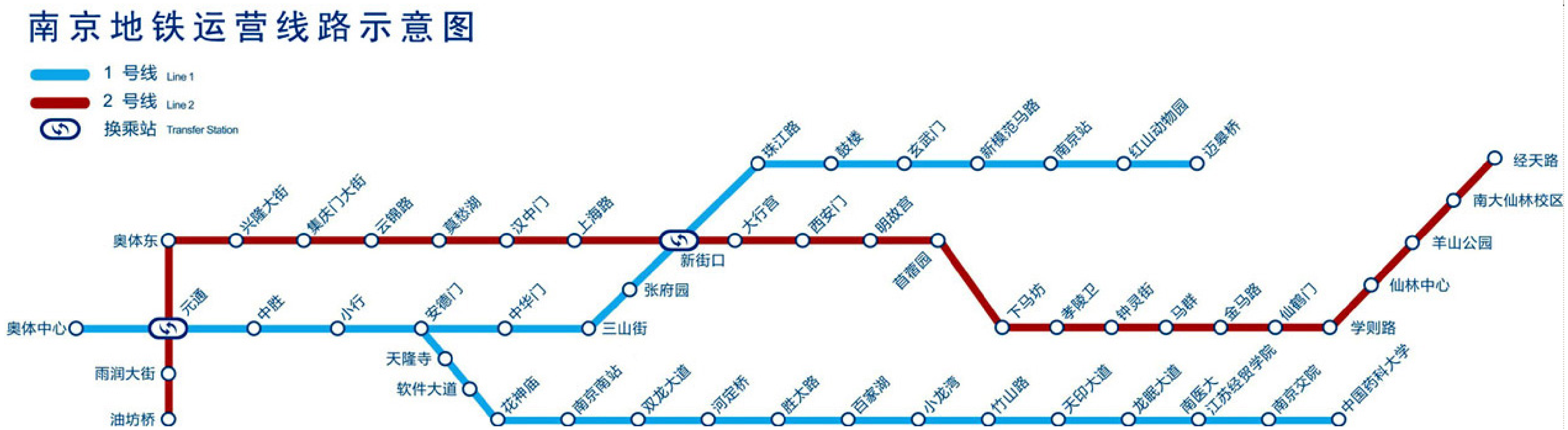
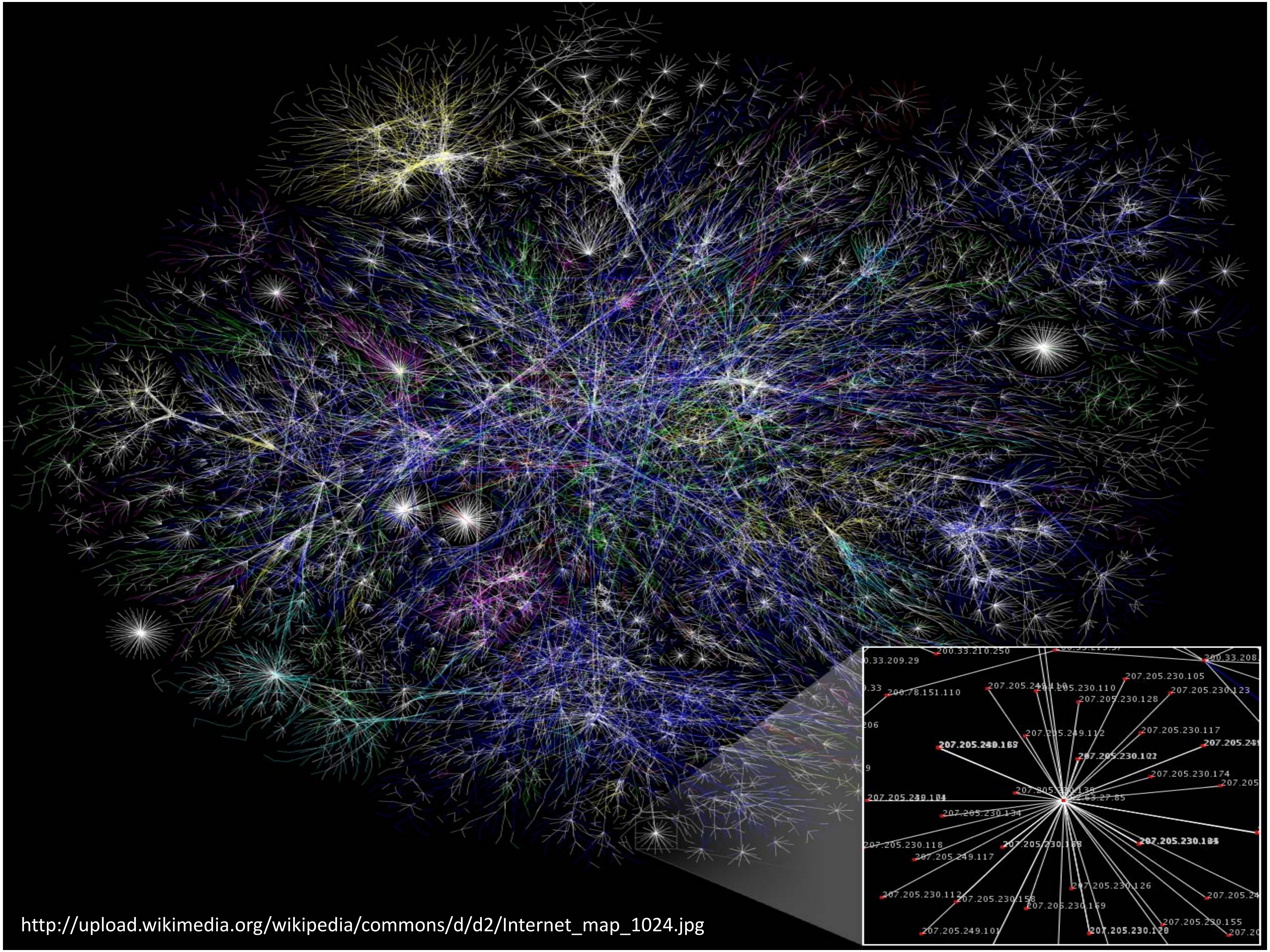
割点、割边和连通度

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)



http://www.nj-dt.com/metro_1.htm



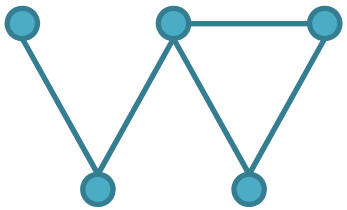
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg

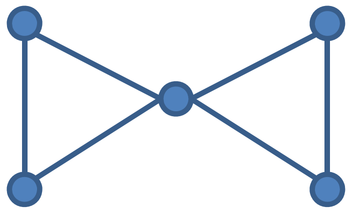
本节课的主要内容

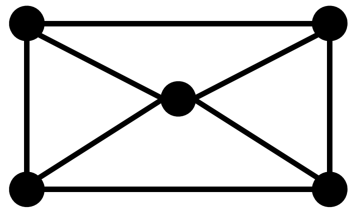
2.1 割点和割边

2.2 连通度和边连通度

连通的程度



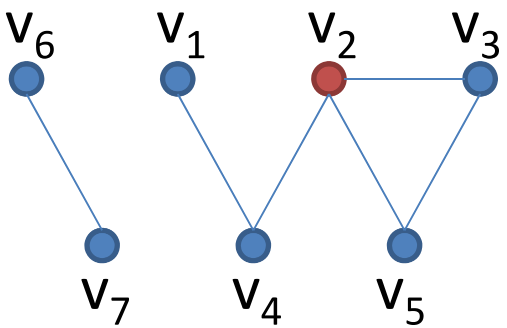


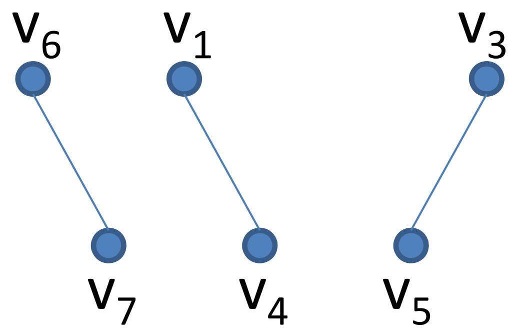


割点

- 割点 (cut vertex)
  - $v \in V(G)$: $w(G-v) > w(G)$

- 割点未必唯一



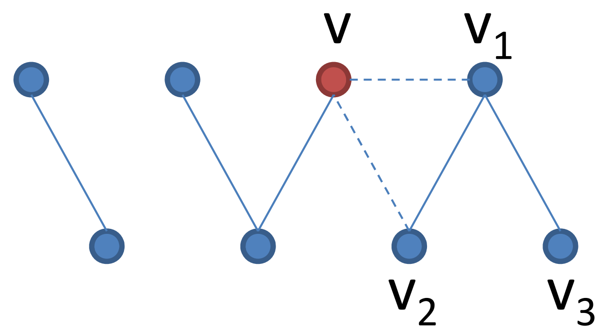


定理2.1.2

- 如果点v是简单图G的一个割点，则边集E(G)可划分为两个非空子集E_1和E_2，使得边导出子图$G[E_1]$和$G[E_2]$恰好有一个公共顶点v。

证明：

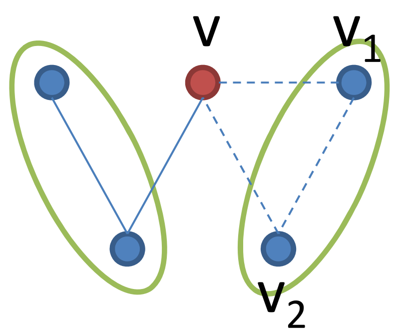
1. 从G中删除v必将G中一个连通分支分为至少两个，其中一个记作G_1。
2. 定义E_1={G_1中的边}∪{关联v和G_1中顶点的边}，$E_2=E(G)\setminus E_1$。
3. $E_1\neq\emptyset$，$E_2\neq\emptyset$。
4. v是$G[E_1]$和$G[E_2]$的公共顶点。
5. v是$G[E_1]$和$G[E_2]$的唯一公共顶点。



连通图中割点的等价定义

1. v是G的割点。
2. G-v不连通。
3. 存在V(G)\{v}的一个划分：V(G)\{v}=U∪W，U∩W=∅，使得对∀u∈U和∀w∈W，v在每条u-w路上。
4. 存在u, w∈V(G)，使得u, w异于v，且v在每条u-w路上。

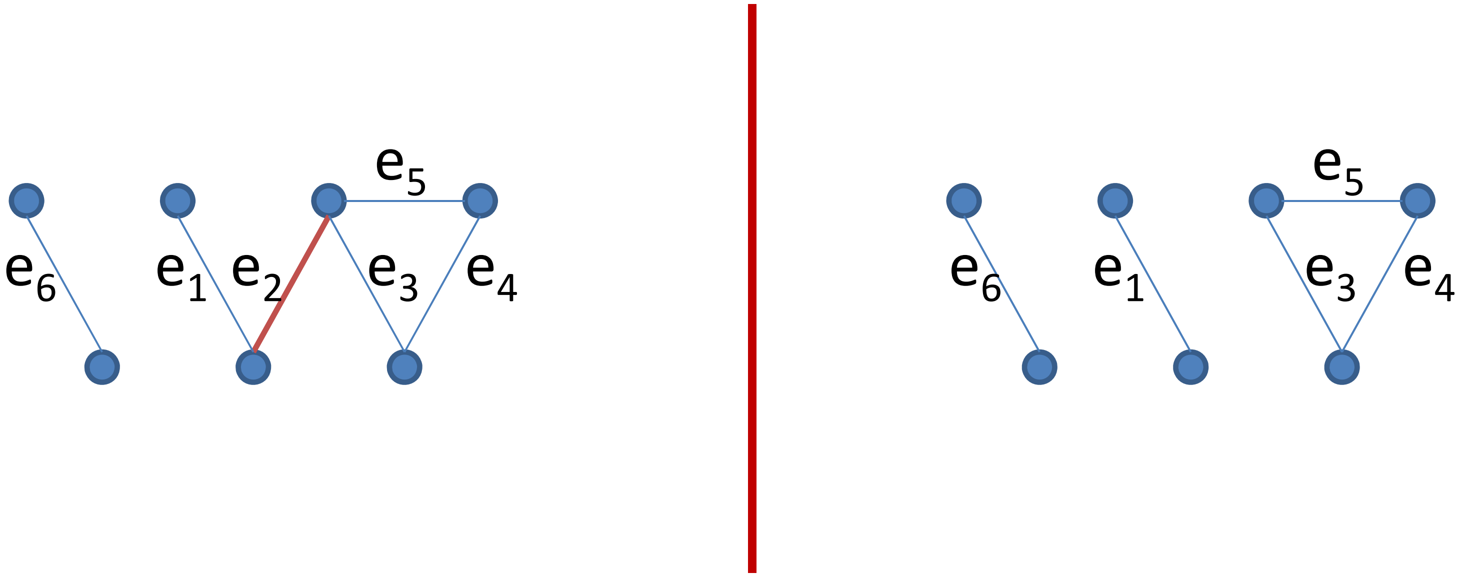
⇒ G-v中不存在u-w路 ⇒ G-v不连通



割边

- 割边 (cut edge)
  - $e \in E(G)$: $w(G\text{-}e)>w(G)$

- 割边未必唯一



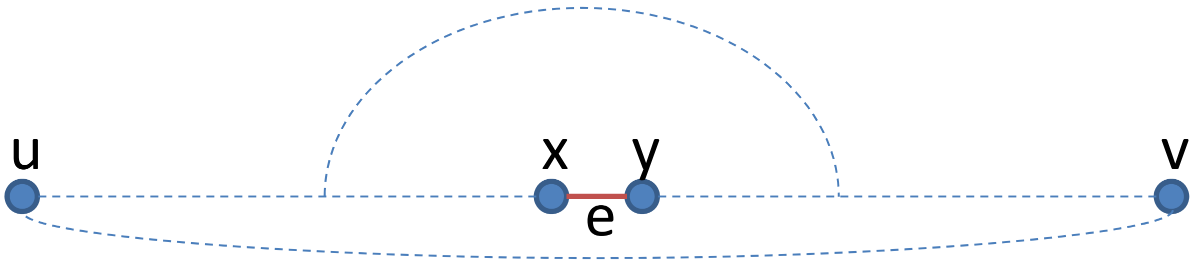
割边的等价定义

1. e是G的割边。
2. e不在G的任何圈中。

证明：

1. 证明其逆否命题：e不是割边当且仅当e在G的某个圈中。
2. 仅考虑e所在的连通分支G_1。

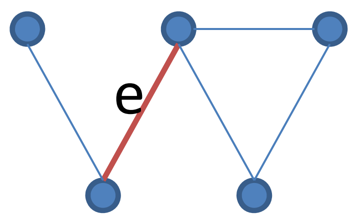
- e=(x, y)不是割边 ⇒ G_1-e连通 ⇒ G_1-e中有x-y路 ⇒ 形成圈
- e在圈中 ⇒ G_1中任意两顶点间均有不过e的路 ⇒ 不是割边
  - 讨论两种情况：e在或不在原有的路上



连通图中割边的等价定义

1. e是G的割边。
2. 存在V(G)的一个划分：$V(G)=U\cup W$，$U\cap W=\emptyset$，使得对$\forall u\in U$和$\forall w\in W$，e在每条u-w路上。
3. 存在$u, v\in V(G)$，使得e在每条u-v路上。

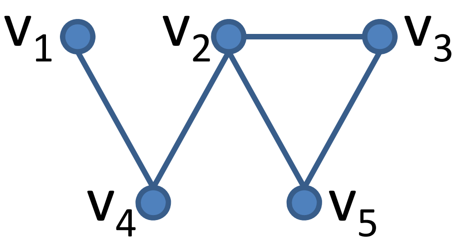
$\Rightarrow$ G-e中不存在u-v路 $\Rightarrow$ G-e不连通

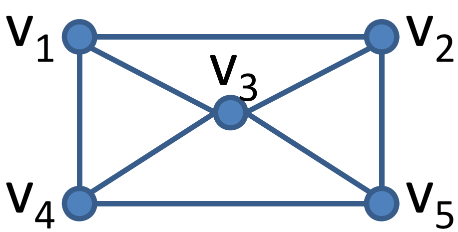


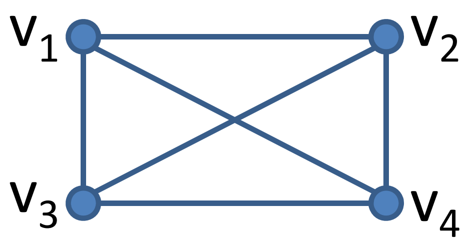
- 以下只讨论连通图

点割集

- 点割集 (vertex cut)
  - S⊆V(G): w(G-S)>1
- 极小点割集 (minimal vertex cut)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是点割集）
- 最小点割集 (minimum vertex cut)
  - 顶点数最少

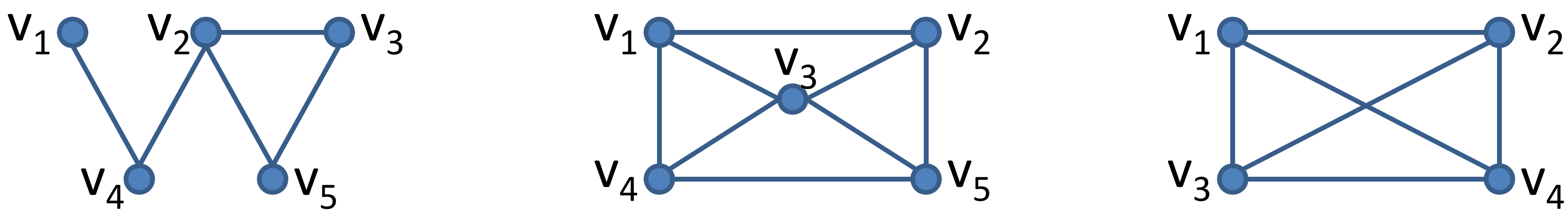






连通度

- 连通度 (connectivity)，记作κ(G)
  - G不是完全图：最小点割集的势
  - G是完全图：v-1
  - G不连通：0
  - G是零图或平凡图：不讨论
- κ(G)=k的性质
  - 没有势为k-1或更小的点割集
  - 任意去掉k-1或更少个顶点，仍然连通
- k-连通 (k-connected)
  - κ(G)≥k



- 2-连通图 ⇔ 没有割点的连通图？
  - 2-连通图 ⇒ 没有割点的连通图
  - 2-连通图 ⇐ 没有割点的连通图 ($\nu \geq 3$)

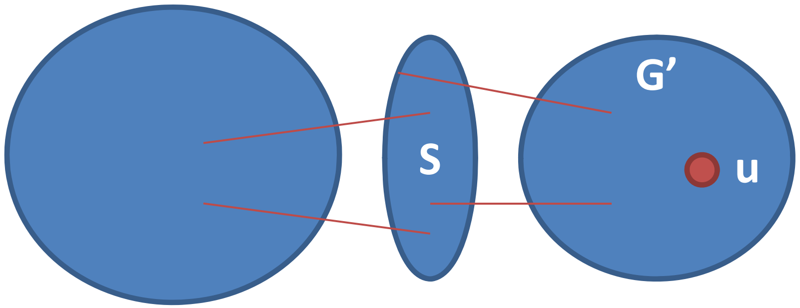
k-连通的一个充分条件

- 设G是一个简单非完全图，k是一个自然数，若$\delta(G)\ge\frac{\nu+k-2}{2}$，则G是k-连通的。

证明：

1. 反证法：G不是k-连通的 ⇒ κ(G)<k ⇒ G有点割集S满足|S|<k
2. ν(G-S)= ν-|S|且G-S至少有两个连通分支 ⇒ 其中一个$\nu(G')\le\frac{\nu-|S|}{2}$
3. ∀u∈V(G’) ⇒ u只与G’和S中的顶点相邻

$$\Rightarrow\ d(u)\le\left(\frac{\nu-|S|}{2}-1\right)+|S|=\frac{\nu+|S|-2}{2}<\frac{\nu+k-2}{2}\ \Rightarrow\ \delta(G)\le d(u)<\frac{\nu+k-2}{2}$$，矛盾。



u最多关联到几条边？

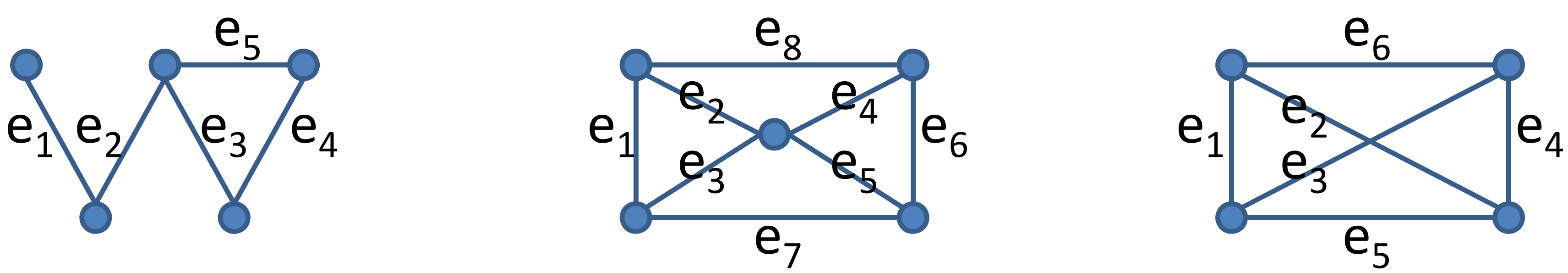
连通的一个充分条件

- 设G是一个简单图，若 $\delta(G) \geq \frac{\nu - 1}{2}$，则G是连通的。

证明：前式中取k=1。

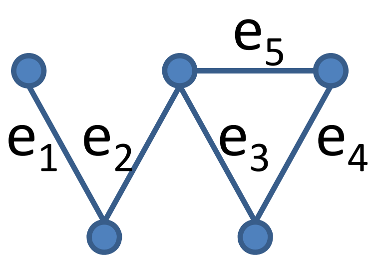
边割集

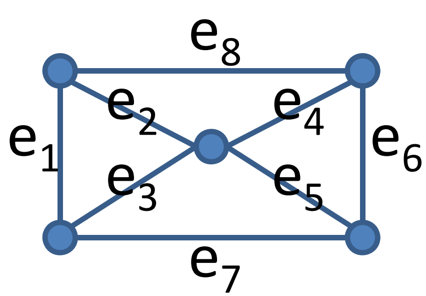
- 边割集 (edge cut)　　注意：与教材、参考书的定义略有不同，做了简化！
  - $S \subseteq E(G)$: $w(G-S)>1$
- 极小边割集 (minimal edge cut)
  - 边数极少（任何一个真子集都不再是边割集）
- 最小边割集 (minimum edge cut)
  - 边数最少

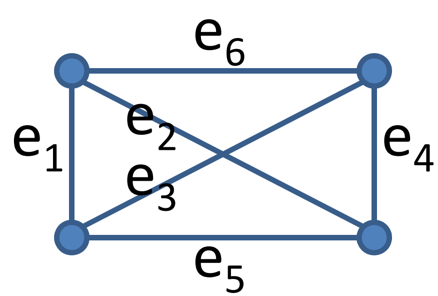


边连通度

- 边连通度 (edge-connectivity)，记作κ’(G)
  - 最小边割集的势
  - G不连通：0
  - G是零图或平凡图：不讨论
- κ'(G)=k的性质
  - 没有势为k-1或更小的边割集
  - 任意去掉k-1或更少条边，仍然连通
- k-边连通 (k-edge-connected)
  - κ'(G)≥k





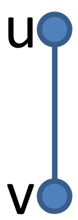


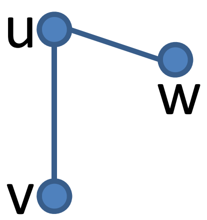
定理2.2.1

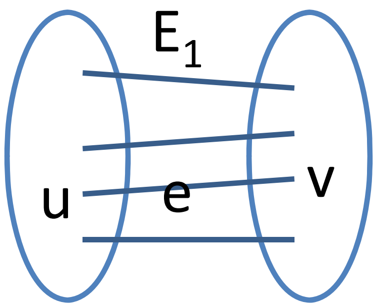
- $\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)$

证明：

- 左式：对$\kappa'(G)$用数学归纳法证明。
  1. $\kappa'(G)=1$时，存在割边(u, v)，要证明$\kappa(G)=1$。
  2. 讨论d(u)和d(v)：
     - $d(u)=d(v)=1 \Rightarrow \kappa(G)=1 \Rightarrow \kappa(G)\le\kappa'(G)$
     - $d(u)>1 \Rightarrow$ u是割点 $\Rightarrow \kappa(G)=1 \Rightarrow \kappa(G)\le\kappa'(G)$
  3. 假设$\kappa'(G)=k$时成立，则$\kappa'(G)=k+1$时：
     1. G有最小边割集$E_1 \Rightarrow |E_1|=k+1$
     2. $\forall e=(u, v)\in E_1 \Rightarrow E_1\setminus\{e\}$是G-e的最小边割集 $\Rightarrow \kappa'(G-e)=k$
     3. G-e有最小点割集T $\Rightarrow |T|=\kappa(G-e)$
     4. 由归纳假设 $\Rightarrow |T|=\kappa(G-e)\le\kappa'(G-e)=k$
     5. $? \Rightarrow \kappa(G)\le|T|+1\le k+1=\kappa'(G)$





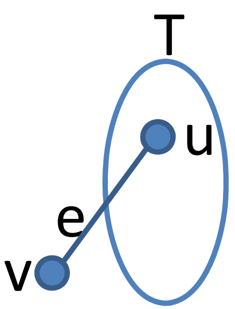


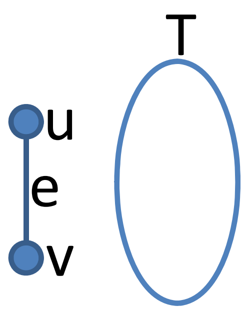
定理2.2.1 (续)

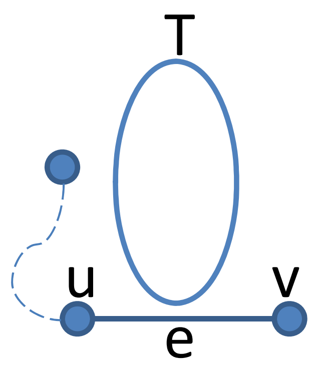
- $\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$

证明：

- 左式：对$\kappa'(G)$用数学归纳法证明。
  1. $\kappa'(G)=1$时，成立。
  2. 假设$\kappa'(G)=k$时成立，则$\kappa'(G)=k+1$时：
     1. … G-e有最小点割集T …
     2. $\kappa(G) \le |T|+1$？
        - $u \in T$或$v \in T \Rightarrow$ T也是G的点割集 $\Rightarrow \kappa(G) \le |T| < |T|+1$
        - u和v在G-e-T的同一连通分支中 $\Rightarrow$ T也是G的点割集 $\Rightarrow \kappa(G) \le |T| < |T|+1$
        - u和v在G-e-T的不同连通分支中，讨论V(G)\T
          - $V(G) \setminus T = \{u, v\} \Rightarrow |T| = \nu(G)-2 \Rightarrow \kappa(G) \le \nu(G)-1 = |T|+1$
          - u所在的连通分支中还有其它顶点 $\Rightarrow T \cup \{u\}$是G的点割集 $\Rightarrow \kappa(G) \le |T|+1$





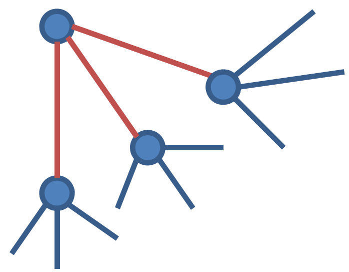


定理2.2.1 (续)

- κ(G)≤κ’(G)≤δ(G)

证明：

- 左式：对κ’(G)用数学归纳法证明。
- 右式：度最小的顶点关联的边构成一个边割集。



κ(G)的一个上界

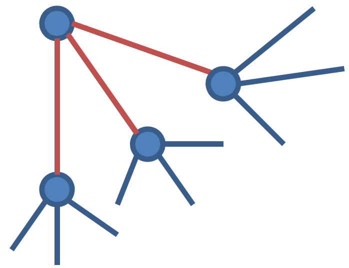
- 对具有ν个顶点ε条边的连通图G，有 $\kappa(G)\le\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{\nu}\right\rfloor$ 。

证明：

$$2\varepsilon=\sum_{u\in V(G)}d(u)\ge\delta(G)\nu\Rightarrow\delta(G)\le\frac{2\varepsilon}{\nu}\Rightarrow\kappa(G)\le\delta(G)\le\frac{2\varepsilon}{\nu}\Rightarrow\kappa(G)\le\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{\nu}\right\rfloor$$

$\kappa'(G)=\delta(G)$的充分条件

- $\kappa'(G)=\delta(G)$意味着这个图有什么特点？

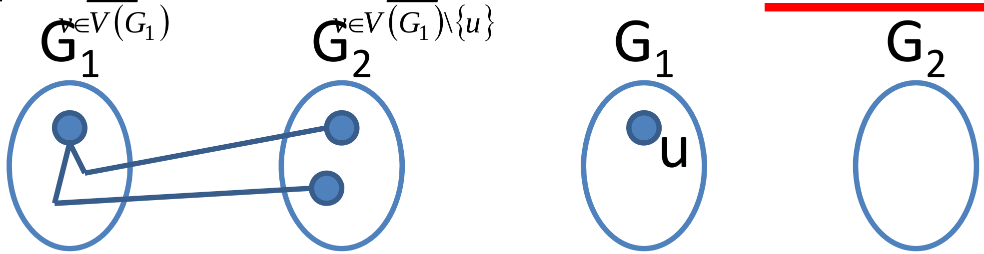


κ'(G)=δ(G)的充分条件1

- G是一个直径为2的简单图。

证明：

1. G有最小边割集E' ⇒ G-E'中顶点数最少的连通分支记作G_1，另一个记作G_2
2. G直径为2 ⇒ G_1中每个顶点都在G_2中有邻点，或反之 ⇒ $\kappa'(G)=|E'|\ge v(G_1)$或$\ge v(G_2)$ ⇒ $\kappa'(G)\ge\min\{v(G_1), v(G_2)\}=v(G_1)$
3. G_1中任取顶点u：
   - $\kappa'(G)\le\delta(G)\le d(u)=d_{G1}(u)+d_{G2}(u)\le(v(G_1)-1)+d_{G2}(u)\le\kappa'(G)-1+d_{G2}(u)$ ⇒ $d_{G2}(u)\ge 1$
   - $\kappa'=|E'|=\sum_{v\in V(G_1)} d_{G2}(v)=\sum_{v\in V(G_1)\setminus\{u\}} d_{G2}(v)+d_{G2}(u)\ge(v(G_1)-1)+d_{G2}(u)$



$\kappa'(G)=\delta(G)$的充分条件2

- G是简单图且任二不相邻顶点u和v都满足$d(u)+d(v)\geq \nu(G)-1$。

证明：

- 任二顶点都相邻 ⇒ 完全图 ⇒ $\kappa'(G)=\nu(G)-1=\delta(G)$
- 有不相邻顶点时，要证明$diam(G)=2$：
  - 有不相邻顶点 ⇒ $diam(G)\geq 2$
  - 任二不相邻顶点u和v ⇒ $d(u)+d(v)\geq \nu(G)-1$ ⇒ u和v有公共邻点 ⇒ $diam(G)\leq 2$

⇒ $diam(G)=2$ ⇒ $\kappa'(G)=\delta(G)$

κ'(G)=δ(G)的充分条件3

- G是简单图且 $\delta(G) \geq \frac{\nu - 1}{2}$ 。

证明：

任二不相邻顶点u和v ⇒ d(u)+d(v)≥ν(G)-1 ⇒ κ'(G)=δ(G)

κ(G)=κ’(G)的一个充分条件*

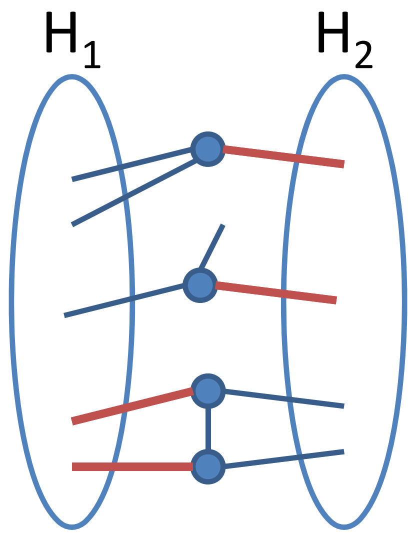
- G是3-正则图。

证明：

如果G是完全图，显然成立，以下只讨论非完全图的情况。

只需要证明κ’(G)≤κ(G)。

1. G有最小点割集S ⇒
   – |S|=κ(G)
   – S中每个顶点至少各关联一条边到G-S的两个连通分支H_1和H_2
2. G是3-正则图 ⇒ S中每个顶点的第三条边有三种情况：
   – 关联到H_1或H_2
   – 关联到另一个H
   – 关联到S内部
3. 从S中每个顶点关联的边中删除一条 ⇒
   – H_1和H_2不连通 ⇒ 删除的边构成一个边割集
   – 共删除|S|=κ(G)条边
4. κ’(G)≤κ(G) ⇒ κ(G)=κ’(G)



作业

- 2.1 //第3章将用到该结论
- 2.8 //割点和割边
- 2.22 //连通度和边连通度