函数及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 函数的定义
- 子集的像
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的复合
- 函数加法与乘法

函数(function)的定义

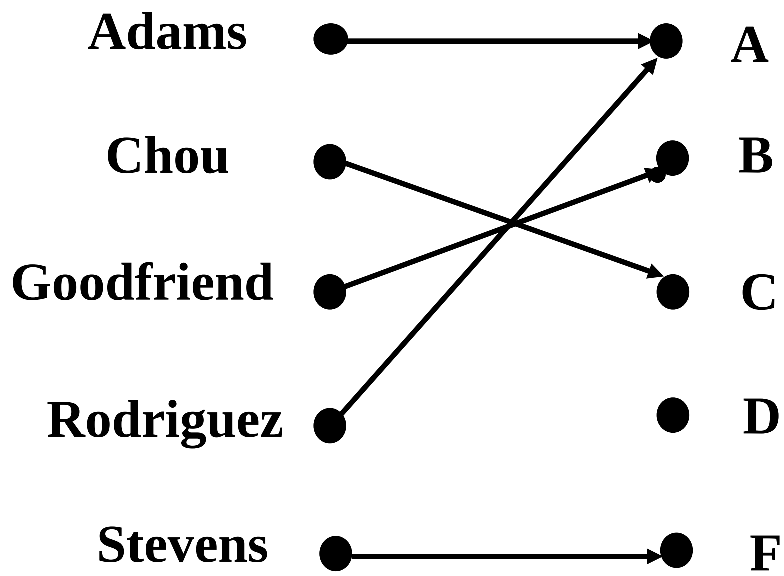
- 设A和B为非空集合，从集合A到B的函数f是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作$f: A \to B$。
  - f 的定义域（domain）是A
  - f 的伴域（codomain）是B
  - 如果f 为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b是a的像，而a是b的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为f的值域（ f的像）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数(function)的定义

- 备注
  - 函数在其定义域中的每个元素都有唯一的取值
  - 函数的值域是其伴域的子集
  - 函数相等 $f=g$ iff
    - $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$
    - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$
    - $\underline{\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(g)}$
  - 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有 $|B|^{|A|}$个。($a_1, a_2,\ldots, a_{|A|}$的像, 均有|B|种选择)

函数举例

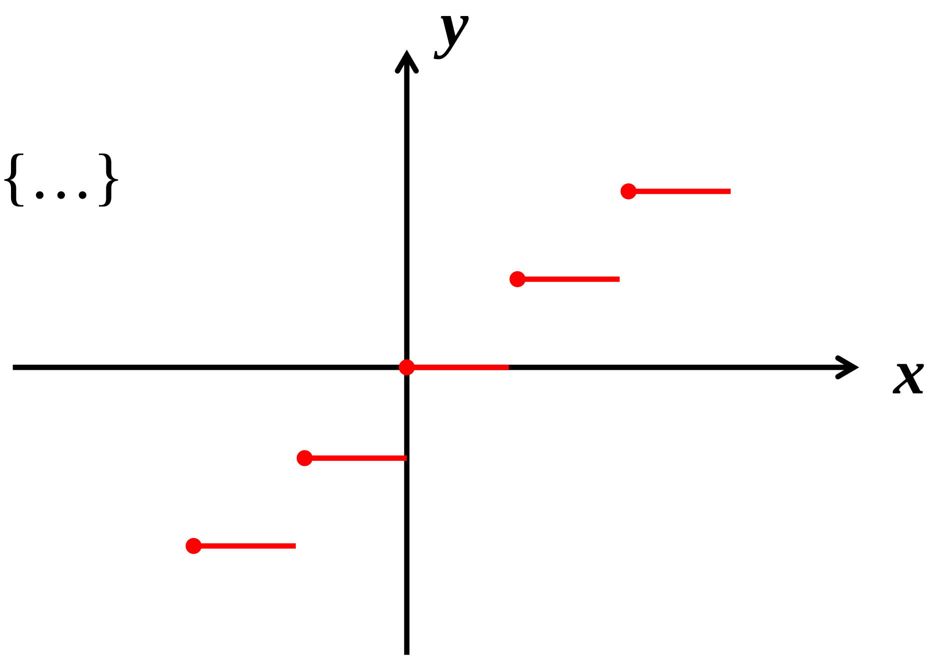
- 某课程成绩



函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor$: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$

Java Program
int floor(float real) {…}



- 函数f的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \wedge f(a)=b\}$

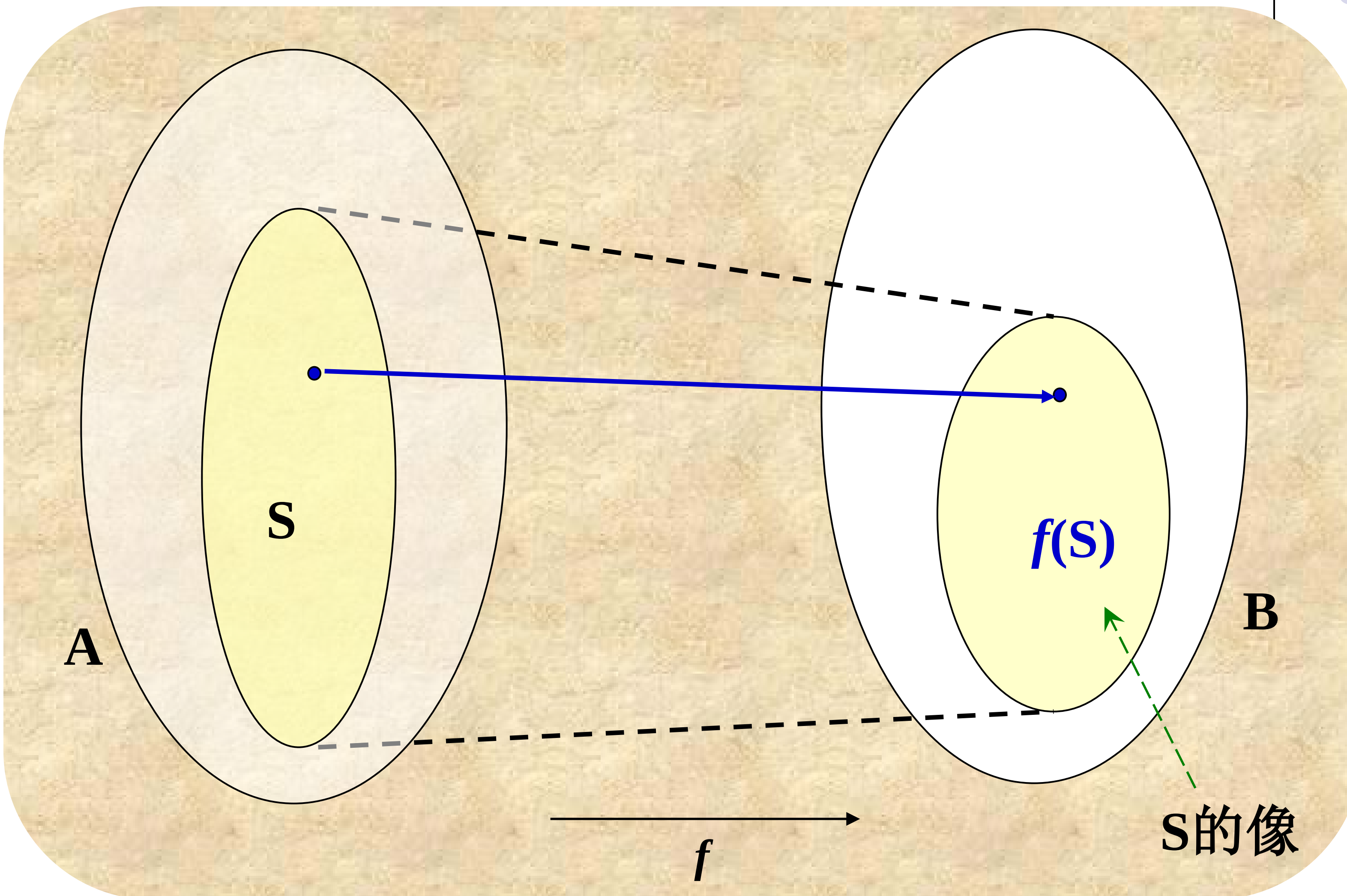
函数举例

- 设A为非空集合，A上的**恒等函数**ι_A:A→A定义为
  - $\iota_A(x)=x$，$x\in A$
- 设U为非空集合，对任意的$A\subseteq U$，**特征函数**χ_A:U→{0,1}定义为：
  - $\chi_A(x)=1$，$x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$，$x\in U-A$

子集在函数下的像

- 设f是从集合A到B的函数，S是A的一个子集。S在f下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S)=\{ t \mid \exists s \in S\ (t= f(s)) \}$
- 备注：$f(A)$即为f的值域。

S的像



并集的像

- 设函数f: A→B，且X，Y是A的子集，则f (X∪Y) = f(X)∪f (Y)
- 证明:
  - f (X∪Y) ⊆ f(X)∪f (Y)

    对任意的t，若t∈f (X∪Y) , 则存在s∈X∪Y, 满足f(s)=t; 假设 s∈X, 则t∈f(X), 假设s∈Y, 则t∈f(Y), ∴t∈f (X)∪f(Y)
  - f(X)∪f (Y) ⊆ f (X∪Y)

    对任意的t，若t∈f (X)∪f(Y)

    情况1：t∈f (X), 则存在s∈X⊆ X∪Y, 满足f(s)=t, ∴t∈ f (X∪Y)

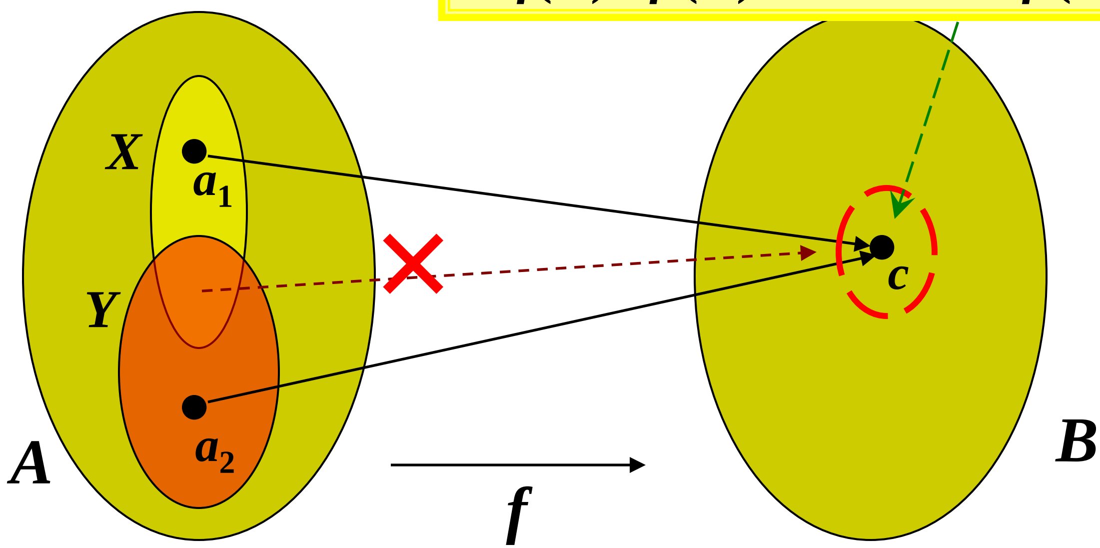
    情况2： t∈f (Y), 同样可得t∈ f (X∪Y)

    ∴ t∈ f (X∪Y)

交集的像

- 设函数f：A→B，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X\cap Y) \subseteq f(X)\cap f(Y)$

在$f(X)\cap f(Y)$中，但不在$f(X\cap Y)$中



函数性质

- f:A→B是单射（一对一的）
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - //等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- f:A→B是满射（映上的）
  - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得$f(x)=y$
  - //等价的说法：$f(A)=B$
- 双射（一一对应）
  - 满射+单射

函数性质的证明

- 判断f:$R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射?
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射?
  - 任取$<a, b> \in R\times R$，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

函数性质的证明

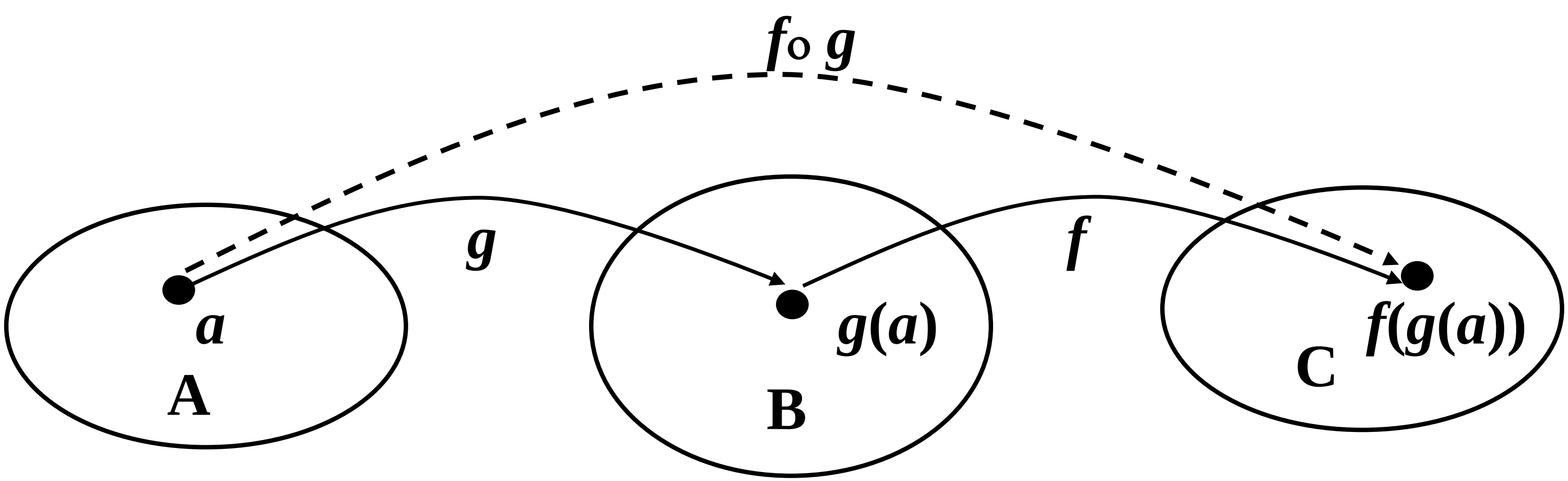
- 设A有限集合，f是从A到A的函数。f是单射当且仅当f是满射。

反函数

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
- 备注：切勿将f^{-1}与$1/f$混淆。
- 例子
  - $f: N\times N\rightarrow N$, $f(<i,j>)=2^i(2j+1)-1$是双射，
  - $f^{-1}(2^i(2j+1)-1)=<i,j>$

函数的复合（组合）

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f\circ g$表示，定义为：
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))$， $x\in$A

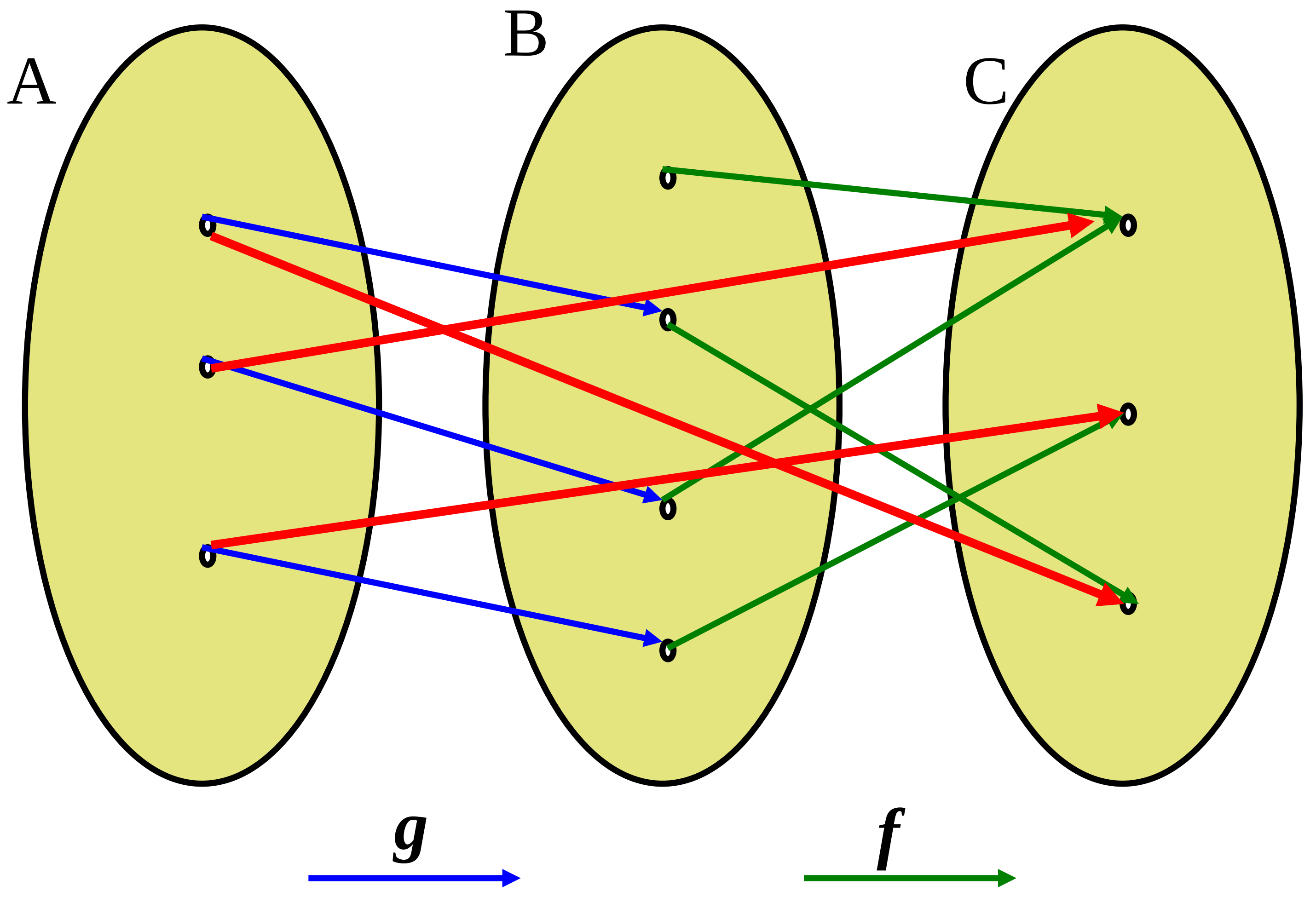


复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f 是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

但是...

- 若$f\circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f一定是满射，g不一定是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g一定是单射，f不一定是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\ g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\ g(x) = f(x)\ g(x)$， $x \in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数的子集，
- f是递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)\leq f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)< f(y))$

一个例子

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。
- 给定一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n：
  - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度为I(k), 以k开始的严格递减序列长度为D(k)。
  - F: $k \to (\mathrm{I}(k), \mathrm{D}(k))$, $k \in \{1,2,\ldots, n^2+1\}$
  - 对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面，则$\mathrm{I}(k_1)>\mathrm{I}(k_2)$，如果$k_2$排在$k_1$前面，则$\mathrm{D}(k_2)>\mathrm{D}(k_1)$。因此，F是单射。
  - 然而，F的值域只有n^2个元素。矛盾。

作业

- 教材[2.3]
  - P107-110： 18, 30, 32, 39, 40