

## 2000 年全国硕士研究生入学统一考试

### 理工数学一试题详解及评析

#### 一、 填空题

(1)  $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $\frac{\pi}{4}$ .

【详解】

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \quad \underline{x-1 = \sin t} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

(2) 曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  在点  $(1, -2, 2)$  的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$ .

【详解】 令  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ ,

则有

$$F'_x(1, -2, 2) = 2x|_{(1, -2, 2)} = 2,$$

$$F'_y(1, -2, 2) = 4y|_{(1, -2, 2)} = -8,$$

$$F'_z(1, -2, 2) = 6z|_{(1, -2, 2)} = 12.$$

因此所求法线方程为：

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$$

(3) 微分方程  $xy'' + 3y' = 0$  的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $y = C_1 + \frac{C_2}{x^2}$ .

【详解】 令  $p = y'$ , 则原方程化为

$$p' + \frac{3}{x}p = 0,$$

其通解为  $p = Cx^{-3}$ .

因此,

$$y = \int Cx^{-3} dx = C_1 - \frac{C}{2}x^{-2} = C_1 + \frac{C_2}{x^2}, \left( C_2 = -\frac{C}{2} \right)$$

(4) 已知方程组  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  无解, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 -1.

【详解】 化增广矩阵为阶梯形, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & \vdots & 3 \\ 1 & a & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & \vdots & a-3 \end{bmatrix}$$

可见. 当  $a = -1$  时, 系数矩阵的秩为 2, 而增广矩阵的秩为 3, 因此方程组无解.

注意, 当  $a = 3$  时, 系数矩阵和增光矩阵的秩均为 2, 方程组有无穷多解.

(5) 设两个相互独立的事件  $A$  和  $B$  都不发生的概率为  $\frac{1}{9}$ ,  $A$  发生  $B$  不发生的概率与  $B$  发生  $A$

不发生的概率相等, 则  $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $\frac{2}{3}$ .

【详解】 由题设. 有

$$P(\overline{AB}) = \frac{1}{9}, P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$$

因为  $A$  和  $B$  相互独立, 所以  $A$  与  $\overline{B}$ ,  $\overline{A}$  与  $B$  也相互独立. 于是由  $P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$ ,

$$\text{有 } P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(B)$$

$$\text{即有 } P(A)[1 - P(B)] = [1 - P(A)]P(B),$$

$$\text{可得 } P(A) = P(B)$$

$$\text{从而 } P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = [1 - P(A)]^2 = \frac{1}{9},$$

$$\text{解得 } P(A) = \frac{2}{3}.$$

## 二、选择题

(1) 设  $f(x), g(x)$  是恒大于零的可导函数, 且  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$ , 则当

$a < x < b$  时, 有

(A)  $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

(B)  $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C)  $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

(D)  $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

【 】

【答】 应选 (A) .

【详解】 由题设知

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0,$$

因此当  $a < x < b$  时, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

即  $f(x)g(b) > f(b)g(x)$  ,

可见 (A) 为正确选项.

(2) 设  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ ,  $S_1$  为  $S$  在第一卦限中的部分, 则有

(A)  $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(B)  $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(C)  $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(D)  $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$

【 】

【答】 应选 (C) .

【详解】 显然, 待选答案的四个右端均大于零, 而  $S$  关于平面  $x=0$  和  $y=0$  对称, 因此

(A) (B) (D) 三项中的左端项均能为零, 可见 (C) 一定为正确选项. 事实上, 有

$$\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$$

(3) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则必收敛的级数为

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

【 】

【答】 应选 (D) .

【详解】 利用级数的性质即知, (D) 为正确选项, 事实上, (A) \ (B) \ (C) 三个选项可举反例说明是不正确的. 例如:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \text{ 收敛, 但 } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ 发散, 可排除 (A);}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 收敛, 但 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 可排除 (B);}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ 收敛, 但 } \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 可排除 (C).}$$

(4) 设  $n$  维列向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $m < n$ ) 线性无关, 则  $n$  维列向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  可由向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性表示.

(B) 向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示.

(C) 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  与向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  等价.

(D) 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  与矩阵  $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  等价.

【 】

【答】 应选 (D) .

【详解】 用排除法.

(A) 为充分但非必要条件: 若向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  可由向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性表示, 则一定可推导  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关, 因为若  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性相关, 则  $r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) < m$ , 于是  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  必线性相关, 矛盾. 但反过来不成立, 如当  $m=1$  时,  $\alpha_1 = (1, 0)^T$ ,  $\beta_1 = (0, 1)^T$  均为单个非零向量是线性相关的, 但  $\alpha_1$  并不能用  $\beta_1$  线性表示.

(B) 为既非充分又非必要条件. 如当  $m=1$  时, 考虑  $\alpha_1 = (1, 0)^T$ ,  $\beta_1 = (0, 1)^T$  均线性无关, 但  $\beta_1$  并不能由  $\alpha_1$  线性表示, 必要性不成立; 又如  $\alpha_1 = (1, 0)^T$ ,  $\beta_1 = (0, 0)^T$ ,  $\beta_1$  可由  $\alpha_1$  线性表示, 但  $\beta_1$  并不线性无关, 充分性也不成立.

(C) 为充分但非必要条件, 若向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  与向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  等价, 由  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关知,  $r(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = m$ , 因此  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关, 充分性成立; 当  $m=1$  时, 考虑  $\alpha_1 = (1, 0)^T, \beta_1 = (0, 1)^T$  均线性无关, 但  $\alpha_1$  与  $\beta_1$  并不是等价的, 必要性不成立.

(E) 故剩下 (D) 为正确选项. 事实上, 矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  与矩阵  $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) \Leftrightarrow r(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = m$ , 因此是向量组  $\beta_1, \dots, \beta_m$  线性无关的充要条件.

(5) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 则随机变量  $\xi = X + Y$  与  $\eta = X - Y$  不相关的充分必要条件为

(A)  $E(X) = E(Y)$ .

(B)  $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ .

(C)  $E(X^2) = E(Y^2)$ .

(D)  $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$ .

【 】

【答】 应选 (B).

【详解】 因为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi, \eta) &= \text{Cov}(X + Y, X - Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= D(X) - D(Y) \end{aligned}$$

可见

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi, \eta) = 0 &\Leftrightarrow D(X) - D(Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \end{aligned}$$

故正确选项为 (B).

三、求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$ .

【详解】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

四、设  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数,  $g$  具有二阶连续导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

【详解】 根据复合函数的求导公式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 - \frac{y}{x^2} g'$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f'_1 + y \left( x f''_{11} - \frac{x}{y^2} f''_{12} \right) - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} \left( x f''_{21} - \frac{x}{y^2} f''_{22} \right) - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \\ &= f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + x y f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{12} - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \end{aligned}$$

五、计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是以点  $(1, 0)$  为中心,  $R$  为半径的圆周 ( $R > 1$ ),

取逆时针方向.

【详解】  $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2},$

则有  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, (x, y) \neq (0, 0)$

作足够小的椭圆:  $C: \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases} (t \in [0, 2\pi], C \text{ 取逆时针方向}),$  于是由格林公式有

$$\oint_{L+C} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = 0.$$

从而有

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2}{\varepsilon^2} dt = \pi$$

六、设对于半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $S$ , 都有

$$\iiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = 0,$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续的一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 求  $f(x)$ .

【详解】由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy \\ &= \pm \iiint_{\Omega} [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}]dV, \end{aligned}$$

其中  $\Omega$  为  $S$  围成的有界闭区域,  $\pm$  号对应曲面取外侧或内侧, 由  $S$  的任意性, 知

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0, (x > 0)$$

$$\text{即} \quad f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x}, (x > 0)$$

这是一阶线性非齐次微分方程, 其通解为

$$f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x + C)$$

$$\text{由于} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{2x} + Ce^x}{x} \right) = 1,$$

$$\text{故必有} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0,$$

$$\text{即} \quad C + 1 = 0, \text{ 从而 } C = -1$$

$$\text{因此} \quad f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1).$$

七、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$  的收敛区域，并讨论该区间端点的收敛性.

【详解】 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[3^n + (-2)^n\right] n}{\left[3^{n+1} + (-2)^{n+1}\right] (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] n}{3 \left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] (n+1)} = \frac{1}{3}$$

所以收敛半径为  $R = 3$ ，相应的收敛区间为  $(-3, 3)$

当  $x = 3$  时，因为  $\frac{(3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$ ，且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散，所以原级数在点  $x = 3$  处发散；

当  $x = -3$  时，由于  $\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{(2)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$ ，且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  与

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$  都收敛.

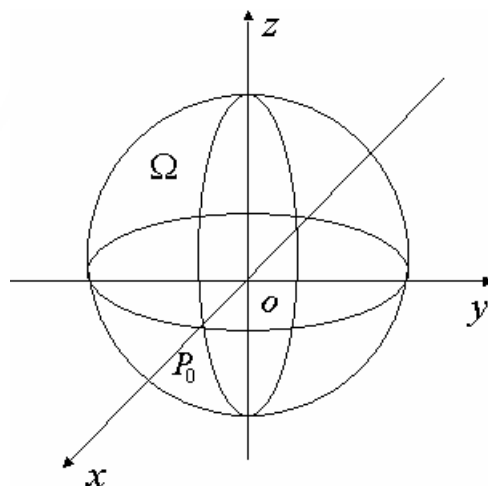
所以原级数在点  $x = -3$  处收敛.

八、设有一半径为  $R$  的球体， $P_0$  是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到  $P_0$  距离的平方成正比（比例常数  $k > 0$ ），求球体的重心位置.

【分析】本题为一物理应用题，由于重心坐标是相对某一些坐标系而言的，因此本题的关键是建立适当的坐标系，一般来说，可考虑选取球心或固定点  $P_0$  作为坐标原点，相应的有两种求解方法.

【详解 1】





用  $\Omega$  表示球体，以  $\Omega$  的球心为原点  $O$ ，射线  $OP_0$  为正  $x$  轴建立直角坐标系，则点  $P_0$  的坐标

为  $(R, 0, 0)$  球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

设  $\Omega$  的重心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ，由对称性，得

$$\bar{y} = 0, \bar{z} = 0,$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \cdot k \left[ (x-R)^2 + y^2 + z^2 \right] dV}{\iiint_{\Omega} k \left[ (x-R)^2 + y^2 + z^2 \right] dV}$$

而

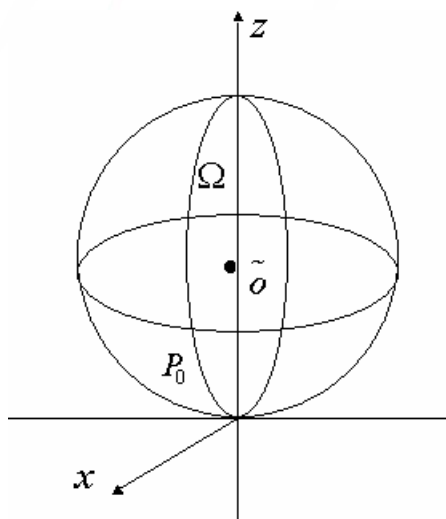
$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[ (x-R)^2 + y^2 + z^2 \right] dV \\ &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV + \iiint_{\Omega} R^2 dV = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \frac{4}{3} \pi R^5 \\ &= \frac{32}{15} \pi R^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} x \left[ (x-R)^2 + y^2 + z^2 \right] dV = -2R \iiint_{\Omega} x^2 dV \\ &= -\frac{2R}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = -\frac{8}{15} \pi R^6 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \bar{x} = -\frac{R}{4}.$$

因此，球体  $\Omega$  的重心位置为  $\left(-\frac{R}{4}, 0, 0\right)$ .

【详解 2】



用  $\Omega$  表示所考虑的球体,  $\tilde{O}$  表示球心, 以点  $P_0$  选为原点, 射线  $P_0 \tilde{O}$  为正  $z$  轴建立直角坐标系, 则球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$

设  $\Omega$  的重心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 由对称性, 得

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0,$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2) dV}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) dV}$$

因为

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr \\ &= \frac{32}{15} \pi R^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dV &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr \\ &= \frac{64}{3} \pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \pi R^6 \end{aligned}$$

故  $\bar{z} = \frac{5}{4}R$ .

因此, 球体  $\Omega$  的重心位置为  $\left(0, 0, \frac{5}{4}R\right)$ .

九、设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且  $\int_0^\pi f(x)dx = 0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$ , 试证: 在  $(0, \pi)$  内至少存在两个不同的点  $\xi_1, \xi_2$ , 使  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ .

【详解】 令  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则有  $F(0) = F(\pi) = 0$ , 又因为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x)\cos xdx = \int_0^\pi \cos x dF(x) \\ &= F(x)\cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin xdx \\ &= \int_0^\pi F(x)\sin xdx \end{aligned}$$

令  $G(x) = \int_0^x F(t)\sin tdt$ , 则  $G(0) = G(\pi) = 0$ ,

于是存在  $\xi \in (0, \pi)$ , 使  $F(\xi)\sin \xi = 0$ , 因为当  $\xi \in (0, \pi)$ , 这样就证明了.

$$F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$$

再对  $F(x)$  在区间  $[0, \xi]$ ,  $[\xi, \pi]$  上分别用罗尔定理知, 至少存在  $\xi_1 \in (0, \xi)$ ,  $\xi_2 \in (\xi, \pi)$

使

$$F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$$

即  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

十、(本题满分 6 分)

设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 其中  $E$  为 4 阶单位矩

阵, 求矩阵  $B$ .

【分析】本题为解矩阵方程问题, 相当于是未知矩阵, 其一般原则是先简化, 再计算, 根据题设等式, 可先右乘  $A$ , 再左乘  $A^*$ , 尽量不去计算  $A^{-1}$ .

【详解 1】

由  $AA^* = A^*A = |A|E$ , 知  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 因此有

$$8 = |A^*| = |A|^3,$$

于是  $|A| = 2$

在等式  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 两边先右乘  $A$ , 再左乘  $A^*$ , 得

$$2B = A^*B + 3A^*A = A^*B,$$

$$(2E - A^*)B = 6E,$$

于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【详解 2】

$|A| = 2$  (同解 1), 由  $AA^* = A^*A = |A|E$ , 得

$$A = |A|(A^*)^{-1} = 2(A^*)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

可见  $A - E$  为逆矩阵.

于是由  $(A - E)BA^{-1} = 3E$ , 有  $B = 3(A - E)^{-1}A$ , 而

$$(A-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

因此

$$B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

十一、某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工得人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及之间实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 $x_n$

和 $y_n$ ，记为向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式： $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ ;

(2) 验证 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $A$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ .

【详解】(1) 由题意，得

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) \end{cases}$$

化简

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

可见

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

(2) 因为行列式

$$|(\eta_1, \eta_2)| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

可见  $\eta_1, \eta_2$  线性无关.

又  $A\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta_1$ , 故  $\eta_1$  为  $A$  的特征向量, 且相应的特征值  $\lambda_1 = 1$ .

$A\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\eta_2$ , 为  $A$  的特征向量, 且相应的特征值  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ .

(3) 因为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因此只要计算  $A^n$  即可.

$$\text{令 } P = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{则由 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ 有 } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

十二、某流水生产线上每一个产品不合格的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为  $X$ , 求  $X$  的数学期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$ .

【详解】 记  $q = 1 - p$ ,  $X$  的概率分布为

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p, (k = 1, 2, \cdots)$$

$X$  的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' \\ &= p \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left( \frac{q}{1-q} \right)' \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \left[ q \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' \right]' \\ &= p \left[ \frac{q}{(1-q)^2} \right]' = \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

故  $X$  的方差为

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

十三、设某种元件的使用寿命  $X$  的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为未知参数, 又设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $X$  的一组样本观测值, 求参数  $\theta$  的最大似然估计值.

【详解】 似然函数为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当  $x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n)$  时,  $L(\theta) > 0$ , 取对数, 得

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta).$$

因为  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 2n > 0$ , 所以  $L(\theta)$  单调增加.

由于  $\theta$  必须满足  $x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n)$ , 因此当  $\theta$  取  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中的最小值时,  $L(\theta)$  取最大值, 所以  $\theta$  的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$