布尔代数与格

离散数学－代数结构

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 布尔函数
- 布尔代数
- 布尔代数的抽象定义
- 理解布尔代数的性质
- 代数格
- 有限布尔代数的表示
- 布尔代数与数字逻辑电路设计

布尔函数

- 令$B=\{0, 1\}$, $B^n=\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, i=1, \ldots, n\}$, 从$B^n$到B的函数称为***n*度布尔函数**，$f: B^n \to B$。
- 取值范围为B的变元称为**布尔变元**，$x \in B$。
- *n*度布尔函数的个数：$2 \uparrow 2^n$ $(2^2, 2^4, 2^8, \ldots)$
- 三种说法
  - 含*n*个命题变量的命题逻辑表达式
  - *n*度布尔函数 $f: B^n \to B$
  - 有*n*个输入和一个输出的逻辑电路

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效, 设计一个电子打分器, 输出一个结果: “成功”或”失败”。

布尔函数: $f(x,y,z)=1$ iff. x,y,z 至少有两个为1。

相应的布尔表达式:

$(x'\wedge y\wedge z)\vee (x\wedge y'\wedge z)\vee (x\wedge y\wedge z')\vee (x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

回顾：命题表达式的主析取范式

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r\leftrightarrow \neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

集合{0, 1}上的运算

- 布尔和
  - 1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0
- 布尔积
  - $1 \cdot 1=1$, $1 \cdot 0=0$, $0 \cdot 1=0$, $0 \cdot 0=0$
- 补
  - $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$

布尔函数上的运算

- 布尔和
  - $(f+g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$
- 布尔积
  - $(f\ g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$
- 补函数
  - $\bar{f}\,(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$

布尔恒等式（1）

等 式	名 称
$\bar{\bar{x}} = x$	双重补律
$x+x = x$ $x \cdot x = x$	幂等律
$x+0 = x$ $x \cdot 1 = x$	同一律
$x+1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	支配律
$x+y = y+x$ $x \cdot y = y \cdot x$	交换律

布尔恒等式（2）

等　式	名　称
$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$	结合律
$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	分配律
$\overline{(x\cdot y)}=\overline{x}+\overline{y}$ $\overline{(x+y)}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	德摩根律
$x+(x\cdot y)=x$ $x\cdot(x+y)=x$	吸收律
$x+\overline{x}=1$ $x\cdot\overline{x}=0$	补律

布尔代数的抽象定义

- 一个布尔代数是一个集合B，它有二元运算$\vee$和$\wedge$、一元运算$^{-}$以及特殊元素0和1，且$\forall x, y, z \in B$，下列性质成立：

$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$	结合律
$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$	分配律
$x\wedge y=y\wedge x$ $x\vee y=y\vee x$	交换律
$x\vee 0=x$ $x\wedge 1=x$	同一律
$x\vee\overline{x}=1$ $x\wedge\overline{x}=0$	补律

布尔代数举例

- $(\{0, 1\}, +, \cdot, {}^{-}, 0, 1)$为布尔代数
- n度布尔函数全体也构成一个布尔代数
  - 布尔和
  - 布尔积
  - 补函数
  - 全取0的函数、全取1的函数
- A的幂集也构成一个布尔代数$(\rho(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A)$

布尔代数举例

- $B^n=\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, i=1, \ldots, n\}$构成布尔代数
- $x=(a_1, \ldots, a_n), y=(b_1, \ldots, b_n), a_i \in B, b_i \in B$
  - $x \wedge y=(c_1, \ldots, c_n)$, where $c_i=a_i \wedge b_i$
  - $x \vee y=(d_1, \ldots, d_n)$, where $d_i=a_i \vee b_i$
  - $\overline{x}=(e_1, \ldots, e_n)$, where $e_i=\overline{a_i}$

理解布尔代数的性质

- 结合律、交换律、分配律、同一律、补律
  - 蕴含：支配律、吸收律、幂等律、双重补律、德摩根律
- 证明支配律：$\forall x \in B,\ x \vee 1=1,\ x \wedge 0=0$
  - $x \vee 1= 1 \wedge (x \vee 1)= (x \vee \overline{x}) \wedge (x \vee 1)= x \vee (\overline{x} \wedge 1)= x \vee \overline{x}=1$
  - $x \wedge 0= 0 \vee (x \wedge 0) =(x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge 0)= x \wedge (\overline{x} \vee 0)= x \wedge \overline{x}=0$

理解布尔代数的性质

- 证明吸收律
  - $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$
  - $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$
- 证明幂等律（方法一）
  - $x \vee (x \wedge x) = x$ (应用吸收律）
  - $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$ (应用吸收律）
- 证明幂等律（方法二）
  - $x \wedge x = x \wedge (x \vee 0) = x$ (应用同一律、吸收律）

理解布尔代数的性质

- 引理：$\forall x, y, z \in B$, 若 $x \wedge z = y \wedge z$ 且 $x \vee z = y \vee z$，则 $x = y$
  - $x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ //吸收律/分配律
  - $y = y \vee (y \wedge z) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$
- 证明双重补律
  - $x \vee \overline{x} = 1 = \overline{\overline{x}} \vee \overline{x}$
  - $x \wedge \overline{x} = 0 = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x}$
  - $x = \overline{\overline{x}}$

理解布尔代数的性质

- 证明德摩根律：$\forall\ x, y \in \mathrm{B}, \overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$;
  - 根据补元的唯一性，只需证明$\overline{x} \vee \overline{y}$是$x \wedge y$的补元。
  - $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee \overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{x} \vee \overline{y}) = 1$
  - $(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge y \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{y}) = 0$

理解布尔代数的性质

结合律 交换律 分配律 同一律 补律

吸收律 幂等律 支配律 双重补律 德摩根律

吸收律 ⇒ 幂等律

$x \vee (x \wedge x) = x$ (应用吸收律）

$x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$ (应用吸收律）

代数格

- 设L是一个集合， ∧和∨是L上的二元运算，且满足结合律、交换律、吸收律，则称(L, ∧, ∨)是代数格。
- 代数格等同于（偏序）格

等　式	名　称
$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$ $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$	结合律
$x\wedge y=y\wedge x$ $x\vee y=y\vee x$	交换律
$x\vee(x\wedge y)=x$ $x\wedge(x\vee y)=x$	吸收律

代数格中的偏序关系

- $\forall\ x, y \in B,\ x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$
  - 若 $x \wedge y = x$，则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ //吸收律
  - 若 $x \vee y = y$，则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ //吸收律
- $\forall\ x, y \in B$，定义 $x \preccurlyeq y$ iff $x \wedge y = x$ (即 $x \vee y = y$)
  - 证明这个关系满足自反性、反对称性、传递性。
  - 这个偏序构成一个格。
    - **lub{x,y}** 即为 $x \vee y$。
    - **glb{x,y}** 即为 $x \wedge y$。

布尔代数VS格

- 布尔代数是<u>代数格</u>、也是<u>（偏序）格</u>
  - 结合律、交换律、吸收律
  - 最小上界$x \vee y$，最大下界$x \wedge y$
- 布尔代数是有补的分配格
  - 分配律、同一律、补律

关于格的对偶命题

- 对偶命题的例子
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$和$a \vee b \succcurlyeq a$互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
  - 格元素名不变
  - $\preccurlyeq$与$\succcurlyeq$，$\wedge$与$\vee$全部互换。

格的对偶原理

- 如果命题P对一切格为真，则P的对偶命题P^*也对一切格为真。
  - 证明思路：证明P^*对任意格$(S, \preccurlyeq)$为真
  - 定义S上的二元关系$\preccurlyeq^*$, $\forall a,b \in S$, $a \preccurlyeq^* b \Leftrightarrow b \preccurlyeq a$, 显然$\preccurlyeq^*$是偏序。
  - $\forall a,b \in S$, $a \wedge^* b = a \vee b$, $a \vee^* b = a \wedge b$ 所以$(S, \preccurlyeq^*)$也是格
    - 这里$a \wedge^* b$, $a \vee^* b$分别是a,b关于偏序$\preccurlyeq^*$的最大下界和最小上界。
  - P^*在$(S, \preccurlyeq)$中为真*当且仅当*P在$(S, \preccurlyeq^*)$中为真。
  - P在一切格中为真，$\therefore P^*$在一切格中为真。

格中的原子

- 定义：设L是格，L中有最小元(全下界)0，给定元素$a \neq 0$, 若$\forall b \in$L, 有：

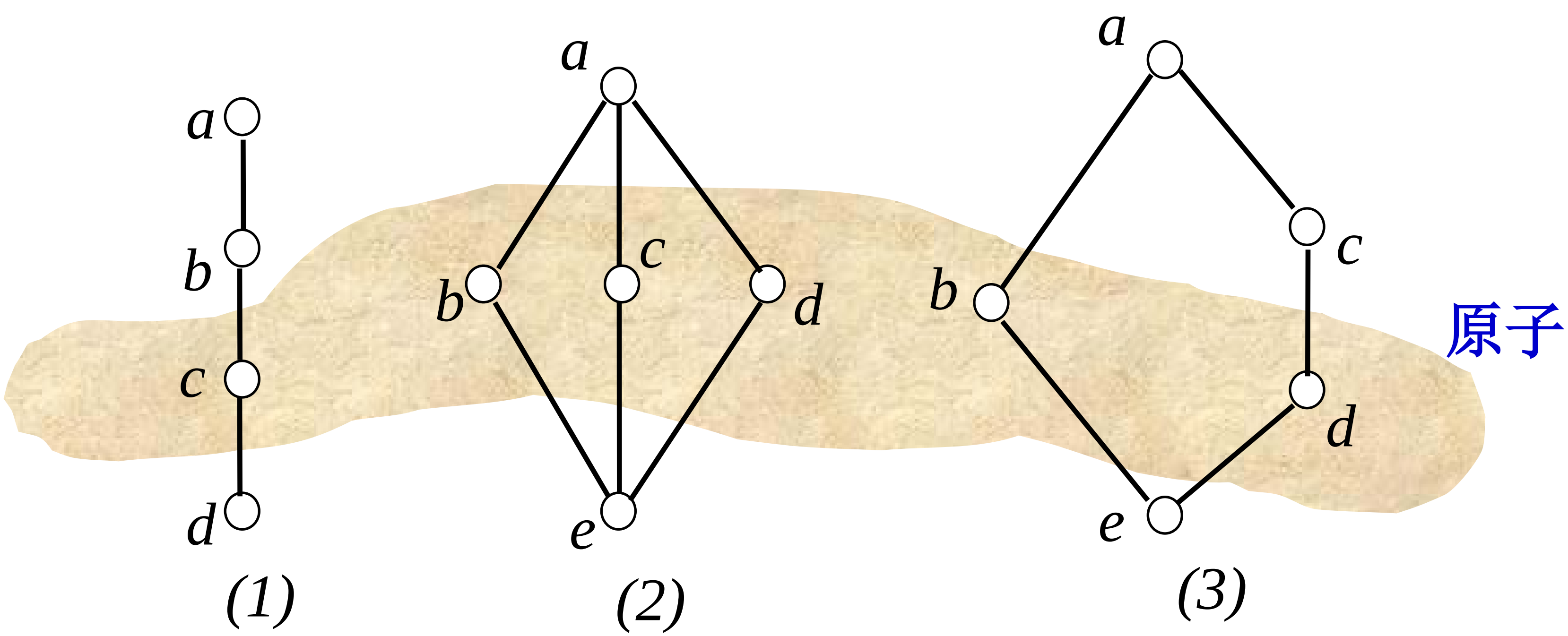
  $$0 \prec b \preccurlyeq a \Rightarrow b=a$$

  则称a是L中的原子

  （原子是覆盖最小元的那些元素。）

- 设a, b是格L中的原子，若$a \neq b$, 则$a \wedge b=0$
  - 假设$a \wedge b \neq 0$, 注意：$a \wedge b \preccurlyeq a$且$a \wedge b \preccurlyeq b$，由原子的定义：$a \wedge b=a$, $a \wedge b=b$, $\therefore a=b$, 矛盾。

格中的原子

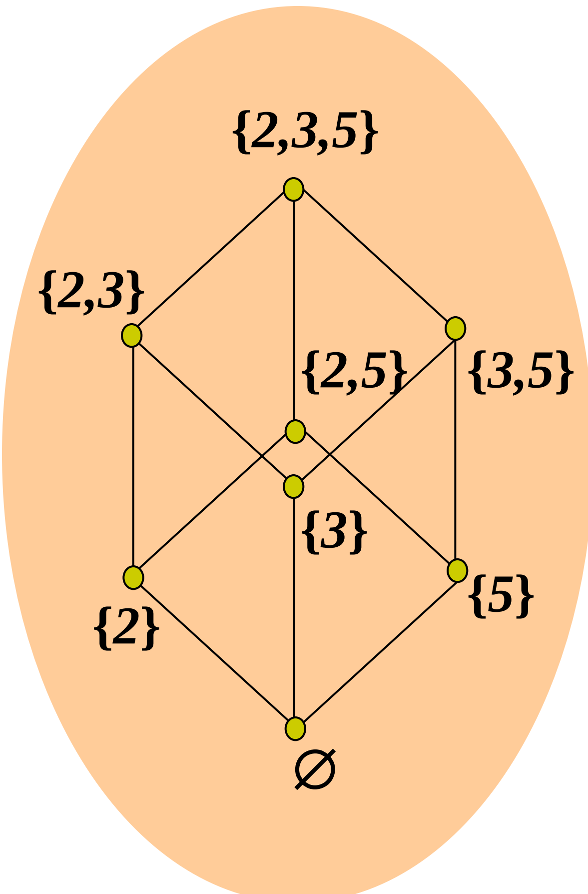


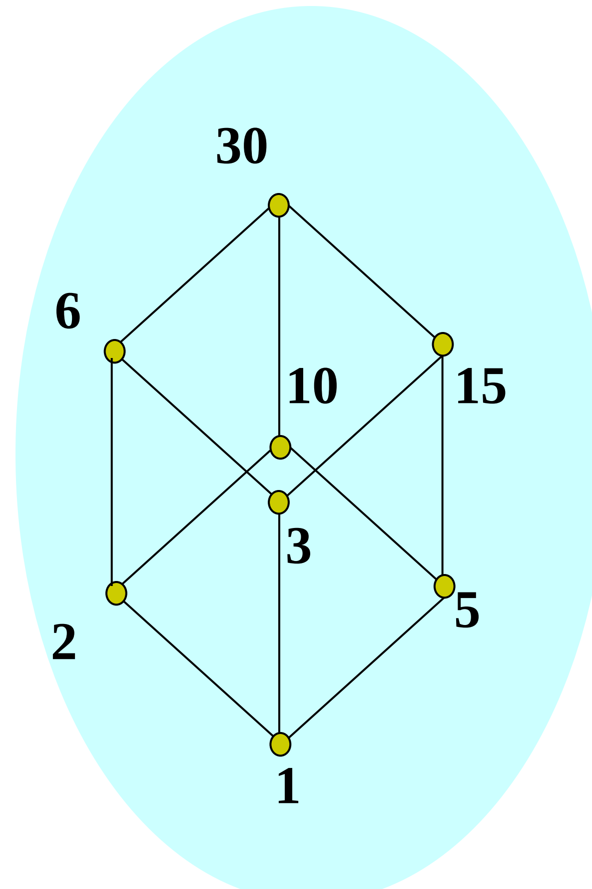
有限布尔代数的表示定理

- 任一有限布尔代数B **同构于** B中所有的原子构成的集合A的幂集代数系统P(A)。

  即$(B, \wedge, \vee, ', 0, 1) \cong (P(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A)$

- 备注（关于无限布尔代数）
  - 2^N，即无限的0/1序列$x_0, x_1, x_2, \ldots$
    - 这一无限布尔代数有原子
  - 2^N的一个子代数：周期序列（Periodic sequence）
    - 这个布尔代数没有原子


{2,3,5}
{2,3}
{2,5}
{3,5}
{3}
{2}
{5}
∅


30
6
10
15
3
2
5
1

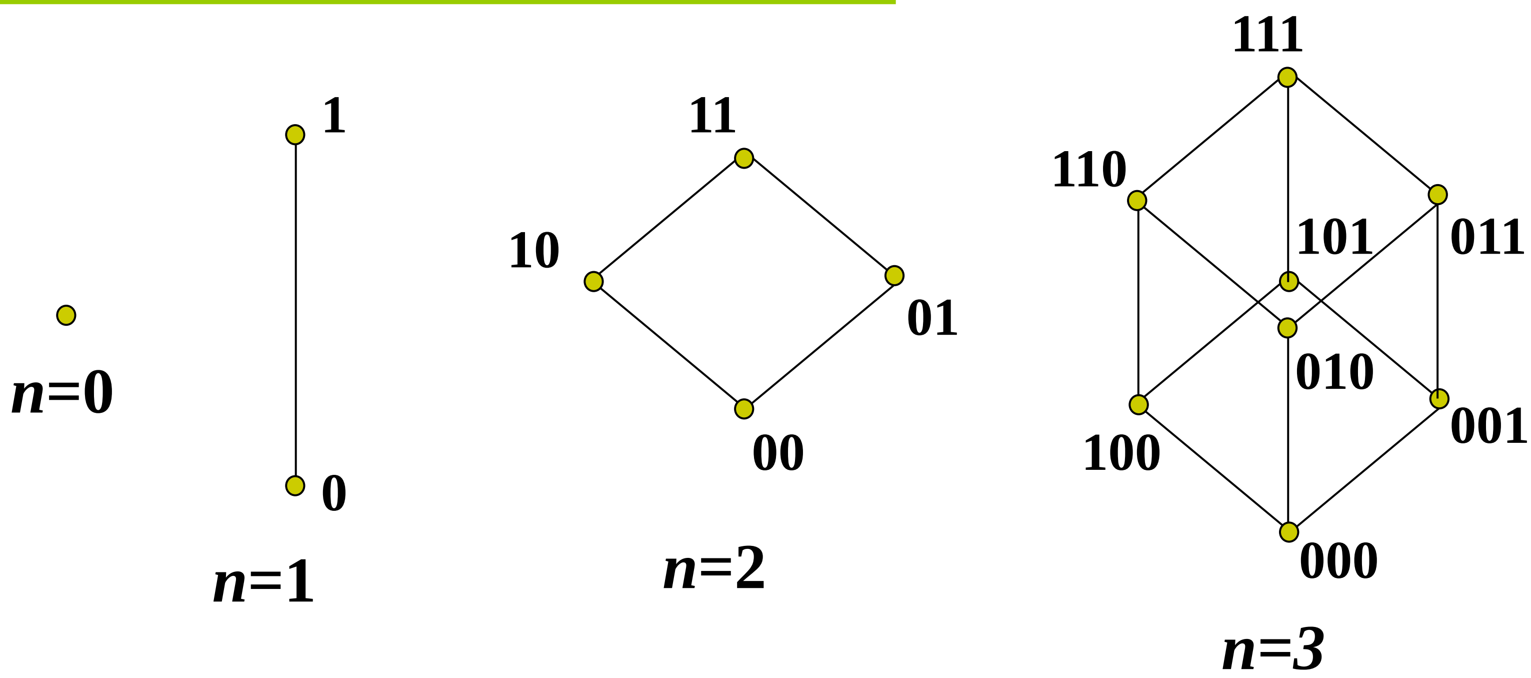
有限布尔代数基数是2的整数次幂

- 任何有限布尔代数的基数为2^n, n是自然数。
  - 设B是有限代数系统，A是B中所有原子的集合。

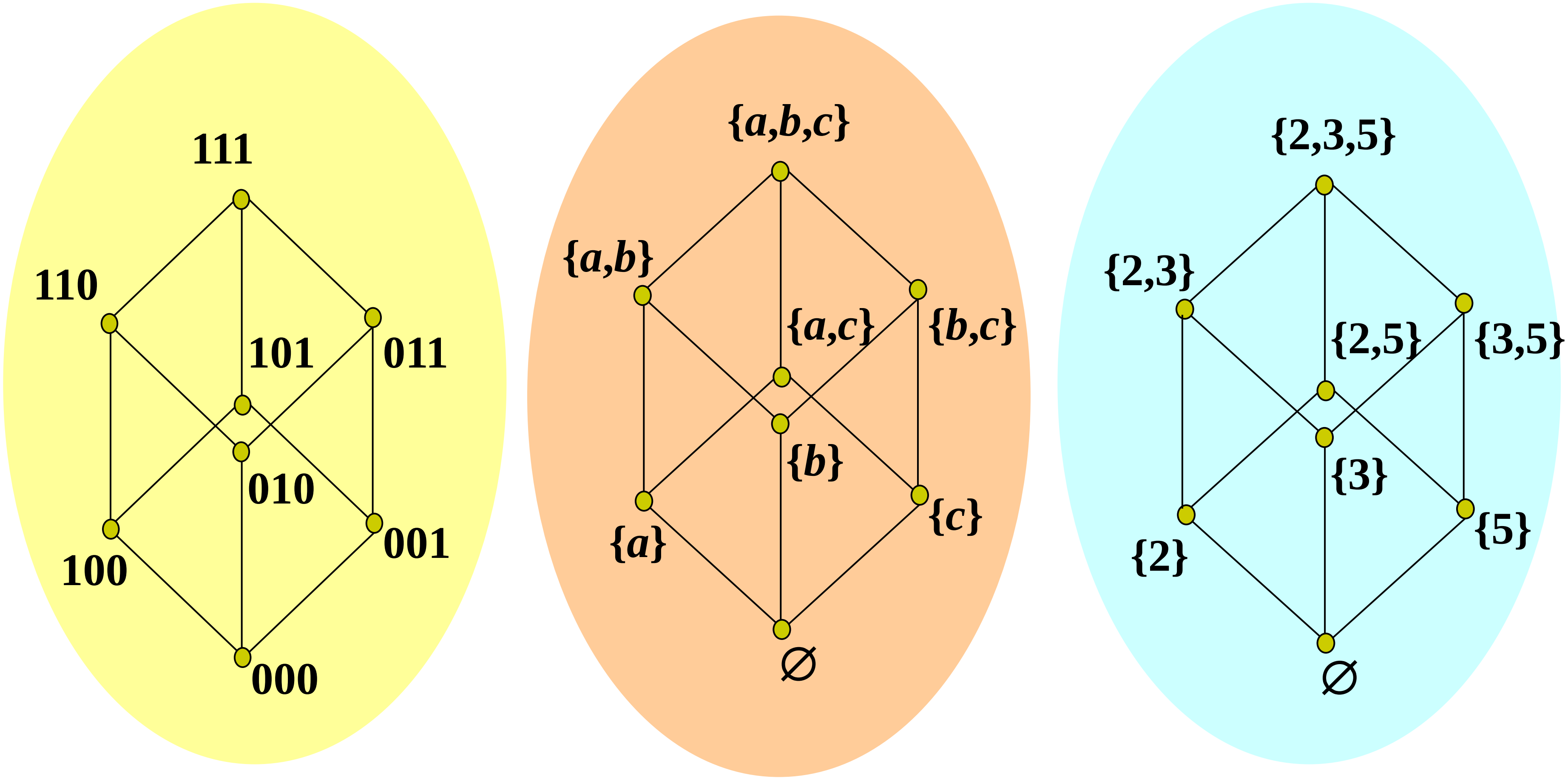
    则：$B \cong P(A)$, $\therefore |B|=|P(A)|=2^{|A|}$
- 等势的有限布尔代数均同构

最小的几个有限布尔代数

与含n个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为B_n



Hasse Diagrams of Isomorphic Lattices



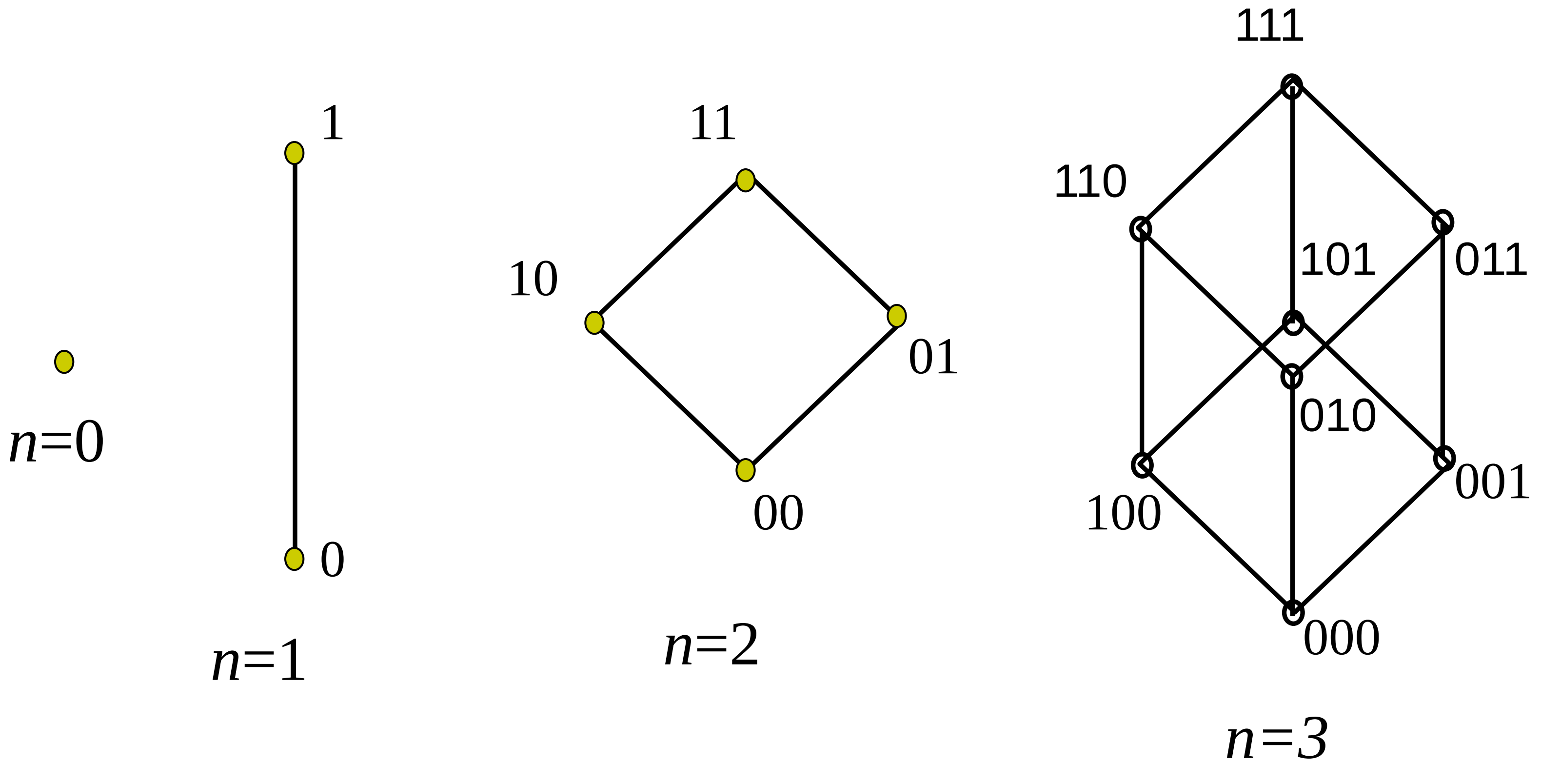
B_n as Product of n B's

- B_1, $(\{0,1\}, \wedge, \vee, 1, 0, ')$, is denoted as B.
- For any $n \geq 1$, B_n is the product $B \times B \times \ldots \times B$ of B, n factors, where $B \times B \times \ldots \times B$ is given the product partial order.

Product partial order:

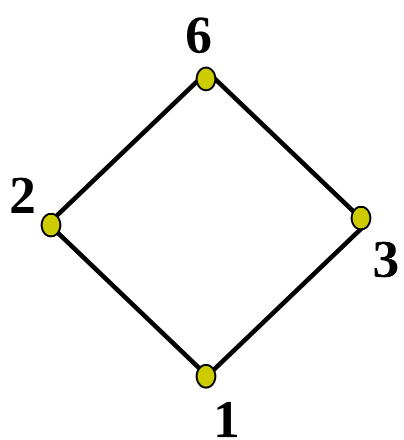
$$x \leq y \text{ if and only if } x_k \leq y_k \text{ for all } k.$$

Hasse Diagrams of B_n



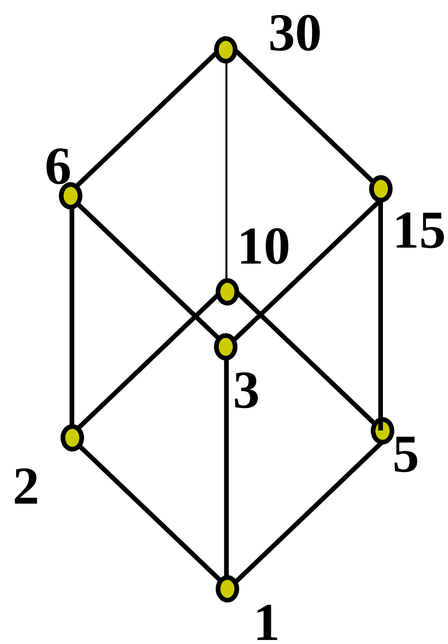
Some Examples

D_n is the poset of all positive divisors of n with the partial order "divisibility".



D_6

D_{20} is not a Boolean algebra



D_{30}

D_n as Boolean Algebra

- **Let $n=p_1p_2...p_k$, where the p_i are distinct primes. Then D_n is a Boolean algebra.**
  - **Let $S=\{p_1, p_2, ... p_k\}$, and for any subset T of S, a_T is the product of the primes in T.**
  - **Note: any divisor of n must be some a_T. And we have $a_T|n$ for any T.**
  - **For any subsets V,T, $V\subseteq T$ iff. $a_V|a_T$, *and* $a_V \wedge a_T$=GCD(a_V, a_T) and $a_V \vee a_T$=LCM(a_V, a_T).**
  - **f: $P(S)\rightarrow D_n$ given by $f(T)= a_T$ is an isomorphism from $P(S)$ to D_n.**

Proof of Non-Boolean Algebra

- **Example 2: if n is a positive integer and $p^2|n$, where p is a prime number, then D_n is not a Boolean algebra.**
- **Proof**
  - **Since $p^2|n$, $n = p^2q$ for some positive integer q. Note that p is also an element of D_n, then if D_n is a Boolean algebra, p must have a complement p', which means GCD(p, p')=1 and LCM(p, p')=n. So, $pp'=n$, which leads to $p'=pq$. So, GCD(p, pq)=1, contradiction.**

布尔代数与数字逻辑电路设计

- B_n的每一个元素可以看做一个长度为n的二进字符串。
- 一个有n个输入、一个输出的逻辑电路对应于一个用含n个布尔变量的布尔代数表达式定义的布尔函数 f : $B_1^n \to B_1$, 也可以看做 $f : B_n \to B_1$ 。
- 在确定表示该函数的布尔表达式后，很容易用门电路元件搭出所需要的逻辑电路。
- 因此，关键问题是如何确定所需的布尔表达式，并将其化为最简形式。

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效, 设计一个电子打分器, 输出一个结果: “成功”或”失败”。

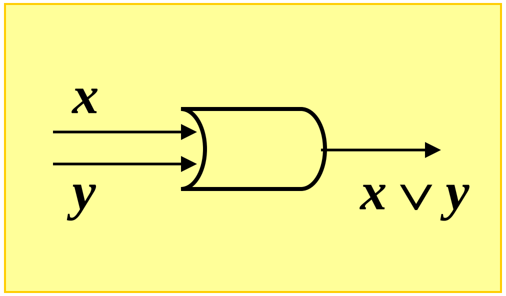
布尔函数: $f(x,y,z)$=1 iff. x,y,z 至少有两个为1。

相应的布尔表达式:

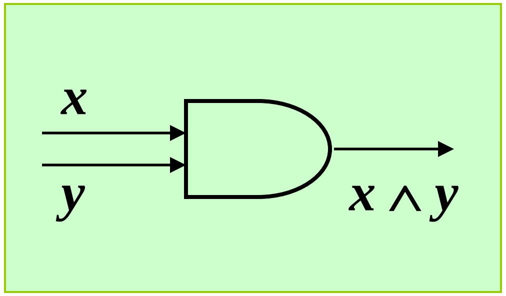
$(x'\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

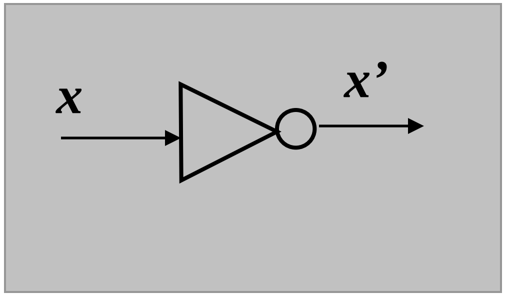
基本逻辑元件



“或”门



“与”门



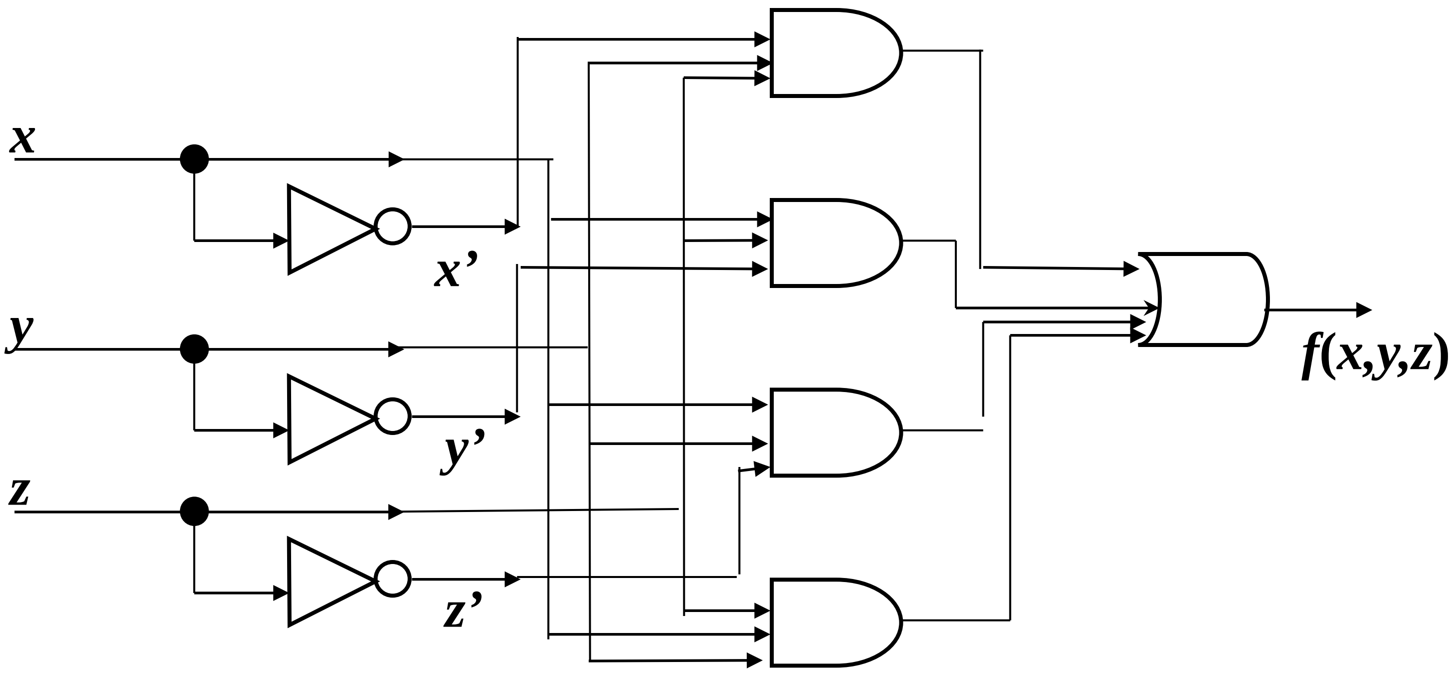
反相器

电路设计

相应的布尔表达式:

$(x'\wedge y\wedge z)\vee (x\wedge y'\wedge z)\vee (x\wedge y\wedge z')\vee (x\wedge y\wedge z)$

太复杂!



用卡诺图化简布尔表达式

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1

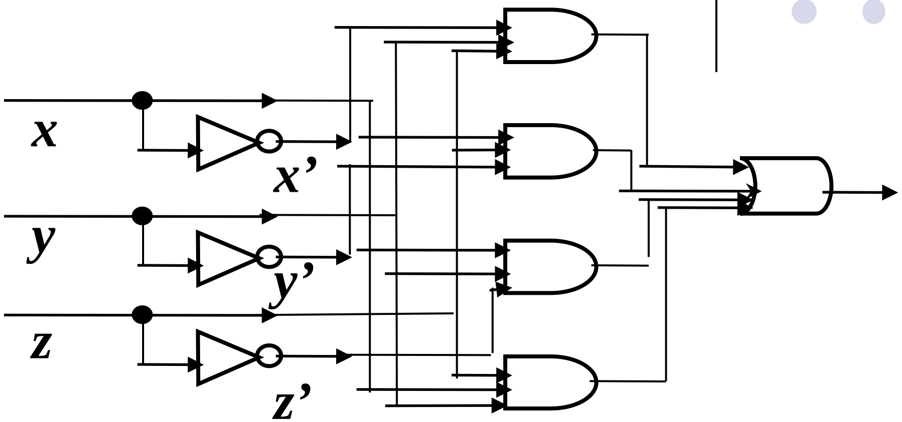
简化后的表达式:

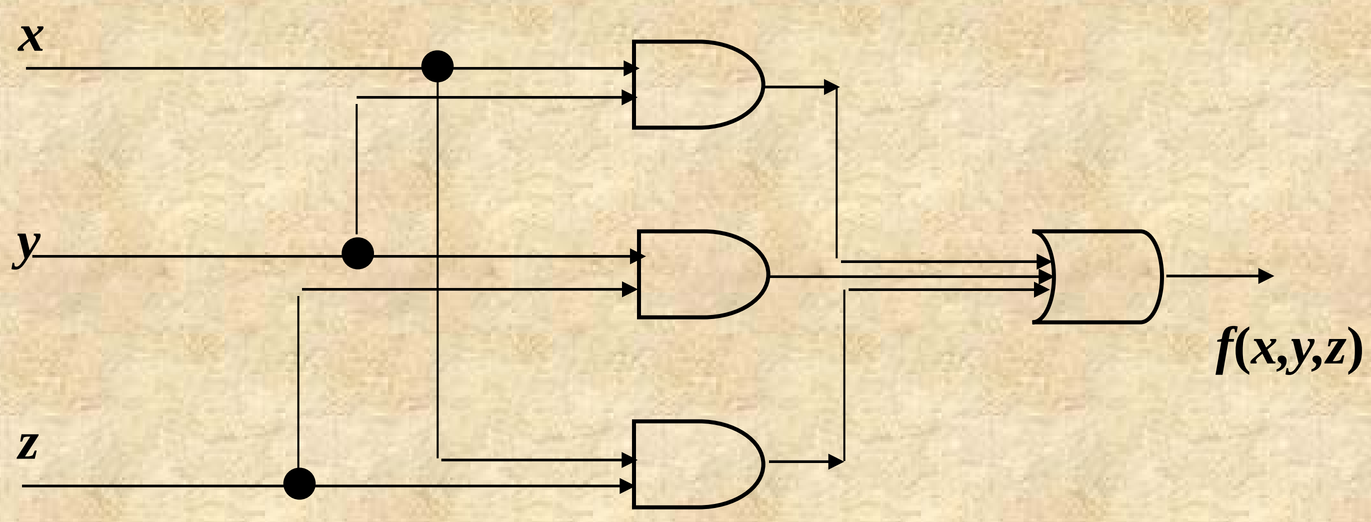
$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$

改进后的电路设计

相应的布尔表达式:

$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$





作业

- **教材[11.1, 11.2]**
  - **p.593: 9, 10, 24, 27,41**
  - **p.596: 3(c, d), 12(a,b)**
- **设 (B, $\wedge$, $\vee$)是代数格. $\forall$ x, $y \in$B, 定义 $x \preccurlyeq y$ iff $x \wedge y = x$. 证明这个关系($\preccurlyeq$)满足自反性、反对称性和传递性。**

卡诺图（Karnaugh map）n=2

$f: B_2 \to B$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$f(x,y)=(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

我们知道：

$f(x,y)=x'$!

	y'	y
x'	1	1
x	0	0

用卡诺图化简布尔表达式

$f: B_2 \rightarrow B$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$f(x,y)=(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(x,y) = x' \vee y'$

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

卡诺图 *n*=3

	00	01	11	10
0	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0

y' y

	$y'\wedge z'$	$y'\wedge z$	$y\wedge z$	$y\wedge z'$
x'	$x'\wedge y'\wedge z'$	$x'\wedge y'\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z'$
x	$x'\wedge y'\wedge z'$	$x\wedge y'\wedge z$	$x\wedge y\wedge z$	$x\wedge y\wedge z'$

z' z

化简三个变量的布尔表达式

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	1	0	0	1
x	1	0	1	1

z'

表达式:

$(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee$
$(x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$

So, $z' \vee (x \wedge y)$