作业：编程实现增广路算法

- 采用标准输入/输出
- 输入格式：
  - 第一行：整数n，表示顶点个数
  - 后续每行：两个整数a,b（0≤a,b≤n-1），表示顶点v_a与v_b相邻
  - a=b=-1表示输入结束
  - 输入可以保证是二部图
- 输出格式：
  - 第一行：整数m，表示匹配M中包含的边数
  - 后续m行：M中的每条边e_i，按照以下格式：
    - 每行为e_i的两个顶点标号$e_i.a, e_i.b$（$e_i.a < e_i.b$）
    - 各行顺序：按$e_i.a$升序

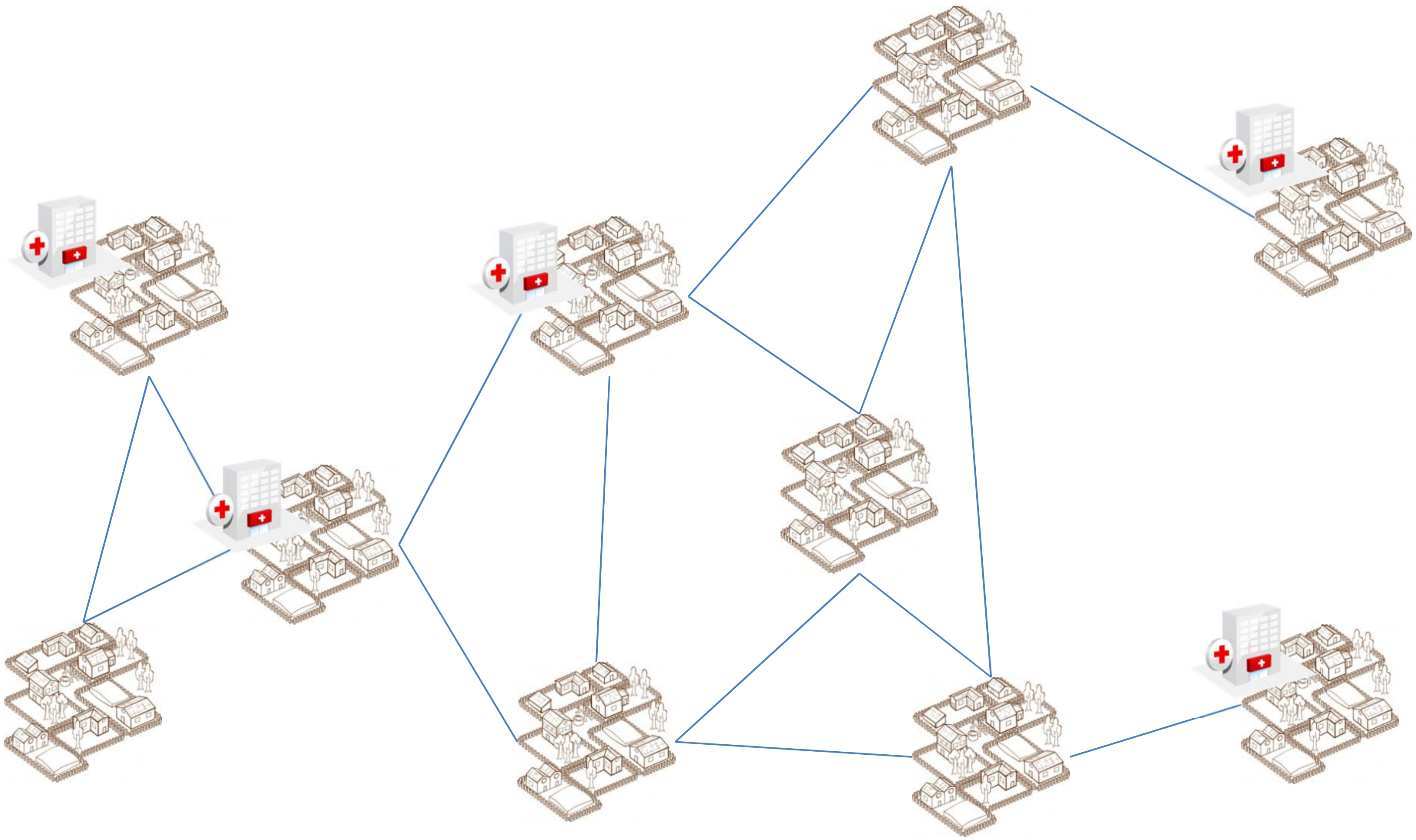
- 源代码上传到FTP：114.212.84.172
  - 用户名/密码：graph
- 所有文件打包并命名为：学号+姓名
  - 在readme.txt中说明使用的IDE
  - 请上传所有源代码，不必上传可执行文件
- 截止日期：4月21日9:59

支配集、点独立集和点覆盖集

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

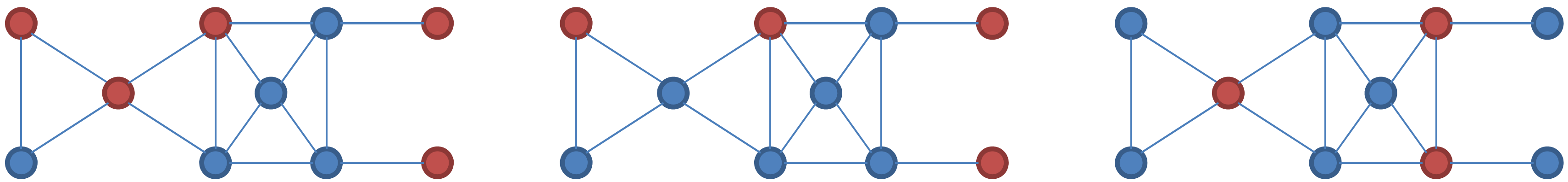
本节课的主要内容

5.1 支配集、点独立集、点覆盖集



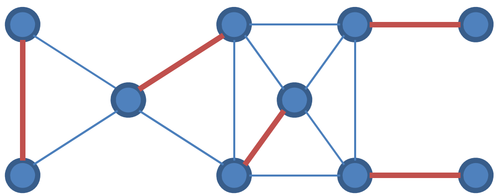
支配集（控制集）

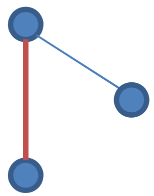
- 支配集 (dominating set)
  - D是G的支配集：$\forall v \in (V(G) \setminus D), \exists u \in D, (u, v) \in E(G)$
- 极小支配集 (minimal dominating set)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是支配集）
- 最小支配集 (minimum dominating set)
  - 顶点数最少
- 支配数 (domination number)
  - $\gamma(G)$：最小支配集的势



支配集与匹配

- 支配集与完美匹配之间有什么关系？
  - 从完美匹配中的每条边取一个端点构成一个支配集。
  - 从最大匹配中的每条边取一个端点构成一个支配集吗？



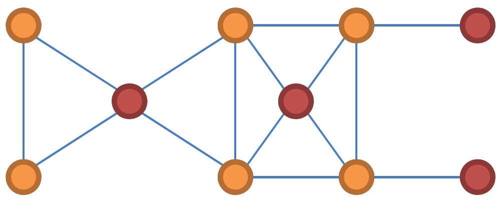


支配集与其补集

- 定理5.1.1 无孤立顶点的图G中，存在支配集D和V(G)\D。

证明：只讨论连通图。

1. $\forall u \in V(G)$。
2. D={v: d(v, u)是偶数}，V(G)\D={v: d(v, u)是奇数}。

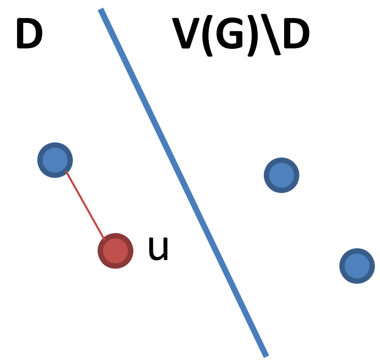


支配集与其补集 (续)

- 定理5.1.2 无孤立顶点的图G中，极小支配集D的补集V(G)\D是支配集。

证明：

1. 反证法：V(G)\D不是支配集 ⇒ ∃u∈D与V(G)\D中的顶点均不相邻
2. G中无孤立顶点 ⇒ u与D中的顶点相邻 ⇒ D\{u}仍是支配集 ⇒ D不是极小支配集 ⇒ 矛盾

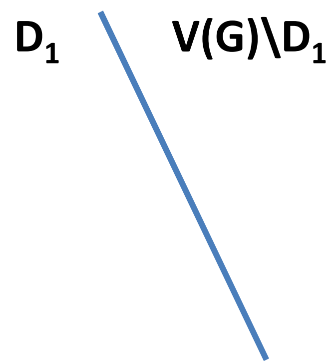


支配集与其补集 (续)

- 推论5.1.1 无孤立顶点的图G中，对任意一个极小支配集D_1，必存在另一个极小支配集D_2，使得$D_1 \cap D_2 = \emptyset$。

证明：

定理5.1.2 $\Rightarrow$ $V(G) \setminus D_1$是支配集且$D_1 \cap (V(G) \setminus D_1) = \emptyset$ $\Rightarrow$ 在$V(G) \setminus D_1$的子集中取极小可得D_2



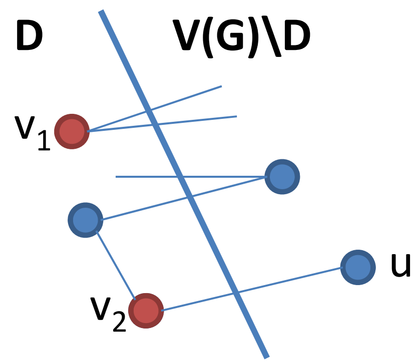
极小支配集的充要条件

- 定理5.1.3 图G的支配集D是一个极小支配集当且仅当D中每个顶点v满足下列条件之一：

(1) $N(v) \cap D = \emptyset$；

(2) 存在$u \in V(G) \setminus D$使得$N(u) \cap D = \{v\}$。

证明：$\Leftarrow$



极小支配集的充要条件 (续)

- 定理5.1.3 图G的支配集D是一个极小支配集当且仅当D中每个顶点v满足下列条件之一：

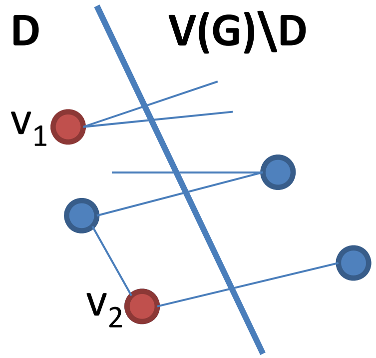
(1) $N(v) \cap D = \emptyset$；

(2) 存在$u \in V(G) \setminus D$使得$N(u) \cap D = \{v\}$。

证明：$\Rightarrow$

D是极小支配集 $\Rightarrow$ $D \setminus \{v\}$不是支配集 $\Rightarrow$ $\exists u \in \{v\} \cup (V(G) \setminus D)$与$D \setminus \{v\}$中的顶点均不相邻 $\Rightarrow$

- $u = v \Rightarrow N(v) \cap D = \emptyset \Rightarrow (1)$
- $u \neq v \Rightarrow u \in V(G) \setminus D$且$N(u) \cap \{D \setminus \{v\}\} = \emptyset$，而D是支配集 $\Rightarrow (u, v) \in E(G) \Rightarrow N(u) \cap D = \{v\} \Rightarrow (2)$



一个推论

- 定理5.1.4 无孤立顶点的图G 必有最小支配集D满足：$\forall v\in D$，$\exists u\in V(G)\setminus D$, $N(u)\cap D=\{v\}$。

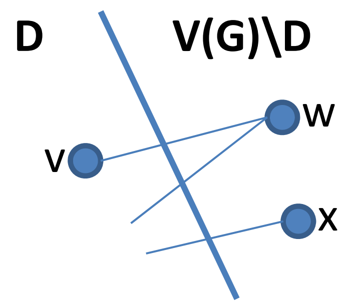
证明：

1. 反证法：D是G中点导出子图的边数最多的最小支配集 $\Rightarrow \exists v\in D, \forall u\in V(G)\setminus D, N(u)\cap D\neq\{v\}$ (*)
2. 定理5.1.3 $\Rightarrow N(v)\cap D=\emptyset$（条件(1)必成立），而G中无孤立顶点 $\Rightarrow \exists w\in V(G)\setminus D$与v相邻
3. $\forall x\in V(G)\setminus D$：
   - x与v不相邻：D是支配集 $\Rightarrow$ x与$D\setminus\{v\}$中顶点相邻
   - x与v相邻：(*) $\Rightarrow$ x与$D\setminus\{v\}$中顶点相邻

$\Rightarrow$

   - 取x=w，则w与$D\setminus\{v\}$中顶点相邻。(#)
   - $D\setminus\{v\}$支配$V(G)\setminus D$，而w与v相邻 $\Rightarrow D\setminus\{v\}\cup\{w\}$是支配集

4. $|D\setminus\{v\}\cup\{w\}|=|D| \Rightarrow D\setminus\{v\}\cup\{w\}$也是最小支配集 $\Rightarrow D\setminus\{v\}\cup\{w\}$的点导出子图的边数≤D的点导出子图的边数 (**)
5. $N(v)\cap D=\emptyset \Rightarrow$ v与$D\setminus\{v\}$中顶点不相邻 (##)
6. (#)和(##) $\Rightarrow D\setminus\{v\}\cup\{w\}$的点导出子图的边数>D的点导出子图的边数 $\Rightarrow$ 与(**)矛盾



支配数的估计

- 定理5.1.5 无孤立顶点的图G满足$\gamma(G) \leq \nu/2$。

证明：

极小支配集D的补集也是支配集 $\Rightarrow$

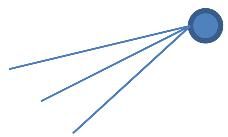
$\gamma(G) \leq \min\{|D|, |V(G) \setminus D|\} \leq \nu/2$

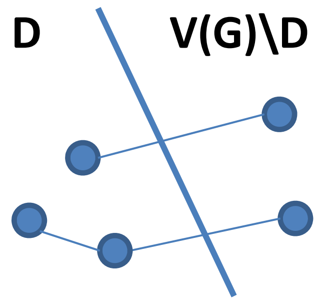
支配数的估计 (续)

- 定理5.1.7 $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le \nu - \Delta(G)$

证明：

1. 右侧显然。
2. 左侧：G有最小支配集D $\Rightarrow V(G)\setminus D \subseteq \bigcup_{v\in D} N(v) \Rightarrow$ |V(G)\D|≤|D|Δ(G)
   ⇒ ν-γ(G)≤γ(G)Δ(G) ⇒ $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G)$



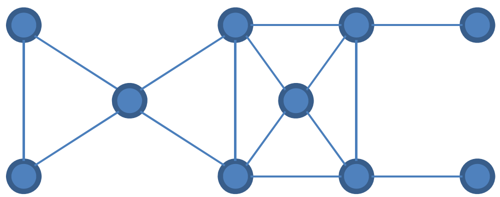


求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard

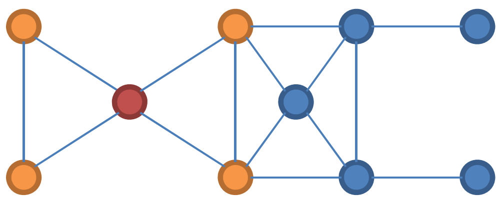
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



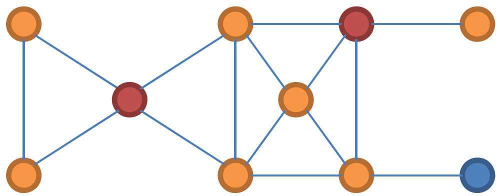
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



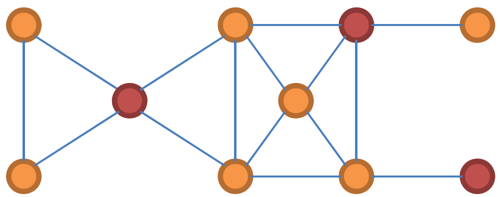
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



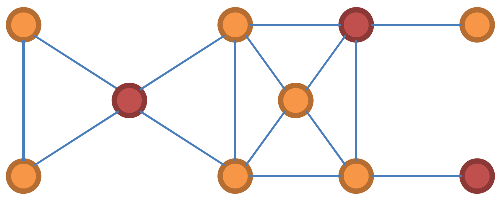
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



求最小支配集的算法

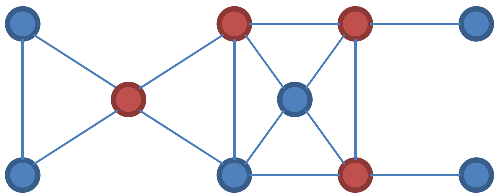
- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv

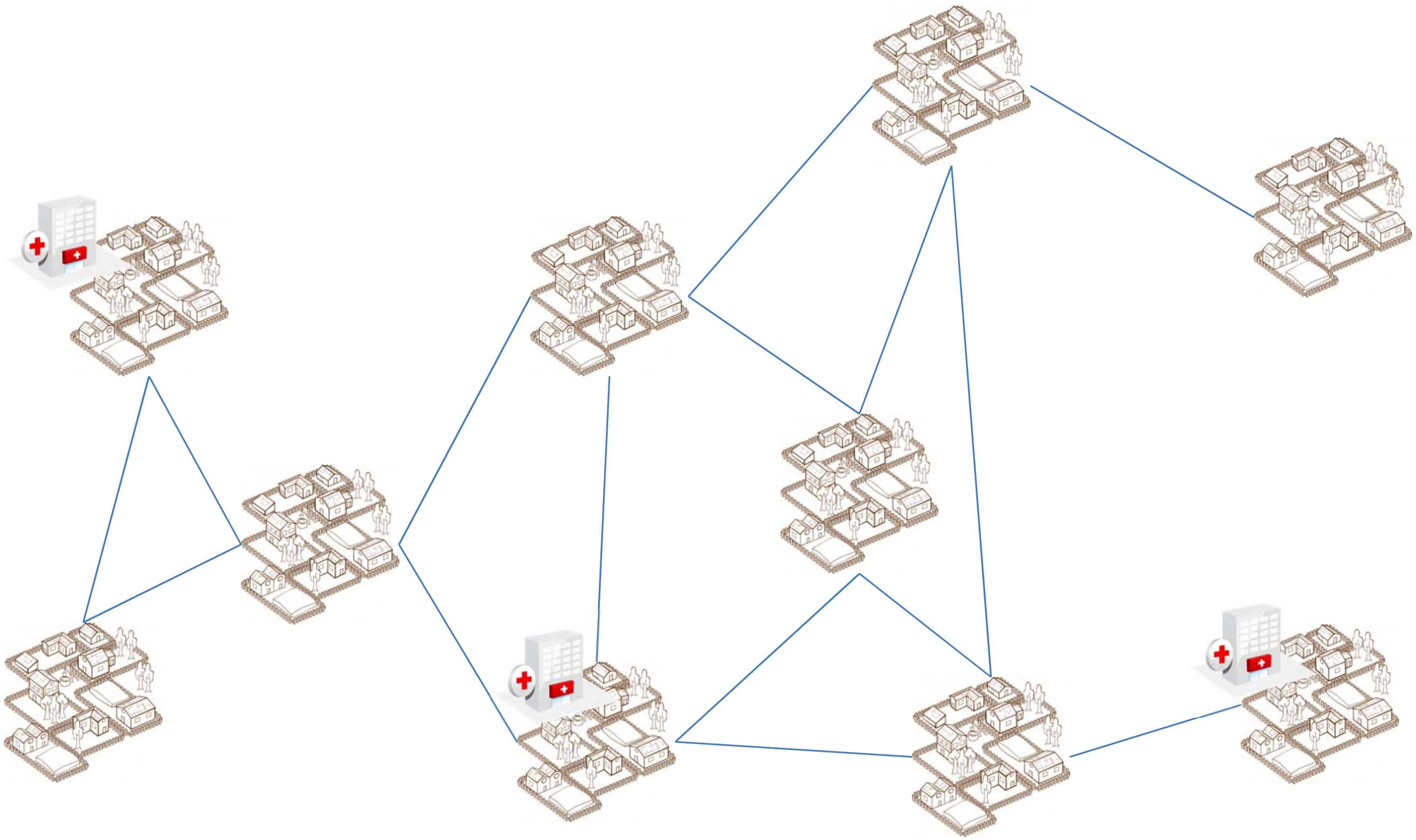


- 不存在近似比好于对数的多项式时间算法（除非P=NP）
  - 贪心算法已经足够好了

支配集的应用

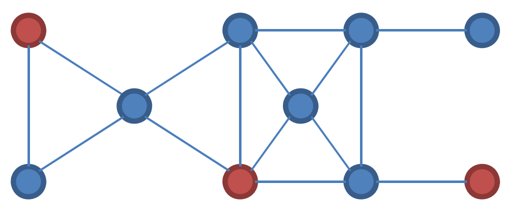
- 最小连通支配集：自组网络中的虚拟骨干网

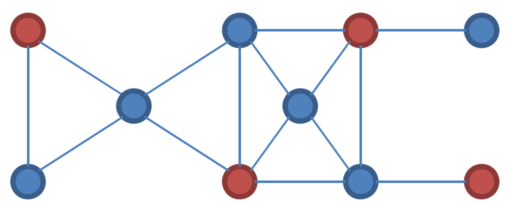




点独立集

- 点独立集 (vertex independent set)
  - I是G的点独立集：$\forall u, v \in I, (u, v) \notin E(G)$
- 极大点独立集 (maximal vertex independent set)
  - 顶点数极多（不是任何一个点独立集的真子集）
- 最大点独立集 (maximum vertex independent set)
  - 顶点数最多
- 独立数 (independence number)
  - $\alpha(G)$：最大点独立集的势





点独立集与支配集

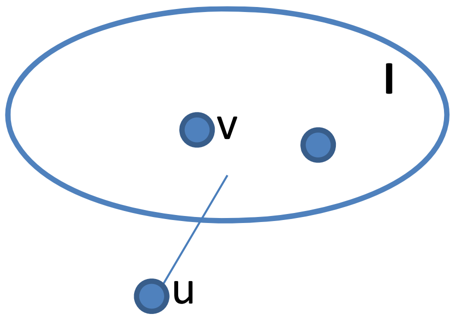
- 定理5.1.8 极大点独立集必是极小支配集。

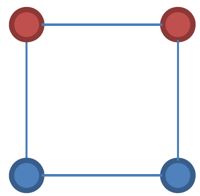
证明：

1. I是极大点独立集 ⇒ ∀u∈V(G)\I与I中顶点相邻 ⇒ I是支配集
2. I是点独立集 ⇒ ∀v∈I与I\{v}中顶点不相邻 ⇒ I\{v}不是支配集

⇒ I是极小支配集

反之成立吗？





点独立集与支配集 (续)

- 定理5.1.9 若I是点独立集，则它是极大点独立集当且仅当它是支配集。

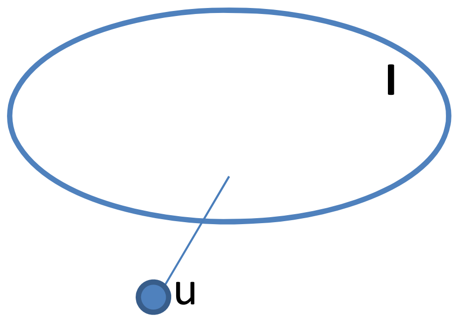
证明：

- $\Rightarrow$

定理5.1.8

- $\Leftarrow$

I是支配集 $\Rightarrow \forall u \in V(G)\backslash I$与I中顶点相邻 $\Rightarrow I \cup \{u\}$不是点独立集
$\Rightarrow$ I是极大点独立集



点独立集与支配集 (续)

- 定理5.1.10 $\alpha(G) \geq \gamma(G)$

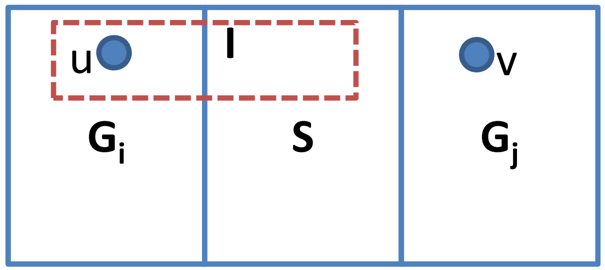
证明：

I是最大点独立集 ⇒ I是极大点独立集 ⇒ I是支配集 ⇒ $\gamma(G) \leq |I| = \alpha(G)$

点独立集与连通度

- 定理5.1.11 设$\nu(G)\geq 2$。若图G中任二不相邻顶点x与y均有$d(x)+d(y)\geq\nu(G)$，则$\alpha(G)\leq\kappa(G)$。

证明：



$d(x)+d(y)\geq\nu \Rightarrow$ G是连通图（为什么？）

- 如果G是完全图：$\alpha=1\leq\nu-1=\kappa$。
- 如果G不是完全图：

1. 反证法：$\alpha\geq\kappa+1$。
2. 取最大点独立集I $\Rightarrow |I|=\alpha\geq\kappa+1$
3. 不是完全图 $\Rightarrow$ 取最小点割集S $\Rightarrow |S|=\kappa$
4. S是点割集 $\Rightarrow G\backslash S$的连通分支为$G_1, G_2, \ldots, G_l$ $(l\geq 2)$
5. I是独立集 $\Rightarrow \forall x, y\in I$, $|N(x)\cup N(y)|\leq|V(G)\backslash I|=\nu-\alpha \Rightarrow |N(x)\cap N(y)|=|N(x)|+|N(y)|-|N(x)\cup N(y)|=d(x)+d(y)-|N(x)\cup N(y)|\geq\nu-(\nu-\alpha)=\alpha\geq\kappa+1=|S|+1 \Rightarrow$ x和y在$G\backslash S$中有公共邻点 $\Rightarrow$ 如果$x, y\notin S$，那么x和y在$G\backslash S$的同一个连通分支G_i中 $\Rightarrow I\backslash S\subseteq G_i \Rightarrow I\subseteq G_i\cup S$，而$|I|=\alpha\geq\kappa+1=|S|+1 \Rightarrow \exists u\in I\cap G_i$
6. 取$v\in G_j\neq G_i \Rightarrow |N(u)\cup N(v)|\leq\nu-|I\cap G_i|-1=\nu-|I\backslash(I\cap S)|-1=\nu-(\alpha-|I\cap S|)-1$ (*)
7. $N(u)\cap N(v)\subseteq S\backslash I \Rightarrow |N(u)\cap N(v)|\leq\kappa-|I\cap S|$ (**)
8. (*)和(**) $\Rightarrow d(u)+d(v)=|N(u)\cup N(v)|+|N(u)\cap N(v)|\leq\nu-(\alpha-|I\cap S|)-1+\kappa-|I\cap S|=\nu-\alpha+\kappa-1\leq\nu-(\kappa+1)+\kappa-1=\nu-2 \Rightarrow$ 与题设$d(u)+d(v)\geq\nu$矛盾

点独立集与连通度 (续)

- 推论5.1.2 设G是ν ($\nu \geq 2$)阶简单图。若$\delta(G) \geq \nu/2$，则$\alpha(G) \leq \kappa(G)$。

证明：

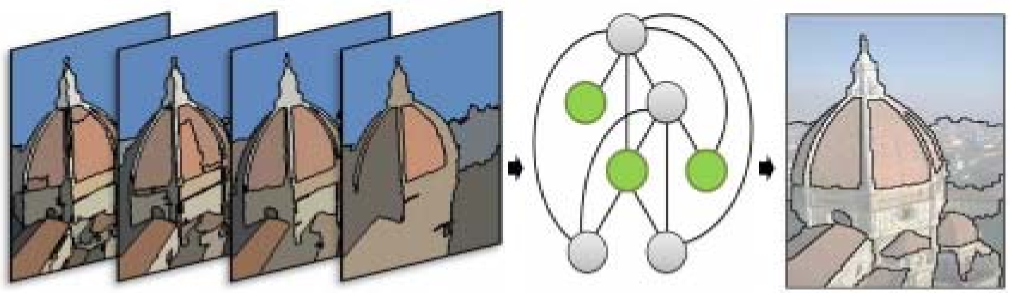
$\delta(G) \geq \nu/2 \Rightarrow$ 任二不相邻顶点x与y均有$d(x)+d(y) \geq \nu(G) \Rightarrow \alpha(G) \leq \kappa(G)$

求最大独立集的算法

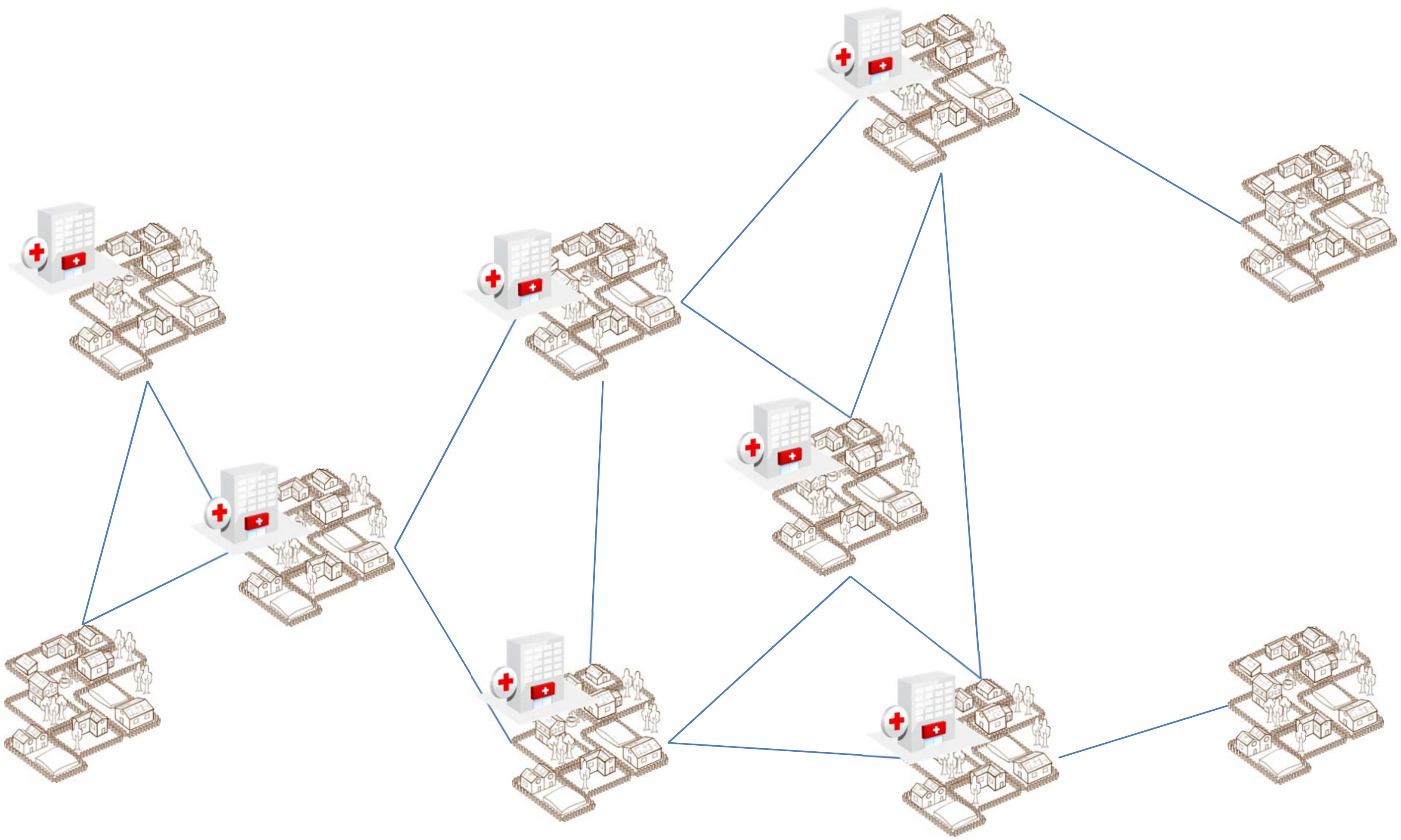
- 最大独立集=补图中的最大团：NP-hard
- 不存在近似比显著好于线性的多项式时间算法（除非P=NP）

独立集的应用

- 最大带权独立集：图像分割
  - 顶点：所有可能的块
  - 边：重叠的块
  - 权：块的显著程度

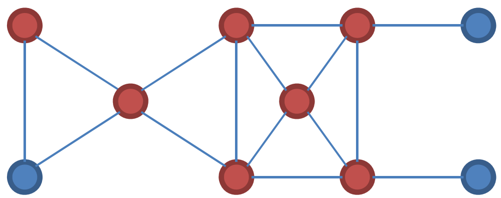


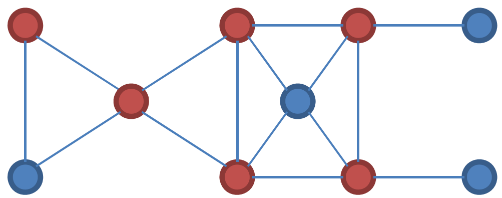
Segmentation as Maximum-Weight Independent Set



点覆盖集

- 点覆盖集 (vertex cover)
  - F是G的点覆盖集：$\forall(u, v) \in E(G), \{u, v\} \cap F \neq \emptyset$
- 极小点覆盖集 (minimal vertex cover)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是点覆盖集）
- 最小点覆盖集 (minimum vertex cover)
  - 顶点数最少
- 点覆盖数 (vertex cover number)
  - $\beta(G)$：最小点覆盖集的势

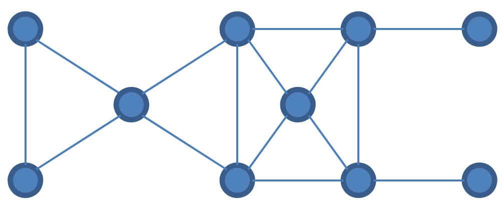




点覆盖集与支配集

- 点覆盖集与所有边关联
- 支配集与所有剩余点相邻

- 连通图中，点覆盖集必为支配集
- 反之成立吗？



点覆盖集与独立集

- 定理5.1.13 F是点覆盖集当且仅当V(G)\F是点独立集。

证明：

F是点覆盖集 $\Leftrightarrow$ G的每条边都有至少一个端点在F中 $\Leftrightarrow$ 没有两端点都在V(G)\F中的边 $\Leftrightarrow$ V(G)\F是点独立集

点覆盖集与独立集 (续)

- 推论5.1.3 F是极小点覆盖集当且仅当V(G)\F是极大点独立集。

证明：

1. 定理5.1.13 $\Rightarrow$ F是点覆盖集当且仅当V(G)\F是点独立集
2. F是极小点覆盖集 $\Leftrightarrow$ F中去除任意一些点就会将至少一条边的两个端点都去除 $\Leftrightarrow$ V(G)\F中加入任意一些点就会将至少一条边的两个端点都加入 $\Leftrightarrow$ V(G)\F是极大点独立集

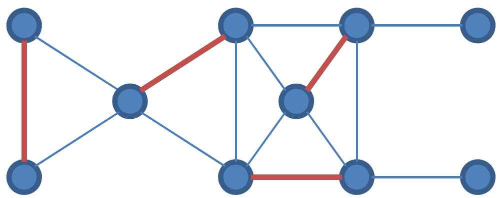
点覆盖集与独立集 (续)

- 推论5.1.4 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$。

证明：留作作业。

求最小点覆盖集的算法

- 点覆盖集和极大匹配之间有什么关系？
  - 极大匹配饱和的所有顶点构成一个点覆盖集
  - 极大匹配中的边互不相邻 ⇒ 任何一个点覆盖集至少包含其中每条边的一个端点 ⇒ 上述点覆盖集的势$\leq 2\beta$，即近似比为2
  - 怎么找极大匹配？



- 不存在近似比好于1.3606的多项式时间算法（除非P=NP）
- 目前还没有找到近似比显著小于2的多项式时间算法
  - 基于极大匹配的算法已经足够好了

作业

- 5.6 //支配集
- 5.11 //点独立集
- 5.15 //点覆盖集