1992 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=\underline{\dfrac{y\sin xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin xy}}$.

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu\big|_M=\underline{\ 2\{1,2,-2\}/9\ }$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi<x\le 0\\ 1+x^2,0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi^2}{2}}$.

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $\underline{\ y=(x+c)\cos x\ }$.

(5) 设 A=$\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$，其中 $a_i\ne 0,b_i\ne 0,(i=1,2,\cdots,n)$，则矩阵 A 的秩 r(A)=$\underline{1}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 （D）

(A) 等于 2　　(B) 等于 0.　　(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{\alpha}{n})$ (常数 $\alpha>0$) (C)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.　　(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 α 有关.

(3) 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线 (B)

(A) 只有 1 条　　(B) 只有 2 条　　(C) 至少有 3 条　　(D) 不存在

(4) [92-1、2] 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 (C)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(5) 要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 AX=0 的解，只要系数矩阵 A 为 (A)

(A) $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$； (B) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$； (C) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$； (D) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

三、(本题共3小题，每小题5分，满分15分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}$ ……2分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$ ……4分

$=1.$ ……5分

(2) 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y f_1'+2xf_2'$ ……2分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xyf_{22}''+f_1'e^x\cos y$.……5分

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x\le 0\\ e^{-x}, \quad x>0\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

解： 令 $x-2=t$，则原式 $=\int_{-1}^1 f(t)dt$ ……2分

$=\int_{-1}^0(1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt$ ……4分

$=\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{e}$ ……5分

四、(本题满分6分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

解： 对应齐次方程的通解为：$\tilde{y}=c_1e^x+c_2e^{-3x}$，其中 c_1,c_2 为任意常数. ……3分

设原方程的一个特解为 $y^*=Axe^{-3x}$，代入原方程得 $A=-\dfrac{1}{4}$，所以 $y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$ ……5分

所求通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$. ……6分

五、(本题满分8分)

计算面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy,$

其中$\sum$为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解： 记 S 为平面 $z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧，Ω为Σ与S所围成的空间区域，则

原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$

$-\oiint\limits_{S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$ ……2 分

$=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy$ ……4 分

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^4d\rho+a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr$ ……6 分

$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$ ……8 分

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x)<0,\ f(0)=0$, 证明: 对任何 $x_1>0,x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证： 由微分中值定理，有 $f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),(0<\xi_1<x_1)$

$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),(x_2<\xi_2<x_1+x_2)$. ……2 分

不妨设 $x_1<x_2$，则有 $\xi_1<\xi_2$. ……4 分

由于 $f''(x)<0$，知 $f'(x)$ 单调减少，故 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，

而 $x_1>0$，所以 $f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$， ……6 分

由 $f(0)=0$即得，$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$. ……7 分

七、(本题满分 8 分)

在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\vec{F}$ 所作的功 W 最大? 并求出 W 的最大值.

解： 直线段 $OM: x=\xi t,y=\eta t,z=\zeta t,t$从0到1, ……1 分

$W=\int_{OM}yzdx+zxdy+xydz$ ……2 分

$=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2dt=\xi\eta\zeta$. ……4 分

下面求$W=\xi\eta\zeta$在条件$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\ge0,\eta\ge0,\zeta\ge0)$下的最大值.

令$F(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2})$, ……5 分

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \xi}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \eta}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\eta\zeta=\dfrac{2\lambda}{a^2}\xi,\\ \xi\zeta=\dfrac{2\lambda}{b^2}\eta,\\ \xi\eta=\dfrac{2\lambda}{c^2}\zeta,\end{cases}$ ……6 分

从而 $\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}$，即得 $\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$，于是得 $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}c$. ……7 分

由问题的实际意义知 $W_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$. ……8 分

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，问：

(1) α_1 能否由 α_2,α_3 线性表出？证明你的结论.

(2) α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？证明你的结论.

解：(1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表出. ……1 分

因为已知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 α_2,α_3 线性无关. ……3 分

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故证得 α_1 能由 α_2,α_3 线性表出. ……4 分

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. ……5 分

用反证法.假设 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$.

又由(1)知，$\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，故代入上式得 $\alpha_4=(\lambda_2+\lambda_1 l_2)\alpha_2+(\lambda_3+\lambda_1 l_3)\alpha_3$.

即 α_4 可由 α_2,α_3 表出，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，这和已知矛盾.

因此，α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. ……7 分

九、(本题满分 7 分)

设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征值向量依次为

$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$. 又向量 $\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$.

(1) 将 β 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表出；**(2)** 求 $A^n\beta$(n 为自然数).

(1) 解： 设 $\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$， ……1 分

则由 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ ……2 分

得唯一解 $(2,-2,1)$，故 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$. ……3 分

(2) 解一： $\mathbf{A}^n\beta = \mathbf{A}^n(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)$ ……4 分

由于 $\mathbf{A}\xi_i = \lambda_i\xi_i, \mathbf{A}^n\xi_i = \lambda_i^n\xi_i \quad (i = 1,2,3)$， ……5 分

故 $\mathbf{A}^n\beta = 2\mathbf{A}^n\xi_1 - 2\mathbf{A}^n\xi_2 + \mathbf{A}^n\xi_3 = 2\lambda_1^n\xi_1 - 2\lambda_2^n\xi_2 + \lambda_3^n\xi_3$ ……6 分

$$= 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\cdot 2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + 3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$ ……7 分

解二： 因 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$， 其中 $P = [\xi_1,\xi_2,\xi_3]$. ……4 分

故 $A = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$， $A^n = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}$， ……5 分

所以 $A^n\beta = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}\beta = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$. ……7 分

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 已知 P(A)=P(B)=P(C)= $\frac{1}{4}$，P(AB)=0,P(AC)=P(BC)= $\frac{1}{16}$，则事件 A，B，C 全不发生的概率为 <u>3/8</u>

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则数学期望 E$\{X + e^{-2X}\}$= <u>4/3</u> .

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 N(μ,σ^2)，Y 服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，试求 Z=X+Y 的概率分布密度. (计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)$ ..

解： 由题设，X 和 Y 的概率分布密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty; \quad f_Y(y) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi} & -\pi \le y \le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$ ……2 分

因 X 和 Y 独立，故可用卷积公式. 考虑到 $f_Y(y)$ 仅在$[-\pi,\pi]$上才有非零值，所以 Z 的概率

分布密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$. ……4 分

令 $t=\dfrac{z-y-\mu}{\sigma}$，则

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ ……5 分

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+y-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\right].$$ ……6 分

数 学（试卷二）

一、二、【 同数学一 第一、二题 】

三、(本题共3小题，每小题5分，满分15分)

(1) 【 同数学一 第三、(1) 题 】

(2) 【 同数学一 第三、(2) 题 】

(3) 设矩阵X满足 AX + I = A ^{2} + X, 其中I为三阶单位阵，又已知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，试求出矩阵X .

解： 由题设有 $(A-I)X = A^2 - I$，即 $(A-I)X = (A-I)(A+I)$ ……2分

因 $A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆. ……3分

故 $X = (A-I)^{-1}(A-I)(A+I) = A+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ……5分

四、(本题共3小题，每小题6分，满分18分)

(1) 【 同数学一 第四、(1) 题 】

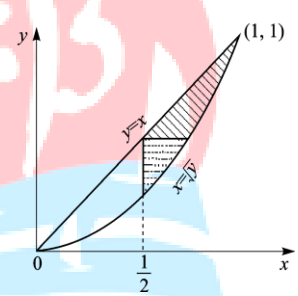
(2) 求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$，其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

解： 原式 $=[x^2\int_0^{x^2} f(t)dt - \int_0^{x^2} tf(t)dt]'$ ……3分

$=2x\int_0^{x^2} f(t)dt + x^2 f(x^2)\cdot 2x - x^2 f(x^2)\cdot 2x$ ……5分

$= 2x\int_0^{x^2} f(t)dt$. ……6分

(3) 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$.



解： 原式 $=\iint_D e^{\frac{y}{x}} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}} dy$ ……3分

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e-e^x)dx = \dfrac{3}{8}e - \dfrac{1}{2}\sqrt{e}$. ……6分

五~九、【 同数学一 第五~九题 】

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导且 $f'(0) \neq 0$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} =$ __3__.

(2) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上的最大值为 __$\sqrt{3} + \pi/6$__ .

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$ __0__.

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)} =$ __$\frac{1}{2}\ln 2$__ .

(5) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$ __$\frac{e}{2} - 1$__ .

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $x \to 0$ 时，$x - \sin x$ 是 x^2 的 （B）

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但不等价的无穷小

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x^2 + x, & x > 0. \end{cases}$，则 (D)

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \ge 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \ge 0. \end{cases}$

(3) 【 同数学一 第二、(1) 题 】

(4) 设 $f(x)$ 连续，$F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2)dt$，则 $F'(x)$ 等于 (C)

(A) $f(x^4)$. (B) $x^2 f(x^4)$ (C) $2xf(x^4)$. (D) $2xf(x^2)$

(5) 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 (B)

(A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$. (C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$

三、**(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)**

(1) 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3 + x}{6 + x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

解： 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{-3}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$ ……1 分

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{-3}{6+x})^{-\frac{x+6}{3}}]^{\frac{-3(x-1)}{2(6+x)}}$ ……3 分

$=e^{-\frac{3}{2}}$. ……5 分

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$ 的值.

解： 在方程两边对 x 求导得 $y'-e^{y}-xe^{y}y'=0$， ……1 分

在上式两边再对 x 求导得 $y''-e^{y}y'-(e^{y}y'+xe^{y}y'^2+xe^{y}y'')=0$， ……3 分

由题设知 $x=1$ 时 $y=1$，代入上面两式解得 $y'(0)=e, y''(0)=2e^2$.

即 $\dfrac{d^2y}{\partial x^2}|_{x=0}=2e^2$. ……5 分

(3) 求 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解： 原式$=\int\dfrac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$ ……1 分

$=\dfrac{1}{2}\int(\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})d(1+x^2)$ ……3 分

$=\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+c$. ……5 分

(4) 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$.

解： 原式$=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2})^2}dx$ ……1 分

$=\int_0^{\pi}\left|\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right|dx$ ……3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2})dx$ ……4 分

$=2[\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}-2[\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=4(\sqrt{2}-1)$. ……5 分

(5) 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$的通解.

解： 原方程可化为 $y'-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{x^2}{2}$， ……1 分

这是一阶线性方程，其通解为 $y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}(\int(-\frac{x^2}{2})e^{\int-\frac{1}{2x}dx}dx+C)$. ……3 分

即 $y=\sqrt{x}(-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C)$. $y=C\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^3$. ……5 分

四、(本题满分 9 分) 【 同数学一 第三、(3) 题 】

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

解： 原方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$， ……1 分

其根为 $r_1=1, r_2=2$，于是对应齐次方程的通解为

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}, (C_1, C_2$为任意常数). ……3 分

由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设原方程的一个特解为： $y^*=x(ax+b)e^x$， ……5 分

将其代入原方程得 $-2ax+2a-b=x$，解得 $a=-\frac{1}{2}, b=-1$. ……7 分

所以 $y^*=-(\frac{x^2}{2}+x)e^x$，从而所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-(\frac{x^2}{2}+x)e^x$. ……9 分

六、(本题满分 9 分)

计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解： $S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx$ ……2 分

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{-2x}{1-x^2})^2}dx$ ……4 分

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$ ……5 分

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1)dx$ ……7 分

$=[\ln(1+x)-\ln(1-x)-x]_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}$. ……9 分

七、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

解： 因 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，故 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(t,\sqrt{t})$ 处切线 l 的方程为 $y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$. ……2 分

即 $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}$.于是

$S(t)=\int_0^2[(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2})-\sqrt{x}]dx=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$， $S'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. ……5 分

令 $S'(t)=0$，得驻点 $t=1$. ……7 分

由于 $S''(1)>0$，故 $t=1$ 时，S 取最小值，此时，l 的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. ……9 分

八、(本题满分 9 分)【 同数学一 第六题 分值不同 **】**

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设商品的需求函数为 Q = 100 - 5P, 其中 Q, P 分别表示需求量和价格, 如果商品需求弹性的绝对值大于 1, 则商品价格的取值范围是 ___(10，20]___.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为 ___(0, 4)___.

(3) 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx = \underline{\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy}$.

(4) 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A| = a,\ |B| = b,\ C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$，则

$|C| = \underline{(-1)^{mn}ab}$

(5) 将 C,C,E,,E,I,N,S 等七个字母随机地排成一行, 那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为

___1/1260___ .

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $F(x) = \frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 其中 f(x) 为连续函数, 则 $\lim_{x\to a} F(x)$ 等于 (B)

(A) a^2.　　(B) $a^2 f(a)$.　　(C) 0 .　　(D) 不存在.

(2) 当 $x \to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量? (D)

(A) x^2.　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　　(D) $x-\tan x$

(3) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,则齐次线性方程组 AX = 0 仅有零解的充分条件是 (A)

(A) A 的列向量线性无关　　(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关　　(D) A 的行向量线性相关

(4) 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则 (B)

(A) $P(C) \le P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C) \ge P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C) = P(AB)$　　(D) $P(C) = P(A\cup B)$

(5) 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，$DX_1 = \sigma^2$，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则 (C)

(A) S 是 σ 的无偏估计量　　(B) S 是 σ 的最大似然估计量

(C) S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量)　　(D) S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

三、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & 若x\neq 1\\ 1, & 若x=1\end{cases}$，问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

解： 因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}$ ……1 分

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$ ……2 分

$$=-\frac{4}{\pi^2}.$$ ……3 分

而 $f(1)=1$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$. 所以函数在 $x=1$ 处不连续 ……4 分

若令 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$，则函数在 $x=1$ 处连续. ……5 分

四、(本题满分 5 分)

计算 $I=\displaystyle\int\frac{arc\cot e^x}{e^x}dx$.

解： $I=-\displaystyle\int arcctge^x de^{-x}$ ……1 分

$$=-e^x arctge^x-\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$ ……2 分

$$=-e^x arctge^x-\int\frac{dx}{1+e^{2x}}$$ ……3 分

$$=-e^{-x}arcctge^x-\int(1-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}})dx$$ ……4 分

$$=-e^{-x}arcctge^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$ ……5 分

五、(本题满分 5 分)

设 $z=\sin(xy)+\varphi(x,\frac{x}{y})$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 其中 $\varphi(u,v)$ 有二阶偏导数.

解：记 $u=x,v=\dfrac{x}{y}$，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi_u+\varphi_v\dfrac{1}{y}$ ……2 分

于是 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)+(-\dfrac{x}{y^2})\varphi_{uv}+(-\dfrac{1}{y^2})\varphi_v+\dfrac{1}{y}(-\dfrac{x}{y^2})\varphi_{vv}$

$=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\dfrac{x}{y^2}\varphi_{uv}-\dfrac{1}{y^2}\varphi_v-\dfrac{x}{y^3}\varphi_{vv}$. ……5 分

六、(本题满分 5 分)

求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$.

解：两边求导，得 $f'(x)+2f(x)=2x$. ……1 分

记 $P(x)=2,Q(x)=2x$，有通解

$f(x)=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$ ……2 分

$=e^{-2x}(\int 2xe^{2x}dx+C)$ ……3 分

$=Ce^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$. ……4 分

由原方程易见 $f(0)=0$，故 $C=\dfrac{1}{2}$，从而所求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$. ……5 分

七、(本题满分 6 分)

求证:当 $x\geq 1$时， $arctgx-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

证：令 $f(x)=arctgx-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{\pi}{4}$， ……1 分

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\equiv 0\ \ (x>1)$. ……3 分

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为常数，故 ……4 分

$f(x)=f(1)=0$. ……5 分

即$arctgx-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$. ……6 分

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程为 $y=e^{-x}(x\geq 0)$.

(1) 把曲线 $y=e^{-x}$、x 轴、y 轴和直线 $x=\xi\,(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周，得

一旋转体，求此旋转体体积$V(\xi)$；并求满足$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$的$a$.

(2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积.

解：(1) $V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}y^2dx=\pi\int_0^{\xi}e^{-2x}dx=-\frac{\pi}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\xi})$. ……2 分

于是 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$，$V(a)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2a})$ ……3 分

故由$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$，有$\frac{\pi}{2}$（$1-e^{-2a}$）$=\frac{\pi}{4}$.由此可见$a=\frac{1}{2}\ln 2$ ……4 分

(2) 设切点为$(\alpha,e^{-\alpha})$，则切线方程为$y-e^{-\alpha}=-e^{-\alpha}(x-\alpha)$ ……5 分

令$x=0$，得$y=(1+\alpha)e^{-\alpha}$；令$y=0$，得$x=1+\alpha$，

故切线与坐标轴所夹面积$S=\frac{1}{2}(1+\alpha)^2e^{-\alpha}$ ……6 分

于是$S'=(1+\alpha)e^{-\alpha}-\frac{1}{2}(1+\alpha)^2e^{-\alpha}=(1+\alpha)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha)e^{-\alpha}=\frac{1}{2}(1-\alpha)^2e^{-\alpha}$， ……7 分

令$S'=0$，得$\alpha_1=1,\alpha_2=-1$，其中α_2应舍去.

由于当$\alpha<1$时，$S'>0$；当$\alpha>1$时，$S'<0$，故当$\alpha=1$时，面积S有极大值，即最大值.

此时，所求切点为$(1,e^{-1})$，最大面积$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2e^{-1}=2e^{-1}$. ……9 分

九、(本题满分 7 分)

设矩阵A与B相似，其中$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$，

(1) 求x和y的值；**(2)** 求可逆矩阵 P,使得$P^{-1}AP=B$.

解：(1) 因为$A\sim B$，故其特征多项式相同，即$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$， ……1 分

亦即$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]\equiv(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$. ……2 分

令$\lambda=0$，得$2(x-2)=2y$，即$y=x-2$；令$\lambda=1$，得$y=-2$，即$x=0$； ……4 分

(2) 由**(1)**知，$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.对应于 A 和 B 共同的特征值

$-1,2,-2$的特征向量为$\xi_1=(0,2,-1)^T,\xi_2=(0,1,1)^T,\xi_3=(1,0,-1)^T$ ……6 分

则可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，满足 $P^{-1}AP=B.$ ……7 分

十、(本题满分 6 分)

已知三阶矩阵 $B\neq 0$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解：$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$，

(1) 求 λ 的值； **(2)** 证明 $|B|=0.$

解：(1) 因 $B\neq 0$，故 B 中至少有一个非零列向量. 依题意，所给齐次线性方程组有非零解，故必有系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$. ……2 分

由此可得 $\lambda=1$. ……3 分

(2) 因 B 的每一列向量都是原方程组的解，故有 $AB=0$. ……4 分

因此由 $A\neq 0$ 必有 $|B|=0$. 事实上，倘若不然，设 $|B|\neq 0$，则 B 可逆. 故在 $AB=0$ 两边右乘 B^{-1}，得 $A=0$，这与条件矛盾，可见必有 $|B|=0$. ……6 分

十一、(本题满分 6 分)

设 A,B 分别为 m，n 阶正定矩阵, 试判定分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$ 是否正定矩阵.

解: 设 $m+n$ 维列向量 $Z^T=(X^T,Y^T)$,其中 $X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_m),Y^T=(y_{m+1},y_{m+2},\cdots,y_{m+n})$.
若 $Z\neq 0$，则 X,Y 不同时为 0.不妨设 $X\neq 0$，因 A 是正定矩阵，所以 $X^TAX>0$. ……3 分

又因为 B 是正定矩阵，故对任意 n 维向量 Y，有 $Y^TBY\geq 0$. ……4 分

于是有 $Z^TCZ=(X^T\ Y^T)\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=X^TAX+Y^TBY>0$. ……6 分

又显然 C 是对称阵，故 C 是正定矩阵.

十二、(本题满分 7 分)

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$, 试求在 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α, 并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

λ	1	2	3	4	5	6	7
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001

解：设 p 为每次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率，则

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>\frac{19.6}{10}\right\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>1.96\right\}=0.05 \cdot$$ ……3 分

又记 μ 为 100 次独立重复测量中事件 $\{|X|>19.6\}$ 出现的次数，知 μ 服从参数为 $n=100$，$p=0.05$ 的二项分布，故所求概率为

$$\alpha=P\{\mu\geq 3\}=1-P\{\mu<3\}$$

$$=1-0.95^{100}-100\times 0.95^{99}\times 0.05-\frac{100\times 99}{2}\times 0.95^{98}\times 0.05^{2}.$$ ……5 分

由泊松定理，知 μ 近似服从参数为 $\lambda=np=100\times 0.05=5$ 的泊松分布，故

$$\alpha\approx 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2})=1-0.007\times 18.5\approx 0.87.$$ ……7 分

十三、(本题满分 5 分)

一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调的部件数，试求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

解一：设 A_i={第 i 个部件需要调整}，$X_i=\begin{cases}1, & 若A_i出现;\\ 0, & 若A_i不出现;\end{cases}$ （i=1,2,3） ……1 分

易见 $EX_i=P(A_i)$；$DX_i=P(A_i)[1-P(A_i)]$， ……2 分

$X=X_1+X_2+X_3$， ……3 分

因此，由 X_1,X_2,X_3 独立，可见 $EX=0.1+0.2+0.3=0.6$， ……4 分

$DX=0.1\times 0.9+0.2\times 0.8+0.3\times 0.7=0.46$. ……5 分

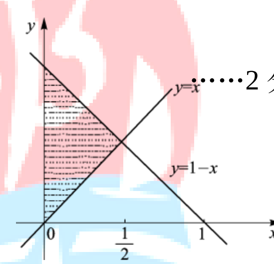
解二：【 见数学五 第十四题 分值不同 】

十四、(本题满分 4 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<y\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$，求：

(1) 求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$； **(2)** 概率 $P\{X+Y\leq 1\}$.

解：**(1)** $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}.$ ……2 分



(2) $P\{X+Y\leq 1\}=\iint\limits_{x+y\leq 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$ ……3 分

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}[e^{-(1-x)}-e^{-x}]dx=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}.$$ ……4 分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$ $\underline{\ e^{2t}(2t+1)\ }$.

(2) 【 同数学四 第一、(1) 题 】

(3) 设 $f(x)=\sin x,\ f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ $\underline{\arcsin(1-x^2)}$；其定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$

(4) 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的非零特征值是$\underline{\quad 4\quad}$.

(5) 设对于事件 A,B,C,有 P(A)=P(B)=P(C)=$\dfrac{1}{4}$,P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=$\dfrac{1}{8}$，则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为$\underline{\quad 5/8\quad}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学四 第二、(1) 题 】

(2) 当 x$\to 0$ 时，下列四个无穷小量中,哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量? (D)

(A) x^2.　(B) $1-\cos x$　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D) $x-\sin x$

(3) 设 A, B, A+B, $A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$等于 (C)

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　(B) $A+B$　(C) $A(A+B)^{-1}B$　(D) $(A+B)^{-1}$

(4) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是 (B)

(A) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(D) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(5) 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则 (D)

(A) P(C) = P(AB)　(B) $P(C)=P(A\cup B)$

(C) P(C)$\le$P(A)+P(B)-1　(D) P(C)$\ge$P(A)+P(B)-1

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\dfrac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}}$ ……2 分

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(x-1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$ ……3 分

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sec^2(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ ……4 分

$=-\dfrac{4}{\pi^2}$. ……5 分

四、(本题满分 5 分)【 同数学四 第四题 **】**

五、(本题满分 6 分)

求连续函数 $f(x)$，使它满足 $\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x\sin x.$

解： 令 $tx=u$，则原式变为 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du=f(x)+x\sin x$， ……2 分

即 $\int_0^x f(u)du=xf(x)+x^2\sin x$

两边求导数，得 $f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$

即 $f'(x)=-2\sin x-x\cos x$ ……3 分

积分，得 $f(x)=2\cos x-\int xd\sin x$ ……4 分

$=2\cos x-x\sin x+\int\sin xdx=2\cos x-x\sin x-\cos x+C$

$=\cos x-x\sin x+C$. ……5 分

六、(本题满分 5 分)【 同数学四 第五题 **】**

七、(本题满分 6 分)

设生产某产品的固定成本为10，而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC=-40-20x+3x^2$，边际收入函数为 $MR=32+10x$，试求：

(1) 总利润函数；**(2)** 使总利润最大的产量.

解：(1) 总成本函数 $C=10+\int_0^x(-40-20x+3x^2)dx=10-40x-10x^2+x^3$. ……1 分

总收入函数 $R=\int_0^x(32+10x)dx=32x+5x^2$， ……2 分

总利润函数 $\pi=R-C=(32x+5x^2)-(10-40x-10x^2+x^3)=-10+72x+15x^2-x^3$ ……3 分

(2) 由 $MC=MR$, 知 $-40-20x+3x^2=32+10x$， $3x^2-30x-72=0$ ……4 分

于是 $x_1=12, x_2=-2$(舍去) ……5 分

由于 $\pi'=72+30x-3x^2, \pi''=30-6x$;

$\pi''\big|_{x_1=12}<0, \pi$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个极大值点.

可见，当产量为 12 时,总利润最大. ……6 分

八、(本题满分 6 分)

求证：方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$.

证明： 令 $f(x)=x+p+q\cos x$， ……1 分

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，知存在 b，使 $f(b)>0$ ；又由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，知存在 a，使 $f(a)<0$ ；

故由介值定理可见， $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 至少存在一个实根. ……3 分

又因为 $f'(x)=1-q\sin x>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，所以 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个实根. 综上所述， $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根 ……6 分

九、(本题满分 8 分)

给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$，

(1) 求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程；

(2) 求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

解：(1) 因曲线上横坐标为 x_0 点为 $(x_0,\dfrac{1}{x_0^2})$，

故曲线在该点切线的斜率为 $y'\big|_{x=x_0}=-\dfrac{2}{x_0^3}$ ……2 分

所以过此点的切线方程为： $y-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{2}{x_0^3}(x-x_0)$. ……3 分

(2) 设所求点的横坐标为 x_0，则过此点的切线方程如（1）所求，由此可得切线在 x 轴与 y 轴的截距分别为 $X=\dfrac{3}{2}x_0, Y=\dfrac{3}{x_0^2}$ ……4 分

设切线被坐标轴所截线段长度为 l，则 $l^2=X^2+Y^2=\dfrac{9}{4}x_0^2+\dfrac{9}{x_0^4}=9(\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{1}{x_0^4})$. ……5 分

令 $z=l^2$，由 $z'=9(\frac{x_0}{2}-\frac{4}{x_0^5})=0, x_0=\pm\sqrt{2}$，得驻点 $x_0=\pm\sqrt{2}$，

故由 $z''=9(\frac{1}{2}+\frac{20}{x_0^6})>0$，知 l 在 $x_0=\pm\sqrt{2}$ 取得极小值，亦即最小值 ……7 分

因此所求最短长度为 $l^2=9(\frac{2}{4}+\frac{1}{4})=\frac{27}{4}$， $l=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……8 分

十、(本题满分 5 分)【 同数学二 第三、(3) 题 】

十一、(本题满分 5 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 A, 三阶矩阵 B≠0, 且 AB=0. 试求 λ 的值.

解：设 $B=(B_1,B_2,B_3)$，其中 B_1,B_2,B_3 是三维列向量.由于 $B\neq 0$，至少存在一个非零的列向量，不妨设为 $B_1\neq 0$.由 $AB=A(B_1\ B_2\ B_3)=0$，知 $AB_1=0$. ……3 分

因此线性方程组有非零解 B_1，所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$， ……4 分

从而解得 $\lambda=1$. ……5 分

十二、(本题满分 6 分)

已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $A_{ij}=a_{ij}$（$i,j=1,2,3$），其中 A_{ij} 是 α_{ij} 的代数余子式；(2) $a_{11}\neq 0$. 计算行列式|A|.

解： 因为 $a_{ij}=A_{ij}$，所以 $A^*=A^T$. 由 $AA^T=AA^*=|A|E$ ……2 分

两边取行列式，得 $|A|^2=|A|^3$，从而 $|A|=1$ 或 $|A|=0$. ……4 分

由于 $a_{11}\neq 0$，可知 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0$.于是 $|A|=1$. .……6 分

十三、(本题满分 7 分)【 同数学四 第十二题 】

十四、(本题满分 7 分)【 同数学四 第十三题 分值不同 】

解：设 $A_i=\{$第 i 个部件需要调整$\}(i=1,2,3)$，则 A_1,A_2,A_3 独立，于是有

$P\{X=0\}=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=0.9\times0.8\times0.7=0.504$；

$P\{X=1\}=P(A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})+P(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3})+P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3)$

$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398$； ……2 分

$P\{X=2\}=P(A_1\ A_2\ \overline{A_3})+P(A_1\ \overline{A_2}\ A_3)+P(\overline{A_1}\ A_2A_3)$

$$=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3=0.092;$$

$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$. ……4 分

因此 X 的概率分布为 $X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.504 & 0.398 & 0.092 & 0.006\end{bmatrix}$ ……5 分

从而 $EX=1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$；

$$DX=EX^2-(EX)^2=1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006-(0.6)^2=0.82-0.36=0.46.$$

……7 分