2014年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及解析(完整精准版)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项的字母填在答题纸指定位置上。

（1）下列曲线中有渐近线的是

（A） $y=x+\sin x$.　　(B) $y=x^2+\sin x$.　　(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$.　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

【解析】 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\frac{1}{x}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$

$\therefore y=x$ 是 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 的斜渐近线

【答案】 C

(2)设函数 $f\left(x\right)$ 具有 2 阶导数，$g\left(x\right)=f\left(0\right)\left(1-x\right)+f\left(1\right)x$,则在区间[0，1]上（　　）

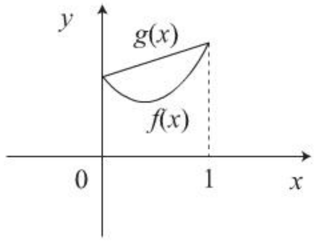
(A)当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$.　　(B)当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$

(C)当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$.　　(D)当 $f'\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$

【解析】 当 $f''\left(x\right)\ \geq 0$ 时，$f\left(x\right)$ 是凹函数

而 $g\left(x\right)$ 是连接 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 与 $(1,f\left(1\right))$ 的直线段，如右图

故 $f\left(x\right)\ \leq g\left(x\right)$



【答案】 D

(3)设 $f\left(x,y\right)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)=$

（A） $\int_0^1 dx\int_1^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

（B） $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$.

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

【解析】积分区域如图

$0 \le y \le 1.$

$-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$

用极坐标表示，即：D_1: $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le 1$

D_2: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

【答案】D

（4）若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)^2 dx\right\}$，则

$a_1\cos x + b_1 \sin x =$

（A）$2\pi\sin x$.　　(B) $2\cos x$.　　(C) $2\pi\sin x$.　　(D) $2\pi\cos x$.

【解析】令 $Z(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)^2 dx$

$$\begin{cases} Z'_a = 2\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)(-\cos x)dx = 0 & (1) \\ Z'_b = 2\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)(-\sin x)dx = 0 & (2) \end{cases}$$

由（1）得　$2a\int_0^{\pi} \cos^2 xdx = 0$　　故 $a = 0, a_1 = 0$

由（2）得　$b = \frac{\int_0^{\pi} x\sin xdx}{\int_0^{\pi}\sin^2 xdx} = 2$　　$b_1 = 2$

【答案】A

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$　　（C）$a^2d^2-b^2c^2$.　　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

【解析】$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第4行展开}}} c(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + d(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$

$$=-c\cdot b(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+d\cdot a\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$
$$=(ad-bc)\cdot bc-ad(ad-bc)$$
$$=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2$$

【答案】 B

(6) 设α_1，α_2，α_3均为 3 维向量，则对任意常数$k,l,$向量组$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组α_1，α_2，α_3线性无关的（　　）

（A）必要非充分条件.　　　　(B)充分非必要条件.

（C）充分必要条件.　　　　(D)既非充分也非必要条件.

【解析】 由$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ k & l\end{pmatrix}$知，

当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，因为$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$

所以$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关

反之不成立　　如当$\alpha_3=0$，α_1与α_2线性无关时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

【答案】 A

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　　）

（A）0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

【解析】 P（A-B）=P（A）-P(AB)

∵A 与 B 相互独立

∴P（AB）=P（A）P（B）

∴P（A-B）= P（A）- P（A）P（B）=P（A）[1-P（B）]=0.3

P（A）(1-0.5）=0.3

∴P（A）=0.6　　P（AB）=P（A）P（B）=0.6×05=0.3

∴P（B-A）=P（B）-P（BA）=0.5-0.3=0.2

【答案】 B

（8）设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$.则（　　）

(A)$EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$　　(B)$EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$

(C)$EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$　　(D)$EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$

【解析】 $EY_1=\int_{-\infty}^{\infty}y[\frac{1}{2}f_1(y)+\frac{1}{2}f_2(y)]dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_1(y)dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy$

$$=\frac{1}{2}EX_1+\frac{1}{2}EX_2$$

$$EY_2=E[\frac{1}{2}(X_1+X_2)]=\frac{1}{2}EX_1+\frac{1}{2}EX_2$$

$\therefore EY_1=EY_2$

$$EY_1^{\ 2}=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\left[\frac{1}{2}f_1(y)+\frac{1}{2}f_2(y)\right]dy=\frac{1}{2}EX_1^{\ 2}+\frac{1}{2}EX_2^{\ 2}$$

$$DY_1=\frac{1}{2}EX_1^{\ 2}+\frac{1}{2}EX_2^{\ 2}-\left(\frac{1}{2}EX_1+\frac{1}{2}EX_2\right)^2=\frac{1}{2}EX_1^{\ 2}+\frac{1}{2}EX_2^{\ 2}-\frac{1}{4}(EX_1)^2-\frac{1}{4}(EX_2)^2-\frac{1}{2}EX_1EX_2$$

$$=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}EX_1^2+\frac{1}{4}EX_2^2-\frac{1}{2}EX_1EX_2$$

$$=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}\left[EX_1^{\ 2}+EX_2^{\ 2}-2E(X_1X_2)\right]=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}\left[E(X_1-X_2)^2\right]$$

$$DY_2=D\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2$$

$\therefore DY_1>DY_2$

【答案】D

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点（1，0，1）处的切平面方程为________.

【解析】在点（1，0，1）处，$z_x\Big|_{(1,0,1)}=[2x(1-\sin y)-y^2\cos x]\Big|_{(1,0,1)}=2$

$$z_y\Big|_{(1,0,1)}=[-x^2\cos y+2y(1-\sin x)]\Big|_{(1,0,1)}=-1$$

切平面方程为 $z_x(x-1)+z_y(y-0)+(-1)(z-1)=0$

即 $2x-y-z-1=0$

（10）设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$,则$f(7)=$________.

【解析】$\because f(x)$ 是周期为 4 的可导函数

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)$　　且$f(0)=0$

又 $f'(x)=2(x-1)$　　$\therefore f(x)=x^2-2x+c$　　将$f(0)=0$代入得$C=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x \quad x\in[0,2]$

$\therefore f(1)=-1$ 从而$f(7)=-f(1)=1$

（11）微分方程 $xy'+y\left(\ln x-\ln y\right)$ =0 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 y=__________.

【解析】 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 即 $xy'+y\ln\frac{x}{y}=0$ 两边同除 x 得

$$y'+\frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}=0$$

令 $u=\frac{y}{x}$， 则 $y=xu$， $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入上式得

$u+x\frac{du}{dx}+u\ln\frac{1}{u}=0$ 整理得

$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}dx$ 两端积分得

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{1}{x}dx+\ln C$$

$$\int\frac{d(\ln u-1)}{\ln u-1}=\int\frac{1}{x}dx+\ln C$$

$$\ln u-1=cx$$

$$u=e^{cx+1}$$

$$y=xe^{cx+1}$$

将$y(1)=e^3$代入上式得$C=2$

$$\therefore y=xe^{2x+1}$$

（12）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲面积分$[\int]zdx+ydz=$__________.

【解析】 令 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=-\sin t\end{cases}$ t: $[0,2\pi]$

$$\therefore \int_L zdx+ydz=\int_0^{2\pi}\left[-\sin t(-\sin t)+\sin t(-\cos t)\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+\int_0^{2\pi}(-\sin t)d\sin t$$

$$=\pi+0=\pi$$

（13）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^2{}_1-x_{{}_2}^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1,则 a 的取值范围

________.

【解析】 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$

因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=|A|$，负惯性指数为 1

$\therefore$ 设 $\lambda_1<0,$ 从而 $\lambda_2\lambda_3\geq 0$

$\therefore |A|\leq 0$

① 若 $|A|<0$，则 $\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0.$ 此时符合题意而 $\left|A\right|=a^2-4$

$\therefore a^2-4<0.$ 即-2<a<2.

② 若 $\left|A\right|=0$,则 $\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3=0,$ 此时 $a=\pm 2$

当 $a=2$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$ $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda+1&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$

$\therefore a=2$ 符合题意

当 a=-2 时 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ $\left|\lambda \mathrm{E}-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda+1&-2\\2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$ 符合题意

综上，a 的取值范围是 $-2\leq a\leq 2$

（14）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2} & ,\theta<x<2\theta\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 是未知数，$X_1,X_2,\ldots,X_\pi$

为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计，则 c=________.

【解析】 $\mathrm{E}(X^2)=\int_\theta^{2\theta}\ x^2\cdot\dfrac{2x}{3\theta^2}d\theta=\dfrac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3dx=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3\theta^2}x^4\Big|_\theta^{2\theta}$

$$=\frac{1}{6\theta^2}\cdot 15\theta^4=\frac{5}{2}\theta^2.$$

$$\mathrm{E}(C\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=C\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)=C\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2\Rightarrow C=\frac{2}{5n}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程成消算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$。

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}。$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值。

【解】 由 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 得

$3y^2\dfrac{dy}{dx}+y^2+2xy\dfrac{dy}{dx}+2xy+x^2\dfrac{dy}{dx}=0$，解得

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy+y^2}{x^2+2xy+3y^2}$，由 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 得 $y=-2x$，代入原式得 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(2y+2x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx})(x^2+2xy+3y^2)-(2xy+y^2)(2x+2y+2x\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx})}{(x^2+2xy+3y^2)^2}$$

将 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ 代入得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4}{9}>0$，故 $x=1$ 为最小点，最小值为 $y=-2$。

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y\cdot f'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y\cdot f'$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\cos^2 y\cdot f''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\sin^2 y\cdot f''$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}f''$，

令 $u=e^x\cos y$，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 得

$f''(u)=4f(u)+u$，或 $f''(u)-4f(u)=u$，

解得 $f(u)=C_1e^{-2u}+C_2e^{2u}-\frac{1}{4}u$，

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ -2C_1+2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=-\frac{1}{16},C_2=\frac{1}{16}$，

故 $f(u)=-\frac{1}{16}(e^{-2u}-e^{2u})-\frac{1}{4}u$。

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy。$$

【解】令 $\Sigma_0:z=1$（$x^2+y^2\le 1$），取下侧，其中 Σ 与 Σ_0 围成的几何体为 Ω，

由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dv$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x^2+y^2)-6x-6y+7]dv=-\iiint_{\Omega}[3(x^2+y^2)+7]dv$$

$$=-\int_0^1dz\iint_{x^2+y^2\le z}[3(x^2+y^2)+7]dv=-\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}(3r^3+7r)dr$$

$=-2\pi\int_0^1(\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{2}z)dz=-2\pi(\frac{1}{4}+\frac{7}{4})=-4\pi$，

而 $\iint\limits_{\Sigma_0}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_0}(z-1)dxdy=0$，

故 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-4\pi$。

（19）（本题满分 10 分）设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$，

$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（II）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛。

【证明】

（I）方法一

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，等式 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 两边取极限得 $\cos a-a=1$。

令 $\varphi(x)=1-\cos x+x$，$\varphi(0)=0$，

因为 $\varphi'(x)=\sin x+1\geq 0$，所以 $\varphi(x)$ 单调增加，由 $\varphi(x)=0$ 得 $x=0$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=0$。

方法二

由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 得 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$，从而 $0<a_n<b_n$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（II）由 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$ 得

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=-\frac{2\sin(\frac{a_n+b_n}{2})\sin(\frac{a_n-b_n}{2})}{b_n}\sim\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n},$$

因为 $0\leq\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}\leq\frac{b_n}{2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$ 收敛，

由比较审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。

（20）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵。

（I）求方程组$AX=O$的一个基础解系。

（II）求满足$AB=E$的所有矩阵B。

【解】

（I）$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$，

则方程组$AX=O$的一个基础解系为$\xi=(-1,2,3,1)^T$。

（II）令$B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$，

$$AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}&x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}&x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}\\x_4-x_7+x_{10}&x_5-x_8+x_{11}&x_6-x_9+x_{12}\\x_1+2x_4-3x_{10}&x_2+2x_5-3x_{11}&x_3+2x_6-3x_{12}\end{pmatrix},$$

由$AB=E$得

$\begin{cases}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1\\x_4-x_7+x_{10}=0\\x_1+2x_4-3x_{10}=0\end{cases}$、$\begin{cases}x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0\\x_5-x_8+x_{11}=1\\x_2+2x_5-3x_{11}=0\end{cases}$、$\begin{cases}x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0\\x_6-x_9+x_{12}=0\\x_3+2x_6-3x_{12}=1\end{cases}$。

由$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&-1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5&4\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}$$得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_7\\x_{10}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_1\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix};$$

由$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\0&4&-3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}$$得

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_5\\x_8\\x_{11}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-k_2\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix};$$

由$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}$$得

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_6\\x_9\\x_{12}\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-k_3\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix},$$

故$B=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数）。

（21）（本题满分 11 分）证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似。

【证明】

令$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$，

由$|\lambda E-A|=0$得A的特征值为$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$，

由$|\lambda E-B|=0$得B的特征值为$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$。

因为$A^T=A$，所以A可对角化；

对B，因为$r(0E-B)=r(B)=1$，所以B可对角化，

因为A,B特征值相同且都可对角化，所以$A\sim B$。

（22）（本题满分 11 分）设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$。

（I）求Y得分布函数$F_Y(y)$。

（II）求EY。

【解】

（I）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$

$=\dfrac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\dfrac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$，

$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{2}=\dfrac{3y}{4}$；

当$1\le y<2$时，

$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{2}=\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}$；

当$y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$，

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{3y}{4},0\le y<1\\ \dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2},1\le y<2\\ 1, y\ge 2\end{cases}$。

（II）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4},0<y<1\\ \dfrac{1}{4},1<y<2\\ 0,其他\end{cases}$，

$EY=\int_0^1\frac{3x}{4}dx+\int_1^2\frac{x}{4}dx=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$。

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}},x\ge 0\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（I）求 EX 及 EX^2。

（II）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$。

（III）是否存在实数 a，使得对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\ge\varepsilon\}=0$？

【解】

（I）$f(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ \dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}},x>0\end{cases}$。

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx\overset{\frac{x^2}{\theta}=t}{=}2\int_0^{+\infty}te^{-t}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{t}}dt$$

$$=\sqrt{\theta}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}dt=\sqrt{\theta}\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}。$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(\frac{x^2}{\theta})=\theta\Gamma(2)=\theta。$$

（II）似然函数$L(\theta)=\dfrac{2^n x_1 x_2\cdots x_n}{\theta^n}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta}}$，

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta},$$

由$\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta^2}=0$得

θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$。

（III）由大数定律得$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$EX^2=\theta$，

故存在$a=\theta$，使得对任意的$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\geq\varepsilon\}=0$。