-98：18, 40, 48, 57

Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice

- 外延公理
- 正则公理
- 分离公理模式
- 配对公理
- 并集公理
- 替代公理模式
- 无穷公理
- 幂集公理
- 选择公理（或，良序定理）

ZFC公理

- 外延公理（Axiom of extensionality）
  - 如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

- 正则/基础公理（Axiom of regularity/foundation）
  - 任意非空集x包含一个成员y，x与集合y是不相交的

$$\forall x [\exists a (a \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \land \neg \exists z (z \in y \land z \in x))].$$

ZFC公理

- 分离公理模式（Axiom schema of separation）
  - 对任意集合z和任意对z的元素x有定义的逻辑谓词φ(x)，存在z的子集y，使x∈y当且仅当x∈z而且φ(x)为真。

$$\forall z \forall w_1 \ldots w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi)].$$

- 配对公理（ Axiom of pairing）

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

- 并集公理（Axiom of union ）

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A].$$

ZFC公理

- 替代公理模式（Axiom schema of replacement）

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n \left[\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y\, \phi) \Rightarrow \exists B \forall x \big(x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \wedge \phi) \big) \right].$$

- 无穷公理（Axiom of infinity ）
  - S(y)是指 $y \cup \{y\}$

$$\exists X \left[\varnothing \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X) \right].$$

- 幂集公理（Axiom of power set）

$$\forall x \exists y \forall z [z \subseteq x \Rightarrow z \in y].$$

ZFC公理

- 选择公理（Axiom of choice ）
  - 任一非空集合族 $(S_i)_{i\in I}$, 均存在元素族$(s_i)_{i\in I}$, $\forall i\in I.\ s_i\in S_i$

- 或， 良序定理（Well-ordering theorem ）

$$\forall X \exists R (R \text{ well-orders } X).$$

参考： Zermelo–Fraenkel set theory @Wiki