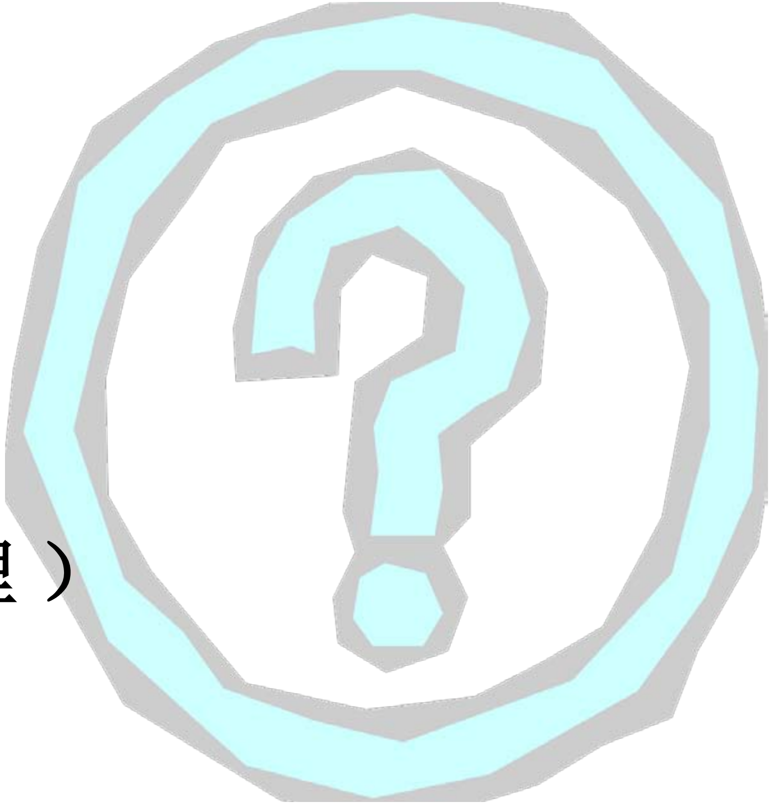
偏序关系

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 偏序与全序
- 哈斯图
- 极大 (小)元、最大(小)元
- 上(下)界、上(下)确界
- 良序
- 链与反链（ **Dilworth**定理 ）
- 格及其性质



偏序关系的定义(Partial Order)

- 偏序关系：集合上的自反的、反对称的、传递的关系
  - 通常记作 $\preccurlyeq$
- 定义了偏序关系的集合称为偏序集，记作$(A, \preccurlyeq)$
- 举例
  - 集合包含关系 $(2^A, \subseteq)$, 其中A是集合
  - $(N, |)$, N是自然数集， “|”是整除关系
- 既是偏序又是等价的关系
  - 任意非空集合A上的恒等关系I_A

“字典顺序”

- 设≼是非空集合A上的偏序关系，定义A×A上的关系R如下：

  $(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2)$ *iff*.

  $$x_1 \neq x_2 \text{且} x_1 \preccurlyeq x_2, \text{或者} x_1 = x_2 \text{且} y_1 \preccurlyeq y_2$$

  - 易证R是A×A上的偏序关系
- 给定有限字符集合Σ，若在Σ上有一个偏序关系，类似上述办法，可以对任意正整数k,定义Σ^k(由Σ中字符构成的长度为k的串的集合)上的偏序关系。加以适当的技术处理，则容易定义Σ^+(由Σ中字符构成的长度为任意正整数的串的集合)上的偏序关系：字典关系
  - 注意：在通常的字典关系中，任何两个元素均可比。

全序：一种特殊的偏序关系

- 如果对$a, b \in A$，$a \preccurlyeq b$和$b \preccurlyeq a$中有一个成立，则a,b可比。
- 设**R**是**A**上的偏序关系，如果**A**中的任意两个元素都是可比的，则称**R**是**A**上的全序关系（或线序关系）
- 举例（全序）
  - 实数集上的“不大于”关系≤、基于拉丁字母表的字典顺序

偏序集上的“小于”关系及覆盖

- 设(A, $\preccurlyeq$)是偏序集
- A上的“小于”关系$\prec$定义如下：

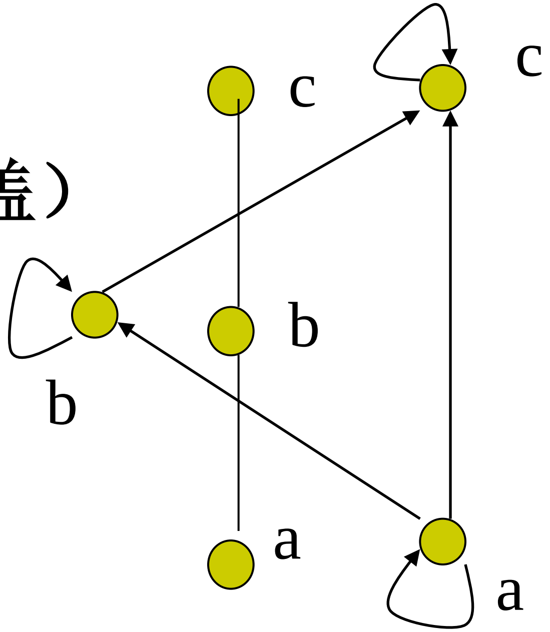
$$x \prec y \ \text{ iff } \ x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$$

- 元素y覆盖x定义如下：

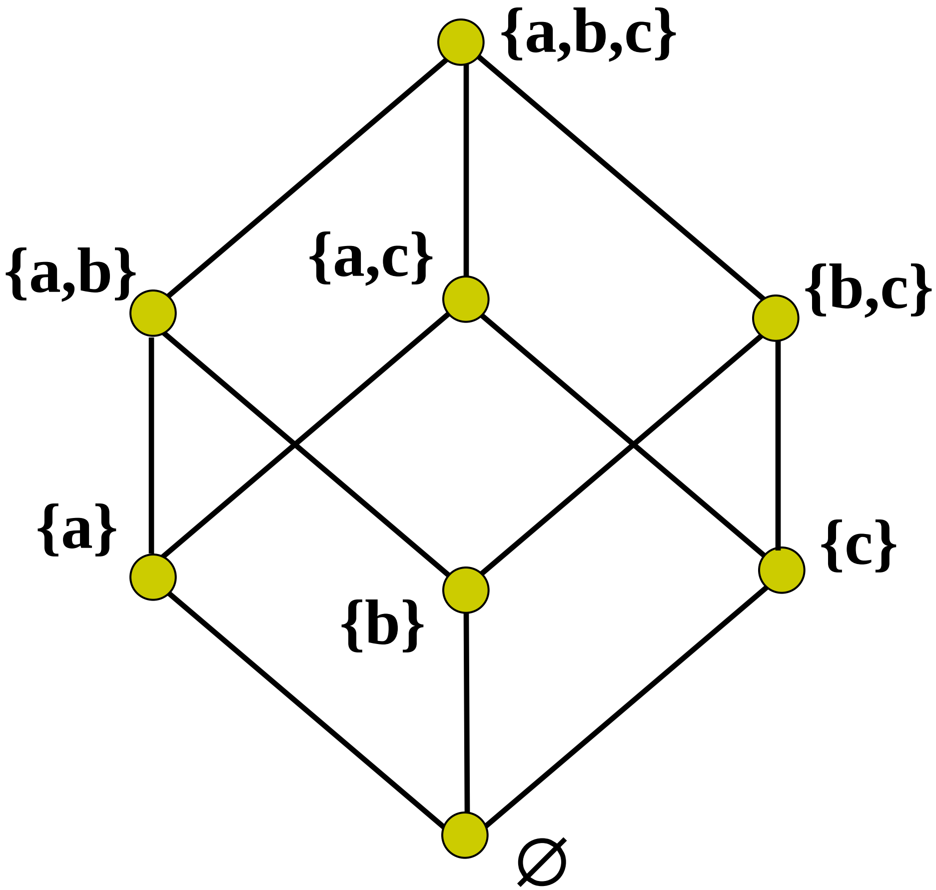
$$x \prec y\text{，且不存在}z \in A\text{使得 } x \prec z \prec y$$

哈斯图

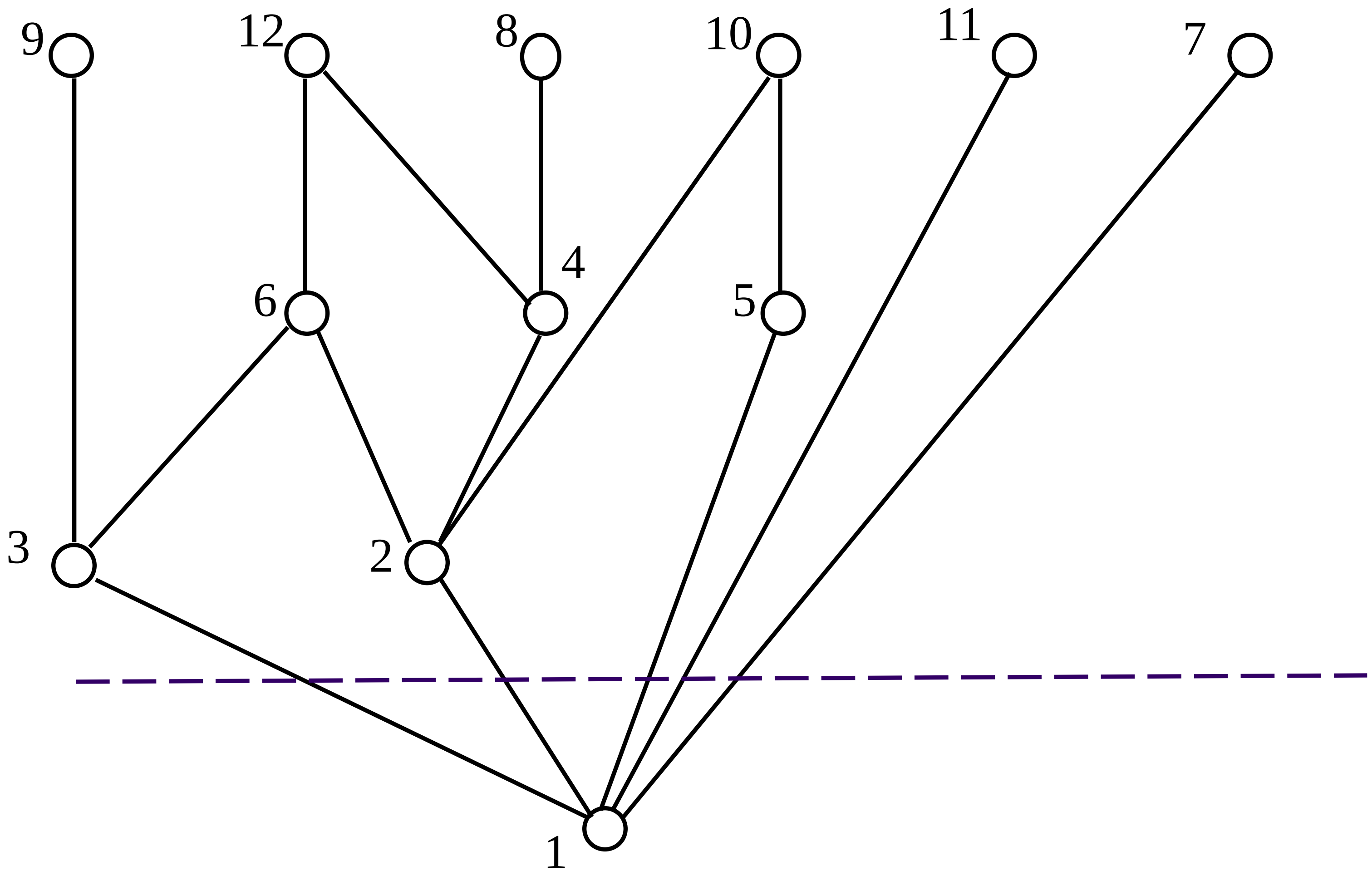
- 普通关系图可以表示偏序关系
- 哈斯图(Hasse)：利用特定性质简化图示方法
  - 利用自反性省略圈
  - 利用反对称性省略箭头
  - 利用传递性省略部分连线（覆盖）



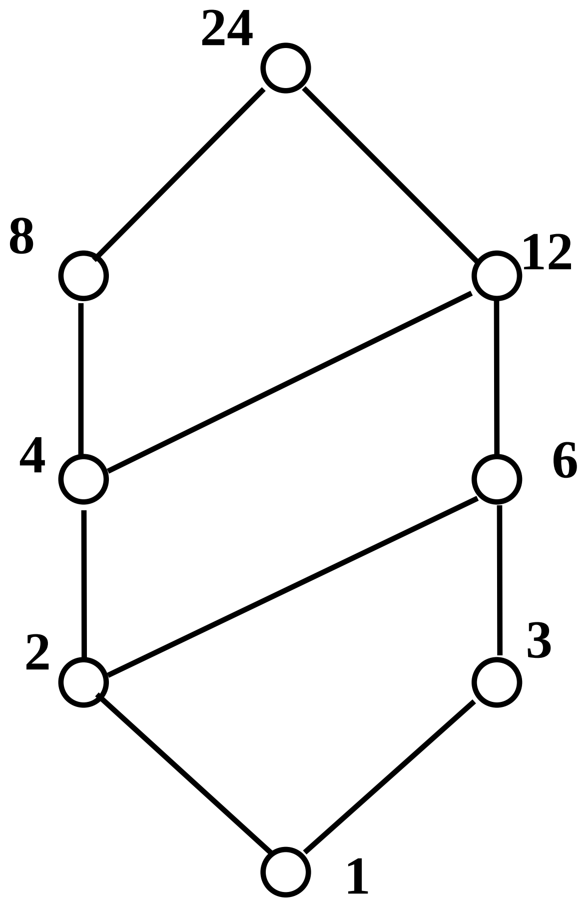
ρ({a,b,c})上的包含关系



{1,2,...,12}上的整除关系



{1,2,3,4,6,8,12,24}上的整除关系



偏序集中的特殊元素：极大(小)

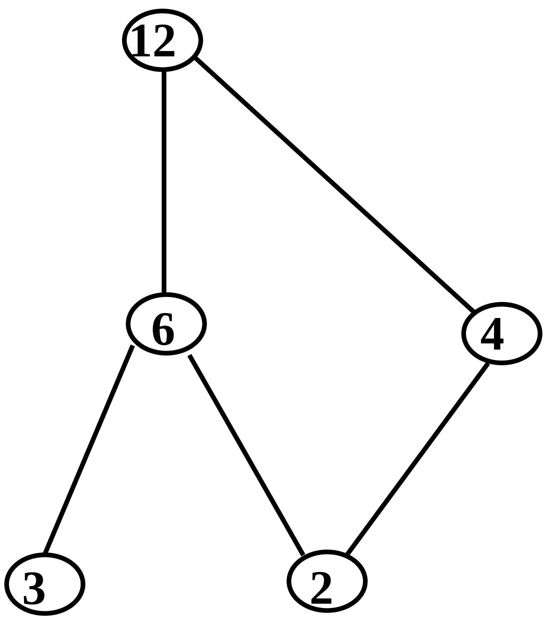
- x是偏序集(A,≼)中的极大元 iff.
  - 对任意$y \in A$,若$x \preccurlyeq y$, 则$x=y$ 没有比它更大(小)的了！
- x是偏序集(A,≼)中的极小元 iff.
  - 对任意$y \in A$,若$y \preccurlyeq x$, 则$x=y$
- 有关极大元与极小元的讨论
  - 不一定存在，但是，有穷集合一定有极大(小)元
  - 不一定唯一
  - 一个元素可能兼为极大(小)元

偏序集中的特殊元素：最大(小)

- x是偏序集(A,≼)中的最大元 iff.
  - 对任意$y\in A$, $y\preccurlyeq x$

它比谁都要大（小）!

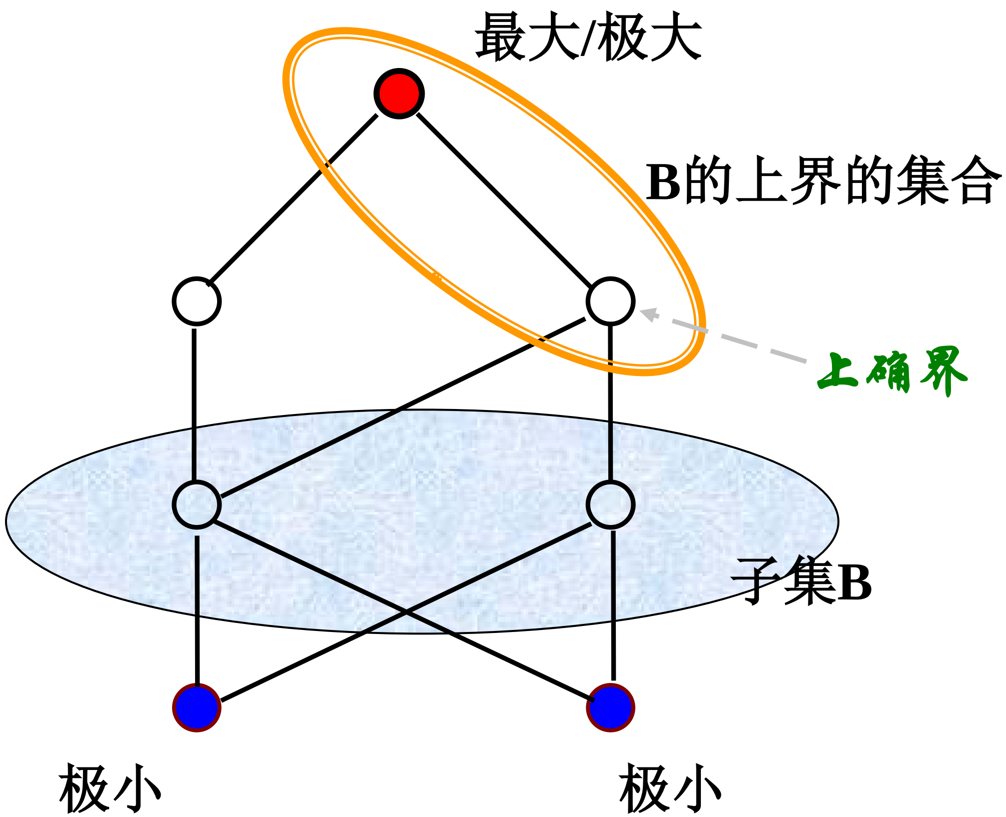
- x是偏序集(A,≼)中的最小元 iff.
  - 对任意$y\in A$, $x\preccurlyeq y$
- 有关最大元与最小元的讨论
  - 可能不存在
  - 若存在，必唯一。



偏序集中的特殊元素 ：上(下)确界

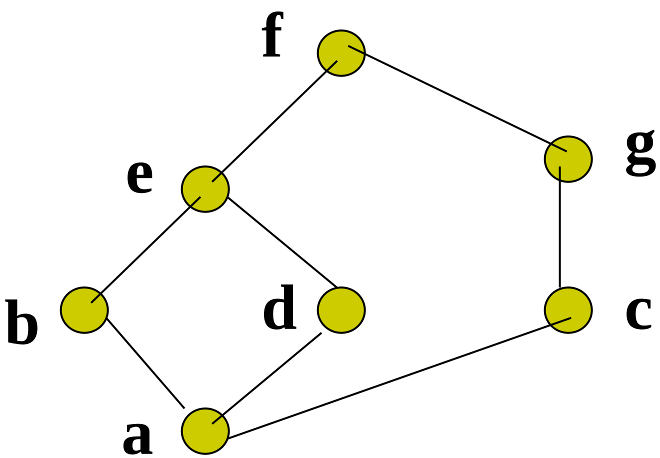
- 上界：对于偏序集(A,≼)和A的子集B，若存在$y \in A$，对B中任意元素x, 均有$x \preccurlyeq y$,则y是B的上界。
- 上确界：如果B的上界构成的偏序集有最小元，则该最小元为B的上确界。
- 类似地可以定义*下(确)界*。
- 有关上(下)界的讨论
  - 不一定存在
  - 上(下)界不一定唯一，但上(下)确界若存在，必唯一。

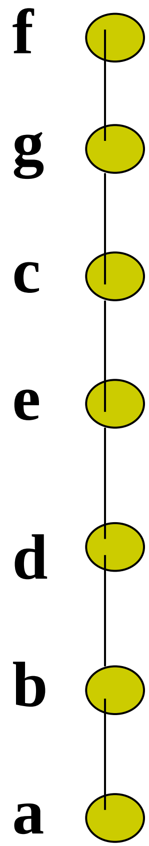
从哈斯图看特殊元素

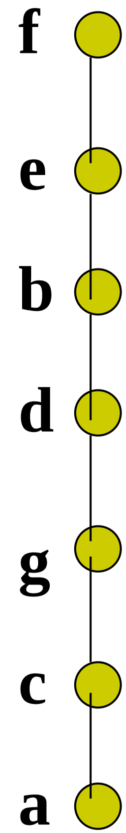


拓扑排序（Topological sorting）

有向无环图上构造一种线性序







良序

- 定义：给定集合A上的偏序≼，若A的任一非空子集均存在最小元素，则该偏序为良序。
- 良序必为全序
  - 对任意$a,b\in A$, $\{a,b\}$必有最小元，则a,b一定可比
- 实际上，“反对称性+任一非空子集存在最小元”就能够保证全序性质（偏序性质+任何两个元素均可比）。
  - 自反性：对任意$a\in A$, $\{a\}$也必有最小元，即$a\preccurlyeq a$
  - 传递性：假设$a\preccurlyeq b$, $b\preccurlyeq c$, $\{a, b, c\}$的最小元素只能是a, 因此$a\preccurlyeq c$
  - 任何两个元素可比上面已证明。

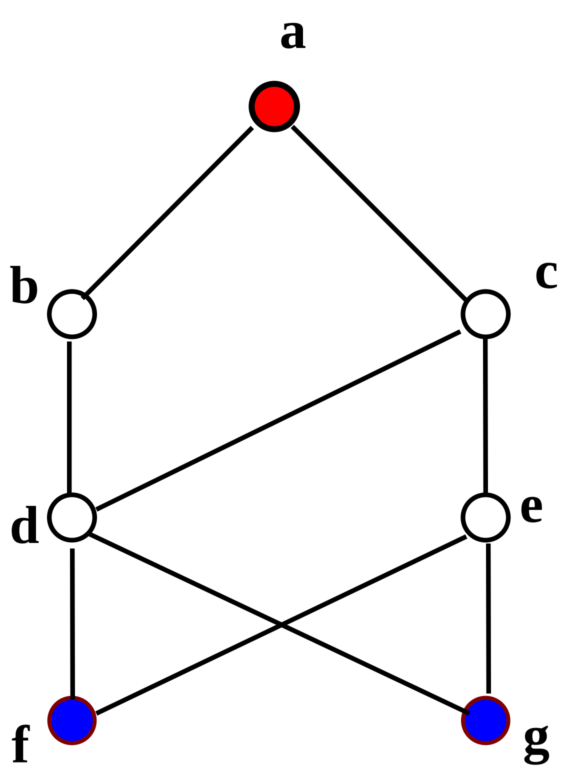
关于次序关系的进一步讨论

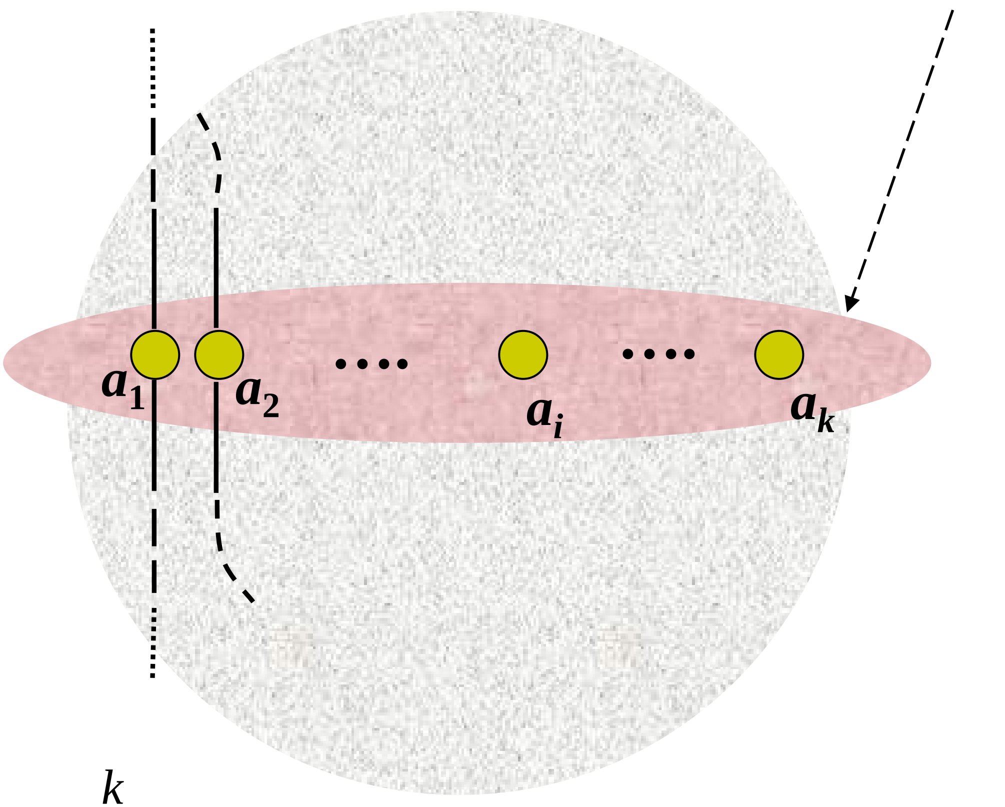
- 注意：良序结构上可以实施数学归纳法
- 全序是否一定是良序？
- 当A是无穷集合时，全序不一定是良序
  - 例如：(R，≤), 任何开区间上没有最小元素
- 良序 →全序 →偏序
- 偏序/全序/良序的逆关系是否仍为偏序/全序/良序？
- 良序的逆关系不一定是良序
  - 例如(N，≤)

链与反链

- 链与反链
  - 设C是偏序集(P,≼)的一个子集
  - 如果C中任何两个元素均可比，则C构成一个链
  - 如果C中任何两个元素均不可比，则B构成一个反链

链与反链（示例）





$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = P(C_i\text{互不相交）}$$

Dilworth定理

- 链覆盖 是(P,≼)中一组互不相交的链, 它们一起包含了P中的所有元素.
- **Dilworth 定理 (1950)**

  在任意有限偏序集(P,≼)中, 覆盖P的最小链数等于P中反链的最大元素个数.
- 注：覆盖P的链数 ≥ P中任一反链的元素个数.

  等价结论:有限偏序集中存在一个链覆盖和一个反链，它们大小相等

Dilworth定理的归纳证明

- 证明. 按照P中元素个数（|P|=1, 2 …）进行归纳证明.

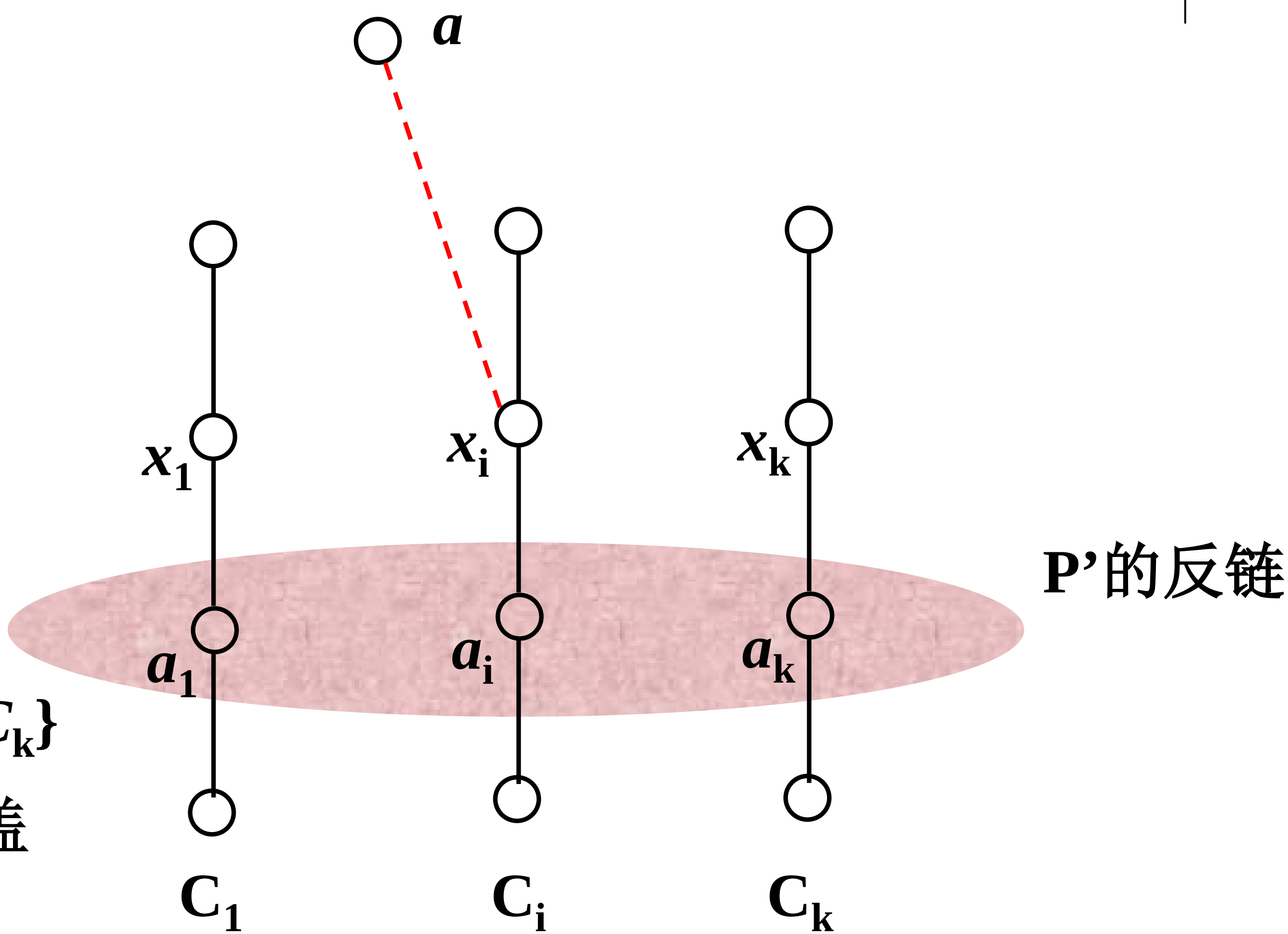
  设a为P中的一个极大元素，P’ =P-{a}

- 设(P’,≼)有一个大小为k的反链{a_1, a_2, …, a_k}，并有一个规模为k的链覆盖{C_1, C_2, …, C_k}.

- 对任意C_i , P’中大小为k的任一反链均有唯一的元素属于C_i, 这些元素有一个最大元，记为x_i.

- A={x_1, x_2, …, x_k}必是反链。否则，不妨假设A中有两个元素$x_i \preccurlyeq x_j$. 根据x_j的定义，P’中必有一个大小为k的反链A_j, x_j是A_j和C_j的公共元素，假设y是A_j和C_i的公共元素，则$y \preccurlyeq x_i$. 从而$y \preccurlyeq x_j$.与A_j是反链矛盾.

Dilworth定理的归纳证明（图示）



$\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$

为P’的链覆盖

Dilworth定理的归纳证明（续）

- 如果 $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$是P中的反链，而P的链覆盖$\{\{a\}, C_1, C_2, \ldots, C_k\}$就是规模为k+1的覆盖. 得证.
- 如果 $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$不是P中的反链，即:存在某个$x_m$使得$x_m \preccurlyeq a$.（a是极大元，不会出现 $a \preccurlyeq x_m$.）

令 $K = \{a\} \cup \{ z \in C_m \mid z \preccurlyeq x_m \}$. 显然K是P中的一条链. P-K中最大反链的大小为k-1（根据x_m的定义， P-K中没有含k个元素的反链）. 由归纳假设，P-K有大小为k-1的一个链覆盖，该覆盖与K构成P的链覆盖（链数为k）， 已知$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 是P中的反链（含k个元素）. 得证.

“道是无序却有序”

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于n+1的严格递增链或严格递减链。

建立问题的偏序模型

- 给定1, 2 …n^2+1(=m)的一种排列 $v_1v_2…v_m$，定义集合：
  - A={ (i,v_i) |i=1,2,…,n^2+1}
- 建立两个偏序关系R_1和R_2
  - $(i, v_i)R_1(j, v_j)$ iff. （i<j并且v_i<v_j）或者 $(i, v_i)=(j, v_j)$
  - $(i, v_i)R_2(j, v_j)$ iff. （i<j并且v_i>v_j）或者 $(i, v_i)=(j, v_j)$
- $R_1 \cap R_2 = I_A$, $R_1 \cup R_2 = A \times A$ //R_1的链是R_2反链。
- 问题：一定存在A的一个至少含n+1个元素的子集，它是R_1的链或者R_2的链。
  - 若R_1链的长度均≤n, 即R_2反链的大小均≤n，则存在个数k ≤n的R_2覆盖，有长度超过n的R_2链，否则元素个数≤n^2.矛盾.

格

- 定义：
  - 设(S,≼)是偏序集
  - $\forall x, y \in$ S, 存在{x,y}的最小上界**lub{x,y}** , 记为$x \vee y$。
  - $\forall x, y \in$ S, 存在{x,y}的最大下界**glb{x,y}**, 记为$x \wedge y$。

lub : “least upper bound”

glb : “greatest lower bound

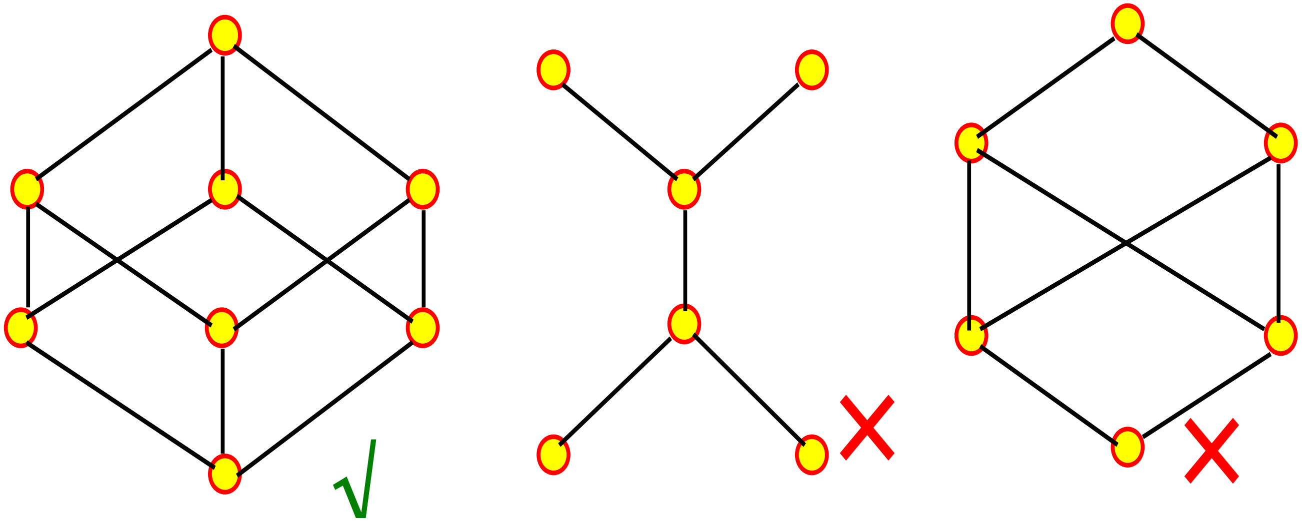
  - 则称S关于≼构成**格**。

格的例子

- $(\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}, |)$
  - $x \wedge y = \mathrm{gcd}(x,y)$, $x \vee y = \mathrm{lcm}(x,y)$
- $(\rho(B), \subseteq)$
  - $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$
- $(Z, \leq)$
  - $x \wedge y = \min\{x,y\}$, $x \vee y = \max\{x,y\}$

格与哈斯图

- 右边两个哈斯图所表示的偏序集不是格



格的基本关系式

- 根据“最小上界”和“最大下界”的定义，有如下关系式：
  - $a \preccurlyeq c,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c$
  - $c \preccurlyeq a,\ c \preccurlyeq b \Rightarrow c \preccurlyeq a \wedge b$

格的性质

- 若(S, $\preccurlyeq$)是格，则：$\forall a, b \in$ S:

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

  - 采用循环证明
  - $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$
  - $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$
  - $a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$

格的性质

- 设(S, ≼)是格，则有下列性质：
  - 结合律：$(a \wedge b) \wedge \mathrm{c} = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee \mathrm{b}) \vee \mathrm{c} = a \vee (b \vee c)$
  - 交换律：$a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
  - 吸收律：$a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

作业

- **教材[8.6]**
  - **p. 443-446：22, 29, 31, 43, 45, 54**