2019 考研数学一考试真题（完整版）

来源：文都教育

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

A.1.
B.2.
C.3.
D.4.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x<0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则 x=0 是 f（x）的

A.可导点，极值点.
B.不可导点，极值点.
C.可导点，非极值点.
D.不可导点，非极值点.

3.设｛u_n｝是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$.

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

4. 设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面（y>0）内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$，那么函数 $P(x,y)$可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$.

B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.

C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.

D. $x-\dfrac{1}{y}$.

5.设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$，且 | A | =4，则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

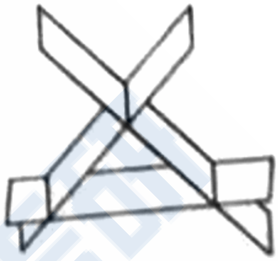
B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6.如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$$



组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则

A. $r(A)=2,r(\overline{A})=3$.

B. $r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

C. $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.

D. $r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

7.设 A，B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都要从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\ |X-Y|<1$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关

B.与 μ 有关，而与 σ^2 无关

C.与 μ， σ^2 都有关

D.与 μ， σ^2 都无关

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9.设函数与 $f(u)$ 可导， $z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$__________.

11.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $0,+\infty$ 内的和函数 $S(x)=$__________.

12.设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

13.设$A=(a_1,a_2,a_3)$为3阶矩阵，若a_1,a_2线性无关，且$a_3=-a_1+2a_2$，则线性方程组$Ax=0$的通解为____________.

14.设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $F(X)$为X的分布函数，EX为X的数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$____________.

三、解答题：15～23小题，共94分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

解答题（高等部分）

15.设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

16.设a，b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点（3，4）处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为10.

（1）求a，b

（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$的面积.

17.求曲线$y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$与x轴之间图形的面积.

18.设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列｛a_n｝单调减少，且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

19.设Ω是由锥面在$x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$与平面$z$=0围成的锥体，求$\Omega$的形心坐标。

20.设向量组$x_1=(1,2,1)^T$ $x_2=(1,3,2)^T$ $x_3=(1,a,3)^T$为R^3的一个基，$\beta=(1,1,1)^T$在基下的坐标$(b,c,1)^T$.

（1）求a,b,c

（2）证明α_2,α_3,β为R^3的一个基.并求α_2,α_3,β到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵.

21.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似.

（1）求x、y

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$

22. 设随机变量 X 与 Y 独立.X 服从参数为 1 的指数分布.Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$，令 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度.

（2）p 为何值时，X 与 Y 不相关？

（3）X 与 Z 是否相互独立？

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu.\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 考研数学一考试真题答案解析（完整版）

来源：文都教育

1.$\because x-\tan x\sim -\dfrac{x^3}{3}$ 若要 $x-\tan x$ 与 x^b 同阶无穷小，$\therefore k=3$

$\therefore$ 选 C

2. ① $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x|x|-0}{x}=0 \quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ 不存在

$\therefore x=0$ 处 $f(x)$ 不可导

②当 $x<0$ 时 $f(x)=-x^2 \quad \because f'(x)=-2x>0 \quad \therefore f(x)$ 单增

当 $x>0$ 时 $f(x)=x\ln x \quad \because f'(x)=\ln x+1 \quad x\in(0,\mathrm{e}^{-1})$ 时 $f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 单减 $\quad \therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点

$\therefore$ 选 B.

3.（D）

$\because$ $\{a_n\}$单调增加有界

$\therefore$ 由单调有界收敛定理可得

$\{u_n\}$极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$的前 n 项和为

$S_n=u_2^2-u_1^2+\cdots+u_{u+1}^2-u_n^2$
$=u_{n+1}^2-u_1^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2=A-u_1^2$.选（D）

4.由题意知，积分与路径无关

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

存在 $u(x,y)$使得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\because \ Q=\dfrac{x}{y^2}$

$\therefore \ u(x,y)=-\dfrac{x}{y}+c(x)$

则 $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{y}+c'(x)$

又$\because$ x 可为 0

$\therefore$ 排除 e，选（D）

5.选（C）

解：由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值，
$\boldsymbol{\lambda}$=-2 或 1，

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2, \lambda_3=1$，

规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

6.选（A）
解：由条件知 3 张平面无公共交点，方程组无解，

故 $r(A)\neq r(\overline{A})$.

又两平面交于一条直线，故 $r(A)=2$，

因此 $r(A)=2, r(\overline{A})=3,$ 选（A）.

7.选（C）

解：$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$\because P(A)=P(B)$ $\therefore P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 选（C）

8.解：因为 $X\sim N(u,\sigma^2)$ $Y\sim N(u,\sigma^2)$ X 与 Y 相互独立

$$\therefore X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$$

$$\therefore P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$$

$\therefore$ 与 u 无关，即与 σ^2 有关　选择（A）

9.解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(\cos y)+x$$

所以

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}+y\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\cos yf'(\sin y-\sin x)+\frac{x}{\cos y}$$

$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$

10.解析：

$$2yy'-y^2-2=0$$

$$y'=\frac{y^2+2}{2y}$$

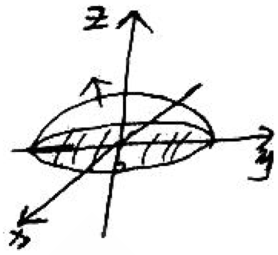
$$\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$$

两边积分得 $\ln(y^2+2)=x+\ln C$

$y^2+2=Ce^x$

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$

所以 $y=\sqrt{3e^x-2}$



11.解析：$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x}^{2n})=\cos\sqrt{x}$

12.解析：

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 4}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{3}$$

13.解：$\because$ α_1,α_2 线性无关.　　$\therefore$ $r(A)\ge 2$

$\because$ $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_3$　　$\therefore$ $r(A)<3$　　$\therefore$ $r(A)=2$

$\therefore$ $Ax=0$ 为基础解系有 $n-r(A)=3-2=1$

$\because$ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

$$\therefore\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore$ 通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$　$k\in R.$

14. X 的 $p.d.f$ 为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & else\end{cases}$

$$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\{F(x)\ge Ex-1\}=P\{F(x)\ge\frac{1}{3}\}=P\{x\ge 2\}\ne P\{\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2\}$$

$$=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}=\frac{1}{4}(4-\frac{4}{3})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

15.解： $P(x)=x\qquad Q(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\because\ y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x+c)$$

$\because$ $y(0)=0$ $\qquad\therefore$ c=0

$\therefore$ $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$\therefore$

$$y'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y''(x)=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=(x^3-3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $y''(x)=0$

$\therefore$ $x_1=0\qquad x_2=\sqrt{3}\qquad x_3=-\sqrt{3}$

当 $-\sqrt{3}<x<0$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时， $y''(x)>0$

$\therefore$ $y(x)$的凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$

当 $x<-\sqrt{3}$ 或 $0<x<\sqrt{3}$ 时， $y''(x)<0$.

$\therefore y(x)$的凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$

所以曲线 $y(x)$的拐点为（0，0），$(\sqrt{3},\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$

16.解：（1）在点（3，4）处的梯度方向为

$$\operatorname{grad} z|_{(3,4)}=(z_x'(3,4),z_y'(3,4))=(6a,8b)$$

且$|\operatorname{grad} z|_{(3,4)}|=10,$

由题意知$\begin{cases}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{6a}{10}\\-\dfrac{4}{5}=\dfrac{8b}{10}\end{cases}$，故$\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$.

（2）由（1）知$z=2-x^2-y^2$，

由$z\geq 0$得$x^2+y^2\leq 2$，

令 $D=\{x,y\,|\,x^2+y^2\leq 2\}$，

曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}a\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\times\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{13\pi}{3}$$

17.解析：（1）$y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

通解 $y=e^{\ xdx}\left|\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\ (-x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right|$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left|\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right|$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left|\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right|$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$$

由 $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}=(C+1)\sqrt{\mathrm{e}}$ 得 $C=0$

所以 $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

（2）

$$V_x=\pi\int_1^2\left|\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right|^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_1^2 x\cdot e^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4\text{-}e\right)$$

18.设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

解析（1）$a_n-a_{n-1}=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$. 则 $\{a_n\}$ 单调递减.

$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\underline{\underline{x=\sin t}}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)dt=I_n-I_{n+2}=\dfrac{1}{n+2}I_n$, 则

$a_{n-2}=\dfrac{1}{n}I_{n-2}$, 则 $a_n=a\dfrac{n-1}{n(n+2)}I_{n-2}=\dfrac{n-1}{(n+2)}a_{n-2}$.

（2）由（1）知，$\{a_n\}$ 单调递减，则 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$, 即 $\dfrac{n-1}{n+2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$.

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19.设 Ω 是由锥面 $x^2+\left(y-z^2\right)=(1-z)^2(0\quad z\quad 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解：令 $D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+\left(y-z^2\right)\le\left(1-z\right)^2\right\}$，形心为 $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\right)$，

由于 Ω 关于 yOz 面对称.

故 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)r\mathrm{d}r}{\int_0^1\pi(1-z)^2\mathrm{d}z}$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z(1-z)^2+\frac{1}{3}(1-z)^3\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\pi(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}$$

,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\pi}{3}\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\pi}\int_0^1 z\cdot\pi(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

故Ω的形心坐标为$\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

20.（1）由题意可知，$\boldsymbol{\beta}=b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

即 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c+1\\2b+3c+a\\b+2c+3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}b+c=0\\2b+3c+a=1\\b+2c=-2\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\2&3&1&1\\1&2&0&-2\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&-2\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

$\therefore b=2,c=-2,a=3$

(2)$|\alpha_2,\alpha_3,\beta|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0\therefore\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关.

且向数量个数为 3 个$\therefore\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 是 R^3 的一个基.

$$(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=(\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_1,-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(P\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&2&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore(\alpha_2,\alpha_3,\beta)\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

即 $(\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ 到 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似

（1）

$\because$

$\therefore A \sim B$

$\therefore tr(A)=tr(B) \Rightarrow \begin{cases} x-4=1+y \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=-2 \end{matrix}$

$$(2)\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(x-2)=0$$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=2$

$$\lambda=-1\text{时}, A+E=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi=(-2,1,0)^T$$

$$\lambda=-2\text{时}, A+2E=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_2=(-1,2,4)^T$$

$$\lambda=2\text{时}, A-2E=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi=(-1,2,0)^T$$

$$P_1=(\xi_1, \xi, \xi_3)=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda=-1\text{时，}B+E=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad x_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_2=-2\text{时，}B+2E=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad x_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda3=2\text{时，}B-2E=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad x_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$P_2=(x_1x_2x_3)\qquad P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}$$

$$B=P_2\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}P_2^{-1}$$

$$B=P_2P_1^{-1}(A_2)P_1P_2-1$$

故$P=P_1P_2^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\1&2&2\\0&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

22. （1）随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}\\&=P\{X\le z,Y=1\}+P\{X\ge -z,Y=-1\}\\&=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p(1-F_X(-z))=pe^{z}$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))=(1-p)(1-e^{-z})+p$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0\\ pe^{z}, & z\le 0\end{cases}$

（2）$EX=1, EZ=E(XY)=EX\cdot EY=1-2p$

$$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=(DX+(EX)^2)(1-2p)=2(1-2p)$$

当 $E(XZ)=E(X^2)E(Z)$ 时，X,Z 不相关. 即 $1-2p=2(1-2p)$，可得 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）因为 $P\{X\le 1,Z\le -1\}=P\{X\le 1,Y=-1,X\ge 1\}=0$

又 $P\{X\le 1\}=1-e^{-1}$，$P\{Z\le -1\}=pe^{-1}$

则 $P\{X\le 1,Z\le -1\}\ne P\{X\le 1\}\cdot P\{Z\le -1\}$，故不独立.

23. （1）由 $\int_{\mu}^{+\infty}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=A\sqrt{2}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=\dfrac{A\sqrt{2\pi}}{2}=1$ 可得：$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^n}\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & else\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时，

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}(\ln 2-\ln\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\dfrac{d(\ln L(\sigma^2))}{d\sigma^2}=-\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$，可得 $\sigma^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_1-\mu)^2}{n}$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_1-\mu)^2}{n}$.