练习4.1 (P209)

18. 设P(n)是命题：$n! < n^n$，其中n是大于1的整数。

a) 命题P(2)是什么？

答：P(2)为：$2! < 2^2$

b) 证明P(2)为真，完成基础步骤的证明。

证明：基础步骤：P(2)为：$2! < 2^2$，这是真的，因为$2<4$是真的。

c) 归纳假设是什么？

答：假设对整数k（$k>1$），有$k! < k^k$成立。

d) 在归纳步骤中你需要证明什么？

答：证明在已知n=k时P(k)成立的前提下，P(k+1)也成立。

e) 完成归纳步骤。

证明：归纳步骤：已知n=k时，P(k)成立，即$k! < k^k$

当n=k+1时，$(k+1)! = k!\cdot(k+1)$

$< k^k\cdot(k+1) < (k+1)^k\cdot(k+1) = (k+1)^{(k+1)}$

∴即当n=k+1时 有$(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}$，P(k+1)也成立；

f) 解释为什么只要n是一个大于1的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

答：因为上述步骤合起来用的是数学归纳法，而数学归纳法是符合正整数集合的良序性公理的，所以数学归纳法是有效的。

$< k^k\cdot(k+1) < (k+1)^k\cdot(k+1) = (k+1)^{(k+1)}$

∴即当n=k+1时 有$(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}$，P(k+1)也成立；

f) 解释为什么只要n是一个大于1的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

答：因为上述步骤合起来用的是数学归纳法，而数学归纳法是符合正整数集合的良序性公

的，所以数学归纳法是有效的。

20. 证明：如果n是一个大于6的整数，则$3^n < n!$

证明：设P(n)是命题：若n是大于6的整数，则$3^n < n!$

基础步骤：P(7)的时候（7是大于6的第一个整数），$3^7 = 2187 < 7! = 5040$，

所以P(7)为真。

归纳步骤：假设P(k)为真（$k>7$），则$3^k < k!$为真。

当n=k+1时，$3^{k+1} = 3\cdot 3^k < 3\cdot k!$ $(3^k < k!)$

$< k!\cdot(k+1)$ $(k>7)$

$= (k+1)!$

∴当P(k)为真时，P(k+1)也为真。

∴综上，由数学归纳法得，命题P(n)为真！证毕！

63. 证明：如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合，其中 $n \geq 2$，且对所有满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的整数对 $i$ 和 $j$，要么 $A_i$ 是 $A_j$ 的子集，要么 $A_j$ 是 $A_i$ 的子集，则必存在一个整数 $i$，$1 \leq i \leq n$，使得对所有的整数 $j$，$1 \leq j \leq n$，都有 $A_i$ 是 $A_j$ 的子集。

证明：设 $P(n)$ 是命题如上。

基础步骤：$P(2)$ 时，只有两个集合 $A_1$ 和 $A_2$，不是 $A_1$ 是 $A_2$ 的子集就是 $A_2$ 是 $A_1$ 的子集。

若 $A_1$ 是 $A_2$ 的子集，取 $i=1$ 时，$P(2)$ 为真。

若 $A_2$ 是 $A_1$ 的子集，取 $i=2$ 时，$P(2)$ 为真。

归纳步骤：假设 $P(k)$ 为真，则存在整数 $i_0$ $(1 \leq i_0 \leq k)$，使得 $A_{i_0}$ 是所有 $A_j$ $(1 \leq j \leq k)$ 的子集。

当 $n = k+1$ 时，共有 $A_1 \sim A_{k+1}$ 这些集合，其中在 $A_1 \sim A_k$ 中，$A_{i_0}$ 是所有 $A_j$ $(1 \leq j \leq k)$ 的子集，且有 $i < k+1$。

① 若 $A_{i_0}$ 是 $A_{k+1}$ 的子集，则 $A_{i_0}$ 是 $A_j$ $(1 \leq j \leq k+1)$ 的子集，满足题意 $(i = i_0)$，$P(k+1)$ 为真。

② 若 $A_{k+1}$ 是 $A_{i_0}$ 的子集。由 $A_{k+1} \subseteq A_{i_0}$，$A_{i_0} \subseteq A_j$ $(1 \leq j \leq k)$

所以 $A_{k+1} \subseteq A_j$ $(1 \leq j \leq k)$，即 $A_{k+1} \subseteq A_j$ $(1 \leq j \leq k+1)$

此时 $A_{k+1}$ 是所有集合的子集，$i = k+1$。即 $P(k+1)$ 为真。

∴综上，由数学归纳法可得，$P(n)$ 命题为真！ 证毕！

所以，一定是 $i < b$。

同理，若 $a \geq j$，也会推出存在两集合不相交的矛盾。故必有 $a < j$。

∴由 $A(a, b)$，$I_{k+1} = (i, j)$ 且 $i < b$，$a < j$，则必有 $A \cap I_{k+1} \neq \phi$

∴综上所述，由数学归纳法可得 命题 $P(n)$ 成立！ 证毕！

练习 4.2 (P220)

7. 只用 2 美元和 5 美元的邮票可以构成多少数量的钱？用强归纳法证明你的回答。

答：可以构成除了 1 美元和 3 美元外任意数目的钱。

证明：首先，很显然 2 美元和 5 美元不能付 1 和 3 美元。

令命题 $P(n)$ 为：2 美元和 5 美元可以构成任意 $n$ 美元 ($n \neq 1, 3$，且 $n$ 为正整数)

基础步骤：$P(2)$ 只需要一枚 2 元邮票，故 $P(2)$ 为真。

$P(4)$ 只需要两枚 2 元邮票，故 $P(4)$ 为真。

$P(5)$ 只需要一枚 5 元邮票，故 $P(5)$ 为真。

归纳步骤：假设对所有 $j \leq k$ 的正整数来说，$P(j)$ 为真。此时 $k \geq 4$。

则 $P(k+1)$ 的情况为：

① 若 $(k+1)$ 为奇数，则可以由命题 $P(k-1)$ 的方式加一枚 2 元邮票即可，$P(k+1)$ 为真。

② 若 $(k+1)$ 为偶数，则可以由命题 $P(k-1)$ 的方式加一枚 2 元邮票即可，$P(k+1)$ 为真。

∴综上所述，由强归纳法得，命题 $P(n)$ 成立！ 证毕！

……故P(3)为真。

归纳步骤：假设对所有 $j\le k$ 的正整数来说，$P(j)$ 为真。此时 $k\ge4$。

则 $P(k+1)$ 的情况为：

① 若 $(k+1)$ 为奇数，则可以由命题 $P(k-1)$ 的方式加一枚2元邮票即可，$P(k+1)$ 为真。

② 若 $(k+1)$ 为偶数，则可以由命题 $P(k-1)$ 的方式加一枚2元邮票即可，$P(k+1)$ 为真。

∴综上所述，由强归纳法得，命题 $P(n)$ 成立！ 证毕！

12. 用强归纳法证明：任意正整数n都可以写成2的不同幂次之和，即可以写成整数的一个子集 $2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=4$ 等的和。

证明：令 $P(n)$ 为命题：正整数n都可以写成2的不同幂次之和。

基础步骤：$P(1)$ 为 $1=2^0$，则 $P(1)$ 为真。

归纳步骤：假设对所有的 $j\le k$ 的正整数来说，$P(j)$ 为真。

则考虑 $P(k+1)$ 的情况：

① 若 $(k+1)$ 为奇数，因为 $P(k)$ 为真，且 $k+1=k+2^0$，所以 $P(k+1)$ 成立！

② 若 $(k+1)$ 为偶数，因为 $\frac{k+1}{2}$ 也为~~偶数~~正整数，且 $1\le\frac{k+1}{2}<k$，故 $k+1=\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}$。且 $P(\frac{k+1}{2})$ 为真，故 $P(k+1)$ 为真。

∴综上所述，由强归纳法可得，命题 $P(n)$ 为真。 证毕！

40. 找出下列"证明"的错误：命题当a是非零实数时，对所有非负整数n来说，有 $a^n=1$。

基础步骤：根据 $a^0$ 的定义，$a^0=1$ 为真。

归纳步骤：假定对满足 $j\le k$ 的所有非负整数j来说，$a^j=1$。注意 $\boxed{a^{k+1}=\frac{a^k\cdot a^k}{a^{k-1}}=\frac{1\cdot1}{1}=1}$

答：命题 $P(n)$ 是针对所有非负整数n，基础步骤中 $a^0=1$ 确实没错，但 $a^1$，$a^2$ 不一定等于1。因此归纳步骤的假设本身就是错误的。

错误在于该式在k=0时并不成立，因为此时分母是 $a^{-1}$！

良序性可以用来证明：两个正整数有唯一的最大公因子。设a和b都是正整数，设S是形如 $as+bt$ 的正整数集合，其中s和t都是整数。

~~正整数如何问题~~

~~…~~

~~正整数~~

a) 证明：S非空。

证明：∵取 $s=t=1$，则 $(a+b)\in S$

∴ $S\ne\varnothing$。 证毕！

b) 用良序性证明：S有最小元c。

证明：∵ S为一个非空的正整数集合，非空性由a)所证明

b) 用良序性证明：$S$有最小元$c$。

证明：∵ $S$为一个非空的正整数集合，非空性由a)题证明。

∴ 由良序性公理可得：集合$S$有最小元，令最小元为$c$，则命题成立。

证毕！

c) 证明：若$d$是$a$和$b$的公因子，则$d$是$c$的因子。

证明：∵ 由题意 $d \mid a$ 且 $d \mid b$，不妨设 $a=dm_1$，$b=dm_2$（$m_1$，$m_2$均为整数

又∵ $c$是$S$中的元素，则可写成 $c=as+bt$ ∴ $(dm_1)s+(dm_2)t=d(m_1s+m_2$

∴ $d \mid c$，即$d$是$c$的因子。

∴ 命题得证！

d) 证明：$c \mid a$ 和 $c \mid b$。

证明：∵ 假设 $c \nmid a$，则必有 $a=qc+r$，其中 $0<r<c$。

又∵ $c$为$S$中最小元，令 $c=as_1+bt_1$

∴ $a=q(as_1+bt_1)+r \Rightarrow r=a\cdot(1-qs_1)+b\cdot(-qt_1)$

又∵ $r$满足 $as+qt$ 形式，故 $r\in S$（$0<r<c$）

∴ $r$才是$S$中的最小元，这与已知矛盾！

∴ 综上可知：$c \nmid a$ 不成立，即 $c \mid a$。同理可证 $c \mid b$。

证毕！

e) 从(c)和(d)得出：$a$和$b$的最大公因子存在。通过证明两个正整数的最大公因子是唯一的来证明。

证明：∵ 若$d$是$a$、$b$公因子，则$d$是$c$的因子，且 $c \mid a$，$c \mid b$

∴ $a$、$b$的最大公因子是$c$。

又∵ 假设最大公因子不唯一，不妨设$m$是$a$、$b$的最大公因子，则 $c \mid m$。

而$m$是$a$、$b$的公因子，则$m$是$c$的因子，即 $m \mid c$

∴ 由 $c \mid m$ 和 $m \mid c$ 得：$m=c$，即最大公因子唯一。

∴ 命题得证！

练习4.3 (P235)

24、给出下述集合的递归定义：

a) 正奇数集合。

基础步骤：令正奇数集合为A。$1\in A$。

归纳步骤：对任意的$x\in N$，若$x\in A$，则有$(x+2)\in A$。

b) 3的正整数次幂的集合。

基础步骤：令3的正整数次幂的集合为S，$3\in S$。

归纳步骤：若$x\in S$且$y\in S$，则$xy\in S$。（x，y为正整数） 也可写为 若$3^n\in S$，$n\in N^+$ 则$3^{n+1}\in S$

c) 整系数多项式的集合。

基础步骤：令整系数多项式集合为S。$x\in S$。

归纳步骤：若整系数多项式P和Q，$P\in S$且$Q\in S$，则$P+Q$，$P-Q$，$P\times Q$都属于集合S。

基础步骤：令整系数多项式集合为S。$a\in S$，a为任整数

归纳步骤，对于$\forall p(x)\in S$，$xp(x)+b\in S$，b为任整数

32、a) 给出计算位串s中1的个数的函数$ones(s)$的递归定义。

基础步骤：$ones(0)=0$，$ones(1)=1$，$ones(\epsilon)=0$

归纳步骤：对于任意位串st，st表示位串s和t的拼接。若w是一个位串，如果$x\in\{0,1\}$，则$ones(wx)=ones(w)+ons(x)$。

b) 用结构归纳法证明$ones(st)=ones(s)+ones(t)$。

证明： 基础步骤：$ones(0)=ones(0\cdot\epsilon)=ones(0)+ones(\epsilon)=0+0=0$

$ones(1)=ones(1\cdot\epsilon)=ones(1)+ones(\epsilon)=1+0=1$ 均成立；

归纳步骤：对于位串s和t，且当$x\in\{0,1\}$时，要证明若有$P(t)$成立，则$P(tx)$也成立。

设命题$P(t)$为：对于任意的位串s和t，$ones(st)=ones(s)+ones(t)$；

根据递归定义：$ones(stx)=ones(st)+ones(x)$ 和 $ones(tx)=ones(t)+ones(x)$

根据归纳假设：$ones(st)=ones(s)+ones(t)$，则

$ones(stx)=ones(s)+ones(t)+ones(x)=ones(s)+ones(tx)$ 成立。

∴ 证得$P(t)$成立则$P(tx)$也成立。

∴ 综上，命题得证。

52. 求出 $A(3,4)$

解. $A(2,2)=A(1,A(2,1))=A(1,2)=A(0,A(1,1))=A(0,2)=2\times2=4=2^2$

$A(2,3)=A(1,A(2,2))=A(1,2^2)=2^{2^2}$

$\vdots$

$A(2,2^{16})=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{2^{16}个2}$

$A(2,3)=A(1,A(2,2))=A(1,4)=2^4=16$

$A(2,4)=A(1,A(2,3))=A(1,16)=2^{16}$

$A(3,2)=A(2,A(3,1))=A(2,2)=4$

$A(3,3)=A(2,A(3,2))=A(2,4)=2^{16}$

$\therefore A(3,4)=A(2,A(3,3))=A(2,2^{16})=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{2^{16}个2}$

练习2.1 (P88)

22. 判断下列各集合是否为某集合的幂集合.

a) $\Phi$

答: 不是某集合的幂集合.

b) $\{\Phi, \{a\}\}$

答: 是 $\{a\}$ 的幂集合.

c) $\{\Phi, \{a\}, \{\Phi, a\}\}$

答: 不是某集合的幂集合.

d) $\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

答: 是 $\{a,b\}$ 的幂集合.

若 $A=B$, $A\times B=B\times A$ 显然。故要证的是

若 $A\neq B$, 必有 $A\times B\neq B\times A$。

若 $A\neq B$, ~~则~~必存在元素 $(x\notin A)\wedge(x\in B)$ 或者 $(x\notin B)\wedge(x\in A)$

对于 $(x\notin A)\wedge(x\in B)$, 显然 $(x,A)\in B\times A$, $(x,A)\notin A\times$

对于 $(x\notin B)\wedge(x\in A)$, 显然 $(x,B)\in A\times B$, $(x,B)\notin B\times$

30. 证明: 除非 $A=B$, 否则 $A\times B\neq B\times A$, 其中 $A$, $B$ 均为非空集合.

证明: ∵不妨设非空集合 $A$ 有 $m$ 个元素, $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$; 设非空集合 $B$ 有 $n$ 个元素, $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$.

又∵ $A\times B=\{(a_1,b_1),\cdots,(a_1,b_n),(a_2,b_1),\cdots(a_2,b_n)\cdots\}$

$B\times A=\{(b_1,a_1),\cdots,(b_1,a_m),(b_2,a_1),\cdots(b_2,a_m)\cdots\}=\{(b_1,a_1)\cdots(b_n,a_1),(b_1,a_2),\cdots(b_n,a_2)\cdots\}$

∴ 对 $\forall i\in[1,m]$, $\forall j\in[1,n]$, $A\times B=\{(a_i,b_j)\}$, $B\times A=\{(b_j,a_i)\}$

这一步也证明？

又∵ 由有序偶相等定义知，$A\times B=B\times A$ 当且仅当 $(a_i,b_j)=(b_j,a_i)$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

∴ $a_i=b_j$，即 $\forall i\in[1,m]$，$a_i\in B$ 且 $\forall j\in[1,n]$，$b_j\in A$

∴ $A\times B=B\times A$ 当且仅当 $A=B$，该命题为真。

则它的逆反命题"除非 $A=B$，否则 $A\times B\neq B\times A$"也为真。

∴命题得证！

33. 将下列量化表达式翻译成汉语句子并确定其真值。

a) $\forall x\in R(x^2\neq -1)$

答：可以表达为"任意实数的平方值不等于 $-1$"。

这句话为真。

b) $\exists x\in Z(x^2=2)$

答：可以表达为"存在一个整数的平方等于2"。

这句话为假，真值集合为 $\Phi$。

c) $\forall x\in Z(x^2>0)$

答：可以表达为"任意整数的平方大于0"。

这句话为假。

d) $\exists x\in R(x^2=x)$

答：可以表达为"存在实数x其平方的值等于其自身"。

这句话为真，真值集合为 $\{0,1\}$。

37. 证明：如果有序偶 $(a,b)$ 可以用集合术语定义为 $\{\{a\},\{a,b\}\}$，那么 $(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$。

证明：∵要证明 $(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $(a=c)\wedge(b=d)$，就要证明 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ 当且仅当 $(a=c)\wedge(b=d)$。

1° 若 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ 成立，则 $\{c\}\in\{\{a\},\{a,b\}\}$ 且 $\{c,d\}\in\{\{a\},\{a,b\}\}$

∵ $\{c\}$ 是只有1个元素的集合，则 $\{c\}=\{a\}$

∴ $c=a$。

又∵ $\{c,d\}$ 是含有2个元素的集合，则 $(\{c,d\}=\{a,b\})$

∴ $d\in\{a,b\}$，且 $c\neq d$ $\Rightarrow$ $d\in\{a,b\}$，且 $d\neq a$ $(a=c)$ $\Rightarrow$ $b=d$

∴ 若 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$，则 $(a=c)\wedge(b=d)$。

$2^\circ$ 若 $(a=c)\wedge(b=d)$ 成立，

则 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ 显然成立！

∴ $\{\{a,b\},\{a\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ 当且仅当 $(a=b)$ 且 $(c=d)$ 成立。

又∵ 有序偶 $(a,b)$ 可以定义为 $\{\{a\},\{a,b\}\}$，

∴ $(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 为真。

∴ 综上，命题得证！

练习 2.2 (P96)

18. 令 A.B.C 为集合。证明：

a) $(A\cup B)\subseteq(A\cup B\cup C)$

证明：∵ 对 $\forall x$，$x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$

∴ 对 $\forall x$，有 $x\in(A\cup C)$ 或 $x\in(B\cup C)$，即 $x\in(A\cup C)\cup(B\cup C)$

又∵ 由结合律知：$\forall x$，$x\in A\cup B\cup(C\cup C)$，即 $x\in(A\cup B\cup C)$

∴ $(A\cup B)\subseteq(A\cup B\cup C)$。证毕！

b) $(A\cap B\cap C)\subseteq(A\cap B)$

证明：∵ 对 $\forall x$，$x\in A\cap B\cap C$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$。

∴ 由 $x\in A$ 且 $x\in B$ 得，对 $\forall x$ 有 $x\in(A\cap B)$ 成立。

∴ $A\cap B\cap C\subseteq(A\cap B)$。证毕！

c) $(A-B)-C\subseteq A-C$

证明：∵ 对 $\forall x$，$x\in(A-B)-C$，则 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$

∴ 由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得，对 $\forall x$ 有 $x\in(A-C)$ 成立。

∴ $(A-B)-C\subseteq A-C$。证毕！

d) $(A-C)\cap(C-B)=\phi$

证明：∵ 对 $\forall x$，$x\in(A-C)\cap(C-B)$，则 $x\in(A-C)$ 且 $x\in(C-B)$

∴ 由 $x\in(A-C)$ 得：$x\in A$ 且 $x\notin C$。

由 $x\in(C-B)$ 得：$x\in C$ 且 $x\notin B$。

原式为 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 且 $x\in C$ 且 $x\notin B$。

又∵ 由 $x\notin C$ 且 $x\in C$ 可知，不存在这样的 $x$。

∴ $(A-C)\cap(C-B)=\phi$。证毕！

e) $(B-A)\cup(C-A)=(B\cup C)-A$

证明：∵对 $\forall x$，$x\in(B-A)\cup(C-A)$，即 $x\in(B-A)$ 或 $x\in(C-A)$

又：由 $x\in(B-A)$ 知：$x\in B$ 且 $x\notin A$；由 $x\in(C-A)$ 知：$x\in C$ 且 $x\notin A$.

∴对 $\forall x$，有 $((x\in B)\wedge\neg(x\in A))\vee((x\in C)\wedge\neg(x\in A))=((x\in B)\vee(x\in C))\wedge\neg(x\in A)$

$=(x\in(B\vee C))\wedge\neg(x\in A)$

∴即对 $\forall x$，有 $x\in(B\cup C)-A$ 成立. ← 到这一步仅仅证明了 $(B-A)\cup(C-A)\subseteq(B\cup C)-A$，还需证明反向也成立，只需将上述证明过程反方向再表述一遍即可

∴$(B-A)\cup(C-A)=(B\cup C)-A$. 证毕！

40. 判断对称差是否满足结合律. 即若 A.B.C 为集合，$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ 是否成立？

答：$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ 成立.

证明：∵ $A\oplus(B\oplus C)=A\oplus[(\neg B\wedge C)\vee(B\wedge\neg C)]$

$=\{\neg A\wedge[(\neg B\wedge C)\vee(B\wedge\neg C)]\}\vee\{A\wedge[(B\vee C)\wedge(\neg B\vee C)]\}$

$=(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$

$(A\oplus B)\oplus C=[(\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)]\oplus C$

$=\{[(A\vee\neg B)\wedge(\neg A\vee B)]\wedge C\}\vee\{[(\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)]\wedge\neg C\}$

$=(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$

∴ $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$. 证毕！

48. 试求 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$. 如果对于任一正整数 $i$.

a) $A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\}$

答：$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{1,2,3,\cdots\}$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\phi$

b) $A_i=\{0,i\}$

答：$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=N$. $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\}$

c) $A_i=(0,i)$，即满足 $0<x<i$ 的实数 $x$ 的集合.

答：$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=R^+$. $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1)$.

d) $A_i=(i,\infty)$，即满足 $x>i$ 的实数 $x$ 的集合。

答：$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(1,\infty)$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\phi$.

57. 集合A的后继是$A\cup\{A\}$。求下列集合的后继。

a) $\{1,2,3\}$

答：$\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$。

b) $\phi$

答：$\{\phi\}$。

c) $\{\phi\}$

答：$\{\phi,\{\phi\}\}$。

d) $\{\phi,\{\phi\}\}$

答：$\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$