1995 年全国硕士研究生入学统一考试
数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x->0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\quad e^6 \quad}$.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt = \underline{\int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4}$.

(3) 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = \underline{\quad 4 \quad}$.

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R = \underline{\quad \sqrt{3} \quad}$.

(5) 设三阶方阵 A、B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且 $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$，则 $B = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 有直线 L: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L (C)

(A) 平行于 π.　(B) 在 π 上　(C) 垂直于 π.　(D) 与 π 斜交

(2) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$、$f'(1)$、$f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (B)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

(3) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 (A)

(A) 充分必要条件　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

(4) 设 $u_n = (-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，则级数 (C)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

(5) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则必有 (C)

(A) $AP_1P_2=B$　(B) $AP_2P_1=B$　(C) $P_1P_2A=B$　(D) $P_2P_1A=B$.

三、(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分)

(1) 设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,e^y,z)=0,y=\sin x$,其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

解： $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$, ……2 分

$\dfrac{dy}{dx}=\cos x,\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^y\cos x\cdot\varphi_2')$, ……4 分

故 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2')$. ……5 分

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解： 更换积分次序，可得

$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$, ……2 分

于是 $2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$

$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=A^2$ ……4 分

所以 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\dfrac{1}{2}A^2$. ……5 分

四、(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma zdS$， 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

解： Σ 在 xoy 平面上的投影区域为 D：$x^2+y^2\leq 2x$，$dS=\sqrt{1+(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2}d\sigma=\sqrt{2}d\sigma$.

于是 $\iint_\Sigma zdS=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}d\sigma$ ……3 分

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\dfrac{16}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$. ……6 分

(2) 将函数 $f(x)=x-1\,(0\leq x\leq 2)$ 展成周期为 4 的余弦级数.

解： $a_0=\dfrac{2}{2}\int_0^2(x-1)dx=0,$ ……1 分

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$ ……4 分

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots).$$

$f(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2},x\in[0,2].$ ……6 分

注：展开式也可写作 $f(x)=\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2},x\in[0,2].$

五、(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于 xoy 平面的第一象限内，L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A.已知 $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$，且 L 过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求 L 的方程.

解： 设点 M 的坐标为 (x,y)，则切线 MA 的方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $X=0$，则 $Y=y-xy'$，故点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$. ……2 分

由 $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$，有 $|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}$. 即 $2yy'-\dfrac{1}{x}y^2=-x$. ……4 分

令 $z=y^2$，得 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{z}{x}=-x$.

解得 $z=e^{\int\frac{1}{x}dx}(-\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c)=x(-x+c)$，即 $y^2=-x^2+cx$ ……6 分

由于所求曲线在第一象限内,故 $y=\sqrt{cx-x^2}$.

再以条件 $y(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$ 代入得 $c=3$，于是 L 的方程为 $y=\sqrt{3x-x^2}.(0<x<3)$ ……7 分

注： 不写 $(0<x<3)$ 不扣分.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x,y)$ 在 xoy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$，求 $Q(x,y)$.

解： 由曲线积分与路径无关的条件知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$. ……2 分

于是，$Q(x,y)=x^2+c(y)$，其中$c(y)$为待定函数. ……3 分

又$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1[t^2+c(y)]dy=t^2+\int_0^1 c(y)dy$,

$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^t[1^2+c(y)]dy=t+\int_0^t c(y)dy$. ……6 分

故由题设知$t^2+\int_0^1 c(y)dy=t+\int_0^t c(y)dy$.两边对$t$求导得$2t=1+c(t),\ c(t)=2t-1$

从而$c(y)=2y-1$，所以$Q(x,y)=x^2+2y-1$. ……8 分

七、(本题满分 8 分)

假设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，并且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间(a,b)内$g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证：(1) 用反证法. 若存在点$c\in(a,b)$，使$g(c)=0$，则对$g(x)$ $[a,c]$和$[c,b]$上分别应用罗尔定理，知存在$\xi_1\in(a,c)$和$\xi_2\in(c,b)$，使$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. ……2 分

再对$g'(x)$在在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，知存在$\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$,使$g''(\xi_3)=0$，这与题设$g''(x)\neq 0$矛盾，故在(a,b)内$g(x)\neq 0$. ……4 分

(2) 令$\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$， ……6 分

易见$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，对$\varphi(x)$在$[a,b]$上应用罗尔定理，知存在$\xi\in(a,b)$，使$\varphi'(\xi)=0$.

即$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$. 因$g(\xi)\neq 0, g''(\xi)\neq 0$，故得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$. ……8 分

八、(本题满分 7 分)

设三阶实对称阵A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=(0,1,1)^T$，求$A$.

解：对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$有两个线性无关的特征向量ξ_2,ξ_3，它们都与ξ_1正交，故可取$\xi_2=(1,0,0)^T,\xi_3=(0,1,-1)^T$，. ……3 分

令$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, ……5 分

则$P^{-1}=P^T$，于是

$$A=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$ ……7 分

九、(本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA'=I$ （I 是 n 阶单位阵，A' 是 A 的转置矩阵），$|A|<0$，求 $|A+I|$.

解：因 $|A+I|=|A+AA'|=|A||I+A'|$ ……2 分

$=|A||(I+A)'|=|A||I+A|$， ……4 分

所以 $(1-|A|)|I+A|=0$.由因 $1-|A|>0$，故 $|I+A|=0$. ……6 分

十、(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4 ，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ __18.4__.

(2) 设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$ __5/7__ .

十一、(本题满分 6 分)

设 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，求 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$ ……1 分

$=\begin{cases}0, & y<1\\ P\{X<\ln y\}, & y\ge 1\end{cases}$， ……3 分

故 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{X<\ln y\}=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx$，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{y^2}$ ……5 分

因此 $f_Y(y)==\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{1}{y^2}, & y\ge 1\end{cases}$. ……6 分

数　学（试卷二）

一、填空题【 同数学一　第一题　**】**

二、选择题【 同数学一　第二题**】**

三、(本题共3小题，每小题5分，满分15分)

(1)【 同数学一　第三、(1)　题　**】**

(2) 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

解： 设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$. 于是曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 在点P的法矢量为 $\{x_0,2y_0,-1\}$.

因所给平面的法矢量为 $\{2,2,-1\}$.故由条件知 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$.

所以切点坐标为 $x_0=2,y_0=1,z_0=\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=3$. ……3分

于是所求切平面方程为 $2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$, 即 $2x+2y-z-3=0$. ……5分

(3) 计算二重积分 $\iint_D x^2ydxdy$，其中D是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 y = 0, y = 1 所围成的平面区域.

解： $\displaystyle\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2ydx$ ……2分

$\displaystyle=\frac{2}{3}\int_0^1y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{2}{15}(1+y^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$. ……5分

四、(本题满分12分)【 同数学一　第四题　**】**

五、(本题满分7分)【 同数学一　第五题　**】**

六、(本题满分8分)【 同数学一　第六题　**】**

七、(本题满分8分)【 同数学一　第七题　**】**

八、(本题共2小题，每小题7分，满分14分)

(1) 设 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=1\\x_2+ax_3-ax_4=-1\\2x_2+3x_4=3\end{cases}$，问 a 为何值时方程组有解，并在有解时求出方程组的通解.

解：因 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1 \end{array}\right)$， ……3 分

所以 $a \neq 2$ 时，方程组有解， ……4 分

其通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{7a-10}{a-2} \\ \dfrac{2-2a}{a-2} \\ \dfrac{1}{a-2} \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数. ……7 分

(2)【 同数学一 第八题 】

九、(本题满分 6 分)【 同数学一 第九题 】

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$，则 $y'=$ $\underline{-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2)}$.

(2) 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为 $\underline{y=-2x+c_1\cos x+c_2\sin x}$.

(3) 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 $\underline{3x-y-7=0}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\underline{\frac{1}{2}}$.

(5) 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{y=0}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则 （D）

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　（B）$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(2) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为 (C)

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$　　（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx.$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$；　　（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 （D）

(A) 对任意 x，$f'(x)>0$.　　(B) 对任意 x，$f'(-x)<0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

(4) 设在 $[0,1]$ 上 $f'''(x)>0$ $f''(0)=0$，则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (B)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

(5) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 (A)

(A) $f(0)=0$.　(B) $f'(0)=0.$　(C) $f(0)+f'(0)=0.$　(D) $f(0)-f'(0)=0.$

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$ ……1 分

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot(1+\sqrt{\cos x})}$ ……4 分

$=\dfrac{1}{2}$. ……5 分

(2) 设函数 $y=y(x)$ 方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq1$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 方程两边取对数，得 $\ln x+f(y)=y$. 对 x 求导，得 $\dfrac{1}{x}+f'(y)y'=y'$

从而 $y'=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$ ……2 分

故 $y''=-\dfrac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2}=-\dfrac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$. ……5 分

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$， 求 $\int\varphi(x)dx$

解： 因为 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，所以 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. ……1 分

又 $f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$, 从而 $\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x, \varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. ……3 分

于是 $\int\varphi(x)dx=\int\dfrac{x+1}{x-1}dx=2\ln(x-1)+x+c$(或 $=\ln(x-1)^2+x+c$) ……5 分

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解： 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$， ……2 分

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4})=\dfrac{\pi}{2}$, ……4 分

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的. ……5 分

(5) 求摆线 $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t-\sin t \end{cases}$ 一拱（$0\le t\le 2\pi$）的弧长.

解： $\dfrac{dx}{dt}=\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=1-\cos t,$ ……1 分

所以 $ds=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}\,dt=\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2\sin\dfrac{t}{2}\,dt(0\le t\le 2\pi)$. ……3 分

从而 $s=\int_0^{2\pi}2\sin\dfrac{t}{2}\,dt=8$. ……5 分

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$.已知阻力与速度成正比（比例常数为 1)，问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

解： 设质点的运动速度为 $v(t)$.由题设,有 $\begin{cases} v'(t)+v(t)=0 \\ v\big|_{t=0}=v_0 \end{cases}$. ……2 分

解此方程,得 $v(t)=v_0e^{-t}$. ……3 分

由 $\dfrac{v_0}{3}=v_0e^{-t}$，解得 $t=\ln 3$ ……4 分

到此时刻该质点所经过的路程 $s=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}dt=\dfrac{2}{3}v_0$. ……5 分

四、(本题满分 8 分)

求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

解： 因为 $f(x)$是偶函数,故只需求$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最大值与最小值. ……2 分

令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$，故在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一驻点 $x=\sqrt{2}$.

而当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $x=\sqrt{2}$ 是极大值点，即最大值点. ……4 分

最大值为 $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$. ……6 分

又因为 $\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\big|_0^{+\infty}+e^{-t}\big|_0^{+\infty}=2-1=1$，$f(0)=0$，

故 $f(0)=0$ 是最小值. ……8 分

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解： 以 $y=e^x$ 代入原方程，得 $xe^x+p(x)e^x=x$，解出 $p(x)=xe^{-x}-x$. ……2 分

代入原方程，得 $xy'+(xe^{-x}-x)y=x$. 解其对应的齐次方程 $y'+(e^{-x}-1)y=0$，有

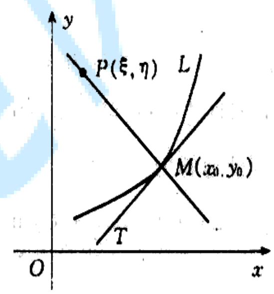
$\dfrac{dy}{y}=(-e^{-x}+1)dx,\ \ln y-\ln c=e^{-x}+x$，得齐次方程的通解 $y=ce^{x+e^{-x}}$. ……5 分

所以原方程的通解为 $y=e^{x}+ce^{x+e^{-x}}$. ……6 分

于是由 $y|_{x=\ln 2}=0$，得 $2+2e^{\frac{1}{2}}c=0$，即 $c=-e^{-\frac{1}{2}}$，故所求特解为 $y=e^{x}-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$. ……8 分

六、(本题满分 8 分)

如图，设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，且 $f''>0$. 又 MT、MP 分别为该曲线在点 M（x_0,y_0）处的切线和法线.已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{(1+(y_0')^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$，（其中，$y_0'=y'(x_0),\ y''_0=y''(x_0)$），试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



解： 由题设得 $(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=\dfrac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}$ (1)

又 $PM\perp MT$，所以 $y_0'=-\dfrac{x_0-\xi}{y_0-\eta}$ (2) ……4 分

由(1),(2)解得 $(y_0-\eta)^2=\dfrac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}$.

由于 $y''>0$,曲线L是凹的, 故 $y_0-\eta<0$, 从而 $y_0-\eta=-\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$. ……6 分

又 $x_0-\xi=-y_0'(y_0-\eta)=\dfrac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''}$，于是得 $\begin{cases}\xi=x_0-\dfrac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''}\\ \eta=y_0+\dfrac{(1+y_0'^2)}{y_0''}\end{cases}$. ……8 分

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

解： $\int_0^\pi f(x)dx=xf(x)|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx$ ……3 分

$=\pi\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi x\dfrac{\sin x}{\pi-x}dx$ ……6 分

$=\int_0^\pi\dfrac{\pi-x}{\pi-x}\sin xdx=\int_0^\pi\sin xdx=2$. ……8 分

八、(本题满分 8 分)

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\geq x$.

证： 因为 $f\left(x\right)$ 连续且具有一阶导数，所以由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，知 $f(0)=0$.

从而有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. ……3 分

令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=0$. 由于 $F'(x)=f'(x)-1$，所以 $F'(0)=0$.

又由 $F''(x)=f''(x)>0$ ……5 分

知$F(0)$是$F(x)$的极小值和$F'(x)$单调.故$F(x)$只有一个驻点，从而$F(0)$是 $F(x)$ 的最小值.

因此 $F(x)\geq F(0)=0$,即$f(x)\geq x$. ……8 分

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{\dfrac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

(2) 设 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$， $f(u)$ 可导，则 $xz'_x+yz'_y=$ $\underline{\ 2z\ }$.

(3) 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$ $\underline{\ x+e^x+c\ }$.

(4) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$，A*是 A 的伴随矩阵，则$(A^*)^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1/10&0&0\\1/5&1/5&0\\3/10&1/5&1/2\end{bmatrix}}$

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中参数 μ 和 σ^2 未知，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$， $Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验应使用统计量

$t=$ $\underline{\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 (D)

(A) 2　　(B) -1　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) -2

(2) 下列广义积分发散的是 (A)

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sin x}dx$.　　(B) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(C) $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$　　(D) $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$

(3) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $R(A)=m<n$，I_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是 (C)

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零

(C) 若矩阵 B 满足 BA=0，则 B=0

(D) A 通过初等行变换，必可以化为（I_m 0）的形式

(4) 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 U = X - Y, V = X + Y，则随机变量 U 与 V 必然 (D)

(A) 不独立　　(B) 独立　　(C) 相关系数不为零　　(D) 相关系数为零

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ （C）

(A) 单调增大　(B) 单调减小　(C) 保持不变　(D) 增减不定

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & 若 x<0\\ 1, & 若 x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & 若 x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解：(1) 由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ ……1 分

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x^2}{1}=1,$ ……2 分

可知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$，于是，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 ……3 分

(2) 分别求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右导数，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left[\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-2}{6x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{3}=0,$$ ……4 分

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt-1\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2dt-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x\sin x^2}{2}=0.$$ ……5 分

由于左、右导数都等于 0,可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.且 $f'(0)=0$. ……6 分

注： 若只说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并说明可导一定连续，仍给满分.

四、(本题满分 6 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f(\frac{t}{3})dt+e^{2x}$，求 $f(x)$.

解： 两端同时对 x 求导数，得一阶线性微分方程 $f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$ ……1 分

解此方程,有 $f(x)=(\int 2e^{2x}\cdot e^{-3x}dx+c)e^{3x}=(2\int e^{-x}dx+c)e^{3x}=ce^{3x}-2e^{2x}.$ ……4 分

由于 $f(0)=1$, 可得 $c=3$. ……5 分

于是 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$. ……6 分

五、(本题满分 6 分)

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$)展成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

解： $\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)(1+x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$ ……1 分

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$,其收敛区间为(-1,1]; ……3 分

$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}+\cdots$,其收敛区间为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ……5 分

于是有,$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}]$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$,其收敛区间为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ……6 分

六、(本题满分 5 分)

计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

解： $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}dy$ ……2 分

$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx.$ ……3 分

作换元,令 $x=\frac{t}{2},dx=\frac{dt}{2}$，有

$I=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ……4 分

$=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ……5 分

其中用到泊松积分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$.

七、(本题满分 6 分)

设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$,收益函数为 $R=PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为需求量（产品的产量），$Q(P)$ 是单调减函数，如果当价格为 P_0 时，边际收益 $\frac{dR}{dQ}\Big|_{Q=Q_0}=a>0$,收益对价格的边际效应 $\frac{dR}{dP}\Big|_{P=P_0}=c<0$,需求对价格的弹性为 $E_p=b>1$，求 P_0 和 Q_0.

解：由收益 $R=PQ$ 对 Q 求导，有 $\dfrac{dR}{dQ}=P+Q\dfrac{dP}{dQ}=P+\left[-\dfrac{\frac{dP}{P}}{\frac{dQ}{Q}}\right](-P)=P(1-\dfrac{1}{E_p})$，

于是 $\dfrac{dR}{dQ}\Big|_{Q=Q_0}=P_0(1-\dfrac{1}{b})=a$． 即 $P_0=\dfrac{ab}{b-1}$． ……3 分

又由收益 $R=PQ$ 对 Q 求导，有 $\dfrac{dR}{dP}=Q+P\dfrac{dQ}{dP}=Q-\dfrac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}}(-Q)=Q(1-E_p)$，

故 $\dfrac{dR}{dP}\Big|_{P=P_0}=Q_0(1-E_p)=c.$ ……5 分

因此 $Q_0=\dfrac{c}{1-b}$． ……6 分

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[-a,a]$ ($a>0$) 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ （A 为常数）

(1) 证明: $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$；

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|arctge^x dx.$

证：**(1)** $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx$

而 $\int_{-a}^{0}f(x)g(x)dx\overset{x=-t}{=\!=\!=}-\int_a^0 f(-t)g(-t)dt=\int_0^a f(-x)g(x)dx$． ……2 分

于是 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=\int_0^a f(-x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx$

$$=\int_0^a[f(x)+f(-x)]g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$$ ……3 分

(2) 取 $f(x)=arctge^x, g(x)=|\sin x|, a=\dfrac{\pi}{2}$， 则 $f(x),g(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，且 $g(x)$ 为偶函数. 由于 $(\text{arctg}e^x+\text{arctg}e^{-x})'=0$，故 $\text{arctg}e^x+\text{arctg}e^{-x}=A$， ……4 分

令 $x=0$，得 $2arctg1=A$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$． 从而 $f(x)+f(-x)=\dfrac{\pi}{2}$． ……5 分

于是有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|arctge^x dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\dfrac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$． ……6 分

九、(本题满分 9 分)

已知向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；(III) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.如果各向量组的秩分别为 R(I)= R(II)=3，R(III)=4. 证明:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

证： 因 R(I)= R(II)=3，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，故存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$.　　（1）　　……3 分

设有数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$，

将（1）代入上式，化简得 $(k_1-\lambda_1k_4)\alpha_1+(k_2-\lambda_2k_4)\alpha_2+(k_3-\lambda_3k_4)\alpha_3+k_4\alpha_5=0$.

由 R(III)=4，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关.　　……6 分

所以 $\begin{cases} k_1-\lambda_1k_4=0 \\ k_2-\lambda_2k_4=0 \\ k_3-\lambda_3k_4=0 \\ k_4=0 \end{cases}$，于是有 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关，即其秩为 4.　　……9 分

十、(本题满分 10 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：(1) f 的矩阵表达式为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，　　……2 分

(2) 二次型的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$，

A 的特征方程为 $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0$，由此得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$；　　……6 分

对应的单位特征向量为 $\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{-1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$.

由此可得正交矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$. ……8 分

对二次型 f 作正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$， ……9 分

则二次型 f 可以化为如下标准型 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$. ……10 分

十一、(本题满分 8 分)

假设一厂家生产的每台仪器，以概率为 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂；以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了 n (n ≥2) 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立），求：

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

解： 对于新生产的每台仪器，引进事件：A=｛仪器需进一步调试｝，B={仪器能出厂}，则 $\bar A$ =｛仪器能直接出厂｝，AB=｛仪器经调试后能出厂｝.由条件知, $B=\bar A+AB$；

$P(A)=0.30, P(B\mid A)=0.80,\ P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.30\times0.80=0.24$，

$P(B)=P(\bar A)+P(AB)=0.70+0.24=0.94$， ……3 分

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X 作为 n 次独立试验成功（仪器能出厂）的次数，服从参数为 $(n,0.94)$ 的二项分布，因此

$\alpha=P\{X=n\}=0.94^n$， ……4 分

$\beta=P\{X=n-2\}=C_n^2\cdot0.94^{n-2}\cdot0.06^2$， ……6 分

$\theta=P\{X\le n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}=1-n\cdot0.94^{n-1}\cdot0.06-0.94^n$. ……8 分

十二、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}4xy, & 若0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$，求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$.

解：(1) 对于 $x<0或y<0$，有 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=0$. ……1 分

(2) 对于 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$，有 $F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uvdudv=x^2y^2$， …… 3 分

(3) 对于 $x>1,y>1$，有 $F(x,y)=1$. …… 4 分

(4) 对于 $x>1,0\le y\le 1$，有 $F(x,y)=P\{X\le 1,Y\le y\}=y^2$. …… 6 分

(5) 对于 $y>1,0\le x\le 1$，有 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le 1\}=x^2$. …… 8 分

故 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0\\ x^2y^2 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ x^2 & 0\le x\le 1, y>1\\ y^2 & x>1,0\le y\le 1\\ 1 & x>1,y>1\end{cases}$.

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt$，则常数 $a=$ <u>2</u>.

(2) 【 同数学四 第一、(2) 题 】

(3) 【 同数学四 第一、(3) 题 】

(4) 【 同数学四 第一、(4) 题 】

(5) 设 X 是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 若 -1\le x\le 0\\ 1-x, & 若 0<x\le 1\\ 0, & 其\ 他\end{cases}$，则方差 $DX=$ <u>$\frac{1}{6}$</u>.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学四 第二、(1) 题 】

(2) 【 同数学四 第二、(2) 题 】

(3) 设 n 维行向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0\cdots,0\frac{1}{2})$，矩阵 $A=I-\alpha^T\alpha$，$B=I+2\alpha^T\alpha$，其中 I 为 n 阶单位矩阵，则 AB 等于 (C)

(A) 0　　(B) $-I$　　(C) I　　(D) $I+\alpha^T\alpha$

(4) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $R(A)=m<n$，I_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是 (C)

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零

(C) 非齐次线性方程组 AX = b 一定有无穷多组解

(D) A 通过初等行变换，必可以化为（I_m　0）的形式.

(5) 【 同数学四 第二、(5) 题 】

三、(本题满分 6 分)【 同数学四 第三题 】

四、(本题满分 6 分)

求不定积分 $\int(\arcsin x)^2dx$.

解： $\int(\arcsin x^2)dx=x(\arcsin x)^2-\int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ……2 分

$= x(\arcsin x)^2 + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$ ……3 分

$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int 2dx$ ……5 分

$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + c$. ……6 分

五、(本题满分 7 分)【 同数学四 第八题 分值不同 】

六、(本题满分 6 分)【 同数学四 第七题 】

七、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

证：做辅助函数 $F(x) = x f(x)$， ……1 分

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，从而在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)$. ……3 分

由于 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$. ……4 分

可见 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)$. ……5 分

八、(本题满分 9 分)

求二元函数 $z = f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值与最小值.

解：由方程组 $\begin{cases} f_x'(x,y) = 2xy(4-x-y) - x^2y = 0 \\ f_y'(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2y = 0 \end{cases}$，得 $x=0,(0\le y\le 6)$ 及点(4,0),(2,1).

因点 $(4,0)$ 及线段 $x=0$ 在 D 的边界上，故只有点 $(2,1)$ 是可能的极值点.

由于 $f_{xx}'' = 8y-6xy-2y^2,\ f_{xy}'' = 8x-3x^2-4xy,\ f_{yy}'' = -2x^2$ ……3 分

故在点 $(2,1)$ 处，有 $A = f_{xx}'' = 8y-6xy-2y^2\big|_{\substack{x=2\\y=1}} = -6<0$，$B = f_{xy}'' = 8x-3x^2-4xy\big|_{\substack{x=2\\y=1}} = -4$,

$$C = f_{yy}'' = -2x^2\big|_{\substack{x=2\\y=1}} = -8,\quad B^2-AC = 16-48 = -32 < 0.$$

因而点 $(2,1)$ 是极大值点，其极大值为 $f(2,1) = 4$. ……5 分

显然在边界 $x=0\ (0\le y\le 6)$ 和 $y=0 (0\le x\le 6)$ 上，有 $f(x,y)=0$；

而在边界 $x+y=6$ 上， $y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中有， $Z = 2x^3-12x^2 (0\le x\le 6)$. ……6 分

由 $Z'=6x^2-24x=0$，得 $x=0,x=4$，又 $Z''\big|_{x=4}=12x-24\big|_{x=4}=24>0$，

所以点 $(4,2)$ 是边界 $x+y=6$ 上的极小值点，极小值为 $f(4,2)=-64$. ……8 分

经比较得，最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64.$ ……9 分

九、(本题满分 8 分)

对于线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$，讨论 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解和有无穷解？在方程组有无穷解时，试用导出组的基础解系表示全部解.

解：对方程组的增广矩阵施以初等行变换：

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{array}\right)$$ ……2 分

（1）当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$R(\bar{A})=R(A)=3$，从而方程组有唯一解. ……3 分

（2）当 $\lambda=-2$ 时，$R(A)=2,R(\bar{A})=3$，由于 $R(\bar{A})\neq R(A)$，方程组无解. ……4 分

（3）当 $\lambda=1$ 时，有 $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.

此时 $R(A)=R(\bar{A})=1<3$，故此时方程组有无穷多组解. ……5 分

又由此可得与原方程组同解的方程组为 $x_1=-2-x_2-x_3$.

令 $x_2=x_3=0$，得特解 $u_0=(-2,0,0)^T$. ……6 分

而与原方程组的导出组同解的方程组为 $x_1=-x_2-x_3$，由此可得导出组的基础解系为

$v_1=(-1,1,0)^T,v_2=(-1,0,1)^T$. 于是，原方程组的全部解为

$$x=u_0+c_1v_1+c_2v_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 c_1,c_2 为任意常数. ……8 分

十、(本题满分 8 分)

设三阶矩阵 A 满足 $Aa_i=ia_i\ (i=1,2,3)$, 其中列向量 $\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，试求矩阵 A.

解： 由 $A\alpha_i = i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，可得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$. ……2 分

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$.上式可写为 $AP=B$.

因 $|P|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{vmatrix}=-27\neq 0$ ……3 分

所以矩阵 P 可逆，由此可得 $A=BP^{-1}$. ……4 分

而 $P^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$. ……7 分

所以 $A=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/3&0&-2/3\\0&5/3&-2/3\\-2/3&-2/3&2\end{pmatrix}$. ……8 分

注： 由 α_i 是 A 的对应于特征值 i 的特征向量 $(i=1,2,3)$，得到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，说明矩阵 P 可逆，可得 3 分.

十一、(本题满分 8 分)【 同数学四 第十一题 **】**

十二、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间$(0,1)$上服从均匀分布.

证： X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$,

$y=1-e^{-2x}$ 是单调增函数，其反函数 $x=-\dfrac{\ln(1-y)}{2}$. ……2 分

设 $G(y)$是Y 的分布函数，则

$$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2x}\le y\}=\begin{cases}0, & 若 y\le 0\\ P\{X\le -\dfrac{\ln(1-y)}{2}\}, & 若 0<y<1,\\ 1, & 若 y\ge 1\end{cases}$$ ……5 分

$$=\begin{cases}0, & 若 y\le 0\\ y, & 若 0<y<1.\\ 1, & 若 y\ge 1\end{cases}$$

于是，Y 服从 (0,1) 均匀分布. ……7 分