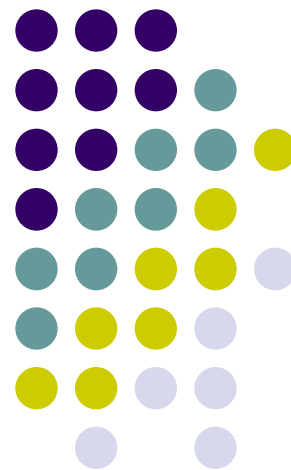


谓词逻辑初步

离散数学 逻辑和证明

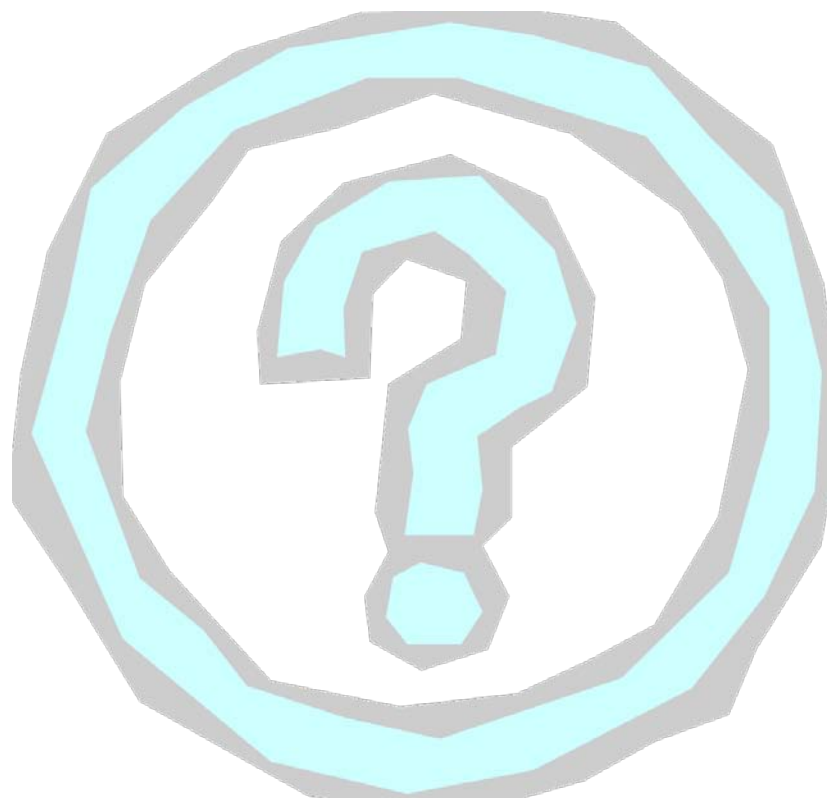
南京大学计算机科学与技术系





内容提要

- 引言
- 谓词
- 量词
- 推理





引言

- 例：
 - 人都要死的
 - 苏格拉底是人
 - 苏格拉底要死的

命题逻辑无法处理！



引言

- 知识表示
 - $\text{brother}(x, y) \wedge \text{father}(y, z) \rightarrow \text{uncle}(x, z)$
 - $\text{father}(x, y) \wedge \text{father}(y, z) \rightarrow \text{grandfather}(x, z)$

命题逻辑无法表达！



谓词

- 如果 x 是整数，“ x 大于2”不是命题，它的真值依赖于 x 的取值
 - 可以将“ x 大于2”表示为 $P(x)$ 。
- 一元谓词 P ：陈述 $P(x)$ 看作命题函数 P 在 x 的一个值。
 - P 的定义域是整数集
 - $P(3)$ 是一个取值为T的命题
 - $P(1)$ 是一个取值为F的命题
- 举例，二元谓词 Q ： $Q(x, y)$ 表示 “ $x=y+3$ ”。



量词

- 若 $P(x)$ 是谓词, $\forall xP(x)$ 表示 “对所有的 $x, P(x)$ ”。
 \forall 称为**全称量词**
- 若 $P(x)$ 是谓词, $\exists xP(x)$ 表示 “存在某个 $x, P(x)$ ”。
 \exists 称为**存在量词**。
- 例: $P(x)$ 表示 $x > 2$
 - $\forall xP(x)$ 为F (假), $\exists xP(x)$ 为T (真)
- 优先级: 量词的优先级高于其它逻辑运算符。



关于论域/作用域的讨论

- 符号化以下语句
 - $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$, $\forall x P(x)$ 的真值?
 - 有的政治家诚实
 - 所有美国人都喜欢汉堡包



关于论域/作用域的讨论

- 观察量化表达式
 - $\forall \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}))$
 - $\forall \mathbf{x}P(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{x}Q(\mathbf{x})$
 - $\forall \mathbf{x}P(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{y}Q(\mathbf{y})$
 - $\forall \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \vee Q(\mathbf{x}))$
 - $\forall \mathbf{x}(P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$
- 量化表达式中的变元：绑定、自由、作用域、替换



逻辑等价

- 逻辑表达式的逻辑等价：都有相同的真值，无论变量设定在哪个论域上，无论什么谓词代入。



带量词的公式的否定式

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
 - 对所有的 x , x 的平方是正数
 - 否定: 存在某个实数 x , 其平方不是正数。
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
 - 存在 x , 满足 $5x=x$.
 - 否定: 对任意的 x , $5x \neq x$.



多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

举例： $P(x, y)$ 表示 $x+y=y+x$ 。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

举例： $P(x, y)$ 表示 $x=y+1$ 。

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 与 $\exists y \forall x P(x, y)$ 不一定等价

举例： $P(x, y)$ 表示 “ $y > x$ ”。



将自然语言翻译成逻辑表达式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x 是这个班上的

$C(x)$: x 学过微积分课程

$\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\forall x (S(x) \rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥}))$

练习：所有狮子都是凶猛的，有些狮子不喝咖啡。



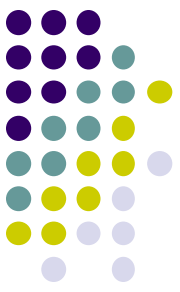
与量词有关的推理规则

- 全称例示 **UI**: $\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$
- 全称生成 **UG**: 对任意 c , $P(c) \Rightarrow \forall xP(x)$
- 存在例示 **EI**: $\exists xP(x) \Rightarrow$ 对某个 c , $P(c)$
- 存在生成 **EG**: 对某个 c , $P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$



苏格拉底到底死不死？

- $P(x)$: x 是人; $Q(x)$: x 要死
- 符号化及推理过程:
 - 人都是要死的: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
 $P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$
苏格拉底是人: $P(\text{苏格拉底})$
 $\therefore Q(\text{苏格拉底})$



谓词逻辑中的推理（举例）

- “在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。
- $C(x)$: x 在这个班上
- $B(x)$: x 读过书了
- $P(x)$: x 通过了第一门考试
 - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
 - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
 - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

$C(a) \wedge \neg B(a)$	存在例示
$C(a)$	化简
$C(a) \rightarrow P(a)$	全称例示
$P(a)$	假言推理
$\neg B(a)$	化简
$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$	存在生成



Prolog (Programming in Logic)

- 若教授p是课程c的老师，学生s注册课程c，则p教s。
 - $\text{instructor}(p, c) \wedge \text{enrolled}(s, c) \rightarrow \text{teaches}(p, s)$

$\text{teaches}(p, s) \text{ :- } \text{instructor}(p, c), \text{enrolled}(s, c)$

- 事实
 - $\text{instructor}(\text{chan}, \text{math273})$
 - $\text{enrolled}(\text{kevin}, \text{math273})$
 - $\text{enrolled}(\text{kiko}, \text{math273})$
- 查询
 - $? \text{teaches}(\text{chan}, x)$



作业

- 教材[1.3, 1.4]
 - P34: 10, 14, 24(最后2题), 34, 42
 - P43: 6(最后2题), 16, 44
- 教材[1.5]
 - P54-57: 19, 21, 24, 29