（第五题）今为$1,2,\cdots,n$这n个数的每个排列$a_1\ a_2\cdots a_n$定义一个逆序表$b_1\ b_2\cdots b_n$，其中b_j为在排列中数字j的左边比j大的数的个数. 例如：对于排列

5 9 1 8 2 6 4 7 3

其逆序表为

2 3 6 4 0 2 2 1 0

上述逆序表中第 3 个数为 6 表示原排列中数“3”左边有 6 个数比它大.

(1) 请给出排列 1 3 5 7 9 8 6 4 2 的逆序表；

(2) 若将一个排列映射为一个逆序表，试证明该映射为单射.

(1) 解：该排列的逆序表为 0 7 0 5 0 3 0 1 0

(2) 证明： 记这个映射为f，设$f(a_1\ a_2\cdots a_n)=b_1\ b_2\cdots b_n=f(a_1'a_2'\cdots a_n')$，

今证$a_1\ a_2\cdots a_n=a_1'\ a_2'\cdots a_n'$。

记$H_k(a_1\ a_2\cdots a_n)$为$a_1\ a_2\cdots a_n$中删除$1,2,\cdots,n-k$，而得到的数列（它是$n-k+1,\mathrm{n-k}+2,\cdots,n$这$k$个数的某个排列）。令命题$P_k$为

$$H_k(a_1\ a_2\cdots a_n)=H_k(a_1'\ a_2'\cdots a_n'),\quad 1\le k\le n,$$

当$k=1$时，$H_k=[n]$，唯一确定。(其实b_n一定是0)；

现证明$P_k\Rightarrow P_{k+1}\quad(1\le k\le n-1)$.

注意到对于数$n-k$，$1,2,\cdots,n-k-1$这些较小数不会影响b_{n-k}，而其他较大的数都在$H_k(a_1\ a_2\cdots a_n)$中，于是$H_{k+1}(a_1\ a_2\cdots a_n)$必为将$n-k$插入$H_k(a_1\ a_2\cdots a_n)$中的前$b_{n-k}$个数之后而得的数列。故$H_{k+1}(a_1\ a_2\cdots a_n)=H_{k+1}(a_1'a_2'\cdots a_n')$。

于是 $a_1\ a_2\cdots a_n=H_n(a_1\ a_2\cdots a_n)=H_n(a_1',a_2'\cdots a_n')=a_1',a_2'\cdots a_n'$，可知$f$为单射。

证毕。