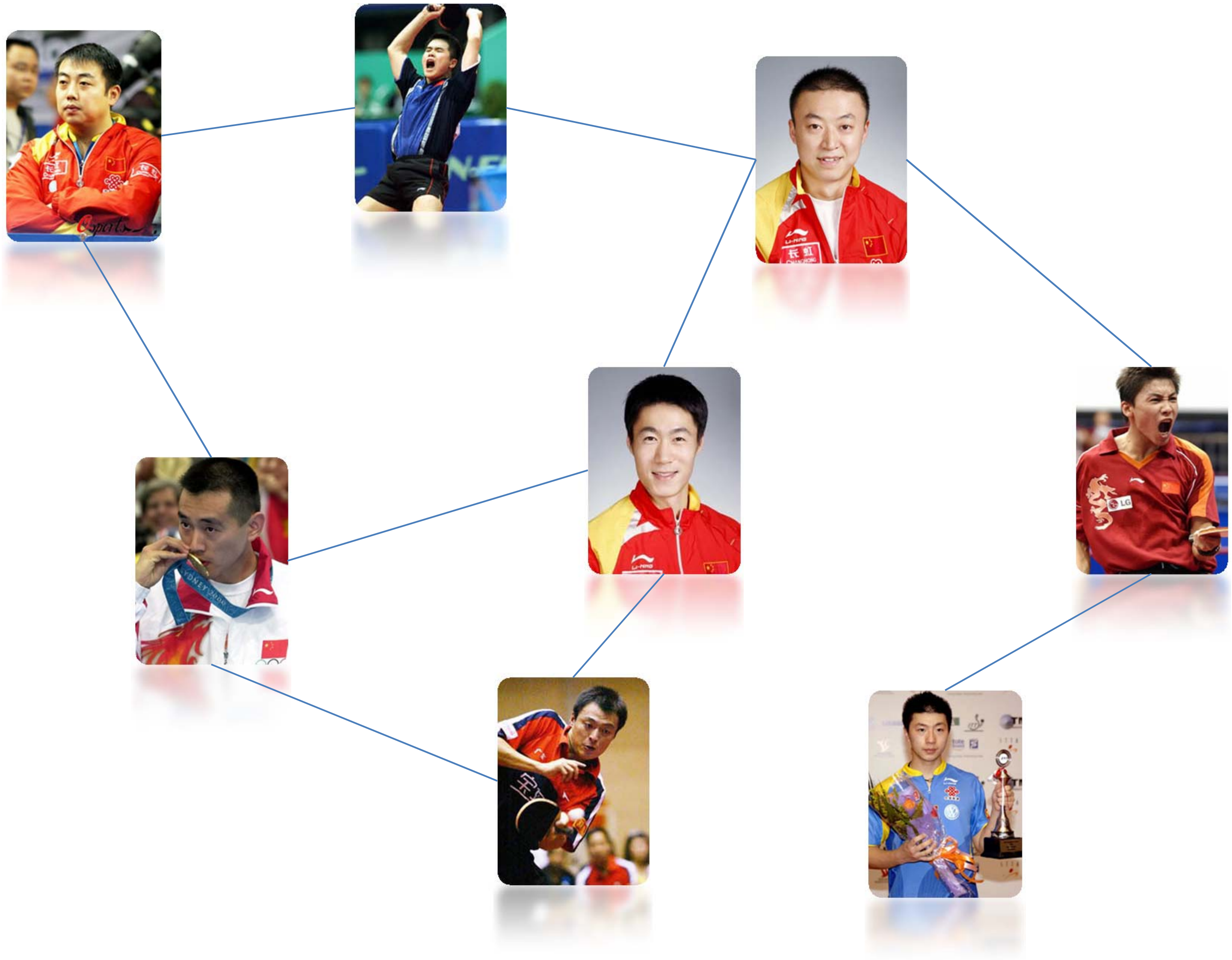
匹配的概念

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)



http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

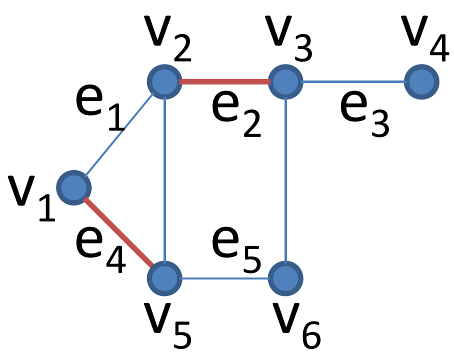
本节课的主要内容

3.1 匹配与最大匹配

3.2 完美匹配

匹配

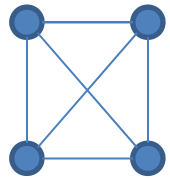
- 匹配 (matching)
  - M是G的匹配: G中两两不相邻的边构成的集合
- 被饱和的顶点 (saturated vertex)
  - M中边的端点被M饱和

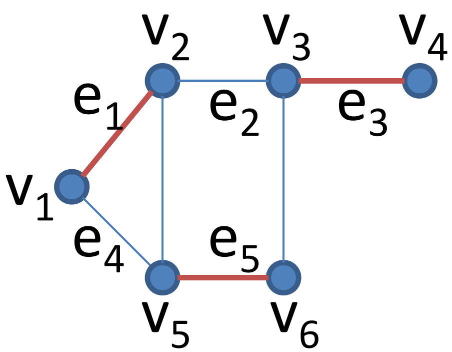


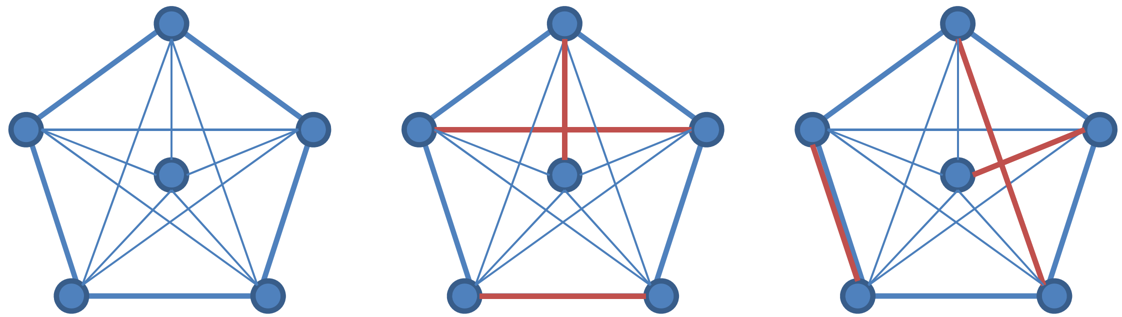
完美匹配

- 完美匹配 (perfect matching)
  - G中每个顶点都被M饱和

- 阶为奇数的图一定没有完美匹配
- K_{2n}有2n-1个边不重的完美匹配



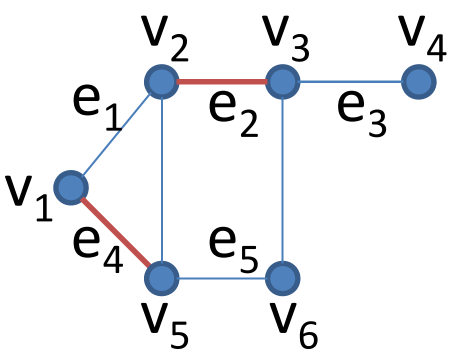


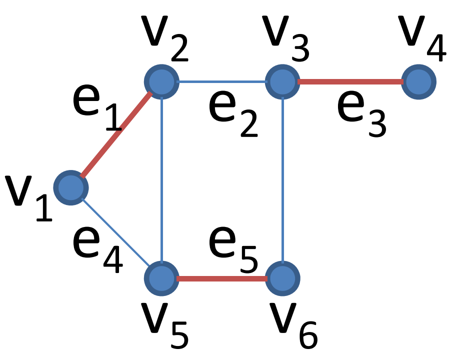


最大匹配

- 极大匹配 (maximal matching)
  - 势极大的匹配（不是任何一个匹配的真子集）
- 最大匹配 (maximum matching)
  - 势最大的匹配

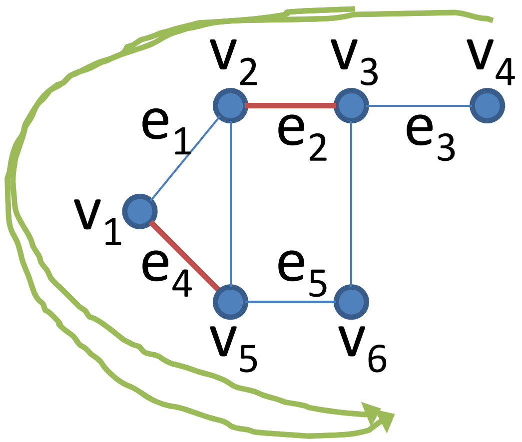
- 完美匹配和最大匹配是什么关系？





匹配的增广路

- M交错路 (M-alternating path)
  - 边交替属于M和E(G)\M的路
- M增广路 (M-augmenting path)
  - 起点和终点未被M饱和的M交错路

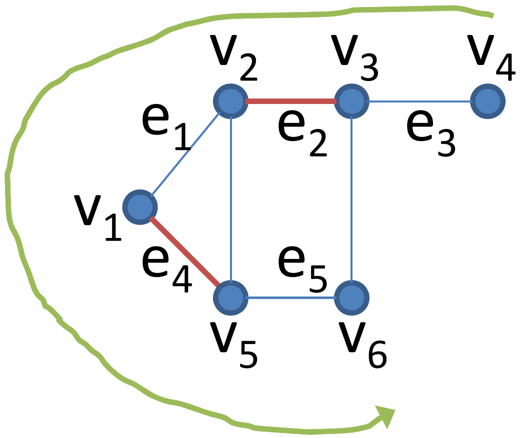


最大匹配的充要条件

- 图G的一个匹配M是最大匹配的充分必要条件是G中不存在M增广路。

证明：⇒

反证法：假设存在M增广路P ⇒ 将M中在P上的边替换为P上的其它边 ⇒ 得到另一个匹配且势更大 ⇒ M不是最大匹配 ⇒ 矛盾



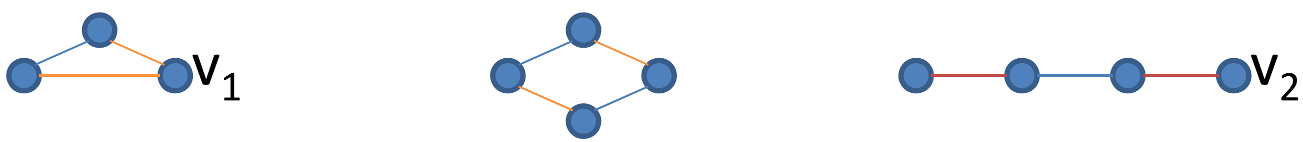
为什么替换之后得到的一定是一个匹配？

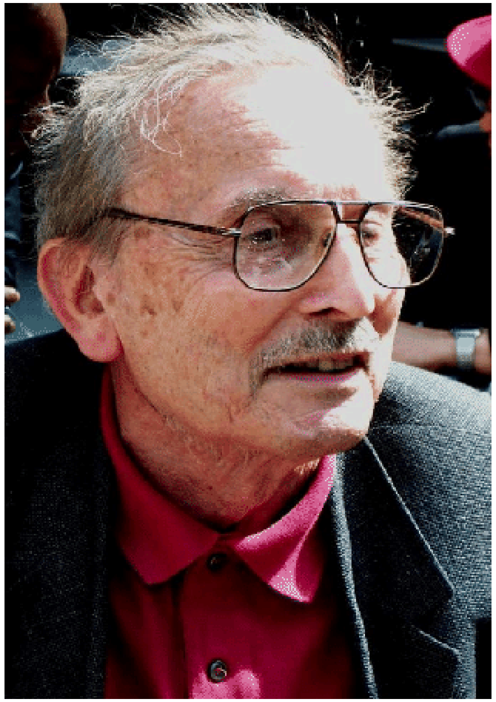
最大匹配的充要条件 (续)

- 图G的一个匹配M是最大匹配的充分必要条件是G中不存在M增广路。

证明：$\Leftarrow$

1. 反证法：假设M不是最大匹配 $\Rightarrow$ 存在匹配M’且|M’|>|M|
2. 取$H=G[(M'\cup M)\backslash(M'\cap M)]$
    1. M和M’是匹配 $\Rightarrow \Delta(H)\leq 2 \Rightarrow$ H的连通分支是偶圈或路，且边在M和M’之间交替出现
    2. |M’|>|M| $\Rightarrow$ H的某个连通分支是路且始于并终于M’中的边 $\Rightarrow$ 在G中是M增广路 $\Rightarrow$ 矛盾





Claude Berge, 法国, 1926--2002

完美图猜想：一个图是完美图
当且仅当其补图是完美图 (6.4)

http://www.les-mathematiques.net/p/p/b/img7.png

奇分支

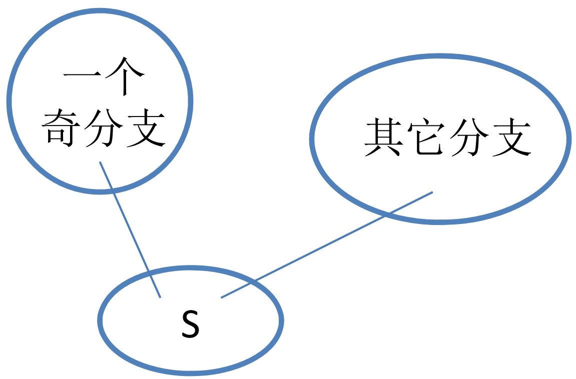
- 奇分支 (odd component)
  - 阶为奇数的连通分支
  - 图G的奇分支的数量记作o(G)
- 向图中增加边不会增加奇分支的数量
  - 连通一个奇分支和一个偶分支：o(G)不变
  - 连通两个奇分支：o(G)变小
  - 连通两个偶分支：o(G)不变

有完美匹配的充要条件

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇒

G有完美匹配M ⇒ 对于G-S的每个奇分支，M中至少有一条边关联该分支中的一个顶点和S中的一个顶点，且S中的这些顶点互不相同 ⇒ o(G-S)≤|S|



有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇐

1. 反证法：假设图G满足∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|，但无完美匹配。
2. 取S=∅ ⇒ o(G-S)=0 ⇒ v(G)是偶数
3. 向G中添加一些边得到G*，使得G*无完美匹配但添加任意边都会有完美匹配 ⇒ ∀S⊂V(G)，o(G*-S)≤o(G-S)≤|S|
4. 取S=U={v∈V(G*) | d(v)=v(G*)-1} ⇒ o(G*-U)≤|U|
5. 通过证明G*有完美匹配，导致矛盾。分情况讨论G*-U：
   - G*-U是零图 ⇒ U=V(G) ⇒ G*是偶数阶完全图 ⇒ G*有完美匹配 ⇒ 矛盾
   - G*-U的连通分支都是完全图
   - G*-U的某个连通分支不是完全图

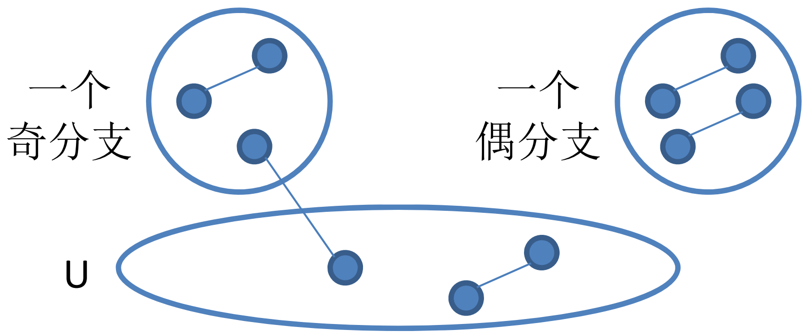
有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇐

… G*-U的连通分支都是完全图

1. 构造G*的一个完美匹配
   - 偶分支是完全图 ⇒ 偶分支内的顶点任意配对
   - U内的顶点与G*中的每个顶点都相邻，且o(G*-U)≤|U| ⇒ 每个奇分支内的一个顶点与U内的一个顶点配对，且U内这些顶点互不相同
   - 奇分支是完全图 ⇒ 奇分支内剩余偶数个顶点任意配对
   - U内的顶点与G*中的每个顶点都相邻 ⇒ U内剩余偶数个顶点任意配对
2. ⇒ 矛盾



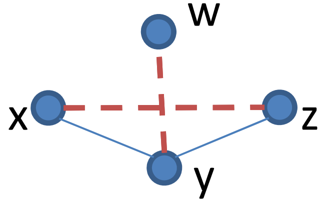
有完美匹配的充要条件 (续)

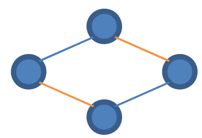
- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇐

… G*-U的某个连通分支H不是完全图

1. 习题2.1 ⇒ 有x, y, z∈V(H)使得(x, y), (y, z)∈E(H)且(x, z)∉E(H)
2. y∈V(H) ⇒ y∉U ⇒ 有w∈V(G*-U)与y不相邻
3. G*的性质 ⇒ G*+(x, z)有完美匹配M_1且(x, z)∈M_1，G*+(y, w)有完美匹配M_2且(y, w)∈M_2 ⇒ G*中的每个顶点各与M_1和M_2中的一条边关联
4. 取F=(M_1∪M_2)\(M_1∩M_2) ⇒ G*中的每个顶点与F中的0或2条边关联 ⇒ G[F]的连通分支是偶圈，且边在M_1和M_2之间交替出现
5. (x, z)仅在M_1中，(y, w)仅在M_2中 ⇒ (x, z), (y, w)∈F ⇒ 要构造一个G*+(x, z)+(y, w)的完美匹配且不含(x, z)和(y, w) ⇒ 是G*的完美匹配 ⇒ 矛盾





有完美匹配的充要条件 (续)

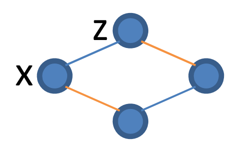
- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

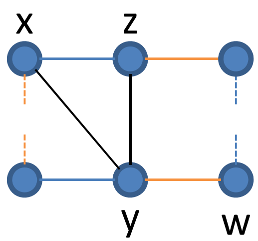
证明：⇐

… 讨论(x, z)和(y, w)的关系

- (x, z)和(y, w)不在同一个偶圈中 ⇒ 构造G*+(x, z)+(y, w)的一个完美匹配
  - (x, z)所在的圈内，取M_2中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - (x, z)所在的圈外，取M_1中的其它所有边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
- (x, z)和(y, w)在同一个偶圈中 ⇒ 构造G*+(x, z)+(y, w)的一个完美匹配
  - 圈内从y到w到z（或x）的路，取M_1中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 取(z, y) ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 圈内从y不经过w到x（或z）的路，取M_2中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 圈外，取M_1或M_2中的其它所有边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)

⇒ 构造的G*+(x, z)+(y, w)的完美匹配不含(x, z)和(y, w) ⇒ 是G*的完美匹配 ⇒ 矛盾





二战中解密了大量的德军密码

William Thomas Tutte, 英国/加拿大, 1917--2002

http://squaring.net/history_theory/gfx/250px-WTTutte.gif

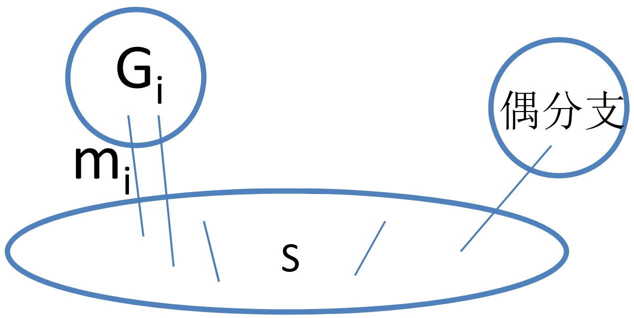
推论：有完美匹配的一个充分条件

- 偶数阶(k-1)-边连通的k正则图有完美匹配。

证明：

- 若$S=\emptyset$：$o(G-S)=0\le|S|=0$
- 若$S\ne\emptyset$：
  1. 设G-S的奇分支为$G_1, \ldots, G_n$，关联G_i与S的边数为m_i
  2. G是(k-1)-边连通的 $\Rightarrow m_i \ge k-1$
  3. 假设有$m_i=k-1 \Rightarrow 2\varepsilon(G_i)=kv(G_i)-m_i=kv(G_i)-(k-1)=k(v(G_i)-1)+1$
  4. $v(G_i)$是奇数 $\Rightarrow$ 上式左侧为偶右侧为奇 $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow m_i\ne k-1 \Rightarrow m_i\ge k \Rightarrow \sum m_i \ge kn$ $\Rightarrow n\le \sum m_i/k$
  5. $o(G-S)=n\le\sum m_i/k\le k|S|/k=|S|$

$\Rightarrow$ G有完美匹配



一个例子

- 2-边连通的3-正则图有完美匹配。

证明：

$2\varepsilon(G)=3\nu(G) \Rightarrow \nu(G)$是偶数 $\Rightarrow$ 前条件中取$k=3$

推论：二部图有完美匹配的一个必要条件

- $|X|=|Y|$。

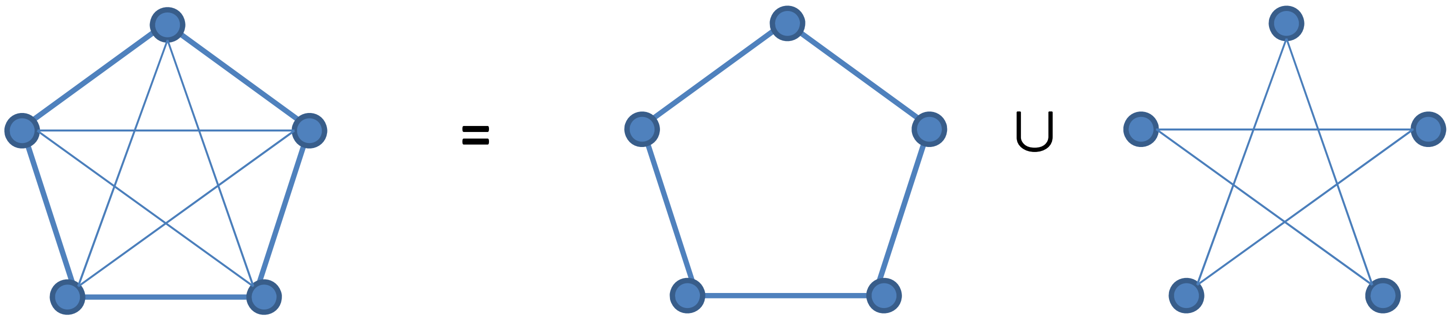
证明：

- 令$S=X$，则$o(G-S)=|Y|\le|S|=|X|$。
- 令$S=Y$，则$o(G-S)=|X|\le|S|=|Y|$。

$\Rightarrow |X|=|Y|$

因子

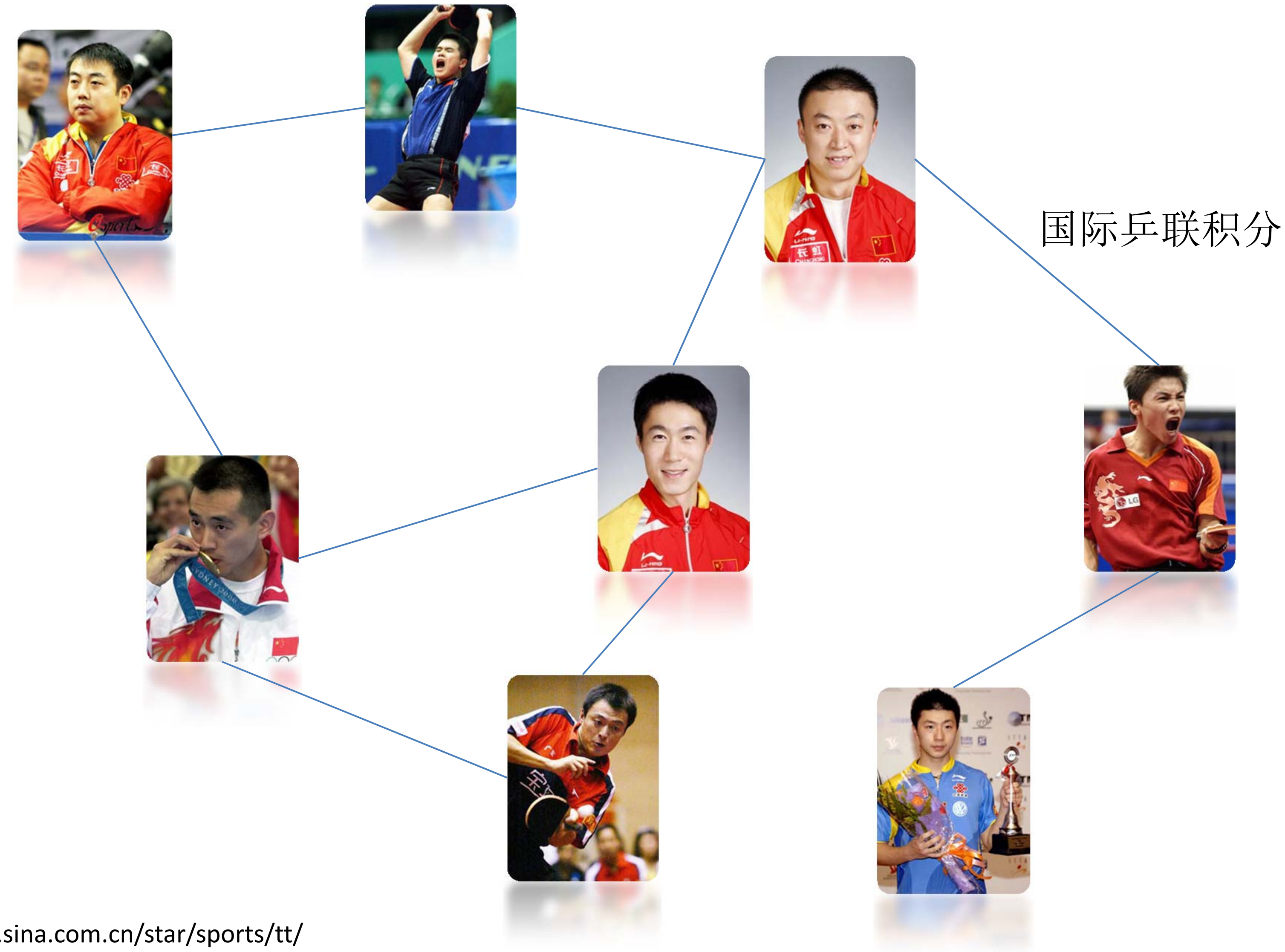
- k-因子 (k-factor)
  - 图G的k-正则生成子图
- 1-因子对应什么？
  - 完美匹配
- 可k-因子分解的 (k-factorable)
  - 图G有一组k-因子的边集构成E(G)的一个划分



二部图的匹配

- Hall定理及其推论留给大家自学 (3.3)

最大权匹配



http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

作业

- 3.5 //完美匹配和最大匹配及其充要条件
- 3.10 //有完美匹配的充要条件
- 3.12 // 因子