2002年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、填空题

（1）$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$_____.

【答】 1.

【详解】

$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=-(0-1)=1.$

（2）已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$_____.

【答】 -2.

【详解】

将方程两边对 x 求导，视 y 为 x 的函数，得

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0, \tag{1}$$

再对 x 求导，y，y' 均视为 x 的函数，得

$$e^y y''+e^y\left(y'\right)^2+6xy''+12y'+2=0, \tag{2}$$

当 $x=0$ 时，由原方程知 $y=0$，再以 $x=0$，$y=0$ 代入（1）式中得 $y'(0)=0$，再代入（2）式中得 $y''(0)=-2$.

（3）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是_____.

【答】 $y=\sqrt{x+1}$ 或 $y^2=x+1$

【详解】

令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

原方程可化为

$$yp\frac{dy}{dp}+p^2=0$$

于是 $p=0$ 或 $yp\frac{dy}{dp}+p=0$

前者显然不满足初始条件 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，因此必有 $yp\frac{dy}{dp}+p=0$，积分得

$$py=C_1, \text{即}\, y\frac{dy}{dx}=C_1.$$

由初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$，于是

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2},$$

即 $ydy=\frac{1}{2}$

积分得

$$y^2=x+C_2.$$

再由初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$.故所求特解为

$$y^2=x+1 \text{ 或 } y=\sqrt{x+1}$$

（4）已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正文变换 $x=Py$，可化标准形 $f=6y_1^{\ 2}$, 则 $a=$_____.

【答】 2.

【详解 1】二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

所对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$,

标准形 $f=6y_1^{\ 2}$ 所对应矩阵为 $B=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

根据题设知 A,B 为相似矩阵，所以 A,B 的特征值相同，可见 A 的三个特征值为 6，0，0.

而

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -2 & -2\\ -2 & \lambda-a & -2\\ -2 & -2 & \lambda-a\end{vmatrix}$$
$$=\left[\lambda-(a+4)\right]\left[\lambda-(a-2)\right]^2$$

可见 $a+4=6, a-2=0,$

故有 $a=2$

【详解 2】 由 A,B 为相似矩阵知，对应特征多项式相同，即

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$$

于是有

$$\begin{vmatrix}\lambda-a & -2 & -2\\ -2 & \lambda-a & -2\\ -2 & -2 & \lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix},$$

即

$$\left[\lambda-(a+4)\right]\left[\lambda-(a-2)\right]^2=\lambda^3-6\lambda^2$$
$$\lambda^3-3a\lambda^2+3\left(a^2-4\right)\lambda-(a+4)(a-2)^2=\lambda^3-6\lambda^2,$$

比较同次幂的系数知　　$a=2$

（5）设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$；且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$_____.

【答】　4

【详解】

二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $4-X<0$.故由条件知有 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$

于是

$$\frac{1}{2}=P\{X>4\}=1-P\{X\le 4\}=1-P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}$$
$$=1-P\left\{Y\le\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$=1-\Phi(x)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

于是 $\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{4-\mu}{\sigma}=0\Rightarrow\mu=4.$

二、选择题

（1） 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“ $P\Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出 Q，则有

（A）②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$① （B）③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①

（C）③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$① （D）③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④

【 】

【答】 应选（A）

【详解】 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，而可微又必联系，因此有②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①，故应选（A）.

（2）设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1,$ 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_n+1}\right)$

发散.

(A)发散 （B）绝对收敛

（C）条件收敛 （D）收敛性根据所给条件不能判定.

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1,$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{u_n}=0,$$

又原级数的前 n 项部分和为

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

可见有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$，因此原级数收敛，排除（A），（D），再考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_n+1}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_n+1}\right)$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{u_{n+1}}=1,$

所以有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_{n+1}}$，均发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_n+1}\right)$ 也发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_n+1}\right)$ 条件收敛，应选（C）

（3）设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

（A） 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

（B） $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

（C） 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

（D） $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

【 】

【答】 应选（B）

【详解 1】

设 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界，由于

$$f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$$

可见 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1\neq0$，排除（A），（D）

又设 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1\neq0$

进一步排除（C），故应选（B）.

【详解 2】

直接证明(B)正确，用反正法，由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq0,$ 不妨设 $A>0$，

则对于 $\varepsilon=\frac{A}{2}$>0，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$\left|f'(x)-A\right|<\varepsilon=\frac{A}{2}.$$

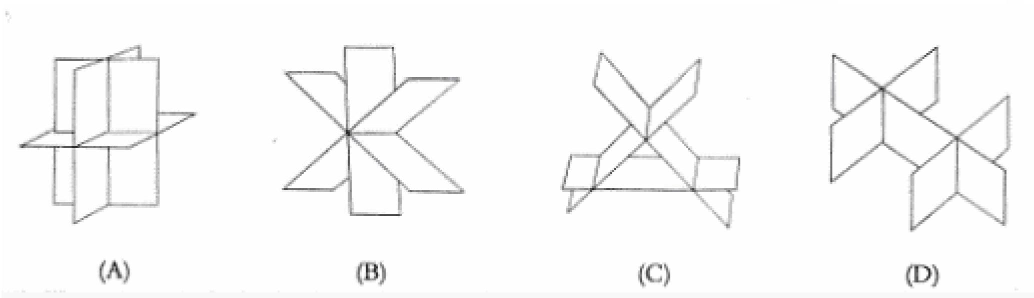
即 $\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}$,

可见 $f'(x)>\frac{A}{2}$，在区间 $[X,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f'(x)=f(X)+f'(\zeta)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$$

于是 ，与题设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

（4）设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i,i=1,2,3,$ 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 2，则这三张平面可能的位置关系为



【 】

【答】 应选（B）

【详解】 由题设，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

系数矩阵和增广矩阵的秩相等且为 2，由非齐次线性方程组解的判定定理知，此方程有无穷多组解，即三平面有无穷多个交点，对照四个选项，(A) 只有一个交点；(C)，(D) 无交点，因此只有 (B) 复合要求.

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 由于

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=2\neq, F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq1,$ 因此可先排除 (A)，(C)

又设 $f_1(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$ ， $f_2(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$

则 $f_1(x)f_2(x)=\begin{cases} 2e^{-3x}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0 \end{cases}$

显然不满足概率密度函数的要求，进一步排除 (B)，故应选 (D).

事实上，可检验 $F_1(x)F_2(x)$ 却是满足分布函数的三个条件.

三、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0, f'(0)\neq0,$ 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

【详解 1】

由题设，知

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$$

于是

$$\lim_{h\to 0}\left[af(h)+bf(2h)-f(0)\right]=(a+b-1)f(0)=0.$$

由于 $f(0)\neq 0$,故必有

$$a+b-1=0$$

又由洛比达法则，有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0)$$

因 $f'(0)\neq 0$,故 $a+2b=0$,

于是可解得　　　$a=2,b=-1$

【详解 2】　由题设条件

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a\left[f(h)-f(0)\right]}{h}+\frac{2b\left[f(h)-f(0)\right]}{2h}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{h}\right\}$$

若上式右端第 3 项分子不为零，则上式得极限不存在，与左边为零矛盾，所以

$$af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0$$

从而 $a+b-1=0$，于是原式可化为

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a\left[f(h)-f(0)\right]}{h}+\frac{2b\left[f(h)-f(0)\right]}{2h}\right\}\\&=af'(0)+2bf'(0)\\&=(a+2b)f'(0)\end{aligned}$$

有 $a+2b=0$，

解得 $a=2,b=-1$

四、已知两曲线 $y=f(x), y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$

【详解】　由已知条件得 $f(0)=0$，且

$$f^{'}(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$, 则

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f^{'}(0)=2.$$

五、计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

【详解】设

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$
$$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy&=\iint\limits_{D_1} e^{\max(x^2,y^2)}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max(x^2,y^2)}dxdy\\&=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_1} e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx\\&=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy=e-1\end{aligned}$$

六、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，记

$$I=\int\limits_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy$$

（1） 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

（2） 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

【详解】（1）因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\right\}$$

在上半平面处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径 L 无关；

（2）由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的折线段，于是有

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2 f(bx)\right]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}\left[y^2 f(cy)-1\right]dy\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)dt+\int_{bc}^{ad}f(t)dt\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{ad}f(t)dt\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{ab}^{ad}f(t)dt=0$，由此得

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

七、（1）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

（2） 利用（1）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【详解】（1）因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$
$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

于是

$$y''+y'+y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x;$$

（2）对应齐次微分方程 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda+1=0$$

特征根是 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，由于 $a=1$ 不是特征根，可设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=Ae^x$$

将 y^* 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 得 $A=\frac{1}{3}$, 于是 $y^*=\frac{1}{3}e^x$

故非齐次微分方程得通解为

$$y=\frac{1}{3}e^x+C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

又显然 $y(x)$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0.$

代入上式得　　$C_1=\frac{2}{3}, C_2=0.$

故所求幂级数的各函数为

$$y=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

八、设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为

$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-xy\le 75\right\}$，小山的高底函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确

定攀登起点的位置.

【详解】

（1）根据梯度与方向导数的关系知，沿梯度方向导数值最大，且其值为

$$
\begin{aligned}
g(x_0,y_0)&=\left|gradh_M\right|=\left|(y_0-2x_0)i+(x_0-2y_0)j\right|\\
&=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}\\
&=\sqrt{5{x_0}^2+5{y_0}^2-8x_0y_0}
\end{aligned}
$$

（2）由题设，问题转化为求 $g(x_0,y_0)=\sqrt{5{x_0}^2+5{y_0}^2-8x_0y_0}$ 下的最大值，为了求偏导方便起见，令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left(5x^2+5y^2-8xy\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-75=0 \qquad (3)$$

（1）与（2）相加得

$$(x+y)(2-\lambda)=0.$$

从而得 $y=-x,$ 或 $\lambda=2$

若 $\lambda=2$，由（1）得 $y=x$，再由（3）得

$$x=\pm5\sqrt{3},y=\pm5\sqrt{3}$$

若 $y=-x,$ 由（3）得 $x=\pm5,y=\mp5$

于是得到 4 个可能极值点：

$M_1(5,-5);M_2(-5,5);M_3\left(5\sqrt{3},5\sqrt{3}\right);M_4\left(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}\right).$

分别计算，有

$f(M_1)=f(M_2)=450;f(M_3)=f(M_4)=150.$

可见点 M_1 或 M_2 可作为攀登的起点.

九、已知 4 阶方阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

【详解 1】

令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，则由，

得 $\quad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，

将 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 代入上式，整理后得

$\left(2x_1+x_2-3\right)\alpha_2+\left(-x_1+x_3\right)\alpha_3+\left(x_4-1\right)\alpha_4=0$

由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\ -x_1+x_3=0\\ x_4-1=0\end{cases}$$

解此方程组，得

$$x=\begin{Bmatrix}0\\3\\0\\1\end{Bmatrix}+k\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{Bmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【详解 2】

由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关和 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，知 A 的秩为 3，因此 $Ax=0$ 的基础解系中只包含一个向量.

由 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$，知 $\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{Bmatrix}$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个解,

所以其通解为

$$x = k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ k \text{ 为任意常数.}$$

再由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，知 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组

$Ax=\beta$ 的一个特解,

于是 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

十、设 A,B 为同阶方阵，

(1)如果 A,B 相似，试证 A,B 的特征多项式相等；

(2)举一个二阶方阵的例子说明（1）的逆命题不成立；

(3)当 A,B 均为实对称矩阵时，试证（1）的逆命题成立.

【详解】（1）若 A,B 相似，则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$,故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}||\lambda E-A||P|\\&=|\lambda E-A|\end{aligned}$$

（2）令 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 则

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2$$

但 A,B 不相似，否则，存在可逆矩阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP=P^{-1}P=E$, 矛盾.

（3）由 A,B 均为实对称矩阵知，A,B 均象素于对角阵，若 A,B 得特征多项式相等，记特

征多项式得根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有

$$A\sim\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},B\sim\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即存在可逆矩阵 P,Q,使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=Q^{-1}BQ$$

于是 $\left(PQ^{-1}\right)^{-1}A\left(PQ^{-1}\right)=B.$

故 A,B 为相似矩阵.

十一、设随机变量 X 的概率密度为

$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2},0\le x\le\pi \\ 0, \qquad\text{其他}\end{cases}$，对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数，

求 Y^2 的数学期望.

【详解】 因为

$$\begin{aligned}P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}&=1-P\left\{X\le\frac{\pi}{3}\right\}=1-\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}}f\left(x\right)dx\\&=1-\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx\\&=1-\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以 $Y\sim B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$，从而

$$E\left(Y\right)=np=4\cdot\frac{1}{2}=2,$$

$$D\left(Y\right)=np\left(1-p\right)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=1,$$

故 $$E\left(Y^2\right)=D(Y)+\left[E(Y)\right]^2=1+2^2=5$$

十二、设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求θ的矩估计值和最大似然估计值.

【详解】

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$$

$$\overline{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$$

令$E(X)=\overline{x},$

即 $$3-4\theta=2,$$

得θ的矩估计值为 $$\overline{\theta}=\frac{1}{4}$$

对于给定的样本值，似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=P\{X_1=3,X_2=1,X_3=3,X_4=0,X_5=3,X_6=1,X_7=2,X_8=3\}\\&=\theta^2\left[2\theta(1-\theta)\right]^2\theta^2(1-2\theta)^4\\&=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4\end{aligned}$$

则

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

那么

$$\frac{d\ln\theta}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令$\frac{d\ln\theta}{d\theta}=0,$解得 $\theta_{1,2}=\frac{1}{12}\left(7\pm\sqrt{13}\right),$

但$\theta=\frac{1}{12}\left(7+\sqrt{13}\right)>\frac{1}{2}$，不合题意，

故θ的最大似然估计值

$$\theta=\frac{1}{12}\left(7+\sqrt{13}\right)$$