离散数学-作业解答

ch1:逻辑与证明

- 1.1-10. 令p,q,r为如下命题：p:你的期末考试得了个A ； q:你做了本书的每一道练习；r:这门课你得了个A 。用p、q、r和逻辑联接词写出下列命题：

d) 你的期末考试得了个A，你没有做本书的每道练习，可不管怎样这门课你得了个A。

$p \wedge \neg q \wedge r$

e) 期末考试得A并且做本书的每道练习，足以使你这门课得A。

$(p \wedge q) \rightarrow r$

知识点： 自然语言翻译为逻辑表达式；
常见错误：
d): $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
e):$(p \wedge q) \leftrightarrow r$

ch1:逻辑与证明

- 1.2-24 证明$(p\rightarrow q)\vee(p\rightarrow r)$和$p\rightarrow(q\vee r)$逻辑等价

$$
\begin{aligned}
p\rightarrow(q\vee r) &\equiv \neg p \vee (q\vee r) \\
&\equiv (\neg p\vee q) \vee (\neg p\vee r) \\
&\equiv (p\rightarrow q) \vee (p\rightarrow r)
\end{aligned}
$$

知识点：对逻辑等价式的运用

ch1:逻辑与证明

- 1.3-10 令C(x)：x有一只猫; D(x): x有一只狗; F(x): x有一只雪貂。用C(x)、F(x)、D(x)、量词和逻辑联接词表达下列语句。令论域包括你班上的所有学生

c) 班上一些学生有一只猫和一只雪貂，但没有狗

$\exists x(C(x) \land F(x) \land \neg D(x))$

知识点：含谓词、量词的逻辑表达式

ch1:逻辑与证明

- 1.3-24 使用谓词、量词和逻辑联接词，以两种方式将下列语句翻译成逻辑表达式。

e) 班上的某个学生不想变富

- 首先令变量x论域为班上学生

  令$R(x)$ 表示“x想变富”

  $\exists x \neg R(x)$

- 其次令变量x论域为所有人

  令$C(x)$和$R(x)$分别表示“x是学生”，“x想变富”

  $\exists x(C(x) \wedge \neg R(x))$

知识点：含谓词、量词的逻辑表达式
常见错误：变量论域的变化

ch1:逻辑与证明

- 1.4-16 离散数学班上有1个主修数学的新生，12个主修数学的二年级学生，15个主修计算机科学的二年级学生，2个主修数学的三年级学生和1个主修计算机科学的四年级学生，用量词表达下列语句，再给出真值。

d) 班上每个学生要么是二年级学生，要么主修计算机科学。

- 令M(s, m)表示学生s主修专业m，G(s, g)表示学生s是g年级的。
- 其中， s、g和m论域分别为班上全体学生、“1，2，3，4”和“计算机科学和数学等专业”.

$\forall s\,(G(s, 2) \lor M(s, \text{“CS”}))$； **F**

知识点：含谓词、量词的逻辑表达式
常见错误：全称和存在量词使用错误

ch1:逻辑与证明

1.5-12 根据练习11和推理规则证明：论证形式由前提$(p\wedge t)\rightarrow(r\vee s)$, $q\rightarrow(u\wedge t)$, $u\rightarrow p$, $\neg s$及结论$q\rightarrow r$

- 根据练习11的结论，即证前提$(p\wedge t)\rightarrow(r\vee s)$, $q\rightarrow(u\wedge t)$, $u\rightarrow p$, $\neg s$, q及结论r, 该论证的有效性。(论证有效性定义p49)

①

$$\begin{array}{l} q \\ \underline{q\rightarrow(u\wedge t)} \\ \therefore u\wedge t \end{array}$$

②

$$\begin{array}{l} \underline{u\wedge t} \\ \therefore u \end{array}$$

③

$$\begin{array}{l} u \\ \underline{u\rightarrow p} \\ \therefore p \end{array}$$

④

$$\begin{array}{l} \underline{u\wedge t} \\ \therefore t \end{array}$$

⑤

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{\quad t} \\ \therefore p\wedge t \end{array}$$

⑥

$$\begin{array}{l} p\wedge t \\ \underline{(p\wedge t)\rightarrow(r\vee s)} \\ \therefore r\vee s \end{array}$$

⑦

$$\begin{array}{l} r\vee s \\ \underline{\quad \neg s} \\ \therefore r \end{array}$$

根据论证有效性定义，故该论证为有效的

常见错误：论证有效性的理解不到位

ch4:归纳与递归

- 4.1-63 证明：如果$A_1, A_2, \ldots, A_n$是集合，其中$n\geq 2$，且对所有满足$1\leq i\leq j\leq n$的整数对i和j，要么A_i是A_j的子集，要么A_j是A_i的子集，则必存在一个整数i, $1\leq i\leq n$，使得对所有的整数j, $1\leq j\leq n$，都有A_i是A_j的子集

- 基础步骤：$A_1\subseteq A_2$，那么A_1 会是每一个集合的子集，满足条件；否则 $A_2\subseteq A_1$，那么A_2会也满足条件
- 归纳步骤：假设对于k个集合（$k\geq 2$），命题成立. 现有k+1个集合满足给定条件，由归纳假设可知，必存在$A_i\subseteq A_j$,$i\leq k$, $1\leq j\leq k$. 如果 $A_i\subseteq A_{k+1}$,则A_i是A_j 的子集, $1\leq j\leq k+1$. 如果$A_{k+1}\subseteq A_i$ ，那么A_{k+1}是A_j 的子集， $1\leq j\leq k+1$.

常见错误：归纳步骤，从k到k+1

ch4:归纳与递归

- 4.2-7 只用2美元和5美元可以构成多少数量的钱？并用强归纳法证明之。

- 可以构成除1，3之外的任意数量的钱。
- 设命题P(n)：可以用2和5美元组成n美元；命题P(2)和P(4)为真，分别用1个2美元和2个2美元组成
- 要证：对于任意$n \geq 5$, P(n)成立。
- 基础步骤：P(5)为真，1个5美元; P(6)为真，3个2美元组成;
- 归纳步骤：设$k \geq 6$，假定对于$5 \leq j \leq k$, P(j)都成立，j为整数；需要证P(k+1)成立。
- 因为$k-1 \geq 5$, 故P(k-1)成立，即可以组成k-1美元，再加上2美元即k+1美元成立，即P(k+1)成立。
- 故对于任意$n \geq 5$, P(n)成立。

常见错误：未定义命题；归纳步骤。

ch4:归纳与递归

- **4.3-24 给出下列集合的递归定义**

c) 整系数多项式的集合S

设*x*代表多项式的变元

基础步骤：$\forall q \in Z,\ q \in S$

递归步骤：若$p \in S,\ q \in Z$, 则 $x*p + q \in S$

常见错误：定义不准确

ch4:归纳与递归

4.3-32

a) 给出计算位串s中的1的个数的函数ones(s)的递归定义

ones(λ)=0; ones(ωx)=ones(ω)+x;

注： λ为空串； ω为位串， x is a bit(0 or 1)

b) 用结构归纳法证明： ones(st)=ones(s)+ones(t)

- 基础步骤： 令t= λ，

  ones(s λ)=ones(s)=ones(s)+0=ones(s)+ones(λ)

- 归纳步骤： 令t= ωx ， 设命题对于t= ω成立

  ones(s(ωx))= ones((sω)x)= ones(sω)+x

  = ones(s)+ones(ω)+x= ones(s)+ones(ωx)

  = ones(s)+ones(t)

常见错误：递归步骤推导不正确

ch2:集合、函数、数列与求和

- **2.1-22 判断下列各集合是否为某集合的幂集合**

  b) $\{\varnothing, \{a\}\}$是$\{a\}$的幂集

  d) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$是$\{a, b\}$的幂集

ch2:集合、函数、数列与求和

- 2.2-48 试求$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$和$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$，如对于任一正整数i,

  a) A_i={ i, i+1,i+2,...}

  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = Z^+$ ； $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$

常见错误：广义交出错

ch2:集合、函数、数列与求和

- **2.2-57 集合A的后继是A∪{A}.求下列集合的后继**

  a) {1,2,3} 的后继为： {1, 2, 3, {1,2,3} }

  c) {∅} 的后继为： {∅, {∅}}