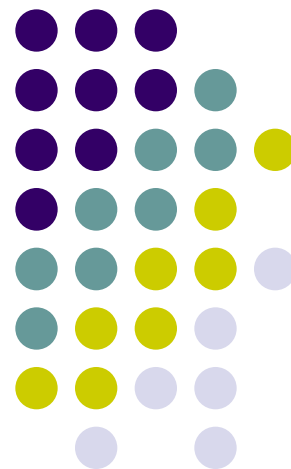


归纳与递归

离散数学 逻辑和证明

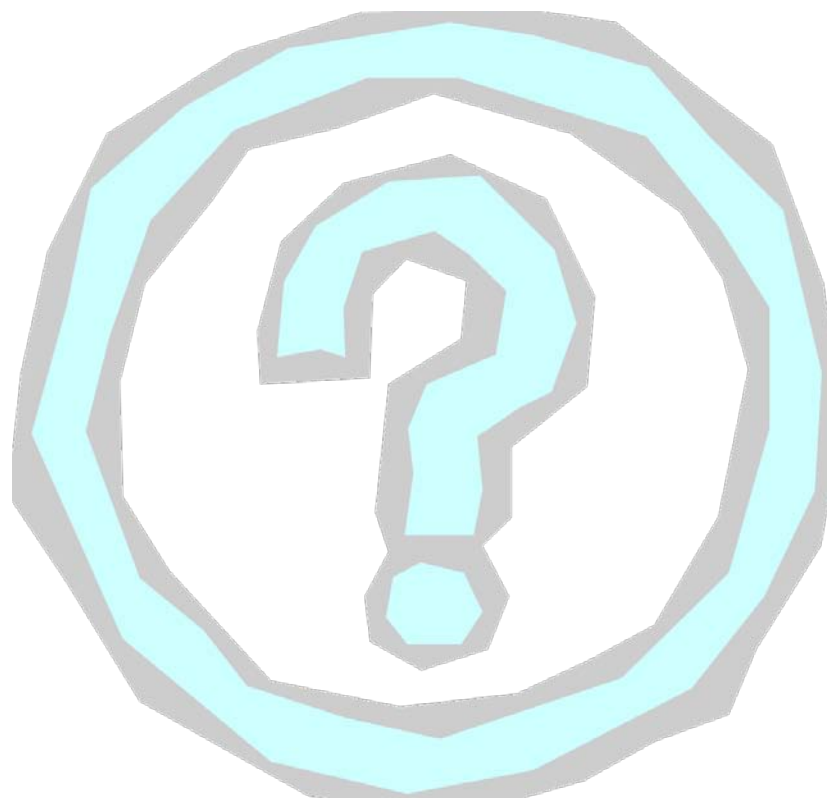
南京大学计算机科学与技术系





内容提要

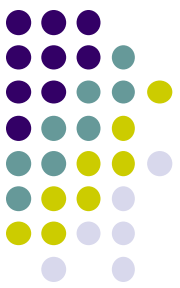
- 数学归纳法
- 强数学归纳法
- 运用良序公理来证明
- 递归定义
- 结构归纳法





数学归纳法

- 证明目标
 - $\forall n P(n)$ // n 的论域为正整数集合
- 证明框架
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
// 即, 证明 $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$
 - 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立. // 即: $\forall n P(n)$



数学归纳法（有效性）

- 良序公理
 - 正整数集合的非空子集都有一个最小元素
- 数学归纳法的有效性（归谬法）
 - 假设 $\forall n P(n)$ 不成立，则 $\exists n (\neg P(n))$ 成立.
 - 令 $S = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid \neg P(n) \}$, S 是非空子集.
 - 根据良序公理, S 有最小元素, 记为 m .
 - $P(m)$ 不成立, $m \neq 1$, 但是 $(m-1) \notin S$, 即 $P(m-1)$ 成立.
 - 根据归纳步骤, $P(m)$ 成立, 矛盾.
 - 因此, $\forall n P(n)$ 成立.



数学归纳法（举例）

- $H_k = 1 + 1/2 + \dots + 1/k$ (k 为正整数)
- 证明: $H_2^n \geq 1 + n/2$ (n 为正整数)
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真, $H_2 = 1 + 1/2$
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

$$\begin{aligned} H_2^{k+1} &= H_2^k + 1/(2^k + 1) + \dots + 1/2^{k+1} \\ &\geq (1 + k/2) + 2^k(1/2^{k+1}) = 1 + (1 + k)/2 \end{aligned}$$

- 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立.



数学归纳法（举例）

- 猜测前 n 个奇数的求和公式，并证明之。
 - $1=1$
 - $1+3=4$
 - $1+3+5=9$
 - $1+3+5+7=16$
 - ...
 - $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ （ n 为正整数）
 - 运用数学归纳法证明（练习）



运用数学归纳法时犯的错误

- 平面上任何一组相互间不平行的直线必相交于一点.
 - 基础步骤: $P(2)$ 为真
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
 - 前 k 条交于 p_1 .
 - 后 k 条交于 p_2 .
 - $p_1=p_2$



强数学归纳法

- 证明目标
 - $\forall n P(n)$ // n 的论域为正整数集合
- 证明框架
 - 基础步骤: $P(1)$ 为真
 - 归纳步骤: 对任意正整数 k , $P(1), \dots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
// 即, 证明 $\forall k (P(1) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))$
 - 因此, 对任意正整数 n , $P(n)$ 成立. // 即: $\forall n P(n)$



强数学归纳法（一般形式）

- 设 $P(n)$ 是与整数 n 有关的陈述， a 和 b 是两个给定的整数，且 $a \leq b$.
- 如果能够证明下列陈述
 - $P(a), P(a+1), \dots, P(b)$.
 - 对任意 $k \geq b$, $P(a) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$
- 则下列陈述成立
 - 对任意 $n \geq a$, $P(n)$.

$\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \}$ 是良序的



强数学归纳法（举例）

- 任意整数 $n(n \geq 2)$ 可分解为（若干个）素数的乘积
 - $n = 2$.
 - 考察 $k+1$.
- 用4分和5分就可以组成12分及以上的每种邮资.
 - $P(12), P(13), P(14), P(15)$.
 - 对任意 $k \geq 15, P(12) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$



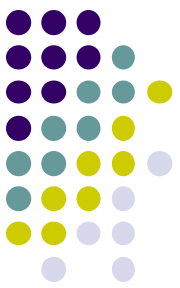
数学归纳法（举例）

- 对每个正整数 $n \geq 4$, $n! > 2^n$
 - 基础步骤: $P(4)$ 为真, $24 > 16$
 - 归纳步骤: 对任意正整数 $k \geq 4$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
 $(k+1)! = (k+1) k! > (k+1) 2^k > 2^{k+1}$
 - 因此, 对任意正整数 $n \geq 4$, $P(n)$ 成立.



运用良序公理来证明（举例）

- 设 a 是整数, d 是正整数, 则存在唯一的整数 q 和 r 满足
 - $0 \leq r < d$
 - $a = dq + r$
- 证明
 - 令 $S = \{a - dq \mid 0 \leq a - dq, q \in \mathbb{Z}\}$, S 非空.
 - 非负整数集合具有良序性
 - S 有最小元, 记为 $r_0 = a - dq_0$.
 - 可证 $0 \leq r_0 < d$



运用良序公理来证明（举例）

- 在循环赛胜果图中，若存在长度为 m （ $m \geq 3$ ）的回路，则必定存在长度为3的回路。

备注： $a_i \rightarrow a_j$ 表示 a_i 赢了 a_j

证明

- 设最短回路的长度为 k （ $k \geq 3$ ） //良序公理的保证
- $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$
- 若 $a_3 \rightarrow a_1$, 存在长度为3的回路，矛盾。
- 若 $a_1 \rightarrow a_3$, 存在长度为 $(k-1)$ 的回路，矛盾。



递归定义（ \mathbb{N} 上的函数）

- 递归地定义自然数集合 \mathbb{N} 上的函数。
 - 基础步骤：指定这个函数在0处的值；
 - 递归步骤：给出从较小处的值来求出当前的值之规则。
- 举例，阶乘函数 $F(n)=n!$ 的递归定义
 - $F(0)=1$
 - $F(n)=n \cdot F(n-1)$ for $n>0$



Fibonacci 序列

- Fibonacci 序列 $\{f_n\}$ 定义如下
 - $f_0 = 0$,
 - $f_1 = 1$,
 - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, 对任意 $n \geq 2$.
- 其前几个数
 - $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$
- 证明：对任意 $n \geq 0$,
$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\text{其中, } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$



归纳证明: Fibonacci 序列

- 验证: 当 $n=0,1$ 时, 陈述正确。

- 对于 $k+1$,
$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\ &= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^k + \alpha^{k-1}) - (\beta^k + \beta^{k-1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

注意: $\alpha^2 = \alpha + 1$, 且 $\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$ 对任意 $n \geq 1$.



递归定义（集合）

- 递归地定义集合。
 - 基础步骤：指定一些初始元素；
 - 递归步骤：给出从集合中的元素来构造新元素之规则；
 - 排斥规则（只包含上述步骤生成的那些元素）默认成立
- 举例，正整数集合的子集S
 - $x \in S$
 - 若 $x \in S$ 且 $y \in S$ ，则 $x + y \in S$ 。



递归定义（举例）

- 字母表 Σ 上的字符串集合 Σ^* 。
 - 基础步骤： $\lambda \in \Sigma^*$ （ λ 表示空串）；
 - 递归步骤： 若 $\omega \in \Sigma^*$ 且 $x \in \Sigma$ ，则 $\omega x \in \Sigma^*$ 。
- 字符串的长度（ Σ^* 上的函数 l ）。
 - 基础步骤： $l(\lambda)=0$ ；
 - 递归步骤： $l(\omega x) = l(\omega) + 1$, 若 $\omega \in \Sigma^*$ 且 $x \in \Sigma$



递归定义（举例）

- Σ^* 上的字符串连接运算。
 - 基础步骤：若 $\omega \in \Sigma^*$ ，则 $\omega \cdot \lambda = \omega$;
 - 递归步骤：若 $\omega_1 \in \Sigma^*$ 且 $\omega_2 \in \Sigma^*$ 以及 $x \in \Sigma$ ，则 $\omega_1 \cdot (\omega_2 x) = (\omega_1 \cdot \omega_2) x$ 。
 - // $\omega_1 \cdot \omega_2$ 通常也写成 $\omega_1 \omega_2$



递归定义（举例）

- 复合命题的合式公式。
 - 基础步骤：T, F, s都是合式公式，其中s是命题变元；
 - 递归步骤：若E和F是合式公式，则 $(\neg E)$ 、 $(E \wedge F)$ 、 $(E \vee F)$ 、 $(E \rightarrow F)$ 和 $(E \leftrightarrow F)$ 都是合式公式。



结构归纳法

- 关于递归定义的集合的命题，进行结构归纳证明。
 - 基础步骤：证明对于初始元素来说，命题成立；
 - 递归步骤：针对生产新元素的规则，若相关元素满足命题，则新元素也满足命题
- 结构归纳法的有效性源于自然数上的数学归纳法
 - 第0步（基础步骤），...



结构归纳法（举例）

- $l(xy) = l(x) + l(y)$, x 和 y 属于 Σ^* 。
- 证明
 - 设 $P(y)$ 表示：每当 x 属于 Σ^* ，就有 $l(xy) = l(x) + l(y)$ 。
 - 基础步骤：每当 x 属于 Σ^* ，就有 $l(x\lambda) = l(x) + l(\lambda)$ 。
 - 递归步骤：假设 $P(y)$ 为真， a 属于 Σ , 要证 $P(ya)$ 为真。
 - 即：每当 x 属于 Σ^* ，就有 $l(xya) = l(x) + l(ya)$
 - $P(y)$ 为真， $l(xy) = l(x) + l(y)$
 - $l(xya) = l(xy) + 1 = l(x) + l(y) + 1 = l(x) + l(ya)$



广义结构归纳法（举例）

- $\mathbf{N \times N}$ 是良序的（字典序）
- 递归定义 $a_{m,n}$
 - $a_{0,0} = 0$
 - $a_{m,n} = a_{m-1,n} + 1 \quad (n=0, m>0)$
 - $a_{m,n} = a_{m,n-1} + n \quad (n>0)$
- 归纳证明 $a_{m,n} = m + n(n+1)/2$

0	1	3
1	2	4
2	3	5



作业

- 教材[4.1, 4.2, 4.3]
 - P209-214: 18, 20, 63, 69 (附加题)
 - P220-223: 7, 12, 30, 36
 - P232-236: 24, 32, 52, 54 (附加题)