2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0

（B）1

（C）2

（D）3

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^{n}n!$

【答案】：C

【解析】：$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【答案】:

【解析】：由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，可知如果 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

这样，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，也即极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 存在，可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$，也即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。由可微的定义可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$，则有 D

（A）$I_1<I_2<I_3.$ （B）$I_2<I_2<I_3.$

（C）$I_1<I_3<I_1,$ （D）$I_1<I_2<I_3.$

【答案】：（D）

【解析】：$I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k'=e^{k^2}\sin k\ge 0,k\in(0,\pi)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3\in(0,\pi)$，则 $I_1<I_2<I_3$，故选 D

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于 $\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选（C）

（6）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

（7）设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $p\{x<y\}=$（）

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

【答案】：（A）

【解析】：$\left(X,Y\right)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-4y},x>0,y>0\\0，\text{其它}\end{cases}$

则 $P\left\{X<Y\right\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^y e^{-x-4y}dx=\int_0^{+\infty}e^{-5y}dy=\frac{1}{5}$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（）

(A)　1　(B)　$\frac{1}{2}$　　(C)　$-\frac{1}{2}$　(D)　-1

【答案】：(D)

【解析】：设两段长度分别为 x,y，显然 $x+y=1,$ 即 $y=-x+1$，故两者是线性关系，且是负相关，所以相关系数为-1

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$________。

【答案】：e^x

【解析】：特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1, C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$ ________。

【答案】：$\frac{\pi}{2}$

【解析】：令 $t=x-1$ 得 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}$

（11）$\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ ________。

【答案】：$\{1,1,1\}$

【解析】：$\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\left\{y, x-\frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}\right\}\Big|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$

（12）设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$________。

【答案】：$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】：由曲面积分的计算公式可知 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=\iint\limits_{D} y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$。故原式 $=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2dx=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{12}$

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

【答案】：2

【解析】：矩阵 xx^T 的特征值为 $0,0,1$，故 $E-xx^T$ 的特征值为 $1,1,0$。又由于为实对称矩阵，是可相似对角化的，故它的秩等于它非零特征值的个数，也即 $r\left(E-xx^T\right)=2$。

（14）设 A,B,C 是随机事件， A,C 互不相容， $P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\bar{C})=$________。

【答案】：$\frac{3}{4}$

【解析】：由条件概率的定义，$P\left(AB\middle|\bar{C}\right)=\dfrac{P\left(AB\bar{C}\right)}{P\left(\bar{C}\right)}$，

其中 $P\left(\bar{C}\right)=1-P\left(C\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$P\left(AB\bar{C}\right)=P\left(AB\right)-P\left(ABC\right)=\frac{1}{2}-P\left(ABC\right)$，由于 A,C 互不相容，即 $AC=\phi$，$P\left(AC\right)=0$，又 $ABC\subset AC$，得 $P\left(ABC\right)=0$，代入得 $P\left(AB\bar{C}\right)=\frac{1}{2}$，故 $P\left(AB\middle|\bar{C}\right)=\frac{3}{4}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f'\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\ge 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\ge 0$，

故 $f'\left(x\right)\ge 0$，而 $f\left(0\right)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\le 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\le 0$，

故 $f'\left(x\right)\ge 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

【解析】：$f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点．$f_x{}'(x,y)=e-x=0, f_y{}'(x,y)=-y=0$，解得函数为驻点为$(e,0)$.

又 $A=f_{xx}{}'(e,0)=-1, B=f_{xy}{}'(e,0)=0, C=f_{yy}{}'(e,0)=-1$，

所以 $B^2-AC<0, A<0$，故 $f(x,y)$在点$(e,0)$处取得极大值 $f(e,0)=\frac{1}{2}e^2$.

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

【解析】：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot\frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+4(n+1)+3}\right|=1$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}dx$$

$x=1$时$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$发散

$$\text{Q}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}}=\infty$$

$x=-1$时$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}(-1)^{2n}$收敛

$\therefore x\in(-1,1)$为函数的收敛域。

和函数为$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}\cdot\dfrac{1}{x}$

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线$L:\begin{cases}x=f(t)\\y=\cos t\end{cases}\quad\left(0\le t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$。

若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

【解析】：（1）曲线 L 在任一处 (x,y) 的切线斜率为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，过该点 (x,y) 处的切线为

$Y-\cos t=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}(X-f(t))$，令 $Y=0$ 得 $X=f'(t)\cos t+f(t)$. 由于曲线 L 与 x 轴和 y 轴的交点到切点的距离恒为1.

故有$\left[f'(t)\cot t+f(t)-f(t)\right]^2+\cos^2 t=1$，又因为 $f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$

所以 $f'(t)=\dfrac{\sin t}{\cot t}$，两边同时取不定积分可得 $f(t)=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\sin t+C$，又由于 $f(0)=0$，所以$C=0$. 故函数 $f(t)=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\sin t$.

（2）此曲线 L 与 x 轴和 y 轴的所围成的无边界的区域的面积为：

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt=\frac{\pi}{4}.$$

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分$J=\int\limits_L 3x^2ydx+\left(x^2+x-2y\right)dy$。

【解析】：设圆$x^2+y^2=2x$为圆C_1, 圆$x^2+y^2=4$为圆C_2，下补线利用格林公式即可，设所补直线L_1为$x=0(0\le y\le 2)$, 下用格林格林公式得：原式 $=\int\limits_{L+L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy-\int\limits_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$

$$=\iint\limits_D(3x^2+1-3x^2)dxdy-\int_2^0-2ydy=\frac{1}{4}S_{C_2}-\frac{1}{2}S_{C_1}+4=\frac{\pi}{2}-4$$

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ a & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故其通解为 $k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有 $|A|=0$.

即：　$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故 $\lambda=-1$.

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1）由 $r(A^TA)=r(A)=2$ 可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2{x_1}^2+2{x_2}^2+4{x_3}^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-6\right)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$,解 $\left(\lambda_1E-B\right)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解 $\left(\lambda_2E-B\right)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=6$,解$\left(\lambda_3E-B\right)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}，\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}，\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量X,Y以及XY的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：（1）$P\left(X=2Y\right)$；

（2）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)$与$\rho_{XY}$.

【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

（1）$P\left(X=2Y\right)=P\left(X=0,Y=0\right)+P\left(X=2,Y=1\right)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（2）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=\operatorname{cov}\left(X,Y\right)-\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)$

$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EXEY$，其中$EX=\frac{2}{3},EX^2=1,EY=1,EY^2=\frac{5}{3},DX=EX^2-\left(EX\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$DY=EY^2-\left(EY\right)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，$EXY=\frac{2}{3}$

所以，$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=0$，$\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)=DY=\frac{2}{3}$，$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=-\frac{2}{3}$，$\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$，

(1) 求 z 的概率密度 $f\left(z,\sigma^2\right)$；

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

【解析】：（1）因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，故 $Z=X-Y\sim N(0,5\sigma^2)$，

所以，Z 的概率密度为 $f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}},(-\infty<z<+\infty)$

（2）似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i,\sigma^2)=\frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}=\left(10\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln\left(10\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{10\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$$

解得最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，

最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$

（3）$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right)=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(EZ_i\right)^2+DZ_i\right]=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}5\sigma^2=\sigma^2$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。