1996 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数　学（试卷一）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$，则 $a=$ __ln2__.

(2) 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为 __$2x+2y-3z=0$__.

(3) 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为 $\underline{y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x+1)}$

(4) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在 A(1，0，1)处沿点 A 指向点 B(3，-2，2)方向的方向导数为 __$\frac{1}{2}$__.

(5) 设 A 是 4 ×3 矩阵，且 A 的秩 r(A)=2,而 $B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，则 r(AB) = __2__.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于　　(D)

(A) -1.　　(B) 0 .　　(C) 1 .　　(D) 2.

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则　　(B)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$　　(A)

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　（C） 发散　　(D) 敛散性与 λ 有关.

(4) 设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 同阶无穷小，则 k 等于 (C)

(A) 1. （B）2. (C) 3. (D) 4.

(5) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于 (D)

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C)（$a_1a_2-b_1b_2$）（$a_3a_4-b_3b_4$） (D) （$a_2a_3-b_2b_3$）（$a_1a_4-b_1b_4$）

三、(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分)

(1) 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长, 其中 $a>0$.

解： $r'(\theta)=-a\sin\theta$， ……2 分

$$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}d\theta=2a|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta$$ ……3 分

利用对称性，所求心形线的全长 $s=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a$. ……5 分

(2) 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ (n=1,2,…)，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证： 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$，知 $x_1>x_2$.

假设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，故由归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$.即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. ……3 分

又由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，显见 $x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界.

根据极限存在准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. ……4 分

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$.从而 $a^2-a-6=0$.因此 $a=3$或$a=-2$.因为 $x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$,所以 $a\geq 0$.舍去 $a=-2$，故极限值 $a=3$. ……5 分

四、(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint\limits_S(2x+z)\,dydz+zdxdy$,其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2$，$(0\leq z\leq 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解一： 以 S_1 表示法向量指向 z 轴负向的有向平面 $z=1\,(x^2+y^2\leq 1)$，D 为 S_1 在 XOY 平面上的投影区域，则 $\iint\limits_{S_1}(2x+z)dxdy+zdxdy=\iint\limits_D(-dxdy)=-\pi$. ……2 分

记Ω表示由S和S_1所围的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint\limits_{S+S_1}(2x+z)dxdy+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}(2+1)dv$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-6\pi\int_0^1(r-r^3)dr=-6\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=-\frac{3\pi}{2}.$$ ……5分

因此$\iint\limits_{S_1}(2x+z)dxdy+zdxdy=-\frac{3\pi}{2}-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}$. ……6分

解二： 以D_{yz},D_{xy}表示S在YOZ平面, XOY平面上的投影区域，则

$$\iint\limits_S(2x+z)dxdy+zdxdy=\iint\limits_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)(-dydz)+\iint\limits_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)dydz+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=-4\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$ ……2分

其中$\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz=\int_{-1}^1 dy\int_{y^2}^1\sqrt{z-y^2}dz=\frac{4}{3}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy\overset{y=\sin t}{=\!=\!=}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$;

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\frac{\pi}{2},$$ ……5分

所以$\iint\limits_{S_1}(2x+z)dxdy+zdxdy=-4.\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$. ……6分

(2) 设变换$\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$可把方程$6\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$. ……1分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$ ……4分

将上述结果代入原方程，经整理后得$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

依题意知a应满足$6+a-a^2=0$, 且$10+5a\neq0$，解之得$a=3$. ……6分

五、(本题满分7分)

求级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解：设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}\quad(|x|<1)$， ……1 分

则 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})x^n$，

其中 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$． $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\quad(x\neq 0)$． ……3 分

设 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，则 $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$．

于是 $g(x)=g(x)-g(0)=\int_0^x g'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)\ \ (|x|<1)$．

从而 $S(x)=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}]$

$=\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)\ \ (|x|<1\text{且}x\neq 0)$． ……5 分

因此 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$． ……7 分

六、(本题满分 7 分)

设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

解：曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$． ……1 分

令 $X=0$，得截距 $Y=f(x)-xf'(x)$． ……3 分

由题意，知 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-xf'(x)$．即 $\int_0^x f(t)dt=x[f(x)-xf'(x)]$．

上式对 x 求导，化简得 $xf''(x)+f(x)=0$， ……5 分

即 $\frac{d}{dx}(xf'(x))=0$，积分得 $xf'(x)=C_1$．

因此 $f(x)=C_1\ln x+C_2$（其中 C_1,C_2 为任意常数）． ……7 分

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\le a$， $|f''(x)\le b|$，其中 a,b 都是非负常数， c 是 $(0,1)$ 内的任意一点.证明 $|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$．

证： $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)(x-c)^2}{2!}$，　(*)

其中 $\xi=c+\theta(x-c), 0<\theta<1.$ ……2 分

在(*)式中令 $x=0$，则有 $f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_1)(0-c)^2}{2!}$，　$0<\xi_1<c<1;$

在(*)式中令 $x=1$，则有 $f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!}$，　$0<c<\xi_2<1;$

上述两式相减得 $f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{1}{2!}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right].$ ……5 分

于是 $|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)-\dfrac{1}{2!}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]\right|$

$$\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2!}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|c^2$$

$$\le a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$ ……7 分

又因 $c\in(0,1), (1-c)^2+c^2\le 1$，故 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$. ……8 分

八、(本题满分 6 分)

设 $A=I-\xi\xi^T$，其中 I 是 n 阶单位矩阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 是 ξ 的转置. 证明：

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi=1$；**(2)** 当 $\xi^T\xi=1$ 时，A 是不可逆矩阵.

证：(1) $A^2=(I-\xi\xi^T)(I-\xi\xi^T)=I-2\xi\xi^T+\xi\xi^T\xi\xi^T$

$$=I-\xi(2-\xi^T\xi)\xi^T=I-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T.$$

$A^2=A$ 即 $I-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T=I-\xi\xi^T$，亦即 $(\xi^T\xi-I)\xi\xi^T=\mathbf{O}$，因为 ξ 是非零列向量，$\xi\xi^T\ne 0$，故 $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi\xi^T-1=0$，即 $\xi\xi^T=1$. ……3 分

(2) 用反证法：当 $\xi\xi^T=1$ 时 $A^2=A$. 若 A 可逆，则有 $A^{-1}A^2=A^{-1}A$，从而 $A=I$. 这与 $A=I-\xi\xi^T\ne I$ 矛盾，故 A 是不可逆矩阵. ……6 分

九、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1+5x_2+cx_3-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值；

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2x_3)=4$ 表示何种二次曲面.

解：(1) 此二次型对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$， ……1 分

因 $r(A)=2$，故 $|A|=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{vmatrix}=0$，解得 $c=3$.容易验证此时 A 的秩的确是 2. ……3 分

这时，$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，故所求特征值为 $\lambda=0,\lambda=4,\lambda=9$. ……6 分

(2) 由上述特征值可知，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面. ……8 分

十、填空题 (本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

(1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 A 生产的概率是 $\underline{\ \frac{3}{7}\ }$.

(2) 设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量，则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=\underline{\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ }$.

十一、(本题满分 6 分)

设 ξ,η 是相互独立且服从同一分布的随机变量，已知 ξ 的分布律为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3$. 又设 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min\{\xi,\eta\}$.

(1) 写出二维随机变量 (X,Y) 发分布律；**(2)** 求随机变量 X 的数学期望.

解：(1)

X \ Y	1	2	3
1	1 / 9	0	0
2	2 / 9	1 / 9	0
3	2 / 9	2 / 9	1 / 9

……4 分

(2) $E(X)=\frac{1}{9}\cdot1+\frac{3}{9}\cdot2+\frac{5}{9}\cdot3=\frac{22}{9}$ ……6 分

注：写对分布律中的 1 个数得 1 分，2～4 个得 2 分，5～7 个得 3 分，8～9 个得 4 分.

数 学（试卷二）

一、填空题【 同数学一 第一题 **】**

二、选择题【 同数学一 第二题 **】**

三、(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分)

(1) 计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D=$\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\right\}$.

解： 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot rdr=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta$ ……3 分

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}\,.$$ ……5 分

(2) **【** 同数学一 第三、(1) 题 **】**

(3) **【** 同数学一 第三、(2) 题 **】**

四 ~ 七、【 同数学一 第四 ~ 七题 **】**

八、(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

(1) 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系.

解： $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ……3 分

解得基础解系为 $\xi_1=(-1,0,-1,0,1),\xi_2=(1,-1,0,0,0)$. ……6 分

(2) **【** 同数学一 第八题 **】**

九、(本题满分 8 分)【 同数学一 第九题 **】**

数 学（试卷三）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'\big|_{x=0}=$ $\underline{\quad 1/3 \quad}$.

(2) $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=\underline{\quad 2 \quad}$.

(3) $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $\underline{y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=\underline{\quad 2 \quad}$.

(5) 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$, $x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=\underline{\ln 2-\frac{1}{2}}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 （A）

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1$ (B) $a=1, b=1$ (C) $a=-\frac{1}{2}, b=1$ (D) $a=-1, b=1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 （C）

(A) 间断点 (B) 连续而不可导的点

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$. (D) 可导的点，且 $f'(0)\ne 0$

(3) 设 $f(x)$ 处处可导，则 （D）

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(4) 在区间 $(-\infty,\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ （C）

(A) 无实根 (B) 有且仅有一个实根 (C) 有且仅有二个实根 (D) 有无穷多个实根

(5) 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x)$，$y=f(x)$，$x=a$ 及 $x=b$ 所围成图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为 （B）

(A) $\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

(C) $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

(D) $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx.$

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分)

(1) 计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$

解一： 原式 $=\int_0^{\ln 2} e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}dx=-e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ ……3 分

$=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})\Big|_0^{\ln 2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$. ……5 分

解二： 令 $e^{-x}=\sin t$，则 $dx=\frac{-\cos t}{\sin t}dt$，

原式 $=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt$ ……3 分

$=-\ln(\csc t+\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……5 分

(2) 求 $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

解一： 原式 $=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ ……2 分

$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$. ……5 分

解二： 原式 $=\int\frac{dx}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}$ ……3 分

$=2\int\frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$. ……5 分

(3) 设 $\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)du\\ y=[f(t^2)]^2\end{cases}$，其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\frac{dx}{dt}=f(t^2),\ \frac{dy}{dt}=4tf(t^2)f'(t^2),$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4tf(t^2)f'(t^2)}{f(t^2)}=4tf'(t^2)$. ……2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$$ ……5 分

(4) 求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

解： $f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1$，$f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$. ……3 分

所以 $f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n 2x^n+(-1)^{n+1}\dfrac{2x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}$ （ξ 在 0 与 x 之间).……5 分

(5) 求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

解一： 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$，解之得 $\lambda=0,\lambda=-1$，

故齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}$. ……2 分

设非齐次方程的特解为 $x(ax^2+bx+C)$，代入原方程得 $a=\dfrac{1}{3},b=-1,c=2$.

因此，原方程的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$. ……5 分

解二： 令 $p=y'$，代入原方程得 $p'+p=x^2$， ……2 分

故 $p=e^{-x}\left(\int x^2e^x dx+C_0\right)=e^{-x}\left(x^2e^x-2xe^x+2e^x+C_0\right)$.

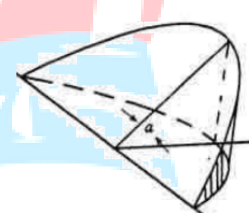
再积分得到 $y=\int(x^2-2x+2+c_0e^{-x})dx=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$. ……5 分

解三： 原方程为 $(y'+y)'=x^2$，两边积分得 $y'+y=\dfrac{1}{3}x^3+C_0$. ……3 分

$$y=e^{-x}\left[\int\left(\frac{1}{3}x^3+C_0\right)e^x dx+C_2\right]=e^{-x}\left[\frac{1}{3}\left(x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x\right)+C_0e^x+C_2\right]$$

$=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$. ……5 分

(6) 设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a$、$2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 解（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）的平面截此柱体，得一楔形体（如图），求此楔形体的体积 V.



解一：底面椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，以垂直于 y 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为直角三角形，其一直角边长为 $a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$，另一直角边长为 $a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\tan\alpha$，故截面面积 $S(y)=\dfrac{a^2}{2}\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha$， ……3 分

楔形体的体积为 $V=2\int_0^b\dfrac{a^2}{2}\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha dy=\dfrac{2a^2b}{3}\tan\alpha$. ……5 分

解二：底面椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，以垂直于 x 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为矩形，其一边长为 $2y=2b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$，另一边长为 $x\tan\alpha$，故截面面积

$S(x)=2bx\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\tan\alpha$， ……3 分

楔形体的体积为 $V=\int_0^b 2bx\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\tan\alpha dx=b\tan\alpha\left[\dfrac{-2a^2}{3}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\dfrac{2a^2b}{3}\tan\alpha$. ……5 分

四、(本题满分 8 分)

计算不定积分 $\int\dfrac{arctgx}{x^2(1+x^2)}dx$.

解一：原式 $=\int\dfrac{\arctan x}{x^2}dx-\int\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$ ……2 分

$=-\dfrac{\arctan x}{x}+\int\dfrac{dx}{x(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$ ……4 分

$=-\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\right)d(x^2)-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$ ……6 分

$=-\dfrac{\arctan x}{x}-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}+C$. ……8 分

解二：令 $x=\tan t$，则

原式 $=\int t(\csc^2 t-1)dt$ ……2 分

$=-t\cot t+\int\dfrac{\cos t}{\sin t}dt-\dfrac{1}{2}t^2$ ……4 分

$$= -t\cot t + \ln|\sin t| - \frac{1}{2}t^2 + C \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C. \qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

五、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, x<-1, \\ x^3 \quad ,-1\le x\le 2, \\ 12x-16, x>2. \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) 问 $g(x)$ 是否有间断点与不可导点，若有，指出这些点.

解：(1) 由题设， $f(x)$ 的反函数为 $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & x<-1 \\ \sqrt[3]{x} & -1\le x\le 8. \\ \dfrac{x+16}{12} & x>8 \end{cases}$ ……4 分

(2) $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，没有间断点. ……5 分

$g(x)$ 的不可导点是 $x=0$ 及 $x=-1$. ……8 分

（注：多写一个不可导点 $x=8$ 扣 1 分）

六、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定. 试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它们是否为极值点.

解：对原方程两边求导可得 $3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0 \quad (*)$ ……2 分

令 $y'=0$，得 $y=x$.将此代入原方程有 $2x^3-x^2-1=0$.从而解得唯一的驻点 $x=1$.……5 分

$(*)$ 式两边求导，得 $(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0$.

因此 $y''|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$，故驻点 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 的极小值点. ……8 分

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$， $f'(a)f'(b)>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

证一：先用反证法证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，

则在区间(a,b)内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$．不妨设 $f(x)>0$（对 $f(x)<0$，类似可证），

则 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}\le 0$， ……3 分

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}\ge 0$.

从而 $f'(a)f'(b)\le 0$，这与已知条件矛盾．这即证得存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$. ……5 分

再由 $f(a)=f(\xi)=f(b)$ 及罗尔定理，知存在$\eta_1\in(a,\xi)$和$\eta_2\in(\xi,b)$，使得 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$．又在区间$[\eta_1,\eta_2]$上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理知，存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$. ……8 分

证二：不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$（对 $f'(a)<0, f'(b)<0$类似可证），即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$，$\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$．故存在$x_1\in(a,a+\delta_1)$和$x_2\in(b-\delta_2,b)$，使 $f(x_1)>0$ 及 $f(x_2)<0$，其中δ_1,δ_2为充分小的正数．显然 $x_1<x_2$，在区间$[x_1,x_2]$上应用介值定理知，存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$. ……5 分

以下同证一.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题$\begin{cases} y'+ay=f(x) \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$的解 $y=y(x)$，其中 a 是正常数；

(2) 若$\left|f(x)\right|\le k$ (k 为常数)，证明：当 $x\ge 0$ 时，有$|y(x)|\le\dfrac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

证一：(1) 原方程的通解为 $y(x)=e^{-ax}[\int f(x)e^{ax}dx+C]=e^{-ax}[F(x)+C]$， ……2 分

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数.由 $y(0)=0$ 得 $C=-F(0)$，故

$y(x)=e^{-ax}[F(x)-F(0)]=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$. ……4 分

(2) $\left|y(x)\right|\le e^{-ax}\int_0^x\left|f(t)\right|e^{at}dt$ ……6 分

$$\le ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt\le\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}),x\ge 0.$$ ……8 分

证二：在原方程的两端同乘以e^{ax}，得 $y'e^{ax}+aye^{ax}=f(x)e^{ax}$.

从而$(ye^{ax})'=f(x)e^{ax}$， ……2 分

所以 $ye^{ax}=\int_0^x f(t)e^{at}dt$ 或 $y=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$. ……4 分

（2）同证一

数 学（试卷四）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设方程 $x = y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy = \underline{\dfrac{dx}{x(1+\ln y)}}$.

(2) 设 $\int xf(x)dx = \arcsin x + c$，则 $\int \dfrac{dx}{f(x)} = \underline{-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C}$.

(3) 设（x_0, y_0）是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数 a,b,c 应满足的关系是 $\underline{c/a \geq 0(\text{或} ax_0^2 = c), b\text{任意}}$.

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$，$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则线性方程组 $A^T X = B$ 的解是 $\underline{X = (1, 0, \cdots, 0)^T}$

(5) 设由来自正态总体 X $\sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，得样本均值 $\overline{X} = 5$，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $\underline{(4.412, 5.588)}$

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 可以写成 (D)

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$.　　(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(2) 下述各选项正确的是 (A)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

(C) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$u_n \ge \frac{1}{n}$

(D) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$u_n \ge v_n\ (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛

(3) 设 n 阶矩阵 A 非奇异$(n \ge 2)$, A^*是矩阵 A 的伴随矩阵，则 (C)

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-1}A$ (B) $(A^*)^* = |A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ (D) $(A^*)^* = |A|^{n+2}A$

(4) 设有任意两个 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$和$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$，则 (D)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关

(C) $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关

(D) $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关

(5) 已知$0<P(B)<1$，且$P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是 (B)

(A) $P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$ (B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$ (D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

三、(本题满分 6 分)

设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & 若x\ne 0\\ 0, & 若x=0\end{cases}$，其中$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=1$，$g'(0)=-1$.

(1) 求$f'(x)$； **(2)** 讨论$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.

解：(1) 当$x\ne 0$时，有

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}.$$ ……1 分

当$x=0$时,有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$ ……2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$ ……3 分

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2} & 若x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2} & 若x=0\end{cases}$. ……4 分

(2) 因为在 $x=0$ 处，有

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0).$$ ……5 分

从而 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数. ……6 分

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x、y 的函数，其中 $f(u)$、$\varphi(u)$ 可微； $p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：由 $z=f(u)$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$； ……1 分

在方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\quad ,$$ ……2 分

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y).$$ ……3 分

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{p(x)}{1-\varphi'(u)}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$； ……5 分

于是 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left[\dfrac{p(x)p(y)}{1-\phi'(u)}-\dfrac{p(x)p(y)}{1-\phi'(u)}\right]f'(u)=0$. ……6 分

五、(本题满分 6 分)

计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

解一： $$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{-1}{1+e^x}\right)$$ ……1 分

$$=-\frac{x}{1+e^x}\Bigg|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$ ……2 分

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx.$$ ……3 分

令 $e^x=t$，则 $dx=\frac{1}{t}dt$.于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt$$ ……4 分

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\frac{t}{1+t}\Bigg|_1^{+\infty}$$ ……5 分

$=\ln 2$. ……6 分

解二： $$\int\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int xd\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{1}{1+e^{-x}}dx$$

$$=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)+C.$$ ……3 分

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]+\ln 2.$$ ……4 分

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-x+x-\ln(1+e^x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{1+e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]=0+0=0$$ ……5 分

因此 $$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=0+\ln 2=\ln 2.$$ ……6 分

六、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证：设 $F(x)=xf(x)$. 由积分中值定理，可见存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$.使

$$\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx=\frac{1}{2}F(\eta).$$ ……2 分

由已知条件，有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta)$. ……3 分

由于 $F(1)=f(1)=F(\eta)$， ……4 分

并且 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 上可导.故由罗尔定理知：存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. ……5 分

七、(本题满分 6 分)

设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量 Q 可以表示成 $Q=\dfrac{a}{p+b}-c$，其中 a,b,c 均为正数，且 $a>bc$.

(1) 求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少；

(2) 要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？

解：(1) 设售出商品的销售额为 R，则 $R=PQ=P\left(\dfrac{a}{a+b}-c\right)$,

令 $R'=\dfrac{ab-c(P+b)^2}{(p+b)^2}=0$. 得 $p_0=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}-b=\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)>0$. ……2 分

当 $0<p<\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时，有 $R'>0$.所以随 p 的增加，相应的销售额也增加. ……4 分

当 $p>\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时，有 $R'<0$.所以随 p 的增加，相应的销售额将减少. ……5 分

(2) 由(1)知，当 $p=\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时，销售额 R 取得最大值，最大销售额为

$R_{\max}=(\sqrt{ab/c}-b)(\dfrac{a}{\sqrt{ab/c}}-c)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)^2$. ……6 分

八、(本题满分 6 分)

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

解： 令 $z=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$. ……1 分

当 $x>0$ 时，原方程化为 $z+x\dfrac{dz}{dx}=z-\sqrt{1+z^2}$， $\dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=-\dfrac{dx}{x}$， ……3 分

其通解为 $\ln(z+\sqrt{1+z^2})=-\ln x+C_1$ 或 $z+\sqrt{1+z^2}=\dfrac{C}{x}$, ……5 分

代回原变量，得通解 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C\ (x>0)$. ……6 分

当 $x<0$ 时，原方程的解与 $x>0$ 时相同.

九、(本题满分 8 分)

设矩阵 A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y；

(2) 求矩阵 P，使$(AP)^T$ (AP)为对角矩阵.

解：(1) 因为 $|\lambda I-A|=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]=0$.

当 $\lambda=3$ 时，代入上式解得 $y=2$. ……3 分

于是 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 由 $A^T=A$，得 $(AP)^T(AP)=P^TA^2P$.而矩阵 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$， ……4 分

考虑二次型 $X^TA^2X=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2$， ……6 分

令 $y_1=x_1, y_2=x_2, y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4, y_4=x_4$， 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，

取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则有 $(AP)^T(AP)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$. ……8 分

(2) 另解： A^2 的特征值为 $\lambda_1=1$（三重），$\lambda_2=9$. ……5 分

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,-1,1)^T$，经正交标准化后，得向量组 $\beta_1=(1,0,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0,0)^T,\beta_3=(0,0,\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})^T$； ……6 分

对应于 $\lambda_2=9$ 的特征向量为 $\alpha_4=(0,0,1,1)^T$，经单位化后，得 $\beta_4=(0,0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})^T$. ……7 分

令 $P=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，则 $P^TA^2P=(AP)^T(AP)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$.

……8 分

十、(本题满分 8 分)

设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 AX = 0 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 AX= 0 的解，即 A$\beta\neq0$. 试证明向量组 β，$\beta+\alpha_1$，$\beta+\alpha_2$，…，$\beta+\alpha_t$ 线性无关.

解： 设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得 $k\beta+\sum_{i=1}^{t}k_i(\beta+\alpha_i)=0$， ……1 分

即 $(k+\sum_{i=1}^{t}k_i)\beta=\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i$ （1） ……2 分

上式两边同时左乘矩阵 A，有 $(k+\sum_{i=1}^{t}k_i)A\beta=\sum_{i=1}^{t}(-k_i)A\alpha_i=0$.

因为 $A\beta\neq0$，故 $k+\sum_{i=1}^{t}k_i=0$ （2） ……4 分

从而，由（1）式得 $\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i=0$.

由于向量组 $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_t$ 是基础解系，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$. ……6 分

因而由（2）式得 $k=0$.因此向量组 β，$\beta+\alpha_1$，……，$\beta+\alpha_t$ 线性无关. ……8 分

十一、(本题满分 7 分)

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获得利润 10 万元；发生一次故障仍可获得利润 5 万元；发生二次故障多获得利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元.求一周内期望利润是多少？

解： 以 X 表示一周五天内机器发生故障的天数，则 X 服从参数为 (5, 0.2) 的二项分布.

即 $P\{X=k\}=C_5^k\cdot 0.2^k\cdot 0.8^{5-k}\quad (k=0,1,2,3,4,5)$ ……2 分

于是 $P\{X=0\}=0.8^5=0.328$，$P\{X=1\}=C_5^1\cdot 0.2\cdot 0.8^4=0.410$； ……3 分

$P\{X=2\}=C_5^2\cdot 0.2^2\cdot 0.8^3=0.205$；

$P\{X\ge 3\}=1-P\{x=0\}-P\{x=1\}-P\{x=2\}=0.057$. ……4 分

以 Y 表示所获利润，则 $Y=f(X)=\begin{cases}10, & 若X=0\\ 5, & 若X=1\\ 0, & 若X=2\\ -2, & 若X\ge 3\end{cases}$， ……5 分

所以 $EY=10\times 0.328+5\times 0.410+0\times 0.205-2\times 0.057=5.216$（万元）. ……7 分

十二、(本题满分 6 分)

考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数. 求方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

解： 一枚色子（骰子）掷两次，其基本事件总数为 36. 方程组有实根的充分必要条件是

$B^2\ge 4C, C\le \dfrac{B^2}{4}$. ……2 分

易见

B	1	2	3	4	5	6
使 $C\le B^2/4$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $C=B^2/4$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

……4 分

因此，使方程组有实根的基本事件个数为 $1+2+4+6+6=19$.于是 $p=\dfrac{19}{36}$. ……5 分

同理，使方程组有重根的基本事件个数为 $1+1=2$，于是 $q=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$. ……6 分

十三 (本题满分 6 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且与 X 同分布，$EX^k=\alpha_k\ (k=1,2,3,4)$. 求证：当 n 充分大时，$Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并求出其分布参数.

解： 依题意，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，于是 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布.

由 $EX^k = \alpha_k (k = 1,2,3,4)$，有 ……1 分

$EX_i^2 = \alpha_2$，$DX_i^2 = EX_i^4 - (EX_i^2)^2 = \alpha_4 - \alpha_2^2$； ……2 分

$EZ_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \alpha_2$, ……3 分

$DZ_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i^2 = \frac{1}{n}(\alpha_4 - \alpha_2^2)$ ……4 分

根据中心极限定理$U_n = \frac{Z_n - \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4 - \alpha_2^2)/n}}$的极限分布是标准正态分布，

即当 n 充分大时，Z_n近似服从参数为$(a_2, \frac{a_4 - a_2^2}{n})$的正态分布. ……6 分

数 学（试卷五）

一、填空题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 【 同数学四 第一、(1) 题 】

(2) 【 同数学四 第一、(2) 题 】

(3) 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=$ $\underline{\dfrac{5}{32}}$

(4) 五阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{1-a+a^2-a^3+a^4-a^5}$.

(5) 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\dfrac{1}{i+1}\ (i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P(X=2)=$ $\underline{\dfrac{11}{24}}$.

二、选择题：(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是 (D)

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(2) 【 同数学三 第二、(3) 题 】

(3) 【 同数学四 第二、(3) 题 】

(4) 【 同数学四 第二、(4) 题 】

(5) 设 A，B 为任意两个事件，且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是 (B)

(A) $P(A)<P(A|B)$　　(B) $P(A)\le P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$　　(D) $P(A)\ge P(A|B)$

三、(本题满分 6 分)【 同数学四 第三题 】

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

解： $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$， ……2 分

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$， ……4 分

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$． ……6 分

于是 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$． ……7 分

五、(本题满分 6 分)【 同数学四 第五题 **】**

六、(本题满分 7 分)【 同数学四 第七题 分值不同 **】**

七、(本题满分 9 分)

已知一抛物线通过 x 轴上的两点 A (1, 0)，B (3, 0).

(1) 求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积；

(2) 计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

解：(1) 设过 A,B 两点的抛物线方程为 $y=a(x-1)(x-3)$，

则抛物线与两坐标轴所围图形的面积为 $S_1=\int_0^1|a(x-1)(x-3)|dx$ ……1 分

$$=|a|\int_0^1(x^2-4x+3)dx=\frac{4}{3}|a|.$$ ……2 分

抛物线与 x 轴所围图形的面积为 $S_2=\int_1^3|a(x-1)(x-3)|dx$ ……3 分

$$=|a|\int_1^3(x^2-4x+3)dx=\frac{4}{3}|a|.$$ ……4 分

所以 $S_1=S_2$.

(2) 抛物线与两坐标轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_1=\pi\int_0^1 a^2[(x-1)(x-3)]^2dx$$ ……5 分

$$=\pi a^2\int_0^1[(x-1)^4-4(x-1)^3+4(x-1)^2]dx$$

$$=\pi a^2\left[\frac{(x-1)^5}{5}-(x-1)^4+\frac{4(x-1)^3}{3}\right]\Big|_0^1=\frac{38}{15}\pi a^2.$$ ……6 分

抛物线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_2=\pi\int_1^3 a^2[(x-1)(x-3)]^2dx=\pi a^2\left[\frac{(x-1)^5}{5}-(x-1)^4+\frac{4(x-1)^3}{3}\right]\Bigg|_1^3$$ ……7 分

$=\dfrac{16}{15}\pi a^2.$ ……8 分

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{19}{8}$. ……9 分

八、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(b)$ 求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

证： 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由积分中值定理可知，在 (a,b) 内存在一点 c，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$. ……2 分

即 $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(b)$. ……3 分

因为 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上连续，在 (c,b) 内可导，故由罗尔定理，在 (c,b) 内至少存在一点出 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，其中 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$. ……5 分

九、(本题满分 9 分)

已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t \end{cases}$，讨论参数 p, t 取何值时，方程组有解？无解？当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

解： 方程组系数矩阵 A 的增广矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$ ……3 分

(1) 当 $t\neq-2$ 时，$秩(A)\neq秩(\bar{A})$，方程组无解. ……4 分

(2) 当 $t=-2$ 时，$秩(A)=秩(\bar{A})$，方程组有解. ……5 分

(a) 若 $p=-8$，得通解 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $(c_1,c_2$为任意常数). ……7 分

(b) 若 $p \neq -8$ 得通解 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ (c为任意常数). ……9 分

十、(本题满分 7 分)

设有 4 阶方阵 A 满足条件 $|3I+A|=0$，$AA^T=2I$，$|A|<0$，其中 I 是 4 阶单位阵，求方阵 A 的伴随阵 A^* 的一个特征值.

解： 由 $|3I+A|=|A-(-3)I|=0$，得 A 的一个特征值 $\lambda=-3$. ……1 分

又 $|AA^T|=|2I|=2^4|I|=16$，$|A||A^T|=|A|^2=16$.于是 $|A|=-4$. ……3 分

由于 $|A|<0$，知 A 可逆.设 A 的对应于特征值 $\lambda=-3$ 的特征向量为 α，则 $A\alpha=-3\alpha$，

由此得 $A^{-1}A\alpha=(-3)A^{-1}\alpha$.即 $A^{-1}\alpha=-\dfrac{1}{3}\alpha$，知 $-\dfrac{1}{3}$ 是 A^{-1} 的特征值. ……5 分

由于 $A^*\alpha=|A|A^{-1}\alpha=(-4)(-\dfrac{1}{3}\alpha)=\dfrac{4}{3}\alpha$，所以 A^* 有特征值 $\dfrac{4}{3}$. ……7 分

十一、(本题满分 7 分)【 同数学四 第十一题 】

十二、(本题满分 6 分)

某电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 λ > 0 的指数分布. 当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作，试求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

解： 以 $X_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 个电气元件无故障工作的时间，则 X_1,X_2,X_3 相互独立且同分布，其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 若x>0\\ 0, & 若x\leq 0\end{cases}$， ……1 分

设 $G(t)$ 是 T 的分布函数.当 $t\leq 0$ 时，$G(t)=0$.当 $t>0$ 时，有

$G(t)=P\{T\leq t\}=1-P\{T>t\}$ ……3 分

$=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}$ ……4 分

$=1-P\{X_1>t\}\cdot P\{X_2>t\}\cdot P\{X_3>t\}$ ……5 分

$=1-[1-F(t)]^3$ ……6 分

$=1-e^{-3\lambda t}$. ……7 分

总之，$G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & 若t>0\\ 0, & 若t\leq 0\end{cases}$，于是 T 服从参数为 3λ 的指数分布.