# 谓词逻辑初步

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

# 内容提要

- 引言
- 谓词
- 量词
- 推理

# 引言

- 例：
  - 人都要死的
  - 苏格拉底是人
  - 苏格拉底要死的

命题逻辑无法处理！

# 引言

- 知识表示
  - **brother($x$, $y$) $\wedge$father($y$, $z$) $\rightarrow$ uncle($x$, $z$)**
  - **father($x$, $y$) $\wedge$father($y$, $z$) $\rightarrow$ grandfather($x$, $z$)**

命题逻辑无法表达！

# 谓词

- 如果$x$是整数，“$x$ 大于2” 不是命题，它的真值依赖于$x$的取值
  - 可以将 “$x$大于2”表示为 $P(x)$。
- 一元谓词$P$: 陈述$P(x)$ 看作命题函数$P$在$x$的一个值.
  - $P$ 的定义域是整数集
  - $P(3)$是一个取值为T的命题
  - $P(1)$是一个取值为F的命题
- 举例，二元谓词$Q$：$Q(x, y)$表示 “$x=y+3$”。

# 量词

- 若$P(x)$ 是谓词，$\forall xP(x)$表示 “对所有的$x$, $P(x)$”。$\forall$称为全称量词
- 若$P(x)$ 是谓词，$\exists xP(x)$表示 “存在某个$x$, $P(x)$”。$\exists$称为存在量词。
- 例：$P(x)$表示x>2
  - $\forall xP(x)$为F（假），$\exists xP(x)$为T（真）
- 优先级：量词的优先级高于其它逻辑运算符。

# 关于论域/作用域的讨论

- 符号化以下语句
  - $P(x)$表示$x^2>0$，$\forall x P(x)$的真值？
  - 有的政治家诚实
  - 所有美国人都喜欢汉堡包

# 关于论域/作用域的讨论

- 观察量化表达式
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
  - $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  - $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$
  - $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
  - $\forall x(P(x,y) \wedge Q(x,y))$

- 量化表达式中的变元：绑定、自由、作用域、替换

# 逻辑等价

- 逻辑表达式的逻辑等价：都有相同的真值，无论变量设定在哪个论域上，无论什么谓词代入。

# 带量词的公式的否定式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
  - 对所有的$x$, $x$的平方是正数
  - 否定：存在某个实数 $x$, 其平方不是正数。
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
  - 存在$x$, 满足 $5x=x$.
  - 否定：对任意的$x$, $5x\neq x$.

# 多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

  举例： $P(x,y)$ 表示$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价

  举例：$P(x,y)$ 表示“$y>x$”。

# 将自然语言翻译成逻辑表达式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: $x$是这个班上的

$C(x)$: $x$学过微积分课程

$\forall x\, (S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\forall x\, (S(x) \rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥}))$

练习：所有狮子都是凶猛的，有些狮子不喝咖啡。

# 与量词有关的推理规则

- 全称例示 UI：$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$
- 全称生成UG：对任意$c$, $P(c) \Rightarrow \forall x P(x)$
- 存在例示 EI：$\exists x P(x) \Rightarrow$ 对某个$c$, $P(c)$
- 存在生成EG：对某个$c$ , $P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$

# 苏格拉底到底死不死？

- $P(x)$: $x$是人；$Q(x)$： $x$要死
- 符号化及推理过程：
  - 人都是要死的：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

    $P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$

    苏格拉底是人：$P(\text{苏格拉底})$

    $\therefore Q(\text{苏格拉底})$

# 谓词逻辑中的推理（举例）

- “在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。
- $C(x)$: $x$在这个班上
- $B(x)$: $x$读过书了
- $P(x)$: $x$通过了第一门考试
  - $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x(P(x) \land \neg B(x))$

| | |
|---|---|
| $C(a) \land \neg B(a)$ | 存在例示 |
| $C(a)$ | 化简 |
| $C(a) \rightarrow P(a)$ | 全称例示 |
| $P(a)$ | 假言推理 |
| $\neg B(a)$ | 化简 |
| $\exists x(P(x) \land \neg B(x))$ | 存在生成 |

# Prolog（Programming in Logic）

- 若教授p是课程c的老师，学生s注册课程c，则p教s。
  - instructor(p, c)∧enrolled(s, c) → teaches(p, s)

teaches(p, s) :- instructor(p, c), enrolled(s, c)

- 事实
  - instructor(*chan*, *math273*)
  - enrolled(*kevin*, *math273*)
  - enrolled(*kiko*, *math273*)
- 查询
  - ? teaches(*chan*, *x*)

# 作业

- 教材[1.3, 1.4]
  - P34：10, 14, 24(最后2题), 34, 42
  - P43：6(最后2题), 16, 44
- 教材[1.5]
  - P54-57：19, 21, 24, 29