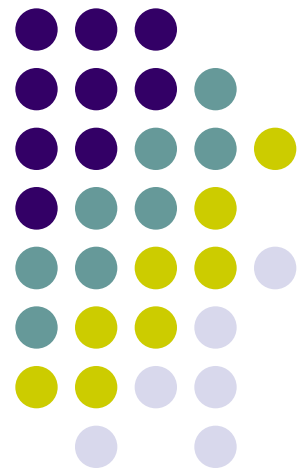


最短通路问题

离散数学 图论初步

南京大学计算机科学与技术系

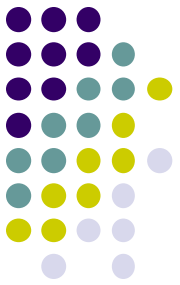




内容提要

- 引言
- **Dijkstra**算法
- 旅行商问题（TSP）

埃德斯数 (Erdős number)

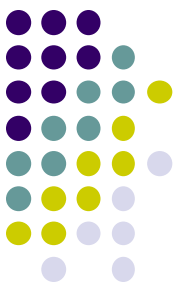


Paul Erdős (1913-1996), Hungary, U.S.A., Israel



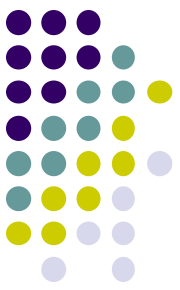
Erdős number





带权图与最短通路问题

- **带权图**：三元组 (V, E, W) ， (V, E) 是图， W 是从 E 到非负实数集的一个函数。 $W(e)$ 表示边 e 的权。
- 一条通路上所有边的权的和称为该通路的长度。
- 两点之间长度**最小**的通路称为两点之间的最短通路，不一定是唯一的。
- **单源点最短路问题**
给定带权图 $G(V, E, W)$ 并指定一个源点，确定该源点到图中其它任一顶点的最短路（长度和路径）。



Dijkstra最短路径的算法思想(1959)

- 源点s到顶点v的最短路径若为s...uv，则s...u是s到u的最短路径。
- (n-1)条最短路径按照其长度的非减次序求得，设它们的相应端点分别为 u_1, \dots, u_{n-1} ，最短路径长度记为 $d(s, u_i)$ ， $i=1, \dots, n-1$ 。
- 假设前i条最短路径已知，第(i+1)条最短路径长度：

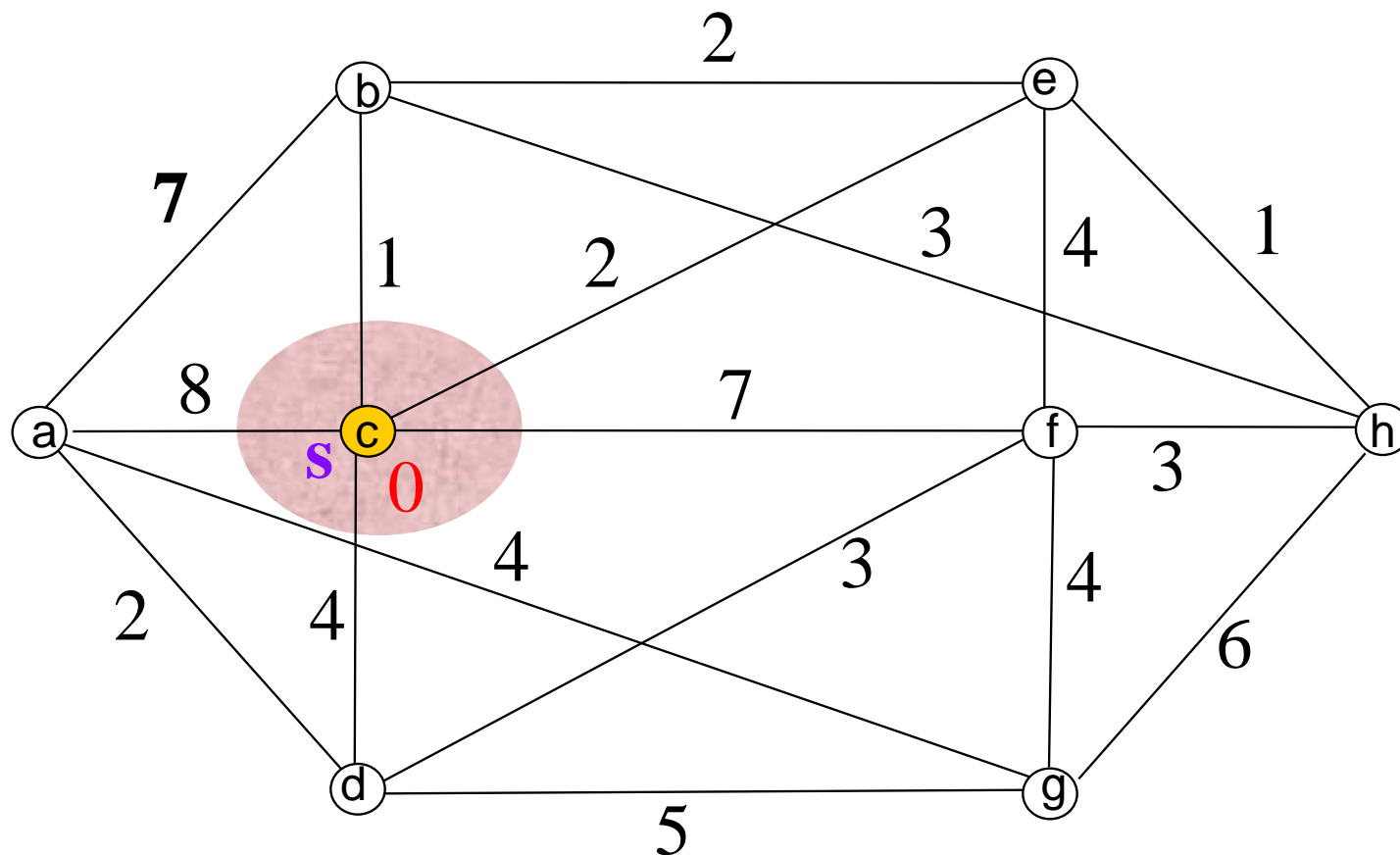
$$d(s, u_{i+1}) = \min\{d(s, u_j) + W(u_j, u_{i+1}) \mid j=1, \dots, i\}$$



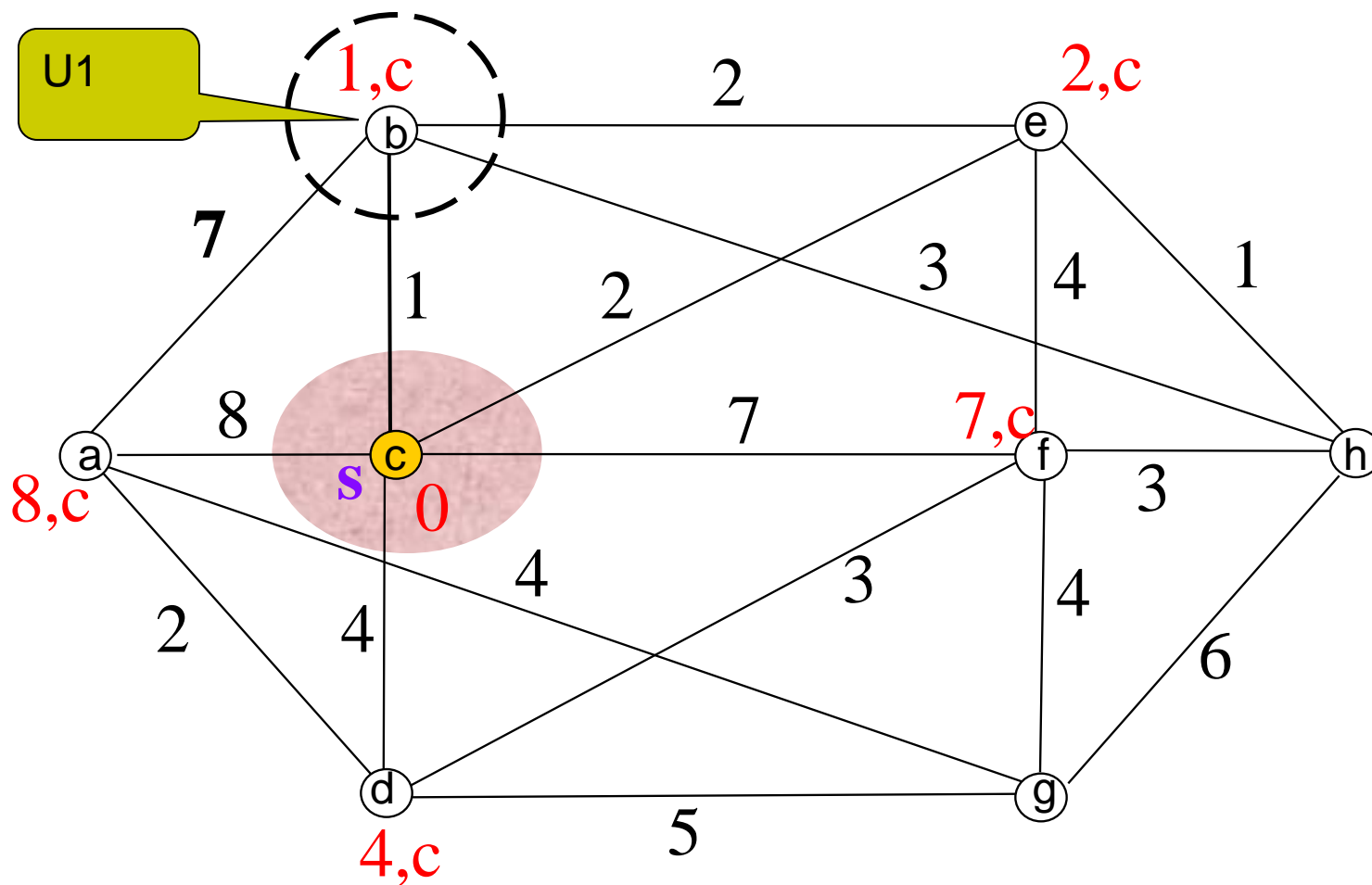
求最短路径的Dijkstra算法

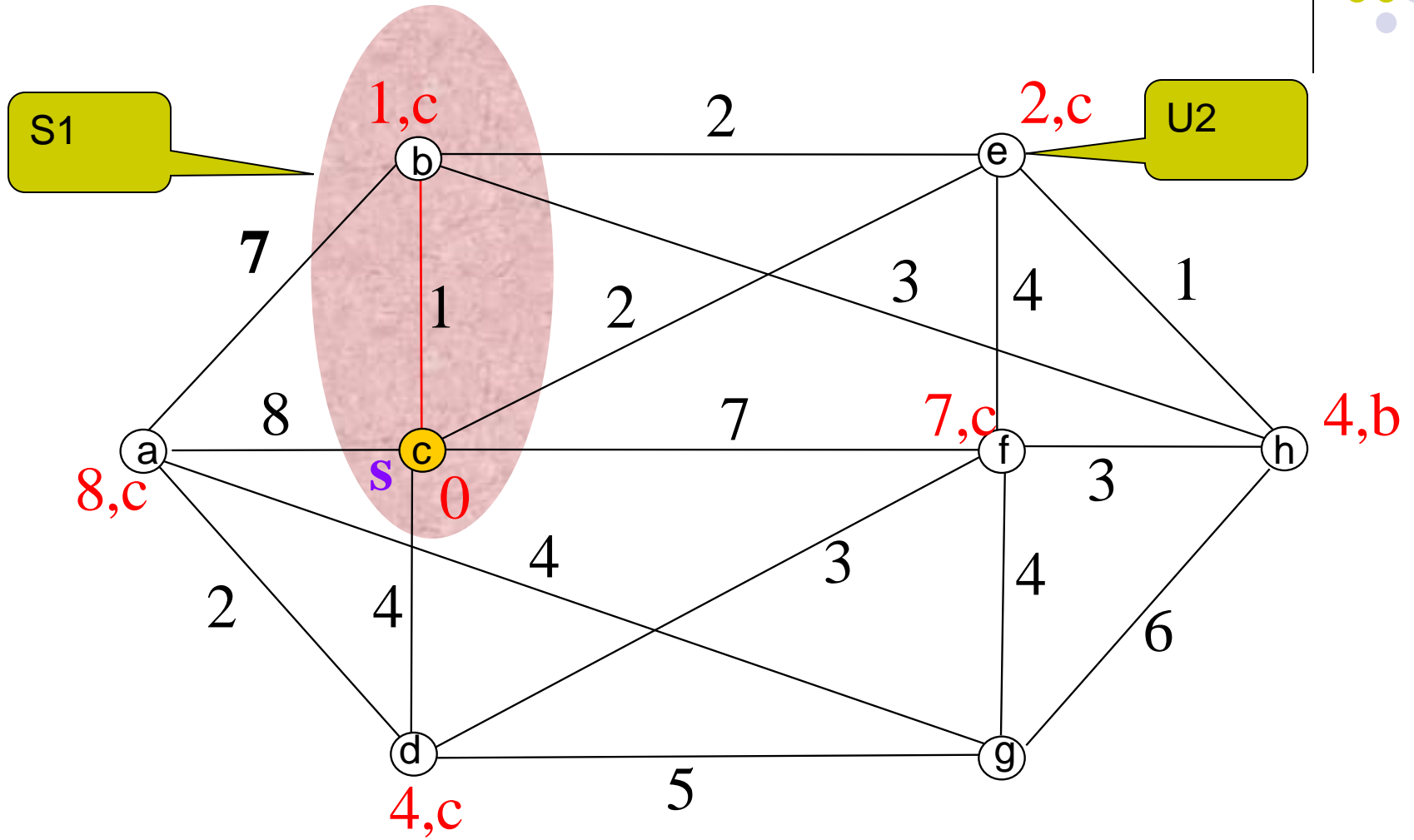
- 输入：连通带权图 G ， $|V_G|=n$ ，指定顶点 $s \in V_G$
- 输出：每个顶点 v 的标注 $(L(v), u)$ ，其中：
 - $L(v)$ 即从 s 到 v 的最短路径长度（目前可得的）
 - u 是该路径上 v 前一个顶点。

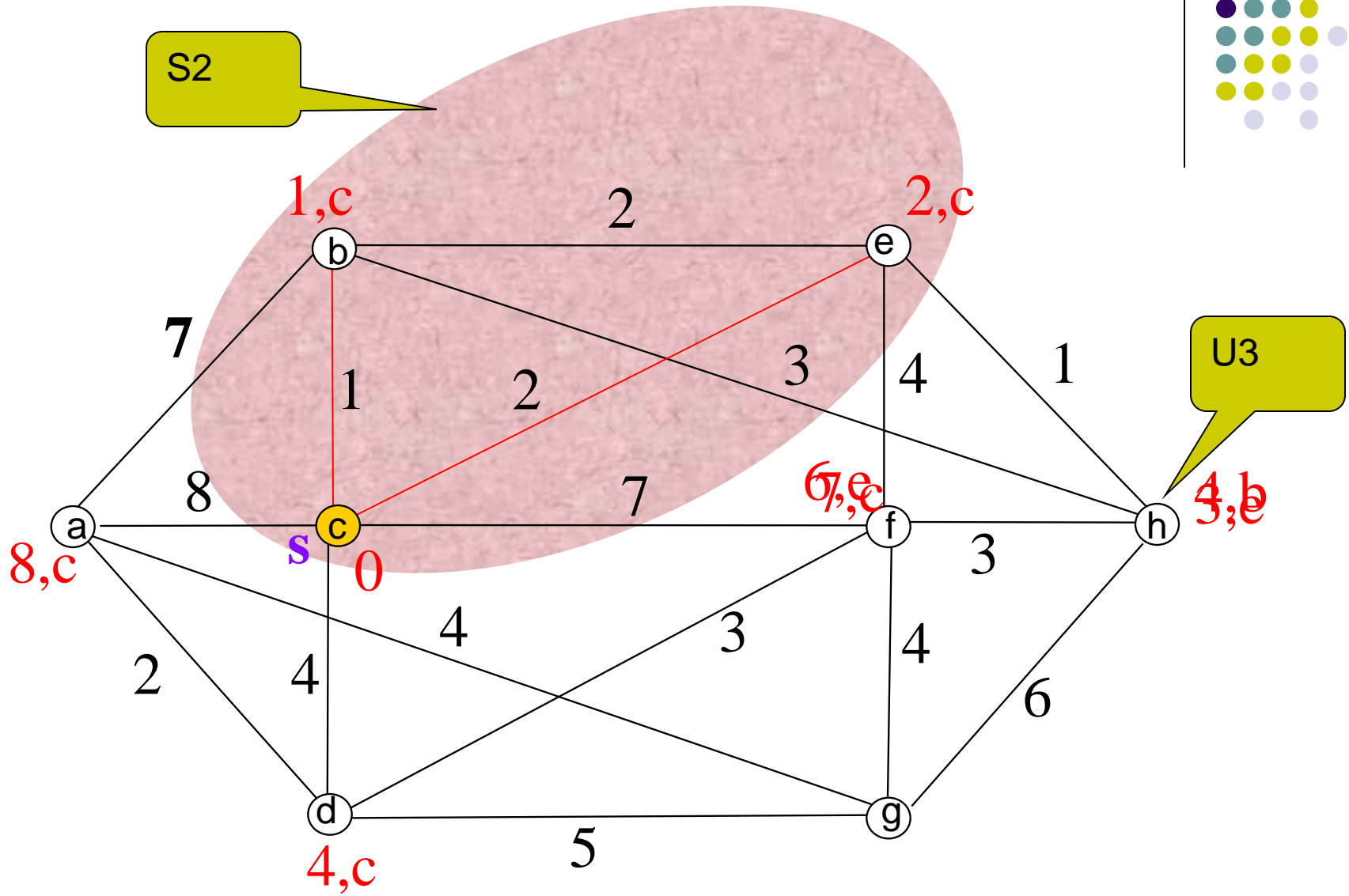
求最短路的一个例子

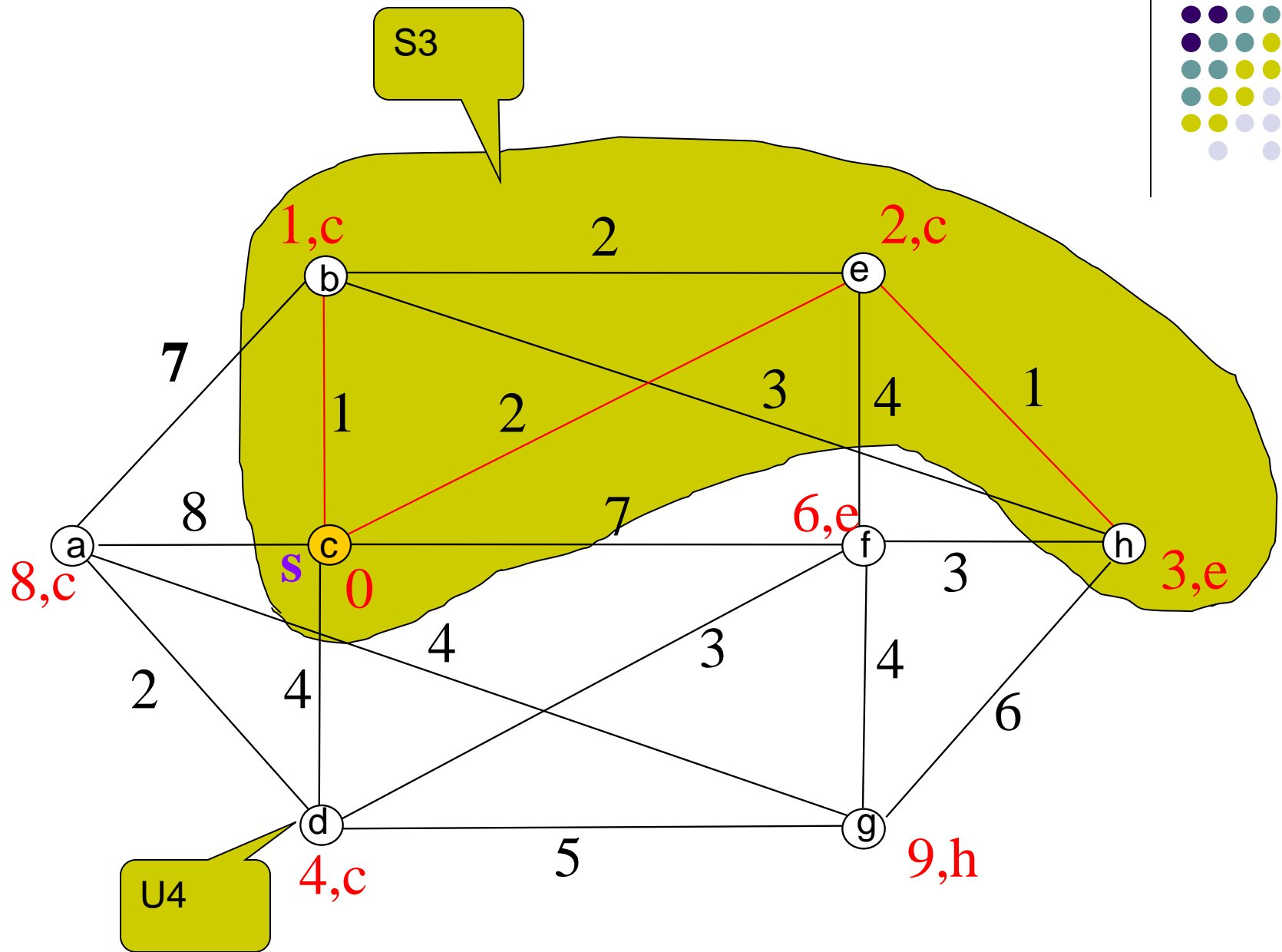


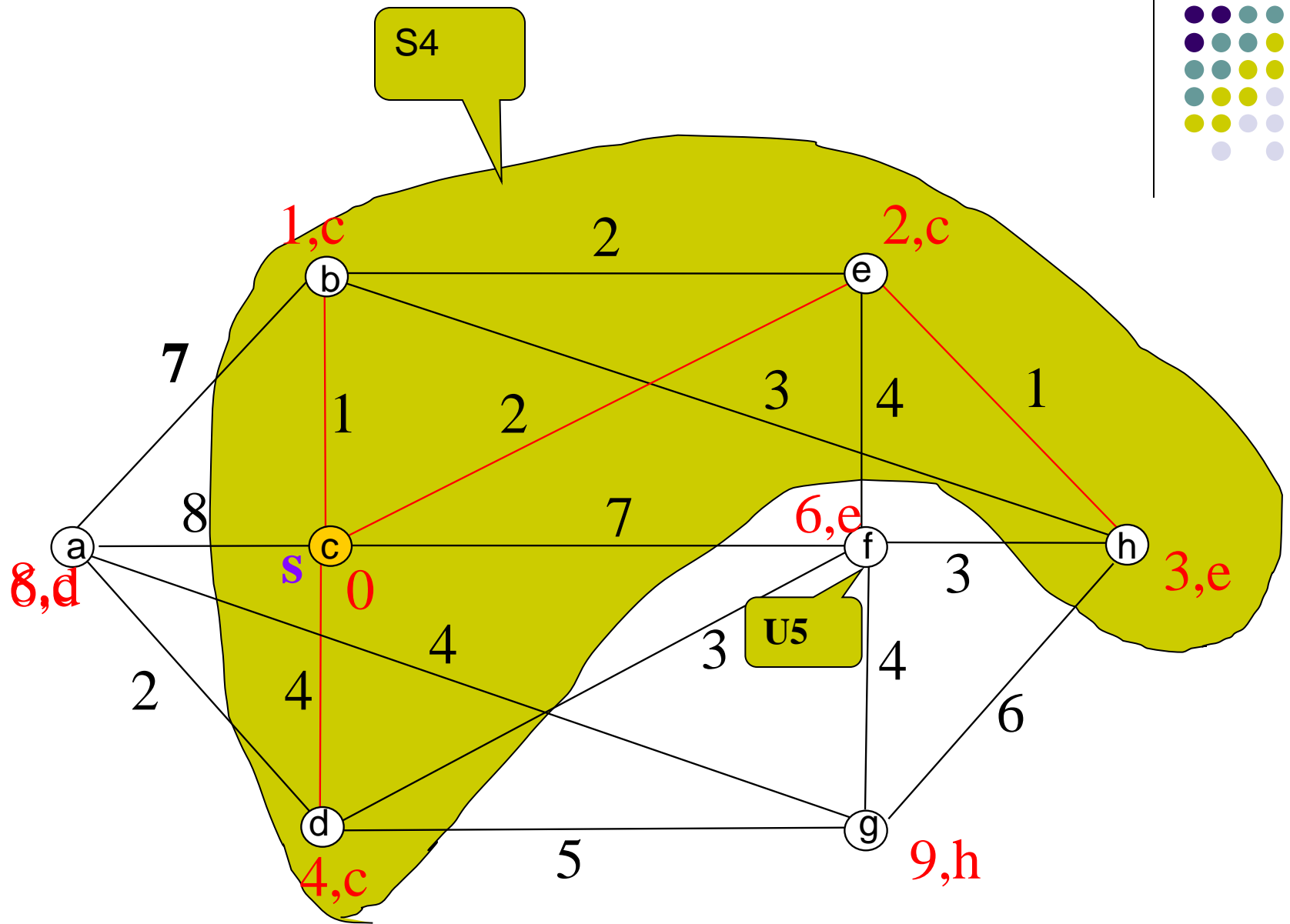
求最短路的一个例子

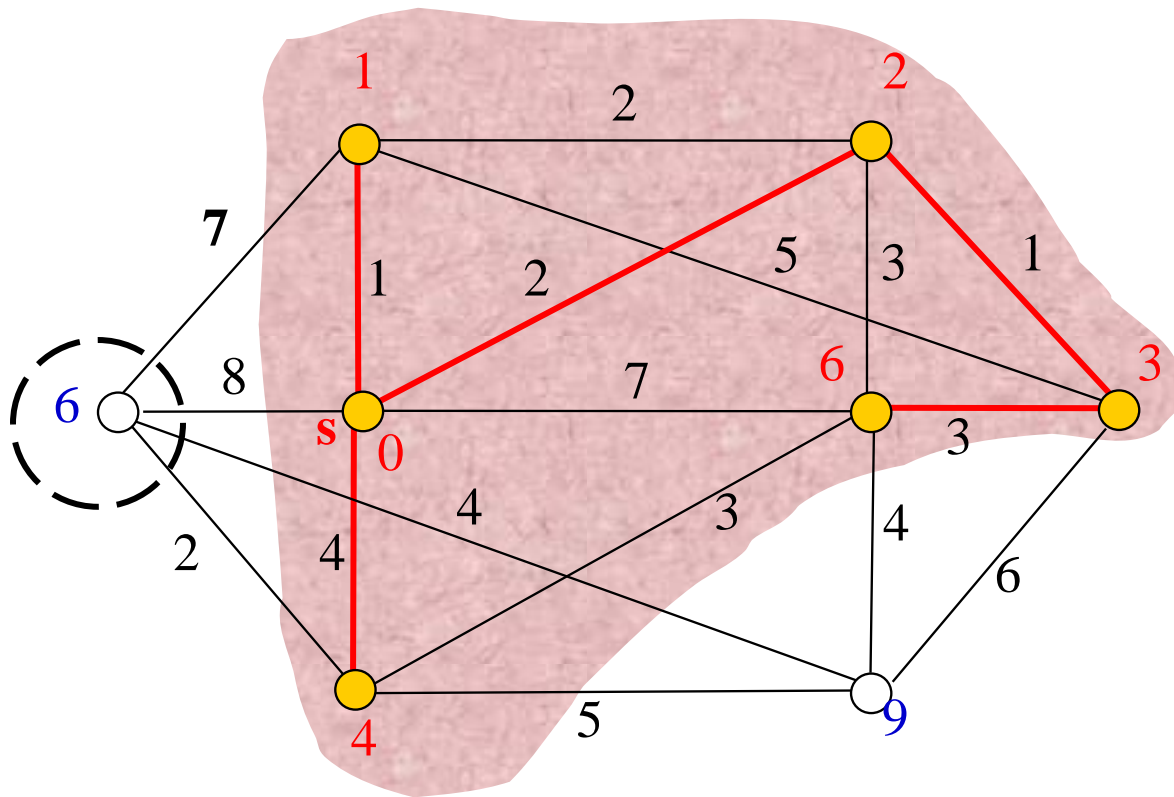
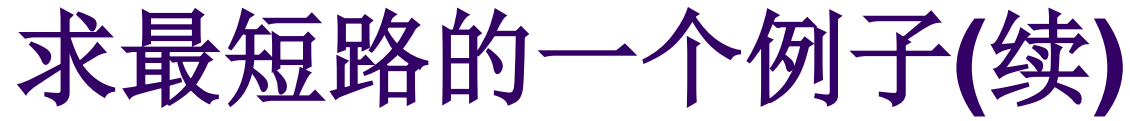






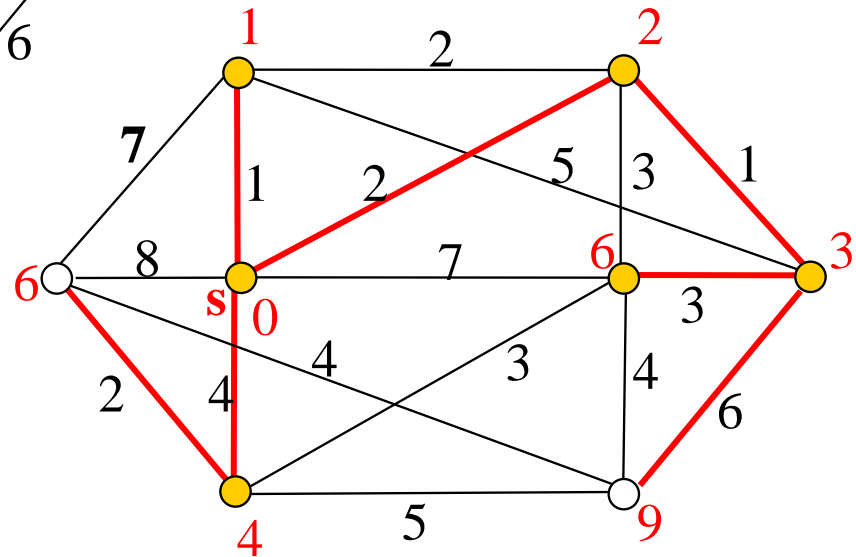
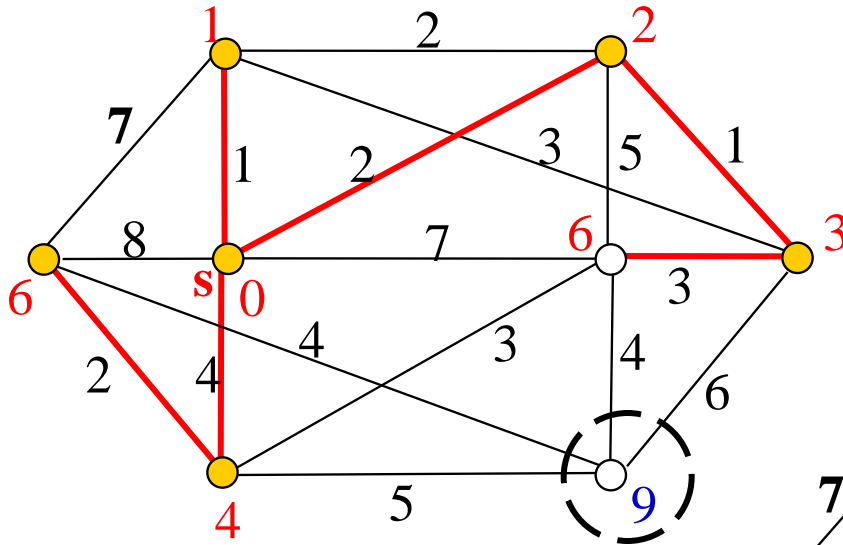








求最短路的一个例子(续)





Dijkstra算法的描述

1. 初始化: $i=0$, $S_0=\{s\}$, $L(s)=0$, 对其它一切 $v \in V_G$, 将 $L(v)$ 置为 ∞ 。
若 $n=1$, 结束。
2. $\forall v \in S_i' = V_G - S_i$, 比较 $L(v)$ 和 $L(u_i) + W(u_i, v)$ 的值 ($u_i \in S_i$)
如果 $L(u_i) + W(u_i, v) < L(v)$, 则将 v 的标注更新为 $(L(u_i) + W(u_i, v), u_i)$,
即: $L(v) = \min\{L(v), \min_{u \in S_i}\{L(u) + W(u, v)\}\}$
3. 对所有 S_i' 中的顶点, 找出具有最小 $L(v)$ 的顶点 v , 作为 u_{i+1}
4. $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$
5. $i = i+1$; 若 $i=n-1$, 终止。否则: 转到第2步。



Dijkstra算法的分析

- 可终止性

- 计数控制

- 正确性

需证明当算法终止时

- $L(v)=d(s, v)$ 对一切 v 成立。
- 由标记中的诸 u_i 确定的路径是一条最短路径

(这里 $d(s, v)$ 是 s 到 v 的最短路径长度, 即距离。)

- 复杂性

- $O(n^2)$

旅行商问题

(Travelling Salesman Problem, TSP)

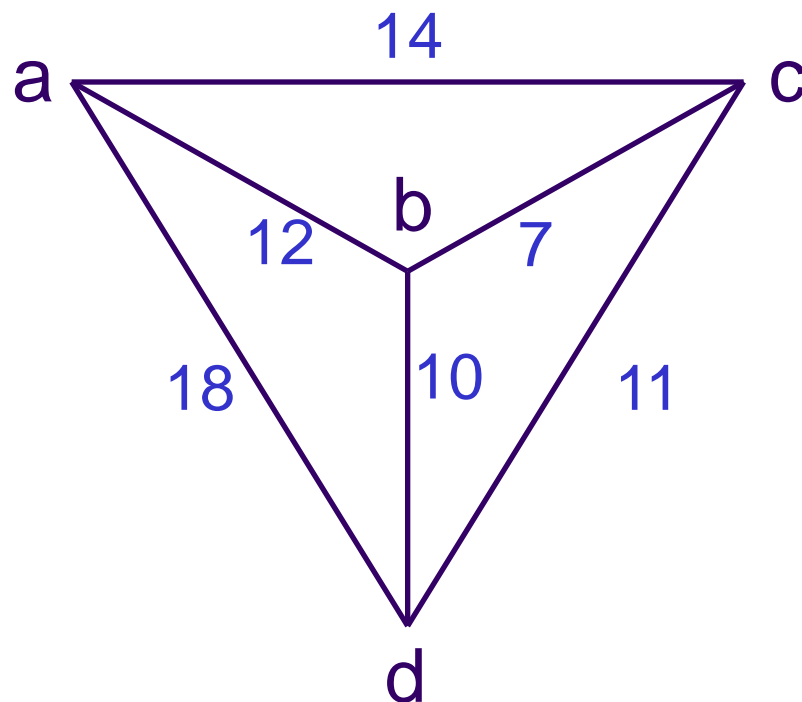


- n 个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它 $n-1$ 城市各一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
 - 数学模型：
 - 无向带权图 G ：顶点对应于城市，边对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示。
 - 问题的解：权最小的哈密尔顿回路。
 - G 是带权完全图，总共有 $(n-1)!/2$ 条哈密尔顿回路。因此，问题是如何从这 $(n-1)!/2$ 条中找出最短的一条。
- (含25个顶点的完全图中不同的哈密尔顿回路有约 3.1×10^{23} 条，若机械地检查，每秒处理 10^9 条，需1千万年。)

旅行商问题



- 一个货郎（销售员）生活在城市a，假定访问的城市是d, b, c，然后回到a，求完成这次访问的最短路径的距离。



旅行商问题

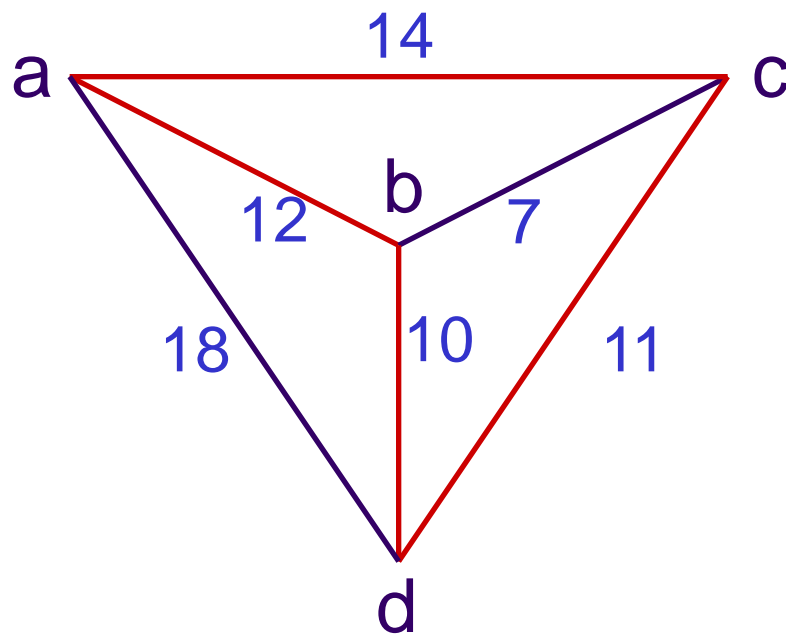


- 解：列出哈密尔顿回路, 并求其距离：

(1) $(abcda) = (12+7+11+18) = 48$

(2) $(acbda) = (14+7+10+18) = 49$

(3) $(abdca) = (12+10+11+14) = 47$



旅行商问题

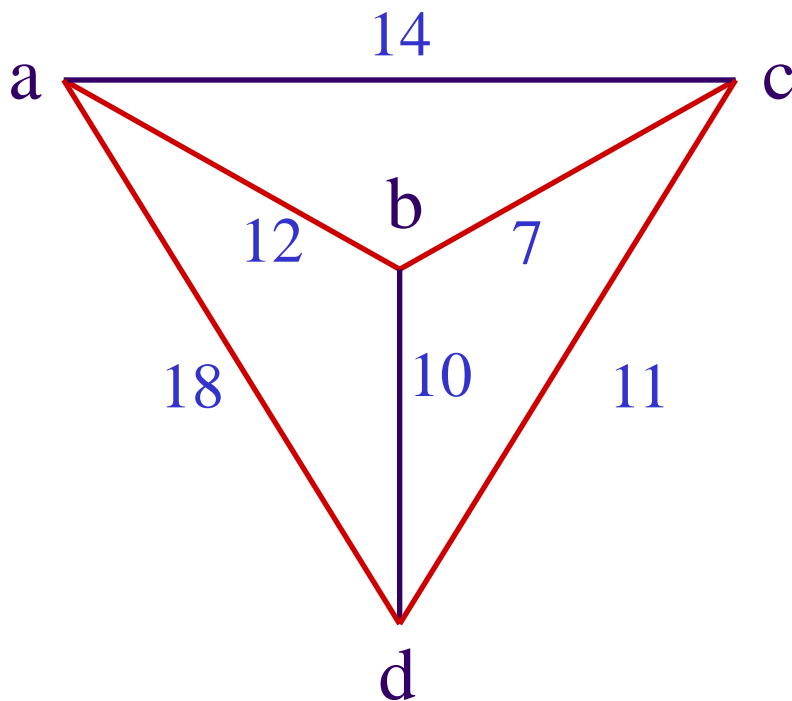


- 哈密尔顿回路（路径）的最短路径问题！
- 下面介绍一种最邻近算法：
 - （1）选择任一顶点作为始点，找出离始点距离最小的顶点，形成一条边的初始路径；
 - （2）设 u 是最新加到这条路径上的顶点，从不在这条路径上的所有顶点中选择一个与 u 距离最小的顶点，把连接 u 与此结点的边加入路径中；重复执行直到 G 中的各顶点均含在这条路径中。

旅行商问题



(3) 把始点到最后加入的顶点的边放入路径中得到一条哈密尔顿回路，并为近似最短的哈密尔顿回路。





旅行商问题(TSP)的研究进展

- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的近似算法
 - 保证: $W \leq W' \leq cW$ ($c=3/2$), 误差为50%
- 实际应用中，已有好的算法能够在几分钟内处理1000个节点的规模，误差在2%。



作业

- 教材[9.6]
 - p.507: 6, 21, 22, 25
- 编程
 - 问题描述： 给你 n 个点， m 条无向边，每条边都有长度 $d>0$ ，给你起点 s 终点 t ，要求使用Dijkstra算法输出起点到终点的最短距离及对应的一条最短路径。如果起点和终点之间没有通路，则输出距离 ∞ 。



编程要求

- 输入

- 输入 n 和 m ，顶点的编号是 $1 \sim n$ 。
- 接着的 m 行，每行3个数 a,b,d ，表示 a 和 b 之间有一条长度为 d 的边。
- 最后一行是两个数 s,t ：表示起点和终点的编号。以 $0\ 0$ 表示输入结束。
($1 < n \leq 1000$, $0 < m < 100000$, $s \neq t$)

- 输出

- 输出第一行最短距离， 第二行最短路径的顶点序列。

样例输入：

3 2
1 2 5
2 3 4
1 3
0 0

样例输出：

9
1 2 3