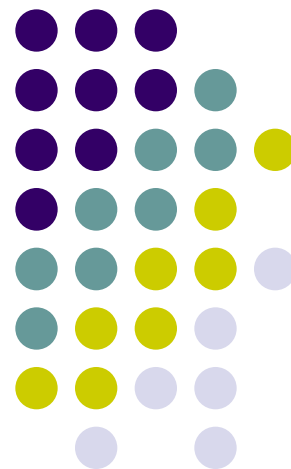


# 关系的闭包、等价关系

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系

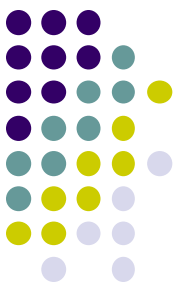




# 内容提要

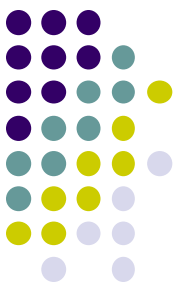
- 闭包的定义
- 闭包的计算公式
- 传递闭包的**Warshall**算法
- 等价关系
- 等价类
- 划分





# 关系的闭包：一般概念

- 设 $R$ 是集合 $A$ 上的关系， $P$ 是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系 $R_1$ 称为 $R$ 的关于 $P$ 的闭包：
  - $R \subseteq R_1$
  - $R_1$  满足性质 $P$
  - 对于 $A$ 上的任意一个关系 $R'$ ，如果 $R'$ 包含 $R$ 且满足性质 $P$ ，则 $R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包 $r(R)$ 、对称闭包 $s(R)$ 、传递闭包 $t(R)$



# 自反闭包 ( reflexive closure )

- 设  $R$  的是集合  $A$  上的关系，其自反闭包  $r(R)$  也是  $A$  上的关系，且满足：
  - $r(R)$  满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$ ；
  - 对  $A$  上的任意关系  $R'$ ，若  $R'$  包含  $R$  且满足自反性，则  $r(R) \subseteq R'$
- 例子
  - 令  $A=\{1,2,3\}$ ,  $R=\{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)\}$ 。则  $r(R)=\{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)\}$ 。

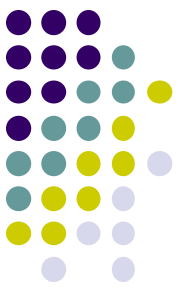


# 自反闭包的计算公式

- $r(R) = R \cup I_A$ ,  $I_A$  是集合  $A$  上的恒等关系

(证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

1. 对任意  $x \in A$ ,  $(x, x) \in I_A$ , 因此,  $(x, x) \in R \cup I_A$
2.  $R \subseteq R \cup I_A$
3. 设  $R'$  集合  $A$  上的自反关系, 且  $R \subseteq R'$ , 则对任意  $(x, y) \in R \cup I_A$ , 有  $(x, y) \in R$ , 或者  $(x, y) \in I_A$ 。对两种情况, 均有  $(x, y) \in R'$ , 因此,  $R \cup I_A \subseteq R'$



# 对称闭包 (symmetric closure)

- $s(R) = R \cup R^{-1}$ , 这里  $R^{-1}$  是  $R$  的逆关系
  - $s(R)$  是对称的。对任意  $x, y \in A$ , 如果  $(x, y) \in s(R)$ , 则  $(x, y) \in R$  或者  $(x, y) \in R^{-1}$ , 即  $(y, x) \in R^{-1}$ , 或者  $(y, x) \in R$ ,  $\therefore (y, x) \in s(R)$
  - $R \subseteq s(R)$
  - 设  $R'$  是集合  $A$  上的对称关系, 并且  $R \subseteq R'$ , 则对任意  $(x, y) \in s(R)$ , 有  $(x, y) \in R$ , 或者  $(x, y) \in R^{-1}$ .
    - 情况1:  $(x, y) \in R$ , 则  $(x, y) \in R'$
    - 情况2:  $(x, y) \in R^{-1}$ , 则  $(y, x) \in R$ , 于是  $(y, x) \in R'$ 。根据  $R'$  的对称性:  $(x, y) \in R'$

因此,  $s(R) \subseteq R'$



# 连通关系

- 定义集合A上的“连通”关系 $R^*$ 如下：
  - 对任意 $a, b \in A$ ,  $a R^* b$  当且仅当：存在 $t_0, t_1 \dots t_k \in A$  ( $k$ 是正整数), 满足 $t_0 = a, t_k = b, (t_{i-1}, t_i) \in R, i = 1 \dots k$ 。(可以表述为：从 $a$ 到 $b$ 之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意 $a, b \in A$ ,  $a R^* b$  当且仅当存在某个正整数 $k$ , 使得 $a R^k b$ 。
  - 于是：
$$R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots R^i \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

# 传递闭包 (transitive closure)



$$t(R) = R^*$$

1. 若  $(x, y) \in R^*$ ,  $(y, z) \in R^*$ , 则有  $s_1, s_2, \dots, s_j$  以及  $t_1, t_2, \dots, t_k$ ,

满足:  $(x, s_1), \dots, (s_j, y), (y, t_1), \dots, (t_k, z) \in R$ ,

因此,  $(x, z) \in R^*$ .

2.  $R \subseteq R^*$

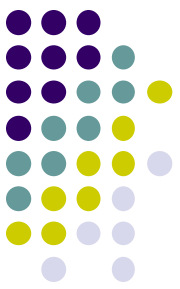
3. 设  $R'$  是集合  $A$  上的传递关系, 且包含  $R$ 。若  $(x, y) \in R^*$ ,

则有  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , 满足:  $(x, t_1), \dots, (t_k, y) \in R$ ,

于是  $(x, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_k, y) \in R'$

根据  $R'$  的传递性,  $(x, y) \in R'$ .





# 对称闭包的自反闭包vs自反闭包的对称闭包

- 证明:  $r(s(R)) = s(r(R))$

- $$\begin{aligned} r(s(R)) &= r(R \cup R^{-1}) \\ &= (R \cup R^{-1}) \cup I_A \\ &= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A^{-1}) \quad (\text{注意: } I_A = I_A^{-1}, \text{并用等幂率}) \\ &= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1} \\ &= s(R \cup I_A) \\ &= s(r(R)) \end{aligned}$$

注意:  $r(s(R))$ 一般省略为 $rs(R)$



# 对称关系的传递闭包是对称的

证明:  $st(R) \subseteq ts(R)$

注意: 左边是 $t(R)$ 的对称闭包, 根据定义, 我们只需证明:

(1)  $ts(R)$ 满足对称性; (2)  $t(R) \subseteq ts(R)$

证明(2), 考虑到左边是 $R$ 的传递闭包, 我们只需要证明:

(i)  $R \subseteq ts(R)$  (显然), (ii)  $ts(R)$ 满足传递性(显然)。

证明(1): 对任意 $(x, y) \in ts(R)$ ,  $\exists t_1, t_2, \dots, t_k$ , 满足

$(x, t_1) \in s(R), (t_1, t_2) \in s(R), \dots, (t_k, y) \in s(R)$ , 而 $s(R)$ 满足对称性,  $\therefore (y, t_k) \in s(R), \dots, (t_2, t_1) \in s(R), (t_1, x) \in s(R)$ ,

于是:  $(y, x) \in ts(R)$ ,  $\therefore ts(R)$ 满足对称性。

**注意: 传递关系的对称闭包不一定是传递的。比如:  $\{(1,3)\}$**



# 有限集合上的传递闭包

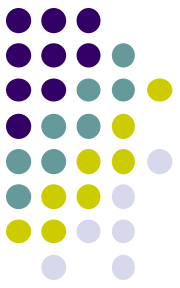
假如  $|A| = n$ , 则  $A$  上的关系  $R$  的传递闭包是:

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

上述公式和:  $t(R) = R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$  有何差别?

$A$  中只有  $n$  个不同的元素, 如果在  $R$  中存在一条从  $a$  到  $b$  的长度至少为 1 的通路, 那么存在一条长度不超过  $n$  的从  $a$  到  $b$  的通路。

若  $xR^*y$ , 则存在某个自然数  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 满足  $xR^ky$ .



# 用矩阵乘法计算传递闭包

有限集合上关系的传递闭包:  $t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

$$\therefore M_{t(R)} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \dots \vee M_R^n$$

算法概要:

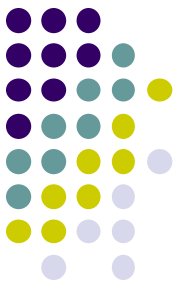
1. 输入 $M_R$ ;
2. 计数器  $k$  置初值 $n-1$ ;
3.  $M_{TR} \leftarrow M_R$ ;  $M' \leftarrow M_R$ ;
4.  $M' \leftarrow \underline{M' \times M_R}$ ;
5.  $M_{TR} \leftarrow \underline{M_{TR} \vee M'}$ ;
6.  $k \leftarrow k-1$ ; 若 $k > 0$ 则转4;
7. 输出 $M_{TR}$ ;

$n \times n$ 矩阵相乘, 结果中每1项, 要做 $(2n-1)$ 次)布尔运算(积与和), 总共需要计算 $n^2$ 项。

$n \times n$ 矩阵相加, 要做 $n^2$ 次布尔运算(和)

本算法共进行 $n-1$ 次矩阵乘和加。

总运算量 $(n^2(2n-1) + n^2)(n-1) = 2n^3(n-1)$

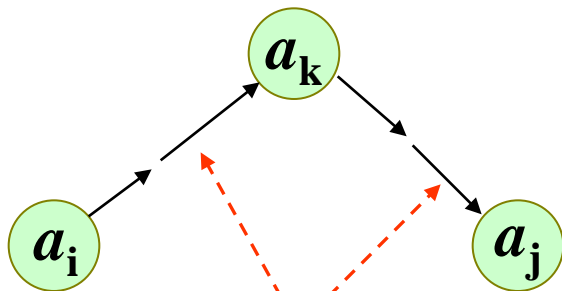


# Warshall算法原理

不直接计算  $M_R$  的乘幂, Warshall算法迭代式地用  $W_{i-1}$  计算  $W_i$   
这里: 1.  $W_0$  即为  $R$  的关系矩阵,  $M_R$ 。

2. 对  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $W_k[i, j] = 1$  当且仅当 从  $a_i$  到  $a_j$   
存在中间节点均在集合  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  内的通路。

3.  $W_n$  即  $M_{t(R)}$ , 也就是所需的结果。



all interior vertices in  $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$

$W_k[i, j] = 1$  iff

$W_{k-1}[i, j] = 1$ , or

$W_{k-1}[i, k] = 1$  and  $W_{k-1}[k, j] = 1$



# Warshall算法过程

- **ALGORITHM** *WARSHALL* ( $M_R$  :  $n \times n$ 的0-1矩阵)

- 1.  $W := M_R$

- 2. FOR  $k := 1$  to  $n$

- FOR  $i := 1$  to  $n$

- FOR  $j := 1$  to  $n$

- $W[i, j] \leftarrow \underline{W[i, j] \vee (W[i, k] \wedge W[k, j])}$

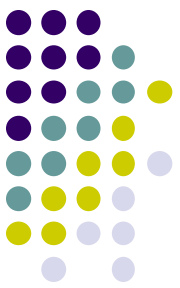
- 3. Output  $W$

- **END OF ALGORITHM** *WARSHALL*

这个语句在三重循环内，  
执行 $n^3$ 次，每次执行2个  
布尔运算（和与积）

总运算量:  $2n^3$





# 等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递。
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系:  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $xRy$  当且仅当  $\frac{|x - y|}{3}$  是整数。
  - $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $xRy$  iff 存在正整数  $k, l$ , 使得  $x^k = y^l$ .
    - 自反: 若  $x$  是任意自然数, 当然  $x^k = x^k$ ;
    - 对称: 若有  $k, l$ , 使  $x^k = y^l$ ; 也就有  $l, k$ , 使  $y^l = x^k$ ;
    - 传递: 若有  $k, l$ , 使  $x^k = y^l$ ; 并有  $m, n$ , 使  $y^n = z^m$ ; 则有  $x^{kn} = z^{ml}$



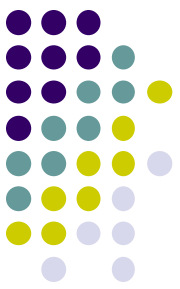
# 等价类

- $R$ 是集合 $A$ 上的等价关系,

$$\forall x \in A, \text{ 等价类 } [x]_R = \{y \mid xRy\}$$

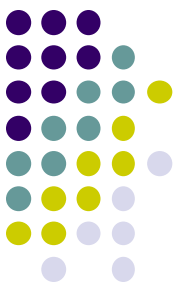
- 每个等价类是 $A$ 的一个非空子集
- 举例, 对3同余是整数集合上的一个等价关系
  - 3 个等价类:  $[0]=\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\};$   
 $[1]=\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\};$   
 $[2]=\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$





# 等价类的代表元素

- 对于等价类  $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$ ,  $x$  称为这个等价类的代表元素.
- 事实上, 该等价类的每个元素都可以做代表元素:  
若  $xRy$ , 则  $[x] = [y]$ 
  - 证明: 对任意元素  $t$ , 若  $t \in [x]$ , 则  $xRt$ , 又  $xRy$ , 根据  $R$  的对称性与传递性, 可得  $yRt$ , 因此,  $t \in [y]$ , 所以  $[x] \subseteq [y]$ ; 同理可得  $[y] \subseteq [x]$ .



# 商集

- $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系，其所有等价类的集合称为 **商集**， $A/R$
- 集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  上的恒等关系  $I_A$  是等价关系，商集  $A/I_A = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系  $R$ :

$$(a, b)R(c, d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

证明这是等价关系，并给出其商集.



# 等价关系的一个例子

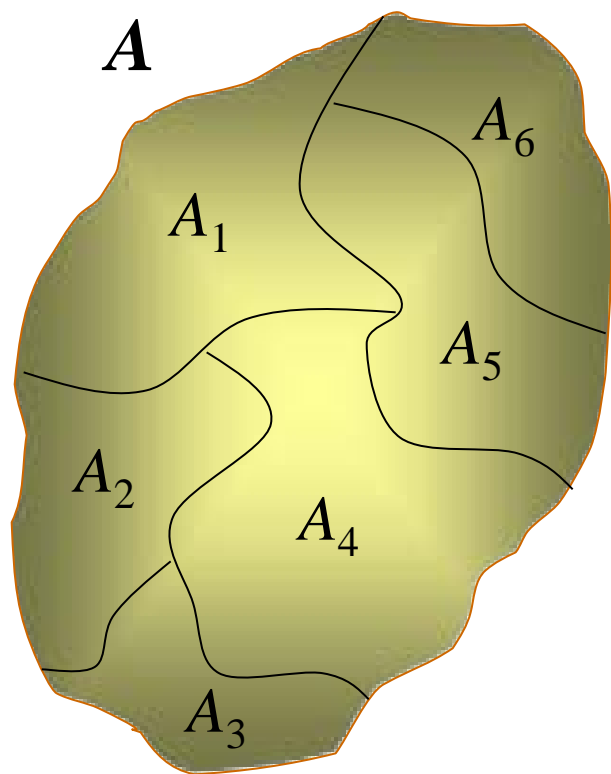
- $R_1, R_2$  分别是集合  $X_1, X_2$  上的等价关系。定义  $X_1 \times X_2$  上的关系  $S$ :

$$(x_1, x_2) S (y_1, y_2) \text{ 当且仅当 } x_1 R_1 y_1 \text{ 且 } x_2 R_2 y_2$$

- 证明:  $S$  是  $X_1 \times X_2$  上的等价关系
  - [自反性] 对任意  $(x, y) \in X_1 \times X_2$ , 由  $R_1, R_2$  满足自反性可知,  $(x, x) \in R_1, (y, y) \in R_2$ ;  $\therefore (x, y) S (x, y)$ ;  $S$  自反。
  - [对称性] 假设  $(x_1, x_2) S (y_1, y_2)$ , 由  $S$  的定义以及  $R_1, R_2$  满足对称性可知:  $(y_1, y_2) S (x_1, x_2)$ ;  $S$  对称。
  - [传递性] 假设  $(x_1, x_2) S (y_1, y_2)$ , 且  $(y_1, y_2) S (z_1, z_2)$ , 则  $x_1 R_1 y_1, y_1 R_1 z_1, x_2 R_2 y_2, y_2 R_2 z_2$ , 由  $R_1, R_2$  满足传递性可知:  $x_1 R_1 z_1$ , 且  $x_2 R_2 z_2$ , 于是:  $(x_1, x_2) S (z_1, z_2)$ ;  $S$  传递。



# 集合的划分



集合A的 **划分**,  $\pi$  是A的一组非空子集的集合, 即  $\pi \subseteq \rho(A)$ , 且满足:

1. 对任意  $x \in A$ , 存在某个  $A_i \in \pi$ , 使得  $x \in A_i$ .

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意  $A_i, A_j \in \pi$  如果  $i \neq j$ , 则:

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$



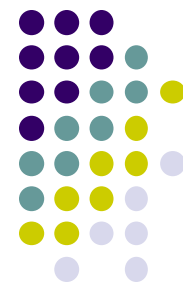
# 由等价关系定义的划分

- 假设 $R$ 是集合 $A$ 上的等价关系，给定 $a \in A$ ， $R(a)$ 是由 $R$ 所诱导的等价类。
- $Q = \{R(x) | x \in A\}$ 是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是 $A$ 的一个划分：
  - 对任意  $a \in A$ ,  $a \in R(a)$  ( $R$  是自反的)
  - 对任意  $a, b \in A$ 
    - $(a, b) \in R$  当且仅当  $R(a) = R(b)$ , 同时
    - $(a, b) \notin R$  当且仅当  $R(a) \cap R(b) = \emptyset$

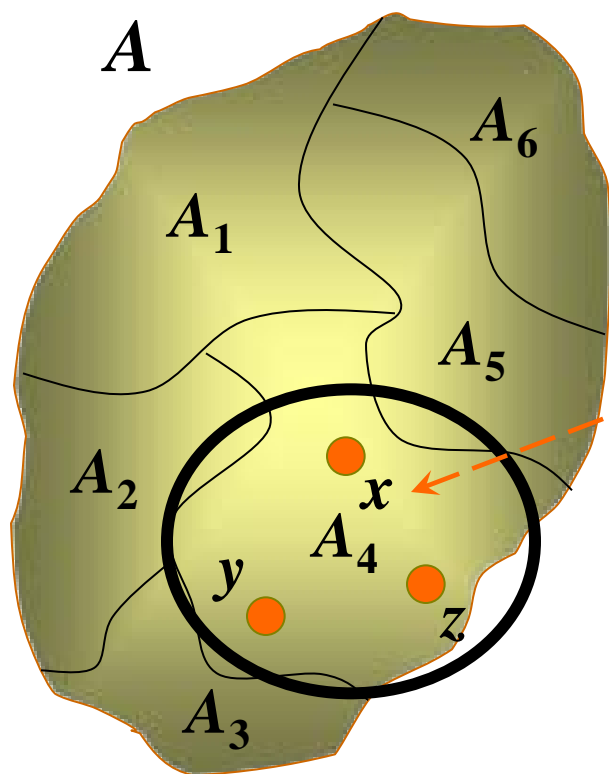


# 商集即划分— 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设 $R(a) \cap R(b) \neq \emptyset$ ，设 $c$ 是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义， $(a, c) \in R, (b, c) \in R$
  - 对任意 $x \in R(a)$ ,  $(a, x) \in R$ ，由 $R$ 的传递性和对称性，可得 $(c, x) \in R$ ，由此可知 $(b, x) \in R$ ，即 $x \in R(b)$ ,  $\therefore R(a) \subseteq R(b)$
  - 同理可得： $R(b) \subseteq R(a)$ 。因此， $R(a) = R(b)$ 。



# 根据一个划分定义等价关系



给定  $A$  上一个划分，可以如下定义  $A$  上的等价关系  $R$ ：

$\forall x, y \in A, (x, y) \in R$  当且仅当：  
 $x, y$  属于该划分中的同一块。

显然，关系  $R$  满足自反性、对称性、传递性。因此， $R$  是等价关系。



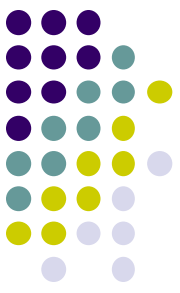
# 利用等价类解题

- 证明:

从 $1, 2, \dots, 2000$ 中任取 $1001$ 个数，其中必有两个数 $x, y$ ，满足 $x/y=2^k$ 。 ( $k$ 为整数)

想起鸽笼原理没？





# 等价关系与划分：一个例子解

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的 $k$ 次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合 $\{1,2,3,\dots, 2000\}$ 上的一个划分。
- 定义集合 $\{1,2,3,\dots, 2000\}$ 上的一个关系 $R$ ，任意 $x,y$ ， $xRy$ 当且仅当 $x/y=2^k$ 。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。



# 作业

- 教材[8.4]
  - p. 424-425: 23, 28
- 教材[8.5]
  - p. 430-434: 15, 20, 35, 41
  - p. 450: 13