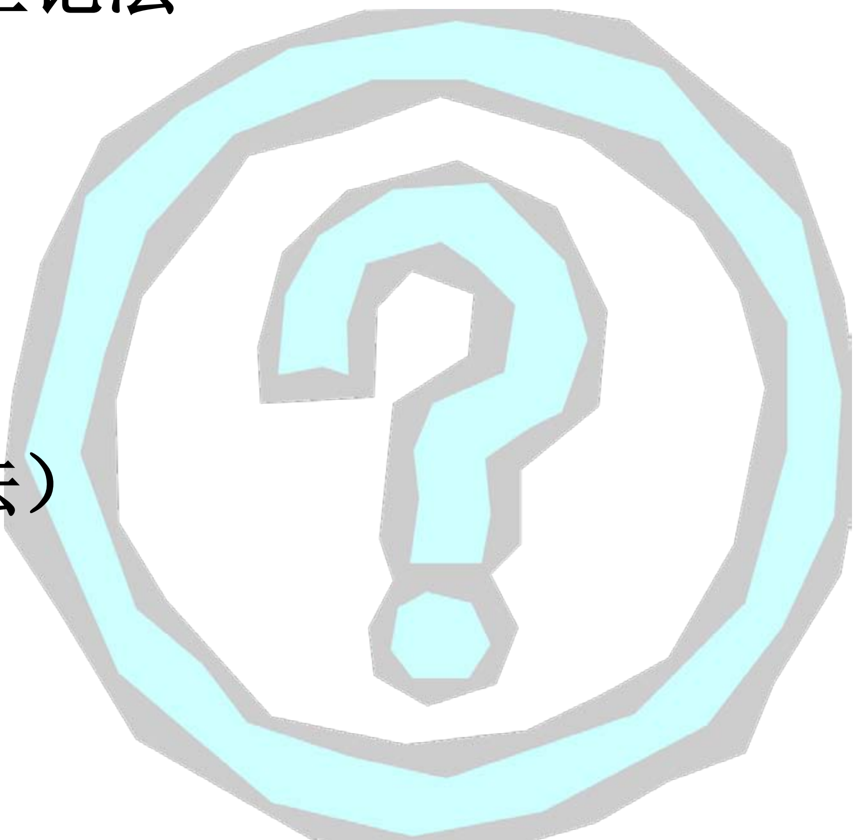
树的应用

离散数学—树

南京大学计算机科学与技术系

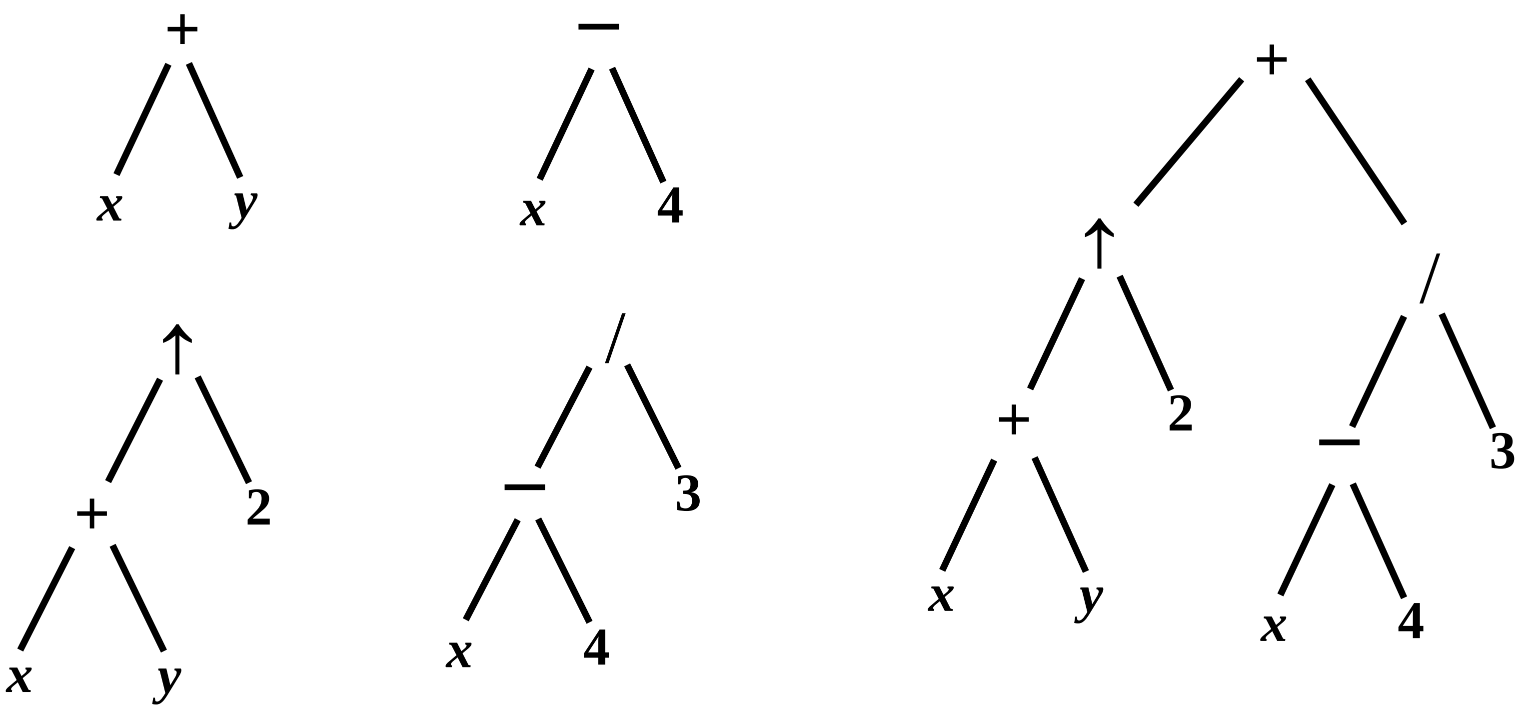
内容提要

- 表达式的（逆）波兰记法
- 二叉搜索树
- 决策树
- 前缀码
- **Huffman编码（算法）**



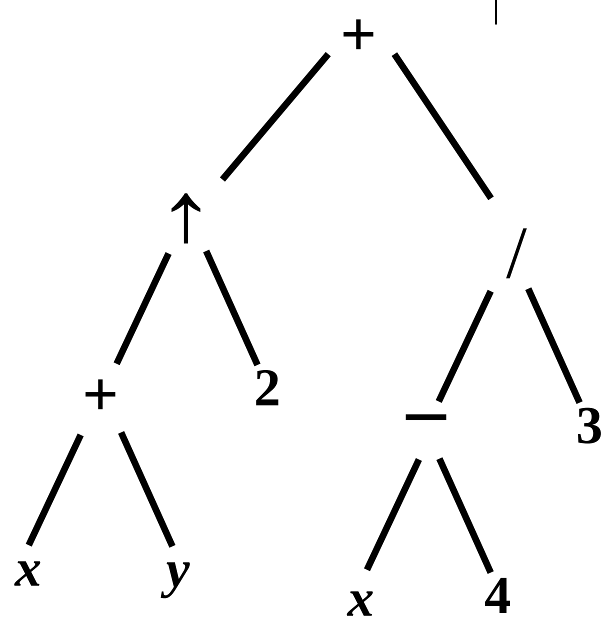
表达式的根树表示

- 用根树表示表达式：内点对应于运算符，树叶对应于运算分量。
- 举例：**((x+y)↑2+ ((x-4)/3)**



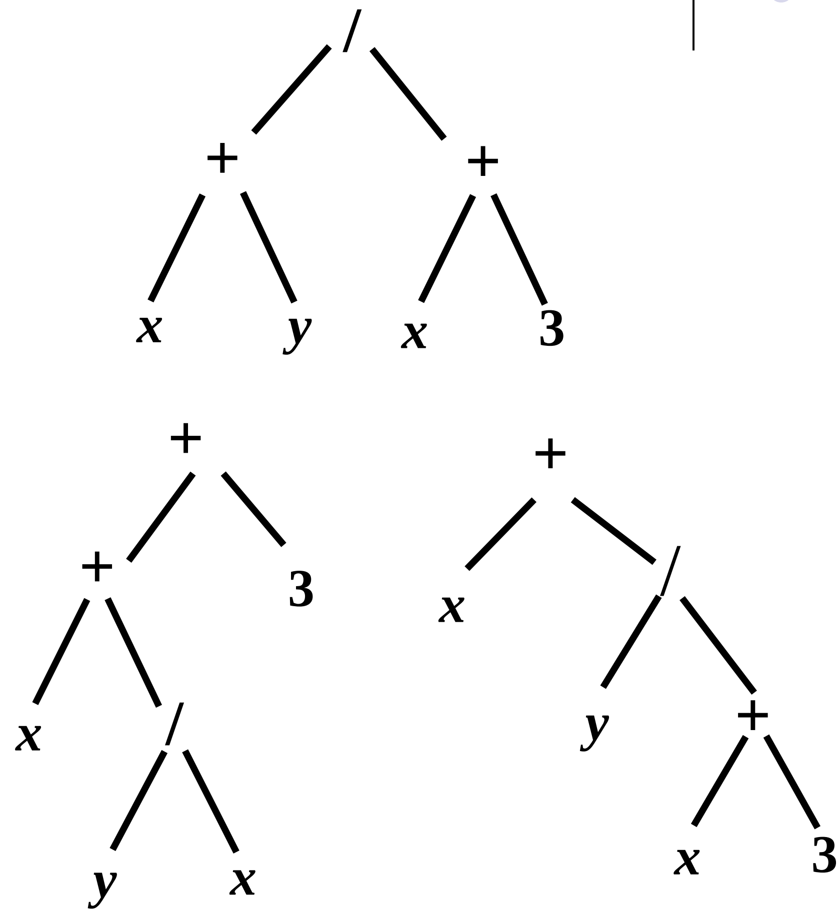
表达式的（逆）波兰表示法

- $(x+y)\uparrow 2+((x-4)/3)$
- 前缀形式（波兰表示法）
  - $+\uparrow +xy2\ /-x4\ 3$
- 后缀形式（逆波兰表示法）
  - $xy+2\uparrow\ x4-\ 3/+$
- 中缀形式
  - $x+y\uparrow 2+\ x-4/3$



中缀表示法的缺陷

- 中缀形式：$x+y/x+3$
  - 有3种解释:
  - $(x+y)/(x+3)$
  - $x+y/x+3$
  - $x+y/(x+3)$

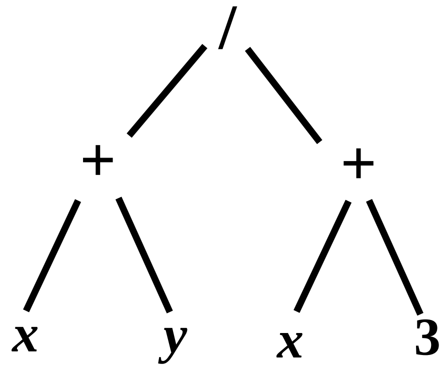


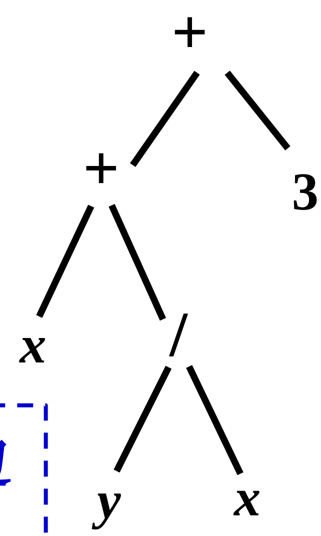
不同的根树有相同的中缀形式。

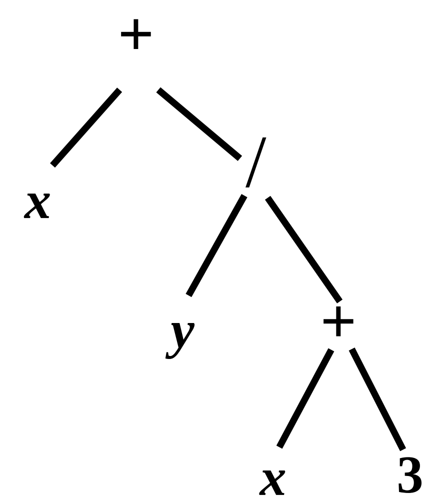
前缀与后缀则有一定的唯一性。(p. 565: 26-27)

前缀表示法（波兰表示法）

- $(x+y)/(x+3)$
  - $/+xy+x3$
- $x+y/x+3$
  - $++x/yx3$
- $x+y/(x+3)$
  - $+x/y+x3$





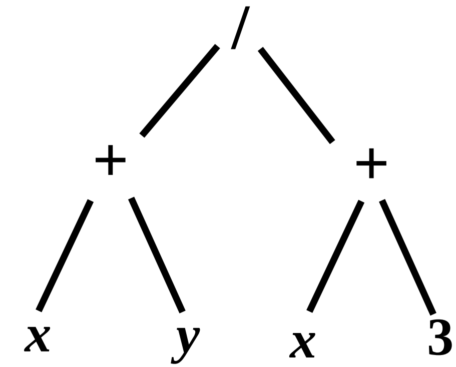


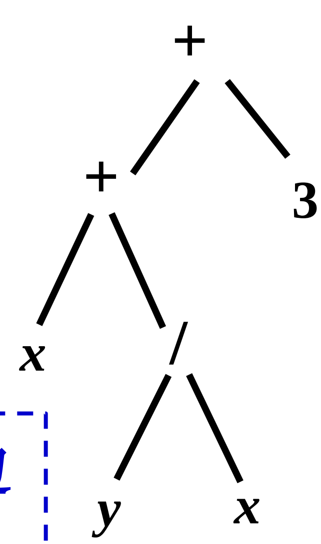
从右向左，遇到运算符，对右边紧接着的2个运算对象进行运算

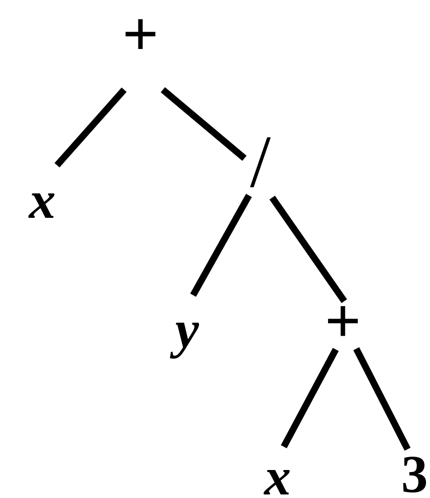
后缀表示法（逆波兰表示法）

- $(x+y)/(x+3)$
  - $xy+x3+/$
- $x+y/x+3$
  - $xyx/+3+$
- $x+y/(x+3)$
  - $xyx3+/+$

从左向右，遇到运算符，对左边紧接着的2个运算对象进行运算

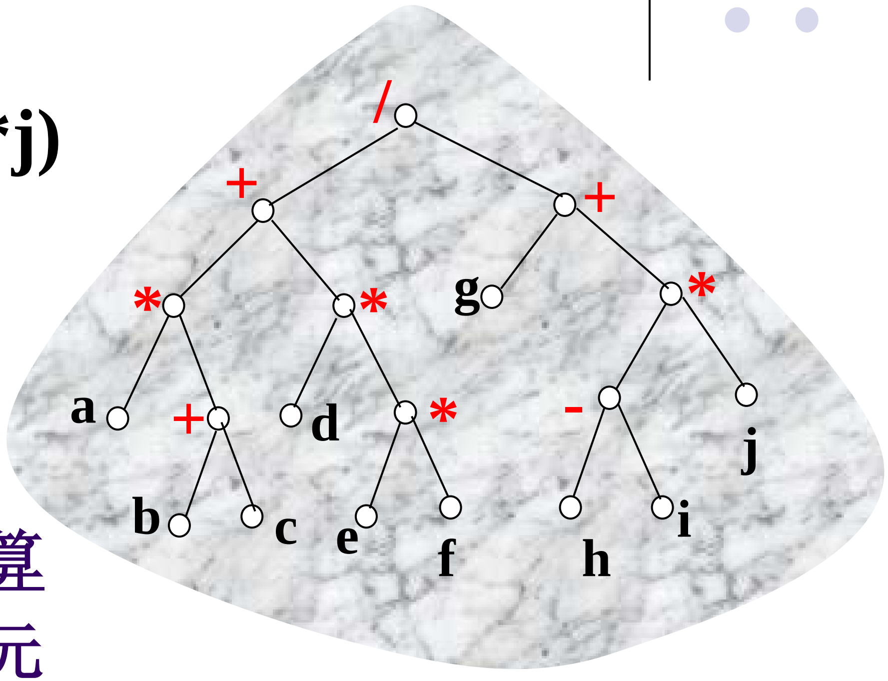






后缀表示法（逆波兰表示法）

- **(a*(b+c)+d*(e*f))/(g+(h-i)*j)**
- 逆波兰表示：
  - **abc+*def**+ghi-j*+/**



从左往右，遇到运算符，根据<u>运算符所需运算分量个数</u>确定前面的元素作为运算分量。

不需要括弧唯一地表示计算顺序。

后缀表达式求值

7 2 3 * - 4 ↑ 9 3 / +

7 6 - 4 ↑ 9 3 / +

1 4 ↑ 9 3 / +

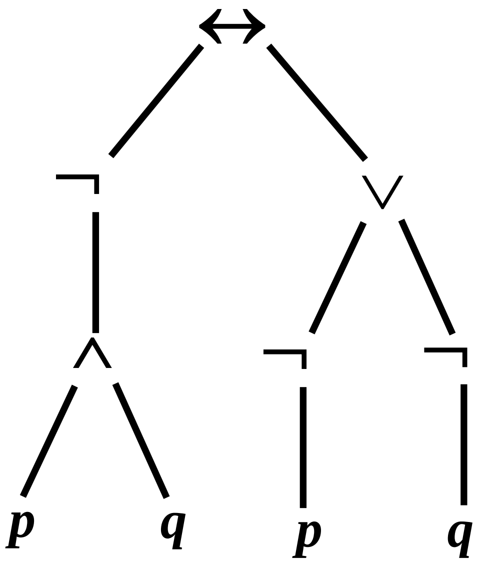
1 9 3 / +

1 3 +

4

复合命题的根树表示

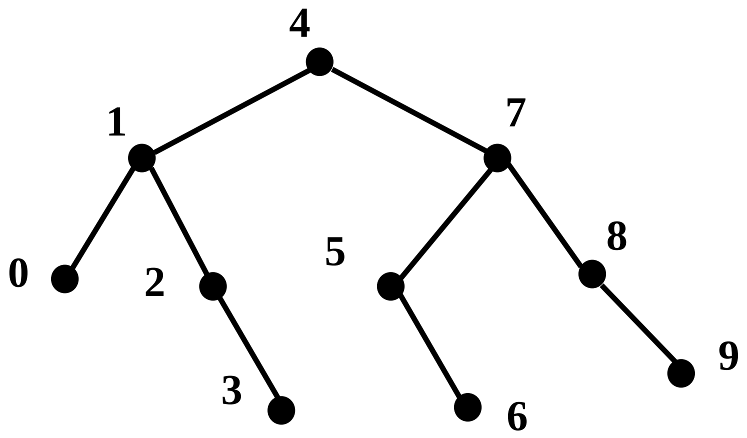
命题：$(\neg(p\wedge q)) \leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)$



后缀形式：$pq\wedge\neg p\neg q\neg\vee\leftrightarrow$

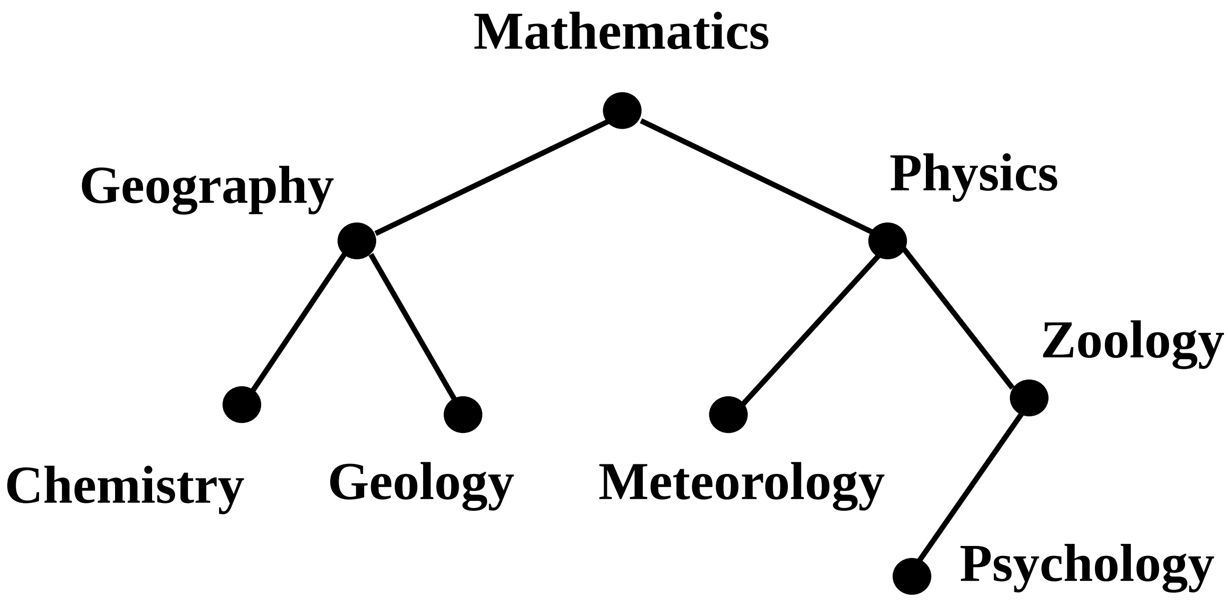
二叉搜索树

- 二叉搜索树满足下列条件
  - 二叉树，各顶点的子女非左即右，左或右都不超过一个。
  - 每个顶点有一个唯一的标号，该标号取自一个全序集。
  - 若*u*是树中任意的顶点，则：
    - *u* 的左子树中任意顶点的标号小于*u* 的标号。
    - *u* 的右子树中任意顶点的标号大于*u* 的标号。



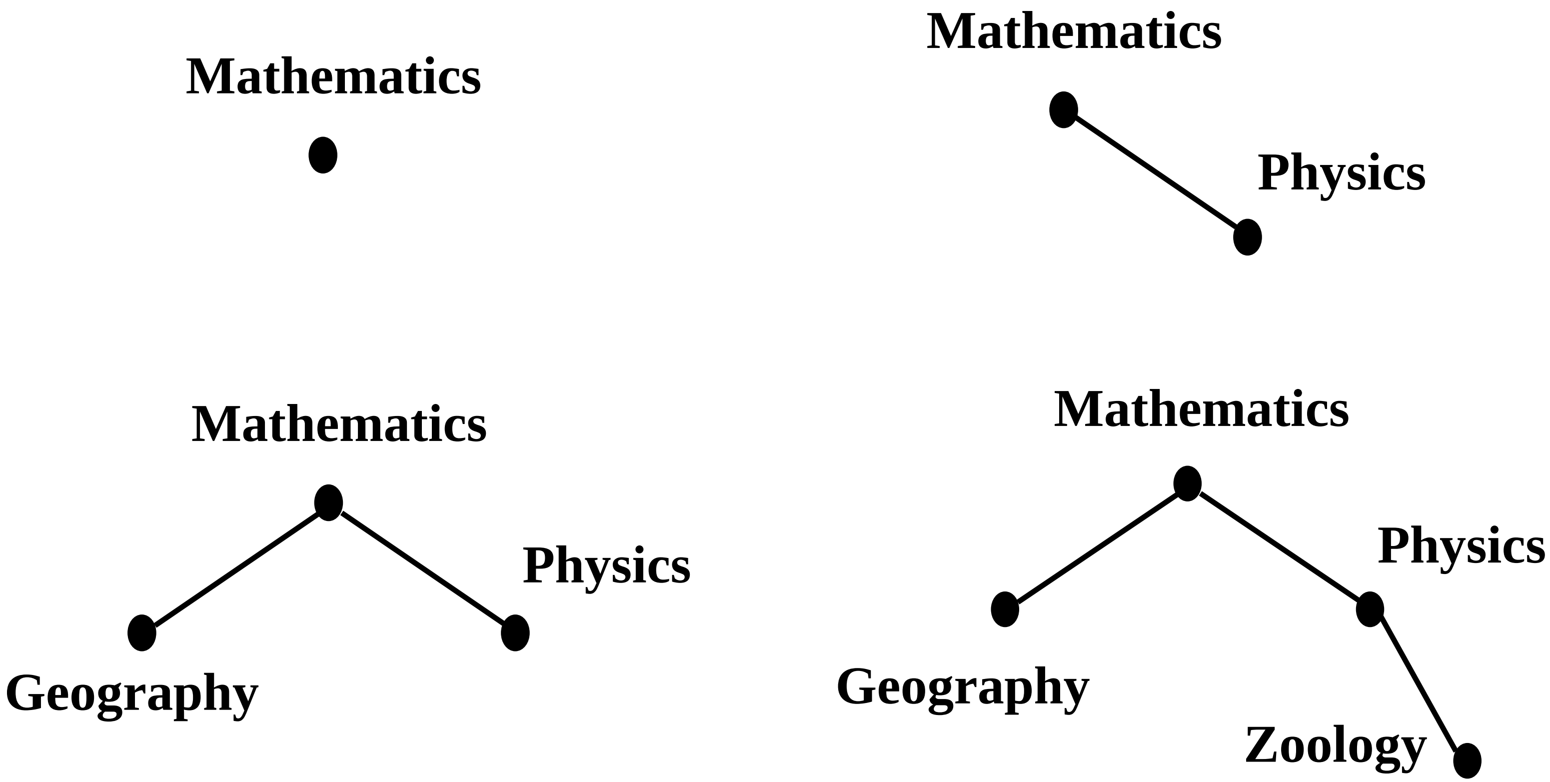
构造二叉搜索树（举例）

mathematics, physics, geography, zoology, meteorology, geology, psychology, chemistry



构造二叉搜索树（举例）

mathematics, physics, geography, zoology, …



二叉搜索树算法

Procedure insertion(T: binary search tree, *x*:item) //定位或添加

v:=root of T //*v*可能为null

if *v*=null **then** add a vertex to the tree and label it with *x*

while *v* !=null and label(*v*) != *x* **{**

if *x* < label(*v*) **then**

if left child of *v* !=null then *v*:= left child of *v*

else add *new vertex* as a left child of *v* and set *v*:=null

else

if right child of *v* !=null then *v*:= right child of *v*

else add *new vertex* as a right child of *v* and set *v*:=null

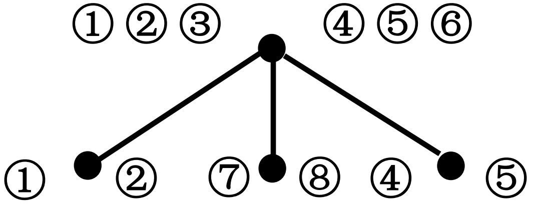
}

if *v* is null **then** label *new vertex* with *x* and let *v* be this *new vertex*

return *v*

决策树

- 这样的根树，每个内点对应一次决策，子树对应于该决策的后果。根到树叶的通路为一个解。
- 举例：8枚硬币，其中7个等重，一个重量较轻的是伪币，使用天平找出伪币，至少多少次称重？
  - 3元树，至少2次称重才能确保找到。



决策树

- 以决策树为模型，排序算法最坏情形复杂性的下界。
- 基于二叉比较的排序算法至少需要$\lceil \log n! \rceil$次比较。
  - n！个树叶，其二叉树的高度至少为$\lceil \log n! \rceil$
  - $\Omega(n \log n)$

编码

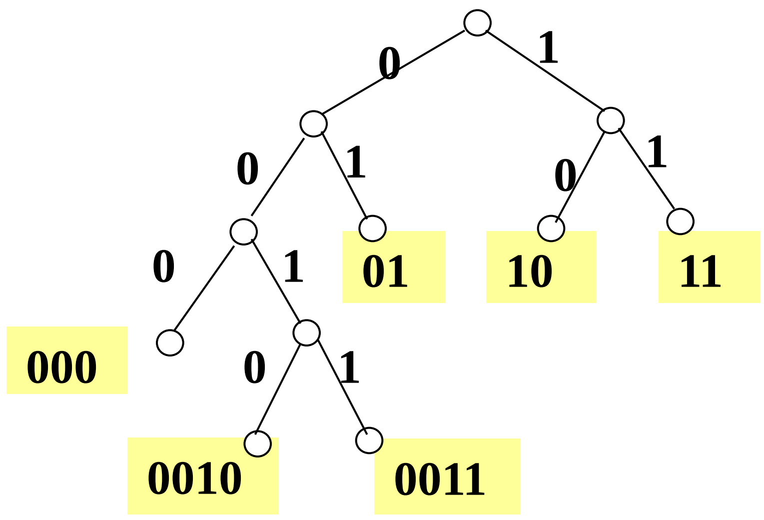
- 如何从信号流中识别字符
  - 等长度编码 vs. 不等长度编码
- 例子：对包含{a(45),b(13),c(12),d(16),e(9),f(5)}6个字符的10万个字符的数据文件编码，每个字符后面的数字表示该字符出现的频率(%)。
  - 编码方案一：a(000), b(001), c(010), d(011), e(100), f(101); 则文件总长度30万字位。
  - 编码方案二：a(0), b(101), c(100), d(111), e(1101), f(1100); 则文件总长度22.4万字位，空间节省四分之一。

不等长编码的分隔

- 如何从信号流中识别不等长编码表示的字符
  - 显式表示长度：专用位或特定结束信号
  - 匹配的唯一性（比如，前缀码）
- 如果符号串α可以表示成符号串β_1和β_2的并置，则β_1称为α的一个前缀。(注意：β_1和β_2可以是空串。)
- 设$A=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$是符号串的集合，且对任意$\beta_i,\beta_j \in A$，若$i \neq j$，$\beta_i$与$\beta_j$互不为前缀，则称A为前缀码。
- 若A中的任意串β_i只含符号0, 1, 则称A是二元前缀码。

用二叉树生成二元前缀码

- 生成方法
  - 给边标号：对内点，对其出边标上号，左为0，右为1。
  - 给叶编号：从根到每个树叶存在唯一的通路，构成该通路的边的标号依次并置，所得作为该树叶的编号。
- 给定一棵完全二叉树，可以产生唯一的二元前缀码。

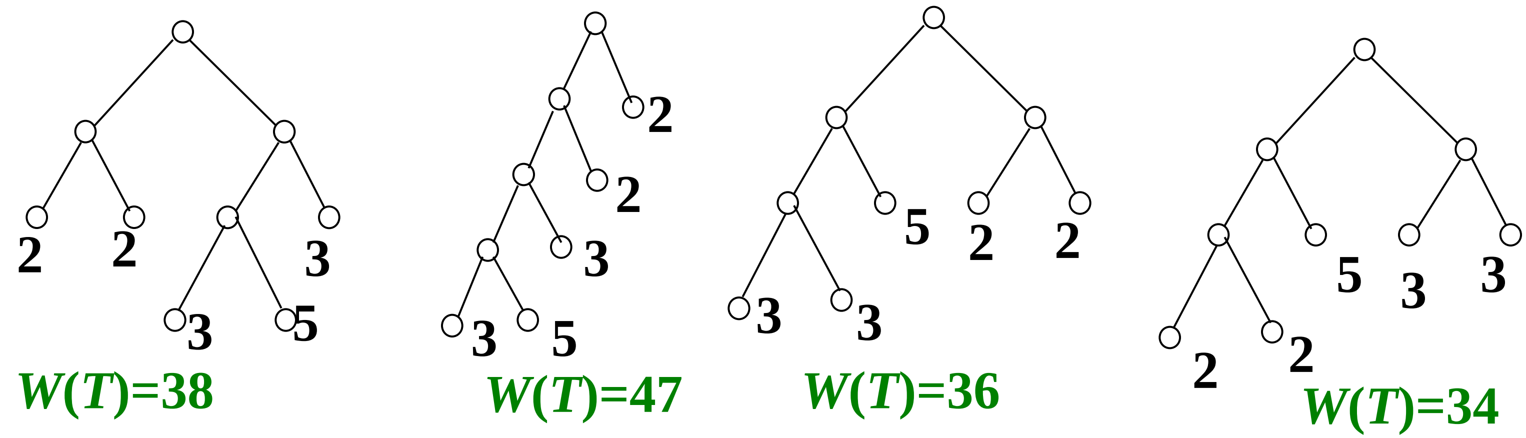


最优前缀码

- 问题：二进前缀码A={β_1,β_2,…,β_m}表示m个不同的字母，如果各字母使用频率不同，如何设计编码方案可以使总传输量最少。
- 基本思想：使用频率高的字母用尽量短的符号串表示。
- 问题的解：若用频率(相对值)作为树叶的权，最佳二元前缀码对应的二叉树应该是最优二叉树。

最优二叉树

- 若T是二叉树，且每个叶$v_1,v_2,\ldots,v_t$带数值权$w_1,w_2,\ldots w_t$，则二叉树T的权$W(T)$定义为： $\Sigma^{t}_{i=1} w_i l(v_i)$，其中：$l(v_i)$表示$v_i$的层数。
- 具有相同权序列的二叉树中权最小的一棵树称为最优二叉树。



注意：最优二叉树一定是完全二叉树（t≥2）

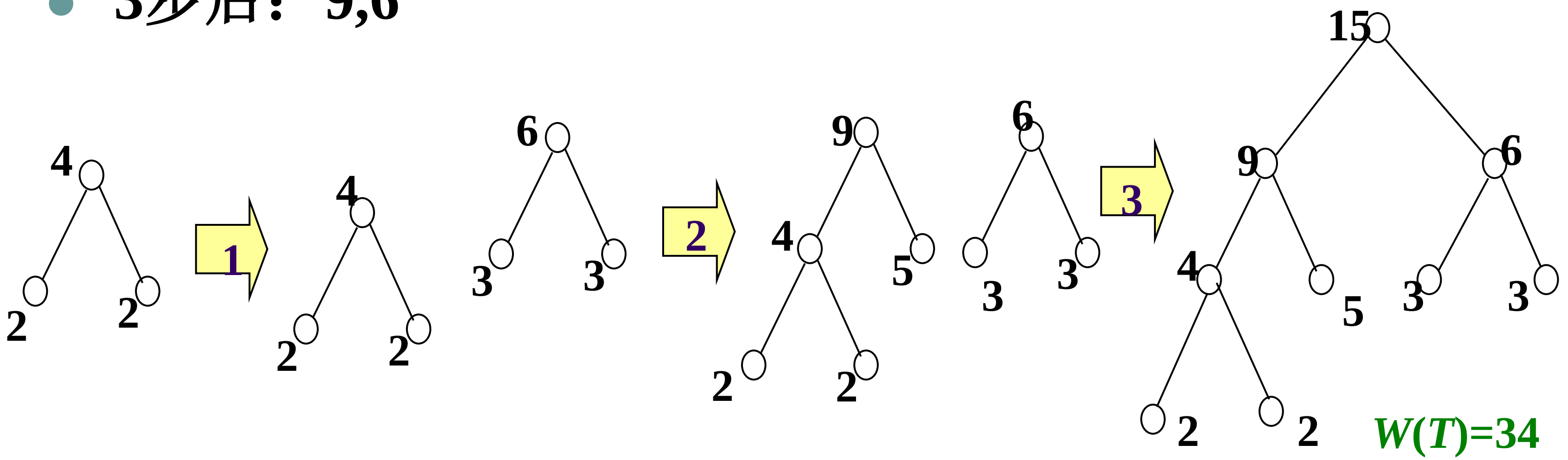
Huffman编码（算法）

- 输入：正实数序列$w_1,w_2,\ldots,w_t$。
- 输出：具有t个树叶，其权序列为$w_1,w_2,\ldots,w_t$的最优二叉树。
- 过程：
  - T棵根树（森林），其根的权分别是$w_1,w_2,\ldots,w_t$。
  - 选择根权最小的两棵树，以它们为左、右子树（合并）生成新的二叉树，其根权等于2棵子树的根权之和。
  - 重复第2步，直至形成一棵树。

注意：结果可能不唯一(如果“当前”权最小顶点对不唯一)。

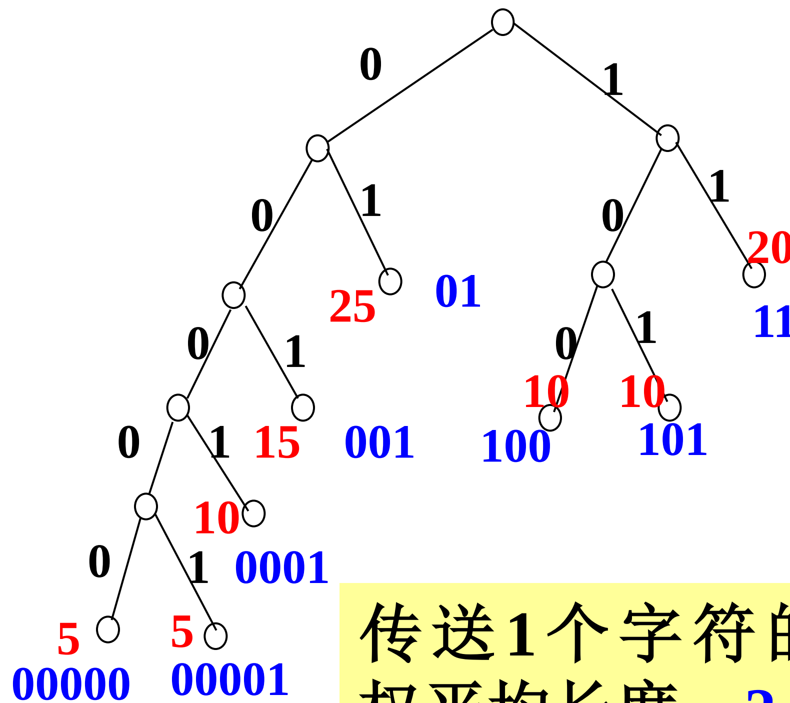
Huffman编码（算法）：举例

- 例子：开始序列：2,2,3,3,5
  - 1步后：4,3,3,5
  - 2步后：4,6,5
  - 3步后：9,6



一个应用示例

- 八个字符的传输问题
  - 假设八个字符的频率如下：
    - **0：25%　1: 20%**
    - **2: 15%　3: 10%**
    - **4: 10%　5: 10%**
    - **6: 5%　7: 5%**
  - 则对应的权为：
    - **5,5,10,10,10,15,20,25**



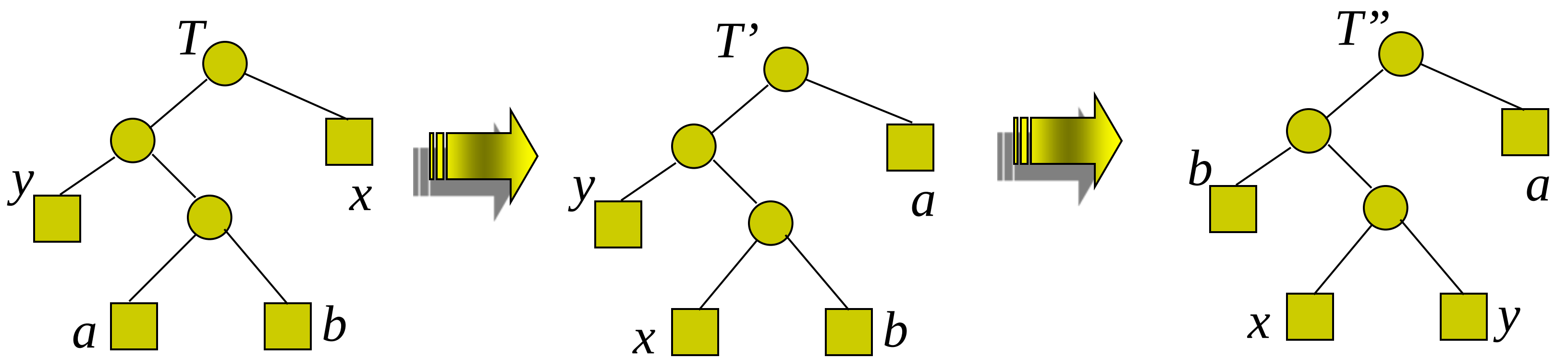
传送1个字符的加权平均长度：2.85

作业

- 教材[10.2, 10.3]
  - p.551: 5, 8, 24, 26
  - p.564: 22, 23, 24

Huffman算法的正确性

设*C*是字母表，其中每个字符*c*的频率为***f*** **[*c*]**。若***x*,*y***是两个频率最小的字符，则必存在*C*的一种最优前缀码，使得***x*,*y***的编码仅有最后一位不同。



***T*为任意最优前缀码**

在上图的变换中，二叉树的权保持不变，即：$W(T) \geq W(T') \geq W(T'') \geq W(T)$

保持权不变的变换

不妨假设$f[a]\le f[b], f[x]\le f[y]$; 于是$f[x]\le f[a], f[y]\le f[b]$

$$W(T)-W(T')=\sum_{c\in C} f(c)d_T(c)-\sum_{c\in C} f(c)d_{T'}(c)$$

$$= f[x]d_T(x)+f[a]d_T(a)-f[x]d_{T'}(x)-f[a]d_{T'}(a)$$

$$= f[x]d_T(x)+f[a]d_T(a)-f[x]d_T(a)-f[a]d_T(x)$$

$$=(f[a]-f[x])(d_T(a)-d_T(x))\ge 0$$

$\therefore W(T)\ge W(T')$; 同理, $W(T')\ge W(T'')$; 但$W(T)$最小

$\therefore W(T)=W(T')=W(T'')$

Huffman算法的正确性（续）

***C*是字母表，*f* [*c*]为字符*c*的频率，*x*,*y*是两个频率最小的字符。令 *C'*=*C*-{*x*,*y*}∪{*z*}, *f* [*z*]=*f* [*x*]+*f* [*y*], 若*T* '是*C'*的最优二叉树，则将顶点*z*替换为分支点，并以*x*,*y*为其子女，所得*T*是*C*的一棵最优二叉树。**

$d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) + 1,$

因此, $f[x]d_T(x) + f[y]d_T(y) = (f[x] + f[y])(d_{T'}(z) + 1)$

$= f[z]d_{T'}(z) + (f[x] + f[y])$

于是, $\mathrm{W}(T) = W(T') + (f[x] + f[y])$

如果存在T''满足$W(T'') < W(T)$, 不失一般性, x与y在T''中为siblings.

将x, y连同它们的父结点替换为一叶结点z, 并令$f[z] = f[x] + f[y]$,

设得到的新树为T''', 则:

$W(T''') = W(T'') - f[x] - f[y] < W(T) - f[x] - f[y] = W(T')$, 矛盾。