有限集合的计数

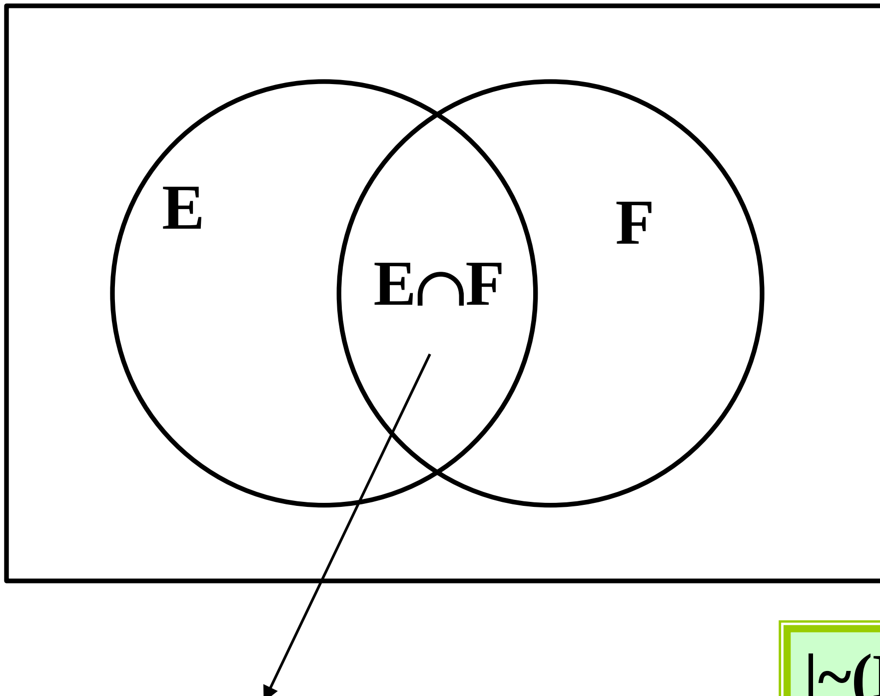
离散数学—计数技术

南京大学计算机科学与技术系

内容

- 有限集的计数
- 容斥原理
- 错位排列
- 鸽巢原理

有限集的基数（如何计算？）



既学英语，又学法语的同学

假设全班共100人，记为

$$|U| = 100$$

学英语的50人，学法语的30人，分别记为：

$$|E| = 50; |F| = 30$$

既不学英语，也不学法语的人数可能多于20人。

$$|\sim(E \cup F)| = |U| - |E \cup F|$$

$$= |U| - ((|E|+|F|) - |E \cap F|)$$

多少种排法?

- 将0,1,2,...,9排成一列，要求第1个数字大于1，最后一个数字小于8，共有多少种排法?
  - 这10个数字所有的排法构成全集U, |U|=10!
  - 第1个数字不大于1的排法构成子集A(即所有以0或者1开头的排法), |A|=2⋅9!
  - 最后一个数字不小于8的排法构成子集B(即所有以8或者9结束的排法), |B|=2⋅9!
  - $|A\cap B|=2\cdot 2\cdot 8!$
  - 题目要求的排法构成子集$(\sim A\cap \sim B)$
  - $|(\sim A\cap\sim B)| = |U| - |A\cup B| = |U| - |A| - |B| + |A\cap B| = 10! - 4\cdot 9! + 4\cdot 8! = 2{,}338{,}560$

三个集合的并集（计算基数）

- 假设定义全集的三个子集A,B,C。则：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

- 证明：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|\\ &= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|\\ &= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)|-|(B\cap C)|+|(A\cap B\cap C)|\\ &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

关于选课的例子

- 全班共有160个学生
  - 选数学课64人，选计算机课94人，选金融课58人
  - 选数学与金融的28人，选数学与计算机的26人，选计算机与金融的22人
  - 三种课全选的14人。
- 问：这三种课都没选的是多少？只选一门计算机的有多少？

问题的解

- **M-数学、C-计算机、F-金融**
- 包含-排斥原理

$|M\cup C\cup F|=|M|+|C|+|F|-|M\cap F|-|M\cap C|-|C\cap F|+|M\cap C\cap F|$

$=64+94+58-28-26-22+14$

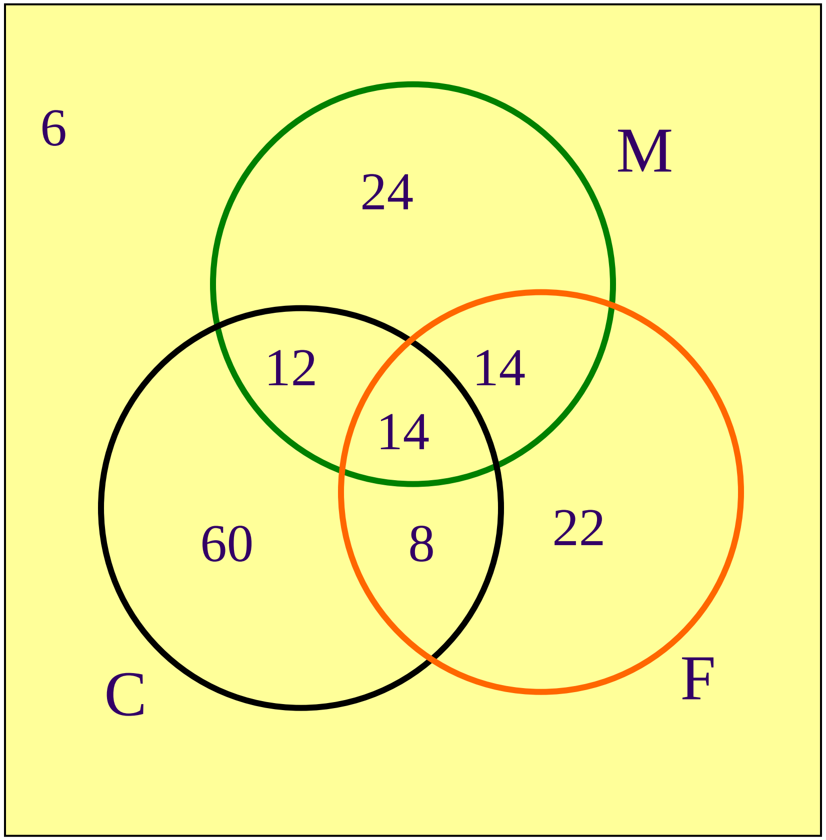
$=154$

未选课的6人。

只选了计算机课的60人

$|C|-|C\cap(M\cup F)|=$

$|C|-|M\cap C|-|C\cap F|+|M\cap C\cap F|$



容斥原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

假设全集含N个元素，$A_1, A_2, ..., A_n$是分别满足相应性质的元素构成的子集合。则不满足任何性质的集合的元素个数是：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中，$S_k = \sum\limits_{1\le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \quad k = 1,2,\ldots,n$

例如：4个子集的公式为：

N - (|S$_1$|+ |S$_2$|+ |S$_3$|+ |S$_4$|)

+ (|S$_1$∩S$_2$|+|S$_1$∩S$_3$|+|S$_1$∩S$_4$|+|S$_2$∩S$_3$|+|S$_2$∩S$_4$|+|S$_3$∩S$_4$|)

- (|S$_1$∩S$_2$∩S$_3$|+|S$_1$∩S$_2$∩S$_4$|+|S$_1$∩S$_3$∩S$_4$|+|S$_2$∩S$_3$∩S$_4$|)

+ |S$_1$∩S$_2$∩S$_3$∩S$_4$|

容斥原理的证明

- 计数公式：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 证明：满足1个或多个性质的元素恰好被计数1次.
  - 设对象*a*出现在m个(A_i)集合中
  - *a*在S_1中被计数C_1^m次，S_k中被计数恰好C_k^m次
  - 将上述分析带入计数公式可得：

$$C_1^m - C_2^m + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

    - 该计算式值为1，因为当*x*=1时下式为0：

$$(1-x)^m = 1 - C_1^m x + C_2^m x^2 + \ldots + (-1)^k C_k^m x^k + \ldots + (-1)^m C_m^m x^m$$

  - *a*恰好被计数1次

埃拉托色尼筛选法(Sieve of Eratosthenes)

- 用筛选法求质数（以25以内的为例）

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[2] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[3] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[5] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

100以内有多少质数

- 100以内的任意合数必有不大于其平方根的质数为其因子。这样的质数只有4个：{2, 3, 5, 7}
- 设A₂, A₃, A₅, A₇ 分别是可被相应质数整除的100以内大于1的自然数的集合。则100以内质数的数量为：

[2..100]

$$N(\overline{A_2 A_3 A_5 A_7}) + 4 = 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor$$

$$+ \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor$$

$$- \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \underline{+4}$$

why?

$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4$$

$$= 25$$

Euler's totient (ϕ函数, Phi)

- $\phi(n) = |\{ k \mid 1 \le k \le n ,\ \gcd(k, n) = 1\}|,\ n \in Z^+$
  - $\phi(3) = 2,\ \phi(4) = 2,\ \phi(12) = 4$
- 设 $n = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_k^{\alpha k}$
- 令 $A_i = \{ x \mid 1 \le x \le n ,\ p_i$ 整除 $x\}$
- $\phi(n) = |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_k|$

$$= n - (n/p_1 + \ldots + n/p_k) + (n/p_1p_2 + \ldots + n/p_{k-1}p_k)$$

$$- \ldots + (-1)^k\, n/p_1p_2 \ldots p_k$$

$$= n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \ldots (1 - 1/p_k)$$

粗心的衣帽间管理员

- 剧场的衣帽管理间新来了一个粗心的管理员,他忘了给每个客人的帽子夹上号码牌。散场时他只好随意地将帽子发还给客人。没有任何人拿到自己的帽子的概率是多少？
- 这可以看作一个排列问题：对标号为1,2,3,…,n的n个帽子重新排列，新的序号为i_1, i_2, i_3,…,i_n。上述问题即：满足对任意k ($1 \le k \le n$), $i_k \ne k$的排列出现的概率是多少？
- 这样的排列称为“错位排列”(derangement)。
- 适当的集合模型使问题得到简化。

错位排列的个数 – 推导

- 我们将$i_k=k$称为“性质A_k”。满足性质A_k的排列构成所有排列的一个子集A_k。

错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

S_k如前面的定义，即 $\sum_{1\le i_1\le i_2\ldots\le i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$

注意：保持k项不变的置换，即其余$n-k$项可任意排列。

所以：

$$S_1 = \binom{n}{1}(n-1)!;\ S_2 = \binom{n}{2}(n-2)!;\ \ldots,\ S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

错位排列的个数 – 计算

我们已经知道错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

将诸$S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}(k = 1,2,3,\ldots,n)$代入上面的式子：

$\therefore N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$; $\therefore$ 要求的概率是：$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

注意：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$，所以这概率值与$e^{-1} \approx 0.367879$误差小于$\frac{1}{n!}$;

换句话说，除了较小的n，所求概率约为0.36788。

Pigeonhole Principle (Dirichlet, 1834)

- If n pigeons are assigned to m pigeonholes, and $m<n$, then at least one pigeonhole contains two or more pigeons.
  - Proof by contradiction:

    Suppose each pigeonhole contains at most 1 pigeon. Then at most m pigeons have been assigned. Since $m<n$, so $n-m>0$, there are $(n-m)$ pigeons have not been assigned. It's a contradiction.

Extended Pigeonhole Principle

- If n pigeons are assigned to k pigeonholes, then one of the pigeonholes must contain at least $\lceil n/k \rceil$ pigeons.
  - Proof by contradiction

  If each pigeonhole contains no more than $\lceil n/k \rceil$ -1, then there are at most $k(\lceil n/k \rceil - 1) < n$ pigeons.

  It's a contradiction.

Pigeonhole (birthday example)

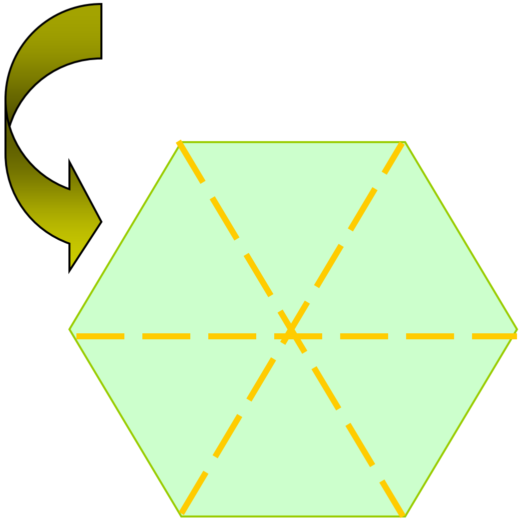
- Problem1: there are 56 students in our class. How many students at least were born in the same month?
- Solution:
  - Hint: In eight people, there are 2 people at least were born in same weekday.

Examples

- If any 11 numbers are chosen from the set {1,2,….20}, then one of them will be a multiple of another
  - $a_j=2^{kj}\,q_j$ ([1], [3], [5], [7], ….[19])
- Show that if any five numbers from 1 to 8 are chosen, then two of them will add to 9
  - What is the pigeonhole and what is the pigeon?

Not Too Far Apart

Problem: We have a region bounded by a regular hexagon whose sides are of length 1 unit. Show that if any seven points are chosen in this region, then two of them must be no farther apart than 1 unit.



The region can be divided into six equilateral triangles, then among 7 points randomly chosen in this region must be two located within one triangle.

Shaking Hands at a Gathering

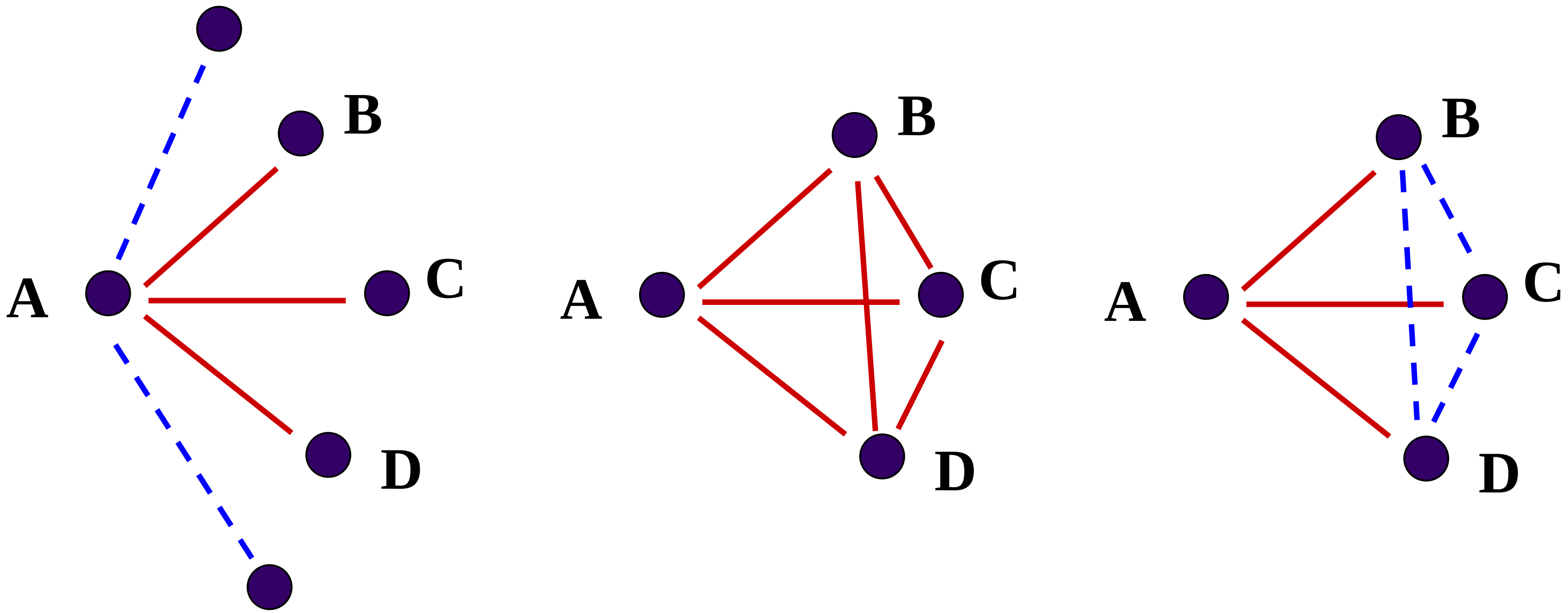
- **Situation**: at a gathering of *n* people, everyone shook hands with at least one person, and no one shook hands more than once with the same person.
- **Problem**: show that there must have been at least two of them who had the same number of handshaking.
- **Solution**:
  - Pigeon: the *n* participants
  - Pigeonhole: different number between 1 and *n*-1.

再例

- 任给一个正整数n,总存在一个它的倍数，其十进制表示中只有0和1两个数字符
  - 任给n，构造含有n+1个数的数列
    - 1，11，111，1111，…,，11**11
  - 上述n+1个数必有两个数模n同余
  - 两数差：n的倍数，只有0和1

朋友和陌生人定理

任意6人中, 至少有3人相互认识, 或者至少有3人互不相识.



作业

- 教材[5.1.4, 5.2, 7.5, 7.6]
  - p. 265： 16, 22, 40
  - p. 271： 8, 26, 40
  - p. 386： 8, 21, 22
  - p. 392： 2, 15