1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

（1）过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 ______。

【答案】$x-3y-z+4=0.$

【解析】由直线的参数方程，可得直线的方向向量 $l=(-1,3,1)$，

所求平面的法向量 n 平行于所给直线的方向向量 $l=(-1,3,1)$，取 $n=l$，又平面过已知点 $M(1,2,-1)$. 已知平面的法向量和过已知点可唯一确定这个平面，所求平面的方程为 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0,$ 化简即是 $x-3y-z+4=0.$

（2）设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=$ ______。

【答案】e^{2a}.

【解析】此题考查重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^x}{(1-\frac{a}{x})^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}\cdot a}}{(1-\frac{a}{x})^{\frac{x}{-a}\cdot(-a)}}$$

$$=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}.$$

或由 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{x}{x-a}\cdot 2a}=e^{2a}$.

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ______。

【答案】1.

【解析】对于分段函数的复合函数求解必须取遍内层函数的值域，不能遗漏，求出复合后函数的所有可能的解析式.

根据 $f(x)$ 的定义知，当 $|x|\le 1$ 时，有 $f(x)=1$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(1)=1$. 于是当 $|x|\le 1$ 时，复合函数 $f[f(x)]\equiv 1$；

当 $|x|>1$ 时，有 $f(x)=0$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(0)=1$, 即当 $|x|>1$ 时，也有 $f[f(x)]\equiv 1$.

因此，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f[f(x)]\equiv 1$.

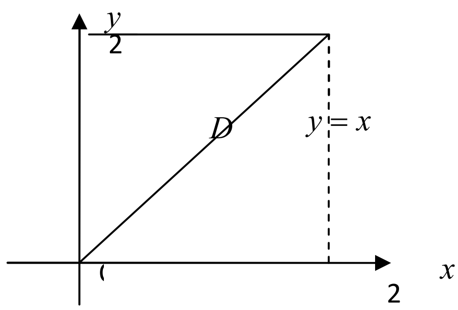
（4）积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于 _______。

【答案】$\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

【解析】这是一个二重积分的累次积分，因 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，先对 y 积分积不出来，所以应该改换积分次序，先表成：

原式 $=\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$. 由累次积分的内外层积分限确定积分区域 D：

$0\le x\le 2, x\le y\le 2,$ 如图所示，然后交换积分次序.



原式 $=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy$

$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

（5）已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,3,4,5),\alpha_3=(3,4,5,6),\alpha_4=(4,5,6,7)$，则该向量的秩是_______。

【答案】2.

【解析】经过初等变换后向量组的秩不变.

所以有 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}$

第一行 r_1 分别乘以 (-2)、(-3)、(-4) 加到第二行、第三行、第四行上，得到

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

继续作初等变换第二行r_2分别乘以(-2)、(-3)加到第三行、第四行上，再自乘(-1)有

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为最后得出的矩阵有二阶子式$\neq 0$，而三阶子式$=0$，由矩阵秩的定义，有

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(A)=2.$

所以此题应填 2.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

（1）设$f(x)$是连续函数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ (B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$ (D) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$

【答案】A.

【解析】对积分上限的函数的求导公式：

若$F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x)dx$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$均一阶可导，

则$F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$

复合函数求导法则，

如果$u=g(x)$在点x可导，而$y=f(x)$在点$u=g(x)$可导，则复合函数

$y=f\left[g(x)\right]$在点x可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

所以两边求导数,

$$F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)(x)'$$

$$=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$$

故本题选 A.

（2）已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于 2 的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{n}(x)$是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$ (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

【答案】A.

【解析】本题考查高阶导数的求法.

为方便记 $y=f(x)$. 由 $y'=y^2$，逐次求导得

$$y''=2yy'=2y^3,\ y'''=3!y^2y'=3!y^4,\cdots,$$

由第一归纳法，可归纳证明 $y^{(n)}=n!y^{n+1}$

假设 $n=k$ 成立，即 $y^{(k)}=k!y^{k+1}$，

则 $y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=\left[k!y^{k+1}\right]'=(k+1)!y^k\cdot y'$

$$=(k+1)!y^{(k+1)+1}$$

所以 $n=k+1$ 亦成立，原假设成立.

（3）设 α 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性与 α 的取值有关

【答案】C .

【解析】本题可利用分解法判别级数的敛散性（收敛级数与发散级数之和为发散级数）.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 因为此为 p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛. 因为由三角函数的有界性 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而 p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

根据正项级数的比较判别法：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=A,$ 则

（1） 当 $0<A<+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

（2） 当 $A=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3） 当 $A=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

由收敛级数与发散级数之和为发散级数，可得

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}})$发散.

故选(C).

（4）已知$f(x)$在$x=0$的某个领域内连续，且$f(0)=0$，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处

(A) 不可导 (B) 可导，且$f'(0)=0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

【答案】D.

【解析】利用极限的保号性可以判断的正负号：

设$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$若$A>0\Rightarrow\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$.

若$\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)\geq 0$，则$A\geq 0$.

所以，有 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2>0\Rightarrow\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$（在$x=0$的某空心领域）

由$1-\cos x>0$，有$f(x)>0=f(0)$，即$f(x)$在$x=0$取极小值，应选(D)

本题还可特殊选取满足题中条件的$f(x)=2(1-\cos x)$.显然，它在$x=0$取得极小值，其余的都不正确，这样本题仍选(D)

（5）已知β_1、β_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，α_1、α_2是对应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则方程组$Ax=b$的通解（一般解）必是

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

【答案】B

【解析】本题考查解的性质和解的结构.从α_1、α_2是对应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，知$Ax=b$的通解形式为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\xi,$其中η_1,η_2是$Ax=0$的基础解系，ξ是

$Ax=b$的一个特解.

由解的性质：如果η_1,η_2是$Ax=0$的两个解，则其线性组合$k_1\eta_1+k_2\eta_2$仍是$Ax=0$的解；如果ξ是$Ax=b$的一个解，η是$Ax=0$的一个解，则$\xi+\eta$仍是$Ax=b$的解.

所以有：α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$，$\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_1-\beta_2$都是$Ax=0$的解，

$\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$是$Ax=b$的一个特解.

那么看各个选项，(A)中没有特解ξ,(C) 中既没有特解ξ,且$\beta_1+\beta_2$也不是$Ax=0$的解.

(D)中虽有特解，但α_1，$\beta_1-\beta_2$的线性相关性不能判定，故(A)、(C)、(D)均是不正确的.

再看(B)，$\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$是$Ax=b$的一个特解，$\alpha_1$，$\alpha_1-\alpha_2$是$Ax=0$的线性无关的解，是基础解系，故本题选(B).

三、（本题满分 15 分，每小题 5 分。）

（1）求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

（2）设$z=f(2x-y,y\sin x)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

（3）求微分方程$y''+4y'+4y=e^{-2x}$的通解（一般解）

（1）【答案】$\frac{1}{3}\ln 2$..

【解析】分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题，如果选择不当可能引起更繁杂的计算，最后甚至算不出结果来。在做题的时候应该好好总结，积累经验。

假定$u=u(x)$与$v=v(x)$均具有连续的导函数，则

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx,$$

或者 $$\int udv=uv-\int vdu.$$

由$\dfrac{1}{(2-x)^2}dx=-(2-x)^{-2}d(2-x)=d(\dfrac{1}{2-x})$有

$$原式=\int_0^1\ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})\underline{\underline{分部法}}\frac{\ln(1+x)}{2-x}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\bullet\frac{dx}{1+x}$$

因为，由分项法 $\dfrac{1}{2-x}\bullet\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1+x})$

$$所以，原式=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})dx$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}[-\ln(2-x)\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1]=\frac{1}{3}\ln 2.$$

（2）【答案】$-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+y\sin x\cos xf_{22}''+\cos xf_2'$.

【解析】这是带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数，重要的是要分清函数是如何复合的.

由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关，可以先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，再求$\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial x})$，如方法 1;

也可以先求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，再求$\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial y})$，如方法 2.

由复合函数求偏导的链式法则：如果函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$都在点$(x,y)$具有对$x$及对$y$的偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数

$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1^{'}\frac{\partial u}{\partial x}+f_2^{'}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1^{'}\frac{\partial u}{\partial y}+f_2^{'}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

方法 1：先求$\frac{\partial z}{\partial x}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1^{'}\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f_2^{'}\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x)=2f_1^{'}+y\cos xf_2^{'}\text{。}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f_1^{'}+y\cos xf_2^{'})$$

$$=2(f_{11}^{''}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f_{12}^{''}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x))+\cos xf_2^{'}+(f_{21}^{''}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f_{22}^{''}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x))y\cos x$$

$$=2(-f_{11}^{''}+\sin xf_{12}^{''})+\cos xf_2^{'}+(-f_{21}^{''}+\sin xf_{22}^{''})y\cos x$$

$$=-2f_{11}^{''}+(2\sin x-y\cos x)f_{12}^{''}+y\sin x\cos xf_{22}^{''}+\cos xf_2^{'}$$

方法 2：先求$\frac{\partial z}{\partial y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1^{'}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f_2^{'}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)=-f_1^{'}+\sin xf_2^{'}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(-f_1^{'}+\sin xf_2^{'})$$

$$=-(f_{11}^{''}\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f_{12}^{''}\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x))+\cos xf_2^{'}+(f_{21}^{''}\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f_{22}^{''}\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x))\cdot\sin x$$

$$=-(2f_{11}^{''}+y\cos xf_{12}^{''})+\cos xf_2^{'}+(2f_{21}^{''}+y\cos xf_{22}^{''})\cdot\sin x$$

$$=-2f_{11}^{''}+(2\sin x-y\cos x)f_{12}^{''}+y\sin x\cos xf_{22}^{''}+\cos xf_2^{'}.$$

（3）【答案】所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$ 其中C_1,C_2为常数.

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程.

设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解；

对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$，可用特征方程法求解：

即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数，方程变为 $y''+py'+qy=0$.

其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$，在复数域内解出两个特征根 r_1,r_2；

分三种情况：

（1） 两个不相等的实数根 r_1,r_2，则通解为 $y=C_1e^{rx_1}+C_2e^{r_2x}$;

（2） 两个相等的实数根 $r_1=r_2$，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx_1}$;

（3） 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$.

其中 C_1,C_2 为常数.

对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$,则二阶常系数线性非齐次方程具有形如

$$y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

本题中对应的齐次方程的特征方程 $r^2+4r+4=(r+2)^2=0$ 有二重根 $r_1=r_2=-2$，而非齐次项 $e^{\alpha x},\alpha=-2$ 为重特征根，因而非齐次方程有如下形式的特解

$Y=x^2\cdot ae^{-2x}$，

代入方程可得 $a=\dfrac{1}{2}$，故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$ 其中 C_1,C_2 为常数.

四、（本题满分 6 分。）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数。

【答案】收敛域 $\left(-1,1\right)$，和函数为 $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}(|x|<1)$.

【解析】先用公式求出收敛半径及收敛区间，再考察端点处的敛散性可得到收敛域；将幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 转化为基本情形 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，可求得和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1),$$

方法 1：按通常求收敛半径的办法,

若果 $\rho=\left|\frac{\lim\limits_{x\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}a_n}\right|$，其中 a_n,a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

本题用幂级数收敛半径的计算公式得 $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1$，

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-1,1)$，

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$ 发散；当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n$ 也发散，

所以当 $x=\pm1$ 时原幂级数均发散 $\Rightarrow$ 原幂级数的收敛域 $(-1,1)$.

下面求和函数，先分解为 $\quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

几何级数 $\quad \sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$，又

$$\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=2x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=2x(\frac{1}{1-x})'=\frac{2x}{(1-x)^2}(|x|<1),$$

因此 $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}(|x|<1)$

方法 2：直接考察 $\quad \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{(1-x)^2}(|x|<1)$ （几何级数求和），逐项求导得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}(|x|<1)$$

将 x^2 换成 x 得 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{1+x}{(1-x\ )^2}(|x|<1)$

由方法 1 的讨论，有收敛域 $(-1,1)$

五、（本题满分 8 分）

求曲面积分 $I=\iint_S yzdzdx+2dxdy,$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分

【解析】记 $I=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+\frac{\partial(yz)}{\partial y}+0=z$，可以考虑用高斯公式计算，但不是封闭的，所以要添加辅助面，如方法 1；

本题还可直接套用公式计算也不复杂，为 $D_{xy}:\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\right\}$，可用矢量点积法将积分都投影在平面 xOy 上较方便，再化为 D_{xy} 上的二重积分，如方法 2.

方法 1：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

或 $$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

对于球面坐标与直角坐标的关系为：

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

其中 φ 为向量与 z 轴正向的夹角，$0\leq\varphi\leq\pi$；θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到向量在 xOy 平面上投影线段的角，$0\leq\theta\leq 2\pi$；r 为向量的模长，$0\leq r<+\infty$.

球面坐标系中的体积元素为 $dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta,$

则三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式是：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

添加辅助面 $S_1: z=0(x^2+y^2\le 4)$，法向量与 z 轴负向相同，S 与 S_1 围成的闭区域

Ω，S 与 S_1 的法向量指向 Ω 的外部。在 Ω 上用高斯公式得

$$I+\iint_{S_1} yzdzdx+2dxdy=\iiint_{\Omega} zdV .$$

用先二后一的求积顺序求三重积分：$\iiint_{\Omega} zdV=\int_0^2 dz\iint_{D(z)} zdxdy=\int_0^2 z\pi(4-z^2)=4\pi$

或用球坐标变换来计算

$$\iiint_{\Omega} zdV=\int_0^2 d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^2 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\sin\varphi\cdot\int_0^2\rho^3 d\rho=2\pi\times\frac{1}{2}\times 4=4\pi$$

$$\iint_{S_1} yzdzdx+2dxdy=-\iint_{D_{xy}} 2dxdy=-2\cdot 4\pi=-8\pi$$

其中 $D_{xy}: x^2+y^2\le 4$.

因此 $I=4\pi-(-8\pi)=12\pi$.

方法 2：S 在 xOy 平面上的投影区域是 $D_{xy}:\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$，因 S 取上侧，套用矢量点积法公式得

$$I=\iint_{D_{xy}}[0\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})+yz\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})+2\cdot 1]dxdy$$

由 $x^2+y^2+z^2=4$，

方程两边同时对 x 求导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$；

方程两边同时对 y 求导，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$. 代入上式得

$$I=\iint_{D_{xy}}(y^2+2)dxdy$$

考虑到积分区域 D_{xy} 关于变量 x,y 具有轮换对称性，从而有

$$\iint\limits_{D_{xy}} x^2 dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy .$$

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy + 8\pi$$

用极坐标变换得 $I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr + 8\pi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 + 8\pi = 4\pi + 8\pi = 12\pi$.

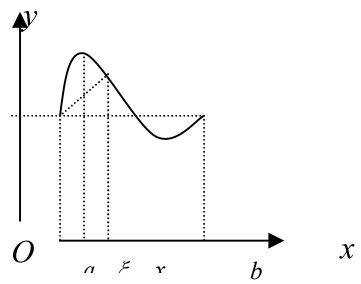
六、（本题满分 7 分）

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$ 。证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi)>0$ 。

【解析】与未知函数在一点的导数值有关，自然想到用微分中值定理，但 $f(a)=f(b)$ 只能推导出一点的导数为零，考虑到题设 $f(x)$ 不恒为常数，因此存在一点 c ，使

$f(c)\neq f(a)=f(b)$, 再在 $[a,c]$ 或 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续；在开区间 $\left(a,b\right)$ 内可导，那么在 $\left(a,b\right)$ 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ ，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立.



从几何直观上看（上图）利用拉格朗日中值定理可得到结果：由 $f(x)$ 不恒等于 c ，有 $f(x)$ 不恒等于 $f(a)$ ，因而 $\exists x_0 \in (a,b)$ ， $f(x_0)\neq f(a)$

若 $f(x_0)>f(a)=f(b)$ ，在 $[a,x_0]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi \in (a,x_0)\subset(a,b)$ ，有

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$ ；

若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$ ，在 $[x_0,b]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi \in (x_0,b)\subset(a,b)$ ，

有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$

七、（本题满分 6 分）

设四阶矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

且矩阵 A 满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^T C^T=E$，

其中 E 为四阶单位矩阵，C^{-1} 表示 C 的转逆阵, C^T 表示 C 的转置矩阵。将上述关系式简化并求矩阵 A.

【答案】$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

【解析】由转置矩阵和逆矩阵的性质，$(AB)^T=B^TA^T$； $AA^{-1}=E$； $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

由 $(AB)^T=B^TA^T$ 知 $(E-C^{-1}B)^TC^T=[C(E-C^{-1}B)]^T=(C-B)^T$

那么由 $A(C-B)^T=E$ 知 $A=[(C-B)^T]^{-1}=[(C-B)^{-1}]^T$

由 $C-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

如果对 $\left((C-B)\vdots E\right)$ 作初等行变换

则由 $\left((C-B)\vdots E\right)\to\left(E\vdots(C-B)^{-1}\right)$ 可以直接得出 $(A-2E)^{-1}$

通过矩阵的初等变换 $\left((C-B)\vdots E\right)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

第四行乘以 (-2)、(-3)、(-4) 分别加到第三、二、一行上，得到

$$\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

再第二行乘以(-2)、(-3)分别

$$\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

最后第二行乘以(-2)加到第一行上，得到

$$\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

所以 $(C-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

故 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&1\\1&-2&1&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$

八、（本题满分 8 分）

求一个正交变换，化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$为标准型。

【答案】正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$得标准型 $f=9y_3^2$.

【解析】本题是一个基本题型，主要考查矩阵的特征值、特征向量以及正交化方法.

由二次型的定义：含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式（即每项都是二次的多项式）

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\qquad 其中\ a_{ij}=a_{ji},$$

称为n元二次型，令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$A=(a_{ij})$，则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx,$$

其中 A 是对称矩阵 $\left(A^T=A\right)$，称 A 为二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的矩阵.

所以写出二次型的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，其特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9).$$

令 $|\lambda E-A|=0,$ 所以 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(0E-A)x=0$，对方程组的系数矩阵作初等行变换，

即 $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得到基础解系 $\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T$，即为属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量.

对于 $\lambda_3=9$，由 $(9E-A)x=0$，对方程组的系数矩阵作初等行变换，

即 $\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得到基础解系 $\alpha_3=(1,-2,2)^T$。

由于不同特征值的特征向量已经正交，只需对属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量正交化，

由施密特正交法，得到

$\beta_1=\alpha_1=(2,1,0)^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}(-2,4,5)^T.$$

再把 β_1,β_2,α_3 单位化，有 $r_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},r_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix},r_3=\dfrac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

那么经正交变换

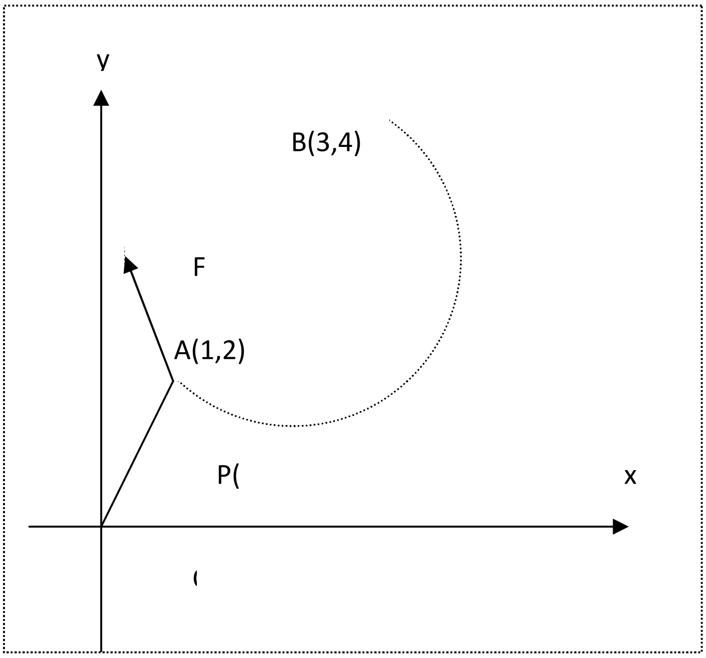
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

注：属于特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$的特征向量不唯一，因此本题的答案也不唯一.

二次型可化为标准型$f = 9{y_3}^2$.

九、（本题满分 8 分）

质点P沿着以AB为直径的半圆周，从点$A(1,2)$运动到点$B(3,4)$的过程中受变力F作用（见图）。F的大小等于点P与原点O之间的距离，其方向垂直于线段OP且与y轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$，求变力F对质点P所作的功



【答案】$2(\pi - 1)$.

【解析】变力$F = Pi + Qj$对沿曲线L运动的质点所坐的功为$W = \int_L Pdx + Qdy$.本题的关键是写出F的表达式.

（1）先求作用于点$P(x,y)$的力F：按题意$|F| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

与$\overrightarrow{OP} = \{x, y\}$垂直的向量是$\pm\{-y, x\}$，其中与$y$轴正向成锐角的是$\{-y, x\}$，于是

$$\frac{F}{|F|} = \frac{\{-y, x\}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \Rightarrow F = \{-y, x\}.$$

即变力F的大小为$\sqrt{x^2 + y^2}$，方向为$\{-y, x\}$.

（2）求 F 对质点所作的功的表达式

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}F\cdot ds=\int_{\overset{\frown}{AB}}-ydx+xdy$$

（3）计算曲线积分

方法1：格林公式：设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 所围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

因为格林公式要求是闭区域，所以添加辅助线 $\overline{BA}: y=x+1, x\in[3,1]$

$$\int_{\overline{BA}}-ydx+xdy=\int_3^1[-(x+1)+x]dx=\int_1^3-1dx=2.$$

在 $\overline{BA}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 所围的区域 D 上用格林公式得 $\int_{\overline{BA}\cup\overset{\frown}{AB}}-ydx+xdy=\iint_D 2dxdy=2S_D$

因此 $W=2S_D-2$

$$=2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\pi-2=2(\pi-1).$$

这里 D 是半圆，半径是 $\sqrt{2}$，所以 $S_D=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\pi.$

方法2：写出的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程.

用对坐标的曲线积分公式：设有向曲线弧 L 的起点为 A，终点为 B. 曲线弧 L 由参数方程

$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$ 其中起点 A，终点 B 对应的参数分别为 α,β，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\right\}dt$$

由 $(x-2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos t,\\ y=3+\sqrt{2}\sin t,\end{cases}t\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$$

$$\Rightarrow W=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[-(3+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}(-\sin t)+(2+\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t]dt$$

$$=2\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}3\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos tdt$$

$$=2\pi+(-3\sqrt{2}\cos t+2\sqrt{2}\sin t)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2(\pi-1).$$

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分。）

（1）已知随机变量的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<\infty$

则 X 的概率分布函数 $F(X)$=______。

（2）设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})$ =______。

（3）已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松（Poisson）分布，即 $P\{X=k\}=\frac{2^k e^{-2}}{k!},k=0,1,2\cdots$，则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)$ =______。

（1）【答案】分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0,\end{cases}$.

【解析】本题题意明确，直接按连续型随机变量的分布函数定义进行计算.因为密度函数中包含自变量的绝对值，积分时必须对 x 进行讨论.

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt$$

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$；

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{-t}dt$

$$=\frac{1}{2}e^{t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{0}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-x})=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$

因此，X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$

（2）【答案】0.3.

【解析】本题主要考查概率的加法公式、减法公式等基本性质，并注意其各种变形：

（1）$A\overline{B}=A-B=A-AB.$

（2）$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$, 一般地 $P(A-B)\ne P(A)-P(B)$.

（3）$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B\overline{A})$

$$=P(B)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})+P(B\overline{A}).$$

（4）若 A 与 B 独立，则 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$$=1-[1-P(A)][1-P(B)].$$

方法 1：$A\overline{B}$ 互不相容，且 $A\bigcup B=A\overline{B}\bigcup B$，于是

$P(A\overline{B})=P(A\bigcup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$

此种方法来看 $P(A)=0.4$ 是多余的.

方法 2：根据概率的广义加法公式，有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.6=0.1$

从而 $P(AB\bigcup A\overline{B})=P(A)$，得出 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$

（3）【答案】4.

【解析】若 $X\sim P(\lambda)$ 泊松分布，则数学期望和方差，$EX=DX=\lambda$.

由数学期望的性质：$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$　　其中 a,b,c 为常数.

题中由于 X 服从参数为 2 的泊松（Poisson）分布，因此　$E(X)=2$.

故　$EZ=E(3X-2)=3EX-2=4$.

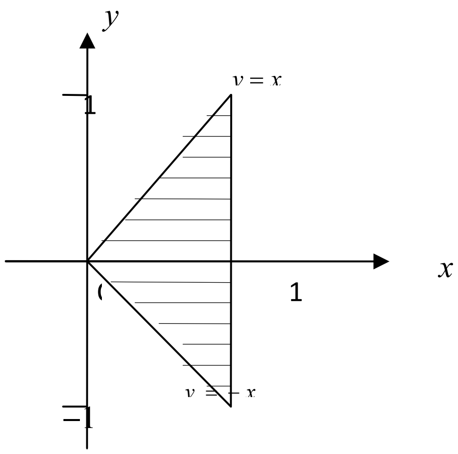
十一、（本题满分 6 分。）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$。

【答案】$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$D(Z)=\frac{2}{9}.$$

【解析】



二维均匀分布(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$

S_D是区域D的面积，$S_D=2\times\dfrac{1}{2}\times 1^2=1,$

所以(X,Y)的联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$

由连续型随机变量边缘分布的定义，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由一维连续型随机变量的数学期望的定义：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx, E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)dx.\text{有}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx$$

$$=\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

本题也可直接利用二维随机变量函数的数学期望公式，用二重积分计算：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint_D xdxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{x}dy=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\iint_D x^2dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_{-x}^{x}dy=2\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}.$$

由数学期望和方差的性质：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c\text{；}$$

X 与 Y 相互独立时，$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$.

其中 a,b,c 为常数.

所以有 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$,

$$DZ=D(2X+1)=4DX=\frac{2}{9}.$$