

DVD 在线租赁

摘 要

本文针对 DVD 在线租赁问题,建立了 DVD 最优数量预测模型,解决了 DVD 最优数量预测问题;建立了基于最大会员满意度的 DVD 分配模型,解决了在已知 DVD 现有张数下的 DVD 分配问题;建立了基于多目标规划的 DVD 分配模型和 DVD 优化分配模型,解决了在 DVD 现有数量为零的情况下的 DVD 分配问题;建立了基于成本研究的 DVD 库存调度模型,解决了 DVD 的库存调度问题;建立了基于双目标模糊选址的 DVD 配送模型,解决了 DVD 的配送问题。

针对问题一,建立了 DVD 最优数量预测模型,解决了 DVD 最优数量预测问题。首先求得 DVD 的数学期望来估计每种 DVD 的大致分布情况;其次利用所得数学期望和所给条件建立目标函数和约束条件;最后求得 DVD 在一个月和三个月内的数量分配。最终解得一个月内 5 种 DVD 需求量依次为 6250、3125、1563、782、625 张;三个月内 5 种 DVD 需求量依次为 11875、5938、2969、1485、594 张。

针对问题二,建立了基于最大会员满意度的 DVD 分配模型,解决了在已知 DVD 现有张数下的 DVD 分配问题。首先,对会员是否租借 DVD 的情况建立 0-1 整数规划模型;其次,根据会员对 DVD 的偏爱程度得到会员对分配 DVD 的平均满意度;最后,建立基于最大会员满意度的 DVD 分配模型,得出相应的最优 DVD 分配方案。

针对问题三,建立了基于多目标规划的 DVD 分配模型和 DVD 优化分配模型,解决了在 DVD 现有数量为零的情况下的 DVD 分配问题;首先,取会员的满意度最大、DVD 总购买成本最小为两个目标。其次,确定约束条件并得到分配方案;最后,考虑到 DVD 市场中的供求关系和会员对 DVD 的偏爱程度对问题的影响,我们对上述模型进行优化,建立了 DVD 优化分配模型。最终得到了合理的分配方案。

针对问题四,建立了基于成本研究的 DVD 库存调度模型和基于双目标模糊选址的 DVD 配送模型,分别解决了 DVD 的库存调度问题和 DVD 的配送问题。首先,我们分析出此公司面临的两个主要问题分别为 DVD 的库存调度问题以及公司与顾客用快递的形式进行产品互动产生的巨大资源浪费以及成本问题;其次,针对这两个主要问题,分别建立了基于成本研究的 DVD 库存调度模型和基于双目标模糊选址的 DVD 配送模型;最终一定程度上解决了 DVD 的库存调度问题和 DVD 的配送问题。

关键词: 数学期望 整数规划模型 多目标规划模型 库存调度 双目标模糊选址

一、问题重述

随着信息时代的到来,网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一。许多网站利用其强大的资源和知名度,面向其会员群提供日益专业化和便捷化的服务。例如,音像制品的在线租赁就是一种可行的服务。这项服务充分发挥了网络的诸多优势,包括传播范围广泛、直达核心消费群、强烈的互动性、感官性强、成本相对低廉等,为顾客提供更为周到的服务。

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员,订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣,只要在线提交订单,网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD,这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次,每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后,只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回(邮费由网站承担),就可以继续下次租赁。请考虑以下问题:

- 1) 网站正准备购买一些新的 DVD,通过问卷调查 1000 个会员,得到了愿意观看这些 DVD 的人数(表 1 给出了其中 5 种 DVD 的数据)。此外,历史数据显示,60%的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的 40%只租一次。假设网站现有 10 万个会员,对表 1 中的每种 DVD 来说,应该至少准备多少张,才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50%在一个月内能够看到该 DVD? 如果要求保证在三个月内至少 95%的会员能够看到该 DVD 呢?
- 2) 表 2 中列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单(表 2 的数据格式示例如下表 2,具体数据请从 <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载),如何对这些 DVD 进行分配,才能使会员获得最大的满意度? 请具体列出前 30 位会员(即 C0001~C0030)分别获得哪些 DVD。
- 3) 继续考虑表 2,并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员,你如何决定每种 DVD 的购买量,以及如何对这些 DVD 进行分配,才能使一个月内 95%的会员得到他想看的 DVD,并且满意度最大?
- 4) 如果你是网站经营管理人员,你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究? 请明确提出你的问题,并尝试建立相应的数学模型。

表 1 对 1000 个会员调查的部分结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10

表 2 现有 DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单(表格格式示例)

DVD 编号		D001	D002	D003	D004	...
DVD 现有数量		10	40	15	20	...
会员在线 订单	C0001	6	0	0	0	...
	C0002	0	0	0	0	...
	C0003	0	0	0	3	...
	C0004	0	0	0	0	...

注: D001~D100 表示 100 种 DVD, C0001~C1000 表示 1000 个会员,会员的在线订单用数字 1,2,...表示,数字越小表示会员的偏爱程度越高,数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

为了保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月内能够看到该 DVD，我们首先要计算 DVD 的期望值，以此来估计每种 DVD 的大致分布情况，三个月的情况同理。通过分析 DVD 大致分布情况，我们既要满足会员的要求，又要尽可能的使 DVD 的利用率达到最大。由此，我们可以建立预测模型，以需要准备的 DVD 总数最少为目标，分别解得一个月内和三个月内的每种 DVD 的所需数量。

2.2 问题二的分析

想要使会员的总的满意度最大，需要合理分配 DVD 数量，对于这类分配问题，我们选用 0-1 规划建立模型。通过会员对 DVD 的偏爱程度得到会员对分配 DVD 的平均满意度，对会员是否租借 DVD 的情况建立 0-1 整数规划模型，设定约束条件为分配出去的总 DVD 数量小于实际拥有的 DVD 数量。最后，通过计算求得 DVD 的分配方案。

2.3 问题三的分析

对 DVD 进行合理分配，使得一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD 并且满意度最大，是典型的多目标规划问题。想要解决这类问题，首先，我们应该找到目标函数；其次，根据题目中所给的数据列出约束条件；最后，计算出结果。基于本题所给的条件，我们首先可以建立以会员总的满意度最大为目标的模型，观察计算结果并对该模型进行优化，最后得出最优分配方案。

2.4 问题四的分析

要对 DVD 的需求预测、购买和分配进行研究，我们选择从 DVD 的库存调度和配送问题两个方面进行研究分析。要想分析库存问题，就要从 DVD 出版社的各项成本入手研究，通过分析生产成本、库存成本等，建立基于成本分析的数学模型进行求解。而 DVD 的分配问题需要利用图与网络的相关知识将配送范围抽象为网络图，利用各边的约束条件进行求解。

三、基本假设

- 1、会员的租赁都是在月初和月中，归还都是在月中和月末；
- 2、月末时会员归还所租借的所有 DVD；
- 3、在 DVD 租借过程中没有意外破损或丢失导致无法继续使用的情况；
- 4、所有 DVD 的价格相同。

四、符号说明

i	租赁次数
p_i	租赁人数比例
$E(x)$	数学期望
n_i	愿意观看人数比例
Z	需要准备的 DVD 数量
x_{ij}	0-1 变量
a_{ij}	第 i 个会员对第 j 张 DVD 的偏爱程度
b_{ij}	第 i 个会员对得到第 j 张 DVD 的满意度
M_i	第 i 个会员的满意度
d_j	网站拥有第 j 张 DVD 的总数
M	平均满意度
p	1 个月内租赁 1 次的会员能得到他想看的 DVD 的概率
$f p_i$	分配类型的 0-1 变量
n_j	每种 DVD 的需求量
x_{ij}	分配矩阵
g_j	数量矩阵

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

为了计算每种 DVD 在一个月和三个月内的最少需求量，首先我们需要通过计算 DVD 的期望值来估计每种 DVD 的大致分布情况；其次，通过分析我们发现 DVD 总数要在满足会员需要的情况下尽可能最小才能保证资源的利用率；接着，我们通过 DVD 的期望值和所给约束条件建立 DVD 最优数量预测模型；最后分别计算得出每种 DVD 在一个月和三个月内的所需数量。

5.1.1 模型的建立

为了保证看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月之内能够看到该 DVD，我们需要通过求得 DVD 的数学期望来估计每种 DVD 的大致分布情况。接着利用所得数学期望和所给条件建立目标函数和约束条件，最终得到 DVD 在一个月和三个月内的数量分配。

1、DVD 利用次数的期望：

我们设 i 为 DVD 一个月内租赁的次数， p_i 为租赁该次数的人数所占总人数的比例，根据历史数据，整理得表 1：

表 1 DVD 租赁信息

i	1	2
p_i	0.4	0.6

即 60%的会员每月租赁 DVD 两次，而另外的 40%只租一次。

因为每位会员是否租赁每种 DVD 是随机的，我们需要引入期望值来估计每种 DVD 的大致分布情况。期望即是指在一个离散型随机变量的实验中每次可能的结果的概率乘以其结果的总和^[1]。

由此，我们得到 DVD 在一个月利用次数的期望为：

$$E(x) = \sum_{i=1}^2 ip_i$$

2、DVD 最优数量预测模型

根据题目所给愿意观看每种 DVD 的人数，得到每种 DVD 愿意观看的人数比例 n_i 如表 2 所示：

表 2 每种 DVD 愿意观看人数比例

DVD 种类	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10
比例 n_i	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01

由表 2 我们发现，愿意观看每种 DVD 的人数所占比例不同，所以我们分别计算每种 DVD 至少需要准备的数量，记为 x_i ，约束条件为：

$$E(x)x_i \geq 50\% \times 100000 \times n_i$$

为了避免 DVD 数量过多而租赁人数过少造成的 DVD 资源浪费，我们需要在满足会员要求的同时使得 DVD 总数最少。由此设目标函数为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^5 x_i$$

得出每种 DVD 至少需要准备的数量

同理，建立三个月内的 DVD 最优数量预测模型：

$$\min Z = \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$E(x)x_i \geq 95\% \times 100000 \times n_i$$

解得三个月内每种 DVD 需要的最少数量。

5.1.2 模型的求解

由表 1 中 DVD 的租赁信息，我们得到 DVD 利用次数的期望值为：

$$E(x) = \sum_{i=1}^2 ip_i = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.6 = 1.6$$

根据目标函数和约束条件，得到：

$$\min Z = \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\begin{cases} 1.6x_1 \geq 50\% \times 100000 \times 0.2 \\ 1.6x_2 \geq 50\% \times 100000 \times 0.1 \\ 1.6x_3 \geq 50\% \times 100000 \times 0.05 \\ 1.6x_4 \geq 50\% \times 100000 \times 0.025 \\ 1.6x_5 \geq 50\% \times 100000 \times 0.01 \end{cases}$$

解得 $x_1 = 6250$, $x_2 = 3125$, $x_3 = 1563$, $x_4 = 782$, $x_5 = 625$, 整理如表 3 所示:

表 3 一个月内每种 DVD 需要数量

DVD 种类	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
需要准备数量	6250	3125	1563	782	625

由此我们得到, DVD1 需要准备的数量最多, 为 6250 张; DVD2、DVD3、DVD4 需要的最少数量分别为 3125 张、1563 张、782 张; DVD5 所需数量最少, 为 625 张。

同理可解得三个月内每种 DVD 所需数量如表 4 所示:

表 4 三个月内每种 DVD 需要数量

DVD 种类	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
需要准备数量	11875	5938	2969	1485	594

通过表 4 我们可以看出, DVD1 需要准备的数量最多, 为 11875 张; DVD2、DVD3、DVD4 需要的最少数量分别为 5938 张、2969 张、1485 张; DVD5 所需数量最少, 为 594 张。

5.2 问题二的模型建立与求解

为了能够合理的分配 DVD 数量并使会员获得最大的满意度, 我们首先需要对会员是否租借 DVD 的情况建立 0-1 整数规划模型。其次, 根据对题目中满意度的理解, 我们利用会员对 DVD 的偏爱程度得到会员对分配 DVD 的平均满意度。最后, 建立基于最大会员满意度的 DVD 分配模型, 得出相应的最优 DVD 分配方案。

5.2.1 模型的建立

本题制定 DVD 合理方案问题是运筹学中典型的分配问题, 由此, 我们可以建立一个 0-1 规划模型。因为每张 DVD 是否被租赁是随机的, 且只有两种情况, 租赁或不租赁, 因此设变量 x_{ij} 为 0-1 变量, 即:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第} i \text{个会员得到第} j \text{张 DVD} \\ 0 & \text{第} i \text{个会员未得到第} j \text{张 DVD} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, 1000, j = 1, 2, \dots, 100$$

设 a_{ij} 表示第 i 个会员对第 j 张 DVD 的偏爱程度。由于数字越小表示会员的偏爱程度越高^[2], 数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中, 即会员对

某种 DVD 的满意程度与该会员对 DVD 的偏爱程度呈负相关。所以我们定义 b_{ij} 为第 i 个会员对得到第 j 张 DVD 的满意度。

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{a_{ij}}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

二者的关系如表 5 所示：

表 5 偏爱程度与满意度关系

偏爱程度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
满意度	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

我们定义第 i 个会员对分配到的 DVD 的满意度为 M_i

$$M_i = \sum_{j=1}^{100} b_{ij} x_{ij}$$

由于当第 i 个会员分配到其偏爱程度为 1,2,3 的三张 DVD 时，他的满意度最大，为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ 。

为了使满意度更直观，我们对此进行标准化，得到所有会员对分配到的 DVD 的平均满意度：

$$M = \frac{6}{11} \times \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} b_{ij} x_{ij}$$

由于每种 DVD 网站拥有的数量有限，所以在分配的过程中，每种 DVD 分配给会员的总数不能超过网站拥有的总数，我们定义网站拥有第 j 张 DVD 的总数为 d_j ， $j = 1, 2, \dots, 100$ 。

综上所述，我们可得到该问题的模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & M = \frac{6}{11000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} b_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq d_j \\ \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 0, 1, 2, 3 \\ x_{ij} = 0, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.2 模型的求解

根据上述模型，我们进行求解，结果如下：

目标函数的最大值即会员满意度最大为 23169。

表 6 前 30 位会员租赁 DVD 数

会员	获得 DVD 编号			会员	获得 DVD 编号		
C001	8	16	98	C016	67	86	38
C002	80	50	4	C017	78	96	21
C003	7	41	81	C018	11	40	2
C004	11	68	98	C019	52	86	89
C005	19	53	16	C020	87	45	76
C006	26	8	6	C021	57	35	58
C007	71	99	9	C022	67	32	22
C008	60	85	10	C023	1	37	62
C009	66	12	31	C024	15	29	9
C010	61	55	85	C025	22	37	66
C011	59	62	19	C026	7	14	80
C012	41	60	78	C027	30	44	56
C013	13	85	66	C028	19	5	86
C014	31	2	7	C029	13	43	77
C015	26	34	55	C030	98	69	76

由表 6 可以看出，这种分配方法已经很好的把每个会员拥有的 DVD 数量控制在 3 个以内，并且使会员的满意度达到最大。

5.3 问题三的模型建立与求解

对 DVD 进行分配并且使得一个月内 95%的会员得到他想看的 DVD 并且满意度最大，我们建立了两个模型来解决这个问题。

建立基于多目标规划的 DVD 分配模型，首先，这实际上是典型的多目标规划问题，我们取两个目标分别为会员的满意度最大、DVD 总购买成本最小。其次，确定约束条件。最后，得到 DVD 的分配方案。

随后，由于考虑到 DVD 市场中的供求关系和会员对 DVD 的偏爱程度，我们对上述模型进行优化，建立 DVD 优化分配模型，与基于多目标规划的 DVD 分配模型相比较，得出最终结果。

5.3.1 模型的建立

1、基于多目标规划的 DVD 分配模型

使得一个月内 95%的会员得到他想看的 DVD，并且满意度最大，实际上是一个多目标规划问题。其规划目标有两个：

(1)会员的满意度达到最大；

(2)DVD 购买总成本最小。

由于题目中未给定各种 DVD 的单价，我们假设各种 DVD 的单价相同，这样购买总成本最小就等价于 DVD 购买总数量最少。

我们把约束条件确定为最少 DVD 购买总数量。

设 $A = \{\text{此会员 1 个月内能得到他想看的 DVD}\}$ ， $B = \{\text{此会员 1 个月内租赁 1 次}\}$ ， $\bar{B} = \{\text{此会员 1 个月内租赁两次}\}$ 。若此会员每次提交订单后能得到他想看的 DVD 的概率为 p ，那么 1 个月内只租赁 1 次的会员能得到他想看的 DVD 的概率 $P(A|B) = p$ ，1 个月内租赁 2 次的会员能得到他想看的 DVD 的概率

$$P(A|\bar{B}) = p^2。$$

由全概率公式[3]，此会员 1 个月内能得到他想看的 DVD 的概率为：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

要使 1 个月内 95%的会员得到他想看的 DVD，那么此问题可以转化为平均每个会员在 1 个月内得到他想看的 DVD 的概率应至少为 95%，即：

$$P(A) = 0.4p + 0.6p^2 \geq 0.95$$

根据前面的分析，不妨将此问题转化为 950 个会员每人将分到他想看的 3 张 DVD，其余 50 人分到 0 张 DVD，会员的这种分配类型可用 0-1 变量 fp_i 表示，并规定其取值为：

$$fp_i = \begin{cases} 1 & \text{第} i \text{个会员得到 3 张 DVD} & 1 \leq i \leq 950 \\ 0 & \text{第} i \text{个会员未得到 3 张 DVD} & 950 < i \leq 1000 \end{cases}$$

建立双目标规划的数学模型如下：

$$\max M = \frac{6}{11000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} b_{ij} x_{ij}$$

$$\min N = \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} x_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3fp_i \\ \sum_{i=1}^{950} fp_i = 950 \\ \sum_{i=951}^{1000} fp_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} \geq 2901 \\ x_{ij} = 0,1 \\ fp_i = 0,1 \end{array} \right.$$

根据约束条件进行求解，得到满足两种条件下的 DVD 分配方案。

2、DVD 分配优化模型

由于上述基于多目标规划的 DVD 分配模型并没有很好的考虑到 DVD 购买量与需求量之间的关系和会员对 DVD 的偏爱程度[4]，因此，我们对基于多目标规划的 DVD 分配模型进行优化，建立 DVD 分配优化模型。

(1)由于光盘最小购买量与需求量成正比关系，所以网站经营人员应考虑按每种光盘需求量的一定比例购买光盘。设最小购买量与需求量的比例系数为

k ， $0 < k \leq 1$ 。由题意知，只要这 1000 位会员在在线订单中选择了某种

DVD，也就是该会员对该种 DVD 的偏爱程度不为 0 时，就认为该 DVD 是该会员所需要的。

(2)我们记 A 类会员为一个月只租赁一次 DVD 的会员, B 类会员为一个月租赁两次的会员。历史数据显示, 60%的会员是 B 类会员, 而另外的 40%是 A 类会员。但是, 我们不知道这 1000 名会员中哪些是 A 类会员, 哪些是 B 类会员, 为了更符合实际情况我们决定采用计算机随机模拟出 600 个会员。

(3)月初时网站按照订单对所有会员分配一次 DVD。月中时, B 类会员邮寄回月初时分配到的 DVD, 网站按照订单的偏爱程度并用收回的 DVD 对 B 类会员再进行一次分配。

(4)某名会员是否满意取于在该月中分配到的 DVD 都是他们在订单中填写的。具体的说, 当且仅当 A 类会员获得 3 张满意的 DVD, B 类会员获得 6 张满意的 DVD, 才认该会员满意。

综合上面的分析, 照如下步骤可以得到一种近似最优的分配方案:

步骤一: 给定 k 一个的较小初值。并计算每种 DVD 的需求量 n_j

步骤二: 构造分配矩阵 x_{ij} , 购买第 j 种 DVD 的数量矩阵 g_j , 计数矩阵 s_j

并初始化为全零矩阵。

步骤三: 让计算机随机对这 1000 名会员的顺序进行排列;

步骤四: 对于 100 种 DVD, 首先将每种 DVD 分配给对它偏爱程度最高, 也就是 1 的会员。如果该 DVD 的数量小于需要的数量, 则先分配给排在前面的那些会员; 然后, 对于剩余的 DVD, 再优先满足对它偏爱程度为 2 的会员需要, 依此类推分配下去。若某会员已经分配到了三张 DVD, 则此会员不再参与分配;

步骤五: 让计算机从这 1000 名会员中随机产生 600 名作为 B 类会员;

步骤六: 收回这 600 名会员月初分配到的 DVD;

步骤七: 重新按照 Step4 的方法对这 600 名会员进行分配

步骤八: 根据两次分配结果计算总的满意人数。

最后计算得到结果, 与上述基于多目标规划的 DVD 分配模型相比较, 分析两种模型的优劣。

5.3.2 模型的求解

1、基于多目标规划的 DVD 分配模型的求解

要使 1 个月内 95%的会员得到他想看的 DVD, 那么此问题可以转化为平均每个会员在 1 个月内得到他想看的 DVD 的概率应至少为 95%, 即:

$$P(A) = 0.4p + 0.6p^2 \geq 0.95$$

解得:

$$p_{\min} = 0.967$$

所以会员每次提交订单后能得到他想看的 DVD 的概率应大于 0.967。于是,

我们购买的 DVD 总量应不小于 $967 \times 3 = 2901$ ，才能保证 1 个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD。

设 $A = \{\text{此会员 1 个月内能得到他想看的 DVD}\}$ ， $B = \{\text{此会员 1 个月内租赁 1 次}\}$ ， $\bar{B} = \{\text{此会员 1 个月内租赁两次}\}$ ，则：

$$P(B) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.6。$$

因为 1 个月内只租赁 1 次的会员能得到他想看的 DVD 的概率：

$$P(A|B) = p,$$

1 个月内租赁 2 次的会员能得到他想看的 DVD 的概率：

$$P(A|\bar{B}) = p^2。$$

由全概率公式，此会员 1 个月内能得到他想看的 DVD 的概率：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\ &= 0.4p + 0.6p^2 \end{aligned}$$

又因为

$$P(A) = 0.4p + 0.6p^2 \geq 0.95$$

我们不妨将此问题转化为 950 个会员每人将分到他想看的 3 张 DVD，其余 50 人分到 0 张 DVD，根据约束条件建立双目标规划模型。

DVD 的分配结果如表 7 所示：

表 7 DVD 分配结果

DVD 编号	数量	DVD 编号	数量	DVD 编号	数量	DVD 编号	数量
DVD001	22	DVD026	29	DVD051	25	DVD076	34
DVD002	32	DVD027	27	DVD052	23	DVD077	36
DVD003	33	DVD028	27	DVD053	21	DVD078	27
DVD004	36	DVD029	36	DVD054	34	DVD079	27
DVD005	21	DVD030	34	DVD055	22	DVD080	22
DVD006	26	DVD031	32	DVD056	34	DVD081	21
DVD007	36	DVD032	32	DVD057	33	DVD082	38
DVD008	28	DVD033	33	DVD058	26	DVD083	39
DVD009	38	DVD034	25	DVD059	27	DVD084	26
DVD010	25	DVD035	23	DVD060	36	DVD085	28
DVD011	29	DVD036	21	DVD061	34	DVD086	30
DVD012	36	DVD037	34	DVD062	32	DVD087	27
DVD013	24	DVD038	22	DVD063	32	DVD088	35
DVD014	28	DVD039	34	DVD064	22	DVD089	36
DVD015	28	DVD040	35	DVD065	32	DVD090	25
DVD016	37	DVD041	35	DVD066	37	DVD091	29
DVD017	25	DVD042	22	DVD067	27	DVD092	36
DVD018	22	DVD043	21	DVD068	21	DVD093	24
DVD019	30	DVD044	26	DVD069	30	DVD094	28
DVD020	32	DVD045	28	DVD070	24	DVD095	34
DVD021	36	DVD046	30	DVD071	28	DVD096	22
DVD022	26	DVD047	30	DVD072	28	DVD097	32
DVD023	26	DVD048	22	DVD073	37	DVD098	33
DVD024	28	DVD049	36	DVD074	25	DVD099	36

DVD025	34	DVD050	35	DVD075	32	DVD100	21
--------	----	--------	----	--------	----	--------	----

根据表 7 我们可以得到, DVD 的购买总数量为 2935 张, 会员的总满意度为 24336。

2、DVD 分配优化模型的求解

我们得到 DVD 分配优化模型的求解结果如表 8 所示:

表 8 DVD 优化模型的求解结果

DVD 编号	数量	DVD 编号	数量	DVD 编号	数量	DVD 编号	数量
DVD001	36	DVD026	30	DVD051	34	DVD076	35
DVD002	34	DVD027	27	DVD052	35	DVD077	36
DVD003	32	DVD028	35	DVD053	26	DVD078	25
DVD004	32	DVD029	36	DVD054	28	DVD079	32
DVD005	36	DVD030	25	DVD055	30	DVD080	34
DVD006	34	DVD031	32	DVD056	34	DVD081	22
DVD007	21	DVD032	36	DVD057	30	DVD082	34
DVD008	38	DVD033	24	DVD058	26	DVD083	35
DVD009	39	DVD034	28	DVD059	29	DVD084	26
DVD010	26	DVD035	34	DVD060	28	DVD085	28
DVD011	29	DVD036	21	DVD061	28	DVD086	30
DVD012	23	DVD037	34	DVD062	37	DVD087	27
DVD013	21	DVD038	21	DVD063	21	DVD088	35
DVD014	34	DVD039	30	DVD064	28	DVD089	38
DVD015	22	DVD040	24	DVD065	28	DVD090	39
DVD016	34	DVD041	28	DVD066	37	DVD091	26
DVD017	35	DVD042	28	DVD067	27	DVD092	29
DVD018	26	DVD043	37	DVD068	21	DVD093	23
DVD019	28	DVD044	21	DVD069	30	DVD094	21
DVD020	30	DVD045	34	DVD070	24	DVD095	34
DVD021	30	DVD046	22	DVD071	28	DVD096	22
DVD022	22	DVD047	34	DVD072	28	DVD097	28
DVD023	37	DVD048	21	DVD073	37	DVD098	37
DVD024	25	DVD049	34	DVD074	25	DVD099	21
DVD025	32	DVD050	35	DVD075	32	DVD100	34

通过表 8 我们可以得到, DVD 购买的总数量为 2912 张, 会员总满意度为 26578。

5.3.3 模型的检验

将两个模型的求解结果对比如表 9 所示:

表 9 求解结果对比

	基于多目标规划的 DVD 分配模型	DVD 分配优化模型
DVD 购买总数	2935	2912
会员总满意度	24336	21578

通过表 9 我们可以看出, 两种模型的 DVD 总数量相差不大, 基于多目标规

划的 DVD 分配模型计算得到的 DVD 总数较多，为 2935 张，但会员总满意度较大，为 24336。基于会员的角度考虑该模型的优势较大。而 DVD 分配优化模型则是从 DVD 购买数量来考虑的，其 DVD 购买总数较少，为 2912 张，但会员总满意度较低，为 21578。该模型与基于多目标规划的 DVD 分配模型相比，在会员满意度方面不占优势。

5.4 问题四的模型建立与求解

作为网站经营管理人员，在 DVD 的需求预测、购买和分配中还存在着某些不恰当的因素使得 DVD 在销售的整个环节中存在不符合产品发展的规律的部分，包括 DVD 供库存调度问题^[5]和配送问题^[6]。库存调度问题通过各项生产成本进行库存量的约束；而配送问题是基于双目标模糊选址建立相应的模型。

5.4.1 模型的建立

1、基于成本研究的 DVD 库存调度模型

库存调度问题是供应链管理决策者亟待解决的问题之一。相关统计表明，供应链成本约占整个行业运行成本的 75% 左右，而库存成本是供应链成本的重要组成部分之一，约占供应链总成本的 30% 以上^[7]。因此，对 DVD 的库存调度问题进行研究，具有极其重要的现实意义。

想要研究 DVD 的库存调度，关键在于其各项成本的确定

(1) 生产成本

生产成本包括半成品和产成品的正常工作时间的生产成本和加班的额外生产成本。

$$C_p = \sum_k \left(\sum_p \left(t_{mk}^p f_{mp}^p + \sigma_{mk}^p (t_{mk}^p - t_{mo}^p) \Delta f_{mp}^p \right) + \sum_{p'} \left(t_{mk}^{p'} f_{mp}^{p'} + \sigma_{mk}^{p'} (t_{mk}^{p'} - t_{mo}^{p'}) \Delta f_{mp}^{p'} \right) \right)$$

其中， f_{mp}^p 和 $f_{mp}^{p'}$ 为正常加工时产品 p 和半成品 p' 单位时间生产成本；

Δf_{mp}^p 和 $\Delta f_{mp}^{p'}$ 为加班时间内比正常时间内加工产品 p 和和半成品 p' 单位时间额外的生产产品，其他参数同上。

(2) 库存持有成本^[8]

库存持有成本 C_s 与各节点的级库存成正比，可通过下式确定：

$$C_s = \sum_k \left(\sum_{p''} EI^{p''} f_{ss}^{p''} + \sum_{p'} EI^{p'} f_{ss}^{p'} + \sum_d \sum_p EI^p f_{ds}^p + \sum_r \sum_p EI^p f_{rs}^p \right)$$

其中， $f_{ss}^{p''}$ 、 $f_{ss}^{p'}$ 、 f_{ds}^p 、 f_{rs}^p 分别为各节点的单位时间存储成本，其他

参数同上。

(3) 运输成本

忽略了运输时间对运输成本的影响, 仅考虑运载量和单位产品的运输成本对运输成本 C_t 的影响, 运输成本如下:

$$C_t = \sum_k (\sum_s Y_{smk} f_{smk} + \sum_d Y_{dmk} f_{dmk} + \sum_d \sum_r Y_{drk} f_{drk})$$

(4) 缺货成本

这里的缺货成本 C_d , 我们仅考虑零售商的缺货成本:

$$C_d = \sum_k (\sum_r \sum_p D_{rk}^p f_{rk}^p)$$

其中, D_{rk}^p 为零售商的缺货量; f_{rk}^p 为零售商的单位缺货成本。

由此, 我们建立目标函数如下:

$$D = \min(C_p + C_s + C_t + C_d)$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sigma_{mk}^p \Delta t_m^p \geq t_{mk}^p \geq 0 \\ \sigma_{mk}^{p'} \Delta t_m^{p'} \geq t_{mk}^{p'} \geq 0 \end{cases}$$

且临界补货点 s 小于最大库存量 S , 即:

$$s < S$$

以及各库存节点有最大库存容量限制等约束条件。

2、基于双目标模糊选址的 DVD 配送模型

由于此 DVD 公司采用快递的方式与顾客进行产品交互, 并且快递费由公司承担, 这种方法大大增加了公司成本并且降低了 DVD 利用率。并且, 若同一地点不同客户产生这种行为, 这将给公司带来大量不必要的损失。因此在当今智能化、信息化的时代, 公司应该在每个区域建立仓库。提高企业的物流整体运作效率。

想要真正提高企业的物流整体运作效率, 解决发展中的瓶颈问题, 就要探索适合企业的物流配送模式^[9]。于是, 我们利用双目标模糊选址^[10]的方法, 建立 DVD 的配送模型。

我们假设某一配送网络有 m 个待选的配送中心、 φ 个可用的配送车辆和 n 个客户, 每个客户均有配送需求和退换需求。设候选配送中心集合为 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, 客户集合为 $J = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$, 可用配送车辆集合为 $K = \{1, 2, \dots, \varphi\}$ 。

边集合 $E = \{(i, j) | i, j \in V\}$, 每条边对应的配送费用 c_{ij} ; O_i 为配送中心 i 的固定费用; H_i 为配送中心 i 的单位产品流通费用, 客户 j 的配送需求和退换需求分别为三角模糊数 $\tilde{d}_j = (d_{1j}, d_{2j}, d_{3j})$ 和 $\tilde{p}_j = (p_{1j}, p_{2j}, p_{3j})$; F_v 为单位车辆的派遣费用;

车辆容量限制均为 Q ; 配送中心 i 的容量限制为 M_i 。决策变量 x_{ijk} 表示边 (i, j) 之间是否有直接路径且服务车辆为 k , 即:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{边}(i,j)\text{之间没有有直接路径} \\ 1 & \text{边}(i,j)\text{之间有直接路径} \end{cases}$$

z_{ijk} 表示客户 j 是否被配送中心 i 服务，即：

$$z_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{客户 } j \text{ 不被配送中心 } i \text{ 服务} \\ 1 & \text{客户 } j \text{ 被配送中心 } i \text{ 服务} \end{cases}$$

y_i 表示配送中心 i 是否被选中，即：

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{配送中心 } i \text{ 没被选中} \\ 1 & \text{配送中心 } i \text{ 被选中} \end{cases}$$

额外变量 U_{ijk} 为车辆 k 在边 (i,j) 之间的负载量。

目标函数如下：

$$\min \sum_{i \in I} O_i \times y_i + E(\tilde{f})$$

$$\min \tilde{f} = \sum_{i \in I} H_i \times \sum_{j \in J} z_{ij}(\tilde{d}_j + \tilde{p}_j) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} Fv \times x_{ijk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ij} \times x_{ijk}$$

约束条件如下：

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \forall j \in J$$

$$x_{ijk} = 0, \forall i \in V, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 0, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1, \forall j \in J$$

$$\sum_{i \in V} x_{ijk} - \sum_{i \in V} x_{ijk} = 0, \forall j \in V, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq 1, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq \varphi$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subset J, \forall k \in K$$

$$\sum_{g \in V} x_{igk} + \sum_{h \in V} x_{jhk} \leq 1 + z_{ij}, \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K$$

$$\sum_{j \in J} z_{ij} \times d_{3j} \leq M_i \times y_i, \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widetilde{U}_{ijk} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} x_{ijk} \times \widetilde{d}_j, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widetilde{U}_{ijk} - \widetilde{d}_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widetilde{U}_{ijk} - \widetilde{p}_j, \forall j \in J$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widetilde{U}_{ijk} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} x_{ijk} \times \widetilde{p}_j, \forall k \in K$$

$$0 \leq \widetilde{U}_{ijk} \leq Q \times x_{ijk}, \forall i \in V, \forall j \in V, \forall k \in K$$

$$\sum_{j \in J} z_{ij} \geq y_i, \forall i \in I, \forall j \in J$$

$$z_{ij} \leq y_i, \forall i \in I, \forall j \in J$$

$$y_i \in \{0,1\}, z_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in I, \forall j \in J$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in V, \forall k \in K$$

最后解得 DVD 的最优配送方案。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点与缺点

在问题二建立的基于最大会员满意度的 DVD 分配模型中，我们采取了将偏爱程度取到数的方法，使得会员对 DVD 的满意程度的描述有依据，比较合理，避免了线性取值带来的较大误差。针对问题四，我们从经营者的角度对 DVD 的库存调度问题和 DVD 配送问题进行研究分析，建立相应的数学模型，综合考虑了多种因素。

由于对商业运作知识的缺乏，对满意度的把握实际上不是很正确。在问题三模型的建立中，为了方便处理我们假设所有 DVD 的价格相同，在生活中这种情况并不存在。

6.2 模型的推广

本题中设计的分配方案不仅可以应用于 DVD 的在线租赁，也适合于绝大部分的网上在线交易。可以推广到使用一般的物品租赁领域或者商品销售领域，使其合理的订购和分配物品，以获得经济效益的最大化。

参考文献

- [1]陈魁.应用概率统计[M].北京：清华大学出版社,1999
- [2]菲力普·科特勒.营销管理[M].上海：上海人民出版社,2001
- [3]李贤平.沈崇圣.陈子腾.概率论与数理统计[M].上海：复旦大学出版社,2003
- [4]魏冬云.蒋光清.刘航潮.公共关系心理学[M].北京：人民出版社,2004:99
- [5]彭禄斌.赵林度.供应链网状结构中多级库存控制模型[J].东南大学学报(自然科学版),2002,32(2):218-222
- [6]倪冬梅.赵秋红.里海滨.需求预测综合模型及其库存决策的集成研究[J].清华大学出版社,2003,16(4):44-52
- [7]白云.基于成本优化的多级库存控制研究[D].武汉：武汉理工大学,2002
- [8]张慧颖.不确定需求下的供应链库存协调管理研究[D].天津：天津大学,2003
- [9]Barreto S.Analysis and modeling of location-routing problems[D].Protugal:University of Aveiro,2004
- [10] Salhi S,Nagy G.A cluster insertion heuristic for single and multiple depot vehicle routing problems with backhauling[J].Journal of the Operational Research Society,2002,50(10):1034-1042

附 录

附录一：问题一代码

```
min x1+x2+x3+x4+x5
st 1.6x1>=10000
1.6x2>=5000
1.6x3>=2500
1.6x4>=1250
1.6x5>=1000
end
gin 5
```

(三个月内)

```
min x1+x2+x3+x4+x5
st 1.6x1>=19000
1.6x2>=9500
1.6x3>=4750
1.6x4>=2375
1.6x5>=950
end
gin 5
```

附录二：问题二代码

```
model:
sets:
member/1..100/:g;
object/1..20/:x;
link(member,object):f,a;
endsets
data:
a=@ole('kkk.xls','aaa');
x=@ole('kkk.xls','bbb');
@ole('kkk.xls','ccc')=f;
enddata
max=@sum(link(i,j): f(i,j)*a(i,j)*g (i));
@for(link(i,j) | a(i,j) #eq# 0 : f(i,j)=0);
@for(member(i): @sum(object(j): f(i,j))=3*g (i));
@for(object(j): @sum(member(i): g(i)*f(i,j))<=x(j));
@for(link(i,j): @bin(f(i,j))); @for(member(i): @bin(g(i)));
end
```

附录三：问题三代码

```
model:
sets:
member/1..100/:g;
```

```

number/1..20/:b,x;
link(member,number):f,c;
endsets
data:
b=@file('min.txt');
c=@file('mmm.txt');
@ole('sss.xls','aaa')=f;
enddata
max=@sum(link(i,j):
f(i,j)*g(i)*c(i,j));
@sum(member(i): g(i))=95;
@for(member(i):@sum(number(j) f(i,j))=3*g(i));
@for(number(j): @sum(member(i):f(i,j)*g(i))=x(j));
@for(number(j): x(j)<=b(j)); @for(link(i,j): @bin(f(i,j)));
@for(member(i): @bin(g(i)));
@for(number(i): @gin(x(i)));
end

```