

2000 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$ _____.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, -2)$ 的法线方程为_____.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为_____.

(4) 已知方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 无解, 则 $a =$ _____.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有

(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$

(D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$) 线性无关, 则 n 维列向量组 β_1, \dots, β_m 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 β_1, \dots, β_m 线性表示

(B) 向量组 β_1, \dots, β_m 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 β_1, \dots, β_m 等价

(D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件

为

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

三、(本题满分 6 分)

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + e^x}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

四、(本题满分 5 分)

设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$), 取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有 $\iiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy = 0$, 其中

函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k > 0$),求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$, $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$. 试证:在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

十、(本题满分 6 分)

设矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} + 3\mathbf{E}$, 其中 \mathbf{E} 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 \mathbf{B} .

十一、(本题满分 8 分)

某适应性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由

招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年 1 月份统计的熟练

工与非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n , 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1)求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(2)验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 \mathbf{A} 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值.

(3)当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时,求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水线上每个产品不合格的概率为 p ($0 < p < 1$),各产品合格与否相对独立,当出现 1 个不合格产品时即停机检修.设开机后第 1 次停机时已生产了的产品个数为 X ,求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 x 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数.又设

x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的一组样本观测值,求参数 θ 的最大似然估计值.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = e^x (a \sin x + b \cos x)$ (a, b 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该方程为

_____.

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) \Big|_{(1,-2,2)} =$ _____.

(3) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$ _____.

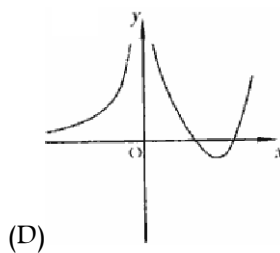
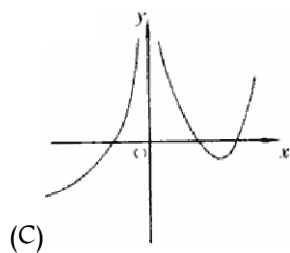
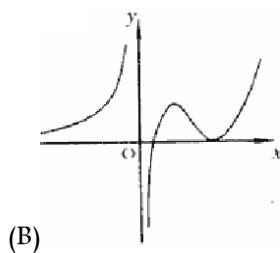
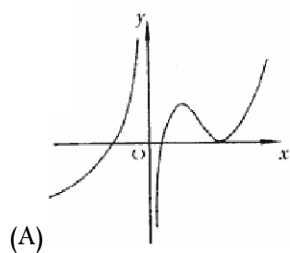
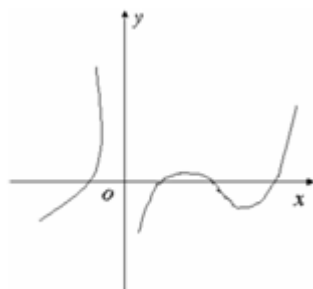
(4) 设 $A^2 + A - 4E = O$, 则 $(A - 2E)^{-1} =$ _____.

(5) $D(X) = 2$, 则根据车贝晓夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如右图所示, 则 $y = f'(x)$ 的图形为



(2) 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的附近有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 3$, $f'_y(0, 0) = 1$ 则

(A) $dz \Big|_{(0,0)} = 3dx + dy$

(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的法向量为 $\{3, 1, 1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的切向量为 $\{1, 0, 3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的切向量为 $\{3, 0, 1\}$

(3) 设 $f(0) = 0$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 \Leftrightarrow

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2}$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2}$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在

(4) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B}

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似

(D) 不合同且不相似

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 相关系数为

(A) -1

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

三、(本题满分 6 分)

求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 可微, 且 $f(1, 1) = 1, f'_x(1, 1) = 2, f'_y(1, 1) = 3, \varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求

$\frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$. 证明:

(1) 对于 $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, 存在惟一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x))$ 成立.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = 0.5$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程, 其侧面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (系数为 0.9), 问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少时间?

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $AX = O$ 的一个基础解系.

$$\beta_1 = t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2, \beta_2 = t_1 \alpha_2 + t_2 \alpha_3, \dots, \beta_s = t_1 \alpha_s + t_2 \alpha_1,$$

其中 t_1, t_2 为实常数. 试问 t_1, t_2 满足什么条件时 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{O}$ 的一个基础解系?

十、(本题满分 8 分)

已知三阶矩阵 \mathbf{A} 和三维向量 \mathbf{x} , 使得 $\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}$ 线性无关, 且满足 $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = 3\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{x}$.

(1) 记 $\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}^2\mathbf{x})$, 求 \mathbf{B} 使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$.

(2) 计算行列式 $|\mathbf{A} + \mathbf{E}|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p ($0 < p < 1$), 且中途下车与否相互独立. Y 为中途下车的人数. 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_{2n} ($n \geq 2$),

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$, $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$, 求 $E(Y)$.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 已知 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换可化为标准型 $f = 6y_1^2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5, 则 $\mu = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(1) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的四条性质:

① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的一阶偏导数连续.

③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微. ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的一阶偏导数存在.

则有:

(A) $② \Rightarrow ③ \Rightarrow ①$

(B) $③ \Rightarrow ② \Rightarrow ①$

(C) $③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①$

(D) $③ \Rightarrow ① \Rightarrow ④$

(2) 设 $u_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 为

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛性不能判定.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 R^+ 上有界且可导, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

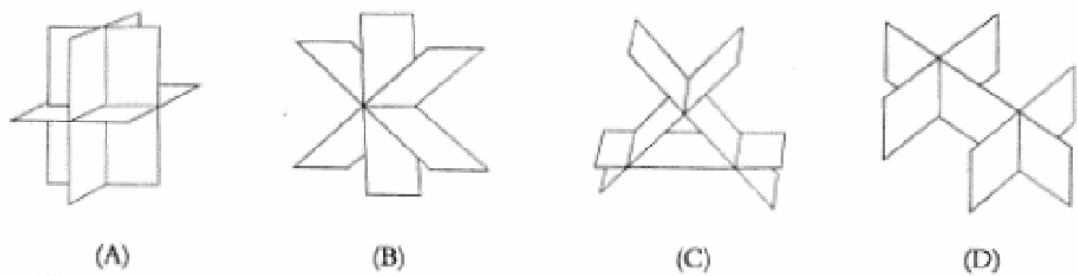
(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$.

(4) 设有三张不同平面,其方程为 $a_i x + b_i y + c_i z = d_i (i = 1, 2, 3)$ 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广

矩阵的秩都为 2,则这三张平面可能的位置关系为



(5) 设 X 和 Y 是相互独立的连续型随机变量,它们的密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,分布函数分别为 $F_X(x)$

和 $F_Y(y)$,则

(A) $f_X(x) + f_Y(y)$ 必为密度函数

(B) $f_X(x) f_Y(y)$ 必为密度函数

(C) $F_X(x) + F_Y(y)$ 必为某一随机变量的分布函数 (D) $F_X(x) F_Y(y)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域具有一阶连续导数,且 $f(0)f'(0) \neq 0$,当 $h \rightarrow 0$ 时,若

$af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$,试求 a, b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同.求此切线的方程,并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \right)$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 R 上具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有向分段光滑曲线,起点为 (a, b) , 终点为

(c, d) . 记 $I = \int_y \frac{1}{y^2} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$,

(1)证明曲线积分 I 与路径 L 无关.

(2)当 $ab = cd$ 时,求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1)验证函数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$.

(2)求幂级数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xoy 面,其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$,小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1)设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上何方向的方向导数最大?若此方向的方向导数为 $g(x_0, y_0)$,写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚下寻找一山坡最大的点作为攀登的起点.也就是说要在 D 的边界线上找出使(1)中 $g(x, y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为四维列向量,其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$.若

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同阶方阵.

(1)若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 相似,证明 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的特征多项式相等.

(2)举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3)当 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为实对称矩阵时,证明(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设维随机变量 x 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

对 x 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 x 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数,利用总体 x 的如下样本值

3,1,3,0,3,1,2,3.

求 θ 的矩估计和最大似然估计值.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 从 \mathbf{R}^2 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $P\{X + Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

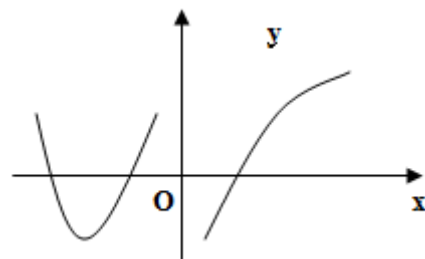
(6) 已知一批零件的长度 X (单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$.)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点
- (B) 两个极小值点和一个极大值点
- (C) 两个极小值点和两个极大值点
- (D) 三个极小值点和一个极大值点



(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立
- (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在
- (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

(3) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则

(A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点

(B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

(4) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关

(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关

(D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关

(5) 设有齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 和 $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$, 其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 的解均是 $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ 的解, 则秩 $(\mathbf{A}) \geq$ 秩 (\mathbf{B})

② 若秩 $(\mathbf{A}) \geq$ 秩 (\mathbf{B}) , 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 的解均是 $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ 的解

③ 若 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 与 $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ 同解, 则秩 $(\mathbf{A}) =$ 秩 (\mathbf{B})

④ 若秩 $(\mathbf{A}) =$ 秩 (\mathbf{B}) , 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 与 $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ 同解

以上命题中正确的是

(A) ①②

(B) ①③

(C) ②④

(D) ③④

(6) 设随机变量 $X \sim t(n)$ ($n > 1$), $Y = \frac{1}{X^2}$, 则

(A) $Y \sim \chi^2(n)$

(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$

(C) $Y \sim F(n, 1)$

(D) $Y \sim F(1, n)$

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A .

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界.试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2.$$

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层.汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k > 0$).汽锤第一次击打将桩打进地下 a m.根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r ($0 < r < 1$).问

(1)汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2)若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?

(注:m 表示长度单位米.)

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1)试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程.

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-1}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}, D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1)讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

(2)证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

九、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{P}$, 求 $\mathbf{B} + 2\mathbf{E}$ 的特征值与特征向量, 其中 \mathbf{A}^* 为 \mathbf{A} 的伴随

矩阵, \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

十一、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1)乙箱中次品件数的数学期望.

(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(1)求总体 X 的分布函数 $F(x)$.

(2)求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$.

(3)如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量,讨论它是否具有无偏性.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为_____.

(2)已知 $f'(e^x) = x e^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

(3)设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为_____.

(4)欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

(5)设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则

$|B| =$ _____.

(6)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(7)把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos^2 t dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin^3 t dt$, 使排在后面的是前一个的高阶

无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ

(B) α, γ, β

(C) β, α, γ

(D) β, γ, α

(8)设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

(9)设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$

(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$

(D) 0

(11) 设 \mathbf{A} 是 3 阶方阵, 将 \mathbf{A} 的第 1 列与第 2 列交换得 \mathbf{B} , 再把 \mathbf{B} 的第 2 列加到第 3 列得 \mathbf{C} , 则满足 $\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{C}$ 的可逆矩阵 \mathbf{Q} 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(12) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) \mathbf{A} 的列向量组线性相关, \mathbf{B} 的行向量组线性相关

(B) \mathbf{A} 的列向量组线性相关, \mathbf{B} 的列向量组线性相关

(C) \mathbf{A} 的行向量组线性相关, \mathbf{B} 的行向量组线性相关

(D) \mathbf{A} 的行向量组线性相关, \mathbf{B} 的列向量组线性相关

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(D) $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

(B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

$$(C) D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$$

$$(D) D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$$

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数. 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

[illegible]

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 \mathbf{A} 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生}, \\ 0, & A \text{ 不发生}; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生}, \\ 0, & B \text{ 不发生}. \end{cases}$$

求:(1)二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

(2) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x, \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

求:(1) β 的矩估计量.

(2) β 的最大似然估计量.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 _____.

(2)微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

(3)设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1, 2, 3)} =$ _____.

(4)设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy =$ _____.

(5)设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

(6)从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 x , 再从 $1, 2, \dots, x$ 中任取一个数, 记为 y , 则 $P\{y = 2\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A)处处可导

(B)恰有一个不可导点

(C)恰有两个不可导点

(D)至少有三个不可导点

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, " $M \Leftrightarrow N$ " 表示 " M 的充分必要条件是 N ", 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

(9)设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$(C) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(D) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(10) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$

(11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 \mathbf{A} 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, \mathbf{A}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$

(B) $\lambda_2 \neq 0$

(C) $\lambda_1 = 0$

(D) $\lambda_2 = 0$

(12) 设 \mathbf{A} 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 \mathbf{A} 的第 1 行与第 2 行得矩阵 \mathbf{B} , \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* 分别为 \mathbf{A} , \mathbf{B} 的伴随矩阵, 则

(A) 交换 \mathbf{A}^* 的第 1 列与第 2 列得 \mathbf{B}^*

(B) 交换 \mathbf{A}^* 的第 1 行与第 2 行得 \mathbf{B}^*

(C) 交换 \mathbf{A}^* 的第 1 列与第 2 列得 $-\mathbf{B}^*$

(D) 交换 \mathbf{A}^* 的第 1 行与第 2 行得 $-\mathbf{B}^*$

(13) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则

(A) $a = 0.2, b = 0.3$

(B) $a = 0.4, b = 0.1$

(C) $a = 0.3, b = 0.2$

(D) $a = 0.1, b = 0.4$

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则

(A) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

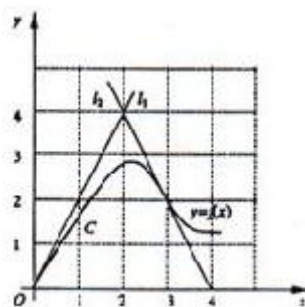
设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$. $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy [1 + x^2 + y^2] dx dy$.

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \frac{1}{n(2n-1)}) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线 C 的方程为 $y = f(x)$,点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线,其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$.



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(1)存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值

恒为同一常数.

(1)证明:对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\phi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$.

(2)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1)求 a 的值;

(2)求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形.

(3)求方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 \mathbf{A} 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 求线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

求: (1) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$.

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $z = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, \mathbf{E} 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 \mathbf{B} 满足 $\mathbf{BA} = \mathbf{B} + 2\mathbf{E}$, 则 $|\mathbf{B}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选

项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < dx < \Delta y$

(B) $0 < \Delta y < dy$

(C) $\Delta y < dy < 0$

(D) $dy < \Delta y < 0$

(8) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \text{ 收敛}$$

$$(D) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \text{ 收敛}$$

(10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi_y^1(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下

的一个极值点, 下列选项正确的是

$$(A) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(B) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

$$(C) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(D) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

(11) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

$$(A) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性相关}$$

$$(B) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性无关}$$

$$(C) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性相关}$$

$$(D) \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关, 则 } A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s \text{ 线性无关}$$

(12) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C , 记

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$(A) C = P^{-1}AP$$

$$(B) C = PAP^{-1}$$

$$(C) C = P^TAP$$

$$(D) C = PAP^T$$

(13) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

$$(A) P(A \cup B) > P(A)$$

$$(B) P(A \cup B) > P(B)$$

$$(C) P(A \cup B) = P(A)$$

$$(D) P(A \cup B) = P(B)$$

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则

$$(A) \sigma_1 < \sigma_2$$

$$(B) \sigma_1 > \sigma_2$$

$$(C) \mu_1 < \mu_2$$

$$(D) \mu_1 > \mu_2$$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

(16)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

求: (1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之.

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(1) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(2) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D = \{(x, y) | y > 0\}$ 内, 数 $f(x, y)$ 是有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有 $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$.

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 - bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解,

(1) 证明方程组系数矩阵 \mathbf{A} 的秩 $r(\mathbf{A}) = 2$.

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 \mathbf{A} 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 的两个解.

(1) 求 \mathbf{A} 的特征值与特征向量.

(2) 求正交矩阵 \mathbf{Q} 和对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$, 使得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

(22)(本题满分 9 分)

随机变量 x 的概率密度为 $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 令 $y = x^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (x, y) 的分布函数.

(1) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

(2) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总

体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1)当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$

(B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$

(D) $1 - \cos \sqrt{x}$

(2)曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(3)如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半



圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是

(A) $F(3) = -\frac{3}{4} F(-2)$

(B) $F(3) = \frac{5}{4} F(2)$

(C) $F(3) = \frac{3}{4} F(2)$

(D) $F(3) = -\frac{5}{4} F(-2)$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0) = 0$

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0) = 0$

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) = 1, 2, \dots, n$, 则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

(B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

(D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

(6)设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 2 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , Γ 为 L

上从点 M 到 N 的一段弧, 则下列小于零的是

$$(A) \int_{\Gamma} f(x, y) dx$$

$$(B) \int_{\Gamma} f(x, y) dy$$

$$(C) \int_{\Gamma} f(x, y) ds$$

$$(D) \int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

$$(A) \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$$

$$(B) \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$$

$$(C) \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$$

$$(D) \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$$

$$(8) \text{ 设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A} \text{ 与 } \mathbf{B}$$

(A) 合同, 且相似

(B) 合同, 但不相似

(C) 不合同, 但相似

(D) 既不合同, 也不相似

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

$$(A) 3p(1-p)^2$$

$$(B) 6p(1-p)^2$$

$$(C) 3p^2(1-p)^2$$

$$(D) 6p^2(1-p)^2$$

(10) 设随即变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

$$(A) f_X(x)$$

$$(B) f_Y(y)$$

$$(C) f_X(x) f_Y(y)$$

$$(D) \frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$$

二、填空题(11 - 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上)

$$(11) \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(12) \text{ 设 } f(u, v) \text{ 为二元可微函数, } z = f(x^y, y^x), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(13) \text{ 二阶常系数非齐次线性方程 } y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x} \text{ 的通解为 } y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(14) \text{ 设曲面 } \sum: |x| + |y| + |z| = 1, \text{ 则 } \iint_{\sum} (x + |y|) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(15) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 \mathbf{A}^3 的秩为_____.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

三、解答题(17 - 24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分 11 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

(18)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2yzdzdx + 3xydxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$.

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(1) 证明: $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$.

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$
 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 \mathbf{A} 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 \mathbf{A} 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^5 - 4\mathbf{A}^3 + \mathbf{E}$, 其中 \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 \mathbf{B} 的特征向量, 并求 \mathbf{B} 的全部特征值与特征向量.

(2) 求矩阵 \mathbf{B} .

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$.

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

(2) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 (0, 1) 处的梯度等于

(A) i (B) $-i$

(C) j (D) $-j$

(3) 在下列微分方程中,以 $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ (c_1, c_2, c_3 为任意常数)为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛 (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

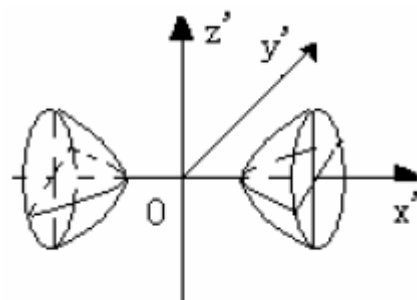
(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则

(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆 (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆

(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆 (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

(6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 A 的正特征值个数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



(7) 设随机变量 X, Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 分布函数为

(A) $F^2(x)$

(B) $F(x)F(y)$

(C) $1 - [1 - F(x)]^2$

(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

(8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$ 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$

(B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$

(D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(15 - 23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

(17)(本题满分 10 分)

已知曲线 $C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

$f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$, 用余弦级数展开, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

$\mathbf{A} = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, α^T 为 α 的转置, β^T 为 β 的转置. 证明:

(1) $r(\mathbf{A}) \leq 2$.

(2) 若 α, β 线性相关, 则 $r(\mathbf{A}) < 2$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}$, 现矩阵 \mathbf{A} 满足方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{B} = (1, 0, \dots, 0)$,

(1) 求证 $|\mathbf{A}| = (n+1)a^n$.

(2) a 为何值, 方程组有唯一解, 求 x_1 .

(3) a 为何值, 方程组有无穷多解, 求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=1,0)$, Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1 & 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \text{记 } Z=X+Y,$$

(1)求 $P\left\{Z\leq\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$.

(2)求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本.

$$\text{记 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2$$

(1)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2)当 $\mu=0, \sigma=1$ 时,求 $D T$.

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

(2) 如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域

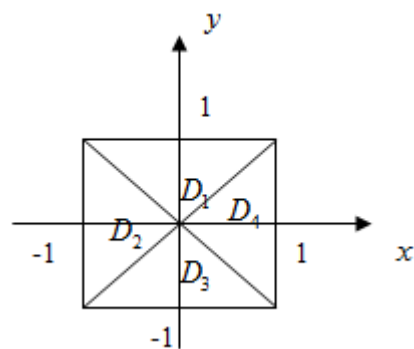
$D_k (k = 1, 2, 3, 4), I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

(A) I_1

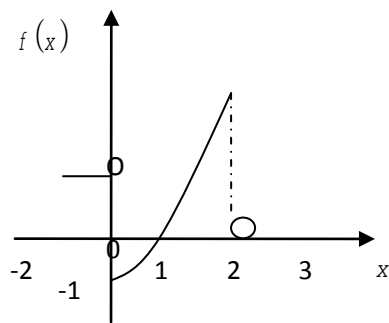
(B) I_2

(C) I_3

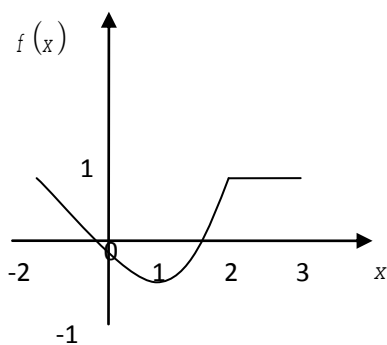
(D) I_4



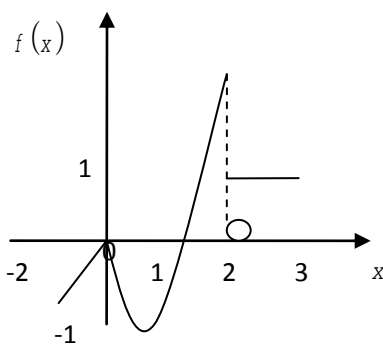
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



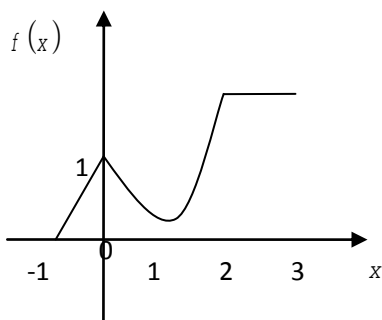
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



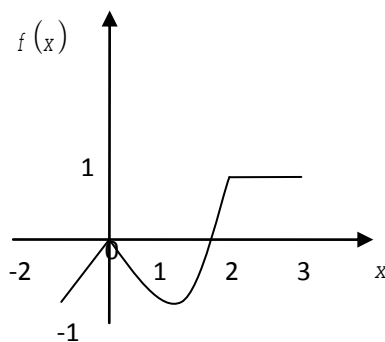
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 \mathbf{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 2 阶矩阵, $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别为 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的伴随矩阵, 若 $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{B}^* \\ 2\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{A}^* \\ 2\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{A}^* \\ 3\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX =$

(A) 0

(B) 0.3

(C)0.7

(D)1

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数. 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(c_1+c_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 已知曲线 $L: y=x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题(15 - 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2+y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积. 记 $s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $s_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 s_1 与 s_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 s_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成. 圆锥面 s_2 是过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x

轴旋转而成.

(1) 求 s_1 及 s_2 的方程.

(2) 求 s_1 与 s_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且

$$f'_+(0) = A.$$

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) 求满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$ 的 $\boldsymbol{\xi}_2$. $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$.

(2) 对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 证明 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以 x, y, z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1)求 $p\{x=1|z=0\}$.

(2)求二维随机变量 (x, y) 概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体 X 的简

单随机样本.

(1)求参数 λ 的矩估计量.

(2)求参数 λ 的最大似然估计量.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

(A) 1

(B) e

(C) e^{a-b}

(D) e^{b-a}

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

(A) x

(B) z

(C) $-x$

(D) $-z$

(3) 设 m, n 为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 取值有关

(B) 仅与 n 取值有关

(C) 与 m, n 取值都有关

(D) 与 m, n 取值都无关

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

(5) 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 型矩阵, \mathbf{B} 为 $n \times m$ 型矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则

(A) 秩 $(\mathbf{A}) = m$, 秩 $(\mathbf{B}) = m$

(B) 秩 $(\mathbf{A}) = m$, 秩 $(\mathbf{B}) = n$

(C) 秩 $(\mathbf{A}) = n$, 秩 $(\mathbf{B}) = m$

(D) 秩 $(\mathbf{A}) = n$, 秩 $(\mathbf{B}) = n$

(6) 设 \mathbf{A} 为 4 阶对称矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$, 若 \mathbf{A} 的秩为 3, 则 \mathbf{A} 相似于

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - e^{-x} & x > 2 \end{cases}, \text{ 则 } P\{X = 1\} =$$

$$(A) 0$$

$$(B) 1$$

$$(C) \frac{1}{2} - e^{-1}$$

$$(D) 1 - e^{-1}$$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度.

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

$$(A) 2a + 3b = 4$$

$$(B) 3a + 2b = 4$$

$$(C) a + b = 1$$

$$(D) a + b = 2$$

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

$$(9) \text{ 设 } x = e^{-t}, y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \text{ 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|, \{x \in [-1, 1]\}$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$,

$$\text{则曲线积分 } \int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, \alpha)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 形成的向量空间的维数是 2, 则

$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 设随机变量 X 概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!} (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $E X^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(15 - 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演

算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x e^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(1)比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小,说明理由.

(2)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 的切平面与 xOy 面垂直, 求 P 点的轨迹 C , 并计

算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a .

(2) 求方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 \mathbf{Q} 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1) 求 \mathbf{A} .

(2) 证明 $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 为正定矩阵, 其中 \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X + Y)$ 的概率密度为 $f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$, 求常数及 A 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta \in (0, 1)$ 未知, 以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$), 试求常

数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

1、曲线 $y = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ()

- A (1, 0) B (2, 0) C (3, 0) D (4, 0)

2、设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 ()

- A $(-1, 1]$ B $[-1, 1)$ C $[0, 2)$ D $(0, 2]$

3、设函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$ 。则函数 $z = \ln f(x)f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ()

- A $f(0) > 1$ $f''(0) > 0$ B $f(0) > 1$ $f''(0) < 0$
C $f(0) < 1$ $f''(0) > 0$ D $f(0) < 1$ $f''(0) < 0$

4、设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是 ()

- A $I < J < K$ B $I < K < J$ C $J < I < K$ D $K < J < I$

5、设 A 为 3 阶矩阵, 把 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第 3 行得到单位阵 E , 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } A = ()$$

- A $P_1 P_2$ B $P_1^{-1} P_2$ C $P_2 P_1$ D $P_2^{-1} P_1$

6、设 $A = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵。若 $(1,0,1,0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^* x = 0$ 的基础解系可为 ()

- A $\alpha_1 \alpha_3$ B $\alpha_1 \alpha_2$ C $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ D $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$

7、设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数, 且连续函数 $f_1(x), f_2(x)$ 为相应的概率密度, 则必为概率密度的是 ()

- A $f_1(x)f_2(x)$ B $2f_2(x)F_1(x)$ C $f_1(x)F_2(x)$ D $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

8、设随机变量 X, Y 相互独立, 且 EX, EY 都存在, 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $EU \cdot V =$ ()

A $EU \cdot EV$ B $EX \cdot EY$ C $EU \cdot EY$ D $EX \cdot EV$

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定的位置上。

9、曲线 $y = \int_0^x \tan t \, dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长为_____

10、微分方程 $y' + y = e^x \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为_____

11、设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____

12、设 L 是柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积

分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____

13、若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$, 经正交变换化为 $y_1^2 + y_2^2 = 4$, 则 $a =$ _____

14、设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2, 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

15、(本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$

16、(本题满分 9 分)

设函数 $z = f(x, y, g(x))$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$

17、(本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x = 0$ 的不同实根的个数, 其中 k 为参数。

18、(本题满分 10 分)

①证明：对任意的正整数 n ，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立；

②设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \dots$)，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19、(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续的偏导数，且 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$ ，其中

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 计算二重积分 $\iint_D xy f_{xy}''(x, y) dx dy$

20、(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示；

(1) 求 a 的值；

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示；

21、(本题满分 11 分)

A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

求 (1) A 的特征值与特征向量 (2) 矩阵 A

22、(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$

求 (1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) $Z = XY$ 的概率分布

(3) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}

23、(本题满分 11 分)

设 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知， $\sigma^2 > 0$ 未知. \bar{x}, s^2 为样本均值和样本方差.

求 (1) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

(2) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、选择题：第 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $y(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $y'(0) =$ ()

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^nn!$

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 ()

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$) 则有 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ ，其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意

常数，则下列向量组线性相关的为 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$ ()

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长为 1m 的木棒随机的截成两段, 则两段长度的相关系数为 ()

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e$, 则 $f(x) =$ _____

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx =$ _____

(11) $\text{grad}(xy + \frac{z}{y})|_{(2,1,1)} =$ _____

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 ds =$ _____

(13) 设 α 为三维单位向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, P(AB|\bar{C}) =$ _____

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将答案写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(15) (本题满分 10 分)

证明 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$, $(-1 < x < 1)$

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases}$, $(0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且

$f(0) = 0, f'(t) > 0$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的

区域的面积。

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段, 计算曲线积分

$$J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 计算行列式 A .

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A)x$ 的秩为 2

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求利用正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 X 、 Y 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$

(II) 求 $Cov(X - Y, Y)$

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其

中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$ 。设 $Z = X - Y$

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$

(II) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma^2}$

(III) 证明 $\overline{\sigma^2}$ 为 σ^2 的无偏估计量