2001 年全国硕士研究生入学统一考试

理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

(1)设 $y=e^{x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的同解，则该方程为______.

【答】 $y''-2y'+2y=0$.

【详解】 方法一 看出所给解对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，从而特征方程为 $\left(\lambda-(1+i)\right)$，$\left(\lambda-(1-i)\right)=\lambda^2-2\lambda+2=0$, 于是所求方程为 $y''-2y'+2y=0$.

方法二 将已知解代入 $y''+by'+cy=0$，得

$e^{x}\sin x\cdot\left(b\left(c_1-c_2\right)+cc_1-2c_2\right)+e^{x}\cos x\cdot\left(b\left(c_1+c_2\right)+cc_2+2c_1\right)$. 由于 $e^{x}\sin x$ 与 $e^{x}\cos x$ 线性无关，故 $b\left(c_1-c_2\right)+cc_1=2c_2, b\left(c_1+c_2\right)+cc_2=-2c_1$，解得 $b=-2,c=2$

显然解法 2 较解法 1 麻烦.

方法三、由通解 $y=e^{x}\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$，求得

$$y'=e^{x}\left(\left(c_1-c_2\right)\sin x+\left(c_1+c_2\right)\cos x\right)$$
$$y''=e^{x}\left(-2c_2\sin x+2c_1\cos x\right)$$

从这三个式子消去 c_1 与 c_2，得 $y''-2y'+2y=0$

（2）设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $div\left(gradr\right)\big|_{(1,-2,2)}=$_____.

【答】 $\frac{2}{3}$.

【详解】 根据定义有

$$gradr=\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k=\frac{x}{r}i+\frac{y}{r}j+\frac{z}{r}k$$

$$div\left(gradr\right)=\frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

于是 $\quad div\left(gradr\right)\Big|_{(1,-2,2)}=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$

(3)交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f\left(x,y\right)dx=$______.

【答】 $\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{1-x}f\left(x,y\right)dy$.

【详解】 因为

$$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f\left(x,y\right)dx=-\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f\left(x,y\right)dx,$$

积分区域为 $\quad D=\left\{\left(x,y\right)|-1\le y\le 0,1-y\le x\le 2\right\}$,

又可将D改写为

$$D=\left\{\left(x,y\right)|1\le x\le 2,1-x\le y\le 2\right\},$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f\left(x,y\right)dx&=-\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f\left(x,y\right)dx=-\int_{1}^{2}dx\int_{-x}^{0}f\left(x,y\right)dy\\&=\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{1-x}f\left(x,y\right)dy\end{aligned}$$

(4)设矩阵A满足$A^2+A-4E=O$,其中E为单位矩阵，则$\left(A-E\right)^{-1}=$_____.

【答】 $\dfrac{1}{2}\left(A+2E\right)$.

【答】 由题设，$A^2+A-4E=O$，

有 $\quad A^2+A-2E=2E$，

$$\left(A-E\right)\left(A+2E\right)=2E,$$

也即 $\quad \left(A-E\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(A+2E\right)=E,$

故 $\quad \left(A-E\right)^{-1}=\dfrac{1}{2}\left(A+2E\right)$

(5) 设随机变量X的方差为2，则根据切比雪夫不等式有估计$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\ge 2\right\}\le$_____.

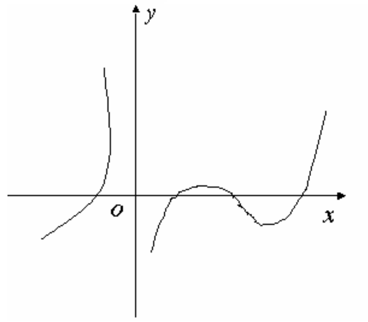
【答】 $\dfrac{1}{2}$.

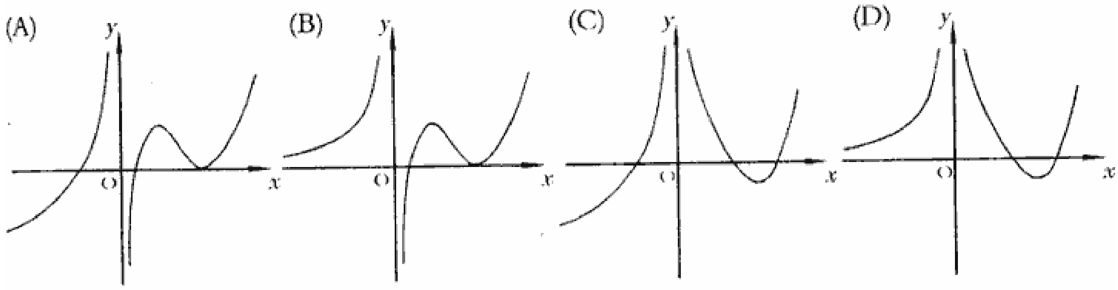
【详解】 根据切比雪夫不等式有

$$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\ge 2\right\}\le\frac{D\left(X\right)}{2^2}=\frac{1}{2}$$

二、选择题

（1）设函数 $f\left(x\right)$ 在定义域内可导，$y=f\left(x\right)$ 的图形如右图所示，则导函数 $y=f^{'}\left(x\right)$ 的图形为





【 】

【答】应选（D）

【详解】 从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f\left(x\right)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f^{'}\left(x\right)>0$ 对应 $y=f^{'}\left(x\right)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除（A），（C）；

又 $y=f\left(x\right)$ 的图形在 y 轴右侧有三个零点，因此由罗尔中值定理知，其导函数 $y=f^{'}\left(x\right)$ 图形在 y 轴一定有两个零点，进一步可排除（B）.

故正确答案为（D）.

（2）设函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 附近有定义，且 $f^{'}_{x}\left(0,0\right)=3, f^{'}_{y}\left(0,0\right)=1$，则

（A） $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy.$

（B）曲面 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$ 的法向量为 $\left\{3,1,1\right\}$

（C）曲线 $\begin{cases} z=f\left(x,y\right) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$ 的切向量为 $\left\{1,0,3\right\}$

（D）曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 题设只知道一点的偏导数存在，但不一定可微，因此可立即排除（A）；

至于（B），（C）,(D)则需要通过具体的计算才能进行区分，

令$F(x,y,z) = z - f(x,y)$，则有

$F'_x = -f'_x, F'_y = -f'_y, F'_z = 1$

因此过点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\pm\{-3,-1,1\}$，可排除（B）；

曲线点$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$可表示为参数形式：$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = f(x,0) \end{cases}$，其中点$(0,0,f(0,0))$的切向量为

$\pm\{1,0,f'_x(0,0)\} = \pm\{1,0,3\}$

故正确选项为（C）.

（3）设$f(0)=0$，则$f(x)$在点$x=0$可导的充要条件为

（A）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在.

（B）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

（C）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$存在.

（D）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2\mathrm{h})-f(h)\right]$存在

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】 因为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\underline{\underline{1-e^h=x}}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1-x)}$$

可见，若$f(x)$在点$x=0$可导，则极限$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$一定存在；反过来，若$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\underline{\underline{x=1-e^h}}\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}\cdot\frac{h}{1-e^h} = -\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}$$

存在，即$f(x)$在点$x=0$可导，因此正确选项为（B）.

至于（A），（C）,(D)均为必要而非充分条件，可举反例说明不成立.比如，$f(x)=|x|$,在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)=\lim_{h\to 0}\frac{|1-\cosh|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cosh}{h^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)=\lim_{h\to 0}\frac{|h-\sinh|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left|\frac{1-\sinh}{h^3}\right|\cdot|h|=0$$

均存在，可排除（A)、(C）.

又如 $f(x)=\begin{cases}1,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2\mathrm{h})-f(h)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

存在，进一步可排除（D）.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B

（A）合同且相似　　（B）合同但不相似

（C）不合同但相似　　（D）不合同且不相似

【 】

【答】 应选(A)

【详解】 因为

A 是实对称矩阵，且其特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, 故存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见，则 A 与 B 既合同又相似.

(5)将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

（A）-1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

【 】

【答】 应选（A）

【详解】 设 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则有 $Y=n-X$，因此 X 和 Y 的相关系数为 $r=-1$

三、求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

【详解】

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx &= \frac{1}{2}\int \arctan e^x d\left(e^{-2x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int \frac{de^x}{e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x\right)+C
\end{aligned}
$$

四、设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处可微，且

$$f\left(1,1\right)=1, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3, \varphi\left(x\right)=f\left(x, f\left(x,x\right)\right).$$

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3\left(x\right)\Big|_{x=1}$

【详解】 由题设，有 $\varphi\left(1\right)=f\left(1, f\left(1,1\right)\right)=f\left(1,1\right)=1,$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\varphi^3\left(x\right)\Big|_{x=1} &= \left[3\varphi^2\left(x\right)\frac{d\varphi\left(x\right)}{dx}\right]\Big|_{x=1} \\
&= 3\varphi^2\left(x\right)\left[f'_x\left(x, f\left(x,x\right)\right)+f'_y\left(x, f\left(x,x\right)\right)\left(f'_x\left(x,x\right)+f'_y\left(x,x\right)\right)\right]\Big|_{x=1} \\
&= 3\cdot 1\cdot\left[2+3\left(2+3\right)\right]=51
\end{aligned}
$$

五、设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，试将 $f\left(x\right)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{1-4n^2}$ 的和.

【详解】 因 $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}, x\in\left(-1,1\right)$

故 $\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1]$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n},x\in[-1,1]\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

六、计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

【详解 1】记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影.由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-6y)dxdy\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS\\&=-2\iint_D(x-y+6)dxdy\\&=-12\iint_D dxdy\\&=-24.\end{aligned}$$

【详解 2】转换投影法.用斯托克斯公式，取平面 $x+y+z=2$ 被 L 所围成的部分为 S，按斯托克斯公式的规定，它的方向向上，S 在 xOy 平面上的投影域记为 $D,D=\{(x,y)\mid|x|+|y|\le1\}$. S 为 $z=2-x-y,\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$ 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L \left(y^2 - z^2\right)dx + \left(2z^2 - x^2\right)dy + \left(3x^2 - y^2\right)dz \\
&= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 6y)dxdy \\
&= \iint_S \{-2y - 4z, -2z - 6x, -2x - 2y\} \cdot \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\} dxdy \\
&= -2\iint_S (4x + 2y + 3z)dxdy = -2\iint_D (x - y + 6)dxdy \\
&= -12\iint_D dxdy = -24
\end{aligned}
$$

其中 $\iint_D (x - y)dxdy = \iint_D xdxdy = -\iint_D ydxdy = 0 - 0 = 0$，用得性质：$x$ 为 x 得奇函数，D 对称于 y 轴；y 为 y 的奇函数，D 对称于 x 轴；积分均应为零.

【详解 3】

降维法，取 S 如解法 1 中定义，代入 I 中，

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{L_1} \left(y^2 - (2 - x - y)^2\right)dx + \left(2\left((2 - x - y)^2 - x^2\right)\right)dy + \left(3x^2 - y^2\right)(-dx - dy) \\
&= \oint_{L_1} \left(y^2 - 4x^2 - 4xy + 4x + 4y - 4\right)dx + \left(3y^2 - 2x^2 + 8xy - 8x - 8y + 8\right)dy \\
&\underline{\underline{\text{格林公式}}} -2\iint_D (x - y + 6)dxdy = -24
\end{aligned}
$$

其中，L_1 为 L 在 xOy 平面上投影，逆时针.

【详解 4】

逐个投影法，由斯托克斯公式

$I_1 = \iint_S (-2y - 4z)dydz - 2\iint_D (y + 2z)dydz,$

其中 $D_{yz} = \left\{(y, z) \mid |2 - y - z| + |y| \le 1\right\}$, 分别令 $y \ge 0, y \le 0, 2 - y - z \ge 0, 2 - y - z \le 0,$ 可得到 D_{yz} 的 4 条边的方程：

右：$2y + z = 3$；上：$z = 3$；左：$2y + z = 1$；下：$z = 1$.

于是 $I_1 = -2\int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (y + 2z)dy = -16$

类似地，$I_2 = -2\iint_S (2 + 3x)dzdx = -8$

$I_3 = -2\iint_S (x + y)dxdy = 0$ （由奇、偶数及对称性）

$I = I_1 + I_2 + I_3 = -24$

【详解 5】

参数法. $L:|x|+|y|=1, z=2-x-y$

当 $x\ge 0$ ， $y\ge 0$ 时， $L_1: y=1-x, z=2-x-y, x$ 从 1 到 0.

$$\int_{L_1}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(2z^2-x^2\right)dy+\left(3x^2-y^2\right)dz$$
$$=\int_1^0\left[\left(1-x\right)^2-1+\left(2-x^2\right)\left(-1\right)\right]$$
$$=\frac{7}{3}.$$

当 $x\le 0, y\ge 0, L_2: y=1+x, z=1-2x, x$ 从 0 到-1

$$\int_{L_2}=\int_0^{-1}\left(2x+4\right)=-3$$

当 $x\le 0, y\le 0, L_3: y=1-x, z=3, x$ 从－1 到 0

$$\int_{L_3}=\int_{-1}^{0}\left(2x^2+2x-26\right)dx=-\frac{79}{3}$$

当 $x\ge 0, y\le 0, L_4: y=x-1, z=3-2x, x$ 从 0 到 1

$$\int_{L_4}=\int_0^1\left(-18x+12\right)dx=3.$$

$$I=\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}=-24$$

七、设 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 内具有二阶连续导数且 $f''\left(x\right)\ne 0$, 试证：

（1）对于 $\left(-1,1\right)$ 内的任意 $x\ne 0$, 存在唯一的 $\theta\left(x\right)\in\left(0,1\right)$，使 $f\left(x\right)=f\left(0\right)+xf'\left[\theta\left(x\right)x\right]$ 成立；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\theta\left(x\right)=\frac{1}{2}.$

【详解 1】

（1） 任给非零 $x\in\left(-1,1\right)$，由拉格朗日中值定理得

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+xf'\left[\theta\left(x\right)x\right]\left(0<\theta\left(x\right)<1\right)$$

因为 $f''\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 内连续且 $f''\left(x\right)\ne 0$, 所以 $f''\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 内不变号，不妨设 $f''\left(x\right)>0$，则 $f''\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 内严格单调且增加，故唯一.

(2) 对于非零 $x \in (-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x](0<\theta(x)<1)$$

于是有

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$$

上式两边取极限，得

$$左端=\lim_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=f''(0)\lim_{x\to 0}\theta(x)$$

$$右端=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

【详解 2】

(1) 同【详解 1】.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\varepsilon \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

所以

$$xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

从而

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=\frac{1}{2}f''(\xi),$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

【详解 3】

(1) 同【详解 1】.

(2) 因 $f''(x)\neq 0$, 故 $f'(x)$ 存在单值连续可导的反函数，记为 $\varphi(x)$, 则有

$$\theta(x)\cdot x=\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right],$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\varphi'\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]\cdot\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$

$$=\varphi'\left[f'(0)\right]\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\varphi'\left[f'(0)\right]f''(0)$$

但因$\varphi\left[f'(x)\right]=x$，两边对$x$求导，有

$\varphi'\left[f'(x)\right]f''(x)=1$，以$x=0$代入，

于是有 $$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

【详解 4】

（1） 同【详解 1】.

（2） 由 $f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x$, 将 $f'(\theta(x)x)$ 再展开，有

$$f'(\theta(x)x)=f'(0)+f''(0)\theta(x)x+o(\theta(x)x)$$

代入上式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o(\theta(x)x)x$$

所以

$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-o(\theta(x)x)x}{f''(0)x}$$

令$x\to 0$取极限，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f'(0)x}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0}=\frac{o(\theta(x)x)x}{x^2}=0.$$

八、设有一高度为 $h(t)$(t为时间) 得雪堆再融化过程中，其侧面积满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米）的雪堆全部融化需多少小时？

【详解】

记V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h(t)^2-h(t)z\right]}dxdy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h(t)^2-h(t)z\right]dz$$

$$=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16\left(x^2+y^2\right)}{h^2(t)}}dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S(t)$,将上述$V(t)$和$S(t)$代入，得$\dfrac{dh(t)}{dt}=-\dfrac{13}{10}$

解得 $$h(t)=-\frac{13}{10}t+C$$

由$h(0)=130$,得

$$h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$$

令$h(t)\to 0$得$t=100$ （小时）.

因此高度为 130 厘米得雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 其中 t_1,t_2 为实常数.试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

【详解】

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为均为 $Ax=0$ 的解.

下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

即 $$\left(t_1k_1+t_2k_s\right)\alpha_1+\left(t_2k_1+t_1k_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(t_2k_{s-1}+t_1k_s\right)\alpha_s=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，因此其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \qquad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix}=t^s{}_1+\left(-1\right)t^s{}_2$$

可见，当 $t^s{}_1+\left(-1\right)t^s{}_2\neq 0$，即当 s 为偶数，$t_1\neq\pm t_2$；当 s 为奇数，$t_1\neq t_2$ 时，上述方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，因此向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，

从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

十、已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x, 使得向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x$$

（1） 记 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$, 求 2 阶矩阵 B, 使 $A=PBP^{-1}$;

（2） 计算行列式 $\left|A+E\right|$.

【详解】

（1）方法一：

因为

$$\begin{aligned}&Ax=Ax\\&A(Ax)=A^2x\\&A(A^2x)=A^3x=3Ax-2A^2x\end{aligned},$$

于是综合上述三式有

$$A(x,Ax,A^2x)=(Ax,A^2x,A^3x)=(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x)$$
$$=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix},$$

即 $AP=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}=PB$

也即 $A=PBP^{-1}$; 其中 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$

方法二：

设 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$, 则由 $AP=PB$ 得

$$(Ax,A^2x,A^3x)=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix},$$

上式可写成

$$Ax=a_1x+b_1Ax+c_1A^2x, \tag{1}$$
$$A^2x=a_2x+b_2Ax+c_2A^2x, \tag{2}$$
$$A^3x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x, \tag{3}$$

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 代入（3）式得

$$3Ax-2A^2x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x \tag{4}$$

由于 x,Ax,A^2x 线性无关，故

由（1）式可得 $a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1;$

由（2）式可得 $a_2 = b_2 = 0, c_1 = 1;$

由（4）式可得 $a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = -2;$

故

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

方法三：

将 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 改写成

$$A\left(A^2x - Ax\right) = -3\left(A^2x - Ax\right)$$

故 $\lambda_1 = -3$ 为 A 的特征值，$A2x - Ax$ 为属于-3 的特征向量；

$\lambda_2 = 1$ 为 A 的特征值，$A2x + 3Ax$ 为属于 1 的特征向量；

$\lambda_3 = 0$ 为 A 的特征值，$A^2x + 2Ax - 3Ax$ 为属于-3 的特征向量；

令

$$Q = \left(x, Ax, A^2x\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} B\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

但另一方面，Q 为特征向量组成的矩阵，所以 $Q^{-1}AQ$ 为由对应的特征值组成的对角矩阵：

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$B=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

（2）由（1）知，A 与 B 相似，故 $A+E$ 与 $B+E$ 也相似，于是有

$$\left|A+E\right|=\left|B+E\right|=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=-4$$

十一、设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda\left(\lambda>0\right)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $P\left(0<P<1\right)$，且途中下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

（1） 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

（2） 二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布.

【详解】

（1） 求在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率，相当于求条件概率

$P\left\{Y=m\mid X=n\right\}$，

而由题设知，此条件概率服从二项分布，

因此有:

$$P\left\{Y=m\mid X=n\right\}=C_n{}^mP^m\left(1-P\right)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

（2） 利用乘法公式，得

$$\begin{aligned}P\left\{X=n\mid Y=m\right\}&=P\left\{Y=m\mid X=n\right\}P\left\{x=n\right\}\\&=C_n{}^mP^m\left(1-P\right)^{n-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n,0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

十二、设总体 X 服从证态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)\left(\sigma>0\right)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}\left(n\ge 2\right)$ 其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$ 的数学期望 $E\left(Y\right)$.

【详解】

记 $\overline{X_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$ 则有 $2\overline{X}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$

因此

$$
\begin{aligned}
E(Y)&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]^2\right\}\\
&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2+2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\right\}\\
&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]+0+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\\
&=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2\\
&=2(n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$