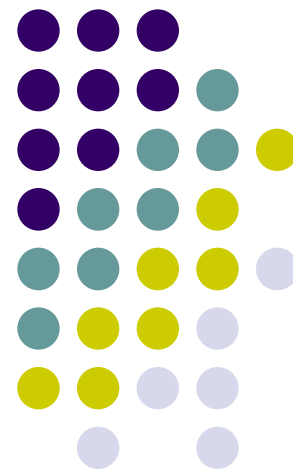


欧拉图

离散数学 图论初步

南京大学计算机科学与技术系





内容提要

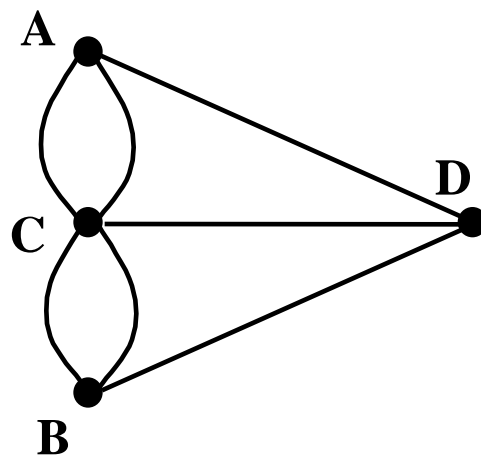
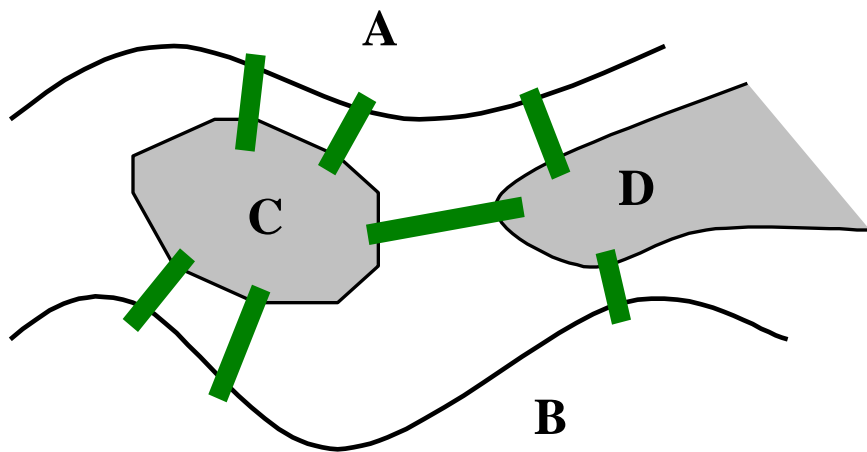
- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 半欧拉图的充要条件
- 构造欧拉回路的**Fleury**算法
- 中国邮递员问题



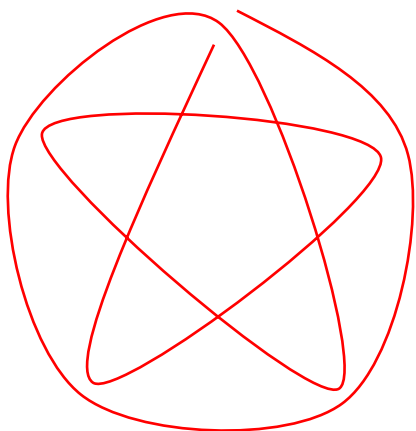
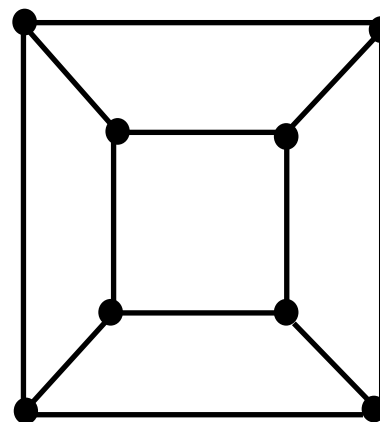
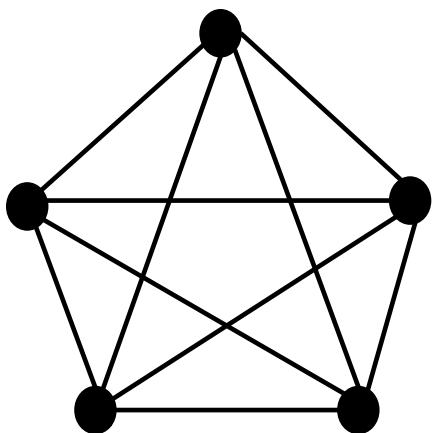


Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
 - 用顶点表示对象-“地块”
 - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
 - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”



“一笔划”问题



?



欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为**欧拉通路**。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为**欧拉回路**。
- 如果图 G 中含欧拉回路，则 G 称为**欧拉图**。如果图 G 中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则 G 称为**半欧拉图**。

//备注：通常假设 G 是连通的。



欧拉图中的顶点度数

- 连通图 G 是欧拉图 当且仅当 G 中每个顶点的度数均为偶数。

- 证明:

\Rightarrow 设 C 是 G 中的欧拉回路, 则 $\forall v \in V_G, d(v)$ 必等于 v 在 C 上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

\Leftarrow 可以证明:

- (1) G 中所有的边可以分为若干边不相交的初级回路。
- (2) 这些回路可以串成一个欧拉回路。



全偶度图中的回路

- 若图 G 中任一顶点均为偶度点，则 G 中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。
- 证明：对 G 的边数 m 施归纳法。
 - 当 $m=1$, G 是环，结论成立。
 - 对于 $k \geq 1$ ，假设当 $m \leq k$ 时结论成立。
 - 考虑 $m=k+1$ 的情况：注意 $\delta_G \geq 2$ ， G 中必含简单回路，记为 C ，令 $G' = G - E_C$ ，设 G' 中含 s 个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于 k 。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及 C 两两均无公共边，于是，结论成立。



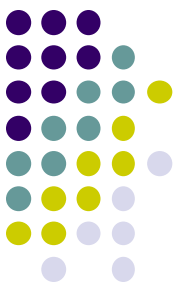
若干小回路串成欧拉回路

- 若连通图 G 中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则 G 中含欧拉回路。
 - 证明：对 G 中简单回路个数 d 施归纳法。当 $d=1$ 时显然。
 - 假设 $d \leq k (k \geq 1)$ 时结论成立。考虑 $d=k+1$ 。
 - 按某种方式对 $k+1$ 个简单回路排序，令 $G' = G - E(C_{k+1})$ ，设 G' 中含 s 个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于 k 。由归纳假设，每个非平凡连通分支 G_i 均为欧拉图，设其欧拉回路是 C_i' 。因 G 连通，故 C_{k+1} 与诸 C_i' 都有公共点。
 - G 中的欧拉回路构造如下：从 C_{k+1} 上任一点(设为 v_0)出发遍历 C_{k+1} 上的边，每当遇到一个尚未遍历的 C_i' 与 C_{k+1} 的交点(设为 v_i')，则转而遍历 C_i' 上的边，回到 v_i' 继续沿 C_{k+1} 进行。



关于欧拉图的等价命题

- 设 G 是非平凡连通图，以下三个命题等价：
 - (1) G 是欧拉图。
 - (2) G 中每个顶点的度数均为偶数。
 - (3) G 中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。



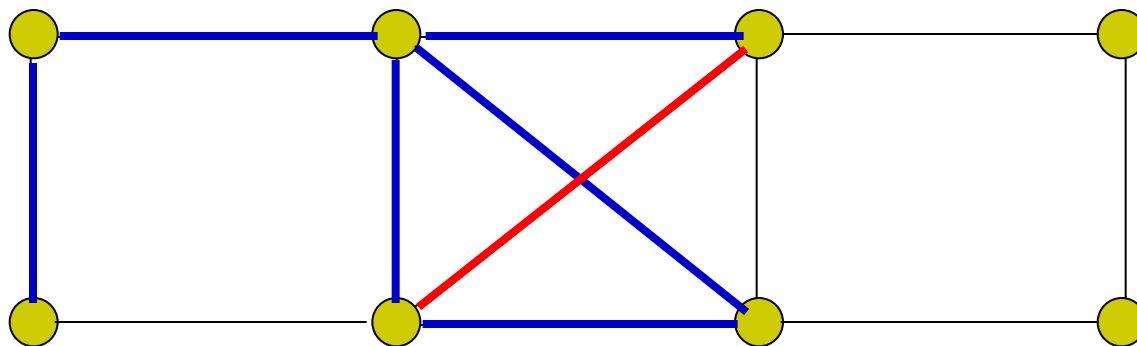
半欧拉图的判定

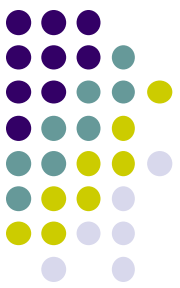
- 设 G 是连通图， G 是半欧拉图 **当且仅当** G 恰有两个奇度点。
 - 证明：
 - \Rightarrow 设 P 是 G 中的欧拉通路(非回路)，设 P 的始点与终点分别是 u, v ，则对 G 中任何一点 x ，若 x 非 u, v ，则 x 的度数等于在 P 中出现次数的2倍，而 u, v 的度数则是它们分别在 P 中间位置出现的次数的两倍再加1。
 - \Leftarrow 设 G 中两个奇度顶点是 u, v ，则 $G+uv$ 是欧拉图，设欧拉回路是 C ，则 C 中含 uv 边， $\therefore C-uv$ 是 G 中的欧拉通路。
(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)



构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的**任何时刻**，假设将已经经过的边删除，**剩下的边必须仍在同一连通分支当中**。





构造欧拉回路-Fleury算法

- 算法：
 - 输入：欧拉图 G
 - 输出：简单通路 $P = v_0e_1v_1e_2, \dots, e_i v_i e_{i+1}, \dots, e_m v_m$ ，其中包含了 E_G 中所有的元素。
 1. 任取 $v_0 \in V_G$ ，令 $P_0 = v_0$ ；
 2. 设 $P_i = v_0e_1v_1e_2, \dots, e_i v_i$ ，按下列原则从 $E_G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选择 e_{i+1} 。
 - (a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；
 - (b) 除非别无选择，否则 e_{i+1} 不应是 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的割边。
 3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。



Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时, $P_m = v_0 e_1 v_1 e_2, \dots, e_i v_i e_{i+1}, \dots, e_m v_m$,
- 其中诸 e_i 互异是显然的。只须证明:
 - (1) P_m 是回路, 即 $v_0 = v_m$ 。
 - (2) P_m 包括了 G 中所有的边。

令 $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$

- (1) (证明是回路) 假设 $v_0 \neq v_m$ 。由算法终止条件, 在 G_m 中已没有边与 v_m 相关联。假设除最后一次外, v_m 在 P_m 中出现 k 次, 则 v_m 的度数是 $2k+1$, 与 G 中顶点度数是偶数矛盾。

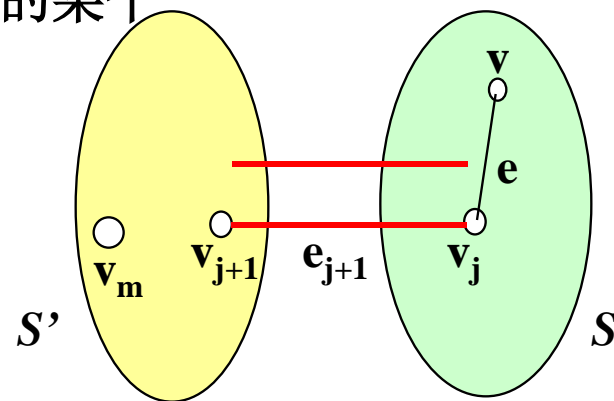
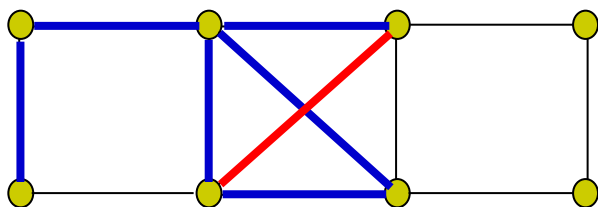
Fleury算法的证明(续)

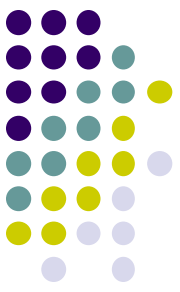


(2) (证明含所有边) 假设 P_m 没有包括 G 中所有的边, 令 G_m 中所有 非零度顶点 集合为 S (非空), 令 $S' = V_G - S$, 则 $v_m \in S'$ 。

考察序列 $e_1, e_2, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_m$ 。假设 j 是满足 $v_j \in S$, 而 $v_{j+1} \in S'$ 的最大下标。如果没有这样的 j , G 就不连通, 矛盾。因为 P_m 的终点在 S' 中, 因此 e_{j+1} 一定是 G_j 中的割边。

令 e 是在 G_j 中与 v_j 相关联的异于 e_{j+1} 的边 (非零度点一定有), 根据算法选择 e_{j+1} (割边) 的原则, e 也一定是割边。但是, G_m 中任意顶点的度数必是偶数, e 在 G_m 中的连通分支是欧拉图, e 在 G_m 的某个欧拉回路中, 不可能是 G_j 的割边。矛盾。



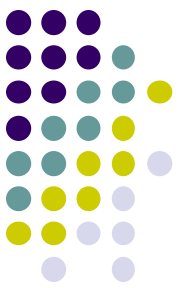


中国邮递员问题（管梅谷，1962）

- 问题：邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道至少一次，再回邮局，如何选择最短路线？
- 数学模型
 - 无向带权图 G ： E_G 中元素对应于辖区内的街道， V_G 中的元素对应于街道的交叉点，街道长度用相应边的权表示。
 - 问题的解： G 中包含所有边的权最小的回路，称为最优回路(注意：未必是简单回路)。
 - 当 G 是欧拉图，则最优回路即欧拉回路。
 - 若 G 不是欧拉图，则通过加边来消除 G 中的奇度顶点，要求使加边得到的欧拉图 G^* 中重复边的权和最小。

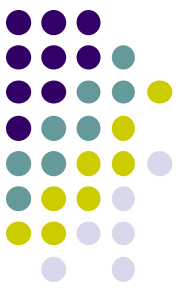


-



中国邮递员问题-求解原理

- C是带正权无向连通图G中的最优回路 当且仅当 对应的欧拉图 G^* 满足:
 - (1) G的每条边在 G^* 中至多重复一次;
 - (2) G的每个(初级)回路在 G^* 中重复边权的和不超过该回路权的一半。
- \Rightarrow (1) 两点之间添加的重复边条数若大于1, 则删除其中的两条, 不影响端点的奇偶性, 得到的仍是欧拉图, 但重复边权和减少了, 显然原来的C不是最优。
 - (2) 若G中的回路 C_1 在 G^* 中重复边的权和大于 C_1 的权的一半, 按如下方式改造 G^* : C_1 上原有的重复边均删除, 而原来未重复的边均添加重复边, 设得到的图为 G'' 。显然, G'' 中每个顶点的度数仍是偶数, 但 G'' 中重复边的权和小于 G^* 中相应的值, 矛盾。



中国邮递员问题-求解原理（续）

- \Leftarrow 只需证明：满足上述两个条件的回路的权均相等。

假设 C_1 和 C_2 是满足上述条件的两个回路，相应的欧拉图是 G_1^* 和 G_2^* ，添加的重复边集合分别是 F_1 和 F_2 。令 $F = F_1 \oplus F_2$ ， $G[F]$ 是 F 生成的导出子图。注意：构造 G_1^* 和 G_2^* 时，在 G 的任意顶点上添加的边数同奇偶性(与该点在 G 中度数同奇偶性)，因此 $G[F]$ 中各顶点度数均为偶数， $\therefore G[F]$ 是若干边不重复的初级回路的并集。

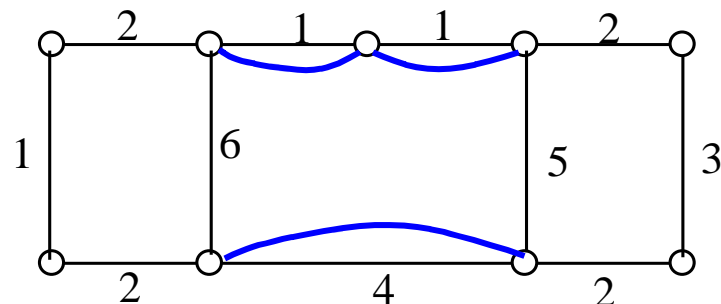
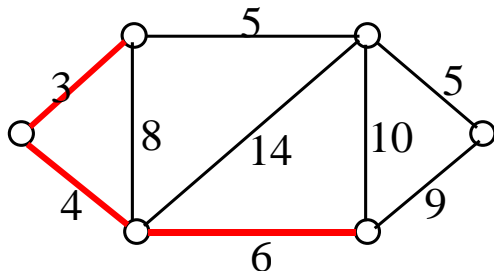
考虑 $G[F]$ 的任一回路 C' ， C' 上属于 F_1 的边的权和与属于 F_2 的边的权和都不能超过 C' 的权的一半，因此必然相等。由此易知，构造 G_1^* 和 G_2^* 时添加的边的权和必然相等。于是 G_1^* 和 G_2^* 的权相等，即 C_1 和 C_2 的权相等。

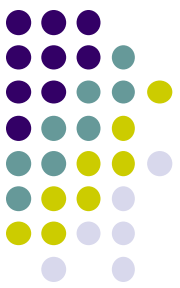


中国邮递员问题-算法

- 算法过程

- 1. 用Dijkstra算法求所有奇度顶点对之间的最短路径。
(若 G 是欧拉图, 直接用Fleury算法)
- 2. 以 G 中所有奇度顶点构造带权完全图 G_{2k} , 每边的权是两顶点间最短路径长度。
- 3. 求 G_{2k} 中的最小权完美匹配 M 。
- 4. 按照 M 中的各个路径添加重复边。再用Fleury算法求欧拉回路。





有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 含有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

- 若 G 是弱连通的有向图，则下列命题等价：
 - G 中含有向欧拉回路。
 - G 中任一顶点的入度等于出度。
 - G 中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。
- (证明与无向欧拉图类似。)



作业

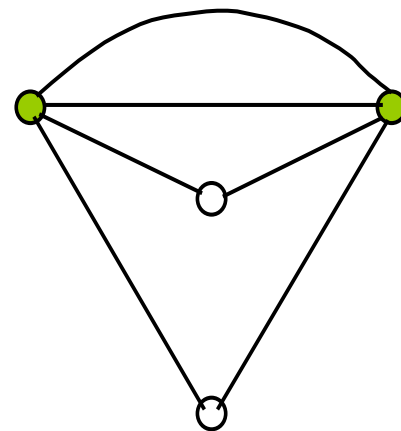
- 教材[9.5]
 - p.497: 18, 20, 28
- 给定简单图 G ($|G| \geq 3$)，构造另一个图 G' 如下：
 - 对 G 中的每条边， G' 中恰好有一个顶点与之对应；
 - G' 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明：若 G 是欧拉图，则 G' 是欧拉图。举例说明反之不一定成立。

附：随机欧拉图



- 设 G 是欧拉图， $v \in V_G$ ，从 v 开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则 G 称为以 v 为始点的随机欧拉图。
- 注意，若 G 是以 v 为始点的随机欧拉图，则任何一个以 v 为始点的不包含 G 中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若 G 不是以 v 为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了 v 所关联的所有边，却未包含 G 中所有边的简单回路。





随机欧拉图的判定

- 欧拉图 G 是以 v 为始点的随机欧拉图 **当且仅当** G 中任一回路均包含 v 。
 - \Rightarrow 若 G 是以 v 为始点的随机欧拉图, **假设有回路 C 不包含 v** . 令 $G'=G-C$, (G' 可能不连通), G' 中**包含 v 的那个连通分支一定是欧拉图**, 相应的欧拉回路包含了 v 关联的所有边, 但不包含 G 中的所有边, 与 G 是以 v 为始点的随机欧拉图矛盾。
 - \Leftarrow 若欧拉图 G 中任意回路均包含 v 。假设 G 不是以 v 为始点的随机欧拉图, 则一定存在已经包含了 v 所关联的所有边, 却未包含 G 中所有边的简单回路 C , 假设 e 是不在 C 中的一条边, e 的端点必异于 v , 设一个是 u 。令从 G 中删除 C 中所有边的图为 G' , 显然在 G' 中 v 是孤立点。而包含 u 的连通分支是欧拉图, 因此 u 必包含在一回路中, 但此回路不含 v , 矛盾。(易推知: 欧拉图 G 是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当 G 本身是一个初级回路)