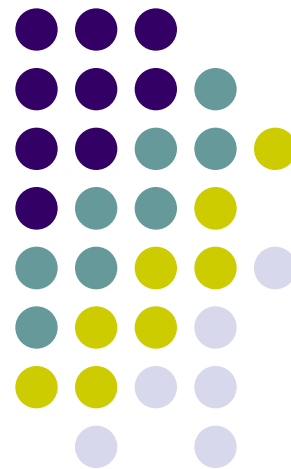


函数及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系





内容提要

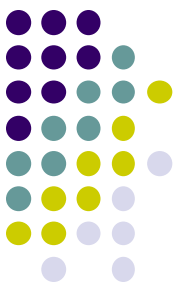
- 函数的定义
- 子集的像
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的复合
- 函数加法与乘法





函数(function)的定义

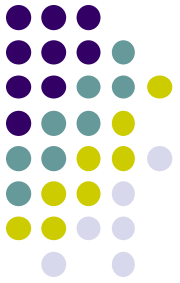
- 设A和B为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 $f:A \rightarrow B$ 。
- f 的定义域(domain)是A
- f 的伴域(codomain)是B
- 如果 f 为A中元素 a 指派的B中元素为 b ，就写成 $f(a)=b$ 。此时，称 b 是 a 的像，而 a 是 b 的一个原像。
- A中元素的像构成的集合称为 f 的值域（ f 的像）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)



函数(function)的定义

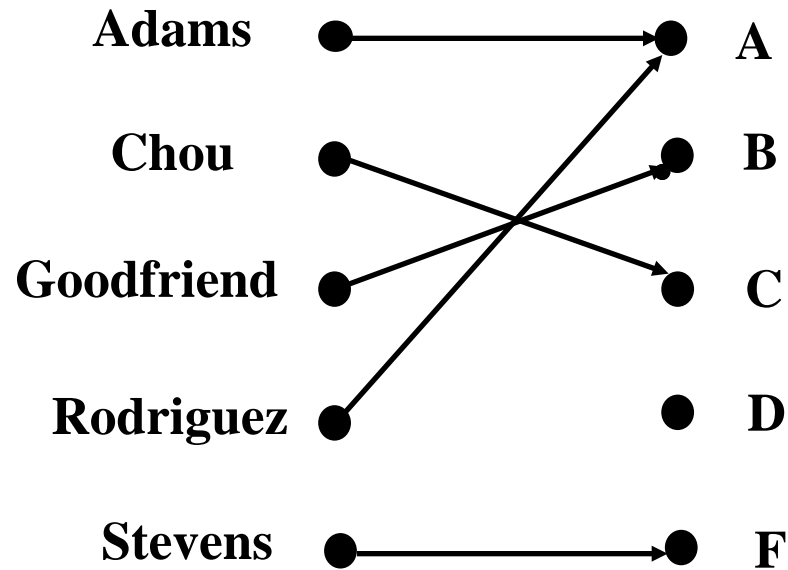
- 备注

- 函数在其定义域中的每个元素都有唯一的取值
- 函数的值域是其伴域的子集
- 函数相等 $f=g$ iff
 - $\text{dom}(f)=\text{dom}(g)$
 - $\forall x(x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$
 - $\text{codom}(f)=\text{codom}(g)$
- 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有 $|B|^{|A|}$ 个。 $(a_1, a_2, \dots, a_{|A|})$ 的像, 均有 $|B|$ 种选择)



函数举例

- 某课程成绩



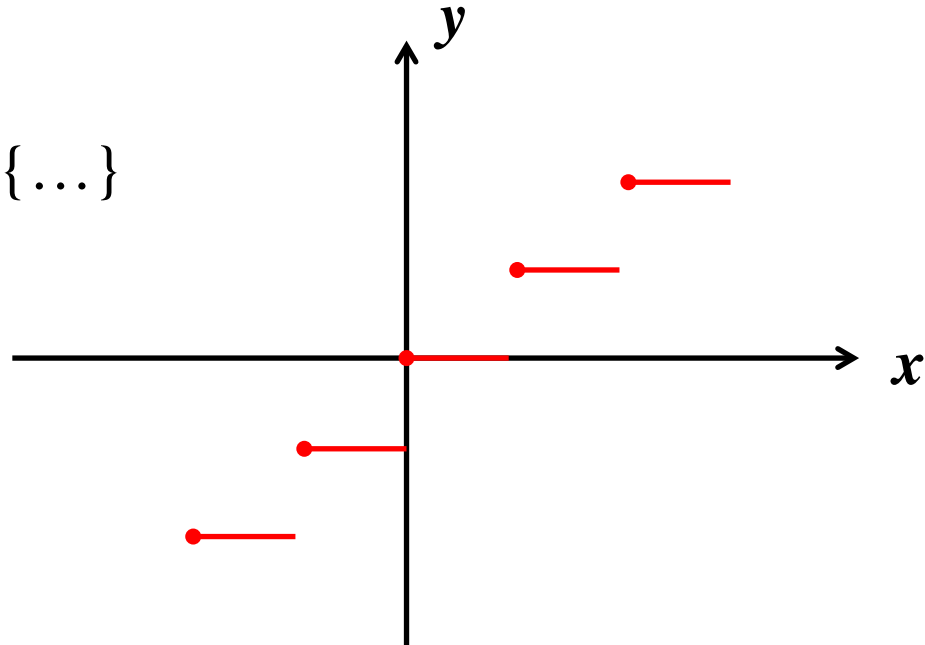


函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$

Java Program

```
int floor(float real) { ... }
```



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathbf{A} \wedge f(a) = b\}$



函数举例

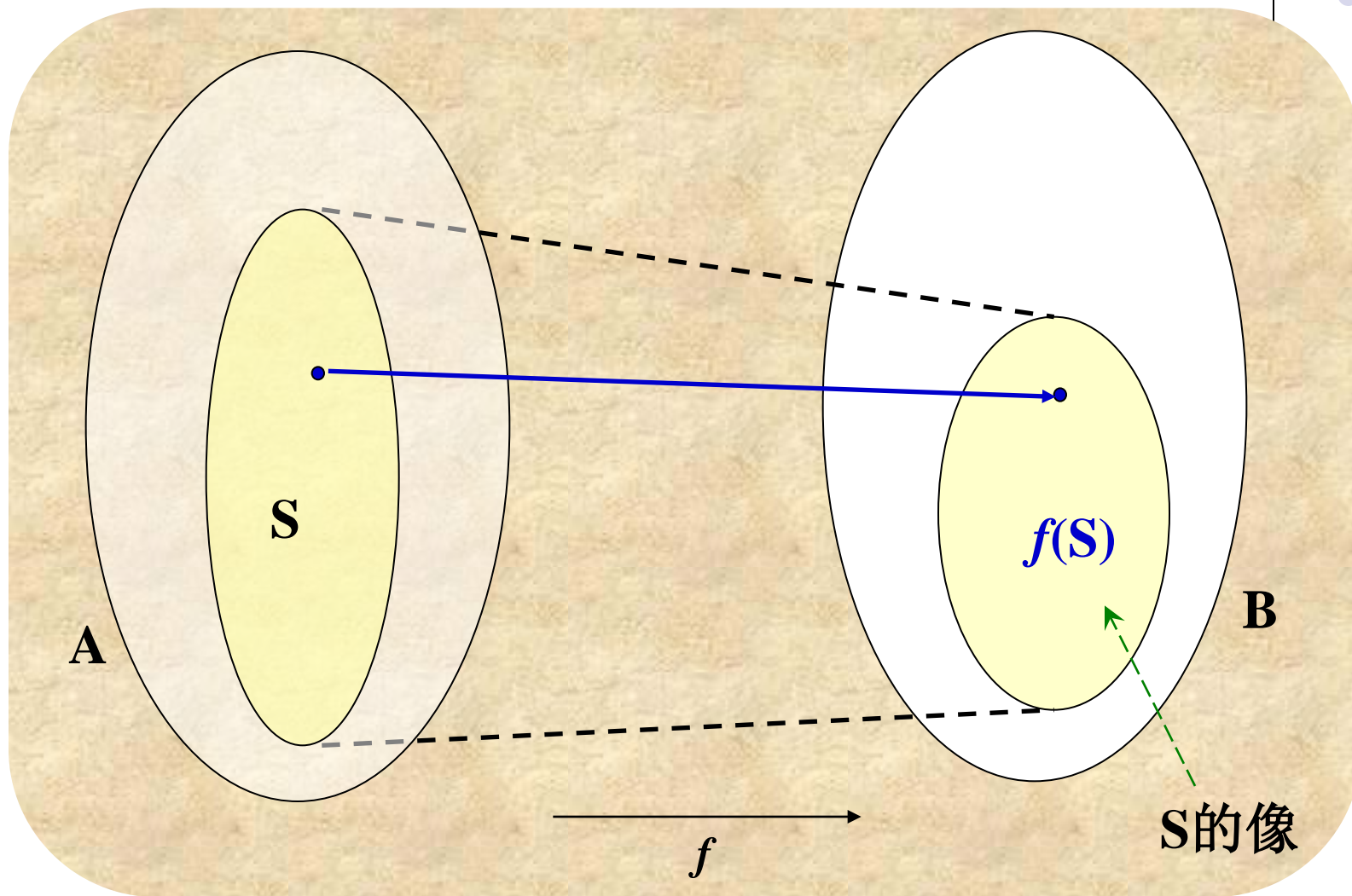
- 设 A 为非空集合， A 上的恒等函数 $\iota_A:A\rightarrow A$ 定义为
 - $\iota_A(x)=x, x\in A$
- 设 U 为非空集合，对任意的 $A\subseteq U$ ，特征函数 $\chi_A:U\rightarrow\{0,1\}$ 定义为：
 - $\chi_A(x)=1, x\in A$
 - $\chi_A(x)=0, x\in U-A$

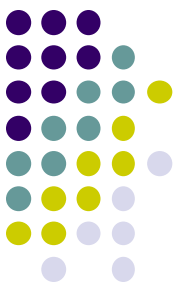


子集在函数下的像

- 设 f 是从集合 A 到 B 的函数， S 是 A 的一个子集。 S 在 f 下的像，记为 $f(S)$ ，定义如下：
 - $f(S) = \{ t \mid \exists s \in S (t = f(s)) \}$
- 备注： $f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像





并集的像

- 设函数 $f: A \rightarrow B$, 且 X, Y 是 A 的子集, 则 $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- 证明:
 - $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X \cup Y)$, 则存在 $s \in X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$; 假设 $s \in X$, 则 $t \in f(X)$, 假设 $s \in Y$, 则 $t \in f(Y)$, $\therefore t \in f(X) \cup f(Y)$
 - $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X) \cup f(Y)$

情况1: $t \in f(X)$, 则存在 $s \in X \subseteq X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$, $\therefore t \in f(X \cup Y)$

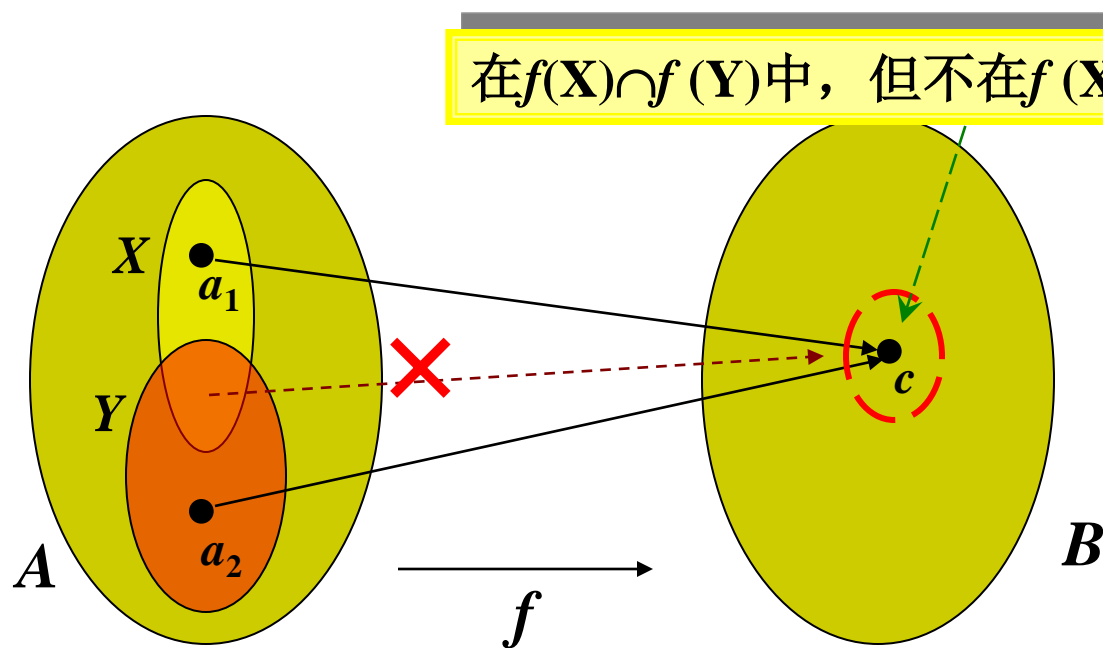
情况2: $t \in f(Y)$, 同样可得 $t \in f(X \cup Y)$

$\therefore t \in f(X \cup Y)$



交集的像

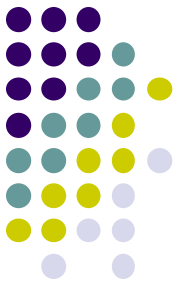
- 设函数 $f: A \rightarrow B$, 且 X, Y 是 A 的子集, 则
 - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$





函数性质

- $f:A \rightarrow B$ 是单射（一对一的）
 - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 - //等价的说法: $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$
- $f:A \rightarrow B$ 是满射（映上的）
 - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得 $f(x) = y$
 - //等价的说法: $f(A) = B$
- 双射（一一对应）
 - 满射+单射



函数性质的证明

- 判断 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}, f((x, y)) = (x + y, x - y)$ 的性质
- 单射?
 - 令 $f((x_1, y_1)) = f((x_2, y_2))$
 - $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ 且 $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, 易见: $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$
 - $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
- 满射?
 - 任取 $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 总存在 $((a+b)/2, (a-b)/2)$, 使得
 - $f((a+b)/2, (a-b)/2) = (a, b)$



函数性质的证明

- 设 A 有限集合， f 是从 A 到 A 的函数。 f 是单射当且仅当 f 是满射。



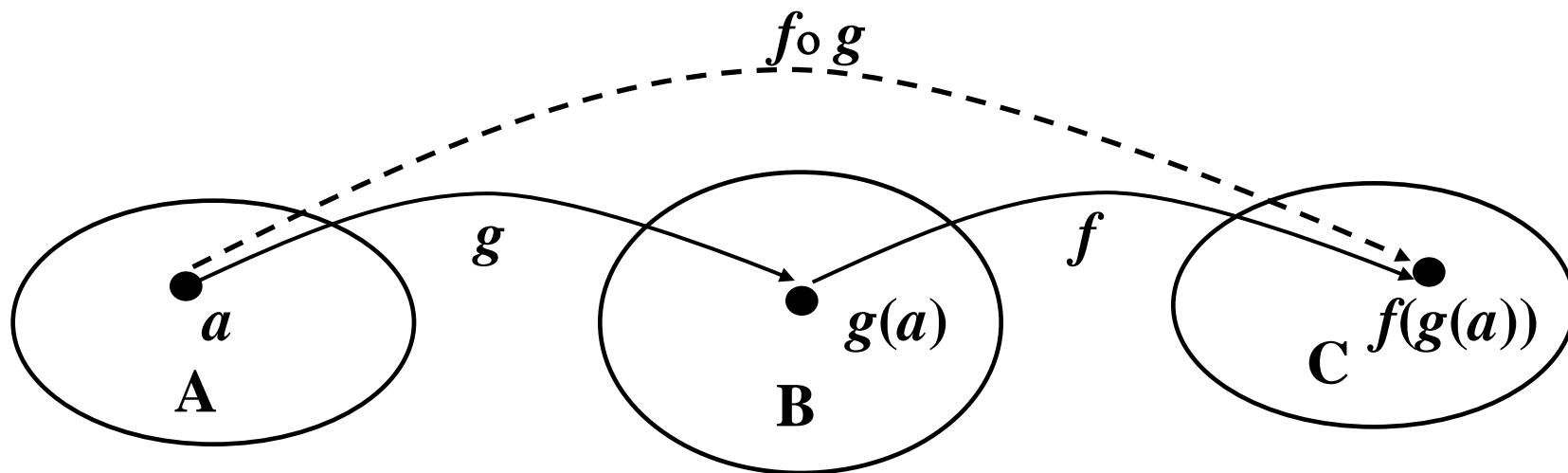
反函数

- 设 f 是从A到B的一一对应， f 的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素 b 的是A中满足 $f(a)=b$ 的（唯一的） a 。 f 的反函数记作 f^{-1} 。
- $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
- 备注：切勿将 f^{-1} 与 $1/f$ 混淆。
- 例子
 - $f: N \times N \rightarrow N, f(i, j) = 2^i(2j+1)-1$ 是双射，
 - $f^{-1}(2^i(2j+1)-1) = (i, j)$



函数的复合（组合）

- 设 g 是从 A 到 B 的函数， f 是从 B 到 C 的函数， f 和 g 的复合用 $f \circ g$ 表示，定义为：
 - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $x \in A$





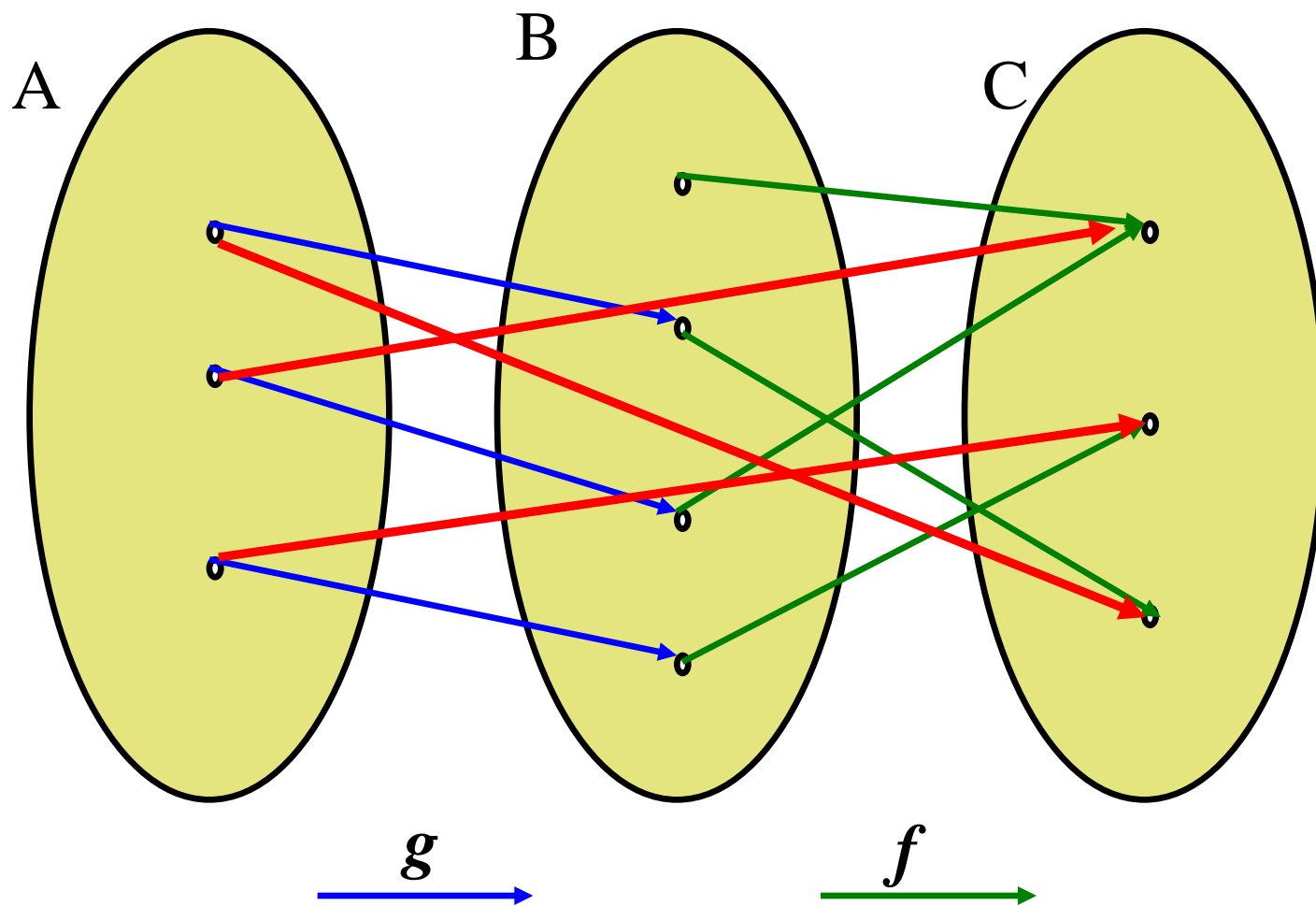
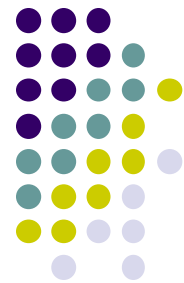
复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
 - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设 f 是从A到B的双射
 - $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$
 - $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$



但是...

- 若 $f \circ g$ 是满射，能推出 f 和 g 是满射吗？
 - f 一定是满射， g 不一定是满射。
- 若 $f \circ g$ 是单射，能推出 f 和 g 是单射吗？
 - g 一定是单射， f 不一定是单射。





函数的加法、乘法

- 设 f 和 g 是从 A 到 \mathbf{R} 的函数，那么 $f+g$ 和 $f g$ 也是从 A 到 \mathbf{R} 的函数，其定义为
 - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
 - $f g(x) = f(x) g(x)$, $x \in A$



递增（递减）函数

- 设 f 的定义域和伴域都是实数的子集,
- f 是递增的
 - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$
- f 是严格递增的
 - $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$



一个例子

- 自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2+1$ 的任何一种排列中，必然含一个长度不小于 $n+1$ 的严格递增链或严格递减链。
- 给定一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于 n ：
 - 在所给的序列中，以 k 开始的严格递增序列长度为 $I(k)$ ，以 k 开始的严格递减序列长度为 $D(k)$ 。
 - $F: k \rightarrow (I(k), D(k)), k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$
 - 对于 $k_1 < k_2$ ，如果 k_1 排在 k_2 前面，则 $I(k_1) > I(k_2)$ ，如果 k_2 排在 k_1 前面，则 $D(k_2) > D(k_1)$ 。因此， F 是单射。
 - 然而， F 的值域只有 n^2 个元素。矛盾。

作业

- 教材[2.3]
 - P107-110: 18, 30, 32, 39, 40

