1994 年全国硕士研究生入学统一考试
数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$ = $\underline{\frac{1}{6}}$.

(2) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{2x+y-4=0}$.

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在 $(2,\frac{1}{\pi})$ 点处的值为 $\underline{(\frac{\pi}{e})^2}$.

(4) 设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$ $\underline{\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})}$.

(5) 已知 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，设 $A=\alpha'\beta$，其中 α' 是 α 的转置，则 $A^n=\underline{3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}}$

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有 (D)

(A) N < P < M (B) M < P < N (C) N < M < P (D) P < M < N

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (D)

(A) 充分条件而非必要条件 （B）必要条件而非充分条件

(C) 充分必要条件 （D）既非充分条件又非必要条件

(3) 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ (C)

(A) 发散 （B）条件收敛 （C）绝对收敛 （D）收敛性与 λ 有关

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{atgx+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\ne 0$，则必有 （D）

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

(5) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组 (C)

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$线性无关

(B) $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(C) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(D) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 设$\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du, \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$的值.

解： 因$\dfrac{dx}{dt}=-2t\sin(t^2),\dfrac{dy}{dt}=-2t^2\sin\left(t^2\right),$ ……2 分

故$\dfrac{dy}{dx}=t,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(t)'_t}{x'_t}=-\dfrac{1}{2t\sin(t^2)},$ ……4 分

所以$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\left.\dfrac{d^2y}{\partial x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.$ ……5 分

(2) 将函数$f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}arctgx-x$展开成$x$的幂级数.

解： 因$f'(x)=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x})+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}-1=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n},(-1<x<1)$ ……3 分

且$f(0)=0$

故$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n})dt=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$.……5 分

(3) 求$\int\dfrac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}$

解一 原式$=\int\dfrac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$ ……2 分

$=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dtg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{1+tg^2\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}d(tg\frac{x}{2})$ ……4 分

$=\dfrac{1}{8}tg^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C.$ ……5 分

解二 原式$=\int\dfrac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\dfrac{\sin xdx}{2(1-cox^2x)(1+\cos x)}$ ……2 分

$$\underline{\underline{\cos x = u}} -\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2} = -\frac{1}{8}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{3+u}{1+u^2})du \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{8}[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}]+C$$

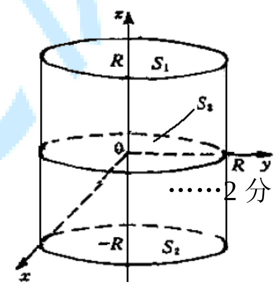
$$=\frac{1}{8}[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}]+C. \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\oiint\limits_S \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R\ (R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

解： 设 S_1,S_2,S_3 依次为 S 的上、下底和圆柱面部分，则

$$\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0. \qquad \cdots\cdots 1\text{ 分}$$



记 S_1,S_2 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint\limits_{S_1+S_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{Dxy}\frac{R^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}-\iint\limits_{Dxy}\frac{(-R)^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}=0. \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$\text{在}S_3\text{上},\iint\limits_{S_3}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0, \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

记 S_3 在 yOz 平面上的投影区域为 D_{yz}，则

$$\iint\limits_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{Dyz}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}-\iint\limits_{Dyz}-\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}=2\iint\limits_{Dyz}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}$$

$$=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{dz}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R,\ \text{所以, 原积分}=\frac{1}{2}\pi^2 R. \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

五、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0, f'(0)=1$，且 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为一全微分方程, 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解： 由全微分方程的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，知

$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$，即 $f''(x)+f(x)=x^2$. ……2 分

解得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$. ……5 分

由 $f(0)=0, f'(0)=1$，求得 $C_1=2, C_2=1$，从而有 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$. ……6 分

于是原方程为 $[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]dx+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)dy=0$，

其通解是 $-2y\sin x+y\cos x+\dfrac{x^2y^2}{2}+2xy=C$. ……9 分

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛..

证： 由题设推知 $f(0)=0, f'(0)=0$. ……2 分

$f(x)$在点$x=0$的某邻域内的一阶Taylor展开式为

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(\theta x)x^2=\dfrac{1}{2}f''(\theta x)x^2(0<\theta<1)$. ……5 分

再由题设, $f''(x)$在属于该邻域内包含原点的一小闭区间上连续, 故存在M>0,

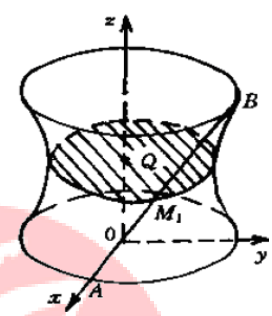
使$|f''(x)|\le M$, 于是$|f(x)|\le\dfrac{M}{2}x^2$. 令$x=\dfrac{1}{n}$, 当n充分大时, 有$\left|f(\dfrac{1}{n})\right|\le\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$. ……7 分

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛. ……8 分

七、(本题满分 6 分)

已知点 A 与 B 的直角坐标分别为$(1,0,0)$与$(0,1,1)$，线段 AB 绕 Z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 Z=0，Z=1 所围成的立体体积..

解： 直线 AB 的方程为：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, 即$\begin{cases}x=1-z\\ y=z\end{cases}$. ……2 分



在 z 轴上截距为 z 的水平面截此旋转体所得截面为一个圆，

此截面与 z 轴交于点 Q(0,0,z),与 AB 交于点 $M_1(1-z,z,z)$，

故圆截面半径 $r(z)=\sqrt{(1-z)^2+z^2}=\sqrt{1-2z+2z^2}$. ……4 分

从而截面面积 $S(z)=\pi(1-2z+2z^2)$,

旋转体体积 V=$\pi\int_0^1(1-2z+2z^2)dz=\dfrac{2}{3}\pi$. ……6 分

八、(本题满分 8 分)

设四元线性齐次方程组**(I)**为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\end{cases}$，又已知某线性齐次方程组**(II)**的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$.

(1) 求线性方程组**(I)**的基础解系. 【 $(0,0,1,0)^T$，$(-1,1,0,1)^T$ 】

(2) 问线性方程组(I)及(II)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；

若没有，则说明理由.

解：(1) 由已知，(I)的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，

故(I)的基础解系可取为$(0,0,1,0)$，$(-1,1,0,1)$. ……3 分

(2) 有非零公共解.

将(II)的通解代入方程组(I)，则有$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\ k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}$，解得$k_1=-k_2$. ……5 分

当$k_1=-k_2\neq 0$时，则向量

$k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_2[(0,-1,-1,0)+(-1,2,2,1)]=k_2(-1,1,1,1)$满足方程组(I)（显然是(II)的解），故方程组（I）（II）有非零公共解，所有非零公共解是$k(-1,1,1,1)$，其中k是不为 0 的任意常数. ……8 分

九、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵，A^*是A的伴随矩阵，A'是 A 的转置矩阵，当$A^*=A'$时，证明$|A|\neq 0$.

解： 由公式$AA^*=|A|I$，故$AA'=|A|I$. ……2 分

若$|A|=0$，则有$AA'=0$.设A的行向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots n)$，则$\alpha_i\alpha_i'=0\,(i=1,2,\cdots,n)$，即$\alpha_i=0,i=1,2,\cdots,n$.于是$A=0$，这与$A$是非零阵矛盾，故$|A|\neq 0$. ……6 分

十、填空题 (本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

(1) 已知$P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，$P(A)=p$，则$P(B)=$ <u>1- p</u> .

(2) 设相互独立的随机变量 X、Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量$Z=\max\{X,Y\}$的分布律为：

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

十一、(本题满分 6 分)

若随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$，且 X 与 Y 的相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

(1) 求 Z 的数学期望 EZ 和和方差 DZ； **(2)** 求 X 与 Z 的相关系数ρ_{XZ}；

(3) 问 X 与 Z 是否独立？为什么？

解：(1) $EZ=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3}$， ……1 分

$DZ=\frac{3^2}{3^2}+\frac{4^2}{2^2}+2(-\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{2}=1+4-2=3$. ……2 分

(2) 因 $Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4=0$，

所以 $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0$. ……4 分

(3) 因 X,Y 均是正态，故 Z 也是正态，又 $\rho_{XZ}=0$，所以 X 与 Z 相互独立. ……6 分

【**笔者注:** 第(3)问原始答案有误.要由 $\rho_{XZ}=0$ 推出 X 与 Z 独立,须以二元正态分布为前提】

数　学（试卷二）

一 ~ 三、【 同数学一　第一 ~ 三题】

四、(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

(1) 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解： 设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 是距离

$d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$ 为求 d 的最小值点，只需求 d^2 的最小值点　　……2 分

令 $F(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，由 Lagrange 乘数法，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0.\ 即\begin{cases}\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\ \dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$　　……4 分

解之得 $x_1=\dfrac{8}{5},y_1=\dfrac{3}{5};x_2=-\dfrac{8}{5},y_2=-\dfrac{3}{5}$.于是 $d\big|_{(x_1,y_1)}=\dfrac{1}{\sqrt{13}},d\big|_{(x_2,y_2)}=\dfrac{11}{\sqrt{13}}$，

由问题的实际意义知最短距离是存在的,因此 $(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$ 即为所求的点　　……6 分

(2)【 同数学一　第四题 】

五 ~ 七、【 同数学一　第五 ~ 七题】

八、(本题共 2 小题，满分 14 分)

(1) (本题满分 6 分) 设 A 是 n 阶方阵，$2,4,6,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值，I 是 n 阶单位阵，

计算行列式 $|A-3I|$ 的值.

解： 已知 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，故存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}，即\ A=P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}.$$　　……2 分

因此 $\left|A-3I\right|=\left|P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}-3I\right|=\left|P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}-3PP^{-1}\right|$ ……4 分

$=\left|P\left[\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\right]P^{-1}\right|=\left|P\right|\begin{vmatrix}-1&&&&\\&1&&&\\&&3&&\\&&&\ddots&\\&&&&2n-3\end{vmatrix}\left|P^{-1}\right|$

$=-[(2n-3)!!]$. ……6 分

【笔者另解】：因 A 的 n 个特征值为 $2,4,6,\cdots,2n$，

故 $I-3I$ 的 n 个特征值为：$-1,1,3,\cdots,2n-3$，

所以 $\left|A-2I\right|=-1\times1\times3\times\cdots\times(2n-3)=-[(2n-3)!!]$

（2）(本题满分 8 分)【 同数学一 第八题 **】**

九、(本题满分 6 分)【 同数学一 第九题 **】**

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ $\underline{-2}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}}$.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)dt\right)=$ $\underline{-3\sin 3x\, f(\cos 3x)}$.

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$ $\underline{\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C}$.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为 $\underline{(x-4)y^4=cx}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 (A)

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$ (C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 (B)

(A) 左、右导数都存在 (B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 左导数不存在，但右导数存在 (D) 左、右导数都不存在

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 （C）

(A) x_0 的某个邻域内单调增加 (B) x_0 某个邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值 (D) x_0 处取得极大值

(4) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 (B)

（A）1 条 （B）2 条 （C）3 条 （D）4 条

(5) 【 同数学一 第二、(1) 题 】

三、(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$y'=(1+y')f',y'=\dfrac{f'}{1-f'}$ ……2 分

$y''=(1+y')^2f''+y''f',\ y''=\dfrac{(1+y')^2f''}{1-f'}=\dfrac{f''}{(1-f')^3}$. ……5 分

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

解：设 $x^2=\sin t$，则 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$. ……1 分

$\therefore \int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$ ……3 分

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{32}$. ……5 分

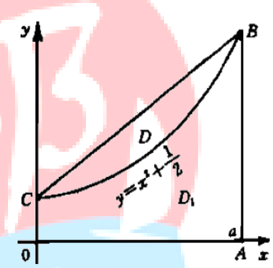
(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} tg^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln tg^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{1+tg\frac{2}{n}}{1-tg\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln[1+\dfrac{2tg\frac{2}{n}}{1-tg\frac{2}{n}}]$ ……2 分

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{2tg\frac{2}{n}}{1-tg\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{1-tg\frac{2}{n}}\dfrac{tg\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=4,\therefore \lim\limits_{n\to\infty} tg^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})=e^4$. ……5 分

(4) 【 同数学一 第三、(4) 题】

(5) 如图,设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$,梯形 OABC 的面积为 D,曲边梯形 OABC 的面积为 D_1，点 A 的坐标为（a,0），$a>0$，证明：$\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.



证：$D_1=\int_0^a(x^2+\dfrac{1}{2})dx=\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{(2a^2+3)a}{6}$ ……2 分

$D=\dfrac{\frac{1}{2}+a^2+\frac{1}{2}}{2}a=\dfrac{(a^2+1)a}{2}$ ……3 分

$$\frac{D}{D_1}=\frac{\frac{(a^2+1)a}{2}}{\frac{(2a^2+3)a}{6}}=\frac{3}{2}\frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}}.\quad \because \frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}}<1,\quad \therefore \frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}.$$ ……5 分

四、(本题满分 9 分)

设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

解： 设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，则 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$. ……3 分

(1) 当 $k\le 0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 为递减函数，

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，而当 $k<0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，当 $k=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

故当 $k\le 0$ 时，原方程在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个解 ……6 分

(2) 当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，且为极小值点.

由于 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的，所以当极小值 $f(\sqrt[3]{\frac{2}{k}})$ 为 0，即 $k\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\sqrt[3]{(\frac{k}{2})^2}-1=0$ 时，

原方程有且仅有一个解.由上式解得 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.而当 $k\ne\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，原方程无解或有两个解.

综上所述，当 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 及 $k\le 0$ 时，方程有且仅有一个解. ……9 分

五、(本题满分 9 分)

设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

（1）求函数的增减区间及极值；（2）函数图像的凹凸区间及拐点；

（3）求其渐近线；（4）作出其图形.

解：(1) 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由 $y'=1-\frac{8}{x^3}$ 得驻点 $x=2$ 和不可导点 $x=0$.于是

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
y'	+	−	+
y	↗	↘	↗

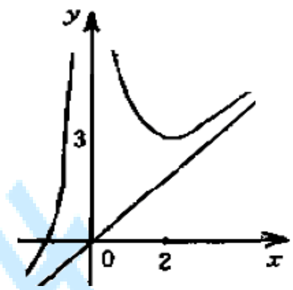
所以 $(-\infty,0),(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间，$x=2$ 为极小点，极小值为 $y=3$.……2 分

(2) 由 $y''=\frac{24}{x^4}>0$，知 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 为凹区间，且无拐点 ……4 分

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$ 知，$x=0$ 为垂直渐近线，

又由 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1, b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3+4}{x^2}-x)=0$

知 $y=x$ 为斜渐近线.



(4) 令 $y=0$，得零点 $x=-\sqrt[3]{4}$. ……6 分

于是其图形如图所示. ……9 分

六、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$

解： 对应的齐次方程的通解为 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$. ……1 分

(1) 当 $a\neq 1$ 时，设原方程的特解为 $y^*=A\sin x+B\cos x$ ……2 分

代入原方程得 $A(a^2-1)\sin x+B(a^2-1)\cos x=\sin x,$

比较等式两端对应项的系数得 $A=\dfrac{1}{a^2-1}, B=0,$ 所以 $y^*=\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$. ……4 分

(2) 当 $a\neq 1$ 时，设原方程的特解为 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$ ……5 分

代入原方程得 $2A\cos x-2B\sin x=\sin x,$

比较等式两端对应项的系数得 $A=0, B=-\dfrac{1}{2},$ 所以 $y^*=-\dfrac{1}{2}x\cos x.$ ……8 分

综上所述，当 $a\neq 1$ 时，原方程的通解为 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$

当 $a=1$ 时，原方程的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$. ……9 分

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在[0，1]上连续且递减，证明：当 $0<\lambda<1$ 时，$\int_0^\lambda f(x)dx\geq\lambda\int_0^1 f(x)dx$

证： $\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_\lambda^1 f(x)dx$ ……2 分

$=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_\lambda^1 f(x)dx=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)f(\xi_2)$

$=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)],$ ……5 分

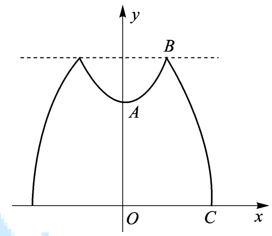
其中 $0\leq\xi_1\leq\lambda\leq\xi_2\leq 1$. 因 $f(x)$ 递减，则有 $f(\xi_1)\geq f(\xi_2)$ ……7 分

又 $\lambda>0, 1-\lambda>0$，因此 $\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geq 0$，即原不等式成立 ……9 分

八、(本题满分 9 分) 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

解： 如图，$\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的方程分别为

$y=x^2+2(0\le x\le 1), y=4-x^2(1\le x\le 2)$ ……3 分



设旋转体在区间[0,1]上的体积为V_1，在区间[1,2]上的体积为V_2，

则它们的体积元素分别：

$$dV_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}dx$$

$$dV_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}dx.$$ ……7 分

由对称性得$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}dx+2\pi\int_1^2\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}dx$

$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)dx=2\pi(8x+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^2=\frac{488}{15}\pi.$$ ……9 分

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=$ $\underline{\quad \ln 3 \quad}$.

(2) 已知 $f'(x_0)=-1$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}$ = $\underline{\quad 1 \quad}$.

(3) 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定的 y 为 x 的函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\underline{-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}}$.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ .\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & .. & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}}$$

(5) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & 其\quad 他 \end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 P{Y=2}= $\underline{\quad \frac{9}{64} \quad}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学三 第二、(4) 题 】

(2) 【 同数学一 第二、(3) 题】

(3) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 B = AC 的秩为 r_1，则 (C)

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$　　(C) $r=r_1$　　(D) r 与 r_1 的关系依 C 而定

(4) 设 $0<P(A)<1,\quad 0<P(B)<1,\quad P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则 (D)

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　(B) 事件 A 和 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立　　(D) 事件 A 和 B 相互独立

(5) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，

记 $s_1^{\ 2} = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$， $s_2^{\ 2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$， $s_3^{\ 2} = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$，

$s_4^{\ 2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$，则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 (B)

(A) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_1/\sqrt{n-1}}$ (B) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_2/\sqrt{n-1}}$ (C) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_3/\sqrt{n}}$ (D) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s_4/\sqrt{n}}$

三、(本题满分 6 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le x + y + 1\}$.

解： 由 $x^2 + y^2 \le x + y + 1$，得 $(x-\dfrac{1}{2})^2 + (y-\dfrac{1}{2})^2 \le \dfrac{3}{2}$. ……1 分

令 $x - \dfrac{1}{2} = r\cos\theta, y - \dfrac{1}{2} = r\sin\theta$，有 ……2 分

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} rdr \int_0^{2\pi}(1 + r\cos\theta + r\sin\theta)d\theta \quad \text{……3 分}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} r[\theta + r\sin\theta - r\cos\theta]_0^{2\pi} dr \quad \text{……4 分}$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} rdr = \pi r^2\Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}\pi. \quad \text{……6 分}$$

四、(本题满分 5 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = -4 \end{cases}$，求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx.$

解： 解特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$，得特征根 $r_1 = r_2 = -2$，

所以原方程的通解为 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$. ……2 分

由初始条件得 $c_1 = 2, c_2 = 0$. $y = 2e^{-2x}$. 因此原方程的特解为 $y = 2e^{-2x}$. ……4 分

于是 $\int_0^{\infty} y(x)dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \int_0^{\infty} e^{-2x}d(2x) = 1$. ……5 分

五、(本题满分 5 分)

已知 $f(x,y) = x^2 arctg\dfrac{y}{x} - y^2 arctg\dfrac{x}{y}$， 求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$.

解： $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})-\dfrac{y^2}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\dfrac{1}{y}$ ……2 分

$=2x\arctan\dfrac{y}{x}-\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$. ……3 分

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{3y^2(x^2+y^2)-y^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ……5 分

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

解： 令 $u=x^n-t^n$，则 $F(x)=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du$， ……2 分

于是有 $F'(x)=x^{n-1}f(x^n)$, ……3 分

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\dfrac{1}{2n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^n)}{x^n}=\dfrac{1}{2n}f'(0)$. ……5 分

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x},(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 $(x_0,y_{0)}$ 处有公共切线，求：

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解：(1) 分别对 $y=a\sqrt{x}$和$y=\ln\sqrt{x}$求导,得$y'=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$和$y'=\dfrac{1}{2x}$. ……1 分

由于两曲线在点(x_0,y_0)处有公切线,可见 $\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0}$,得$x_0=\dfrac{1}{a^2}$; ……2 分

将$x_0=\dfrac{1}{a^2}$分别代入两曲线方程,有$y_0=a\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{a^2}$.

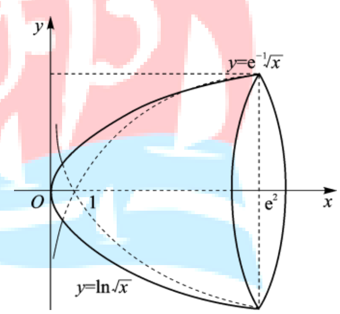
于是 $a=\dfrac{1}{e}; x_0=\dfrac{1}{a^2}=e^2, y_0=a\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{e}\cdot\sqrt{e^2}=1$,从而切点为$(e^2,1)$. ……4 分

(2) 旋转体的体积为

$V_x=\int_0^{e^2}\pi(\dfrac{1}{e}\sqrt{x})^2dx-\int_1^{e^2}\pi(\ln\sqrt{x})^2dx$ ……5 分

$=\dfrac{\pi x^2}{2e^2}\Big|_0^{e^2}-\dfrac{\pi}{4}[x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln xdx]$

$=\dfrac{1}{2}\pi e^2-\dfrac{\pi}{4}[4e^2-2x\ln x\Big|_1^{e^2}+2\int_1^{e^2}dx]$



$$=\frac{1}{2}\pi e^2-\frac{\pi}{2}x\Big|_1^{e^2}=\frac{\pi}{2}.$$ ……8 分

八、(本题满分 6 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a,\infty]$ 上连续，$f''(x)$ 在 (a,∞) 内存在且大于零，记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (x>a)$，证明 $F(x)$ 在 (a,∞) 内单调增加.

证： $F'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$ ……2 分

$$=\frac{1}{x-a}[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}].$$

由中值定理知，存在 $\xi(a<\xi<x)$，使 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$ ……4 分

于是有 $F'(x)=\dfrac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)]$. 由于 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加，因此对任意的 x 和 $\xi\ (a<\xi<x)$ 有 $f'(x)>f'(\xi)$.从而 $F'(x)>0$，即 $F(x)$ 单调增加……6 分

九、(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$,

(1) 证明，若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，则此线性方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知 $\beta_1\beta_2$ 是该方程组的两个解，其中 $\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$. 写出此方程组的通解.

解：(1) 增广矩阵 $\overline{A}$ 的行列式

$$\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1),$$ ……4 分

由 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，知 $|\overline{A}|\neq 0$，从而矩阵 $\overline{A}$ 的秩 $R(\overline{A})=4$.

但系数矩阵 A 的秩 $R(A)\le 3$，故 $R(A)\ne R(\overline{A})$，因此原方程组无解. ……6 分

(2) 当 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\ne 0)$ 时，方程组为

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \\ x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}，即\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}. 因\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix}=-2k\ne 0，故 R(A)=R(\overline{A})=2，$$

从而方程组相容且对应的导出方程组的基础解系应含有 3－2＝1 个解向量. ……8 分

又因 β_1,β_2 是原非齐次方程组的两个解，故 $\xi=\beta_1-\beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是对应齐次线性方程组的解；且 $\xi\ne 0$，因此 ξ 是导出方程组的基础解系. ……10 分

于是原非齐次方程组的通解为 $X=\beta_1+c\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$，（$c$ 为任意常数.） ……11 分

十、(本题满分 8 分)

设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件.

解： 解特征方程 $|\lambda E-A|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，

得特征值 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=-1$. ……3 分

欲使 $\lambda_1=1$ 有二个线性无关的特征向量，矩阵 $E-A$ 的秩必须等于 1，

而 $(E-A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -x & -y \end{vmatrix}=-y-x=0$，即 $x+y=0$. ……6 分

因为不同特征值所对应的特征向量线性无关，所以矩阵 A 要有三个线性无关的特征向量，必须满足条件 $x+y=0$. ……8 分

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且同分布

$P\{X_i=0\}=0.6, P\{X_i=1\}=0.4\ (i=1,2,3,4)$. 求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

解： 记 $Y_1=X_1X_4$，$Y_2=X_2X_3$，则 $X=Y_1-Y_2$，且 Y_1,Y_2 独立同分布； ……2 分

又 $P\{Y_1=1\}=P\{Y_2=1\}=P\{X_2=1,X_3=1\}=0.16$. ……3 分

$P\{Y_1=0\}=P\{Y_2=0\}=1-0.16=0.84$. ……4 分

于是随机变量 $X=Y_1-Y_2$ 有三个可能值 $-1,0,1$，且易见 ……5 分

$P\{X=-1\}=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=0.84\times0.16=0.1344$，

$P\{X=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=0\}=0.16\times0.84=0.1344$，

$P\{X=0\}=1-2\times0.1344=0.7312$.

于是 X 的概率分布为 $X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{pmatrix}$. ……8 分

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动生产线加工的某种零件的内径 X（毫米）服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T（单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系：

$T=\begin{cases}-1 & X<10\\ 20 & 10\le X\le 12\\ -5 & X>12\end{cases}$，问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解： 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，$\varphi(x)$ 为标准正态密度，则平均利润

$E(T)=20P\{10\le X\le12\}-P\{X<10\}-5P\{X>12\}$ ……3 分

$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]$

$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$. ……5 分

令 $\dfrac{dE(T)}{d\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)=0$. ……6 分

得 $-\dfrac{25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}+\dfrac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=0$，即 $25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}$. ……7 分

解得 $\mu=\mu_0=11-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{25}{21}\approx10.9$.故当 $\mu=\mu_0\approx10.9$ 毫米时，平均利润最大. ……8 分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)~(4)【 同数学四 第四、**(1)~(4)** 题 】

(5) 假设一批产品中一，二，三等品各占 650%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为 $\underline{\frac{2}{3}}$

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【 同数学四 第二、**(1)** 题 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有 （B）

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D)无穷多个.

(3) 设 A，B 都是 n 阶非零矩阵，且 AB = 0，则 A 和 B 的秩 (B)

(A) 必有一个等于零　(B) 都小于 n　(C) 一个小于 n，一个等于 n　(D) 都等于 n

(4) 设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-2,2,4)$，$\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是 (B)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

(5)【 同数学四 第二、**(4)** 题 】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解： 令 $t=\frac{1}{x}$，则 ……1 分

$$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$ ……3 分

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$ ……5 分

四、(本题满分 5 分)【 同数学四 第五题 】

五、(本题满分 6 分)

已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)dx$

解：由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，有 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. ……1 分

因此 $\int x^3 f'(x)dx=x^3 f(x)-3\int x^2 f(x)dx$ ……2 分

$=x^3 f(x)-3\int x^2 d(\dfrac{\sin x}{x})=x^3 f(x)-3[x^2\cdot\dfrac{\sin x}{x}-2\int \sin xdx]$ ……4 分

$=x^3\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$. ……6 分

六、(本题满分 8 分)

某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x（万尾），乙种鱼放养 y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为 $(3-ax-\beta y)x$ 和 $(4-\beta x-2ay)y$（$a>\beta>0$）. 求使产鱼总量最大的放养数.

解：设产鱼总量为 z，则 $z=3x+4y-ax^2-2ay^2-2\beta xy$ ……1 分

由极值的必要条件，得方程组 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3-2ax-2\beta y=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4-4ay-2\beta x=0$. ……3 分

由于 $\alpha>\beta>0$，知其系数行列式 $\Delta=4(2\alpha^2\text{-}\beta^2)>0$，故方程组有唯一解：

$x_0=\dfrac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2},y_0=\dfrac{4\alpha-3\beta}{2(2\alpha^2-\beta^2)}$. ……4 分

记 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\alpha,B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\beta,C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4\alpha$，知 $B^2-AC=-4(2\alpha^2-\beta^2)<0$，

且 $A<0$，因此 z 在 (x_0,y_0) 处有极大值，即最大值. ……6 分

容易验证 $x_0>0,y_0>0$, 且 $\begin{cases}(3-\alpha x_0-\beta y_0)x_0=\dfrac{3x_0}{2}>0\\(4-\beta x_0-2\alpha y_0)y_0=2y_0>0\end{cases}$.

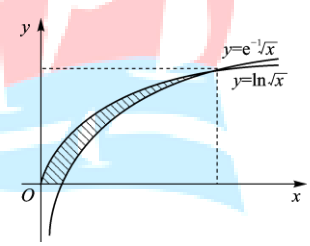
综上所述, x_0 和 y_0 分别为所求甲和乙两种鱼的房养数. ……8 分

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x},(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 $(x_0,y_{0)}$ 处有公共切线，求：

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的平面图形的面积 S.



解:: **(1)**【 见数学四 第七、(1) 题 】

(2) $S=\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy$ ……6 分

$$=\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{1}{3}e^2y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}.$$ ……8 分

八、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0)$.

证：【 见数学四 第六题 】

九、(本题满分 8 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

证：由 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=0+0=0$，知 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的解.
同理可证 a_2+a_3,a_3+a_1 也都是 $AX=0$ 的解. ……2 分

设 $k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+k_3(a_3+a_1)=0$，则有 $(k_1+k_3)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3=0$.

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故得 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$， ……4 分

由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，可见 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 线性无关.……6 分

根据题设，$AX=0$ 的基础解系含有三个线性无关的向量.
所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是方程组 $AX=0$ 的基础解系. ……8 分

十、(本题满分 8 分)【 同数学四 第十题 】

十一、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\0 & 其\quad 它\end{cases}$，现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

解：事件“观测值不大于 0.1”，即事件 $\{X\le 0.1\}$ 的概率为

$$p=P\{X\le 0.1\}=\int_{-\infty}^{0.1}f(x)dx=2\int_0^{0.1}xdx=0.01.$$ ……4 分

视每次观察所得观测值不大于 0.1 为成功，则 V_n 作为 n 次独立重复试验成功的次数，服从参数为 $(n,0.01)$ 的二项分布. ……5 分

其概率分布为 $P\{V_n=m\}=C_n^m(0.01)^m(0.99)^{n-m}\quad(m=0,1,2,\cdots n)$. ……7 分

十二、(本题满分 8 分)【 同数学四 第十二题 】