计数技术

离散数学教学组

引言–算法分析中的计数

- k:=0
- for i:=1 to m
    k:=k+1
- for j:=1 to n
    k:=k+1

- k:=0
- for i:=1 to m
    for j:=1 to n
        k:=k+1

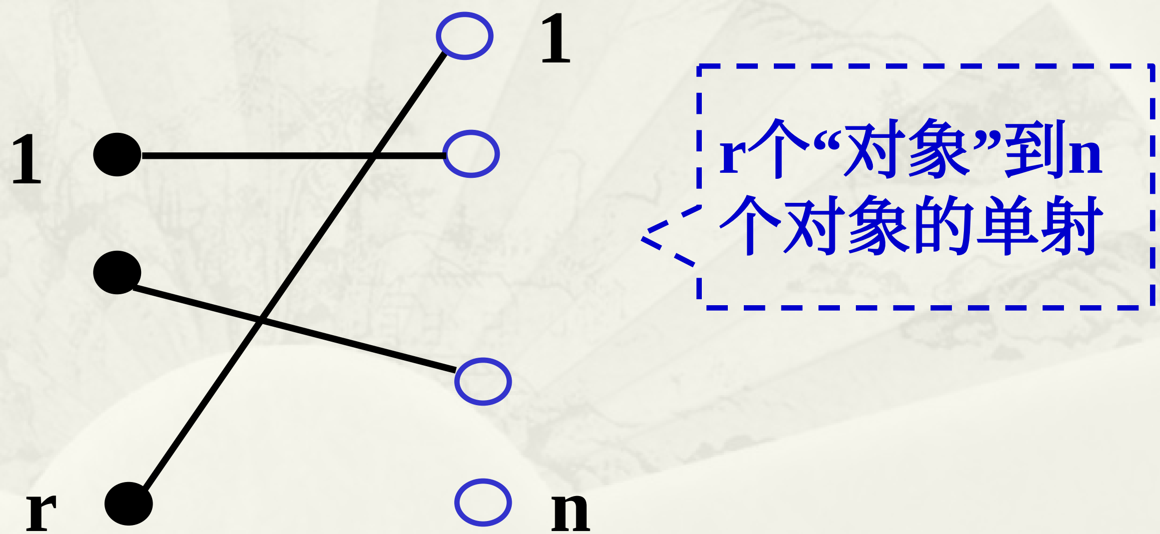
- k:=0
- for i_1:=1 to n
    for i_2:=1 to i_1
        for i_3:=1 to i_2
            k:=k+1

基本原则

- 乘法原则
  - 做一件事有两个步骤，第一步有n种完成方式，第二步m种完成方式，则完成这件事情共有m×n种方法
  - 例:
    - A是有限集合，|A|=n. A的幂集有几个元素？
      - $p(A) = 2^n$.
- 加法原则
  - 一件事情有两种做法，第一种做法有n种方式，第二种做法有m种方式，则完成这件事情共有m＋n种方法
  - 例：
    - 在37位教师和83位学生中选一位校委会代表，多少种选择？

n个元素的r排列

- 在n个元素的集合中，有序取出r个元素，元素不重复，有多少种可能？
  - $P(n,r)= n(n-1)\ldots(n-r+1)=n!/(n-r)!$ $//P(n,0)=1$



例题

- 从52张扑克牌中发5张牌，如果考虑发牌次序，共有多少种牌型？
- 密码是字母开头8位长字母和数字串，总共可以设计多少个密码？
- 密码是字母开头8位长字母和数字串，如果不允许字母或者数字重复，总共可以设计多少个密码？
- 将26个英文字母进行排列，有多少种排列以TXP开头？
- 将26个英文字母进行排列，有多少种排列中含有TXP串？

r组合

- 考察有n个元素的集合，如果取r个元素出来，共有多少种取法？
  - 含有r个元素的子集的个数
  - r组合： $c(n,r)=P(n,r)/r! =n!/[r!(n-r)!]$

用乘法原则来证明！

r组合：$c(n,r)=c(n,n-r)$

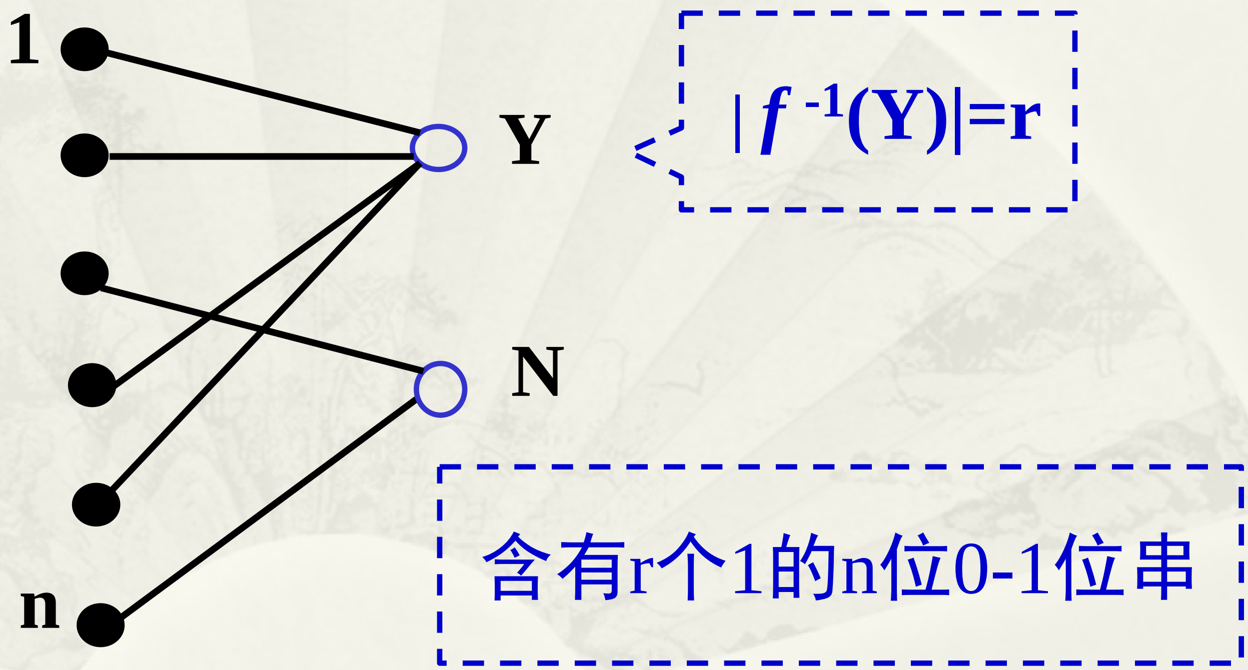
例

- 从52张扑克牌中发47张牌，如果不考虑发牌次序，共有多少种牌型？
- 从5个妇女和15个男性中选出一个包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？
- 从5个妇女和15个男性中选出一个至少包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？

r组合

- n个元素的集合到{Y, N}的函数，共有2^n个

Σ_r **c(n,r)=2^n**



园排列

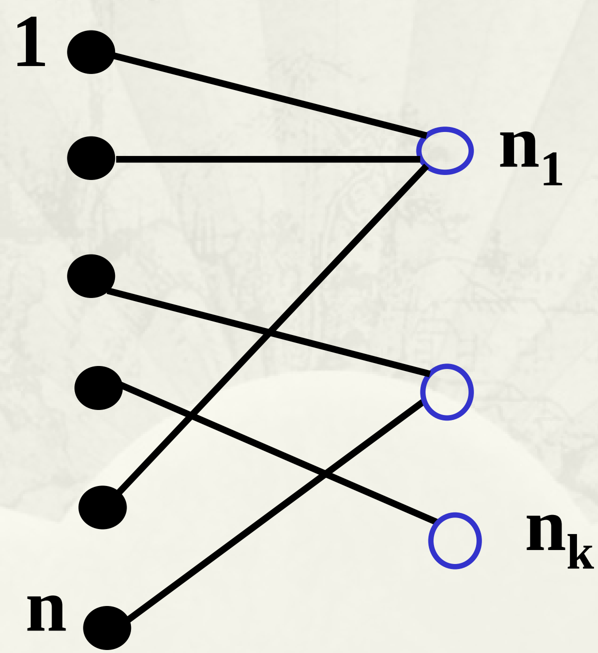
* 从n个不同元素中，取r个不重复的元素排成一个圆圈，有P(n,r)/r种排列方法

有重复（不可区分）物体的排列

- 把单词“**mathematics**”中的字母重新排列，可以得到多少个不同的字符串（单词）？
- 2个a， 2个e，2个m， 2个t，1个c, 1个i, 1个s.
- 11个位置(2+2+2+2+1+1+1)，选2个放置a，…
- 乘下的9个位置，选2个放置e，
- …
- C(11, 2) C(9, 2) C(7, 2) C(5, 2) C(3, 1) C(2, 1) C(1, 1)
- 11!/(2! 2! 2! 2! 1! 1! 1!)

有重复的排列

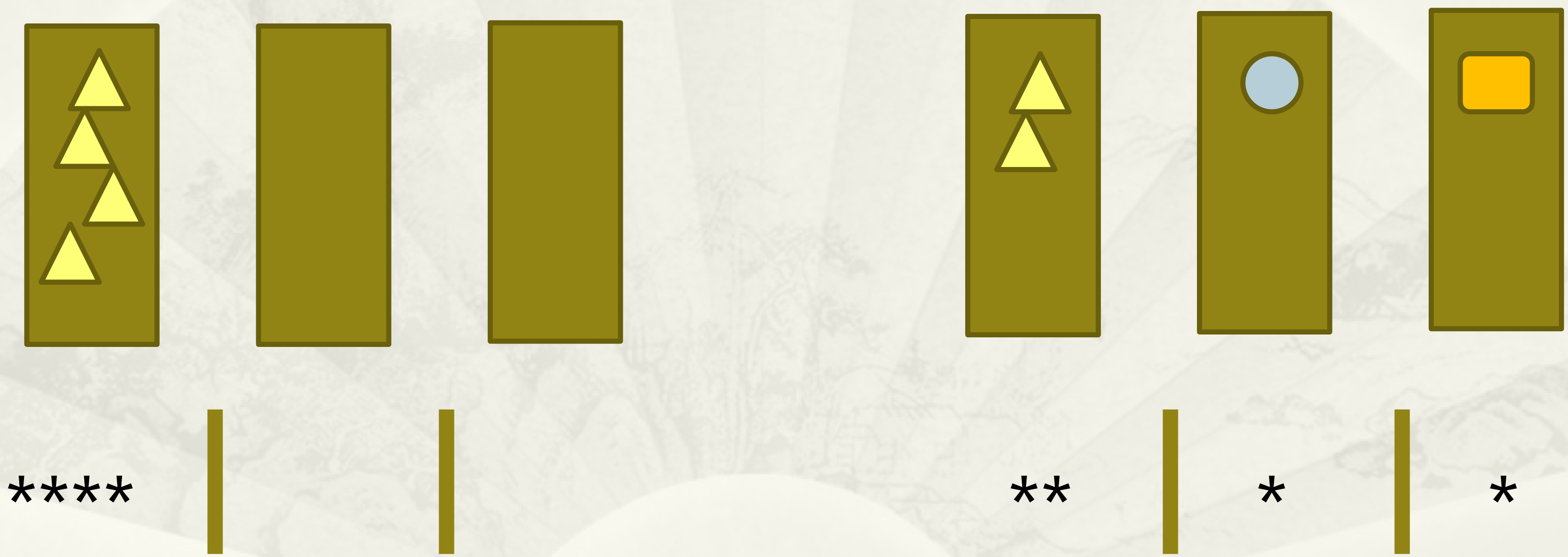
- 在n个有不可区分项的对象集中，若有k类对象，各类对象的数目分别为n_1, …, n_k, n排列的个数是：
- $n!/(n_1! \ldots n_k!)$, 其中 $n=n_1+\ldots+n_k$



n个不同位置赋予k个类别，各类别的数量为$n_1, \cdots, n_k$

有重复的组合

- 厨房有三种水果，每样都足够多（超过4个）。从厨房取4个水果，有多少种取法？



一种取法对应于一个有4个0和2个1构成的0-1串，C(6, 4)

n个元素集合中允许重复的r组合

- C(r+n-1, r)
  - 含r个0和(n-1)个1的0-1串，这种0-1串的个数
- 例
  - 甜点店4种面包，买6个面包的买法有几种？

```
k:=0
for i1:=1 to n
    for i2:=1 to i1
        for i3:=1 to i2
            k:=k+1
```

可重复地从{1, …,n}中选取3个数：$n \ge i_1 \ge i_2 \ge i_3 \ge 1$

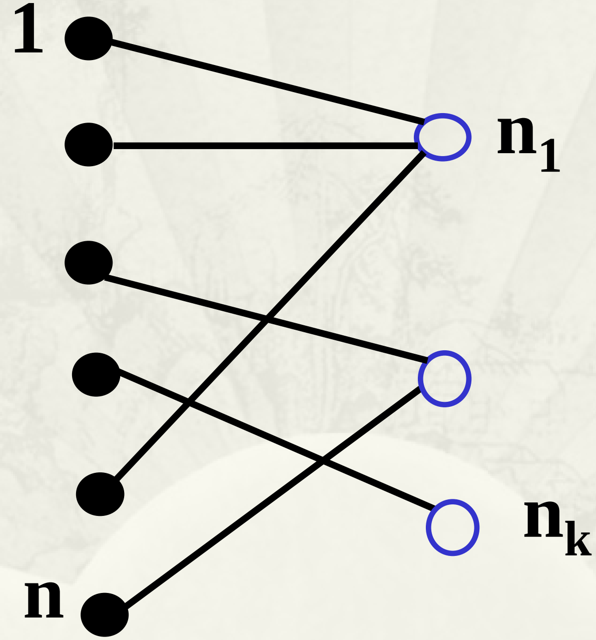
C(n+2, 3)

n个元素集合中允许重复的r组合

* x+y+z=11有多少组解？其中x,y,z是非负整数
  * 3种水果足够多，取11个水果的方案
* 如果$x\geq 1, y \geq 2, z\geq 3$时，上述方程有多少组解？
  * $(x'+1) + (y'+2) + (z'+3)=11$，其中$x', y', z'$是非负整数
  * $x' + y' + z' =5$，其中x', y', z'是非负整数

不同物体分配到不同盒子

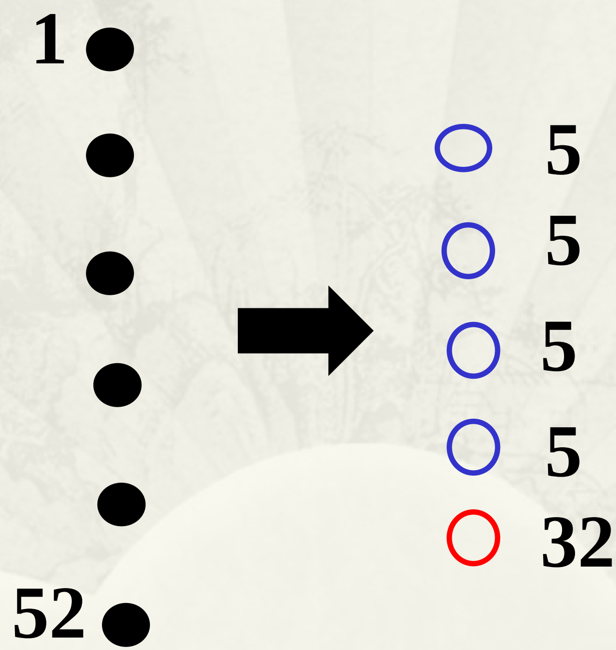
* n个不同物体分配到k个不同的盒子中，使得第i个盒子包含n_i个物体（i=1,…,k），有多少种分配方案？



$n!/(n_1! \ldots n_k!)$

不同物体分配到不同盒子（示例）

* 52张扑克牌发给4个人使得每人5张
  * 意味着“第5人”拿到32张



52!/(5! 5! 5! 5! 32!)

相同物体分配到不同盒子

- n个相同物体分配到k个不同的盒子中，有多少种分配方案？

$x_1+\ldots+x_k=n$ 的非负整数解

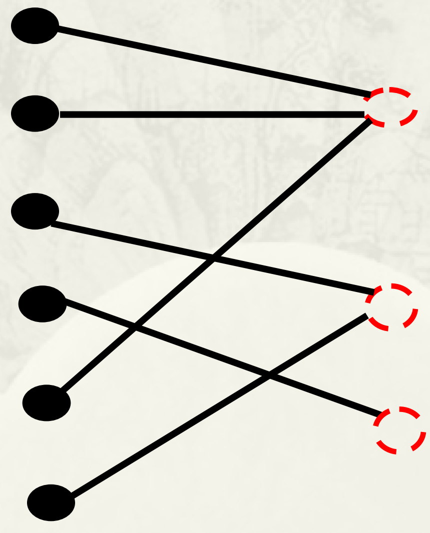
○ $\boldsymbol{x_1}$ ○ $\boldsymbol{x_2}$ … ○ $\boldsymbol{x_k}$

$\boldsymbol{x}_1$个* | … | $\boldsymbol{x}_k$个*

含n个0和(k-1)个1的0-1串，C (n+k-1, n)

不同物体分配到不可辨别的盒子

- S(n, k): Stirling number of the second kind
  - n个物体分配到k个不可辨别的的盒子中，不允许空盒
  - k-划分 $(n\geq k)$
- $S(n+1, k) = k * S(n, k) + S(n, k-1)$, $S(0, 0)=1$



不同物体分配到不可辨别的盒子

- n个物体分配到k个不可辨别的的盒子中，允许空盒
  - $\Sigma_{j=1..k}$ S(n,j)
- n个元素上的等价关系
  - $\mathbf{B_n=\Sigma_{j=1..n}}$ S(n,j) // Bell number
  - $\mathbf{B_0=B_1=1}$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

相同物体分配到不可辨别的盒子

- k个盒子，不允许空盒
  - $x_1+\ldots+x_k=n$ 的正整数解， $x_1\geq\ldots\geq x_k\geq 1$
- k个盒子， 允许空盒
  - $x_1+\ldots+x_j=n$ 的正整数解， $x_1\geq\ldots\geq x_j\geq 1$， $j\leq k$

Pigeonhole Principle

- If n pigeons are assigned to m pigeonholes, and $m<n$, then at least one pigeonhole contains two or more pigeons.
  - Proof by contradiction:

    Suppose each pigeonhole contains at most 1 pigeon. Then at most m pigeons have been assigned. Since $m<n$, so $n-m>0$, there are $(n-m)$ pigeons have not been assigned. It's a contradiction.

Extended Pigeonhole Principle

- If n pigeons are assigned to k pigeonholes, then one of the pigeonholes must contain at least $\lceil n/k \rceil$ pigeons.
  - Proof by contradiction

    If each pigeonhole contains no more than $\lceil n/k \rceil$-1, then there are at most k($\lceil n/k \rceil$-1) $< n$ pigeons.

    It's a contradiction.

Pigeonhole (birthday example)

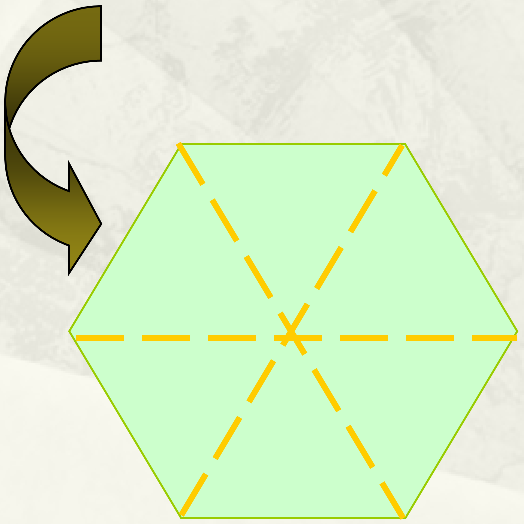
- Problem1: there are 54 students in our class. How many students at least were born in the same month?
- Solution:
  - Hint: In eight people, there are 2 people at least were born in same weekday.

Examples

- If any 11 numbers are chosen from the set {1,2,…20}, then one of them will be a multiple of another
  - $a_j=2^{kj} q_j$
- Show that if any five numbers from 1 to 8 are chosen, then two of them will add to 9
  - What is the pigeonhole and what is the pigeon?

Not Too Far Apart

Problem: We have a region bounded by a regular hexagon whose sides are of length 1 unit. Show that if any seven points are chosen in this region, then two of them must be no farther apart than 1 unit.



The region can be divided into six equilateral triangles, then among 7 points randomly chosen in this region must be two located within one triangle.

Shaking Hands at a Gathering

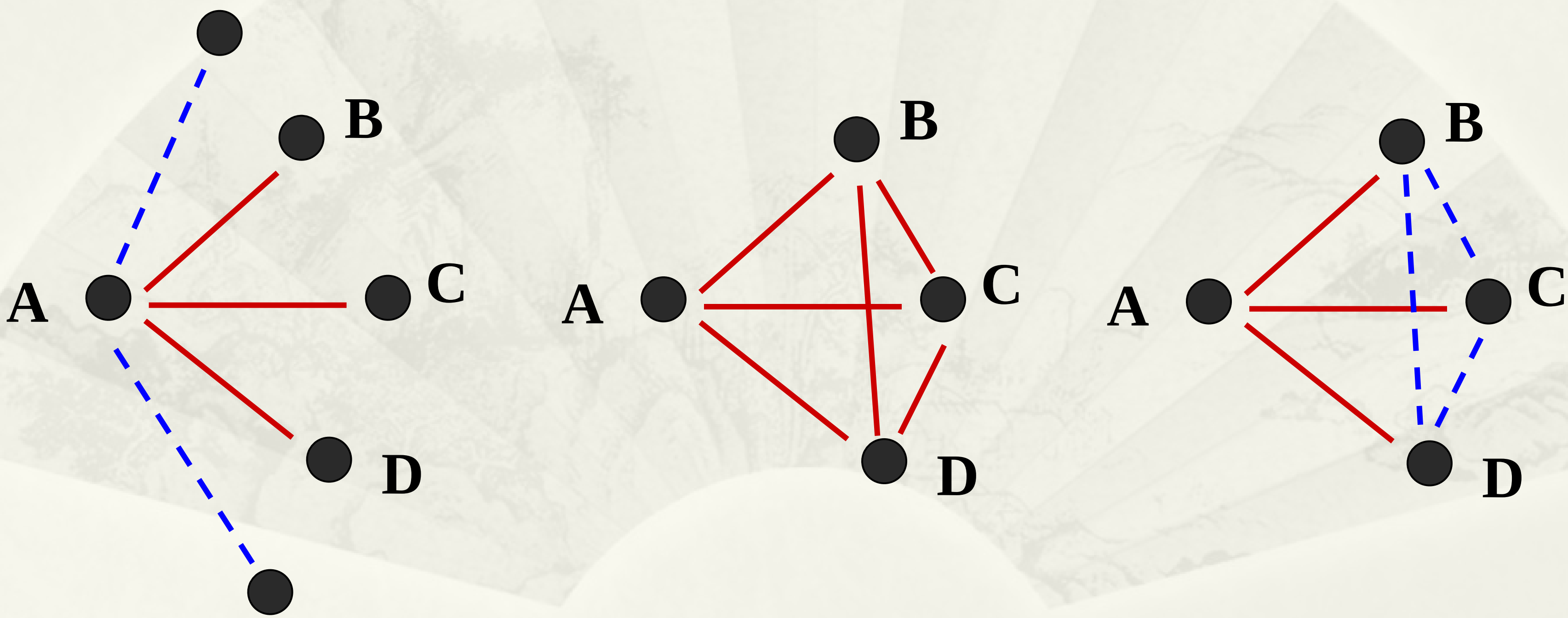
- **Situation**: at a gathering of *n* people, everyone shook hands with at least one person, and no one shook hands more than once with the same person.
- **Problem**: show that there must have been at least two of them who had the same number of handshaking.
- **Solution**:
  - Pigeon: the *n* participants
  - Pigeonhole: different number between 1 and *n*-1.

再例

* 任给一个正整数n,总存在一个它的倍数，其十进制表示中只有0和1两个数字符
  * 任给n，构造含有n+1个数的数列
    * 1，11，111，1111，…,，11**11
  * 上述n+1个数必有两个数模n同余
  * 两数差：n的倍数，只有0和1

朋友和陌生人定理

任意6人中, 至少有3人相互认识, 或者至少有3人互不相识.



作业

- 教材
  - 5.2；5.3；5.5；
- 作业
  - P271：4；8；20；26；40
  - P277：8；16；20；24；30
  - P292：10；14；17
- 编程
  - 输入正整数n和C，输出所有满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$ 的非负整数解。