1993 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 函数 $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为 $\underline{(0,\frac{1}{4})}$.(答 $(0,\frac{1}{4}]$ 也对)

(2) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点（$0,\sqrt{3},\sqrt{2}$）处的指向外侧的单位法向量为 $\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}}$

(3) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 则其中系数 b_3 的值为 $\underline{\frac{2}{3}\pi}$

(4) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(gradu)=\underline{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

(5) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 n-1，则线性方程组 AX=0 的通解为 $\underline{k(1,1,\cdots,1)^T}$

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt,\ g(x)=x^3+x^4$，则当 x→0 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的　（B）

(A) 等价无穷小　（B）同阶但非等价无穷小　（C）高阶无穷小　（D）低阶无穷小

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为　（A）

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

(3) 设直线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$，则 l_1 与 l_2 的夹角为　(C)

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

(4) 设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin ydx-f(x)\cos ydy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续

导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于 (B)

(A) $\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$ (B) $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ (C) $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1$ (D) $1-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

(5) 已知 Q= $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，P 为三阶非零矩阵，且满足 PQ = 0，则 (C)

(A) $t=6$ 时 P 的秩必为 1 (B) $t=6$ 时 P 的秩必为 2

(C) $t\neq 6$ 时 P 的秩必为 1 (D) $t\neq 6$ 时 P 的秩必为 2

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}$.

解： 因 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}$ ……2 分

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=2,$$ ……4 分

所以原式 $=e^{2}$. ……5 分

(2) 求 $\displaystyle\int\frac{xe^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx$.

解： 令 $u=\sqrt{e^{x}-1}$，则 $x=\ln(1+u^{2}),dx=\dfrac{2u}{1+u^{2}}du$，从而

$$\int\frac{xe^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx=\int\frac{(1+u^{2})\ln(1+u^{2})}{u}\cdot\frac{2u}{(1+u^{2})}du$$ ……2 分

$$=2\int\ln(1+u^{2})du=2u\ln(1+u^{2})-\int\frac{4u^{2}}{1+u^{2}}du=2u\ln(1+u^{2})-4u+4arctgu+C$$ ……4 分

$$=2x\sqrt{e^{x}-1}-4\sqrt{e^{x}-1}+4arctg\sqrt{e^{x}-1}+C.$$ ……5 分

(3) 求微分方程 $x^{2}y'+xy=y^{2}$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解一： $y'=\dfrac{y^{2}-xy}{x^{2}}$，令 $y=xu$，有 $xu'+u=u^{2}-u,xu'=u^{2}-2u$. ……2 分

分离变量得 $\dfrac{du}{u^{2}-2u}=\dfrac{dx}{x}$，积分得 $\dfrac{1}{2}[\ln(u-2)-\ln u]=\ln x+C_{1}$

即 $\dfrac{u-2}{u}=Cx^{2}$，亦即 $\dfrac{y-2x}{y}=Cx^{2}$. ……4 分

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=-1$，故所求特解为 $\dfrac{y-2x}{y}=-x^{2}$，即 $y=\dfrac{2x}{1+x^{2}}$. ……5 分

解二 $\frac{x^2}{y^2}y'+\frac{x}{y}=1$, 令 $\frac{1}{y}=z$, 有 $-x^2z'+xz=1$, $z'-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$, ……2 分

解得 $z=x[\int(-\frac{1}{x^3})dx+C]=\frac{1}{2x}+Cx$ ……4 分

即 $y=\frac{2x}{1+2Cx^2}$，由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=\frac{1}{2}$，故所求特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.. ……5 分

四、(本题满分 6 分)

计算 $\oiint_\Sigma 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

解： 因 $P=2xz, Q=yz, R=-z^2$, 故 $\frac{\partial P}{\partial x}=2z, \frac{\partial Q}{\partial y}=z, \frac{\partial R}{\partial z}=-2z, \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=z$.

根据奥-高公式，$\oiint_\Sigma 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy=\iiint_\Omega zdxdydz$ ……2 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr$$ ……5 分

$$=\frac{\pi}{2}.$$ ……6 分

五、(本题满分 6 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解： $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$， ……1 分

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, ……2 分

设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}, x\in(-1,1)$，则 $\int_0^x[\int_0^x S(x)dx]dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$

故 $S(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$ $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$， ……5 分

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=\frac{4}{27}$， ……6 分

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$. ……7 分

六、(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分)

(1) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\ge k>0$， $f(0)<0$，证明 $f(x)$ 在

$(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

证： 在 $[0,+\infty)$ 上，由 $f'(x)\ge k$ 得 $\int_0^x f'(x)dx \ge \int_0^x kdx$，即 $f(x)\ge kx+f(0)$.

取 $x_1 > -\dfrac{f(0)}{k} > 0$, 有 $f(x_1) > k[-\dfrac{f(0)}{k}]+f(0)=0$. ……2 分

因 $f(x_1)>0$, 由题设 $f(0)<0$, 根据零点定理, 故必存在 $x_0\in(0,x_1)$, 使 $f(x_0)=0$. ……4 分

又因 $f'(x)\ge k>0$，故 $f(x)$ 严格单调增加， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点. ……5 分

(2) 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

证： 要证 $a^b>b^a$，只需证 $b\ln a>a\ln b$. 令 $f(x)=x\ln a-a\ln x(x\ge a)$, ……2 分

因为 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>1-\dfrac{a}{x}\ge 0(x\ge a)$, 所以 $f(x)$ 在 $x\ge a$ 时单调增加. ……3 分

于是，当 $b>a$ 时， $f(b)>f(a)=0$，即有 $b\ln a>a\ln b$. ……5 分

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

解： 二次型 f 的矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$， ……1 分

特征方程为 $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$， ……2 分

由题设，知 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.将 $\lambda=1$（或 $\lambda=5$）代入特征方程，得

$a^2-4=0, a=\pm2$. 又 $a>0$，故取 $a=2$.这时 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_1=1$ 时，由 $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，解得对应的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，解得对应的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，由 $(5\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，解得对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. ……7 分

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，得

$\xi_1^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\xi_2^0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，故所用的正交变换矩阵为 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. ……8 分

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，I 是 n 阶单位矩阵.若 AB = I，证明 B 的列向量组线性无关.

证一：设 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，其中 $\beta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是 B 的列向量.

若 $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=0$，即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=BX=0$， ……2 分

两边左乘 A，则得 $ABX=0$，即 $IX=0$，亦即 $X=0$. ……5 分

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关. ……6 分

证二：因为 $r(B)\le n$， ……1 分

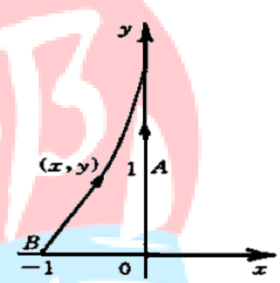
又 $r(B)\ge r(AB)=r(I)=n$， ……4 分

故 $r(B)=n$. ……5 分

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关. ……6 分

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点(0,1)出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动.物体 B 从点（-1，0）与 A 同时出发，其速度大小为 2v，方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.



解：设在时刻 t，B 位于点 (x,y) 处，则

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-(1+vt)}{x}$， ……2 分

两边对 x 求导得 $x\dfrac{d^2y}{\partial x^2}=-v\dfrac{dt}{dx}$ (*)

由 $2v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\cdot\frac{dx}{dt}$，得 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2v}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$，

代入(*)式得到所求的微分方程为 $x\frac{d^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=0$.　　……5 分

其初始条件为 $y|_{x=-1}=0, y'|_{x=-1}=1$.　　……6 分

十、填空题 (本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

(1) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不放回，则第二次抽出的是次品的概率为 $\underline{1/6}$.

(2) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在（0，4）内概率分布密度 $f_Y(y)=\underline{\frac{1}{4\sqrt{y}}}$

十一、(本题满分 6 分) 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$.

(1)求 X 的数学期望 EX 和方差 DX；　**(2)**求 X 与 $|X|$ 的协方差;并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

(3)问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？

解：(1)　$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=0$，　　……1 分

$DX=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-0=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$.　　……2 分

(2)　$\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-EX\cdot E|X|=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)dx-0=0$，　　……3 分

故 X 与 $|X|$ 不相关.　　……4 分

(3)　对给定 $0<a<+\infty$，显然 $\{|X|<a\}\subset\{X<a\}$，故 $P\{X<a,|X|<a\}=P\{|X|<a\}$.

又易见 $P\{X<a\}<1$，$P\{|X|<a\}>0$，所以 $P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}$，

因此 $P\{X<a,|X|<a\}\neq P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}$，因此 X 与 $|X|$ 不独立.　　……6 分

数 学（试卷二）

一 ~ 三、【 同数学一 第一 ~ 三题 **】**

四、(本题共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分)

(1) 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$， f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解： $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 f_1' + x^2 f_2'$. ……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^5 f_{11}'' + x^3 f_{12}'' + x^3 f_{21}'' + x f_{22}'' = x^5 f_{11}'' + 2x^3 f_{12}'' + x f_{22}''.$$ ……3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f_1' + x^4 y f_{11}'' - x^2 y f_{12}'' + 2x f_2' + x^2 y f_{21}'' - y f_{22}''$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$ ……6 分

(2) 【 同数学一 第四题 **】**

(3) 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$；$\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$.

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

解： 设由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 C，

则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) C$ ……1 分

故 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，其中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ……3 分

于是 $C = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. ……5 分

五~九、【 同数学一 第五 ~ 九题 **】**

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \underline{\quad 0 \quad}$.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin\left(x^2+y^2\right)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则

$\dfrac{dy}{dx}=\underline{\dfrac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}}$.

(3) 【 同数学一 第一（1）题 】

(4) $\int \dfrac{tgx}{\sqrt{\cos x}}dx=\underline{\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+c}$.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,-\dfrac{1}{2})$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则

$f(x)=\underline{(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]/2}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 当 $x\to0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (D)

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的，但不是无穷小量　　(D) 无界的,但不是无穷大

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1}, & x\neq1\\ 2 & ,x=1\end{cases}$，则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$ (A)

(A) 不连续　(B) 连续，但不可导　(C) 可导，但导数不连续　(D) 可导，且导数连续

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$，设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ \ (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$ 为 (D)

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x<1\\ x & 1\le x\le 2\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ x & 1\le x\le 2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3} & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$

(4) 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln(x)-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为 (B)

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$， 且在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 (C)

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$

三、(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$, ……2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\{f'(x^2)\cos[f(x^2)]+2x^2f''(x^2)\cos[f(x^2)]-2x^2[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$$

$$=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$$ ……5 分

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$ ……1 分

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1}$ ……4 分

$=-50$. ……5 分

(3) 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx$.

解： 原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\tan x$ ……1 分

$=\dfrac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx\right)$ ……3 分

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$. ……5 分

(4) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$

解： 原式 $=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$ ……1 分

$=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^b$ ……3 分

$=\dfrac{1}{2}$. ……5分

(5) 求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解： 原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$ ……1分

此一阶线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(\int e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\dfrac{\cos x}{x^2-1}dx+C\right)$, ……3分

即 $y=\dfrac{\sin x+C}{x^2-1}$. ……4分

由 $y|_{x=0}=1$，得 $C=-1$，故满足初始条件的特解是 $y=\dfrac{\sin x-1}{x^2-1}$. ……5分

四、(本题满分9分)

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$.试确定常数 α,β,γ, 并求该方程的通解.

解一： 由题设特解知原方程的特征根为1和2， ……2分

所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，即 $r^2-3r+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$ ……5分

将 $y_1=xe^x$ 代入方程得 $(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=\gamma e^x$，即 $\gamma=-1$ ……7分

从而原方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$. ……9分

解二： 将 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 代入原方程得

$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x=\gamma e^x$, ……2分

比较同类项的系数，有 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$，解方程组得 α=−3, β=2, γ=−1. ……5分

即原方程为 $y''-3y'+2y=-e^{-x}$，它对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，

解之得特征根 $r_1=1,r_2=2$，故齐次方程的通解为 $Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$. ……7分

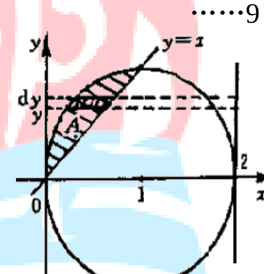
由题设特解知，原方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+[e^{2x}+(1+x)e^x]$,

即 $y=c_3e^x+c_4e^{2x}+xe^x$ ……9分

五、(本题满分9分)

设平面图形A由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形A绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解： A的图形如下图所示.



取 y 为积分变量,它的变化区间为[0,1]，易见A的两条边界曲线方程

分别为 $x=1-\sqrt{1-y^2}$ 及 $x=y(0\le y\le 1)$. ……2 分

于是相应于[0,1]区间上任一小区间 $\left[y,y+dy\right]$ 的薄片的体积元素为

$dV=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}dy=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy$, ……5 分

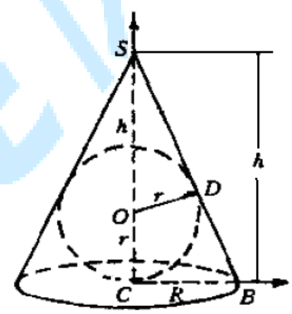
于是所求体积为 $V=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy$ ……6 分

$$=2\pi[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}]\Big|_0^1$$ ……8 分

$$=2\pi(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3})=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}$$ ……9 分

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出该最小值.



解：设圆锥底面圆半径为 R，如图所示

$\mathrm{SC=h,\ OC=OD=r, BC=R}$.

因 $\dfrac{BC}{SC}=\dfrac{CD}{SD}$, 故 $\dfrac{R}{h}=\dfrac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$, 从而 $\mathrm{R}=\dfrac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}}$. ……2 分

于是圆锥体积为 $V(h)=\dfrac{\pi}{3}R^2h=\dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{h^2}{h-2r}(2r<h<+\infty)$. ……4 分

因 $\mathrm{V'(h)}=\dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{h^2-4rh}{(h-2r)^2}$, 故解 $\mathrm{V'(h)}=0$ 得 $h=4r, h=0$(舍去). ……7 分

由于圆锥的最小体积一定存在,且 h=4r 是 $V(h)$ 在 (2r,+∞) 内的唯一驻点，

所以当 h=4r 时，V 取最小值 $V(4r)=\dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{(4r)^2}{(4r-2r)}=\dfrac{8\pi r^3}{3}$. ……9 分

七、(本题满分 9 分)

设 $x>0$，常数 $a>e$，证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$.

证：因为 $y=\ln x$ 是单调增加函数，所以欲证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$，只需证

$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$. ……2 分

设 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$, ……4 分

则在 $[0,+\infty)$ 内连续且可导，又有 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{a+x}$. ……5 分

因为 $\ln a>1, \dfrac{a}{a+x}<1$, 故 $f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 内单调增加. ……7 分

而$f(0)=0$,所以$f(x)>0(0<x<+\infty)$,即$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a,(a+x)^a<a^{a+x}$. ……9 分

八、(本题满分 9 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{Ma^2}{2}$，其中 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.

证一：任取 $x\in(0,a]$，由微分中值定理有 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\xi\in(0,x)$. ……3 分

又 $f(0)=0$，故 $f(x)=f'(\xi)x, x\in(0,a]$.

所以 $\left|\int_0^a f(x)dx\right|=\left|\int_0^a f'(\xi)xdx\right|\le\int_0^a|f'(\xi)|xdx$ ……6 分

$$\le M\int_0^a xdx=\frac{M}{2}a^2$$ ……9 分

证二：设 $x\in[0,a]$，由 $f(0)=0$，知 $\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=f(x)$ ……4 分

由积分基本性质，并考虑到 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$，有

$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\le\int_0^x|f'(t)|dt\le\int_0^x Mdt=Mx$. ……7 分

于是 $\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\int_0^a|f(x)|dx\le\int_0^a Mxdx=\frac{Ma^2}{2}$. ……9 分

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ $\underline{\dfrac{6}{5}}$.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=arctgx^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $\underline{\dfrac{3}{4}\pi}$.

(3) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为 $\underline{\dfrac{2}{2-\ln 3}}$.

(4) 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为 $\underline{\ 0\ }$.

(5) 设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5，则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为 $\underline{(4.804\ ,5.196)}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 f(x) 在点 x = 0 处 (C)

(A) 极限不存在. (B) 极限存在但不连续. (C) 连续但不可导. (D) 可导.

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)dt$，则 $F'(x)$ 等于 (A)

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})$ (B) $f(\ln x)+f(\dfrac{1}{x})$

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})$ (D) $f(\ln x)-f(\dfrac{1}{x})$

(3) n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 (B)

(A) 充分必要条件 (B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件

(4) 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则 (D)

(A) A 是必然事件 (B) $P(B|\overline{A})=0$ (C) A $\supset$ B (D) A $\subset$ B

(5) 设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有 (B)

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$ (B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$

（C） $F(-a)=F(a)$ （D） $F(-a)=2F(a)-1$

三、(本题满分 5 分)

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz.

解： 将方程两端微分，得 $dz-dy-dx+e^{z-y-x}dx+xe^{z-y-x}(dz-dy-dx)=0$ ……3 分

整理后得 $(1+xe^{z-y-x})dz=(1+xe^{z-y-x}-e^{z-y-x})dx+(1+xe^{z-y-x})dy$ ……4 分

由此，得 $dz=\dfrac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$. ……5 分

四、(本题满分 7 分)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，求常数 a 的值.

解： 左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2a}{x+a})^x=e^{-2a}$. ……2 分

右边 $=-2\int_a^{+\infty}x^2de^{-2x}=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$ ……3 分

$=2a^2e^{-2a}-2\int_a^{+\infty}xde^{-2x}$ ……4 分

$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx$ ……5 分

$=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}-e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}$. ……6 分

于是，有 $e^{-2a}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}$，解得 $a=0$ 或 $a=-1$ ……7 分

五、(本题满分 9 分)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\dfrac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量(即产量)， p 为单价， a,b,c,d,e 都是正的常数，且 $d>b$，求：

(1) 利润最大时的产量及最大利润； **(2)** 需求对价格的弹性；

(3) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

解：(1) 利润函数为

$L=pq-C=(d-eq)q-(aq^2+bq+c)=(d-b)q-(e+a)q^2-c$ ……2 分

两侧同时对 q 求导，得 $L'=(d-b)-2(e+a)q$. 令 $L'=0$，得 $q=\dfrac{d-b}{2(e+a)}$ ……3 分

因为 $L''=-2(e+a)<0$，所以当 $q=\dfrac{d-b}{2(e+a)}$ 时，利润最大，且 ……4 分

$L_{\max}=\dfrac{(d-b)^2}{4(e+a)}-c$. ……5 分

(2) 因为 $q'=-\frac{1}{e}$，

所以需求对价格的弹性为 $\eta=-\frac{p}{q}q'$ ……7 分

$$=-\frac{d-eq}{q}(-\frac{1}{e})=\frac{d-eq}{eq}.$$ ……8 分

(3) 由 $|\eta|=1$，得 $q=\frac{d}{2e}$. ……9 分

六、(本题满分 8 分)

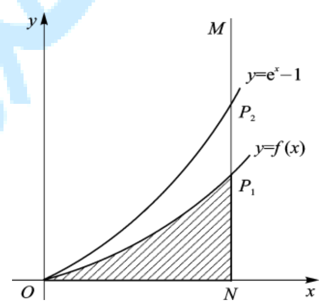
假设: **(1)** 函数 $y=f(x)$（$0\le x<\infty$）满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\le f(x)\le e^x-1$；

(2) 平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别交于点 P_1 和 P_2；

(3) 曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

解： 由题设可得示意图如下：



由图可知 $\int_0^x f(x)dx=e^x-1-f(x)$ ……3 分

两端求导，得 $f(x)=e^x-f'(x)$ ……4 分

即 $f'(x)+f(x)=e^x$. 解此一阶线性方程，得

$f(x)=e^{-x}(\int e^xe^xdx+C)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$， ……7 分

因 $f(0)=0$，故有 $C=-\frac{1}{2}$，因此所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ……8 分

七、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导,过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证一： 因为 $f(x)$ 在[0,c]上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,c)$, 使

$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$ ……2 分

由于点 C 在弦 AB 上，故有 $\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$，

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$. ……3 分

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,1)$, 使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$, ……4 分

于是有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，从而 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，

所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使 $f''(\xi)=0$. ……6 分

八、(本题满分 10 分)

k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解？在有解情况下，求出其全部解.

解： $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1+k)(4-k)}{2} & k(k-4) \end{pmatrix}$， ……1 分

当 $k\neq-1$ 和 4 时，有 $\overline{\mathbf{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 1 & \dfrac{k-2}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2k}{1+k} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{k^2+2k}{1+k} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{k^2+2k+4}{1+k} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2k}{1+k} \end{pmatrix}$， ……2 分

这时方程组有唯一解：$x_1=\dfrac{k^2+2k}{1+k},x_2=\dfrac{k^2+2k+4}{1+k},x_3=\dfrac{-2k}{1+k}$. ……4 分

当 $k=-1$ 时，有 $R(\mathbf{A})=2<R(\overline{\mathbf{A}})=3$，方程组无解. ……6 分

当 $k=4$ 时，有 $\overline{\mathbf{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$R(\mathbf{A})=R(\overline{\mathbf{A}})=2<n=3$，故方程组有无穷多组解.这时，得同解方程组 $\begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=-x_3+4 \end{cases}$. ……8 分

令 $x_3=c$，得方程组的全部解：$x=\begin{pmatrix} -3c \\ 4-c \\ c \end{pmatrix}$ 或 $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.其中 c 为任意常数.……10 分

九、(本题满分 9 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ 和 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量，P 是 3 阶正交

矩阵. 试求常数α,β .

解：变换前后二次型的矩阵分别为$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ……2 分

二次型可以写成 $f=X^TAX$ 和 $f=Y^TBY$， ……3 分

由于$P^TAP=B$， P 为正交矩阵，故$P^{-1}AP=B$， ……5 分

因此$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即$\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\-\alpha&\lambda-1&-\beta\\-1&-\beta&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$， ……6 分

亦即$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$， ……8 分

故其解$\alpha=\beta=0$为所求常数. ……9 分

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 同分布, X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0<x<2\\0 & 其\ 他\end{cases}$,

(1) 已知事件 A = { X > a } 和 B = { Y > a } 独立，且 P (A ∪ B) = $\frac{3}{4}$, 求常数a；

(2) 求$\frac{1}{X^2}$的数学期望.

解：(1) 由条件知$P(A)=P(B)$; $P(AB)=P(A)P(B)$， ……1 分

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}$， ……3 分

由此得$P(A)=\frac{1}{2}$.又由条件知$P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\frac{3}{8}\int_a^2x^2dx=\frac{3}{8}x^3\Big|_a^2=\frac{1}{8}(8-a^3)=\frac{1}{2}$，

于是有$a=\sqrt[3]{4}$. ……6 分

(2) $E\frac{1}{X^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)dx=\frac{3}{8}\int_0^2\frac{1}{x^2}x^2dx=\frac{3}{8}x\Big|_0^2=\frac{3}{4}$. ……8 分

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 N(t)服从参数为λt的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(2) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下, 再无故障运行 8 小时的概率 Q .

解：(1) 由于T是非负随机变量，可见当$t<0$时，$F(t)=P\{T\le t\}=0$， ……1分

设$t\ge 0$，则事件$\{T>t\}$与$\{N(t)=0\}$等价.

因此，当$t\ge 0$时，有$F(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$， ……4分

于是，T服从参数为λ的指数分布.

(2) $Q=P\{T\ge 16 \mid T\ge 8\}$ ……5分

$$=\frac{P\{T\ge 16, T\ge 8\}}{P\{T\ge 8\}}=\frac{P\{T\ge 16\}}{P\{T\ge 8\}}$$ ……7分

$$=\frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-8\lambda}.$$ ……8分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ $\underline{\sqrt{2}/2}$.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $\underline{\dfrac{3\pi}{2}}$.

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ $\underline{-2\arctan\sqrt{1-x}+c}$.

(4) 【 同数学四 第一、(4) 题 】

(5) 设 10 件产品有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为 $\underline{\dfrac{1}{5}}$

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学四 第二、(1) 题 】

(2) 【 同数学四 第二、(2) 题 】

(3) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $\left|\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\beta_1\right|=m, \left|\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_2\,\alpha_3\right|=n$，则四阶行列式 $\left|\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1\left(\beta_1+\beta_2\right)\right|$ 等于 (C)

(A) m + n (B) - (m + n) (C) n - m (D) m - n

(4) 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一特征值等于 (B)

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

(5) 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2), Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\le\mu-4\},\quad p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则 (A)

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$ (B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$ (D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

三、(本题满分 5 分)【 同数学四 第三题 】

四、(本题满分 7 分)【 同数学四 第四题 】

五、(本题满分 7 分)

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C = 250000 + 200x + \dfrac{1}{40}x^2$（元）. 问：

(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品？

(2) 若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解：(1) 设平均成本为 y，则 $y = \dfrac{25000}{x} + 200 + \dfrac{x}{40}$, ……1 分

由 $y' = -\dfrac{25000}{x^2} + \dfrac{1}{40} = 0$，得 $x_1 = 1000, x_2 = -1000$（舍去）. ……2 分

因为 $y''\big|_{x=1000} = 5\times10^5 > 0$，所以当 $x = 10^3$ 时， y 取得极小值，即最小值.

因此，要使平均成本最小，应生产 1000 件产品. ……4 分

(2) 利润函数为 $L = 500x - (25000 + 200x + \dfrac{x^2}{40}) = 300x - 25000 - \dfrac{x^2}{40}$, ……5 分

由 $L' = 300 - \dfrac{20}{x} = 0$，得 $x = 6000$. ……6 分

因为 $L''(6000) = -\dfrac{1}{20} < 0$，所以当 $x = 6000$ 时， L 取得极大值，即最大值.

因此，要使利润最大，应生产 6000 件产品. ……7 分

六、(本题满分 6 分)

设 p, q 是大于1的常数，且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，证明：对于任意 $x > 0$，有 $\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q} \ge x$.

证： 记 $f(x) = \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q} - x$，则 ……1 分

$f'(x) = x^{p-1} - 1$ ……2 分

令 $f'(x) = 0$，得 $x = 1$. ……3 分

因为 $f''(x) = (p-1)x^{p-2}, f''(1) = p - 1 > 0$. ……4 分

所以当 $x = 1$ 时， $f(x)$ 取得极小值，即最小值. ……5 分

从而当 $x > 0$ 时，有 $f(x) \ge f(1) = 0$， 即 $\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q} \ge x$. ……6 分

七、(本题满分 13 分)

运用导数的知识作函数 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

解： 显然定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

令 $y' = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 0$，得 $x_1 = -2, x_2 = 3$. ……3 分

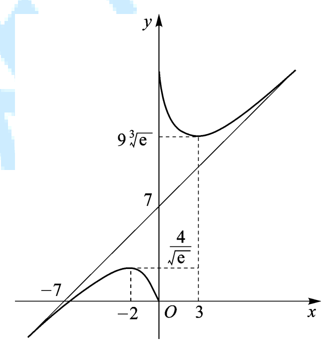
又令 $y''=\dfrac{13x+6}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=0$，得 $x_3=-\dfrac{6}{13}$ ……5 分

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\frac{6}{13})$	$-\frac{6}{13}$	$(-\frac{6}{13},0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−		−		−	0	+
y''	−	−	−	0	+		+	+	+
y	↗∩	极大值	□∩	拐点	↘∪	不存在	□ ∪	极小值	↗∪

可见，极大值为 $y|_{x=-2}=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$，极小值为 $y|_{x=3}=9\sqrt[3]{e}$，

拐点为 $(-\dfrac{6}{13},\dfrac{72}{13}\mathrm{e}^{-\frac{13}{6}})$ ……8 分



又由 $\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$, 知$x=0$为铅直渐近线. ……9 分

而由 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x]=7$

知 $y=x+7$ 为斜渐近线. ……11 分

此外，由于 $\lim\limits_{x\to0^-}y=0$，可知函数曲线的左半支，当 $x\to0$ 时趋向于原点.

综上所述，即可作出图所示的图形. ……13 分

八、(本题满分 8 分)

已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解： 因 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，故 $\left(\dfrac{A}{|A|}\right)A^*=E$，于是 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A=2A$. ……3 分

由于 $(A^{-1}\,|\,E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&5/2&-1&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{array}\right]$$ ……5 分

所以 $$A=\begin{bmatrix}5/2&-1&-1/2\\-1&1&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}.$$ ……6 分

因此 $$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$ ……8 分

九、(本题满分 8 分)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，E 是 n 阶单位矩阵 $(m>n)$. 已知 $BA=E$，试判断 A 的列向量组是否线性相关？为什么？

解： 记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 m 维列向量.

设存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$. ……2 分

即 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,a_n]\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$ 或 $A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$, ……4 分

这时，由于 $BA=E$，故将上式左乘矩阵 B 后，可得 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$, ……6 分

即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 因此矩阵 A 的列向量组线性无关. ……8 分

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 独立，都在区间 $[1,3]$ 上服从均匀分布；引进事件 $A=\{X\le a\}$，$B=\{Y>a\}$.

(1) 已知 $P(A\cup B)=7/9$，求常数 a； **(2)** 求 $\dfrac{1}{X}$ 的数学期望.

解：(1) 设 $p=P(A)$. 由 X 和 Y 同分布，知

$P(\overline{B})=P\{Y\le\alpha\}=P\{X\le\alpha\}=P(A)=p$，故 $P(B)=1-p$. ……1 分

由题设 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+(1-p)-p(1-p)=p^2-p+1=\frac{7}{9}$，……3分

由此得 $p_1=\frac{1}{3},p_2=\frac{2}{3}$.

于是问题有两个解，即 a 有两个可能值：$\alpha_1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$；$\alpha_2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$. ……5分

(2) $E\frac{1}{X}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\ln 3$. ……8分

十一、(本题满分8分) 【 同数学四 第十一题 】