离散概率（III）

离散数学课程组

南京大学计算机科学与技术系

回顾

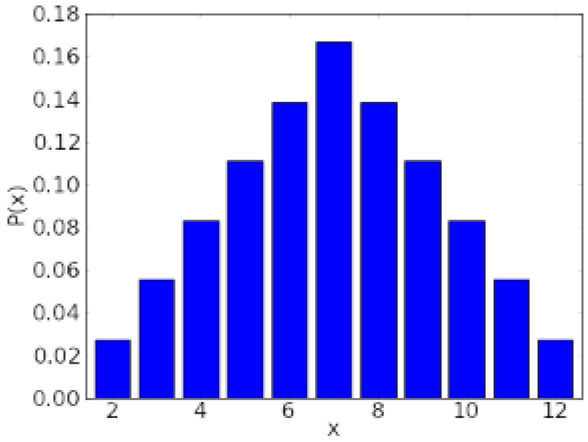
- 离散概率
  - 等可能性事件及其组合的概率
- 概率论
  - 概率指派，条件概率，伯努利试验
  - 随机变量
- 贝叶斯定理
  - 贝叶斯定理
  - 用贝叶斯定理来辨别Spam邮件

提要

- 期望值
  - 定义与计算方法
  - 期望的线性特征
  - 期望的应用：平均计算复杂度
- 方差
  - 定义与计算方法
  - **Bienaymé** 公式 //法国数学家比内梅
  - 估算：切比雪夫不等式 **(Chebyshev's inequality)**

简介

- 如何刻画随机变量取值分布的**整体特征**？
  - “平均”取值？
    - 当以概率加权之
  - “离散”程度？
    - 当以平均取值为基准，考虑偏差程度



期望值

- 期望值
  - Aka
  - 以概

若 S 为一个有限集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n,\}$，则

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)X(x_i)$$

对于定义在样本空间 S 上的一个随机变量 X，其期望值为

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s)$$

$X(s) - E(X)$ 称为 X 在 s 处的偏差 (deviation)。

期望值的直接计算

- 例：求扔一个骰子所得点数的期望值。

$$E(X)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

- 例：扔三个硬币，求头面朝上硬币个数的 期望值。

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{8}[X(HHH)+X(HHT)+X(HTH)+X(THH)+X(TTH)\\&\quad+X(THT)+X(HTT)+X(TTT)]\\&=\frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0)=\frac{12}{8}\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

期望值的计算

- 定理：若 X 为一个随机变量，令 $p(X=r)$ 为 $X=r$ 的概率，即 $\sum_{s\in S,X(s)=r} p(s)$, 则其期望值

$$E(X) = \sum_{r\in X(S)} p(X = r)r$$

证明：根据期望值定义易得。

例：求扔两个骰子所得点数之和的期望值。

$$p(X=2)=p(X=12)=1/36,$$
$$p(X=3)=p(X=11)=2/36=1/18,$$
$$p(X=4)=p(X=10)=3/36=1/12,$$
$$p(X=5)=p(X=9)=4/36=1/9,$$
$$p(X=6)=p(X=8)=5/36,$$
$$p(X=7)=6/36=1/6.$$

$$\begin{aligned}E(X)&=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{1}{6}\\&\quad+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{12}+11\cdot\frac{1}{18}+12\cdot\frac{1}{36}\\&=7.\end{aligned}$$

期望值的计算

- **定理：若某伯努利试验的成功概率为 p，则相互独立的 n 次此种试验中成功次数的期望值为 np。**

证明：

易知成功k次的概率为：

$$p(X=k)=C(n,k)p^kq^{n-k}$$

注：$p+q=1$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kp(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)p^kq^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nC(n-1,k-1)p^kq^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} C(n-1,k-1)p^{k-1}q^{n-k} \\
&= np\sum_{j=0}^{n-1} C(n-1,j)p^jq^{n-1-j} \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np.
\end{aligned}$$

期望的线性特性

- 定理：对于样本空间 S 上的一组任意的随机变量 X_i，（$i=1,2,\ldots,n$）和任意实数 a, b，有
  - $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$
  - $E(aX + b) = aE(X) + b$
- 证明：（思路）

$E($

这里我们没有要求各个随机变量相互独立!

$s \in S$ $s \in S$

$$= E(X_1) + E(X_2).$$

例：求扔两个骰子所得点数之和的期望值

- 由上述定理可知，扔两个骰子所得点数之和的期望值等于第一个骰子点数期望值与第二个骰子点数期望值之和，即 $7/2 + 7/2 = 7$.

例：未必相互独立的n次伯努利试验

- **若某伯努利试验的成功概率为 *p*，则*n* 次试验中成功次数的期望值为 *np***
- 令

$$X_i((t_1, t_2, \ldots, t_n)) = 1 \quad \text{若 } t_i \text{ 成功}$$

$$X_i((t_1, t_2, \ldots, t_n)) = 0 \quad \text{若 } t_i \text{ 失败}$$

由于 $E(X_i) = 1p + 0(1 - p) = p$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

例：Expected Value in the Hatcheck Problem

- 负责寄存帽子的服务生把帽子搞乱了，只能随机发还。可以期望还对几个？
  - 令X_i=1；若第 *i* 个客人拿到他的帽子；否则=0。

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$E(X_i) = 1 \cdot p(X_i = 1) + 0 \cdot p(X_i = 0) = 1 \cdot 1/n + 0 = 1/n$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot 1/n = 1$$

用期望来计算平均计算复杂度

- 例：线性搜索算法的平均复杂度
  - 给定一个实数 x 及一个长度为 n 的列表，线性搜索算法依次检查列表中的元素，看是否为 x，直至找到或者所有元素都查完了而未找到 x。

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{3p}{n} + \frac{5p}{n} + \cdots + \frac{(2n+1)p}{n} + (2n+2)q \\
&= \frac{p}{n}(3+5+\cdots+(2n+1)) + (2n+2)q \\
&= \frac{p}{n}((n+1)^2-1) + (2n+2)q \\
&= p(n+2) + (2n+2)q.
\end{aligned}
$$

p 为 x 在列表中的概率
$q = 1-p$

几何分布

- 例：设扔某硬币头面朝上的概率为 p 。

  现扔此硬币直至出现头面朝上, 期望扔几次?

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p(X=j) = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} p$$

$$= p \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = p \cdot$$

几何分布（Geometric distribution）指的是在伯努利试验中，得到一次成功所需要的试验次数 X 。X 的值域是{ 1, 2, 3, ... }

随机变量 X has a **geometric distribution** with parameter p

独立随机变量

- 样本空间 S 上的随机变量 X 和 Y 若满足

$$p(X = r_1 \text{ 且 } Y = r_2) = p(X = r_1) \bullet p(Y = r_2)$$

则称它们相互独立。

- 例：扔两个骰子，第一个骰子点数与第二个骰子点数二者是否独立?
- 例：扔两个骰子，第一个骰子点数与两个骰子点数之和二者是否独立?

独立随机变量

对于样本空间 ***S*** 上

独立的随机变量 ***X***

和 ***Y*** 有

***E*(*XY*) = *E*(*X*)*E*(*Y*)**

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{r\in XY(S)} r\cdot p(XY=r) \\
&= \sum_{r_1\in X(S),r_2\in Y(S)} r_1r_2\cdot p(X=r_1 \text{ and } Y=r_2) \\
&= \sum_{r_1\in X(S)}\sum_{r_2\in Y(S)} r_1r_2\cdot p(X=r_1 \text{ and } Y=r_2) \\
&= \sum_{r_1\in X(S)}\sum_{r_2\in Y(S)} r_1r_2\cdot p(X=r_1)\cdot p(Y=r_2) \\
&= \sum_{r_1\in X(S)} \Big(r_1\cdot p(X=r_1)\cdot \sum_{r_2\in Y(S)} r_2\cdot p(Y=r_2)\Big) \\
&= \sum_{r_1\in X(S)} r_1\cdot p(X=r_1)\cdot E(Y) \\
&= E(Y)\Big(\sum_{r_1\in X(S)} r_1\cdot p(X=r_1)\Big) \\
&= E(Y)E(X)
\end{aligned}
$$

方差

- 样本空间 S 上的随机变量 X 的**方差**(variance), 记作 $V(X)$，定义为

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 p(s)$$

  - 方差是变量 X 在 s 处的偏差的平方的加权平均。
  - $\sqrt{V(X)}$ 称为 X 的**标准差**(standard deviation)，记为 $\sigma(X)$.

方差

- 定理：样本空间 S 上的随机变量 X 的方差

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- 证明：

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{s\in S}(X(s) - E(X))^2 p(s) \\ &= \sum_{s\in S} X(s)^2 p(s) - 2E(X)\sum_{s\in S} X(s)p(s) + E(X)^2 \sum_{s\in S} p(s) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

方差

- 推论：样本空间 S 上的随机变量 X 的方差

$$V(X) = E((X-\mu)^2)$$

其中$\mu = E(X)$为 X 的期望值。

- 例：定义随机变量 X=1 若某伯努利实验结果为成功，否则为0；则有

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$$
$$= p(1-p) = pq$$

其中 p 为成功概率，q=1-p

方差

- 例：扔一个骰子点数的方差

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$= \frac{35}{12}$$

Bienaymé's formula

- 对于样本空间 S 上独立的随机变量 X 和 Y 有

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

并可推广至n个两两相互独立的随机变量

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

Bienaymé's formula

- 例：求扔两个骰子点数之和的方差
  - 第一个骰子点数与第二个骰子点数两个随机变量相互独立；故可使用Bienaymé公式。

$$V(X)=V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}$$

Bienaymé's formula

- 例：n次相互独立的伯努力试验中成功次数的方差

$$V(X) = npq$$

切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)

- 对于样本空间 S 上随机变量 X,和任意的正实数 r 有

$$p(|X(s)-E(X)|\geq r)\leq \frac{V(X)}{r^2}$$

利用切比雪夫不等式进行概率估算

- 例：已知正常男性成人每毫升血液中白细胞数目的平均值是7300，标准差是700。试利用切比雪夫不等式估算每毫升血液含白细胞数在5200-9400之间的概率。
- 解：设X表示每毫升血液中白细胞个数，则

$$E(X) = 7300, \qquad V(X) = \sigma^2 = 700^2$$

而 $p(5200 \le X \le 9400) = p(|X - 7300| \le 2100)$

$$= 1 - p(|X - 7300| \ge 2100)$$

又 $p(|X - 7300| \ge 2100) \le \dfrac{700^2}{2100^2} = \dfrac{1}{9}$

故 $p(5200 \le X \le 9400) \ge \dfrac{8}{9}$

小结

- 期望值
  - 定义与计算方法
  - 期望的线性特征
  - 期望的应用：平均计算复杂度
- 方差
  - 定义与计算方法
  - Bienaymé公式
  - 估算：切比雪夫不等式

作业

- 教材[6.3]
  - p. 336-337: 7, 13, 21, 23, 24, 27, 29, 31,32