排列组合

离散数学－计数技术

南京大学计算机科学与技术系

引言–算法分析中的计数

- k:=0
- for i:=1 to m
  - k:=k+1
- for j:=1 to n
  - k:=k+1

- k:=0
- for i:=1 to m
  - for j:=1 to n
    - k:=k+1

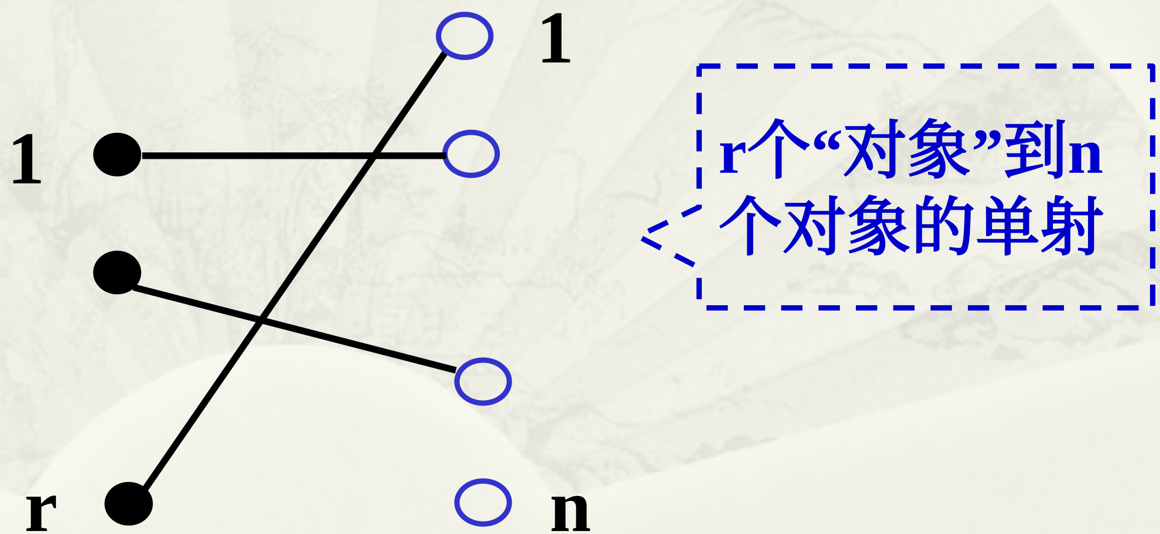
- k:=0
- for i_1:=1 to n
  - for i_2:=1 to i_1
    - for i_3:=1 to i_2
      - k:=k+1

基本原则

* 乘法原则
  * 做一件事有两个步骤，第一步有n种完成方式，第二步m种完成方式，则完成这件事情共有m×n种方法
  * 例:
    * A是有限集合，|A|=n. A的幂集有几个元素？
      * $p(A) = 2^n$.
* 加法原则
  * 一件事情有两种做法，第一种做法有n种方式，第二种做法有m种方式，则完成这件事情共有m＋n种方法
  * 例：
    * 在37位教师和83位学生中选一位校委会代表，多少种选择？

n个元素的r排列

* 在n个元素的集合中，有序取出r个元素，元素不重复，有多少种可能？
  * $P(n,r)= n(n-1)\ldots(n-r+1)=n!/(n-r)!$ $//P(n,0)=1$



例题

* 从52张扑克牌中发5张牌，如果考虑发牌次序，共有多少种牌型？
* 密码是字母开头8位长字母和数字串，总共可以设计多少个密码？
* 密码是字母开头8位长字母和数字串，如果不允许字母或者数字重复，总共可以设计多少个密码？
* 将26个英文字母进行排列，有多少种排列以TXP开头？
* 将26个英文字母进行排列，有多少种排列中含有TXP串？

r组合

- 考察有n个元素的集合，如果取r个元素出来，共有多少种取法？
  - 含有r个元素的子集的个数
  - r组合： $c(n,r)=P(n,r)/r! =n!/[r!(n-r)!]$

用乘法原则来证明！

r组合：$c(n,r)=c(n,n-r)$

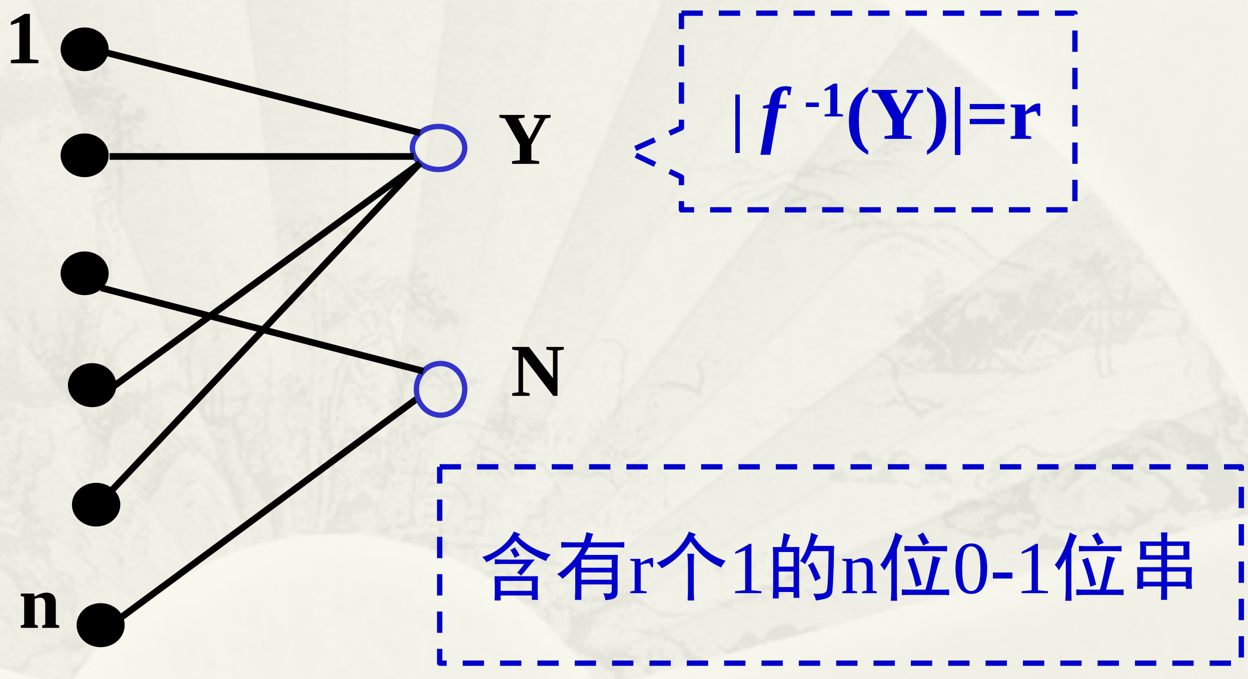
例

- 从52张扑克牌中发47张牌，如果不考虑发牌次序，共有多少种牌型?
- 从5个妇女和15个男性中选出一个包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能?
- 从5个妇女和15个男性中选出一个至少包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能?

r组合

- n个元素的集合到{Y, N}的函数，共有2^n个

Σ_r **c(n,r)=2^n**



园排列

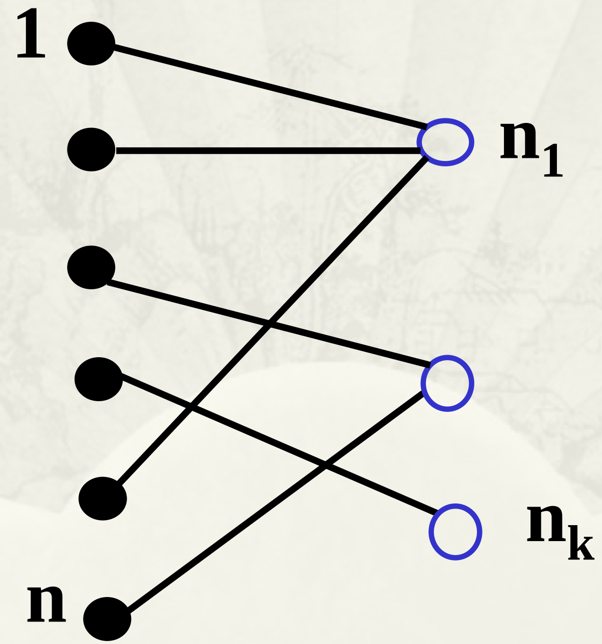
* 从n个不同元素中，取r个不重复的元素排成一个圆圈，有P(n,r)/r种排列方法

有重复（不可区分）物体的排列

- 把单词“**mathematics**”中的字母重新排列，可以得到多少个不同的字符串（单词）？
- 2个m，2个a， 2个t，1个h，1个e，1个c, 1个i, 1个s.
- 11个位置(2+2+2+1+1+1+1+1)，选2个放置a，…
- 乘下的9个位置，选2个放置e,
- …
- C(11, 2) C(9, 2) C(7, 2) C(5, 1) C(4, 1) C(3, 1) C(2, 1) C(1, 1)
- 11!/(2! 2! 2! 1! 1! 1! 1! 1!)

有重复的排列

- 在n个有不可区分项的对象集中，若有k类对象，各类对象的数目分别为$n_1, \ldots, n_k$, n排列的个数是：
- $n!/(n_1! \ldots n_k!)$, 其中 $n=n_1+\ldots+n_k$



n个不同位置赋予k个类别，各类别的数量为$n_1, \cdots, n_k$

有重复的组合

- 厨房有三种水果，每样都足够多（超过4个）。从厨房取4个水果，有多少种取法？

一种取法对应于一个有4个0和2个1构成的0-1串，C(6, 4)

n个元素集合中允许重复的r组合

- C(r+n-1, r)
  - 含r个0和(n-1)个1的0-1串，这种0-1串的个数
- 例
  - 甜点店4种面包，买6个面包的买法有几种？

```
k:=0
for i1:=1 to n
    for i2:=1 to i1
        for i3:=1 to i2
            k:=k+1
```

可重复地从{1, …,n}中选取3个数：$n \geq i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq 1$

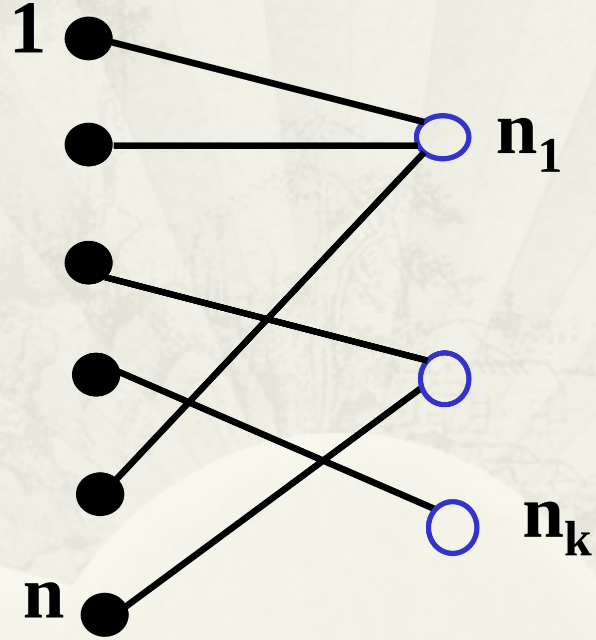
C(n+2, 3)

n个元素集合中允许重复的r组合

- x+y+z=11有多少组解？其中x,y,z是非负整数
  - 3种水果足够多，取11个水果的方案
- 如果$x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$时，上述方程有多少组解？
  - $(x'+1) + (y'+2) + (z'+3)=11$，其中x',y', z'是非负整数
  - $x' + y' + z' = 5$ ，其中x',y', z'是非负整数

不同物体分配到不同盒子

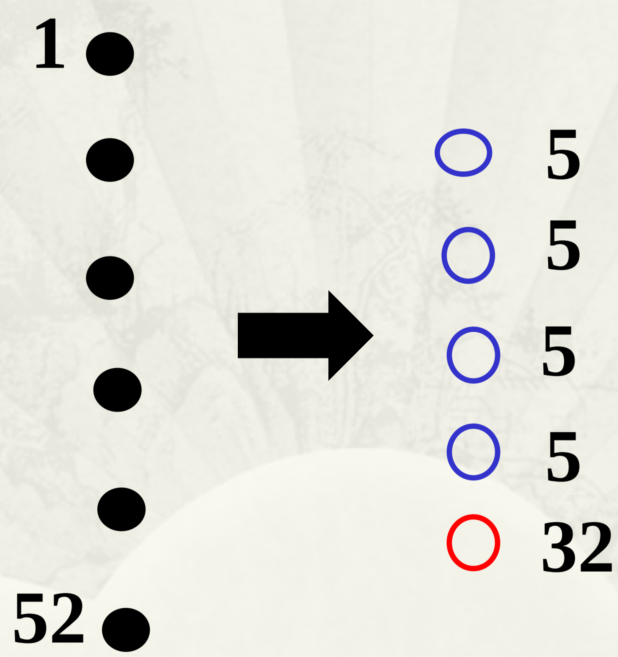
* <u>n个不同物体分配到k个不同的盒子中</u>，使得第i个盒子包含n_i个物体（i=1,…,k），有多少种分配方案？



$$n!/(n_1!\ \ldots n_k!)$$

不同物体分配到不同盒子（示例）

- 52张扑克牌发给4个人使得每人5张
  - 意味着“第5人”拿到32张



$52!/(5!\ 5!\ 5!\ 5!\ 32!)$

相同物体分配到不同盒子

* n个相同物体分配到k个不同的盒子中，有多少种分配方案？

$x_1+\ldots+x_k=n$ 的非负整数解

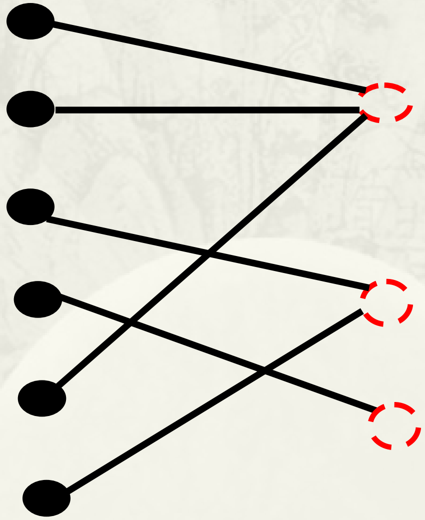
○ $\boldsymbol{x_1}$ ○ $\boldsymbol{x_2}$ ⋯ ○ $\boldsymbol{x_k}$

$\boldsymbol{x}_1$个* | … | $\boldsymbol{x}_k$个*

含n个0和(k-1)个1的0-1串，C (n+k-1, n)

不同物体分配到不可辨别的盒子

- S(n, k): Stirling number of the second kind
  - n个物体分配到k个不可辨别的盒子中，不允许空盒
  - k-划分 $(n \geq k)$
- $S(n+1, k) = k * S(n, k) + S(n, k-1)$, $S(0, 0)=1$



不同物体分配到不可辨别的盒子

- n个不同物体分配到k个不同可辨别的盒子，允许空盒
  - $\Sigma_{j=1..k}$ S(n,j)
- n个元素上的等价关系
  - $B_n=\Sigma_{j=1..n}$ S(n,j) // Bell number
  - $B_0=B_1=1$

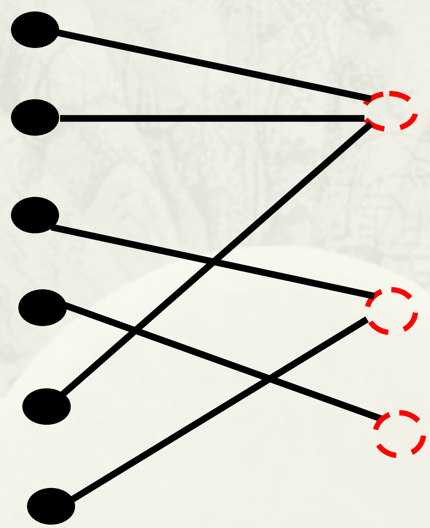
$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

相同物体分配到不可辨别的盒子

- k个盒子，不允许空盒
  - $x_1+\ldots+x_k=n$ 的正整数解， $x_1\geq\ldots\geq x_k\geq 1$
- k个盒子， 允许空盒
  - $x_1+\ldots+x_j=n$ 的正整数解， $x_1\geq\ldots\geq x_j\geq 1$，$j\leq k$

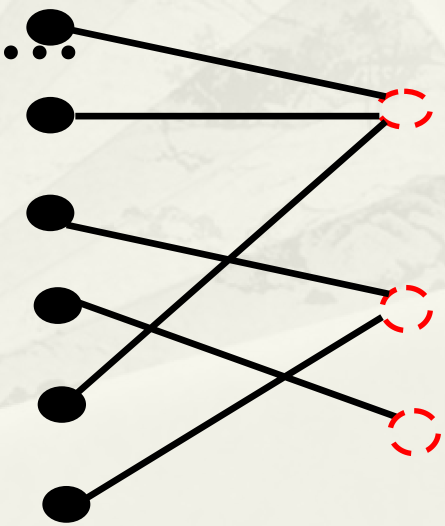
Stirling number of the second kind

- **S(n, k), 或** $\left\{ {n \atop k} \right\}$
  - **n个不同物体分配到k个不可辨别的盒子，不允许空盒**
  - **k-划分 (n≥k)**
- **k! S(n, k): [1..n] → [1..k] 满射的个数**



Stirling number of the second kind

- **[1..n] → [1..k] 满射的个数？**
- **U={ *f* | *f* :[1..n] → [1..k] },**
- **A_j={*f* ∈U | *f*(*x*) ≠ j, *x*=1, …n}, j=1,..,k**
- **k^n-C(k, 1) $(k-1)^n$+C(k, 2) $(k-2)^n$- …**



$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n.$$

作业

- 教材
  - 5.3；5.5；
- 作业
  - P277：8；16；20；24；30
  - P292：10；14；17