归纳与递归

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 数学归纳法
- 强数学归纳法
- 运用良序公理来证明
- 递归定义
- 结构归纳法

数学归纳法

- 证明目标
  - $\forall n\, P(n)$　//n的论域为正整数集合
- 证明框架
  - 基础步骤：$P(1)$为真
  - 归纳步骤：对任意正整数k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

    //即，证明$\forall k\, (P(k) \rightarrow P(k+1))$
  - 因此，对任意正整数n, $P(n)$ 成立. // 即：$\forall n\, P(n)$

数学归纳法（有效性）

- 良序公理
  - 正整数集合的非空子集都有一个最小元素
- 数学归纳法的有效性（归谬法）
  - 假设$\forall n\, P(n)$不成立，则 $\exists n\, (\neg P(n))$成立.
  - 令$S=\{\, n\in Z^+ \mid \neg P(n)\}$，S是非空子集.
  - 根据良序公理，S有最小元素，记为m.
  - $P(m)$不成立, $m\neq 1$, 但是$(m-1)\notin S$, 即$P(m-1)$成立.
  - 根据归纳步骤，$P(m)$成立，矛盾.
  - 因此，$\forall n\, P(n)$成立.

数学归纳法（举例）

- $H_k=1+1/2+\ldots+1/k$ （k为正整数）
- 证明：$H_{2^n} \geq 1+n/2$ （n为正整数）
  - 基础步骤：$P(1)$为真， $H_2=1+1/2$
  - 归纳步骤：对任意正整数k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

$$H_{2^{k+1}} = H_{2^k} +1/(2^k+1)+\ldots+1/2^{k+1}$$

$$\geq(1+k/2)+2^k(1/2^{k+1}) =1+(1+k)/2$$

  - 因此，对任意正整数n, $P(n)$ 成立.

数学归纳法（举例）

- 猜测前n个奇数的求和公式，并证明之。
  - 1=1
  - 1+3=4
  - 1+3+5=9
  - 1+3+5+7=16
  - …
  - $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$（n为正整数）
  - 运用数学归纳法证明（练习）

运用数学归纳法时犯的错误

- 平面上任何一组相互间不平行的直线必相交于一点.
  - 基础步骤：$P(2)$为真
  - 归纳步骤：对任意正整数k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
    - 前k条交于p_1.
    - 后k条交于p_2.
    - $p_1=p_2$

强数学归纳法

- 证明目标
  - $\forall n\, P(n)$ //n的论域为正整数集合
- 证明框架
  - 基础步骤：$P(1)$为真
  - 归纳步骤：对任意正整数k, $P(1), \ldots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

    //即，证明$\forall k\, (P(1) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))$
  - 因此，对任意正整数n, $P(n)$ 成立. // 即：$\forall n\, P(n)$

强数学归纳法（一般形式）

- 设$P(n)$是与整数n有关的陈述， a和b是两个给定的整数，且$a \le b$.
- 如果能够证明下列陈述
  - $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$.
  - 对任意$k \ge b$, $P(a) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$
- 则下列陈述成立
  - 对任意$n \ge a$, $P(n)$.

$\{ n \in \mathrm{Z} \mid n \ge a \}$是良序的

强数学归纳法（举例）

- 任意整数n(n ≥2)可分解为（若干个）素数的乘积
  - n = 2.
  - 考察 k+1.
- 用4分和5分就可以组成12分及以上的每种邮资.
  - $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$.
  - 对任意$k \geq 15$, $P(12) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$

数学归纳法（举例）

- 对每个正整数$n \ge 4$，$n! > 2^n$
  - 基础步骤：$P(4)$为真，$24 > 16$
  - 归纳步骤：对任意正整数$k \ge 4$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

    $(k+1)! = (k+1)\, k! > (k+1)\, 2^k > 2^{k+1}$
  - 因此，对任意正整数$n \ge 4$, $P(n)$ 成立.

运用良序公理来证明（举例）

- 设a是整数, d是正整数, 则存在唯一的整数q和r满足
  - $0 \leq r < d$
  - $a = dq + r$
- 证明
  - 令S={a-dq | 0≤a-dq ， q∈Z}，S非空.
  - 非负整数集合具有良序性
  - S有最小元，记为$r_0 = a - dq_0$.
  - 可证 $0 \leq r_0 < d$

运用良序公理来证明（举例）

- 在循环赛胜果图中，若存在长度为m（$m \geq 3$）的回路，则必定存在长度为3的回路。

  备注：$a_i \rightarrow a_j$ 表示a_i赢了a_j

证明

- 设最短回路的长度为k（$k \geq 3$）//良序公理的保证
- $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \ldots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$
- 若$a_3 \rightarrow a_1$, 存在长度为3的回路，矛盾。
- 若$a_1 \rightarrow a_3$, 存在长度为$(k\text{-}1)$的回路，矛盾。

递归定义（N上的函数）

- 递归地定义自然数集合N上的函数。
  - 基础步骤：指定这个函数在0处的值；
  - 递归步骤：给出从较小处的值来求出当前的值之规则。
- 举例，阶乘函数F(n)=!n的递归定义
  - $F(0)=1$
  - $F(n)=n\cdot F(n-1)$ for $n>0$

Fibonacci 序列

- **Fibonacci 序列 $\{f_n\}$ 定义如下**
  - $f_0 = 0$,
  - $f_1 = 1$,
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, 对任意$n \geq 2$.
- **其前几个数**
  - **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …**
- **证明：对对任意$n \geq 0$，** $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

其中，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

归纳证明: Fibonacci 序列

- 验证：当n=0,1时，陈述正确。
- 对于k+1， $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(\alpha^k + \alpha^{k-1}\right) - \left(\beta^k + \beta^{k-1}\right)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}.
\end{aligned}
$$

注意：$\alpha^2 = \alpha + 1$，且$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$ 对任意$n \geq 1$.

递归定义（集合）

- 递归地定义集合。
  - 基础步骤：指定一些初始元素；
  - 递归步骤：给出从集合中的元素来构造新元素之规则；
  - 排斥规则（只包含上述步骤生成的那些元素）默认成立
- 举例，正整数集合的子集S
  - $x \in S$
  - 若$x \in S$且$y \in S$，则 $x+y \in S$。

递归定义（举例）

- 字母表Σ上的字符串集合Σ^*。
  - 基础步骤： $\lambda \in \Sigma^*$ （λ表示空串）；
  - 递归步骤：若$\omega \in \Sigma^*$ 且$x \in \Sigma$，则 $\omega x \in \Sigma^*$ 。
- 字符串的长度（ Σ^*上的函数l）。
  - 基础步骤：$l(\lambda)=0$;
  - 递归步骤：$l(\omega x) = l(\omega) +1$, 若$\omega \in \Sigma^*$ 且$x \in \Sigma$

递归定义（举例）

- Σ^*上的字符串连接运算。
  - 基础步骤：若$\omega\in\Sigma^*$，则 $\omega\cdot\lambda=\omega$;
  - 递归步骤：若$\omega_1\in\Sigma^*$且$\omega_2\in\Sigma^*$以及$x\in\Sigma$，则 $\omega_1\cdot(\omega_2\, x) = (\omega_1\cdot\omega_2)\, x$ 。
  - // $\omega_1\cdot\omega_2$通常也写成$\omega_1\,\omega_2$

递归定义（举例）

- 复合命题的合式公式。
  - 基础步骤：T, F, s都是合式公式，其中s是命题变元;
  - 递归步骤：若E和F是合式公式，则 $(\neg E)$、$(E\wedge F)$、$(E\vee F)$、 $(E\rightarrow F)$和$(E\leftrightarrow F)$都是合式公式。

结构归纳法

- 关于递归定义的集合的命题，进行结构归纳证明。
  - 基础步骤：证明对于初始元素来说，命题成立;
  - 递归步骤：针对生产新元素的规则，若相关元素满足命题，则新元素也满足命题
- 结构归纳法的有效性源于自然数上的数学归纳法
  - 第0步（基础步骤），…

结构归纳法（举例）

- $l(xy) = l(x) + l(y)$, x和y属于 Σ^* 。
- 证明
  - 设$P(y)$表示：每当x属于 Σ^*， 就有$l(xy) = l(x) + l(y)$ 。
  - 基础步骤：每当x属于 Σ^*， 就有$l(x\lambda) = l(x) + l(\lambda)$ 。
  - 递归步骤：假设$P(y)$为真，a属于 Σ, 要证$P(ya)$为真。
    - 即：每当x属于 Σ^*， 就有$l(xya) = l(x) + l(ya)$
    - $P(y)$为真，$l(xy) = l(x) + l(y)$
    - $l(xya)= l(xy)+1= l(x) + l(y)+1=l(x) + l(ya)$

广义结构归纳法（举例）

- N×N是良序的（字典序）
- 递归定义$a_{m,n}$
  - $a_{0,0} = 0$
  - $a_{m,n} = a_{m-1,n} + 1 \quad (n=0,\ m>0)$
  - $a_{m,n} = a_{m,n-1} + n \quad (n>0)$
- 归纳证明 $a_{m,n} = m+n(n+1)/2$

0	1	3
1	2	4
2	3	5

作业

- 教材[4.1, 4.2, 4.3]
  - **P209-214：18, 20, 63, <u>69（附加题）</u>**
  - **P220-223：7, 12, 30, 36**
  - **P232-236：24, 32, 52, <u>54（附加题）</u>**