练习 1.3 (P34)

10. 令 $C(x)$ 为语句"x有一只猫"，$D(x)$ 为语句"x有一只狗"，$F(x)$ 为语句"x有一只雪貂"。用 $C(x)$、$D(x)$、F
逻辑联接词表达下述语句，令论域为你班上的所有学生。

a) 班上的一个学生有一只猫、一只狗和一只雪貂。

答：$\exists x(C(x) \land D(x) \land F(x))$.

b) 班上的所有学生有一只猫，一只狗或一只雪貂。

答：$\forall x(C(x) \lor D(x) \lor F(x))$.

c) 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂，但没有狗。

答：$\exists x(C(x) \land \neg D(x) \land F(x))$.

d) 班上没有学生同时有一只猫，一只狗和一只雪貂。

答：$\neg \exists x(C(x) \land D(x) \land F(x))$.

e) 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种，班上都有学生将其作为宠物。

答：$\exists x C(x) \land \exists y D(y) \land \exists z F(z)$. （论域为班上所有学生）

26. 使用谓词、量词和逻辑联接词，以两种方式将下列语句翻译成逻辑表达式。首先，令论域为班上的
令论域为所有人。

a) 班上所有学生都有移动电话。

解：令 $A(x)$ 为语句"x有移动电话"，$B(x)$ 为语句"x为班上学生"。

① 论域为班上学生：$\forall x A(x)$.

② 论域为所有人：$\forall x(B(x) \rightarrow A(x))$

b) 班上的某个同学看过外国影片。

解：令 $A(x)$ 为语句"x看过外国影片"，$B(x)$ 为语句"x为班上学生"。

① 论域为班上学生：$\exists x A(x)$.

② 论域为所有人：$\exists x(B(x) \land A(x))$.

c) 班上的某个同学不会游泳

解：令 $A(x)$ 为语句"x 会游泳"，$B(x)$ 为语句"x 为班上学生"。

① 论域为班上学生：$\exists x(\neg A(x))$

② 论域为所有人：$\exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$

34. 用量词表达下列命题的否定，再用语句表达这些否定。

a) 一些司机不遵守驾驶速度限制。

解：令 $A(x)$ 为语句"x 遵守驾驶速度限制"，论域为所有司机。

表达为 $\exists x(\neg A(x))$，否定为 $\neg\exists x(\neg A(x)) \equiv \forall x(A(x))$.

转述为：所有的司机都遵守驾驶速度限制。

b) 没有会微积分的兔子。

解：令 $A(x)$ 为语句"x 会微积分"，论域为所有兔子。

表达为 $\forall x(\neg A(x))$，否定为 $\neg\forall x(\neg A(x)) \equiv \exists x(A(x))$

转述为：存在一些兔子会微积分。

c) 没人能保守秘密。

解：令 $A(x)$ 为语句"x 能保守秘密"，论域为所有人。

表达为 $\neg\exists x A(x))$，否定为 $\neg(\neg\exists x A(x)) \equiv \neg(\forall x(\neg A(x)) \equiv \exists x A(x)$

转述为：存在一些人能保守秘密。

d) 班上的某人的态度不好。

解：令 $A(x)$ 为语句"x 的态度好"，论域为班上的学生

表达为 $\exists x(\neg A(x))$，否定为 $\neg\exists x(\neg A(x)) \equiv \forall x A(x)$

转述为：班上所有人的态度都很好。

2. 使用谓词、量词和逻辑联结词表达下列系统规范说明。

a) 每个用户都可以访问电子邮箱。

解：令 $A(x)$ 表示"x是用户"，$B(x)$ 表示"x能访问电子邮箱"，变量x的论域均为所有人。

表达为：$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

b) 如果文件系统被锁定，组中的每个人都能访问系统邮箱。

解：令 $A(x)$ 表示"x是文件系统"，$B(x)$ 表示"x被锁定"，变量x的论域为所有系统。

令 $C(m)$ 表示"m是组里的人"，$D(m)$ 表示"m能访问系统邮箱"，变量m的论域为所有人。

表达为：$[\forall x(A(x) \wedge B(x))] \rightarrow [\forall m(C(m) \rightarrow D(m))]$

c) 防火墙处于诊断状态仅当代理服务器处于诊断状态。

解：令 $A(x)$ 表示"x是防火墙"，$B(x)$ 表示"x是代理服务器"，$C(x)$ 表示"x处于诊断状态"，

变量x的论域为一切事物。

表达为：$\forall x(A(x) \wedge C(x) \leftrightarrow B(x) \wedge C(x))$

练习1.4 (P65)

6. 令 $C(x,y)$ 表示"x注册了y"，其中x的论域是你校全体学生的集合，y的论域是你校开设所有课程的集合。

简单的句子表达下列语句。

a) $C(\text{Randy Goldberg}, \text{CS }252)$

答：Randy Goldberg 同学注册了 CS 252 这门课。

b) $\exists x\, C(x, \text{Math }695)$

答：至少有一名学生注册了 Math 695 这门课。

f) $\exists x \exists y \forall z\,((x \neq y) \wedge (C(x,z) \leftrightarrow C(y,z)))$

答：存在两名不同的同学，他们所注册的课程完全相同。

16. 离散数学班上有1个主修数学的新生，12个主修数学的二年级生，15个主修计算机科学的二年级生，2个主修数学的三年级生和1个主修计算机科学的四年级学生。用量词表达下列语句，再给出其真值。

a) 班上有个三年级学生。

解：令 $A(x)$ 为"x是三年级学生"，x变量的论域为离散数学班上的学生。

表达为 $\exists x A(x)$

真值为T。

b) 班上每个学生都主修计算机科学。

解：令 $B(x)$ 为"x主修计算机科学"，x变量的论域为离散数学班上的学生。

表达为 $\forall x B(x)$。真值为F。

c) 班上有个学生既不主修数学也不是三年级学生。

解：令 $A(x)$ 为"x是三年级学生"，$C(x)$ 为"x主修数学"，x变量的论域为离散数学班上学生。

表达为 $\exists x(\neg A(x) \wedge \neg C(x))$，真值为T。

d) 班上每个学生要么是二年级生，要么主修计算机科学。

解：令 $D(x)$ 为"x是二年级学生"，$B(x)$ 为"x主修计算机科学"，x变量的论域为离散数学班

表达为 $\forall x(D(x) \vee B(x))$，真值为F。

e) 有一门主修课，有一名学生在每一学年都主修它。

条件不足，不能求解。

44. 用量词和逻辑连接词表示事实：每一个带有实系数的二次线性多项式至多有两个实根。

解：令 $A(x)$ 为"x是带有实系数的多项式"，$B(x)$ 为"x是二次线性多项式"，$C(x)$ 为"x至多有两个实根"，变量x的论域为一切多项式。

表示：$\forall x((A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C(x))$。

习题1.5.

19. a) 错误　　肯定结论谬误

b) 正确　　取拒式 $[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$.

c) 错误　　否定假设谬误

24. 第(3)步与第(5)步化简出错:

$P(c) \vee Q(c)$ 不能化简为 $P(c)$ 和 $Q(c)$.

第(4)步中由 $P(c)$ 不能全称生成 $\forall x P(x)$

(6)步中由 $Q(c)$ 不能全称生成 $\forall x P(x)$

29.

(1)	$\exists x \neg P(x)$	前提引入
(2)	$\neg P(a)$	由(1)存在例示
(3)	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	前提引入
(4)	$P(a) \vee Q(a)$	由(3)全称例示
(5)	$\forall x (\neg Q(x) \vee S(x))$	前提引入
(6)	$\neg Q(a) \vee S(a)$	由(5)全称例示
(7)	$P(a) \vee S(a)$	(4)(6)消解法
(8)	$S(a)$.	(2)(7)析取三段论
(9)	$\forall x (R(x) \to \neg S(x))$	前提引入
(10)	$R(a) \to \neg S(a)$	由(9)全称例示
(11)	$\neg R(a)$	(8),(10)取拒式
(12)	$\exists x \neg R(x)$	由(11)存在生成

即由前提可证: $\exists x \neg R(x)$ 为真

1.6

25. 设 $r=\frac{a}{b}$ （a、b 为互质整数 $b\neq0$）

则 $\frac{a^3}{b^3}+\frac{a}{b}+1=0$

$a^3+ab^2+b^3=0$

(1) 若 a、b 都为偶数，则存在公约数 2

(2) 若 a、b 不都为偶数，则 $a^3+ab^2+b^3$ 为奇数，故不为0

∴ 不存在有理数 r 使得 $r^3+r+1=0$

35.

不正确

步骤(2)与(1)式并不等价，$x=6$ 这一解应舍去。

39.

假设 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 都小于这些数的平均值 a_0。

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n<na_0$ 与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=na_0$ 矛盾

故假设不成立。

故在实数 $a_1, a_2\cdots a_n$ 中至少有一个数大于或等于这些数的平均值。 反证法

41.

证明：(1) n 为偶数，故 $n=2k$（k 为整数）

(2) $n+1=2k+1$，故 n 为奇数。

(3) $3n+1=6k+1=2(3k)+1$，故 $3n+1$ 为奇数

(4) $3n=6k=2(3k)$，故 $3n$ 为整数。

若 $3n$ 为偶数，则 $3n$ 可表示为 $2k$，$n=\frac{2k}{3}=2(\frac{k}{3})$

又∵ n 为整数，∴ n 为偶数

∴ (i)(ii)(iii)(iv) 等价。

1.7 P75-76

11.证明：

若任意有理数 x 和无理数 y，x^y 是有理数。

则 $x^y = \frac{b}{a}$ （a、b为互质整数）

对于 a.b，必存在一正整数 n，使得 $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ 不全为整数

∵ a.b互质

∴ $x^{\frac{y}{n}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$ 为无理数.

故假设不成立，存在有整理数 x 和无理数 y. x^y 是无整数.

22.

猜想：$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

证明：$x^2+y^2 \geq 2xy$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \left|\frac{x+y}{2}\right| \geq \frac{x+y}{2}$$

29. $x=0$. $y=5$.

30.

证明：令 $x=m^2-n^2$. $y=2mn$. $z=m^2+n^2$ （m, n为任意整数）

则 $x^2+y^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

$$=(m^2+n^2)^2=z^2$$

∵ m, n为任意整数.

∴ 方程 $x^2+y^2=z^2$ 存在无穷多个正整数解.

23.

写在黑板上数字之和的奇偶性是不会改变的，因为 $j+k$ 与 $j-k$ 同奇偶（在每一步这个和减少 $j+k$ 而增加 $j-k$）。因此过程结束时的整数必定与 $1+2+\cdots+(2n)=n(2n+1)$ 同奇偶，由于 n 是奇数，$n(2n+1)$ 是奇数。