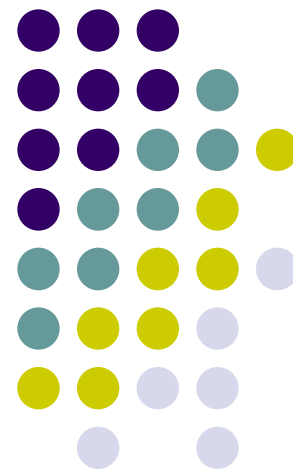


命题逻辑

离散数学 逻辑和证明

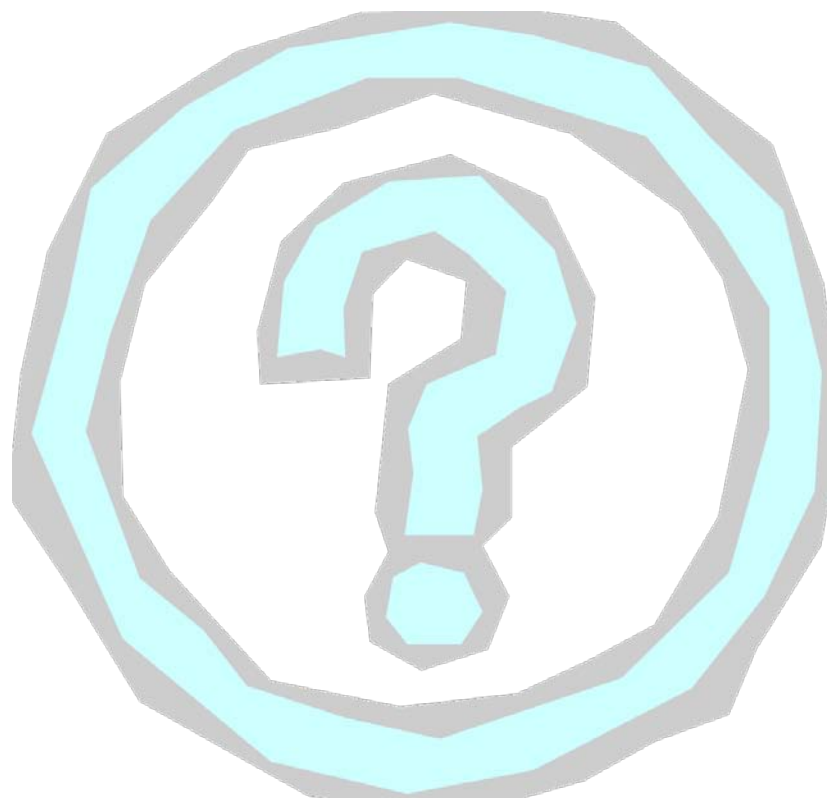
南京大学计算机科学与技术系

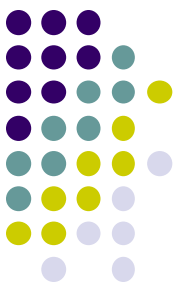




内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表





引言—编程语言中的布尔表达式

- Java程序设计语言中的布尔运算符

- $\&\&$, \parallel , $!$

- 举例

- $(a \geq 5) \&\& (a \leq 10)$

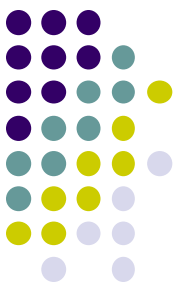
- $p \parallel !q$

```
if  $x < 0$  then  $abs := -x$   
    else  $abs := x$ 
```

- 程序验证需要考察有关不变式

- 条件/循环语句

- 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性



引言—搜索引擎中的布尔检索

- 布尔逻辑检索

- 利用布尔逻辑运算符进行检索项的逻辑组配，用以表达检索者的查询。

- ("Yuzhong Qu" **OR** "瞿裕忠") **AND** "Semantic Web"
- **NOT** "Ontology"// 有的使用 “-” 替代 “NOT”

- 布尔运算符

- 与，Conjunction (AND) (\wedge , &, \cdot)
- 或，Disjunction (OR) (\vee)
- 非，Negation (NOT) (\neg , \sim , -)



引言—逻辑谜题

- 泥巴孩谜题

- 一个男孩和一个女孩玩耍回来，看不见自己的额头，父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”

p : 男孩的额头上有泥

q : 女孩的额头上有泥

$p \vee q$ 为真



引言 - 日常生活中的逻辑

- 父子对话
 - 子：爸爸，我要玩游戏
 - 父：不做完作业不能玩游戏（除非..., 否则不允许....）
- 如果以 p 表示“做完作业”， q 表示“玩游戏”
 - 常理： $p \rightarrow q$
 - 数学： $\neg p \rightarrow \neg q$ （等价命题： $q \rightarrow p$ ）



引言 - 日常生活中的推理

- 老张宴请好友，他和老钱先到目的地，等了好久小刘还没到。老张说道：“哎，**该来的还没有来。**”
- 问题：
 - 如何理解“**该来的还没有来。**”
 - 老钱如何进行推理：**他该不该来？**

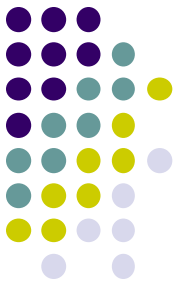


引言 - 合理表述的重要性

- 不合理表述的后果会很严重
 - 该来的没来
 - 老钱走了
 - 不该走的走了
 - 留下的人也走了

知识表示与推理

Knowledge Representation and Reasoning, KR&R



命题

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
 - 要么真，要么假
 - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
 - ✓ ● 税收下降了
 - ✓ ● 我的收入上升了
 - ✓ ● 今天是星期五
 - ✗ ● 你会说英语吗?
 - ✗ ● $3-x=5$
 - ✗ ● 我们走吧!
 - ✓ ● 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
 - ✗ ● 他是个多好的人呀!
 - ✗ ● “我现在说的是假话。”



命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如： p, q, r
- 命题变元的取值范围为： $\{T, F\}, \{1, 0\}$
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
 - p : 今天是周五 ($p=0$)
 - q : $2+2=4$ ($q=1$)



原子命题与复合命题

- 复合命题

- 并非外面在下雨。
- 张挥与王丽都是三好学生。
- 张晓静不是江西人就是安徽人。
- 如果 $2+3=6$ ，则 π 是有理数。
- $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假

逻辑运算符（联接词）的语义



否定（运算符，联接词）

$\neg p$: “非 p ”

$\neg p$ 的真值表

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

p 所有可能的取值



合取（运算符，联接词）

$p \wedge q$: “ p 并且 q ”

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$p \wedge q = 1$ iff
 p 和 q 均为 1

$\langle p, q \rangle$ 所有可能的取值



析取（运算符，联接词）

$p \vee q$: “ p 或 q ”

$p \vee q = 0$ iff
 p 和 q 均为0

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



异或（运算符，联接词）

$p \oplus q$: “ p 和 q 的异或”

| p | q | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$p \vee q = 1$ iff
 p 和 q 中只有一个为 1





蕴含（运算符，联接词）

$p \rightarrow q$: “若 p ，则 q ”（条件语句） p 称为假设， q 称为结论

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$p \rightarrow q = 0$ iff
 p 为1而 q 为0





关于蕴含

- $p \rightarrow q$: “若 p , 则 q ” (条件语句)
- “想得奖, 仅当/只有考试得85分以上”
 - “得奖” \rightarrow “考试得85分以上”
 - 考不到85分以上, 甭想得奖
- 不能玩游戏, 除非做完作业 ($\neg p$, 除非 c)
 - 没有做完作业, 就不能玩 ($\neg c \rightarrow \neg p$)



双蕴含（运算符，联接词）

$p \leftrightarrow q$: “ p 当且仅当 q ”（双条件语句）

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$p \leftrightarrow q = 1$ iff

p 和 q 有相同的真值



命题表达式

- 命题变元是命题表达式；
- 若 p 是命题表达式，则 $(\neg p)$ 也是；
- 若 p 和 q 是命题表达式，则 $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ 也是；
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
 - $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 是命题公式（省略了外层括号）。
 - $pq \rightarrow r$ 以及 $p \rightarrow \wedge q$ 都不是命题公式。
 - $p \vee q \rightarrow r$, $\neg p \wedge q$, $(\neg p) \wedge q$ 是命题公式
- 运算符的优先级： \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow



将自然语言翻译成命题表达式

只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

a : 你可以从校园网访问因特网

c : 你主修计算机科学

f : 你是新生

$a \rightarrow (c \vee \neg f);$



将自然语言翻译成命题表达式（续）

除非你满16周岁, **否则**只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

q : 你能乘滑行游乐车

r : 你身高不足4英尺

s : 你满16周岁

$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$



命题表达式的真值表 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$

| p | q | r | $\neg p$ | $\neg p \wedge q$ | $\neg r$ | $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|----------|--|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

该命题表达式的所有指派

一种“成假指派”



命题表达式的真值表

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $p \leftrightarrow q$ | $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--|-----------------------|--|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



作业

- 教材[Rosen 1.1] P11
 - 2, 10, 14
 - 20(任选4小题), 32(任选3小题), 60
 - 65 (附加题)