

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

(万学·海文提供)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 ()

(A) $k=2, c=\frac{-1}{2}$ (B) $k=2, c=\frac{1}{2}$ (C) $k=3, c=\frac{-1}{3}$ (D)

$$k=3, c=\frac{1}{3}$$

【答案】D

【解析】因为 $c \neq 0$

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{kx^{k-1}(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{kx^{k-1}} = \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} x^{3-k}$$

所以 $3-k=0, k=3, c=\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$, 故选 D

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 的切平面方程为 ()

(A) $x - y + z = -2$ (B) $x + y + z = 0$ (C) $x - 2y + z = -3$ (D) $x - y - z = 0$

【答案】A

【解析】曲面在点 $(0, 1, -1)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_{(0,1,-1)} = (2x - y \sin(xy) + 1, -x \sin(xy) + z, y) \Big|_{(0,1,-1)} = (1, -1, 1)$$

故曲面在点 $(0, 1, -1)$ 处的切面方程为 $1 \cdot (x-0) - (y-1) + (z+1) = 0$,

即 $x - y + z = -2$, 选 A

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$. 令 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则

$$s\left(-\frac{9}{4}\right) =$$

()

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \\ x - \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{cases}$

将 $f(x)$ 作奇延拓, 得周期函数 $F(x)$, 周期 $T=2$

则 $F(x)$ 在点 $x = -\frac{9}{4}$ 处连续, 从而

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = F\left(-\frac{9}{4}\right) = F\left(-\frac{1}{4}\right) = -F\left(\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

故选 C

(4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向

的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i=1, 2, 3, 4)$. 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

()

(A) I_1 (B) I_2 (C) I_3 (D) I_4

【答案】D

【解析】记 $P = y + \frac{y^3}{6}, Q = 2x - \frac{x^3}{3}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - x^2 - 1 - \frac{y^2}{2} = 1 - \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right)$,

$$I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_i} \left[1 - \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] dx dy.$$

用 D_i 表示 L_i 所围区域, 则有 $I_1 = \frac{5}{8}\pi, I_2 = \frac{1}{2}\pi, I_3 = \frac{3\sqrt{2}}{8}, I_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, I_4 > I_1 > I_3 > I_2$.

故选 D

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则 ()

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】B

【解析】将 A, C 按列分块, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), C = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

由于 $AB = C$, 故

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

即 $\gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{n1}\alpha_n, \dots, \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + \dots + b_{nn}\alpha_n$

即 C 的列向量组可由 A 的列向量线性表示

由于 B 可逆, 故 $A = CB^{-1}$, A 的列向量组可由 C 的列向量组线性表示, 选 B

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充要条件为 ()

(A) $a=0, b=2$

(B) $a=0, b$ 为任意常数

(C) $a=2, b=0$

(D) $a=2, b$ 为任意常数

【答案】B

【解析】令 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

因为 A 为实对称矩阵, B 为对角阵, 则 A 与 B 相似的充要条件是 A 的特征值分别为 $2, b, 0$

$$\begin{aligned} A \text{ 的特征方程 } |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda-b & -a \\ -\lambda & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda-b & -a \\ 0 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2], \end{aligned}$$

因为 $\lambda=2$ 是 A 的特征值, 所以 $|2E - A| = 0$

所以 $-2a^2 = 0$, 即 $a=0$.

当 $a=0$ 时, $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$,

A 的特征值分别为 $2, b, 0$ 所以 b 为任意常数即可. 故选 B.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i=1, 2, 3)$, 则 ()

(A) $p_1 > p_2 > p_3$

(B) $p_2 > p_1 > p_3$

(C) $p_3 > p_1 > p_2$

(D) $p_1 > p_3 > p_2$

【答案】A

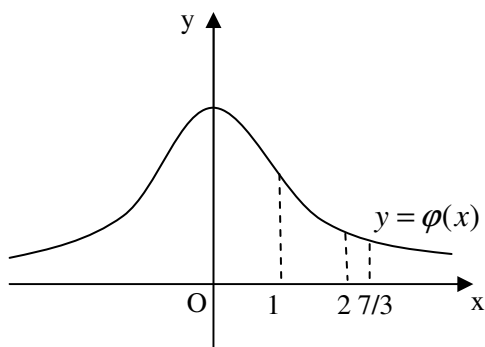
【解析】

$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$$

$$p_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{\frac{-2-0}{2} \leq \frac{X_2-0}{2} \leq \frac{2-0}{2}\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$p_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \leq \frac{X_3-5}{3} \leq \frac{2-5}{3}\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1),$$

由下图可知, $p_1 > p_2 > p_3$, 选 A.



(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 α ($0 < \alpha < 0.5$), 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$,

则 $P\{Y > c^2\} =$ ()

(A) α

(B) $1 - \alpha$

(C) 2α

(D) $1 - 2\alpha$

【答案】C

【解析】 $X \sim t(n)$, 则 $X^2 \sim F(1, n)$

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = 2P\{X > c\} = 2\alpha, \text{ 选 C.}$$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____

【答案】1

【解析】 $x = 0$ 时, $y = 1$

方程两边对 x 求导得 $y' - 1 = e^{x(1-y)}(1 - y - xy')$ 所以 $y'(0) = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0) = 1$$

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解 $y =$ _____

【答案】 $y = c_1(e^{3x} - e^x) + c_2e^x - xe^{2x}$

【解析】 $y_1 - y_2 = e^{3x} - e^x$, $y_2 - y_3 = e^x$,

对应齐次微分方程的通解 $y^2 = c_1(e^{3x} - e^x) + c_2e^x$

非齐次微分方程的通解 $y = c_1(e^{3x} - e^x) + c_2e^x - xe^{2x}$

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为常数), 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t - \sin t}{\cos t} = t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$ _____.

【答案】 $\ln 2$

【解析】 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = -\frac{\ln x}{(1+x)} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = \ln \frac{x}{(1+x)} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若

$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 则 $|A| =$ _____

【答案】 -1 .

【解析】方法一：取矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，满足题设条件， $|A| = -1$ 。

方法二： $A^* = -A^T$ ，则 $|A^*| = |-A^T|$ ，整理得到 $|A|^{3-1} = (-1)^3 |A|$ ，即 $|A| = -1$ 或者 $|A| = 0$ 。

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = -(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2) \leq 0$$

又因为 $A \neq O$ ，所以至少有一个 $a_{ij} \neq 0$ ，所以

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = -(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2) < 0$$

从而 $|A| = -1$ 。

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布， a 为常数且大于零，则

$$P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $1 - \frac{1}{e}$

【解析】 $f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$

$$P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = \frac{P\{Y > a, Y \leq a+1\}}{P\{Y > a\}} = \frac{\int_a^{a+1} f(y) dy}{\int_a^{+\infty} f(y) dy} = \frac{e^{-a} - e^{-(a+1)}}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{e}$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ ，其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

【解析】 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$ ，则 $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ ， $f(1) = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} = 2 \left[f(x)\sqrt{x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \\ &= 2f(1) - 2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} \sqrt{x} dx = -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx = -4 \int_0^1 \ln(x+1) d\sqrt{x} \\ &= -4 \left[\ln(x+1)\sqrt{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{其中} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &\stackrel{\substack{\sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt}}{=} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \cdot 2tdt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \left[t - \arctan t \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\text{所以原式} = -4 \ln 2 + 8 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 8 - 2\pi - 4 \ln 2$$

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

的和函数

(I) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$

(II) 求 $S(x)$ 的表达式

$$\text{【解析】} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$S''(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n] x^n$$

因为 $n(n-1)a_n - a_{n-2} = 0, n \geq 2$, 所以 $(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n = 0 (n \geq 0)$.

$$\text{所以} \begin{cases} S''(x) - S(x) = 0, \\ S(0) = a_0 = 3, \\ S'(0) = a_1 = 1. \end{cases}$$

(II) $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 所以 $S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

又 $S(0) = 3, S'(0) = 1$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 2$, $S(x) = e^{-x} + 2e^x$.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值

$$\text{【解析】} \quad \text{令 } f'_x = e^{x+y} (x^2 + y + \frac{x^3}{3}) = 0, \quad f'_y = e^{x+y} (1 + y + \frac{x^3}{3}) = 0$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''_{xx} = e^{x+y} (2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}) \quad f''_{xy} = e^{x+y} (1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3}) \quad f''_{yy} = e^{x+y} (2 + y + \frac{x^3}{3})$$

$$A = f''_{xx} \Big|_{\left(1, -\frac{4}{3}\right)} = 3e^{\frac{-1}{3}}, \quad B = f''_{xy} \Big|_{\left(1, -\frac{4}{3}\right)} = e^{\frac{-1}{3}}, \quad C = f''_{yy} \Big|_{\left(1, -\frac{4}{3}\right)} = e^{\frac{-1}{3}}$$

$$AC - B^2 = 3e^{\frac{-2}{3}} - e^{\frac{-2}{3}} = 2e^{\frac{-2}{3}} > 0$$

又 $A > 0$

所以 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{\frac{-1}{3}}$

$$A = f''_{xx} \Big|_{\left(1, -\frac{2}{3}\right)} = -e^{\frac{-5}{3}}, \quad B = f''_{xy} \Big|_{\left(1, -\frac{2}{3}\right)} = e^{\frac{-5}{3}}, \quad C = f''_{yy} \Big|_{\left(1, -\frac{2}{3}\right)} = e^{\frac{-5}{3}}$$

因为 $AC - B^2 < 0$, 所以 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) = 1$.

证明: (I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【解析】(I) 由于 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数, 故 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(0) = 0$

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(1) = f(1) - 1 = 0$

$F(0) = f(0) - 0 = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.

(II) 由于 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数, 则 $f'(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为偶函数, 所以由 (I)

$$f'(-\xi) = f'(\xi) = 1.$$

令 $G(x) = e^x [f'(x) - 1]$, 则 $G(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导, 且

$G(\xi) = G(-\xi) = 0$, 由罗尔定理存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (0, 1)$, 使得 $G'(\eta) = 0$

即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面

$z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω . (I) 求曲面 Σ 的方程, (II) 求 Ω 的形心坐标.

【解析】

$$(I) \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1), \text{ 所以直线 } L \text{ 方程 } \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

设 Σ 上任一点 y 由直线 L 上的点 $F(y)$ 绕 z 轴旋转一周得到, 则

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\text{又 } \frac{x_0-1}{-1} = \frac{y_0}{1} = \frac{z_0}{1}, \text{ 所以 } \Sigma \text{ 方程为 } x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2 = 2z^2 - 2z + 1$$

$$(II) x^2 + y^2 - 2(z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

设形心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 几何体关于 xoz, yoz 对称, $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} = \frac{\int_0^2 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z^2-2z+1} dx dy}{\int_0^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z^2-2z+1} dx dy} = \frac{\pi \int_0^2 (2z^3 - z^2 + z) dz}{\pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) dz} = \frac{7}{5}.$$

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$. 并求所

有矩阵 C .

【解析】设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 由于 $AC - CA = B$, 故

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (\text{I})$$

由于矩阵 C 存在, 故方程组 (I) 有解. 对 (I) 的增广矩阵进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & \vdots & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix}$$

方程组有解, 故 $a+1=0$, $b=0$, 即 $a=-1, b=0$, 此时存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$.

当 $a=-1, b=0$ 时, 增广矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

x_3, x_4 为自由变量, 令 $x_3=1, x_4=0$, 代为相应齐次方程组, 得 $x_2=-1, x_1=1$.

令 $x_3=0, x_4=1$, 代为相应齐次方程组, 得 $x_2=0, x_1=1$.

故 $\xi_1=(1, -1, 1, 0)^T$, $\xi_2=(1, 0, 0, 1)^T$, 令 $x_3=0, x_4=0$, 得特解 $\eta=(1, 0, 0, 0)^T$, 方程组的通解

为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=(k_1+k_2+1, -k_1, k_1, k_2)^T$, 所以 $C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且为单位向量, 证明 f 在正交交换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

【解析】证明: (I) $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

$$\begin{aligned}
&= 2(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_1, x_2, x_3) (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= x^T Ax, \text{ 其中 } A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T, \text{ 其中 } x = (x_1, x_2, x_3)^T.
\end{aligned}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 由于 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, α 与 β 正交, 故 $\alpha^T\beta = 0$, α, β 为单位向量, 故 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T\alpha} = 1$,

故 $\alpha^T\alpha = 1$, 同样 $\beta^T\beta = 1$.

$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, 由于 $\alpha \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_1 = 2$.

$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = \beta$, 由于 $\beta \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_2 = 1$.

$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 1 + 1 = 2 < 3$.

所以 $|A| = 0$, 故 $\lambda_3 = 0$.

因此, f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

【解析】设 y 的分布函数为 $F(y)$, 则

$$F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y \leq y, X \leq 1\} + P\{Y \leq y, 1 < X < 2\} + P\{Y \leq y, X \geq 2\}$$

$$= P\{2 \leq y, X \leq 1\} + P\{X \leq y, 1 < X < 2\} + P\{1 \leq y, X \geq 2\}$$

当 $y < 1$ 时, $F(y) = 0$,

当 $1 \leq y < 2$ 时, $F(y) = P\{X \leq y, 1 < X < 2\} + P\{X \geq 2\} = P\{1 < X \leq y\} + P\{X \geq 2\}$

$$= \int_1^y \frac{1}{9} x^2 dx + \int_2^3 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{27} (y^3 - 1) + \frac{1}{27} (3^3 - 2^3) = \frac{1}{27} (y^3 + 18)$$

当 $y \geq 2$ 时, $F(y) = P\{X \leq 1\} + P\{1 < X < 2\} + P\{X \geq 2\} = 1$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【解析】

$$(I) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{x^3} \cdot e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} \cdot e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} d\left(-\frac{\theta}{x}\right) = -\theta$$

令 $\bar{X} = E(X)$, 则 $\bar{X} = -\theta$, 即 θ 的矩估计量为 $\theta = -\bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$(II) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} \right), & x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{当 } x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n) \text{ 时, } L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta^2}{x_i^3} \cdot e^{-\frac{\theta}{x_i}} \right)$$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[2 \ln \theta - \ln x_i^3 - \frac{\theta}{x_i} \right]$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{\theta} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$$

$$\text{解得 } \theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{所以 } \theta \text{ 的最大似然估计量 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$