1991 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}}$.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz = \underline{dx - \sqrt{2}dy}$.

(3) 已知直线 L_1 和 L_2 的方程 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$ 和 $L_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 $\underline{x-3y+z+2=0}$.

(4) 已知当 $x \to 0$ 时，$(1 + ax^2)^{1/2} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等阶无穷小，则常数 $a = \underline{-3/2}$.

(5) 设 4 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}$.

二、选择题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ （D）

(A) 没有渐近线　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2) 若连续函数 f (x) 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt + \ln 2$，则 f (x) 等于 （B）

（A）$e^x \ln 2$　（B）$e^{2x} \ln 2$　（C）$e^x + \ln 2$　（D）$e^{2x} + \ln 2$.

(3) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$， 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于 （C）

（A） 3　（B） 7　（C） 8　（D） 9

(4) 设 D 是 XOY 平面上以 (1,1), (-1,1) 和 (-1,-1)为顶点的三角区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y)dxdy$ 等于 （A）

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y dxdy$ (B) $2\iint_{D_1} xydxdy$ (C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$ (D) 0.

(5) 设 n 阶方阵 A、B、C 满足关系式 ABC = E， 其中 E 是 n 阶单位阵，则必有 (D)

(A) ACB = E (B) CBA = E (C) BAC = E (D) BCA = E

三、(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\pi}{x}\cdot\ln\cos\sqrt{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\cdot\ln\cos\sqrt{x}}$ ……2 分

$= e^{\pi\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{-\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ ……4 分

$= e^{-\frac{\pi}{2}}$. ……5 分

(2) 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外测的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数

解： $\vec{n}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$. ……1 分

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$ ……3 分

从而 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},\vec{i})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},\vec{j})+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{n},\vec{k})]|_P$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.$$ ……5 分

(3) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

解 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^4(r^2+z)dz$ ……2 分

$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}(4r^3+8r-\frac{5}{8}r^5)dr$ ……4 分

$=\frac{256}{3}\pi$. ……5 分

四、(本题满分 6 分)

在过点 O $(0,0)$ 和 A $(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a\sin x\ (a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ 的值最小.

解： $I(a) = \int_0^\pi [1 + a^3\sin^3 x + (2x + a\sin x)a\cos x]dx$, ……2 分

$= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3$. ……4 分

令 $I'(a) = 4(a^2-1) = 0$, 得 $a=1, (a=-1$舍去$)$, 且 $a=1$ 是 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的唯一驻点 ……5 分

由于 $I''(1) = 8 > 0$，$I(a)$ 在 $a=1$ 处取到最小值. 故所求曲线是 $y = \sin x (0 \le x \le \pi)$ ……6 分

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x) = 2 + |x|\ (-1 \le x \le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解： 由于 $f(x) = 2+|x|(-1\le x\le 1)$ 是偶函数，所以 $a_0 = 2\int_0^1 (2+x)dx = 5$， ……1 分

$a_n = 2\int_0^1 (2+x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}, n = 1,2,\cdots$ ……3 分

$b_n = 0, n = 1,2,\cdots$ ……4 分

因所给函数在 $[-1,1]$ 满足收敛定理的条件，故

$2+|x| = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$， $x\in[-1,1]$ ……5 分

令 $x=0$，有 $2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$， 即 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

于是 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$， 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$. ……8 分

六、(本题满分 6 分)

设函数 f(x)在[0,1]上连续，(0,1)内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$，证明在(0,1)内存在一点 c， 使 $f'(c) = 0$.

解： 由积分中值定理知,在 $[\frac{2}{3},1]$ 上存在一点 c_1， 使 $\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}f(c_1)$， ……3 分

从而有 $f(c_1) = f(0)$, ……4 分

故 $f(x)$ 在区间 $[0,c_1]$ 上满足罗尔定理的条件，因此在 $(0,c_1)$ 内存在一点 c，使得 $f'(\mathrm{c}) = 0$. $c \in (0,c_1) \subset (0,1)$. ……7 分

七、(本题满分 6 分)

已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$，$\beta=(1,1,b+3,5)$，问：

(1) a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的唯一线性表示式？并写出表示式.

解：设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\3x_1+5x_2+x_3+(a+3)x_4=5\end{cases}$ ……2 分

因 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$ ……4 分

故当 $a=-1,b\neq0$ 时，β 不能表示成 a_1,a_2,a_3,a_4 的线性组合. ……5 分

当 $a\neq-1$ 时，表示式唯一，且 $\beta=-\dfrac{2b}{a+1}a_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}a_2+\dfrac{b}{a+1}a_3+0a_4$. ……8 分

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶正定阵，E 是 n 阶单位阵，证明 A+E 的行列式大于 1.

解一：因 A 是正定阵，故存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$. ……1 分

其中 $\lambda_i>0\ (i=1,2\cdots,n)$ 是 A 的特征值.

故 $Q^{-1}(A+E)Q=Q^{-1}AQ+Q^{-1}Q=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+E=\begin{pmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{pmatrix}$. ……4 分

在上式两端取行列式得 $\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)=|Q^{-1}|\cdot|(A+E)|\cdot|Q|=|A+E|$，从而 $|A+E|>1$. ……6 分

解二：因 A 是正定阵，故 A 的特征值 $\lambda_i>0\ (i=1,2\cdots,n)$ ……1 分

于是 $A+E$ 的特征值 $\lambda_i+1>1\ (i=1,2\cdots,n)$ ……4 分

因此 A+E 的行列式 $|A+E|=|\lambda_1+1|\cdot|\lambda_2+1|\cdots|\lambda_n+1|>1$ ……6 分

九、(本题满分 6 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 P(x,y)处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数（Q 是法线与 x 轴的交点），且曲线在点(1,1)处的切线与 X 轴平行.

解： 曲线 $y=y(x)$ 在点 (x,y) 处的法线方程是 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x),(y'\neq 0)$， ……1 分

它与 x 轴的交点是 $(x+yy',0)$，从而该点到 x 轴之间的法线段 PQ 的长度是

$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ （$y'=0$ 也满足上式） ……2 分

故由题意得微分方程 $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$，即 $yy''=1+y'^2$ ……3 分

且当 $x=1$ 时， $y=1,y'=0$. ……4 分

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程得 $yp\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$，或 $\dfrac{p}{1+p^2}dp=\dfrac{dy}{y}$

积分并注意到 $y=1$ 时， $p=0$，使得 $y=\sqrt{1+p^2}$ ……6 分

代入 $\dfrac{dy}{dx}=p$，得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1},\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$

积分上式，并注意到 $x=1$ 时 $y=1$，得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$.

因此所求曲线方程为 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm(x-1)}$ 即$y=\dfrac{1}{2}(e^{x-1}+e^{-(x-1)})$. ……8 分

十、填空题 (本题满分 6 分,每小题 3 分)

(1) 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ __0.2__.

(2) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ $(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其\ 它\end{cases}$， 求 Z＝X＋2Y 的分布函数.

解： $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z}f(x,y)dxdy$ ……2 分

当 $z\le 0$ 时， $P\{Z\le 0\}=0$.

当 $z>0$ 时，$P\{Z\le z\}=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy$ ……4分

$=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y}dy=\int_0^z (e^{-x}-e^{-z})dx=1-e^{-z}-ze^{-z}$. ……5分

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数 $F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0 \end{cases}$. ……6分

数 学（试卷二）

一、【 同数学一 第一题 】

二、【 同数学一 第二题 】

三、【 同数学一 第三题 】

四、(本题满分 18 分,每小题 6 分)

(1) 求 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

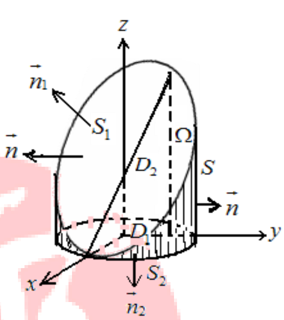
解： $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}$

令 $x-1=\sec\theta$，则 $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$. ……2 分

故原式 $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}d\theta$ ……3 分

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ……6 分

(2) 计算 $\displaystyle\iint_s -ydzdx+(z+1)dxdy$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.



解一： 设 S,S_1,S_2,Ω,D_1 如图所示，

记 $I_1=\displaystyle\iint_{S_1}-ydzdx+(z+1)dxdy,\ I_2=\iint_{S_2}-ydzdx+(z+1)dxdy$,

$I_3=\displaystyle\oiint_{S+S_1+S_2}-ydzdx+(z+1)dxdy$,则 $I=I_3-I_1-I_2$. ……1 分

而 $I_1=\displaystyle\iint_{S_1}-ydzdx+\iint_{S_1}(z+1)dxdy$

$=\displaystyle\iint_{S_1}(z+1)dxdy=\iint_{D_1}(2-x+1)dxdy=12\pi$， ……3 分

$I_2=\displaystyle\iint_{S_2}-ydzdx+\iint_{S_2}(z+1)dxdy=-\iint_{D_1}dxdy=-4\pi$. ……4 分

又由奥高公式有 $I_3=\displaystyle\iiint_{\Omega}(-1+1)dv=0$. ……5 分

故 $I=I_3-I_1-I_2=-8\pi$. ……6 分

解二：设 S, D_2 如上图所示，则

$$I = \iint\limits_{S} -ydzdx + (z+1)dxdy = \iint\limits_{S_2} -ydzdx + 0$$ ……1 分

$$= \iint\limits_{D_2} -2\sqrt{4-x^2}\,dzdx$$ ……3 分

$$= -2\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{2-x} \sqrt{4-x^2}\,dx$$ ……4 分

$$= -2\int_{-2}^{2} (2-x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$ ……5 分

$$= -4\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = -8\pi .$$ ……6 分

(3) 【 同数学一 第四题 】

五、(本题满分 8 分)【 同数学一 第五题 】

六、(本题满分 7 分)【 同数学一 第六题 】

七、(本题满分 8 分)【 同数学一 第七题 】

八、(本题满分 6 分)【 同数学一 第八题 】

九、(本题满分 8 分)【 同数学一 第九题 】

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $dy=$ $-\dfrac{3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}dx$.

(2) 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的向上凸区间是 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

(3) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=$ 1

(4) 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米 / 秒作直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 1 / 2 米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ -1

二、选择题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 若 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在 $(1,-1)$ 点相切，其中 a,b 是常数，则 (D)

(A) $a=0,b=-2$ (B) $a=1,b=-3$ (C) $a=-3,b=1$ (D) $a=-1,b=-1$

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1< x\le 2\end{cases}$，记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le 2$，则 （B）

(A) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0\le x\le 1 \\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$ （D） $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0\le x\le 1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\ne 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点，则 (B)

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点 (B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点 (D) 对一切 x，都有 $f(x)\le f(x_0)$.

(4) 【 同数学一 第二、(4) 题 】

(5) 如图，x 轴上有一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为 (A)

(A) $\int_{-1}^{0}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$　(B) $\int_{0}^{1}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$　(C) $2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$　(D) $2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$

三、(本题满分 25 分，每小题 5 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$，　……2 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)'_t\frac{dt}{dx}$　……4 分

$=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$.　……5 分

(2) 计算 $\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

解： 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2, dx=2tdt$，于是有

原式 $=\int_1^2\frac{2dt}{t(1+t)}$　……2 分

$=2\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$　……3 分

$=2[\ln t-\ln(1+t)]_1^2$　……4 分

$=2\ln\frac{4}{3}$.　……5 分

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$　……4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$.　……5 分

(4) 求 $\int x\sin^2 xdx$

解：原式 $=\int x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$ ……2分

$=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$ ……3分

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin x+\frac{1}{4}\int \sin 2xdx$ ……4分

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$ ……5分

(5) 求微分方程 $xy^2+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解

解：$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$ ……1分

$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int e^x e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$ ……2分

$=\frac{1}{x}[(x-1)e^x+C]$ ……4分

当 $x=1,y=1$ 代入，得 $C=1$，所以特解 $y=\frac{x-1}{x}e^x+\frac{1}{x}$. ……5分

四、(本题满分9分)

利用导数证明：当 $x>1$ 时，有不等式 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

证一：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$， ……2分

则 $f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})>0$. ……5分

所以在 $[1,+\infty)$ 中 $f(x)$ 为增函数. ……6分

又 $f(1)=2\ln 2>0$，所以在 $[1,+\infty)$ 中，有 $f(x)>0$.即 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$，

故当 $x>1$ 时，有 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$. ……9分

五、(本题满分9分)

求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

解： 原方程所对应齐次方程的通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$. ……2分

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的特解为 $y_1=Ax+B$.代入方程得 $B=0,A=1$，所以 $y_1=x$.

又设非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的特解为 $y_2=Ex\cos x+Dx\sin x$,

则代入方程得 $E=0,D=\frac{1}{2}$，所以 $y_2=\frac{1}{2}x\sin x$.

因此原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\dfrac{x}{2}\sin x$. ……9 分

六、(本题满分 6 分)

曲线 y=(x－1)(x－2)和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积

解：在 $[1,2]$ 上取积分元，得 $dV=2\pi x|y|dx$， ……4 分

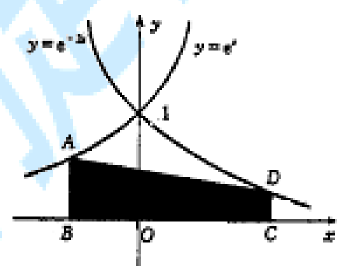
于是有 $V=\int_1^2 2\pi x|y|dx$ ……6 分

$=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$ ……7 分

$=\dfrac{\pi}{2}$. ……9 分

七、(本题满分 6 分)

如图，A 和 D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点，AB 和 DC 均垂直 x 轴，且 $|AB|:|DC|=2:1,|AB|<1$，求点 B 和 C 的坐标，使梯形 ABCD 的面积最大.



解： 设 B，C 的横坐标为 x_1,x，则有 $e^{x_1}=2e^{-2x}$，

由此可得 $x_1=\ln 2-2x$. ……2 分

又 $BC=x-x_1=3x-\ln 2\,(x>0)$.

故梯形 ABCD 的面积 $S=\dfrac{3}{2}(3x-\ln 2)e^{-2x}$， ……5 分

令 $S'=\dfrac{3}{2}(3-6x+2\ln 2)e^{-2x}=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$， ……7 分

由于当 $x<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$ 时，$S'>0$；当 $x>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$ 时，$S'<0$.

所以 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$ 是极大值点，又驻点唯一. 故 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$ 是最大值点. ……8 分

即当 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ln 2$，$x_1=\dfrac{1}{3}\ln 2-1$ 时，梯形 ABCD 的面积最大. ……9 分

八、 (本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，计算 $\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$.

解一： $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx = \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)dx$ ……1 分

$\xlongequal{令 t=x-\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t)dt$ ……3 分

$= \int_{0}^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_{0}^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]dt$ ……6 分

$= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi)dt \xlongequal{令 x=t-\pi} \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$ ……8 分

$= \pi^2 - 2.$ ……9 分

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$ __$e^{\sin xy}\cos xy(ydx+xdy)$__.

(2) 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$，且在点 $(-1,0)$ 有公共切线，则 $a=$ __-1__，$b=$ __-1__，$c=$ __1__.

(3) 设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$ __$-(n+1)$__ 处取极小值 __$-e^{-(n+1)}$__.

(4) 设 A 和 B 为可逆矩阵，$X=\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}$ 为分块矩阵，则 $X^{-1}=$ __$\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}$__.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-1\\ 0.4 & 若\ -1\le x<1\\ 0.8 & 若\ 1\le x<3\\ 1 & 若\ x\ge 3\end{cases}$.

则 X 的概率分布为 __$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$__

二、选择题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 下列各式中正确的是 （A）

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}=e$

(2) 设 $0\le a_n<1/n$ (n=1,2,⋯)，则下列级数中肯定收敛的是 （D）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^2{}_n$

(3) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征根，则 A 的伴随矩阵 A*的特征根之一是 (B)

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$　　(B) $\lambda^{-1}|A|$　　(C) $\lambda|A|$　　(D) $\lambda|A|^n$

(4) A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论正确的是 (D)

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) P(AB)=P(A)P(B)　　(D) P(A-B)=P(A)

(5) 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 E(XY)= EXEY ，则 (B)

(A) D(XY)=DXDY　　　　(B) D(X+Y)=DX+DY

(C) X 和 Y 独立　　　　(D) X 和 Y 不独立

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ 其中 n 是给定的自然数.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}=\exp\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-\ln n)}{x}\}$.……1 分

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，因此由罗比塔法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$ ……2 分

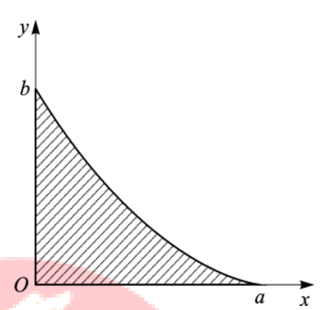
$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}.$$ ……4 分

于是原式 $=e^{\frac{n+1}{2}}$. ……5 分

四、(本题满分 5 分)

计算二重积分 $I=\iint_D ydxdy$，其中 D 是由 x 轴，y 轴与曲 $\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}=1$ 所围成的区域；$a>0,b>0$.

解： 积分区域 D 如图中阴影部分所示.



由 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$，得 $y=b\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right)^2$.

因此 $I=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\sqrt{x/a}\right)^2} ydy$ ……2 分

$$=\frac{b^2}{2}\int_0^a(1-\sqrt{x/a})^4dx.$$ ……3 分

令 $t=1-\sqrt{x/a}$，有 $x=a(1-t)^2$，$dx=-2a(1-t)dt$.

则 $I=ab^2\int_0^1(t^4-t^5)dt=ab^2\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{ab^2}{30}$. ……5 分

五、(本题满分 5 分)

求微分方程 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=2e$ 的特解.

解：原方程可以化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}}$，可见是齐次微分方程. ……1 分

设 $y=ux$, 有 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，将其代入上式，得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+u^2}{u}$， ……2 分

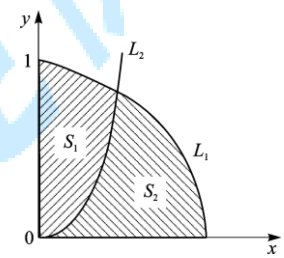
即 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}$， $u\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dx}{x}$，$\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$. ……3 分

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，得通解 $y^2=2x^2(\ln|x|+C)$， ……4 分

由条件 $y|_{x=e}=2e$, 求得 $C=1$，于是，所求特解为 $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$. ……5 分

六、(本题满分 6 分)

假设曲线 $L_1: y=1-x^2(0\le x\le 1)$、x 轴和 y 轴所围区域被曲线 $L_2: y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其 a 是大于零的常数，试确定的 a 值.



解：由 $y=1-x^2(0\le x\le 1)$ 与 $y=ax^2$ 联立，可解得故曲线 L_1与L_2 的交点 P 的坐标为 $(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{\sqrt{1+a}})$. ……1 分

于是 $S_1=\int_0^{1/\sqrt{1+a}}[(1-x^2)-ax^2]dy=[x-\dfrac{1}{3}(1+a)x^3]\Big|_0^{1/\sqrt{1+a}}=\dfrac{2}{3\sqrt{1+a}}$. ……3 分

$2S_1=S_1+S_2=\int_0^1(1-x^2)dx=\dfrac{2}{3}$， ……4 分

从而 $S_1=\dfrac{1}{3}$.因此 $\dfrac{2}{3\sqrt{1+a}}=\dfrac{1}{3}$， ……5 分

因此于是 $a=3$. ……6 分

七、(本题满分 8 分)

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 P_1 和 P_2，销量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为 $q_1=24-0.2P_1$ 和 $q_2=10-0.05P_2$，总成本函数为 $c=35+40(q_1+q_2)$，试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少?

解：总收入函数为 $R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^{\ 2}+10p_2-0.05p_2^{\ 2}$ ……2 分

总利润函数为 $L=R-C=(p_1q_1+p_2q_2)-[35+40(q_1+q_2)]$

$=32p_1-0.2p_1^{\ 2}+12p_2-0.05p_2^{\ 2}-1395$ ……4 分

由极值的必要条件，得方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0 \end{cases}$，

其解为 $p_1 = 80, p_2 = 120$. ……6 分

由问题的实际意义可知，当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时，厂家所获得的总利润最大，

其最大利润为 $L\big|_{p_1=80,p_2=120} = 605$. ……8 分

八、(本题满分 6 分)

试证明函数 $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证： 由 $f(x) = \exp\{x\ln(1+\dfrac{1}{x})\}$，有 $f'(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x[\ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{1+x}]$. ……2 分

记 $g(x) = \ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{1+x}$，对于任意 $x \in (0,+\infty)$，有 $g'(x) = -\dfrac{1}{x(1+x)^2} < 0$，

故函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. ……3 分

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{1+x}] = 0$， ……4 分

可见对任意 $x \in (0,+\infty)$，有 $g(x) = \ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{1+x} > 0$， ……5 分

从而，$f'(x) > 0$，$x \in (0,+\infty)$. 于是，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加. ……6 分

九、(本题满分 7 分)

设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$，问 λ 取何值时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一？

（2）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

（3）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

解： 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$，得线性方程组 $\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，

其系数行列式 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3)$. ……3 分

（1）若$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$，则方程组有唯一解，β可由a_1, a_2, a_3唯一地线性表示. ……4分

（2）若$\lambda = 0$，则方程组有无穷多个解，β可由a_1, a_2, a_3线性表示，但表达式不唯一.……5分

（3）若$\lambda = -3$，则方程组的增广矩阵

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$，可见方程组的系数

矩阵$\mathbf{A}$与增广矩阵$\overline{\mathbf{A}}$不等秩，故方程组无解，从而β不能由a_1, a_2, a_3线性表示. ……7分

十、(本题满分6分)

考虑二次型$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$，问$\lambda$取何值时，为正定二次型？

解：二次型f的矩阵为$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$， ……2分

由于二次型f正定的充分必要条件是：$\mathbf{A}$的顺序主子式全为正.

而$\mathbf{A}$的顺序主子式为：$D_1 = 1 > 0$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2$，

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$， ……4分

于是，二次型f正定的充分必要条件是：$D_2 > 0, D_3 > 0$，

由$D_2 = 4 - \lambda^2 > 0$，可见$-2 < \lambda < 2$；由$D_3 = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0$，可见$-2 < \lambda < 1$.

于是，二次型f正定，当且仅当$-2 < \lambda < 1$. ……6分

十一、(本题满分6分)

试证明n维列向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充分必要条件是

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$ 其中α_i^T表示列向量α_i的转置，$i = 1, 2, \cdots, n$.

解：记n阶矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，

则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充分必要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$， ……2分

由于 $A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$ ……4 分

故有 $|A^TA|=|A^T|\cdot|A|=|A|^2=D$，因此，$|A|\neq 0$ 与 $D\neq 0$ 等价.

于是 $D\neq 0$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件. ……6 分

十二、(本题满分 6 分)【 同数学五 第十三、(1) 题 **】**

十三、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leq r^2$ 上服从联合均匀分布，

(1) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ；

(2) 问 X 和 Y 是否独立？

解：(1) 因 X 和 Y 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & 若 x^2+y^2\leq r^2\\ 0, & 若 x^2+y^2>r^2\end{cases}$， ……1 分

故 X 的密度为 $p_1(x)=\dfrac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\quad(|x|\leq r)$，

同理，Y 的密度为 $p_2(y)=\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\quad(|y|\leq r)$ ……2 分

于是 $EX=\dfrac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}dx=0$，$EY=\dfrac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}y\sqrt{r^2-x^2}dy=0$， ……3 分

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY=\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2}-\frac{xy}{\pi r^2}dxdy=0,$$ ……4 分

因此 X 和 Y 的相关系数 $\rho=0$. ……5 分

(2) 由于 $p(x,y)\neq p_1(x)p_2(y)$，故 X 和 Y 不独立. ……6 分

十四、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为 $p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} & 若 x>0\\ 0 & 若 x\leq 0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 中是未知参数，$a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

解： 似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \lambda)=(\lambda a)^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{a-1}$， ……2 分

由对数似然方程，有 $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n} x_i^a=0$， ……4 分

由此可解得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}$． ……5 分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 【 同数学四 第一、(1) 题 】

(2) 【 同数学四 第一、(2) 题 】

(3) 【 同数学四 第一、(3) 题 】

(4) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n = \underline{a^n + (-1)^{n+1} b^n}$.

(5) [91-5] 设 A，B 为随机事件，P(A)=0.7，P(A-B)=0.3， 则 $P(\overline{AB}) = \underline{\quad 0.6 \quad}$

二、选择题：(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 【 同数学四 第二、(1) 题 】

(2) 设数列的通项为：$x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & 若n为奇数 \\ \dfrac{1}{n} & 若n为偶数 \end{cases}$，则当 $n \to \infty, x_n$ 是 （D）

（A）无穷大量 （B）无穷小量 (C) 有界变量 （D）无界变量

(3) 设 A 与 B 为 n 阶方阵，且 AB，则必有 (C)

(A) $A=0$ 或 $B=0$ (B) $AB=BA$ (C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$ (D) $|A|+|B|=0$

(4) 设 A 是 m×n 矩阵，A x=0 是非齐次线性方程组 A x=b 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是 (D)

(A) 若 Ax=0 仅有零解，则 A x ＝ b 有唯一解

(B) 若 Ax=0 有非零解，则 Ax=b 有无穷多个解

(C) 若 Ax=b 有无穷多个解，则 Ax=0 仅有零解

(D) 若 Ax=b 有无穷多个解则 Ax=0 有非零解

(5) 【 同数学四 第二、(4) 题 】

三、(本题满分 5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp\{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\} = \exp\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\}$,

其中大括号内的极限是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式. ……2 分

因此由罗比塔法则，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$， ……4 分

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1\cdot$ ……5 分

四、(本题满分 5 分)

求定积分 $I=\int_{-1}^{1}(2x+|x|+1)^2dx$.

解： $I=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(3x+1)^2dx$ ……2 分

$=\dfrac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{0}+\dfrac{1}{9}(3x+1)^3\Big|_{0}^{1}=\dfrac{22}{3}$. ……5 分

五、(本题满分 5 分)

求不定积分 $I=\int\dfrac{x^2}{1+x^2}arctgxdx$

解： $I=\int(1-\dfrac{1}{1+x^2})\arctan xdx=\int\arctan xdx-\int\arctan xd\arctan x$ ……2 分

$=x\arctan x-\int\dfrac{x}{1+x^2}dx-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$ ……4 分

$=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$. ……5 分

六、(本题满分 5 分)

已知 $xy=xf(z)+yg(z), xf'(z)+yg'(z)\neq 0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x 和 y 的函数. 求证：$[x-g(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

证： 将 $xy=xf(z)+yg(z)$ 两侧同时对 x 求偏导数，得

$y=f(z)+xf'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+yg'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$， ……2 分

于是，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-f(z)}{xf'(z)+yg'(z)}$， ……3 分

同样可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-g(z)}{xf'(z)+yg'(z)}$. ……4 分

因此$[x-g(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{[x-g(z)][y-f(z)]}{xf'(z)+yg'(z)}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$. ……5 分

七、(本题满分 6 分)【 同数学四 第六题 】

八、(本题满分 8 分)【 同数学四 第七题 】

九、(本题满分 6 分)

证明不等式 $\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}\quad(0<x<+\infty)$.

证：记 $f(x)=\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{1+x},0<x<+\infty$，有 $f'(x)=-\dfrac{1}{x(1+x)^2}<0$， ……2 分

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单独减少. ……3 分

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{1+x}]=0$， ……5 分

故对于任意 $0<x<+\infty$， $f(x)>0$，即 $\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$. ……6 分

十、(本题满分 5 分)

设 n 矩阵 **A** 和 **B** 满足条件 **A+B ＝AB**，

(1) 证明 **A - E** 为可逆矩阵, 其中 E 是 n 阶单位矩阵；

(2) 已知 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求矩阵 **A**.

解：由 **A+B ＝AB**，有 **AB - A - B + E = (A - E)(B - E) = E** ， ……1 分

由此可见 **A - E** 为可逆矩阵. ……2 分

又由上式，知 **B - E** 也为可逆矩阵，且 $\mathbf{A}=\mathbf{E}+(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}$ ……3 分

由于 $B-E=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\-1/3&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ……4 分

故 $\mathbf{A}=\mathbf{E}+(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ……5 分

十一、(本题满分 7 分)【 同数学四 第九题 】

十二、(本题满分 4 分)

已知向量 $a=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求常数 k 的值.

解：设 λ 是 α 所属的特征值，则 $\mathbf{A}^{-1}a=\lambda a$， $a=\lambda\mathbf{A}a$. ……2 分

即 $\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，由此得方程组 $\begin{cases}\lambda(3+k)=1\\ \lambda(2+2k)=k\end{cases}$，

其解为 $\lambda_1=1,k_1=-2,\lambda_2=\dfrac{1}{4},k_2=1$.于是当 $k=-2$或1时， α 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征向量. ……4 分

十三、(本题满分 7 分)

一汽车沿一街道行驶，需要经过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等. 以 X 表示汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

（1）求 X 的概率分布； （2）求 $E\dfrac{1}{1+X}$.

解：（1）由条件知, X 的可能值为 $0,1,2,3$.以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”；则 A_1,A_2,A_3 相互独立，且 $P(A_i)=P(\overline{A_i})=\dfrac{1}{2},i=1,2,3$. ……2 分

于是 $P(X=0\}=P(A_1)=\dfrac{1}{2}$， $P(X=1\}=P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{1}{2^2}$，

$P(X=2\}=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3)=\dfrac{1}{2^3}$， $P(X=3\}=P(A_1A_2A_3)=\dfrac{1}{2^3}$. ……4 分

（2） $E\dfrac{1}{1+X}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{67}{96}$. ……7 分

十四、(本题满分 6 分)

在电源电压不超过 200 伏、在 200－240 伏和超过 240 伏三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1， 0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 N(220， 25^2)， 试求 ：

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200－240 伏的概率 β.

［附表］（表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数）

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.341	0.335	0.919

解：引进下列事件：A_1＝｛电压不超过 200 伏｝，A_2＝｛电压在 200－240 伏｝，

A_3＝｛电压超过 240 伏｝；B＝｛电子元件损坏｝.

因 $X \sim N(220,25^2)$，故 $P(A_1)=P\{X\le 200\}=P\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\}=\Phi(-0.8)=0.212$，

$$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576;$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-0.212-0.576=0.212.$$

……3 分

（**1**）由题设条件知 $P(B|A_1)=0.1, P(B|A_2)=0.001, P(B|A_3)=0.2$.

于是，由全概率公式，有 $a=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.0642$，……5 分

（**2**）由贝叶斯公式，得 $\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}\approx 0.009$.……7 分