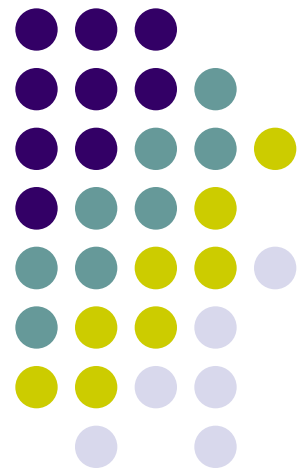


集合及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系





内容提要

- 基本概念
 - 集合及其描述
 - 集合相等、子集关系
 - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
 - 交并补、广义交、广义并
 - 集合恒等式
 - 集合相关命题的证明方式
- 自然数的构造



集合的定义

- 直观的定义
 - 一个集合是一组无序的**对象**，这些对象称为这个集合的**元素或成员**。
 - $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个成员， $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的成员。
- Georg Cantor 的描述
 - [English translation] A set is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or our thought. The objects are called elements (member) of the set.

Naïve set theory, 朴素集合论



集合的描述

- 罗列、枚举
 - $V=\{a, e, i, o, u\}$
 - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- 集合构造符号
 - $Z^+=\{x \in Z \mid x > 0\}$
 - $Q=\{p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$
 - $[a, b]=\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

$$N=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

R: 实数集

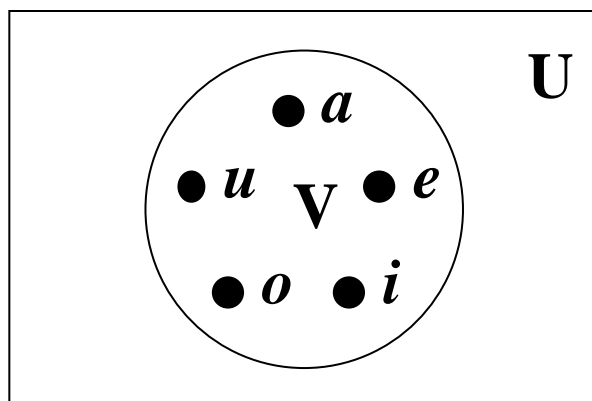
$$\{N, Z, Q, R\}$$

$$\{\}$$

集合的描述



- 文氏图（Venn diagrams）//John Venn





集合相等、子集关系

- 集合相等当且仅当它们有同样的元素
 - **A=B** 当且仅当 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ //外延原则
- 集合A称为集合B的子集，记作 $A \subseteq B$
 - $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
- 如果 $A \subseteq B$, 但 $A \neq B$, 则A是B的真子集, 记作 $A \subset B$
- 对任意集合A和B, $A=B$ 当且仅当:
 - $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$



子集关系的一个性质

- 证明：如果 $X \subseteq Y$ 且 $Y \subseteq Z$, 则 $X \subseteq Z$
- 要证明：“对任意的 a , 如果 $a \in X$, 则 $a \in Z$ ”
- 证明：
 - 对任意的 $a \in X$
 - 根据已知的 “ $X \subseteq Y$ ”, 可得: $a \in Y$
 - 根据已知的 “ $Y \subseteq Z$ ”, 可得: $a \in Z$
 - 所以, $\forall a (a \in X \rightarrow a \in Z)$, 即 $X \subseteq Z$



集合的大小

- 有限集合及其基数
 - 若S恰有 n 个不同的元素， n 是自然数，就说S是有限集合，而 n 是S的基数，记作 $|S|=n$ 。
- 无限集合
 - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。



空集

- 存在一个没有任何元素的集合：空集 \emptyset
- 关于空集的一些性质：
 - 空集是任何集合的子集。
 - $\emptyset \subseteq A$ ，即 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$
 - 空集是唯一的，可以用 \emptyset 表示
 - 如果 \emptyset_1, \emptyset_2 都是空集，则 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 和 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ 均为真



关于空集的讨论

- 空集本身可以是一个对象，可以是某个集合的元素
 - $\emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- 事实上，我们从空集开始构造整个集合世界！
 - 自然数
 - 有理数
 - 实数（幂集运算）
 - ...



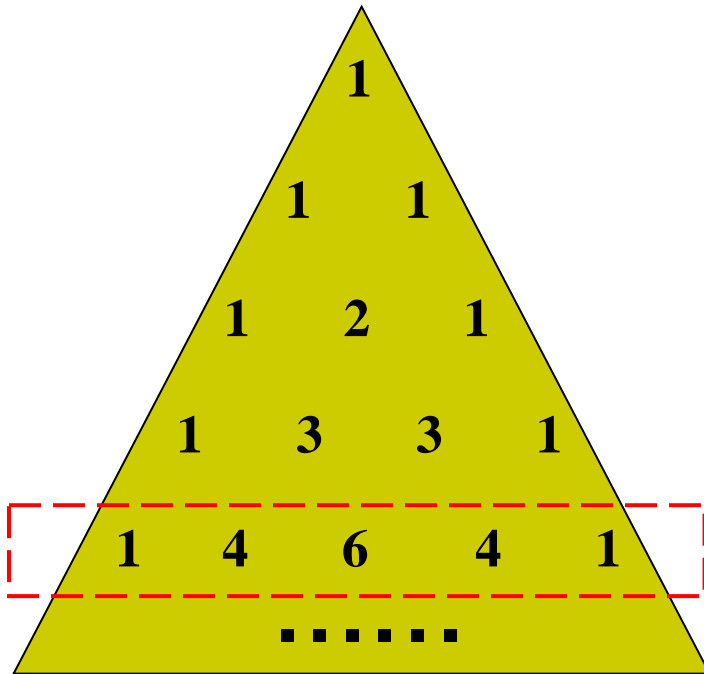
幂集

- S是一个集合，**S的幂集**是S的所有子集的集合
 - $\rho(S) = \{x \mid x \subseteq S\}$
- 举例
 - $\rho(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
 - $\rho(\emptyset) = \{\emptyset\}$

If $\rho(A) \in \rho(B)$, then $A \in B$



有限集合的所有子集



如果 $|A|=n$, 则 $|\rho(A)|=2^n$
幂集的另一种记法: 2^A

$$C(4, 0) + C(4, 1) + C(4, 2) + C(4, 3) + C(4, 4) = 2^4$$

$$A = \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$$



笛卡尔乘积

- 集合A和B的笛卡尔乘积
 - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- 何种情形下， $A \times B = B \times A$
- 集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积
 - $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$



集合与谓词逻辑

- 在量化逻辑表达式中使用集合符号
 - $\forall x \in S(P(x))$ 代表 $\forall x(x \in S \rightarrow P(x))$
 - $\exists x \in S(P(x))$ 代表 $\exists x(x \in S \wedge P(x))$
 - 举例
 - $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0): \forall x(x \in \mathbf{R} \rightarrow (x^2 \geq 0))$
 - $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1): \exists x(x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 = 1)$
- 逻辑表达式的真值集合, $\{x \in \mathbf{D} \mid P(x)\}$
 - 举例: $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = x\}$, $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 2\}$, $\{x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 = 2\}$

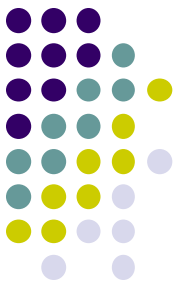


集合悖论

- $A = \{x \mid P(x)\}$, 实际上不能保证：对任意的性质 P , 这样的定义都有意义。
- 例如：
 - 1) 存在不以自己为元素的集合，称它们为“平凡集”
 - 天上的星星、教室里的同学
 - 2) 定义包含所有“平凡集”的集合
 - $A = \{x \mid x \notin x\}$
- **Russell 悖论：**

定义 $R = \{x \mid x \notin x\}$ 。则如果 R 存在，定有： $R \in R \text{ iff. } R \notin R$

 - 理发师悖论：“我给所有不给自己理发的人理发”



公理集合论 (Axiomatic set theory)

- 用公理来约束集合世界，以摆脱悖论
 - 集合相等 ($=$) 和元素属于集合的关系 (\in)
 - 某种集合存在性，亦即给定合法集合构造原则
- Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of Choice (ZFC集合论) 参见[附录](#)

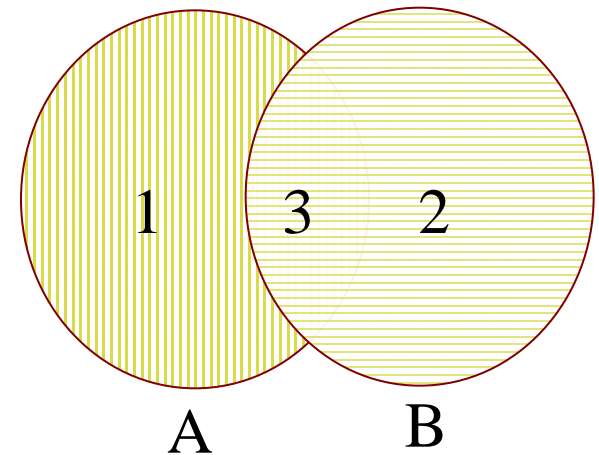
外延公理
正则公理
分离公理模式
配对公理
并集公理

替代公理模式
无穷公理
幂集公理
选择公理



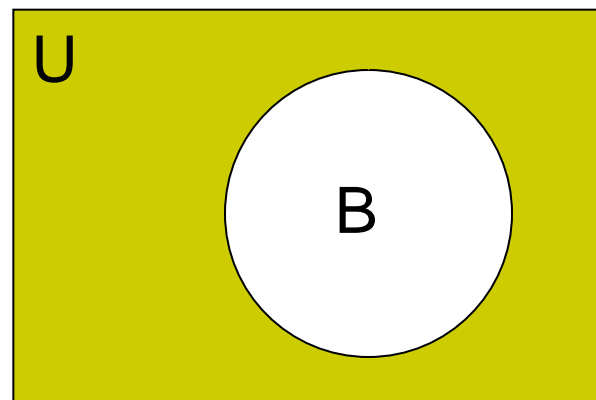
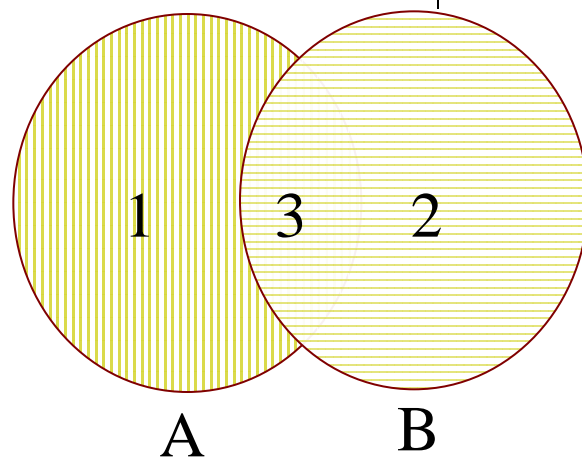
集合运算的定义

- 运算定义的基本方式：将结果定义为一个新的集合
 - 并： $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
 - 并集： $\{1, 2, 3\}$
 - 交： $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
 - 交集： $\{3\}$



相对补（差）

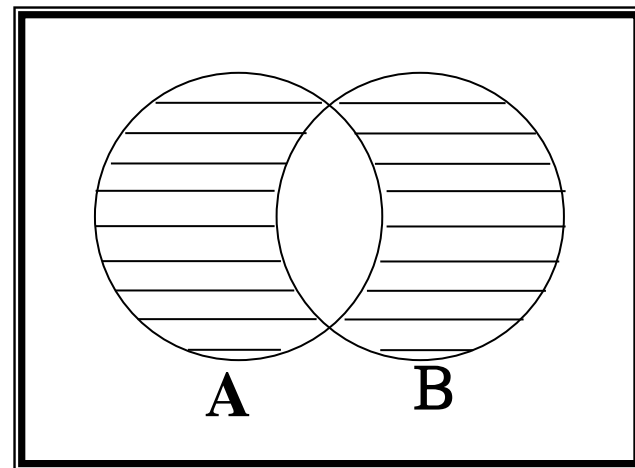
- **B对于A的补集**
 - $A-B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- 举例， $A-B = \{1\}$
- 若有一个我们关心的“所有”对象的集合，称为全集，常用U表示， $U-B$ 称为B的“补集”，记为 $\sim B$
 - $x \in \sim B \leftrightarrow x \notin B$



对称差



- 对称差
 - $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
- 证明: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
 - $(A - B) \cup (B - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$
 - $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$





广义并和广义交

- 广义并

- 设 A 为集合， A 的所有元素的并，记为 $\bigcup A$ ；定义为 $\bigcup A = \{x | \exists y \in A, x \in y\}$

- 广义交

- 设 A 为**非空**集合， A 的所有元素的交，记为 $\bigcap A$ ，定义为： $\bigcap A = \{x | \forall y \in A \rightarrow x \in y\}$
 - 注意：限制条件为 A 非空， $\bigcap \emptyset$ 无意义



运算的重要性质

- 包含关系下两个集合的最小上界和最大下界
 - 最小上界：
 - $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ -----A和B的上界
 - 对任意X, 若 $A \subseteq X, B \subseteq X$, 则 $A \cup B \subseteq X$ -----最小上界
 - 最大下界：
 - $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ -----A和B的下界
 - 对任意X, 若 $X \subseteq A, X \subseteq B$, 则 $X \subseteq A \cap B$ -----最大下界



集合相关命题的基本证明方式

- 直接使用集合包含、相等定义
 - $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$
 - 证明:
 - 对任何 x , 假设 $x \in A$
 - 由集合并定义: $x \in A \cup B$
 - 由已知条件: $A \cup B = B$
 - $\therefore x \in B$
 - 因此: $A \subseteq B$



基本证明方式

- 利用运算定义作逻辑等值式推演

- 例： $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= \{x | x \in A \wedge x \notin B \cup C\} \\ &= \{x | x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)\} \\ &= \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)\} \\ &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

等价的描述方式：

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C)) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in (A - B)) \wedge (x \in (A - C)) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$



基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
 - 例： $A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

$$A \cap B = A \Rightarrow A - B = \emptyset:$$

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A:$$

$$A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$$

$$= A \cap (B \cup \sim B) = A \cap U = A$$



基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
 - 例：已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 证明 $B = C$

$$\begin{aligned} B &= \emptyset \oplus B \\ &= (A \oplus A) \oplus B \\ &= A \oplus (A \oplus B) \\ &= A \oplus (A \oplus C) \\ &= C \end{aligned}$$



集合恒等式 (1)

等 式	名 称
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\sim(\sim A) = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律



集合恒等式（2）

等 式	名 称
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	分配律
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	分配律
$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	德摩根定律
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	吸收律
$A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \emptyset$	补律



基本证明方式

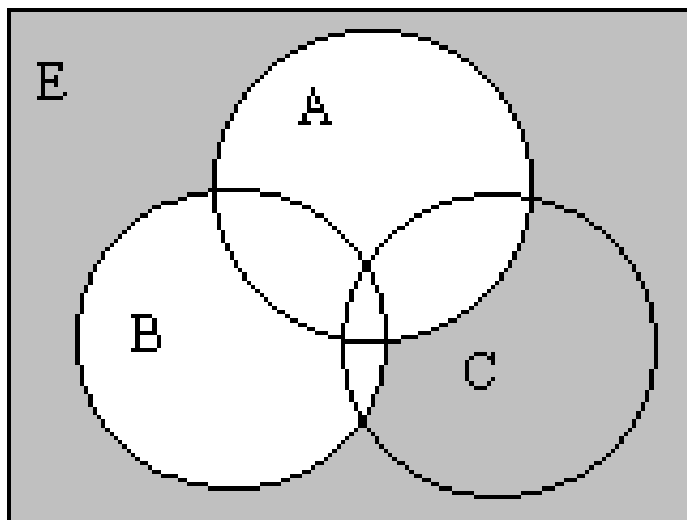
- 利用成员表证明集合恒等式
 - $A \cup (A \cap B) = A$

A	B	$A \cap B$	$A \cup (A \cap B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

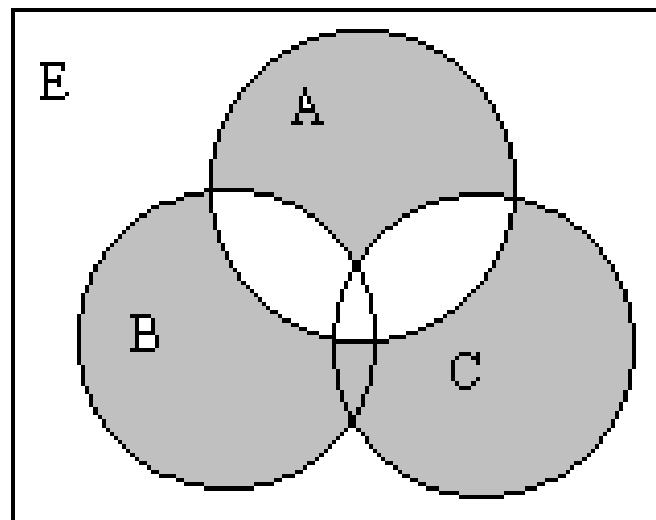
文氏图的更多例子



- $\sim A \cap \sim B$



- $(A - (B \cup C)) \cup ((B \cup C) - A)$

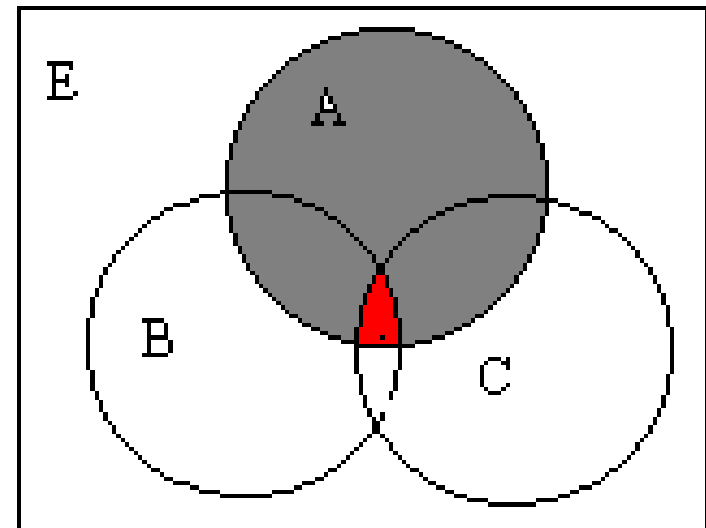


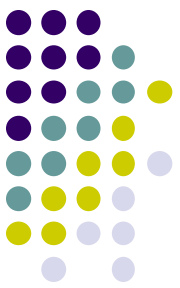


文氏图与数学证明

- 文氏图不能代替数学证明, 但可以帮助推测结论
- 例子:
 - $(A-B) \cup (A-C) = A$?

充要条件: $A \cap B \cap C = \emptyset$





用集合定义自然数

- 设 a 为集合, 称 $a \cup \{a\}$ 为 a 的**后继**, 记为或 a^+ , 或 $s(a)$ 。
- 设 A 是集合, 若 A 满足下列条件, 称 A 为**归纳集**:
 - $\emptyset \in A$
 - $\forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)$
- 自然数集合 N 是所有归纳集的交集。
 - 因此: $N = \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots \}$
 - N 的每一个元素称为一个自然数。
 - \emptyset 记为0, 0^+ 记为1, 1^+ 记为2, 2^+ 记为3, 余此类推



再具体一点

- 记号0表示: \emptyset
- 记号1表示 0^+ : $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
- 记号2表示 1^+ : $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- 记号3表示 2^+ : $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $3 \cup 2 = ?$ $3 \cap 2 = ?$
- $2 \in 3?$ $1 \in 3?$
- $1 \subseteq 2?$ $2 \subseteq 5?$

自然数上的小于关系?



自然数上的运算

- 加法（递归定义）
 - $m+0=m$
 - $m+n^+= (m+n)^+$
- 乘法（递归定义）
 - $m*0=0$
 - $m*n^+=m + m*n$
- 序关系
 - $a \leq b \text{ iff } \exists c \in \mathbb{N}. a+c=b$

皮亚诺公理

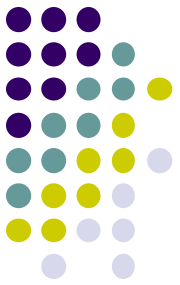
(Peano axioms for natural numbers)



- 零是个自然数.
- 每个自然数都有一个后继（也是个自然数）.
- 零不是任何自然数的后继.
- 不同的自然数有不同的后继.
- （归纳公理）设由自然数组成的某个集合含有零，且每当该集合含有某个自然数时便也同时含有这个数的后继，那么该集合定含有全部自然数.
- 备注：另有4个与自然数相等有关的公理

作业

- 教材[2.1, 2.2]
 - P87-89: 22, 30, 33, 37
 - P95-98: 18, 40, 48, 57



Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice



- 外延公理
- 正则公理
- 分离公理模式
- 配对公理
- 并集公理
- 替代公理模式
- 无穷公理
- 幂集公理
- 选择公理（或，良序定理）



ZFC公理

- 外延公理 (Axiom of extensionality)
 - 如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

- 正则/基础公理 (Axiom of regularity/foundation)
 - 任意非空集x包含一个成员y，x与集合y是不相交的

$$\forall x [\exists a (a \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))].$$

ZFC公理



- 分离公理模式（Axiom schema of separation）
 - 对任意集合 z 和任意对 z 的元素 x 有定义的逻辑谓词 $\phi(x)$, 存在 z 的子集 y , 使 $x \in y$ 当且仅当 $x \in z$ 而且 $\phi(x)$ 为真。

$$\forall z \forall w_1 \dots w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi)].$$

- 配对公理（Axiom of pairing）

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

- 并集公理（Axiom of union）

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A].$$



ZFC公理

- 替代公理模式 (Axiom schema of replacement)

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n [\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y \phi) \Rightarrow \exists B \forall x (x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \wedge \phi))].$$

- 无穷公理 (Axiom of infinity)

- $S(y)$ 是指 $y \cup \{y\}$

$$\exists X [\emptyset \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X)].$$

- 幂集公理 (Axiom of power set)

$$\forall x \exists y \forall z [z \subseteq x \Rightarrow z \in y].$$



ZFC公理

- 选择公理 (Axiom of choice)
 - 任一非空集合族 $(S_i)_{i \in I}$, 均存在元素族 $(s_i)_{i \in I}$, $\forall i \in I. s_i \in S_i$
- 或, 良序定理 (Well-ordering theorem)

$$\forall X \exists R (R \text{ well-orders } X).$$

参考: Zermelo–Fraenkel set theory @Wiki