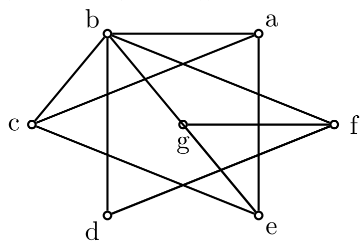
作业参考答案-特殊图

by　王丽杰

1. (a)(c)(d) 是欧拉图，(a)(b)(c)(d)(e) 可以一笔画，(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g) 是哈密顿图。

2. 根据给定条件建立一个无向图 $G=<V,E>$，其中：
   $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$
   $E=\{(u,v)|u,v\in V,$ 且 u 和 v 有共同语言$\}$
   从而图 G 如下图所示。

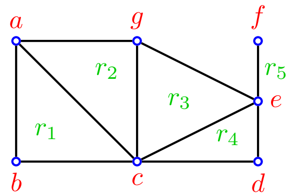
   将这 7 个人围圆桌排位，使得每个人都能与他两边的人交谈，就是在图 G 中找哈密顿回路，经观察上图可得到两条可能的哈密顿回路，即两种方案：abdfgeca 和 acbdfgea。

3. 证明（法一）：根据已知条件，每个结点的度数均为 n，则任何两个不相邻的结点 v_i,v_j 的度数之和为 2n，而图中总共有 2n 个结点，即 $deg(v_i)+deg(v_j)\geqslant 2n$，满足哈密顿图的充分条件，从而图中存在一条哈密顿回路，当然，这就说明图 G 是连通图。
   证明（法二）：用反证法，假设 G 不是连通图，设 H 是 G 的一个连通分支，由于图 G 是简单图且每个结点的度数为 n，则子图 H 与 G-H 中均至少有 n+1 个结点。所以 G 的结点数大于等于 2n+2，这与 G 中结点数为 2n 矛盾。所以假设不成立，从而 G 是连通图。

4. 将 n 位男士和 n 位女士分别用结点表示，若某位男士认识某位女士，则在代表他们的结点之间连一条线，得到一个偶图 G，假设它的互补结点子集 V_1、V_2 分别表示 n 位男士和 n 位女士，由题意可知 V_1 中的每个结点度

数至少为 2，而 V_2 中的每个结点度数至多为 2，从而它满足 t 条件 $t=1$，因此存在从 V_1 到 V_2 的匹配，故可分配。

5. 此平面图具有五个面，如下图所示。



- r_1，边界为 $abca$，$D(r_1)=3$;
- r_2，边界为 $acga$，$D(r_2)=3$;
- r_3，边界为 $cegc$，$D(r_3)=3$;
- r_4，边界为 $cdec$，$D(r_4)=3$;
- r_5，边界为 $abcdefega$，$D(r_5)=8$;无限面

6. 设该连通简单平面图的面数为 r，由欧拉公式可得，$6-12+r=2$，所以 $r=8$，其 8 个面分别设为 $r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7,r_8$。因是简单图，故每个面至少由 3 条边围成。只要有一个面是由多于 3 条边所围成的，那就有所有面的次数之和 $\sum\limits_{i=1}^{8} D(r_i) > 3\times 8 = 24$。但是，已知所有面的次数之和等于边数的两倍，即 2×12=24。因此每个面只能由 3 条边围成。