

南京大学计算机科学与技术系 2013—2014 学年

# “离散数学” 第一次课堂测验

（参考答案）



请注意：测试时间 1 小时，请将所有答案写在答题纸上，要写清步骤。

1. （20 分）试定义谓词，符号化下面的命题并推证其结论：

“每个大学生不是文科生就是理科生，有的大学生是优等生，小张不是理科生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。”

参考解答：1、定义谓词： $G(x)$ :  $x$  是大学生， $S(x)$ :  $x$  是理科生， $L(x)$ :  $x$  是文科生， $E(x)$ :  $x$  是优等生。则上述描述可符号化如下子句（ $c$  代表小张）：

$$(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee S(x)), (\exists x)(G(x) \wedge E(x)), \neg S(c) \vdash E(c) \Rightarrow G(c) \rightarrow L(c)$$

2、推理过程如下：

- (1)  $G(c)$  (Premise)
- (2)  $(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee S(x))$  (Premise)
- (3)  $G(c) \rightarrow L(c) \vee S(c)$  (UI from 2)
- (4)  $L(c) \vee S(c)$  (MP from 3)
- (5)  $\neg S(c)$  (Premise)
- (6)  $L(c)$  (DS from 4)
- (7)  $G(c) \rightarrow L(c)$  (from 4,5)

2. （20 分）试证明下式永真： $(p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$ .

参考解答：

方法一：真值表：

$A = (p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$  的真值表

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow \neg q$	$r \rightarrow q$	$r \rightarrow \neg p$	$A$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

方法二：命题逻辑等值演算

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow (\neg p \vee \neg r) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg r \\
 \Leftrightarrow & ((p \wedge q) \vee \neg p) \vee ((\neg q \wedge r) \vee \neg r) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r) \\
 \Leftrightarrow & \neg p \vee (q \vee \neg q) \vee \neg r \\
 \Leftrightarrow & 1
 \end{aligned}$$

方法三：主析取范式法（选修）

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow (\neg p \vee \neg r) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg r \\
 \Leftrightarrow & (m_6 \vee m_7) \vee (m_1 \vee m_5) \vee (m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3) \vee (m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6) \\
 \Leftrightarrow & m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7
 \end{aligned}$$

由于原式的主析取范式含全部8个极小项,为重言式,故推理正确.

3. (20分) 设 $R$ 是集合 $A$ 上任意自反且传递的二元关系, 试证明:  $R \circ R = R$ .

参考证明: 因为 $R$ 是 $A$ 上的传递关系, 故 $R \circ R \subseteq R$ , 只需证 $R \subseteq R \circ R$ 即可:

$$\forall (a, b) \in R \Rightarrow (a, a) \in R \wedge (a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R \circ R$$

证毕. 注意该命题的逆命题并不成立.

4. （30 分）证明：对于所有集合  $A, B, C$ ，有：

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \text{ 当且仅当 } C \subseteq A.$$

参考证明：

必要性： $\forall x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \Rightarrow C \subseteq A$ ；

充分性： $C \subseteq A \Rightarrow A \cup C = A \Rightarrow (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$ .

证毕.

5. （10 分）一逻辑学家误入某部落，被拘于牢狱，部落酋长是一位逻辑爱好者，他对逻辑学家说：“今有两门，一为自由，二为死亡，你可以任意开启一门。今加派两名卫兵负责解答你所提的任何问题。遗憾的是，此两卫兵中一名天性诚实，一名总是说谎。你的生死就看你的智慧了。”逻辑学家沉思片刻，即向一卫兵问了一个问题，得到答案后从容开门而去。该逻辑学家问了一个怎样的问题？请简要分析.

参考解答：

逻辑学家手指某一门问其中一名战士说：“这扇门是死亡之门，另外一名战士将回答‘是’，对吗？”. 当被问战士回答“对”，则逻辑学家开启所指的门离去。

当被问战士回答“否”，则逻辑学家开启另一门离去. 简要分析如下：

设命题变元  $P$ : 被问战士是诚实人；

$Q$ : 被问战士的回答是“是”；

$R$ : 另一战士的回答是“是”；

$S$ : 这扇门是死亡门.

故有真值表：

P	Q	R	S
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	T

观察真值表可知： $S \Leftrightarrow \neg Q$ 。即被问人回答“是”时，此门不是死亡之门；否则是死亡之门。