2006 年硕士研究生入学考试数学一试题及答案解析

一、**填空题**：1－6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ $\underline{2.}$

【分析】 本题为$\dfrac{0}{0}$未定式极限的求解，利用等价无穷小代换即可.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

（2） 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{y=Cx\mathrm{e}^{-x}(x\neq 0).}$

【分析】 本方程为可分离变量型，先分离变量，然后两边积分即可

【详解】 原方程等价为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $\ln y=\ln x-x+C_1$，整理得

$$y=Cx\mathrm{e}^{-x}.\ （C=\mathrm{e}^{C_1}）$$

（3）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$.

【分析】 本题 Σ 不是封闭曲面，首先想到加一曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}z=1\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$，取上侧，使 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成封闭曲面，然后利用高斯公式转化为三重积分，再用球面（或柱面）坐标进行计算即可.

【详解】 设 Σ_1： $z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{V}6\mathrm{d}v=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=2\pi$，

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$.

（4）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=\underline{\sqrt{2}}$.

【分析】 本题直接利用点到平面距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

进行计算即可. 其中 (x_0,y_0,z_0) 为点的坐标， $Ax+By+Cz+D=0$ 为平面方程.

【详解】 $d=\dfrac{|3\times 2+4\times 1+5\times 0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$.

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$ ，则

$|B|=\underline{\quad 2 \quad}$.

【分析】将矩阵方程改写为 $AX=B$或$XA=B$或$AXB=C$ 的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有

$$B(A-E)=2E$$

于是有 $|B||A-E|=4$，而 $|A-E|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=2$.

（6）设随机变量 X与Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则

$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=\underline{\dfrac{1}{9}}$.

【分析】 利用 X与Y 的独立性及分布计算.

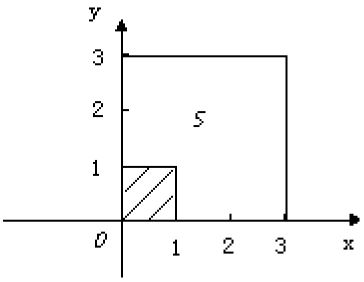
【详解】 由题设知， X与Y 具有相同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$

$$=\left(P\{X\le 1\}\right)^2=\left(\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{9}.$$

【评注】 本题属几何概型，也可如下计算，如下图：



则 $P\left\{\max\left\{X,Y\right\}\le 1\right\}=P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}=\dfrac{S_{阴}}{S}=\dfrac{1}{9}$.

二、选择题：7—14 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy与$\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

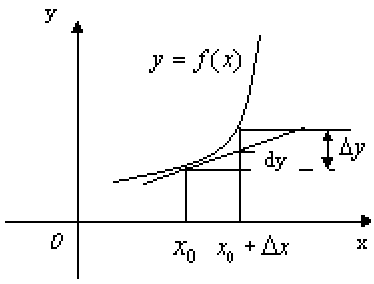
(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$. (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$. [A]

【分析】 题设条件有明显的几何意义，用图示法求解.

【详解】 由 $f'(x)>0, f''(x)>0$ 知，函数 $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 凹向，作函数 $y=f(x)$ 的图形如右图所示，显然当 $\Delta x>0$时，

$\Delta y>\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x>0$，故应选(A).



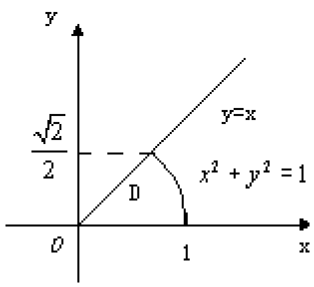
（8）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$. （B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$. (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$. [C]

【分析】 本题首先由题设画出积分区域的图形，然后化为直角坐标系下累次积分即可.

【详解】 由题设可知积分区域 D 如右图所示，显然是 Y 型域，则



$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x .$$

故选（C）.

（9）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛 .　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　[D]

【分析】 可以通过举反例及级数的性质来判定.

【详解】 由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，故应选(D).

或利用排除法:

取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，则可排除选项（A），（B）;

取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则可排除选项（C）.故（D）项正确.

（10）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.　　[D]

【分析】 利用拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0,λ_0)（λ_0 是对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值）取到极值的必要条件即可.

【详解】 作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0，则

$$\begin{cases} F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \end{cases}, \quad 即\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}.$$

消去λ_0，得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

整理得 $f_x'(x_0,y_0)=\dfrac{1}{\varphi_y'(x_0,y_0)}f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)$.（因为$\varphi_y'(x,y)\neq 0$），

若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.故选（D）.

（11）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$为$m\times n$矩阵，下列选项正确的是

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关.

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关.

[C]

【分析】 本题考查向量组的线性相关性问题，利用定义或性质进行判定.

【详解】 记$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=AB$.

所以，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$r(B)<s$，从而$r(AB)\leq r(B)<s$，向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$也线性相关，故应选(A).

（12）设A为3阶矩阵，将A的第2行加到第1行得B，再将B的第1列的-1倍加到第2列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

（A）$C=P^{-1}AP$.　　（B）$C=PAP^{-1}$.

（C）$C=P^{\mathrm{T}}AP$.　　（D）$C=PAP^{\mathrm{T}}$.　　[B]

【分析】 利用矩阵的初等变换与初等矩阵的关系以及初等矩阵的性质可得.

【详解】 由题设可得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A,\qquad C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有 $C=PAP^{-1}$.故应选（B）.

（13）设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$　　[B]

【分析】 利用事件和的运算和条件概率的概念即可.

【详解】 由题设，知 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，即 $P(AB)=P(A)$.

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$.

故应选(C).

（14）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$$

则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$　　[D]

【分析】 利用标准正态分布密度曲线的几何意义可得.

【详解】 由题设可得

$$P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\},$$

则 $2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)-1$，即 $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$.

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

又 $\Phi(x)$ 是单调不减函数，则 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1<\sigma_2$.

故选(A).

三 、解答题：15－23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

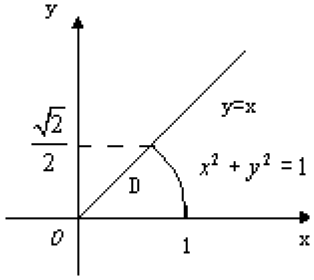
设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$， 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

【分析】 由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下累次积分即可.

【详解】 积分区域 D 如右图所示.因为区域 D 关于 x 轴对称，

函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，

函数 $g(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数.



则

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

（16）（本题满分 12 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$

（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

（Ⅱ）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】 一般利用单调增加有上界或单调减少有下界数列必有极限的准则来证明数列极限的存在. （Ⅱ）的计算需利用（Ⅰ）的结果.

【详解】 （Ⅰ）因为 $0<x_1<\pi$，则 $0<x_2=\sin x_1\le 1<\pi$.

可推得 $0<x_{n+1}=\sin x_n\le 1<\pi, n=1,2,\cdots$，则数列 $\{x_n\}$ 有界.

于是 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sin x_n}{x_n}<1$，（因当 $x>0$时，$\sin x<x$）， 则有 $x_{n+1}<x_n$，可见数列 $\{x_n\}$ 单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边令 $n\to\infty$，得 $l = \sin l$，解得 $l = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（Ⅱ） 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由（Ⅰ）知该极限为 1^∞ 型，

令 $t = x_n$，则 $n\to\infty, t\to 0$，而

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin t}{t}-1}}\right]^{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{1}},$$

又 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{\sin t}{t}-1\right) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t - t}{t^3} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t - 1}{3t^3} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin t}{6t} = -\dfrac{1}{6}$.

（利用了 $\sin x$ 的麦克劳林展开式）

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

(17)（本题满分 12 分）

将函数 $f(x) = \dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

【分析】 利用常见函数的幂级数展开式.

【详解】 $f(x) = \dfrac{x}{2+x-x^2} = \dfrac{x}{(2-x)(1+x)} = \dfrac{A}{2-x} + \dfrac{B}{1+x}$，

比较两边系数可得 $A = \dfrac{2}{3}, B = -\dfrac{1}{3}$，即 $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2-x} - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}} - \dfrac{1}{1+x}\right)$.

而 $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$，$\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n, x\in(-2,2)$，

故

$$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\frac{1}{2^n}\right)x^n, x\in(-1,1).$$

(18)（本题满分 12 分）

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

（Ⅰ）验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

（Ⅱ）若 $f(1)=0, f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

【分析】 利用复合函数偏导数计算方法求出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 即可得（Ⅰ）. 按常规方法解（Ⅱ）即可.

【详解】 （Ⅰ） 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

将 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$$

（Ⅱ） 令 $f'(u)=p$，则 $p'+\dfrac{p}{u}=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$，两边积分得

$$\ln p=-\ln u+\ln C_1，即\ p=\frac{C_1}{u}，亦即\quad f'(u)=\frac{C_1}{u}.$$

由 $f'(1)=1$ 可得 $C_1=1$.所以有 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，两边积分得

$$f(u)=\ln u+C_2,$$

由 $f(1)=0$ 可得 $C_2=0$，故 $f(u)=\ln u$.

（19）（本题满分 12 分）

设在上半平面 $D=\left\{(x,y)\,|\,y>0\right\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

【分析】 利用曲线积分与路径无关的条件 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

【详解】 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$，则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$. ①

设 $P(x,y)=yf(x,y), Q(x,y)=-xf(x,y)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y).$$

则由①可得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

故由曲线积分与路径无关的定理可知，对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

（20）（本题满分 9 分）

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；

（Ⅱ）求 a,b 的值及方程组的通解.

【分析】 （I）根据系数矩阵的秩与基础解系的关系证明；（II）利用初等变换求矩阵 A 的秩确定参数 a,b，然后解方程组.

【详解】 （I） 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则有　$A(\alpha_1-\alpha_2)=0, A(\alpha_1-\alpha_3)=0$.

则　$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$是对应齐次线性方程组$Ax=0$的解，且线性无关.（否则，易推出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，矛盾）.

所以　$n-r(A)\geq 2$，即$4-r(A)\geq 2\Rightarrow r(A)\leq 2$.

又矩阵A中有一个 2 阶子式$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以$r(A)\leq 2$.

因此　$r(A)=2$.

（II）　因为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 5 & -1\\ a & 1 & 3 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -5\\ 0 & 1-a & 3-a & b-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5\end{pmatrix}.$$

又$r(A)=2$，则

$$\begin{cases}4-2a=0\\ b+4a-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}.$$

对原方程组的增广矩阵$\bar{A}$施行初等行变换，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故原方程组与下面的方程组同解.

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\ x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}.$$

选x_3,x_4为自由变量，则

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\ x_2=x_3-5x_4-3\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\end{cases}.$$

故所求通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}，\ k_1,k_2\text{为任意常数.}$$

（21）（本题满分 9 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T},\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

（Ⅰ） 求 A 的特征值与特征向量；

（Ⅱ） 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

【分析】 由矩阵 A 的各行元素之和均为 3 及矩阵乘法可得矩阵 A 的一个特征值和对应的特征向量；由齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解可知 A 必有零特征值，其非零解是 0 特征值所对应的特征向量.将 A 的线性无关的特征向量正交化可得正交矩阵 Q.

【详解】（Ⅰ） 因为矩阵 A 的各行元素之和均为 3，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则由特征值和特征向量的定义知，$\lambda=3$ 是矩阵 A 的特征值，$\alpha=(1,1,1)^{\mathrm T}$ 是对应的特征向量. 对应 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $k\alpha$，其中 k 为不为零的常数.

又由题设知 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=0$，即 $A\alpha_1=0\cdot\alpha_1,A\alpha_2=0\cdot\alpha_2$，而且 α_1,α_2 线性无关，所以 $\lambda=0$ 是矩阵 A 的二重特征值，α_1,α_2 是其对应的特征向量，对应 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 为不全为零的常数.

（Ⅱ） 因为 A 是实对称矩阵，所以 α 与 α_1,α_2 正交，所以只需将 α_1,α_2 正交.

取 $\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

再将 α,β_1,β_2 单位化，得

$$\eta_1=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$，由 A 是实对称矩阵必可相似对角化，得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\Lambda.$$

（22）（本题满分 9 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\\frac{1}{4},0\le x<2\\0,\quad \text{其他}\end{cases},$$

令 $Y=X^2,F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(Ⅰ) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

(Ⅱ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

【分析】 求一维随机变量函数的概率密度一般先求分布，然后求导得相应的概率密度或利用公式计算.

【详解】 (Ⅰ) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，即 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$，则

1) 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

2) 当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y}.$$

3) 当 $1\le y<4$ 时，$F_Y(y)=P(X^2<y)=P\left(-1<X<\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2}.$$

4) 当 $y\ge4$，$F_Y(y)=1$.

所以

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}},1\le y\le 4\\ 0,\text{其他}\end{cases}.$$

（II） $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)=P\left(X\le -\dfrac{1}{2},Y\le 4\right)=P\left(X\le -\dfrac{1}{2},X^2\le 4\right)$

$$=P\left(X\le -\frac{1}{2},-2\le X\le 2\right)=P\left(-2\le X\le -\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

（23）（**本题满分 9 分**）

设总体 X 的概率密度为

$$f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $\left(0<\theta<1\right)$， $X_1,X_2\dots,X_{\mathrm{n}}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2\dots,x_n$ 中小于 1 的个数，求 θ 的最大似然估计.

【分析】 先写出似然函数，然后用最大似然估计法计算 θ 的最大似然估计.

【详解】 记似然函数为 $L(\theta)$，则

$$L(\theta)=\underbrace{\theta\cdot\theta\cdots\cdots\theta}_{N\text{个}}\underbrace{\left(1-\theta\right)\cdot\left(1-\theta\right)\cdots\cdots\left(1-\theta\right)}_{(n-N)\text{个}}=\theta^N(1-\theta)^{n-N}.$$

两边取对数得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}=0$，解得 $\widehat{\theta}=\dfrac{N}{n}$ 为 θ 的最大似然估计.