

1987年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答

数 学 (试 卷 I)

一、填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分. 只写答案不写解题过程)

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面方程是 $\underline{x-y+5=0}$

(2) 当 $x = -1/\ln 2$ 时, 函数 $y = x2^x$ 取得极小值.

(3) 由 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 围成图形的面积 = $\underline{3/2}$

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 则曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$ 的值是 $\underline{-18\pi}$.

(5) 已知三维线性空间的一组基底 $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$, 则向量 $\alpha = (2, 0, 0)$ 在上述基底下的坐标是 $\underline{(1, 1, -1)}$

二、(本题满分 8 分)

求正的常数 a 与 b , 使式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$ 成立.

解: 假若 $b \neq 1$, 则根据洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{b - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = 0 \neq 1, \text{ 与题设矛盾, 于是 } b=1.$$

$$\text{此时 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}},$$

即 $1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$, 因此 $a=4$.

三、(本题满分 7 分)

(1) 设函数 f, g 连续可微, $u = f(x, xy), v = g(x+xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = f'_1 + y \cdot f'_2; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = g' \cdot \frac{\partial(x+xy)}{\partial x} = (1+y) \cdot g'.$$

(2) 设矩阵 A 和 B 满足 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵 B .

解: 因 $AB = A + 2B$, 故 $AB - 2B = A$, 即 $(A - 2E)B = A$,

$$\text{故 } B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解. 其中常数 $a > 0$.

解: 由特征方程 $r^3 + 2r^2 + (9 + a^2)r = 0$, 知其特征根为 $r_1 = 0, r_{2,3} = -3 \pm ai$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-3x} \cos x + C_3 e^{-3x} \sin x$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x) = Ax$, 代入原方程可得 $A = \frac{1}{9 + a^2}$.

因此, 原方程的通解为 $y(x) = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-3x} \cos x + C_3 e^{-3x} \sin x + \frac{1}{9 + a^2} x$.

五、选择题 (每小题 3 分, 满分 12 分)

(1) 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ (C)

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛与发散与 k 的值有关.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I = t \int_0^s f(tx) dx, s > 0, t > 0$, 则 I 的值 (D)

(A) 依赖于 s 和 t (B) 依赖于 s, t, x
(C) 依赖于 t 和 x , 不依赖于 s (D) 依赖于 s , 不依赖于 t

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则在点 $x = a$ 处 (B)

(A) $f(x)$ 导数存在, $f'(a) \neq 0$ (B) $f(x)$ 取得极大值
(C) $f(x)$ 取得极小值 (D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*| =$ (C)

(A) a (B) $1/a$ (C) a^{n-1} (D) a^n

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

解: 记 $u_n = \frac{1}{n2^n} x^{n+1}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{x^{n+1}} \right| = \frac{|x|}{2},$

令 $\frac{|x|}{2} < 1$, 知原级数在开区间 $(-2, 2)$ 内每一点都收敛.

又当 $x = -2$ 时, 原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-2)^{n+1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, 故由莱布尼兹判别法知其收敛;

而当 $x = 2$ 时, 原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^{n+1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, 显然发散, 故幂级数的收敛域为 $[-2, 2)$.

又记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n = xS_1(x)$, 其中 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$,

有 $S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-x/2}$, 于是 $S_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x/2} = 2 \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$,

因此幂级数的和函数为 $S(x) = 2x \ln \frac{2}{2-x}$, $x \in [-2, 2)$.

七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iint_S x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$,

其中 s 是曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases}$ ($1 \leq y \leq 3$) 绕 Y 轴旋转一周所形成的曲面, 它的法向量与 Y 轴

正向的夹角恒大于 $\pi/2$.

解: S 的方程为 $y = x^2 + z^2 + 1$, 记 $S_1: y = 3, (x^2 + z^2) \leq 2$, 知 $S + S_1$ 为封闭曲面, 设其方向取外侧, 所围区域为 Ω , 则由高斯公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy - \iint_{S_1} x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 1 \cdot dv - 0 - \iint_{S_1} 2(1-y^2)dydz + 0 = \int_1^3 dy \iint_{D_y} dzdx - \iint_{D_{zx}} 2(1-3^2)dzdx \\ &= \int_1^3 (y-1)dy + 16 \cdot \pi \cdot 2 = 34\pi. \end{aligned}$$

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可微, 对于 $[0, 1]$ 上的每个 x , 函数的值都在开区间 $(0, 1)$ 内, 且 $f'(x) \neq 1$. 证明 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

证: 令 $h(t) = f(t) - t$, 知 $h(t)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 又由题设知 $0 < f(x) < 1$, 于是有 $h(0) = f(0) - 0 > 0$, $h(1) = f(1) - 1 < 0$. 故由零点定理, 在 $(0, 1)$ 内有 x , 使 $f(x) = x$.

假若 $f(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 内有两个不同的点 x_1 和 x_2 , 使得 $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则易见 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 故由拉格朗日定理知,

$\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, 即 $f'(\xi) = 1$. 此与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾! 故在 $(0,1)$ 内使 $f(x) = x$ 的 x 只能有一个.

九、(本题满分 8 分)

问 a, b 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解? 无解? 有无穷多解?

并求出无穷多解时的通解.

解: 对方程组的增广矩阵进行初等变换, 得

$$\tilde{A} = (A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 当 $a \neq 1$ 时, 系数行列式 $|A| = (a-1)^2 \neq 0$, 故由克拉姆法则, 原方程组有唯一解;

② 当 $a = 1$, 且 $b \neq -1$ 时, $r(\tilde{A}) = 3, r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) \neq r(A)$, 故原方程组无解;

③ 当 $a = 1$, 且 $b = -1$ 时, $r(\tilde{A}) = r(A) = 2 < 4$, 故原方程组有无穷的解. 此时显然有

$$\tilde{A} = (A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见其通解为: $x = (-1, 1, 0, 0)^T + c_1(1, -2, 1, 0)^T + c_2(1, -2, 0, 1)^T$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

十、填空题 (每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p , 现进行 n 次独立试验, 则 A 至少发生一次的概率为 $1 - (1-p)^n$; 而事件 A 至多发生一次的概率为 $[1 + (n-1)p](1-p)^{n-1}$.

(2) 三个箱子, 第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子中有 3 个白球 3 个黑球, 第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球, 现随机地取一个箱子, 再从这个箱子中取一个球, 这个球为白球的概率为 $53/120$, 已知取出的是白球, 此球属于第二箱的概率是 $20/53$.

(3) 已知连续随机变量 X 的密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}$, 则 X 的数学期望为 1; X 的方差为 1/2.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}; f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}, \text{求随机变量 } Z=2X+Y \text{ 的概率密度函数 } f_z(z).$$

解: 由题设, (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$,

故 Z 的分布函数 $F_z(z) = P(Z \leq z) = P(2X + Y \leq z) = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy$,

① 当 $z < 0$ 时, $F_z(z) = \iint_{2x+y \leq z} 0 dx dy = 0$, 此时 $f_z(z) = 0' = 0$;

② 当 $0 \leq z \leq 2$ 时, $F_z(z) = \int_0^z dy \int_0^{\frac{z-y}{2}} e^{-y} dx = \frac{z}{2} \int_0^z e^{-y} dy - \frac{1}{2} \int_0^z y e^{-y} dy$, 此时

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-y} dy = \frac{1}{2} (1 - e^{-z});$$

③ 当 $z > 2$ 时, $F_z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = \int_0^1 (1 - e^{2x-z}) dx = 1 - \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) e^{-z}$, 此时

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) e^{-z}$$

综上所述, $Z=2X+Y$ 的概率密度函数为 $f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-z}) & 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{1}{2} e^{-z} (e^{-2} - 1) & z > 2 \end{cases}$

数 学 (试 卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同数学 I、第一题】

二、(本题满分 14 分)

(1) (6 分) 计算定积分 $\int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx$.解: 因 $xe^{-|x|}$ 是奇函数, $|x|e^{-|x|}$ 是偶函数, 故 原式 $= 2\int_0^2 |x|e^{-|x|} dx = 2\int_0^2 xe^x dx = 2 - 6e^{-2}$.

(2) (8 分)【同数学 I、第二题】

三、(本题满分 7 分)

设函数 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 = f'_1 \cdot e^y + f'_2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f''_{11} \cdot xe^y + f''_{13})e^y + e^y \cdot f'_1 + f''_{21} \cdot xe^y + f''_{23}$.

四、(本题满分 8 分)【同数学 I、第四题】

五、(本题满分 12 分)【同数学 I、第五题】

六、(本题满分 10 分)【同数学 I、第六题】

七、(本题满分 10 分)【同数学 I、第七题】

八、(本题满分 10 分)【同数学 I、第八题】

九、(本题满分 8 分)【同数学 I、第九题】

十、(本题满分 6 分)

设 λ_1, λ_2 为 n 阶方阵 A 的特征值, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 而 x_1, x_2 分别为对应的特征向量, 试证明: $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

证: 假若 $x_1 + x_2$ 是 A 的特征向量, 设其对应的特征值为 λ_3 , 则有 $A(x_1 + x_2) = \lambda_3(x_1 + x_2)$, 即 $Ax_1 + Ax_2 = \lambda_3 x_1 + \lambda_3 x_2$. 又由题设条件知 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, 故有 $(\lambda_1 - \lambda_3)x_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)x_2 = 0$. 因 x_1, x_2 是属于不同特征值的特征向量, 所以 x_1, x_2 线性无关, 从而 $\lambda_1 = \lambda_3$, 且 $\lambda_2 = \lambda_3$, 此与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾! 因此 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

数 学 (试 卷 III)

一、填空题 (每小题 2 分, 满分 10 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = \ln(1+ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' = \frac{a}{1+ax}$, $y'' = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

(2) 曲线 $y = \arctg x$ 在横坐标为 1 点处的切线方程是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi-2}{4}$; 法线方程是 $y = -2x + (\pi+8)/4$.

(3) 积分中值定理的条件是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 结论是 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n-2}{n+1})^n = e^{-3}$.

(5) $\int f'(x)dx = f(x) + c$; $\int_a^b f'(2x)dx = \frac{1}{2}f(2b) - \frac{1}{2}f(2a)$.

二、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

三、(本题满分 7 分)

设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解: 因 $\frac{dy}{dt} = 5\sin t, \frac{dx}{dt} = 5 - 5\cos t, \frac{dy}{dx} = \frac{5(0 + \sin t)}{5(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$,
且 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} (\frac{\sin t}{1 - \cos t}) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{5(1 - \cos t)^2}$

四、(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

解: $\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

令 $x = \sin t$, 有 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \frac{\pi}{4}$, 因此 $\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

五、(本题满分 8 分)

设 D 是曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形. 求 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解: $V = \pi \int_0^\pi (\sin x + 1)^2 dx = 4\pi + \frac{3\pi^2}{2}$.

六、证明题 (本题满分 10 分)

(1) (5 分) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

证: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 故由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. 由于 $f'(x)$ 在 (a, b) 内恒大于零, 所以 $f'(\xi) > 0$, 又 $x_2 - x_1 > 0$, 因此 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 表明 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) (5 分) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$, 则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

证: 因 $g''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x) - g'(c)}{x - c} < 0$, 而 $g'(c) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{x - c} < 0$. 由极限的保号性, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (c - \delta, c)$ 时, 有 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$, 即 $g'(x) > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(c - \delta, c)$ 单增; 当 $x \in (c, c + \delta)$ 时, 有 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(c, c + \delta)$ 单减. 又由 $g'(c) = 0$ 知, $x = c$ 是 $g(x)$ 的驻点, 因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ (其中 a, b 为不全为零的非负数)

解: ① 当 $a = 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{b^2} \int \sec^2 x dx = \frac{1}{b^2} \tan x + c$;

② 当 $b = 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{a^2} \int \csc^2 x dx = -\frac{1}{a^2} \cot x + c$;

③ 当 $ab \neq 0$ 时, 原式 $= \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d(\frac{a}{b} \tan x)}{(\frac{a}{b} \tan x)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \arctan(\frac{a}{b} \tan x) + c$.

八、(本题满分 15 分)

(1) (7 分) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$, 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的解.

解: 原方程即 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$, 故其通解为 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c) = \frac{1}{x} (\frac{1}{2}x^2 + c)$.

因 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$, 所以 $c = -1$. 于是所求初值问题的解为 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

(2) (8 分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

解: 由特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 知其特征根为 $r_{1,2} = -1$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{-x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x) = e^x(ax + b)$, 代入原方程可得 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$.

因此, 原方程的通解为 $y(x) = \tilde{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

九、选择题 (每小题 4 分, 满分 16 分)

(1). $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $-\infty < x < +\infty$ 是 (D)

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

(2). 函数 $f(x) - x \sin x$ (D)

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (B) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界 (D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于 (B)

(A) $f'(a)$ (B) $2f'(a)$ (C) 0 (D) $f'(2a)$

(4) 【同数学 I、第五(2)题】

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内, 求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使该点处切线与所给曲线及两坐标围成的面积为最小, 并求此最小面积.

解: 设切点的横坐标为 a , 则切线方程为 $y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$, 即 $y = -2ax + a^2 + 1$

故所围面积 $s = \frac{1}{2}(a^2 + 1) \frac{a^2 + 1}{2a} - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{a^3}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{3}$. 令 $s' = 0$ 得驻点 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

由于 $s''|_{a=\sqrt{3}/3} > 0$, 故所求点的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3})$, 其最小值为 $s|_{a=\sqrt{3}/3} = \frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

数 学 (试 卷 IV)

一、判断题 (每小题答对得 2 分, 答错得 -1 分, 不答得 0 分, 全题最低 0 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (×)

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$ (√)

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 必发散 (×)

(4) 假设 D 是矩阵 A 的 r 阶子式, 且含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0, 那么矩阵 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0 (√)

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0 (√)

二、选择题 (每小题 2 分, 满分 10 分.)

(1) 下列函数在其定义域内连续的是 (A)

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$ (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, x_1, x_2 是区间内任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 则至少存一点 ξ , 使得 (C)

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b-x_1), x_1 < \xi < b.$

(C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1), x_1 < \xi < x_2.$

(D) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2-a), a < \xi < x_2.$

(3) 下列广义积分收敛的是 (C)

(A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (B) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ (C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (D) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(4) 设 A 是 n 阶方阵, 其秩 $r < n$, 那么在 A 的 n 个行向量中 (A)

(A) 必有 r 个行向量线性无关

(B) 任意 r 个行向量线性无关

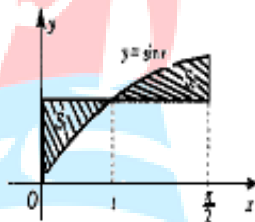
(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组(D) 任意一个行向量都可以由其它 r 个行向量线性表示(5) 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB) = 0$, 则 (C)(A) A 和 B 互不相容 (互斥)(B) AB 是不可能事件(C) AB 未必是不可能事件(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

三、计算下列各题 (每小题 4 分, 满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.解: 因 $(1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+xe^x)}{x}}$, 而 $\frac{\ln(1+xe^x)}{x} \sim xe^x$ (当 $x \rightarrow 0$),故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = e$.(2) 已知 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$, 求 y' .解: $y = \ln(\sqrt{1+x^2}-1) - \ln(\sqrt{1+x^2}+1)$, $y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}-1} - \ln \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.(3) 已知 $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$, 求 dz .解: $dz = \frac{d(\frac{x+y}{x-y})}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2} = \frac{\frac{(x-y)(dx+dy)-(x+y)(dx-dy)}{(x-y)^2}}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2} = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ (4) 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x-1}} dx$.解: 令 $\sqrt{2x-1} = t$, 有

$$\int e^{\sqrt{2x-1}} dx = \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c = (\sqrt{2x-1}-1)e^{\sqrt{2x-1}} + c$$

四、(本题满分 10 分)

考虑函数 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), 问:(1) t 取何值时, 图中阴影部分的面积 s_1 与 s_2 之和 $s = s_1 + s_2$ 最小?(2) t 取何值时, $s = s_1 + s_2$ 最大?解: 因 $s_1 = t \sin t - \int_0^t \sin x dx = t \sin t + \cos t - 1$,

$$s_2 = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t = \cos t + t \sin t - \frac{\pi}{2} \sin t,$$

故 $s = s_1 + s_2 = 2t \sin t + 2 \cos t - \frac{\pi}{2} \sin t - 1, (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

令 $s' = 0$, 得 s 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的驻点 $t = \frac{\pi}{4}$. 而 $s(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - 1$, $s(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$, $s(0) = 1$,

因此 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, s 最小; $t = 0$ 时, s 最大.

五、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展成 x 的级数, 并指出收敛区间.

解: 因 $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$,

而 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$, 且 $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, $x \in (-2, 2)$,

故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, 其收敛区间为 $(-1, 1)$.

六、(本题满分 5 分)

计算二重积分 $\iint_D e^{x^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中由直线 $y = x$ 和 $y = x^3$ 围成的封闭区域.

解: 联立 $y = x$ 和 $y = x^3$, 可解得两曲线交点的横坐标 $x = 0$ 和 $x = 1$, 于是

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^x e^{x^2} dy = \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - 1$$

七、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 x 对价格 P 的弹性为 $\eta = -3p^3$, 而市场对商品的最高需求量为 1 (万件), 求需求函数.

解: 由弹性的定义, 有 $\frac{p}{x} \frac{dx}{dp} = -3p^3$, 即 $\frac{dx}{x} = -3p^2 dp$,

于是有 $x = ce^{-p^3}$, c 为待定常数.

由题意 $p = 0$ 时, $x = 1$, 故 $c = 1$, 因此 $x = e^{-p^3}$.

八、(本题满分8分)

$$\text{解线性方程组} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} \quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数} \right]$$

解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

故原方程组与下方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -8 + 2x_3, \text{ 令 } x_3 = 0, \text{ 可得原方程组的特解 } \beta = (3, -8, 0, 6)^T. \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

又显然原方程组的导出组与下方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3, \text{ 令 } x_3 = 1, \text{ 可得导出组的基础解系 } \eta = (-1, 2, 1, 0)^T. \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

因此原方程组的通解为：\$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -8, 0, 6)^T + k(-1, 2, 1, 0)^T\$，其中 \$k\$ 为任意常数。

九、(本题满分7分)

设矩阵 \$A\$ 和 \$B\$ 满足 \$AB = A + 2B\$，求矩阵 \$B\$，其中 \$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\$。

解：因 \$AB = A + 2B\$，故 \$AB - 2B = A\$，即 \$(A - 2E)B = A\$，

$$\text{故 } B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

十、(本题满分6分)

求矩阵 \$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\$ 的实特征值及对应的特征向量。

解：令 $|\lambda E - A| = 0$ ，即 $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$ ，可见矩阵 A 只有一个实特征值 $\lambda = 1$ 。

易见，线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系为 $(0, 2, 1)^T$ ，故 A 对应于实特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k(0, 2, 1)^T$ ，（其中 k 为非零任意常数）。

十一、(每小题 4 分，满分 8 分)

(1) 已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$ ，试写出 X 的分布函数 $F(x)$ 。

解： X 的分布函数为
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

(2) 已知随机变量 Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ ，求随机变量 $Z = \frac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ 。

解：
$$EZ = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} f(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy = \sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}.$$

十二、(本题满分 8 分)

设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装有 30 件，其中 18 件一等品。现从两箱中随机挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回），试求：

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p ；

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q 。

解：设 $B_i = \{\text{取出的零件为第 } i \text{ 箱中的}\}$ ， $A_j = \{\text{第 } j \text{ 次取出的是二等品}\}$ ， $i, j = 1, 2$ ，显然 B_1, B_2 为正概完备事件组，故全概公式得

$$(1) \quad p = P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{2}{5};$$

$$(2) \quad P(A_1 A_2) = P(B_1)P(A_1 A_2|B_1) + P(B_2)P(A_1 A_2|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \times 9}{50 \times 49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18 \times 17}{30 \times 29} = \frac{276}{1421},$$

于是，由贝叶斯公式得 $q = P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{690}{1421} \approx 0.48557$ 。

数 学 (试 卷 V)

一、判断题 (每小题答对得 2 分, 答错得 -1 分, 不答得 0 分, 全题最低 0 分)

- (1) 【同数学IV 第一(1)题】
 (2) 【同数学IV 第一(2)题】
 (3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 严格单增, 则对区间 (a, b) 内任何一点 x 有 $f'(x) > 0$. (×)
 (4) 若 A 为 n 阶方阵, k 为常数, 而 $|A|$ 和 $|kA|$ 为 A 和 kA 的行列式, 则 $|kA| = k|A|$. (×)
 (5) 【同数学IV 第一(5)题】

二、选择题 (每小题 2 分, 满分 10 分)

- (1) 【同数学IV 第二(1)题】
 (2) 【同数学IV 第二(2)题】
 (3) 【同数学IV 第二(3)题】
 (4) 【同数学IV 第二(4)题】
 (5) 对于任二事件 A 和 B , 有 $P(A - B) =$ (C)
 (A) $P(A) - P(B)$ (B) $P(A) - P(B) + P(AB)$
 (C) $P(A) - P(AB)$ (D) $P(A) - P(\bar{B}) - P(A\bar{B})$

三、计算下列各题 (每小题 4 分, 满分 20 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arctg x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arctg x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x} = \frac{0}{\pi/2} = 0$

- (2) 【同数学IV 第三(2)题】
 (3) 【同数学IV 第三(3)题】

(4) 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx$

解: 令 $\sqrt{2x-1} = t$, 有 $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx = \int_0^1 e^t t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = 1$

(5) 求不定积分 $\int \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 5}$.

解: $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + c.$

四、(本题满分 10 分)

考虑函数 $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, 问:

(1) t 取何值时, 图中阴影部分的面积(与数学IV第四题类似) s_1 与 s_2 之和 $s = s_1 + s_2$ 最小?

(2) t 取何值时, $s = s_1 + s_2$ 最大?

解: $s = s_1 + s_2 = t^3 - \int_0^t x^2 dx + \int_t^1 x^2 dx - (1-t)t^2 = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}, (0 \leq t \leq 1)$

令 $s' = 0$, 得 $(0, 1)$ 内的驻点 $t = \frac{1}{2}$. 而 $s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $s(0) = \frac{1}{3}$, $s(1) = \frac{2}{3}$,

因此 $t = \frac{1}{2}$ 时, s 最小; $t = 1$ 时, s 最大.

五、(本题满分 5 分)【同数学IV 第六题】

六、(本题满分 8 分)

设某产品的总成本函数为 $C(x) = 400 + 3x + \frac{1}{2}x^2$, 而需求函数为 $p = \frac{100}{\sqrt{x}}$, 其中 x 为产量(假定等于需求量), p 为价格. 试求:

(1) 边际成本; (2) 边际收益; (3) 边际利润; (4) 收益的价格弹性.

解: (1) 边际成本: $MC = C'(x) = 3 + x$;

(2) 收益函数: $R(x) = p \cdot x = 100\sqrt{x}$, 边际收益 $MR = R'(x) = \frac{50}{\sqrt{x}}$;

(3) 利润函数: $L(x) = R(x) - C(x) = 100\sqrt{x} - 400 - 3x - \frac{1}{2}x^2$,

边际利润: $ML = L'(x) = \frac{50}{\sqrt{x}} - 3 - x$;

(4) 收益的价格函数: $R(x) = 100\sqrt{x} = \frac{(100)^2}{p}$,

收益的价格弹性: $\frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = -\frac{(100)^2}{p^2} \cdot \frac{p^2}{(100)^2} = -1$.

七、(本题满分 8 分)【同数学IV 第八题】

八、(本题满分 7 分)【同数学IV 第九题】

九、(本题满分 6 分)【同数学IV 第十题】

十、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$ ，
试写出 X 的分布函数 $F(x)$ ，并求 X 的数学期望与方差。

解： X 的分布函数为
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$EX = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.5 = 2.3; \quad EX^2 = 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.5 = 5.9$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5.9 - 2.3^2 = 0.61$$

十一、(本题满分 8 分)【同数学IV 第十二题】