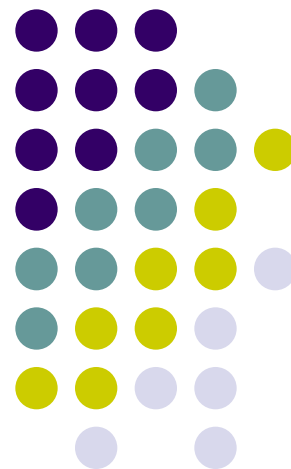


基本概念

离散数学 图论初步

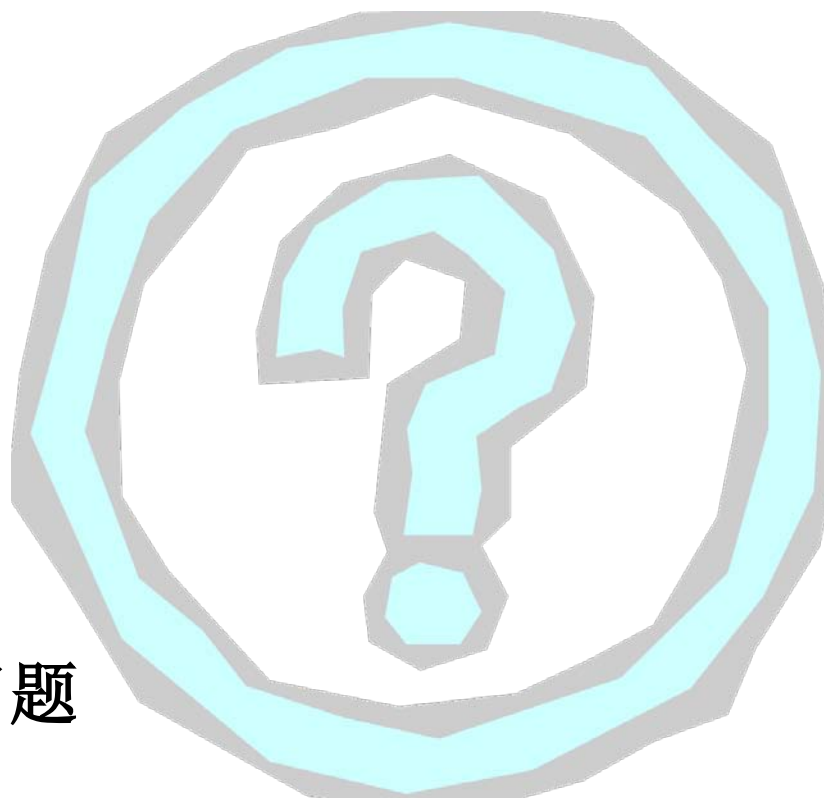
南京大学计算机科学与技术系





内容提要

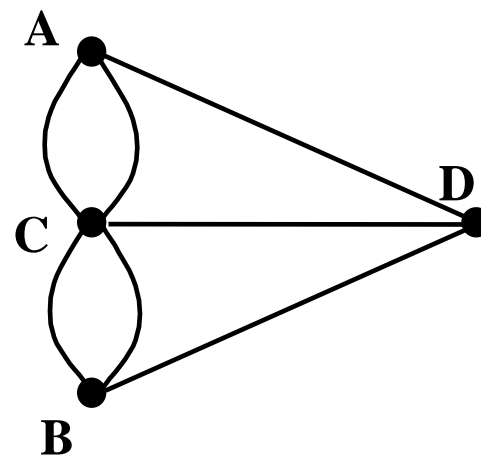
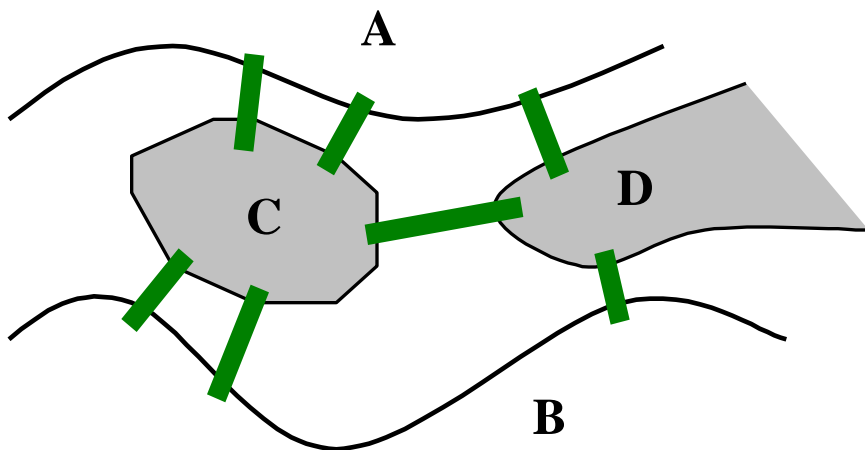
- 图的定义
- 图模型
- 图的术语
- 几种特殊的图
- 二部图（偶图）
- 图的运算
- 图结构上的经典问题



Königsberg七桥问题



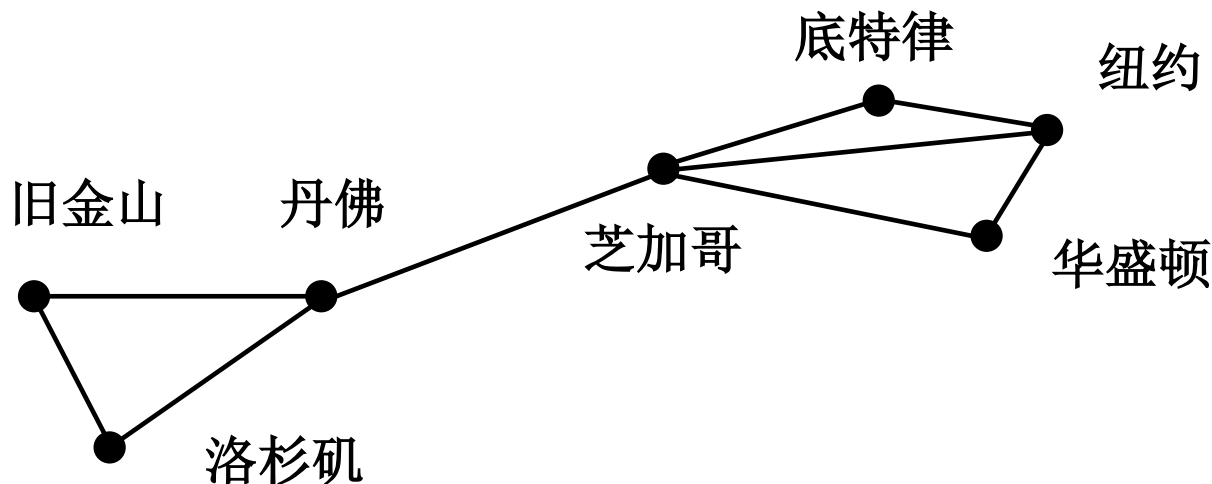
- 问题的抽象：
 - 用顶点表示对象-“地块”
 - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”





图的定义

- 图 G 是一个三元组: $G=(V, E, \varphi)$
 - V 是**非空**顶点集, E 是边集, 且 $V \cap E = \emptyset$;
 - $\varphi: E \rightarrow P(V)$, 且 $\forall e \in E. 1 \leq |\varphi(e)| \leq 2$. $\varphi(e)$ 称为边 e 的端点集.
- 举例 (数据中心、通信链接)





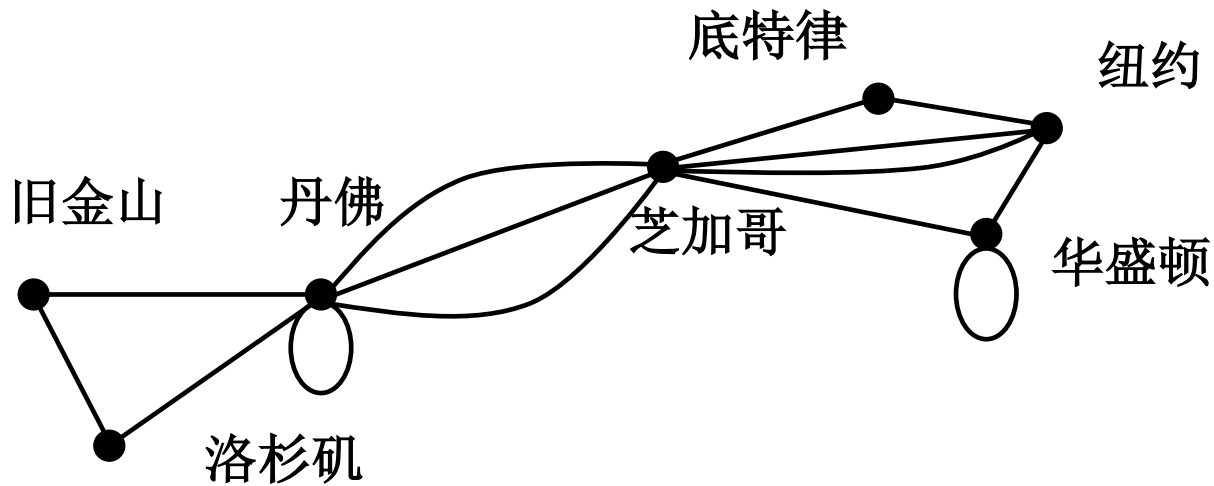
图的定义（续）

- 图 $G = (V, E, \varphi)$ 是简单图，如果
 - 每条边有2个端点，即： $\forall e \in E. |\varphi(e)| = 2$ ，并且
 - 不同边有不同端点集，即：如果 $e_1 \neq e_2$ ，则 $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$
- 图 $G = (V, E, \varphi)$ 是伪图，如果
 - 存在一条只有1个端点的边，即： $\exists e_0 \in E. |\varphi(e_0)| = 1$ ，或者
 - 有两条边具有相同的端点集，即： $\exists e_1 \neq e_2. \varphi(e_1) = \varphi(e_2)$



图的定义（续）

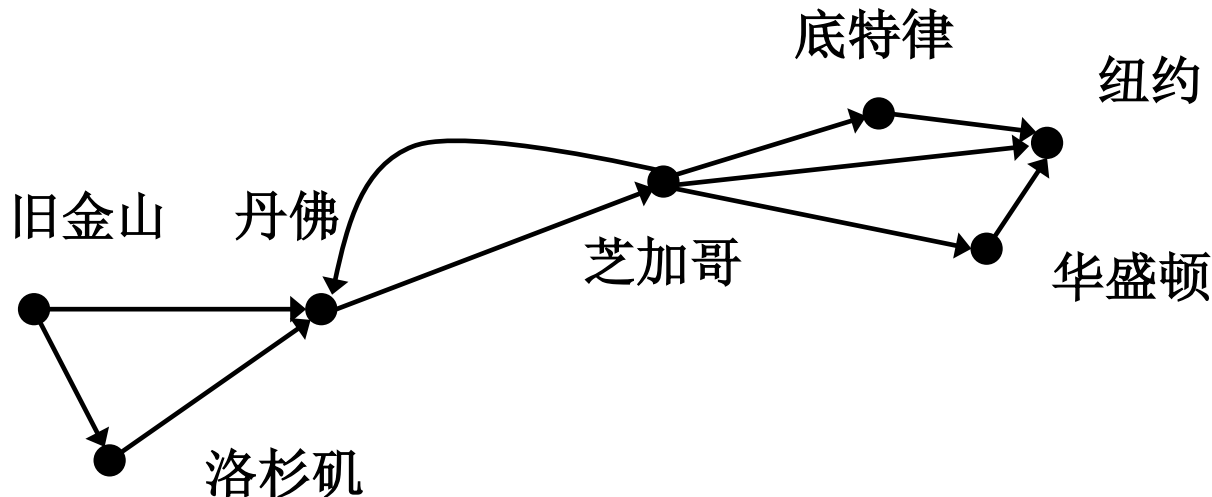
- 伪图（包含环或者多重边）示例





图的定义（有向图）

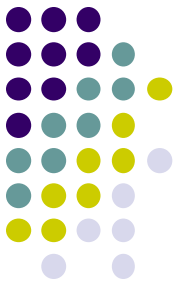
- 有向图 G 是一个三元组： $G = (V, E, \phi)$
 - V 是**非空**顶点集， E 是有向边（弧）集，且 $V \cap E = \emptyset$ ；
 - $\phi: E \rightarrow V \times V$, 若 $\phi(e) = (u, v)$, 则 u 和 v 分别称为 e 的起点和终点.
- 举例（简单有向图）





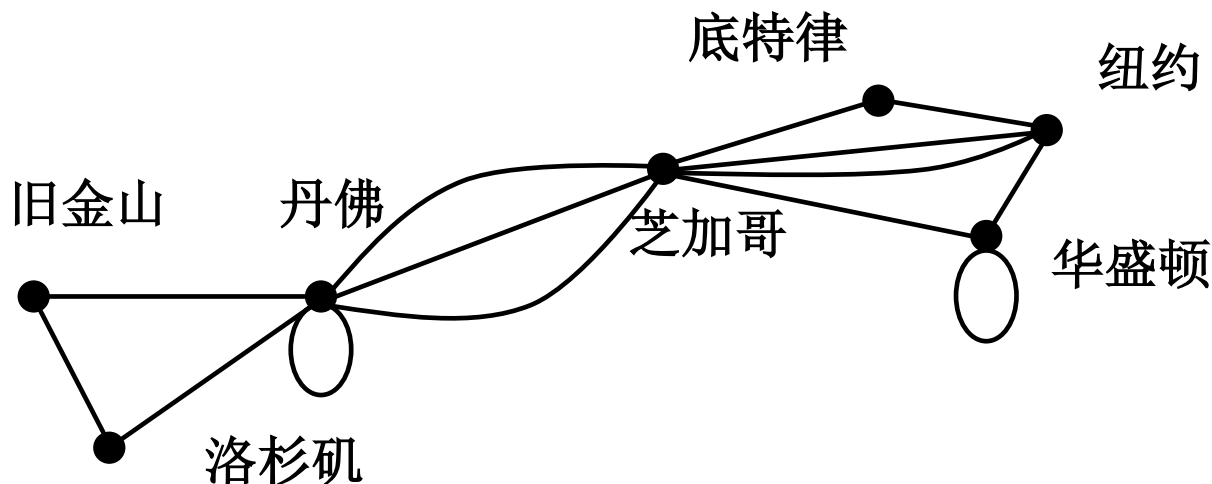
图模型

- 交通网络
 - 航空、公路、铁路
- 信息网络
 - 万维网图 (Web Graph)
 - 引用图 (Citation Graph)
- 社会网络
 - 熟人关系图
 - 合作图, 好莱坞图
 - 呼叫图
- 体育 (循环赛的图模型)



图的术语

- 无向图 $G = (V, E, \phi)$, $\phi(e) = \{u, v\}$, $u \neq v$
 - u 和 v 在 G 里邻接（相邻）
 - e 关联（连接）顶点 u 和 v
- 图 G 中顶点 v 的度, $\deg(v)$, $d_G(v)$
 - 与该顶点关联的边数，环为顶点的度做出双倍贡献。



握手定理



- 无向图G有m条边，n个顶点 v_1, \dots, v_n .

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

- 推论：无向图中奇数度顶点必是偶数个。



图的术语（续）

- 有向图 $G = (V, E, \varphi)$, $\varphi(e) = (u, v)$
 - u 是 e 的起点, v 是 e 的终点
 - 假设 $u \neq v$, u 邻接到 v , v 从 u 邻接
- 有向图中顶点的出度和入度
 - $d_G^+(v)$ = 以 v 为始点的边的条数, $\deg^+(v)$
 - $d_G^-(v)$ = 以 v 为终点的边的条数, $\deg^-(v)$
- 有向图中各顶点的出度之和等于入度之和。

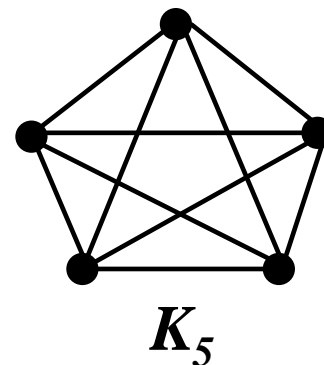
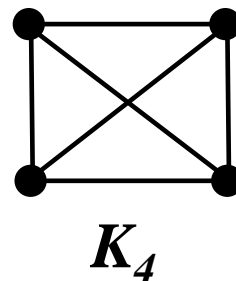
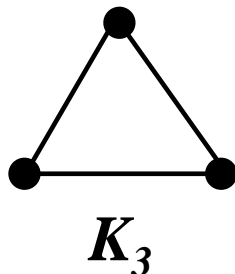
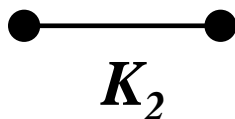
$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

- 有向图的底图

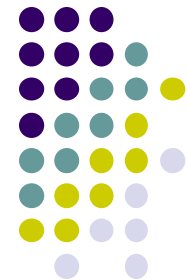
特殊的简单图（完全图）



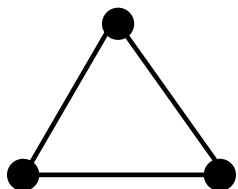
- 若简单图 G 中任意两点均相邻，则称为完全图。记为 K_n ，其中 n 是图中顶点数。
 - K_n 中每个顶点皆为 $n-1$ 度，总边数为 $n(n-1)/2$ 。
 - 边数达到上限的简单图。



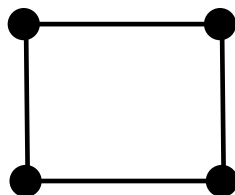
特殊的简单图（圈图与轮图）



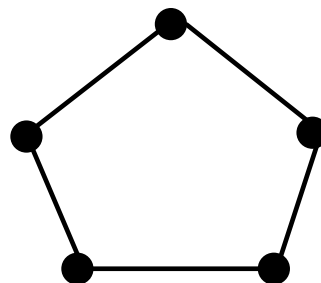
Cycle



C_3

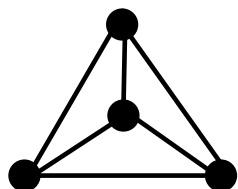


C_4

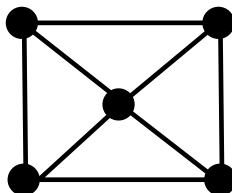


C_5

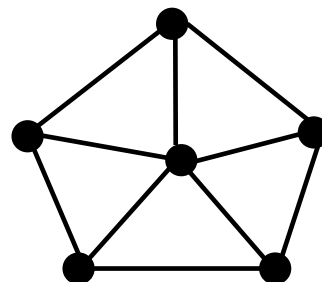
Wheel



W_3

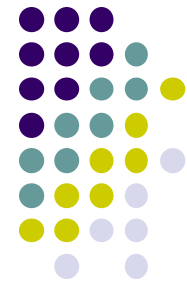


W_4

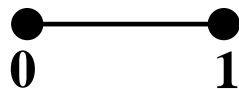


W_5

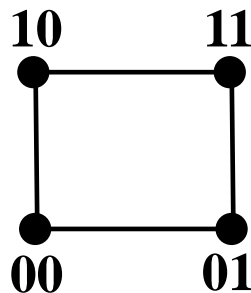
特殊的简单图（立方体图）



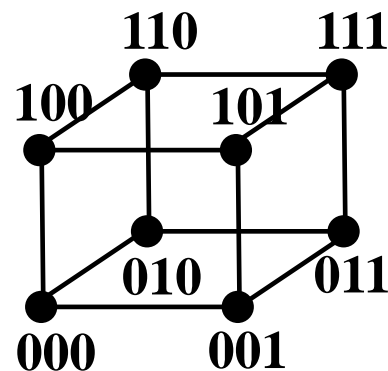
n-cube



Q_1



Q_2



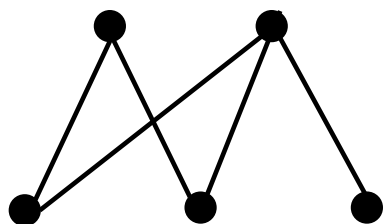
Q_3

正则图：顶点度相同的简单图

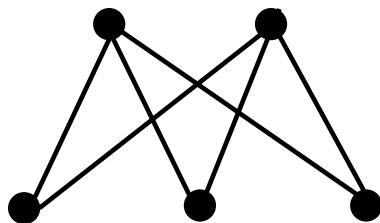
二部图(bipartite graph)



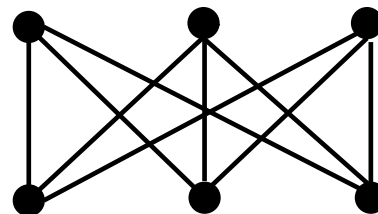
- 二部图：顶点集划分为2个类别(不相交)，边的端点在不同类别中。
- 完全二部图：来自不同类别的两个顶点均有边。



G



$K_{2,3}$

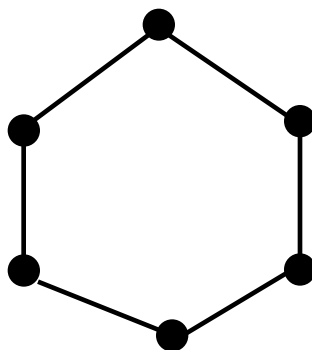


$K_{3,3}$

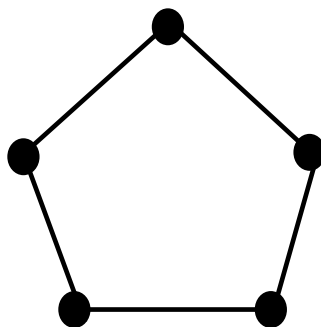
二部图的判定



- C_6 是否是二部图?



- 二种颜色对顶点着色，相邻顶点赋以不同颜色



二部图?



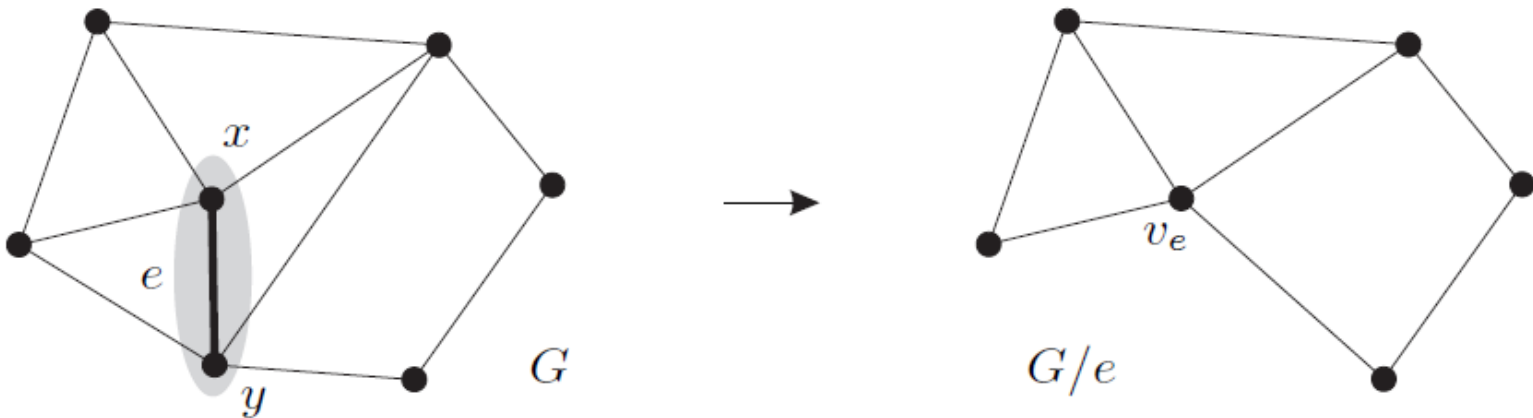
子图

- 设 $G=\langle V,E \rangle$, $G'=\langle V',E' \rangle$, 如果 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, 则称 G' 是 G 的子图。
- 如果 $V'\subset V$, 或者 $E'\subset E$, 则称为真子图。
- 诱导(导出)子图: 可以由顶点集的子集, 或者由边集的子集导出一个子图。



图的运算

- 加新边: $G+e$
- 减边或边集: $G-e$
- 减点或点集: $G-v$ (同时删除与 v 关联的边)
- 边的收缩: G/e



图的运算

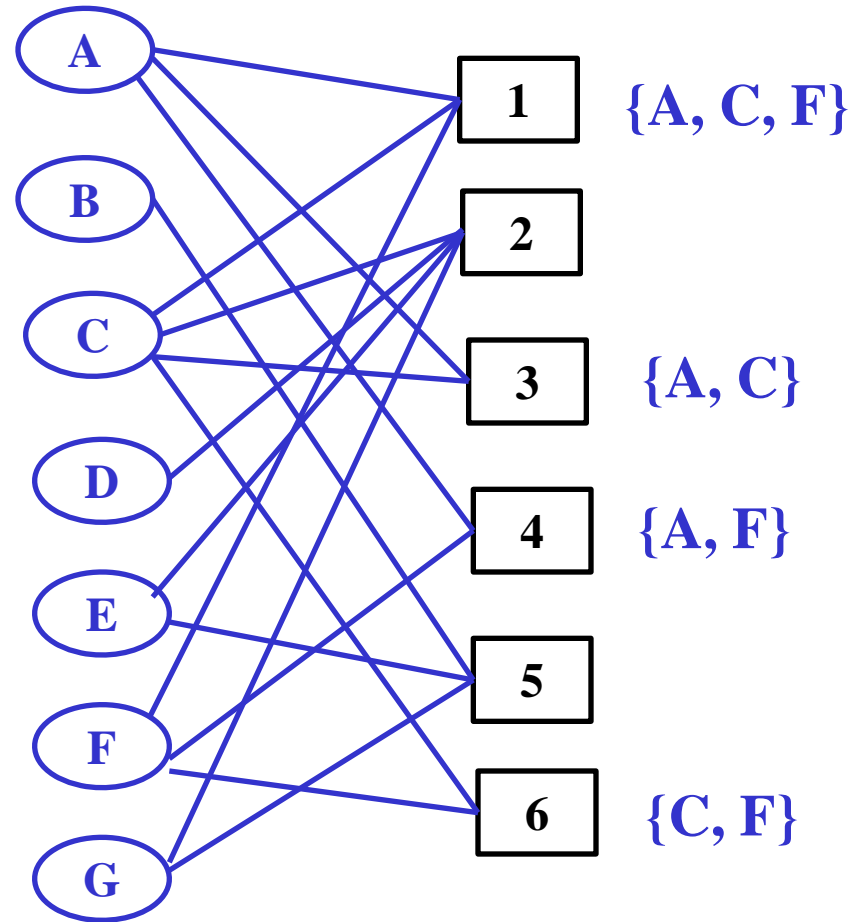


- $G \cup G'$: 以 $V(G) \cup V(G')$ 中的顶点组成的集合为顶点集, 以 $E(G) \cup E(G')$ 为边集。 // 简单图的并
- 假设 **G 和 G' 是不交的无向图**, 定义 $G * G'$ 如下:
 - 以 $V(G) \cup V(G')$ 为顶点集
 - 以 $E(G) \cup E(G') \cup \{\{x, y\} \mid x \in V(G), y \in V(G')\}$ 为边集
- 举例, $K_2 * K_3 = K_5$.
- 简单图 G 的补图 (complement graph), 记为 G
 - $G=(V, E)$ 的补图定义为 $(V, [V]^2 \setminus E)$



图结构上的经典问题-孤岛上的婚姻

- 孤岛上有 m 个男子和 n 个女子，每个人均有一个可选配偶列表，如何成就尽可能多的幸福婚姻？
- 最大匹配问题。



中国邮递员问题（管梅谷，1960）



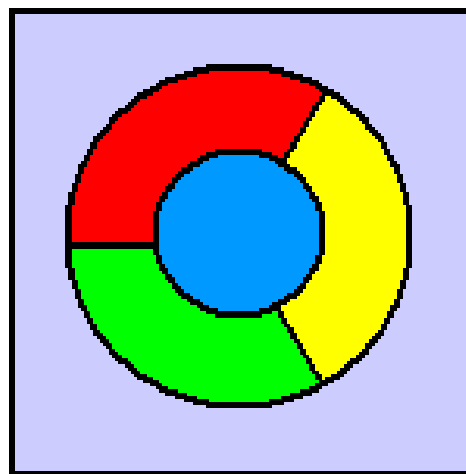
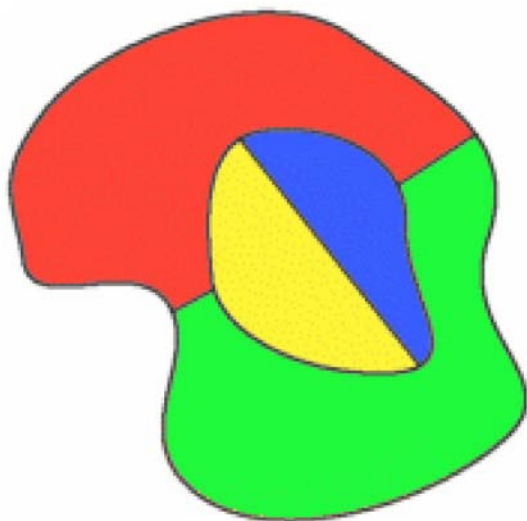
- 邮递员从邮局出发，走过辖区内**每条街道至少一次**，再回邮局，如何选择最短路线？
- **Euler**回路？添加重复边（权和最小）。



旅行商(TSP)问题

- n 个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它 $n-1$ 个城市，且只经过一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
- 最短Hamilton回路。

地图与平面图着色（四色猜想）



作业



- 教材[9.1, 9.2]
 - p. 459: 5-8, 16, 20
 - p. 468: 5, 8, 31, 36(a, c, e, g), 53