

# 出版社资源配置

## 摘 要

本文针对出版社资源配置问题,建立了强势产品评价模型,解决了强势产品的确定问题;建立了灰色预测模型,解决了市场占有率、市场竞争力指数和消费者满意度的预测问题;建立了经济效益指数模型和多目标线性规划模型,解决了出版社资源配置问题。

针对强势产品的确定问题,本文建立了强势产品评价模型,以找出每年每个出版社的强势产品。首先引入的强势产品的定义;其次分别计算各个学科的市场占有率、消费者满意度、市场竞争力三个指标并分析出 A 出版社各学科在这三个方面的大致情况。最后通过模糊综合评价法找出 A 出版社 2006 年的强势产品。最终得到计算机类、经管类、数学类、英语类、两课类、机械能源类、化学化工类、地理地质类和环境类的强势产品分别为 C 程序设计、保险、高等数学、大学英语、毛泽东思想概论、机械设计、有机化学、地理信息系统和大气污染控制工程。

针对市场占有率、市场竞争力指数和消费者满意度的预测问题,建立了灰色预测模型。首先我们根据数据特征,确定模型的阶数为一阶;其次对数据进行累加,得到一次累加生成序列。最后对 2006 年各个分社的市场占有率、市场竞争力指数和消费者满意度进行预测并进行模型检验。最终得 2006 年计算机类、经管类、数学类、英语类、两课类、机械能源类、化学化工类、地理地质类和环境类的市场占有率分别为 6.3461%、5.3176%、33.188%、28.6174%、1.9071%、1.3705%、0.5793%和 1.5115%;市场竞争力指数分别为 3.0956、3.2175、1.7156、2.892、2.1115、2.2516、2.3653、2.6852 和 3.8385;消费者满意指数份分别为 2.7371、2.7975、2.8583、2.8462、2.8364、2.7411、2.9377、2.8725、2.8697 和 2.8697。

针对出版社资源配置问题,建立了经济效益指数模型和多目标线性规划模型。首先分析得到 A 出版社的经济效益是由书目的销售量和每种书目的课程均价来决定的;其次建立经济效益指数模型,并通过线性拟合得到 A 出版社 2006 年的各项指标;最后以经济效益指数最大为第一目标,分配给分社的书目数量时尽可能满足强势产品的申请数量为第二目标,并建立多目标线性规划模型求解并检验。最终得出出版社的分配方案:计算机类分社分配 55 个书号,经管类分社分配 48 个书号,数学类分社分配 120 个书号,英语类分社分配 84 个书号,两课类分社分配 72 个书号,机械能源类分社分配 45 个书号,化学、化工类分社分配 20 个书号,地理、地质类分社分配 30 个书号,环境类分社分配 26 个书号。

**关键词:** 模糊综合评价 灰色预测 多目标规划  
线性规划 经济效益指数模型

## 一、问题重述

出版社的资源主要包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等，它们都捆绑在书号上，经过各个部门的运作，形成成本（策划成本、编辑成本、生产成本、库存成本、销售成本、财务与管理成本等）和利润。

某个以教材类出版物为主的出版社，总社领导每年需要针对分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析，将总量一定的书号数合理地分配给各个分社，使出版的教材产生最好的经济效益。事实上，由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量，因此总社一般以增强强势产品支持力度的原则优化资源配置。资源配置完成后，各个分社（分社以学科划分）根据分配到的书号数量，再重新对学科所属每个课程作出出版计划，付诸实施。

资源配置是总社每年进行的重要决策，直接关系到出版社的当年经济效益和长远发展战略。由于市场信息（主要是需求与竞争力）通常是不完全的，企业自身的数据收集和积累也不足，这种情况下的决策问题在我国企业中是普遍存在的。

本题附录中给出了该出版社所掌握的一些数据资料，请你们根据这些数据资料，利用数学建模的方法，在信息不足的条件下，提出以量化分析为基础的资源（书号）配置方法，给出一个明确的分配方案，向出版社提供有益的建议。

附件 1：问卷调查表；

附件 2：问卷调查数据（五年）；

附件 3：各课程计划及实际销售数据表（5 年）；

附件 4：各课程计划申请或实际获得的书号数列表（6 年）；

附件 5：9 个分社人力资源细目。

## 二、问题分析

为了根据题目的具体要求对出版社提出分配方案，我们从以下几个方面考虑：

首先，引入强势产品的定义。为了更好的制定分配方案，我们从书目的市场占有率、市场竞争力和消费者满意度<sup>[1]</sup>三个角度对各产品进行分析，再用层次分析法找出 A 出版社的强势产品。

其次，通过灰色预测法对 A 出版社 2006 年各学科的市场占有率、市场竞争力指数和消费者满意度进行预测。

最后，以出版社的最大经济利益为目标，由每个分社最多处理的书号数作为突破口，建立非线性整数规划模型，并通过多目标线性规划进行求解。而出版社的经济效益是建立在销售的书目量和课程均价的基础上的，因此我们选择通过拟合的方法找出书目销售量和实际拥有书目量以及购买人数之间的关系，列出约束条件进行求解。

### 三、基本假设

- 1、调查问卷的发放是随机的；
- 2、A 出版社的主要销售对象是在校大学生；
- 3、调查问卷中没有课程编号的书不予考虑，即仅考虑 A 出版社的 72 门课程；
- 4、A 出版社的人力资源相对稳定，即历年的人员平均工作能力能够准确反映各分社的工作情况，暂不考虑新的人员调整；
- 5、2001-2005 年的出版社市场相对稳定，没有出现大的波动。

### 四、符号说明

$S$	市场占有率
$E_k$	市场竞争力指数
$S_i$	综合满意度
$A$	判断矩阵
$\lambda_{max}$	判断矩阵的最大特征根
$C. I$	一致性指标
$C. R$	随机性一致性比值
$R. I$	平均随机一致性指标
$U$	目标层
$R$	模糊综合判断矩阵
$x^{(0)}$	原始数据序列
$x^{(1)}$	一次累加生成序列
$z^{(1)}$	均值生成序列
$u$	最小二乘
$\varepsilon(k)$	残差
$\rho(k)$	级比偏差
$d_i^+$	正偏差变量
$d_i^-$	负偏差变量
$p_k$	优先因子
$W$	经济效益指数
$N_{ij}$	课程的销售量
$P_{ij}$	该课程的均价

### 五、模型的建立与求解

#### 5.1 数据分析

对于题目中所给的大量数据，我们选择从两个方向进行分析处理。  
首先，我们进行纵向分析。通过分析附件 2 的 5 年抽样调查数据，剔除没有

书号的教材，我们可以得到 A 出版社所生产的每种学科的市场占有率、A 出版社中所有学科在消费者心中的位置以及消费者对 A 出版社所有学科的满意程度。然后运用层次分析法找出 A 出版社的强势产品。

其次，我们进行横向分析。由附件 4、5 中 5 年的申请书号量、课程均价和各分社最多处理的书号数，建立非线性整数规划模型，预测出 2006 年 A 出版社各分社实际得到的书号数。

最后，通过多级目标规划求出 A 出版社的最大利润，实现利益最大化目标。

## 5.2 强势产品评价模型的建立与求解

为了合理的将 A 出版社的书分配给所有分社，出版社一般以增加强势产品支持力度的原则进行优化配置。因此，首先我们需要找出强势产品。根据引入的强势产品的定义，其次我们对 A 出版社所有学科的市场占有率、消费者满意度、市场竞争力三个指标进行计算，分别分析出 A 出版社各学科在这三个方面的大致情况。最后，根据通过层次分析法找出 A 出版社 2006 年的强势产品。

### 5.2.1 模型的建立

想要使出版社的经济效益最大，我们需要制定合理的书号分配方案，使得出版的教材产生最大的经济效益。鉴于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量，而总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。因此，我们引入强势产品的定义。

强势产品，即在同类产品中占有绝对优势或地位的产品。在本题中，产品的市场占有率、产品的市场竞争力和消费者对产品的满意度，都可以反映出此类产品是否市场中占据优势地位。因此，我们选择产品的市场占有率、产品的市场竞争力和消费者对产品的满意度这三个指标作为衡量此类产品是否为强势产品的依据。

#### 1、市场占有率

市场占有率是指一种产品的销售量或销售额在市场同类产品中所占的比重，在很大程度上反映了该产品的竞争地位和盈利能力。所以，我们将 A 出版社中某学科的市场占有率 S 表示为：

$$S = \frac{\text{该学科的销售量}}{\text{所有学科的总销售量}}$$

通过该学科的市场占有率能够反映出该学科所占的市场份额，市场占有率越高，该学科所占的市场份额越大，越有可能是强势产品。

#### 2、市场竞争力指数

市场竞争力是指企业根据市场环境和自身资源条件，通过系统化的营销在市场中获得优势，创造顾客价值，达成互利交换，从而实现相关利益。所有出版社处于相同的市场环境之中，因此市场竞争力主要通过每个出版社的自身资源条件来反映。A 出版社的市场竞争力反映为问卷中的 Q1，即 A 出版社在消费者心中的位置。A 出版社在消费者心中的位置越靠前，则说明 A 出版社的市场竞争力越强。

为了便于研究分析，在这里我们引入市场竞争力指数  $E_k$  来量化市场竞争力。即：

$$E_k = \sum_{i=1}^5 a_i \times \frac{w_i}{SUM_i}, k = 1, 2, \dots, 5$$

其中,  $a_i$  为 A 出版社中某学科的位置分值;  $w_i$  为该位置分值的总和;  $SUM_i$  为当年各位置分值的总和。市场竞争力指数  $E_k$  越小, 说明其市场竞争力越强。

### 3、消费者满意度

定义强势产品, 不仅仅要从出版社本身的条件考虑, 除了出版社自身的市场竞争力和市场占有率, 我们还需要从消费者的方面入手。消费者满意度是指消费者的一种心理状态, 是需求被满足后的愉悦感, 用数字来衡量消费者对产品或服务的事前期望与实际使用产品或服务后所得到的实际感受的相对关系。要提高市场份额, 企业必须从消费者的满意度入手做更深入细致的工作。在本题中, 消费者满意度主要通过 Q21 来反映, 即教材内容是否新颖, 保持学术前沿水平、教材的作者是否是相应领域的权威, 课程理论基础是否扎实、教材印刷及排版质量水平、教材价格水平。通过以上四个指标综合考虑消费者对该学科下书目的满意度。

满意度一般是通过评价分值的加权计算得到的, 而本题中的四个指标我们可以近似的认为它们对消费者对该学科下书目满意度的影响程度是相同的<sup>[2]</sup>。进而我们给以上四个指标赋予相同的权值, 即教材内容是否新颖, 保持学术前沿水平、教材的作者是否是相应领域的权威, 课程理论基础是否扎实、教材印刷及排版质量水平、教材价格水平的权值分别为 0.25、0.25、0.25、0.25。消费者对该书的综合满意度  $S_i$  为:

$$S_i = \sum_{i=1}^4 p_i w_i$$

其中,  $w_i$  为各指标的权值,  $p_i$  为各指标的满意度总和。(附件 2 最下面算出来了, 然后列个表)

### 4、模糊综合评价方法

为了对 2001-2005 年的数据做出客观全面的评价, 对数据进行定性、定量的分析, 我们选择层次分析法对 A 出版社的强势产品进行分析。层次分析法是将与决策总是有关的元素分解成目标、准则、方案等层次, 在此基础上进行定性和定量分析的决策方法。它利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化, 从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。

我们通过建立层次结构模型、构造判断矩阵、一致性检验、单级层次综合评价模型的建立求解, 最终找出 A 出版社的强势产品。

#### (1) 建立层次结构模型

对于找出 A 出版社的强势产品问题, 我们构造层次分析模型。首先, 我们选取强势产品的评价作为目标层 U。其次, 指标层 B1、B2、B3 分别为市场占有率、市场竞争力、消费者满意度。最后, 我们根据指标层选取评价层 C 的三个评价分别为好、一般、差。层次分析的结构图如图 1 所示:

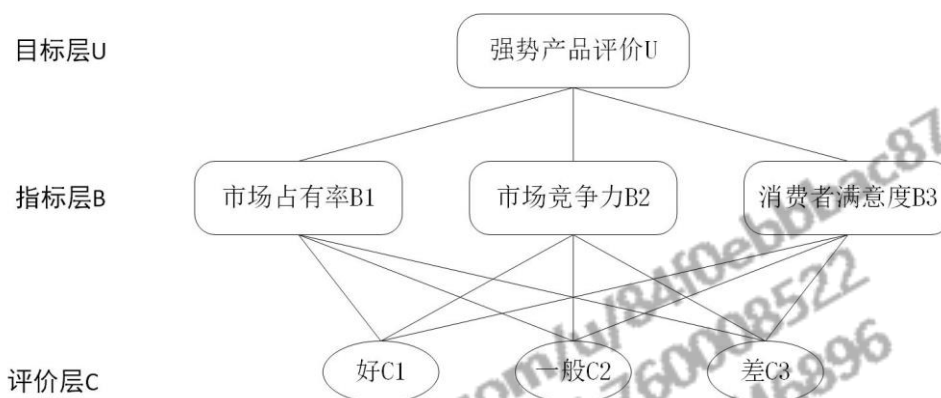


图 1 层次分析结构图

## (2) 构造判断矩阵

$A = (a_{ij})$  为判断矩阵，用来表示同一层次各个指标相对重要性的判断值。

层次分析法中通过对指标之间两两重要程度进行比较分析和判断，在对于两个不能准确量化的量作比较时，常采用 1~9 的比较尺度：同等重要为 1，重要为 3，很重要为 5，非常重要为 7，极重要为 9；不重要为 1/3，很不重要为 1/5，非常不重要为 1/7，极不重要为 1/9，处在以上各等级之间时，可记为 2,4,6,8 或 1/2,1/4,1/6,1/8。

假定 A 层次中第  $k$  个元素  $A_k$  与下一层次（B 层） $B_1, B_2, B_n$  元素有联系，构造的对于  $A_k$  层而言的判断矩阵如表 1 所示：

表 1 判断矩阵

$A_k$	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$B_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	...	$b_{1n}$
$B_2$	$b_{21}$	$b_{22}$	...	$b_{2n}$
...	...	...	...	...
$B_n$	$b_{n1}$	$b_{n2}$	...	$b_{nn}$

其中， $b_{ij}$  表示对  $A_k$  而言， $B_i$  对  $B_j$  的相对重要性。确定  $B_{ij}$  的方法采用上述提到的 1-9 比较尺度。

## (3) 一致性检验

在得到了判断矩阵 A 后，可以求得 A 的最大特征根  $\lambda_{max}$ ，为了判断 A 的不一致程度是否在允许的范围内，需要对它的一致性进行检验。

一致性指标如公式所示：

$$C.I = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

由于随着  $n$  的增加判断误差就会增加，因此判断一致性时应当考虑到  $n$  的影响，使用随机性一致性比值如公式所示：

$$C.R = \frac{C.I}{R.I}$$

R.I 为平均随机一致性指标，其评价指标如表 2 所示：

表 2 一致性检验

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>R.I</i>	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

当  $C.R < 0.1$  时, 通过一致性检验; 如果  $C.R \geq 0.1$ , 则说明判断矩阵没有较好的一致性, 应重新考虑并调整两两比较判断矩阵, 直到具有满意的一致性。

#### 5、模糊-层次综合评价模型的建立

对于找出 A 出版社强势产品的问题, 我们选择采用单级模糊综合评价<sup>[3]</sup>, 通过精确的数字手段处理模糊的评价对象, 对蕴藏信息呈现模糊性的资料做出更加科学、合理、贴近实际的量化评价。

单级模糊综合评判法模型建立的步骤如下:

- (1) 将因素集  $U$  按属性的类型划分为  $k$  个子集, 或者说影响  $U$  的  $k$  个指标, 记为:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$$

且应该满足:

$$\bigcup_{i=1}^k U_i = U, U_i \cap U_j = \emptyset$$

- (2) 采用构建好权重向量;  
 (3) 建立可行性指标评语;  
 (4) 构建模糊关系矩阵;  
 (5) 进行模糊综合评价及可行性等级的判断。

#### 5.2.2 模型的求解

找出强势产品, 首先我们需要分别对 A 出版社各学科的市场占有率、市场竞争力和消费者满意度分别进行分析。

##### 1、市场占有率的求解

首先我们筛选问卷中的 A 出版社(P115), 其次我们通过分析得到 A 出版社 2001-2005 年各学科的市场占有率如表 1 所示:

表 3 各学科的市场占有率

	2001	2002	2003	2004	2005
计算机类	419	410	815	407	503
市场占有率(%)	6.11%	6.15%	6.21%	6.22%	6.31%
经管类	455	474	863	375	473
市场占有率(%)	6.64%	7.11%	6.58%	5.73%	5.93%
数学类	2221	2251	4334	2172	2663
市场占有率(%)	32.41%	33.76%	33.04%	33.21%	33.39%
英语类	1494	1411	2873	1411	1733
市场占有率(%)	21.80%	21.16%	21.90%	22.03%	21.73%
两课类	1984	1863	3714	1867	2270
市场占有率(%)	28.95%	27.94%	28.31%	28.55%	28.46%
机械能源类	119	118	223	120	145
市场占有率(%)	1.74%	1.77%	1.70%	1.83%	1.81%
化学化工类	49	48	94	56	67
市场占有率(%)	0.72%	0.72%	0.72%	0.86%	0.84%



地理地质类	57	50	107	51	55
市场占有率(%)	0.83%	0.75%	0.82%	0.78%	0.69%
环境类	57	43	94	51	66
市场占有率(%)	0.83%	0.65%	0.72%	0.78%	0.83%

通过上述分析我们得出结论，A 出版社 2001-2005 年的所有学科中，市场占有率最高的是数学类，其市场占有率维持在 33%左右，已经接近总市场的三分之一；其次是两课类，其市场占有率逼近 30%；最后是英语类，其市场占有率维持在 20%以上。市场占有率较低的学科有化学化工类、环境类、地理地质类、机械能源类，其 2001-2005 年市场占有率的平均值分别约为 0.772%、0.76%、0.77%、1.766%。

由此可见，数学类、两课类、英语类这三种学科的总市场占有率已经达到 80%，而化学化工类、环境类、地理地质类和机械能源类这四类学科的总市场占有率还不到 5%。说明在市场中，消费者更倾向于购买数学类、两课类、英语类这三种学科的教材。我们也可以初步预测出，2006 年 A 出版社的所有学科中，数学类、两课类、英语类这三种学科仍将拥有较大的市场占有率，而化学化工类、环境类、地理地质类和机械能源类教材的市场占有率并不乐观。

## 2、市场竞争力的求解

为了便于研究，我们引入市场竞争力指数 $E_k$ 来量化 A 出版社各学科的市场竞争力。2001-2005 年市场竞争力指数 $E_k$ 的计算结果如表 4 所示：

表 4 各学科市场竞争力指数

学科	2001	2002	2003	2004	2005
计算机类	3.0144	3.1582	3.1301	3.1106	3.1193
经管类	3.0374	3.2173	3.2086	3.2	3.2262
数学类	3.0167	1.7104	1.7044	1.7123	1.7146
英语类	3.0562	2.9242	2.8945	2.9008	2.9036
两课类	3.0023	2.2039	2.1559	2.15	2.1383
机械能源类	3.0252	2.6302	2.3363	2.425	2.3517
化学化工类	3.2653	2.5510	2.3617	2.4107	2.4328
地理地质类	2.8947	2.96	2.8131	2.8039	2.7636
环境类	2.9123	3.6046	3.6809	3.6667	3.8030

鉴于竞争力指数是根据 A 出版社该学科在消费者心中的位置分值计算得出，因此，竞争力指数 $E_k$ 越小，表示该学科的竞争能力越强。

通过表 4 我们得到，2001-2005 年 A 出版社的计算机类、经管类、英语类、地理地质类的市场竞争力指数 $E_k$ 处于一个相对平稳的状态，分别在 3.1、3.2、3.0、2.8 上下波动，我们可以近似的认为这四类学科 2001-2005 年的市场竞争力指数变动较小。而数学类、两课类、机械能源类、化学化工类和环境类的变动较大，其中变动幅度最大的是数学类，其竞争力指数先由 2001 年的 3.01 下降到 2002 年的 1.71，然后稳定在 1.71 不变。由此我们发现，数学类的竞争力越来越强，在 2005 年时是 A 出版社所有学科中竞争力指数最小的学科。而两课类也拥有较强的市场竞争力，其竞争力指数大致为 2.1。到 2005 年时，环境类的竞争力指数最大，约为 3.8，即环境类的市场竞争力最小。计算机类和经管类的竞争力指数也较大，分别为 3.1 和 3.2，其竞争力也较小。

## 3、消费者满意度的求解

通过分析问卷中满意度的相关数据，我们整理得到表 5：



表 5 消费者满意度

学科	2001	2002	2003	2004	2005
计算机类	3.022	2.8311	2.8184	2.7784	2.7629
经管类	2.835	2.8428	2.8488	2.8355	2.8018
数学类	3.038	2.8207	2.8406	2.8402	2.8486
英语类	2.981	2.8446	2.8065	2.8334	2.8517
两课类	2.853	2.8331	2.8261	2.8232	2.8412
机械能源类	3.055	2.8941	2.7915	2.7889	2.7931
化学化工类	2.74	2.8594	2.9521	2.912	2.9104
地理地质类	3.116	2.855	2.8364	2.8456	2.8773
环境类	2.917	2.6453	2.7766	2.7883	2.7955

为了更好的说明表中的数据，我们从横向和纵向两个方向对表 5 进行分析。

首先，从横向看我们发现 A 出版社各学科的消费者满意度在 2002-2005 年的数值变化不大，都稳定在 3.0 左右。这也恰巧说明了这几年出版社并没有很好的从消费者的角度进行改进，使得这 5 年的消费者满意度并没有显著的提高，大部分都低于 3.0。

其次，纵向观察我们发现，2001 年所有学科的消费者满意度在 2.8-3.1 之间，而 2002-2005 年所有学科的满意度在 2.7-3.0 之间，也说明了消费者这 5 年对各学科的满意度差异并不大。其中，消费者随化学化工类教材满意度最高，2005 年约为 2.9；而计算机类学科的满意度最低，约为 2.76。

最后，我们得出结论，A 出版社在 Q211-Q214 这 4 个方面的投入较为均衡，但 A 出版社并不能很好的满足消费者的需求，其消费者满意度几乎都低于 3.0，需要做出一定的调整满足消费者需求，提高消费者满意度。

#### 4、模糊综合评价法的求解

(1)通过指标分析和查阅相关文献<sup>[2]</sup>，最终得到了四个判断矩阵：

在目标层 U 下，判断矩阵 UB：

$$UB = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 进行一致性检验并计算权向量

根据上述所得的判断矩阵，我们计算其权向量并进行一致性检验的结果如表 6 所示：

表 6 一致性检验

权向量	最大特征值	C.I	C.R	矩阵一致性是否可以接受
$w=(0.25,0.5,0.25)$	3	0	0	是

通过表 6 我们发现，判断矩阵的  $C.R < 0.1$ ，即此判断矩阵的一致性是可以接受的。

(3) 单级模糊综合评价模型的求解

因素集  $U = \{\text{市场占有率, 消费者满意度, 市场竞争力}\}$ ;

评语集  $V = \{\text{好, 一般, 不好}\}$ ;

确定各因素权重  $w = \{0.25, 0.5, 0.25\}$ ;

确定模糊综合判断矩阵  $R$ ,由打分来确定;  
模糊综合评判。

$$B = w \times U = [0.25, 0.5, 0.25] \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = [1.5, 0.75, 1.5]$$

最后采用加权平均法处理评价的结果。具体的做法是取以向量  $B$  为权数, 对各个评语隶属度进行加权平均的值为评价的结果:

设“好”=5, “一般”=3, “不好”=1, 加权平均结果为:

$$5 \times 1.5 + 3 \times 0.75 + 1 \times 1.5 = 11.25$$

### 5.3 灰色预测模型的建立与求解

为了合理的分配出版社的资源, 我们需要对 2006 年的数据进行一定的预测, 以保证分配方案的合理性。这是典型的预测问题, 因此我们选用运筹学中的灰色预测模型进行预测并通过计算残差和级比偏差进行检验, 得到 A 出版社 2006 年各学科的市场占有率、市场竞争力指数和消费者满意度。

#### 5.3.1 模型的建立

为了预测 A 出版社各学科 2006 年的市场占有率、市场竞争力和消费者满意度, 我们建立灰色预测模型。灰色预测模型是在前几年数据的基础上预测出未来的数据。其特点是, 灰色理论建立的是生成数据模型, 不是原始的数据模型, 即对原始数据作累加生成 (或其他方法生成) 得到近似的指数规律再进行建模的方法。

我们选用 GM(1,1) 模型预测是因为 GM(1,1) 表示的模型是一阶微分方程, 且只含一个变量的灰色模型。灰色模型的优点在于不需要很多的数据, 精度高; 而且运算简便, 不考虑分布规律, 不考虑变化趋势。

设原始数据序列:

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(5))$$

由一次累加生成序列的定义

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, 5$$

对数据进行累加, 得到一次累加生成序列:

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(5));$$

同理我们构造  $x^{(1)}$  的均值生成序列, 如公式:

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2} (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 1, 2, \dots, 5$$

$$Z^{(1)} = (Z^{(1)}(2), Z^{(1)}(3), \dots, Z^{(1)}(5));$$

灰色微分方程模型的灰微方程以及其对应的白化方程为公式为:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b, k = 2, 3, \dots, 5$$

再根据最小二乘法的原理，对数据进行处理得到白化方程中未知系数 a 和 b 的估计值：

为了方便对数据进行处理，我们决定将计算过程全部切换成矩阵的形式：

构造矩阵 u, Y, B 其中  $u = (a, b)^T$ ,

$$Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(5))^T;$$

因此矩阵形式为：

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z^{(1)}(5) & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = Bu$$

由此，目标转变为最小二乘原理的解决，即求出一个适合的矩阵 u 使得下式达到最小值：

$$J(u) = (Y - Bu)^T(Y - Bu)$$

因此最小二乘 u 的估计值为公式：

$$\hat{u} = (\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

把估计值代入求解白化方程得到公式：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

当  $k=1, 2, \dots$  时，由上式算得的  $\hat{x}^{(1)}(k+1)$  是拟合值；

当  $k \geq N$  时， $\hat{x}^{(1)}(k+1)$  为预报值。

由此我们可以得出预测的累加生成数，依据之前阐述的累加生成数的概念，采用累减的办法，我们就很容易能得到需要预测的值。

但是根据此方法算得的值不能立刻作为结论，需要通过残差检验和级比检验之后才能保证数据的可靠性，这样的预测在现实生活中也才具有实际意义<sup>[4]</sup>。

### 5.3.2 模型的求解

首先，我们对 A 出版社计算机类 2006 年的市场占有率进行灰色预测。

原始数列：

$$x^{(0)} = (6.11 \ 6.15 \ 6.21 \ 6.22 \ 6.31)$$

累加生产序列：

$$x^{(1)} = (6.11 \ 12.26 \ 18.47 \ 24.69 \ 31)$$

均值生成序列：

$$z^{(1)} = (9.185 \ 15.365 \ 21.58 \ 27.845)$$

根据最小二乘法拟合得到：

$$u = (-0.0079 \ 6.0767)$$

根据灰色预测的白化方程可以得到市场占有率的增长模型满足以下曲线方

程：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} = 777.1e^{0.007882t} - 770.9$$

由此我们可以得到：

$$\hat{x}^{(1)}(6) = 37.3461$$

由一次累加可以得到：

$$\hat{x}^{(0)}(6) = 6.3461$$

因此我们得到 2006 年 A 出版社计算机类的市场占有率约为 6.3461。

同理，我们可以得到 A 出版社各学科的市场占有率如表 7 所示：

表 7 各学科 2006 年市场占有率

学科	市场占有率
计算机类	6.3461%
经管类	5.3176%
数学类	33.188%
英语类	22.0275%
两课类	28.6174%
机械能源类	1.9071%
化学化工类	1.3705%
地理地质类	0.5793%
环境类	1.5115%

通过表 7 我们可以看出，数学类、两课类和英语类的市场占有率最高，分别为 33.188%、28.6174%、22.0275%，三类课程的市场约占总市场的 83.8%。而机械能源类、化学化工类、地理地质类和环境类的市场占有率较低，分别为 1.9071%、1.3705%、0.5793%和 1.5115%，所占市场份额较小，占总市场的 5.4%。由此我们也可以大致推断出，数学类、两课类和英语类将很有可能是 A 出版社 2006 年的强势产品。

同理，A 出版社各学科 2006 年的市场竞争力指数和消费者满意度通过整理如表 8 所示：

表 8 各学科 2006 年市场竞争力指数

学科	市场竞争力指数
计算机类	3.0956
经管类	3.2175
数学类	1.7156
英语类	2.892
两课类	2.1115
机械能源类	2.2516
化学化工类	2.3653
地理地质类	2.6852
环境类	3.8385

因为各学科的市场竞争力指数是根据该学科在消费者心中的位置来确定的，因此市场竞争力指数的值越小，则代表了该学科的市场竞争力越强。由此，我们发现，数学类的市场竞争力指数最小，为 1.7156；其次为两课类和机械能源类，

其市场竞争力分别为 2.1115 和 2.2516;环境类的市场竞争力指数最大,为 3.8385。这也说明了 A 出版社的数学类在市场竞争中的优势最大,而环境类在市场竞争能力最小。

表 9 各学科 2006 年消费者满意度

学科	消费者满意度
计算机类	2.7371
经管类	2.7975
数学类	2.8583
英语类	2.8462
两课类	2.8364
机械能源类	2.7411
化学化工类	2.9377
地理地质类	2.8725
环境类	2.8697

通过表 9 我们可以看出, A 出版社中化学化工类的消费者满意度最高,约为 2.94,而所有学科的消费者满意度都在 2.7-3.0 之间,说明消费者对 A 出版社各学科的满意度相差不大,但满意度分值并不乐观。

### 5.3.3 模型的检验

#### 1、残差检验

首先定义残差的计算公式如下:

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, 5$$

这里的  $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ , 如果  $\varepsilon(k) < 0.1$ , 则可以认为达到一般要求; 如果

$\varepsilon(k) \geq 0.1$ , 则可以认为达到较高要求。

#### 2、级比偏差值检验

级比( $\lambda(k)$ )和级比偏差值( $\rho(k)$ )的定义如下:

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, 5$$

$$\rho(k) = 1 - \frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \lambda(k)$$

一般来说如果  $\rho(k) < 0.1$ , 则认为达到了较高的要求, 我们通过计算整理, 得到 A 出版社各学科 2006 年市场占有率的偏差值如表 10 所示:

表 10 各学科 2006 年市场占有率检验

学科	残差 $x^{(0)} - x(0)$	级比偏差值 $\rho(k)$
计算机类	0.054	0.0467
经管类	0.0323	0.043
数学类	0.0476	0.0266
英语类	0.022	0.008

两课类	0.0433	0.0573
机械能源类	0.0653	0.0704
化学化工类	0.0477	0.0688
地理地质类	0.0496	0.058
环境类	0.0598	0.0365

通过对级比偏差值的分析可以得出绝对值最大的级比偏差值为 0.0704，很显然已经达到了最高的要求。所以利用灰色预测模型的预测出的出版社强势产品有较高的准确性。

### 3、置信区间

置信区间是指由样本统计量所构造的总体参数的估计区间,它展现的是这个参数的真实值有一定概率落在测量结果周围的程度,是被测量参数的测量值的可信程度。一般来说,置信水平越高,所对应的置信区间就会越大<sup>[5]</sup>。

因为本题数据明显是大样本数据,在不知道总体方差的情况下,我们选择枢轴量如下公式:

$$t = \frac{\bar{x} - u}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

所以我们可以得到移动端考研产品的价格估计区间为如下公式:

$$\left( \bar{x} - t_{\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right),$$

设置信度 $\alpha = 0.05$ ,  $S_{n-1}$ 为产品的样本方差,  $\bar{x}$ 为产品的样本均值,整理数据如表 9 所示:

表 1: 各学科市场占有率置信区间的计算

学科	置信区间
计算机类	(4.887,7.453)
经管类	(4.220,6.747)
数学类	(30.682,35.712)
英语类	(20.334,25.680)
两课类	(27.314,30.733)
机械能源类	(0.327,3.003)
化学化工类	(0.656,2.085)
地理地质类	(0.006,2.083)
环境类	(0.243,2.756)

由此可见,通过灰色预测进行的各学科的市场占有率预测是准确的。

## 5.4 经济效益指数模型的建立与求解

出版社是以获得最大经济效益为目标的<sup>[6]</sup>。由这个出发点,我们首先分析得到 A 出版社的经济效益是由书目的销售量和每种书目的课程均价来决定的。其次,我们通过线性拟合得到 A 出版社 2006 年的各项指标。最后,为了满足分配方案中尽量满足强势产品的要求,我们选择通过多目标线性规划进行求解,得出出版社的分配方案。

### 5.4.1 模型的建立

想要使 A 出版社在 2006 年的分配方案最合理,即要求 A 出版社在 2006 年



的分配方案既考虑到出版社的自身利益，又满足出版社在市场营销环节中必须满足的条件<sup>[7]</sup>。这就需要从以下两个方面考虑，即需要满足的目标：

- (1) 出版社自身的利益最大，即经济效益指数最高；
- (2) 分配给分社的书目数量时尽可能满足强势产品的申请数量。

由于本题解决的是一个书目合理分配的问题，即运筹学中典型的 0-1 规划问题，因此我们通过多目标规划解决问题。

在多目标规划中，为了更好的解决问题，我们引入以下 4 个定义：

- (1) 正、负偏差变量：

设  $f_i (i = 1, 2, \dots, l)$  为第  $i$  个目标函数，它的正偏差变量  $d_i^+ = \max\{f_i - d_i^0, 0\}$ ，

表示决策值超过目标值的部分，负偏差变量  $d_i^- = -\min\{f_i - d_i^0, 0\}$  表示决策值

未达到目标值的部分，这里  $d_i^0$  表示  $f_i$  的目标值。决策值不可能既超过目标值同时

又未达到目标值，即恒有  $d_i^+ \times d_i^- = 0$ 。

- (2) 绝对约束和目标约束：

绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束，如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以他们是硬约束。在达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对的约束变为目标约束。

- (3) 优先因子

一个规划问题常常有若干个目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急之分的。凡是要求第一位达到的目标赋予优先因子  $P_1$ ，，次位的目标赋予优先因子  $P_2, \dots, P_n$ ，并规定  $p_k \gg p_{k+1}$ ，表示  $p_k$  比  $p_{k+1}$  有更大的优先权。

- (4) 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能的缩小偏离目标值。其基本形式有三种：

第  $i$  个目标要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能的小，这时：

$$\min w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+$$

第  $i$  个目标要求不超过目标值，即允许达不到目标值，即正偏差变量都要尽可能的小，这时：

$$\min w_i^+ d_i^+$$

第  $i$  个目标要求超过目标值，即超过量不限，但偏差变量都要尽可能的小，这时：

$$\min w_i^- d_i^-$$

由此，我们选择通过多目标线性规划解决问题。

因为书目号总数为 500，我们根据总的书目号制定分配方案。

设变量  $x_{ij}$  为 0-1 规划，即：



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个书目号分配给第 } j \text{ 个课程} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 个书目号不分配给第 } j \text{ 个课程} \end{cases}$$

从以上两个目标进行分析,我们发现在分配合理方案时应先满足第一个目标,随后尽可能满足第二个目标。因此我们采用求解目标规划算法中的序贯算法。

序贯算法是求解目标规划的一种早期算法,其核心是根据优先级的先后次序,将目标规划问题分解成一系列的单目标规划问题,再依次进行求解。

根据以上两个目标,对于第一个目标来说,我们允许 A 出版社的实际经济效益小于其最大经济效益;对于第二个目标来说,我们尽可能的满足强势产品的分配原则。根据正负偏差变量的定义,我们建立目标函数如下:

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 (d_2^- + d_2^+)$$

其中,其优先级分别为  $P_1$ 、 $P_2$ 。

由于经济效益是由书目的销售量和每种书目的课程均价来决定的,而出版社的销售量又取决于出版社出版的书目量和购买的人数,因为这里我们只需要一个相对值来估计 A 出版社所在地区的购买人数,所以我们选择所有分类人群中购买书目倾向最大的人群<sup>[8]</sup>,即全国高校毕业生,作为我们的调查对象,又因为考虑到我们的调查对象主要为在校大学生,因此将 2004-2008 年全国高校毕业生的人数作为 2001-2005 年在校大学生的人数,如图 2 所示:

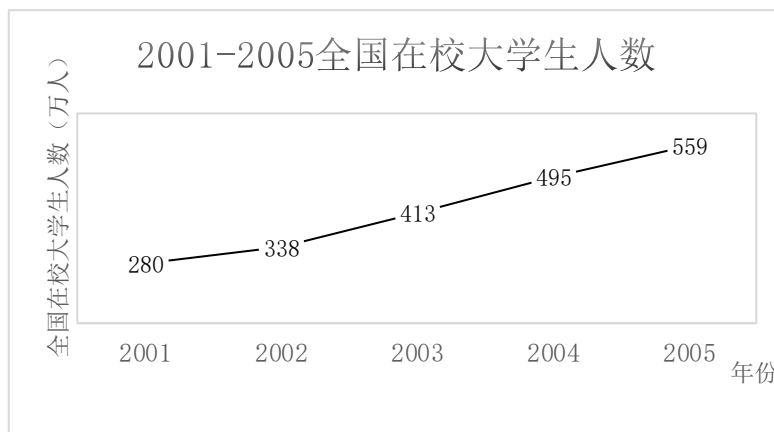


图 2 全国高校毕业人数

由上图我们可以看出,2001-2005年全国在校大学生人数呈上升趋势,由2001年的280万人增加到2005年的559万人。由此我们也可以大致预测出2006年的全国在校大学生人数也将较2005年有大幅度增长。

接着,我们通过拟合出销售量与书目量和购买人数之间的关系。

拟合实际上就是使观测结果的数字统计与相应数值的吻合<sup>[9]</sup>,形象的说,拟合就是把平面上一系列的点,用一条光滑的曲线连接起来,用连续曲线近似的刻画或比拟平面上离散点组所表示的坐标之间的函数关系。在本题的数值分析中,利用线性拟合就是用解析表达式逼近离散数据,即离散数据的公式化<sup>[10]</sup>。这样不仅便于处理,通常情况下也能确切和充分的体现出其固有的规律。

我们得到销售量与书目量和人数之间的关系:

$$\text{销售量} = \alpha \text{ 书目量} + \beta \text{ 人数}$$

其中， $\alpha$  为销售量和书目量之间的系数； $\beta$  为销售量和人数之间的系数。

$$\alpha + \beta = 1$$

紧接着我们定义目标函数即经济效益指数  $W$ ：

$$W = \sum_{i=1}^{NUM_1} \sum_{j=1}^{NUM_2} N_{ij} P_{ij}$$

其中， $N_{ij}$  为该课程的销售量； $P_{ij}$  为该课程的均价； $i$  为分社的个数； $j$  为该分社下的课程个数。

根据题目中所给条件，得到约束条件如下：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{NUM_i} x_{ij} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{NUM_i} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{NUM_i} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{NUM_i} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{NUM_i} x_{ij} \leq R_k \\ \sum_{i=1}^{NUM_1} \sum_{j=1}^{NUM_2} x_{ij} = 500 \end{cases},$$

$$i = 1, 2, \dots, 500; j = 1, 2, \dots, 72; k = 1, \dots, 9$$

其中， $x_{ij}$  为第  $i$  个书目号是否分配给第  $j$  个课程； $y_{ij}$  为第  $j$  个课程是否申请了第  $i$  个书目号； $R_k$  为第  $k$  个分社的人力资源最多能处理的书号数。

#### 5.4.2 模型的求解

通过数据进行拟合，我们得到：

$$\alpha = 0.7869, \beta = 0.2131$$

解得出版社的分配方案如下：

表 11 出版社的分配方案

课程号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
计算机类	9	8	2	3	2	9	8	3	6	6
经管类	9	3	3	4	3	3	3	9	3	4
数学类	9	19	36	4	13	19	8	5	14	8
英语类	39	3	3	8	3	9	3	2	6	4
两课类	3	10	7	12	3	7	12	15	3	10
机械能源类	19	3	10	18	3	9				
化学化工类	4	3	3	2	3	7				
地理地质类	4	7	3	9	2	2				
环境类	9	3	3	4	3	3				

## 六、模型的评价与推广

### 6.1 模型的优点与缺点

本文在碰到多个目标的时候,选择了建立多目标规划模型进行求解,针对不同优先级的目标进行了全面的分析,充分考虑了出版社和消费者两个方面的因素,得到了合理的分配方案。而在调查对象的处理方面,鉴于不能准确的调查出所需人数的精确数值,我们选择调查大群体的人数发展趋势,作为一个相对值进行等效替换,进而预测出所需的下一年人数数值。在预测方面,我们采用灰色预测模型,可以使用较少的已知数据精确地进行预测,适用于中短期的预测,方法简单合理。

假设调查问卷中没有课程编号的书不予考虑,实际上市场中的书目繁杂,而有编号的书并不能很全面的反映出 A 出版社的营销情况,剔除了没有课程编号的书在一定程度上影响了分配结果的准确性。在模型的建立方面,我们在强势产品的求解上考虑的市场因素较为简单。

### 6.2 模型的推广

本文中多目标规划的模型不仅可以应用于解决本题的出版社资源分配问题,也可以应用于其他需要实现多个目标的方案分配问题。灰色预测模型不仅能够处理市场占有率、市场竞争力这类经济方面的预测问题,也能够在生物、农业等领域进行合理的预测。而单级综合评价模型在日常生活中也随处可见,比如判断同类食品中某品牌的质量、经济管理判断某地区发展状况的好坏等。

### 参考文献

- [1]张新安. 顾客满意度测评的若干问题研究[J]. 上海交通大学学报, 2015
- [2]梁燕. 论顾客满意度评价体系的构建[D]. 北京: 人民大学, 2012
- [3]杨国胜. 基于改进 AHP 法和模糊综合评价的物流企业核心竞争力研究. [J]. 时代金融, 2014(3)
- [4]Jyh-Liang Lesth, Horng Wenrky. On class ratio in grey modeling. The Journal of Grey System, 2011, 12(3): 229-232
- [5]Agresti A. and Klingenberg B. Multivariate tests comparing binomial probabilities. Amer. Statist, 2015(54): 691-706
- [6]黄尚勇. 市场经济条件下降低成本的战略思考[D]. 北京. 北京大学出版社. 2014
- [7]赵德武. 财务管理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010, 89-96
- [8]朱本仁. 基于蒙特卡罗方法的引导研究[D]. 济南: 山东大学出版社, 2011
- [9]王新和, 程世洲. 曲线拟合的最小二乘法[J]. 西安, 西安交通大学学报, 2015. 11
- [10]Barden R L, Faires J D, Reynolds A C. Numerical Analysis. Apline Press. 2012

## 附 录

### 附录一：

x=1:5;  
y=[ 9843

10292  
13363  
16749  
20636];

A=polyfit(x, y, 3);  
z=polyval(A, x);  
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');  
A=polyfit(x, y, 3)

### 经管类：

x=1:5;  
y=[18752

19605  
26449  
33899  
39716];

A=polyfit(x, y, 3);  
z=polyval(A, x);  
Plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');  
A=polyfit(x, y, 3)

### 数学类：

x=1:5;  
y=[ 194518

202077  
238052  
309841  
390024];

A=polyfit(x, y, 3);  
z=polyval(A, x);  
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');  
A=polyfit(x, y, 3)

### 英语类：

x=1:5;  
y=[ 14490

16082  
19488  
25961  
33515];

A=polyfit(x, y, 3);  
z=polyval(A, x);  
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');

```
A=polyfit(x, y, 3)
```

两课类：

```
x=1:5;
```

```
y=[ 99522
```

```
115423
```

```
137233
```

```
180784
```

```
216924];
```

```
A=polyfit(x, y, 3);
```

```
z=polyval(A, x);
```

```
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');
```

```
A=polyfit(x, y, 3)
```

机械能源类：

```
x=1:5;
```

```
y=[ 10714
```

```
12548
```

```
15754
```

```
19020
```

```
25977];
```

```
A=polyfit(x, y, 3);
```

```
z=polyval(A, x);
```

```
Plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');
```

```
A=polyfit(x, y, 3)
```

化学、化工类：

```
x=1:5;
```

```
y= [3655
```

```
3985
```

```
5073
```

```
6564
```

```
8409];
```

```
A=polyfit(x, y, 3);
```

```
z=polyval(A, x);
```

```
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');
```

```
A=polyfit(x, y, 3)
```

地理、地质类：

```
x=1:5;
```

```
y=[ 7054
```

```
8055
```

```
9823
```

```
11715
```

```
15434];
```

```
A=polyfit(x, y, 3);
```

```
z=polyval(A, x);
```

```
plot(x, y, 'k+', x, z, 'r');
```

```
A=polyfit(x,y,3)
```

环境类：

```
x=1:5;
```

```
y= [5541
```

```
6322
```

```
7313
```

```
9825
```

```
13934];
```

```
A=polyfit(x,y,3);
```

```
z=polyval(A,x);
```

```
plot(x,y,'k+',x,z,'r');
```

```
A=polyfit(x,y,3)
```

**附录二：**

```
x=1:5;
```

```
y=[13235 13994 20006 23316 27195];
```

```
A=polyfit(x,y,3);
```

```
z=polyval(A,x);
```

```
plot(x,y,'k+',x,z,'r');
```

```
A=polyfit(x,y,3)
```

**问题三：LINGO 程序及结果：**

**Model:**

**Sets:**

```
mat/1..9/:p,q,m,w,x,n;
```

**ENDSETS**

**Data:**

```
n=4,7,9,6,8,5,1,3,2;
```

```
p=25.59,27.85,20.71,25.46,18.325,25.933,23.8,23.767,26.583;
```

```
q=23147,39202,478710,42792,252370,36290.8,10306.6,20797.4,20706.6;
```

```
m=110,66,222,118,72,76,40,40,40;
```

```
w=114,114,120,102,111,72,46,63,72;
```

**ENDDATA**

```
max=@sum(mat(i):p(i)*q(i)/m(i)*x(i)*n(i));
```

```
@sum(mat(i):x(i))=500;
```

```
x(1)<w(1);
```

```
x(2)<w(2);
```

```
x(3)<w(3);
```

```
x(4)<w(4);
```

```
x(5)<w(5);
```

```
x(6)<w(6);
```

```
x(7)<w(7);
```

```
x(8)<w(8);
```

```
x(9)<w(9);
```

```
x(1)<m(1);
```

```
x(2)<m(2);
```

```

x(3)<m(3);
x(4)<m(4);
x(5)<m(5);
x(6)<m(6);
x(7)<m(7);
x(8)<m(8);
x(9)<m(9);
x(1)>0.5*m(1);
x(2)>0.5*m(2);
x(3)>0.5*m(3);
x(4)>0.5*m(4);
x(5)>0.5*m(5);
x(6)>0.5*m(6);
x(7)>0.5*m(7);
x(8)>0.5*m(8);
x(9)>0.5*m(9);

```

end

结果:

Global optimal solution found.

Objective value:

0.1029485E+09

Total solver iterations:

2

Variable	Value	Reduced Cost
P( 1)	25.59000	0.000000
P( 2)	27.85000	0.000000
P( 3)	20.71000	0.000000
P( 4)	25.46000	0.000000
P( 5)	18.32500	0.000000
P( 6)	25.93300	0.000000
P( 7)	23.80000	0.000000
P( 8)	23.76700	0.000000
P( 9)	26.58300	0.000000
Q( 1)	23147.00	0.000000
Q( 2)	39202.00	0.000000
Q( 3)	478710.0	0.000000
Q( 4)	42792.00	0.000000
Q( 5)	252370.0	0.000000
Q( 6)	36290.80	0.000000
Q( 7)	10306.60	0.000000
Q( 8)	20797.40	0.000000
Q( 9)	20706.60	0.000000
M( 1)	110.0000	0.000000
M( 2)	66.00000	0.000000



M( 3)	222.0000	0.000000
M( 4)	118.0000	0.000000
M( 5)	72.00000	0.000000
M( 6)	76.00000	0.000000
M( 7)	40.00000	0.000000
M( 8)	40.00000	0.000000
M( 9)	40.00000	0.000000
W( 1)	114.0000	0.000000
W( 2)	114.0000	0.000000
W( 3)	120.0000	0.000000
W( 4)	102.0000	0.000000
W( 5)	111.0000	0.000000
W( 6)	72.00000	0.000000
W( 7)	46.00000	0.000000
W( 8)	63.00000	0.000000
W( 9)	72.00000	0.000000
X( 1)	55.00000	0.000000
X( 2)	66.00000	0.000000
X( 3)	120.0000	0.000000
X( 4)	59.00000	0.000000
X( 5)	72.00000	0.000000
X( 6)	68.00000	0.000000
X( 7)	20.00000	0.000000
X( 8)	20.00000	0.000000
X( 9)	20.00000	0.000000
N( 1)	4.000000	0.000000
N( 2)	7.000000	0.000000
N( 3)	9.000000	0.000000
N( 4)	6.000000	0.000000
N( 5)	8.000000	0.000000
N( 6)	5.000000	0.000000
N( 7)	1.000000	0.000000
N( 8)	3.000000	0.000000
N( 9)	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.1029485E+09	1.000000
2	0.000000	61916.40
3	59.00000	0.000000
4	48.00000	0.000000
5	0.000000	340005.9
6	43.00000	0.000000
7	39.00000	0.000000
8	4.000000	0.000000

9	26.00000	0.000000
10	43.00000	0.000000
11	52.00000	0.000000
12	55.00000	0.000000
13	0.000000	53877.99
14	102.0000	0.000000
15	59.00000	0.000000
16	0.000000	451937.0
17	8.000000	0.000000
18	20.00000	0.000000
19	20.00000	0.000000
20	20.00000	0.000000
21	0.000000	-40377.07
22	33.00000	0.000000
23	9.000000	0.000000
24	0.000000	-6518.895
25	36.00000	0.000000
26	30.00000	0.000000
27	0.000000	-55783.98
28	0.000000	-24844.52
29	0.000000	-34394.23