二叉树

【本节目标】

1. **掌握树的基本概念**
2. **掌握二叉树概念及特性**
3. **掌握二叉树的基本操作**
4. **完成二叉树相关的面试题练习**

1. 树型结构（了解）

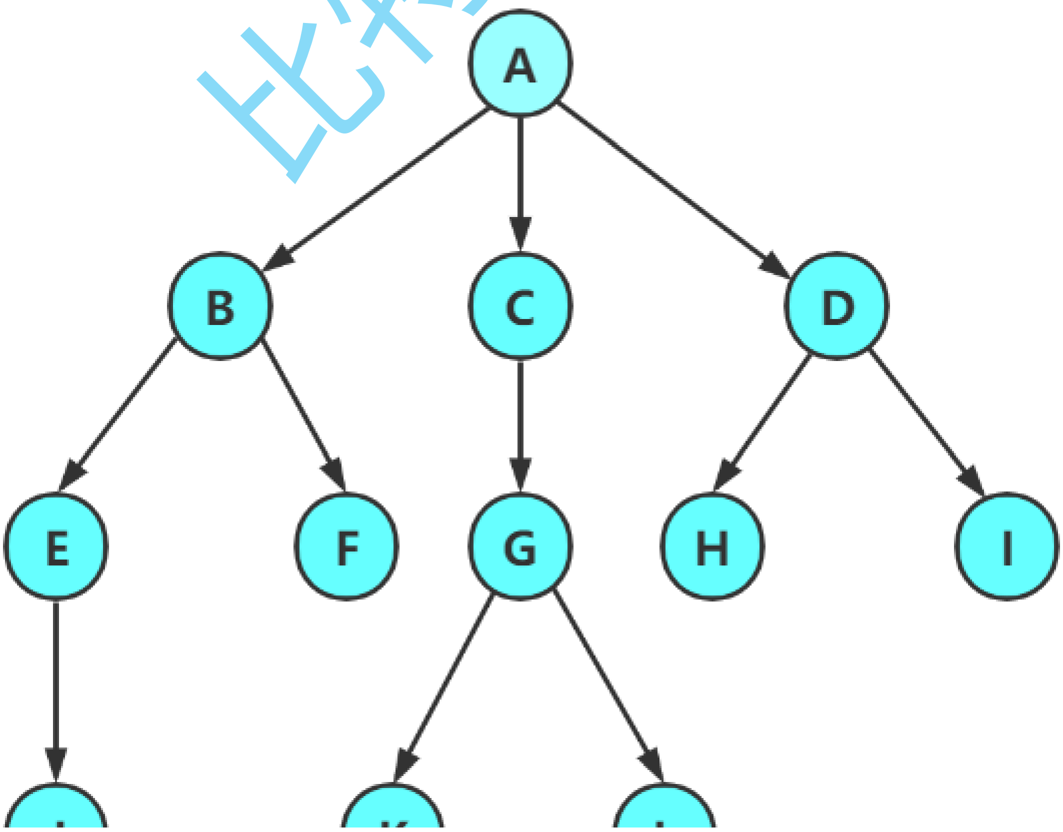
1.1 概念

线性结构的存储形式有两种：顺序存储，链式存储，之前我们学过的线性表都是线性结构

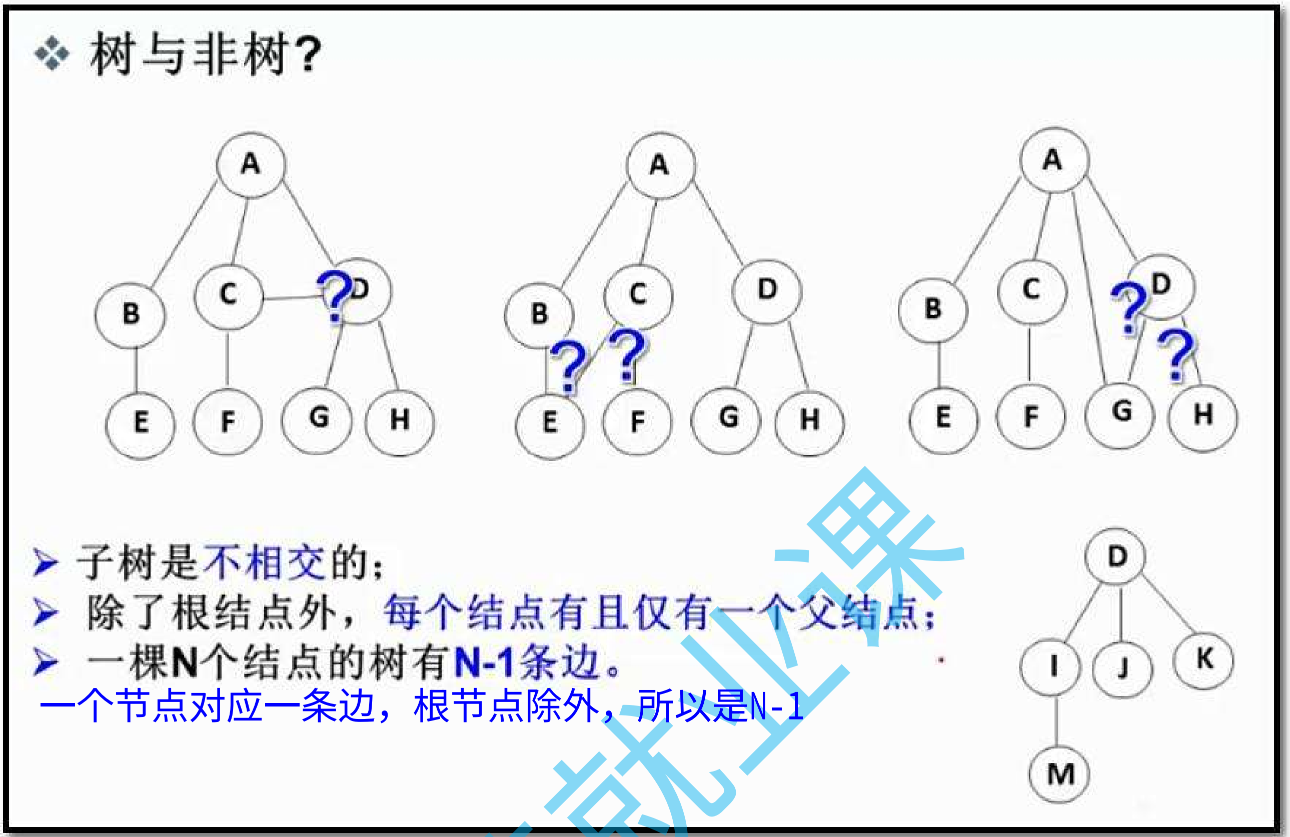
树是一种**非线性**的数据结构，它是由n（n>=0）个有限结点组成一个具有层次关系的集合。**把它叫做树是因为它看起来像一棵倒挂的树，也就是说它是根朝上，而叶朝下的**。它具有以下的特点：

- 有一个特殊的结点，称为根结点，根结点没有前驱结点
- 除根结点外，其余结点被分成M(M > 0)个互不相交的集合T1、T2、......、Tm，其中每一个集合 Ti (1 <= i <= m) 又是一棵与树类似的子树。每棵子树的根结点有且只有一个前驱，可以有0个或多个后继
- 树是递归定义的。

(其实也就是各个子树之间不能有交集，对于每一个根节点来说其子节点都是一棵树)

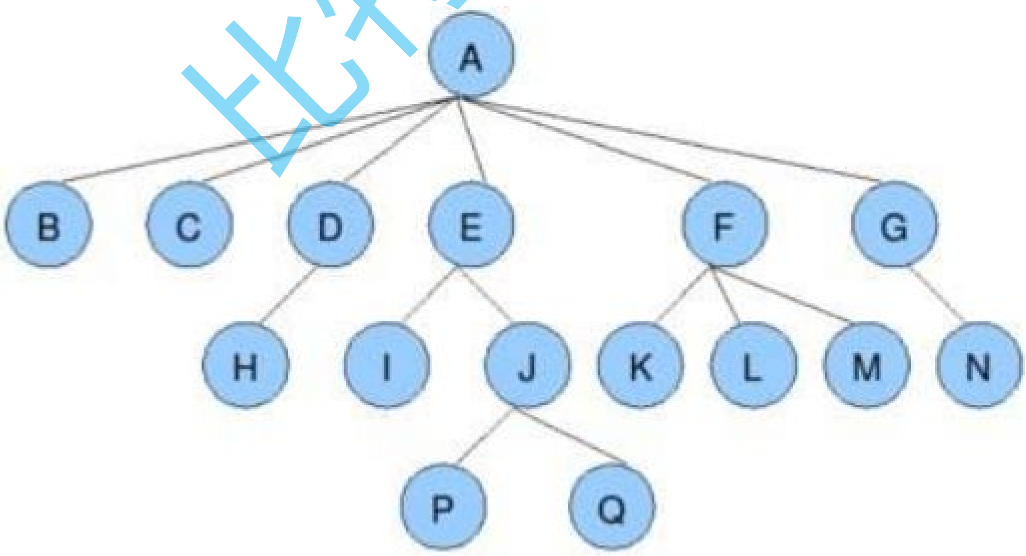

A
B
C
D
E
F
G
H
I

注意：**树形结构中，子树之间不能有交集，否则就不是树形结构** 判断是不是树形结构的标准



一个节点对应一条边，根节点除外，所以是N-1

1.2 概念（重要）



结点的度：一个结点含有子树的个数称为该结点的度； 如上图：A的度为6 子树个数你就去数它的子节点个数

树的度：一棵树中，所有结点度的最大值称为树的度； 如上图：树的度为6

叶子结点或终端结点：度为0的结点称为叶结点； 如上图：B、C、H、I...等节点为叶结点
叶子嘛，肯定是暴露在最外面，再没有子节点的就是

双亲结点或父结点：若一个结点含有子结点，则这个结点称为其子结点的父结点； 如上图：A是B的父结点

孩子结点或子结点：一个结点含有的子树的根结点称为该结点的子结点； 如上图：B是A的孩子结点

根结点：一棵树中，没有双亲结点的结点；如上图：A

结点的层次：从根开始定义起，根为第1层，根的子结点为第2层，以此类推

树的高度或深度：树中结点的最大层次； 如上图：树的高度为4

深度就是相对于根节点而言的，根节点深度就是1，往下以此类推，每一层的深度都不相同，最大的深度也就是我们的高度

树的以下概念只需了解，在看书时只要知道是什么意思即可：

非终端结点或分支结点：度不为0的结点； 如上图：D、E、F、G...等节点为分支结点 不是叶子结点的节点

兄弟结点：具有相同父结点的结点互称为兄弟结点； 如上图：B、C是兄弟结点

堂兄弟结点：双亲在同一层的结点互为堂兄弟；如上图：H、I互为兄弟结点

结点的祖先：从根到该结点所经分支上的所有结点；如上图：A是所有结点的祖先

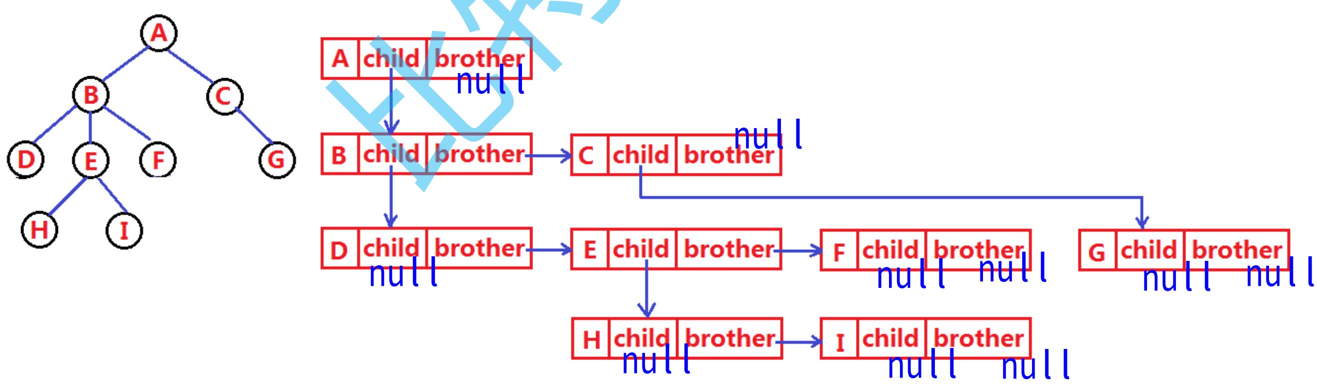
子孙：以某结点为根的子树中任一结点都称为该结点的子孙。如上图：所有结点都是A的子孙

森林：由m（m>=0）棵互不相交的树组成的集合称为森林

1.3 树的表示形式（了解）

树结构相对线性表就比较复杂了，要存储表示起来就比较麻烦了，实际中树有很多种表示方式，如：**双亲表示法**，**孩子表示法**、**孩子双亲表示法**、**孩子兄弟表示法**等等。我们这里就简单的了解其中最常用的**孩子兄弟表示法**。

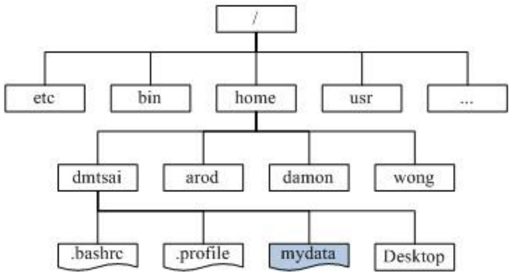
```
class Node {
    int value;          // 树中存储的数据
    Node firstChild;       // 第一个孩子引用
    Node nextBrother;      // 下一个兄弟引用
}
```

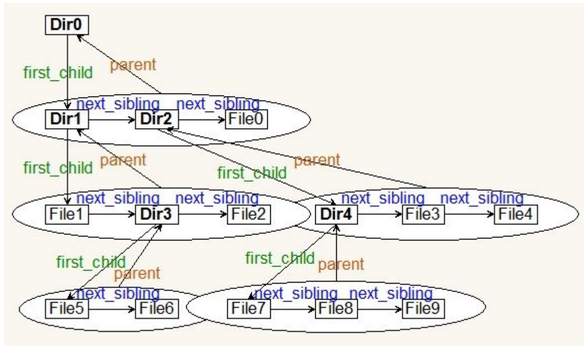


1.4 树的应用

文件系统管理（目录和文件）

每一级目录就是一个根节点，每级目录下的具体文件就是一个叶子节点



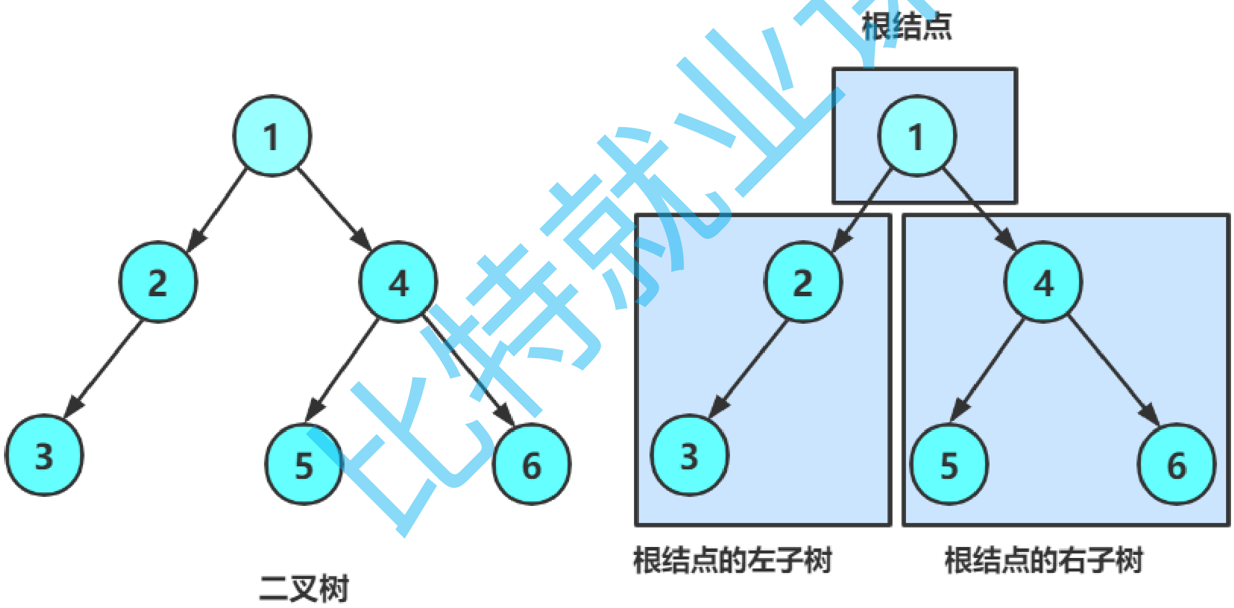


2. 二叉树（重点）

2.1 概念

一棵二叉树是结点的一个有限集合，该集合：

1. 或者为空
2. 或者是由**一个根节点**加上两棵别称为**左子树**和**右子树**的二叉树组成。

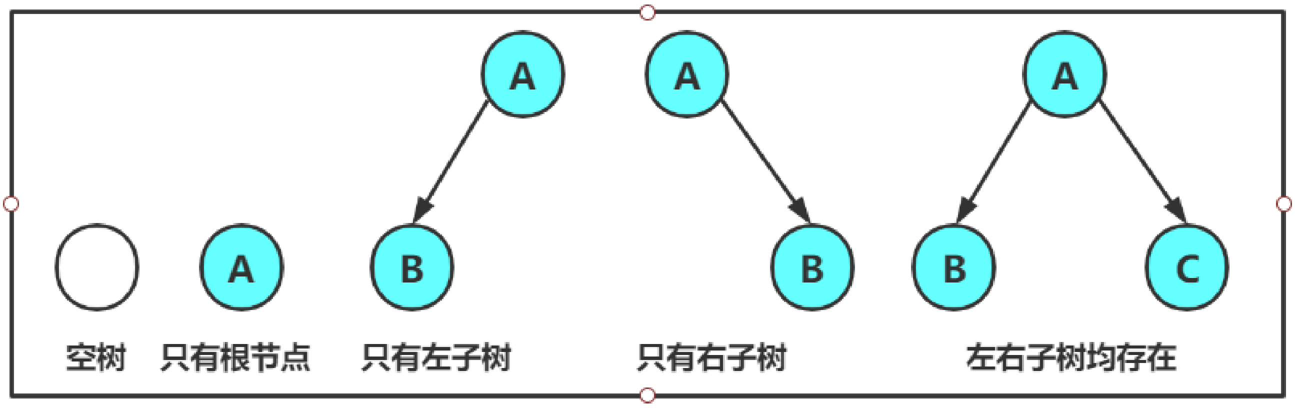


二叉树的每一个节点的度不能超过2 并且每一个根节点的子树也必须要是二叉树

从上图可以看出：

1. 二叉树不存在度大于2的结点
2. 二叉树的子树有左右之分，次序不能颠倒，因此二叉树是有序树

注意：对于任意的二叉树都是由以下几种情况复合而成的：



大自然的奇观：

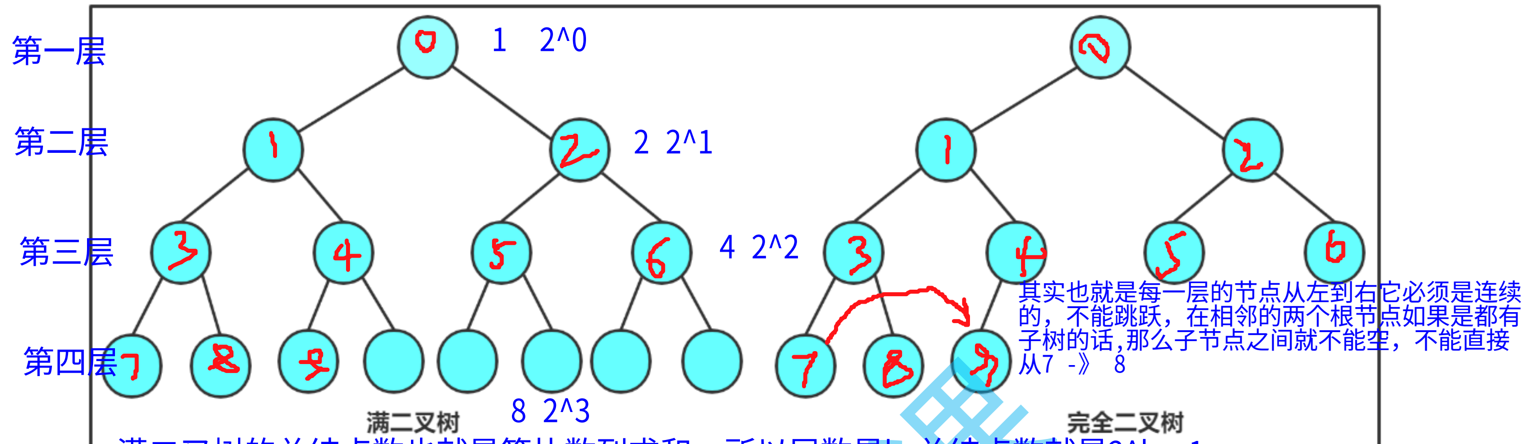

@elsievhu蝶结

满二叉树是一种特殊的完全二叉树

2.2 两种特殊的二叉树

每个节点的度都必须是2

1. **满二叉树:** 一棵二叉树，如果**每层的结点数都达到最大值，则这棵二叉树就是满二叉树**。也就是说，**如果一棵二叉树的层数为K，且结点总数是**2^k-1**，则它就是满二叉树。**
2. **完全二叉树:** 完全二叉树是效率很高的数据结构，完全二叉树是由满二叉树而引出来的。对于深度为K的，有n个结点的二叉树，当且仅当其每一个结点都与深度为K的满二叉树中编号从0至n-1的结点一一对应时称之为完全二叉树。 要注意的是满二叉树是一种特殊的完全二叉树。



满二叉树的总结点数也就是等比数列求和，所以层数是k,总结点数就是2^k -1

2.3 二叉树的性质

1. 若规定**根结点的层数为1**，则一棵**非空二叉树的第i层上最多有**2^{i-1}**(i>0)个结点** 最多就是满二叉树的2^i - 1
2. 若规定只有**根结点的二叉树的深度为1**，则**深度为K的二叉树的最大结点数是**2^k-1(k>=0) 最多就是满二叉树的情况
3. 对任何一棵二叉树, 如果其**叶结点个数为 n0, 度为2的非叶结点个数为 n2,则有n0 = n2 + 1**
4. 具有**n个结点的完全二叉树的深度k为**$log_2(n+1)$**上取整** 算出来n如果是整数那就是n,如果不是整数，那就向上取整
5. 对于具有**n个结点的完全二叉树**，如果按照**从上至下从左至右的顺序对所有节点从0开始编号**，则对于**序号为i的结点有**:
    - 若i>0，**双亲序号：(i-1)/2**；**i=0，i为根结点编号**，无双亲结点
    - **若2i+1<n，左孩子序号：2i+1，否则无左孩子**
    - **若2i+2<n，右孩子序号：2i+2，否则无右孩子**

这个地方要注意，下标i是从0开始的，如果下标从1开始，你就要做相应的变化
如果下标是从1开始的，那么就是直接除以2就可以得到父节点下标
如果是从1开始的父节点下标是i
左孩子序号 2i 右孩子序号 2i+1
前提是2i <= n
2i+1 <= n

这句话没什么用，干扰

1. 某二叉树共有 399 个结点，其中有 199 个度为 2 的结点，则该二叉树中的叶子结点数为（）B
A 不存在这样的二叉树
B 200
C 198
D 199

2.在具有 2n 个结点的完全二叉树中，叶子结点个数为（）A
A n
B n+1
C n-1
D n/2

3.一个具有767个节点的完全二叉树，其叶子节点个数为（）B
A 383
B 384
C 385
D 386

总结：
求叶子结点的个数：
假设一共有G个节点：
G 为偶数，则叶子结点数为G/2
G 为奇数，则叶子节点树为(G+1)/2

```
4.一棵完全二叉树的节点数为531个，那么这棵树的高度为（B
A 11
B 10
C 8
D 12

答案：
1.B
2.A
3.B
4.B
```

2.4 二叉树的存储

二叉树的存储结构分为：**顺序存储**和**类似于链表的链式存储**。注意不是链表

顺序存储在下节介绍。

二叉树的链式存储是通过一个一个的节点引用起来的，常见的表示方式有二叉和三叉表示方式，具体如下：

```
// 孩子表示法
class Node {
    int val;       // 数据域
    Node left;     // 左孩子的引用，常常代表左孩子为根的整棵左子树
    Node right;    // 右孩子的引用，常常代表右孩子为根的整棵右子树
}

// 孩子双亲表示法
class Node {
    int val;       // 数据域
    Node left;     // 左孩子的引用，常常代表左孩子为根的整棵左子树
    Node right;    // 右孩子的引用，常常代表右孩子为根的整棵右子树
    Node parent;   // 当前节点的根节点
}
```

孩子双亲表示法后序在平衡树位置介绍，本文采用孩子表示法来构建二叉树。

2.5 二叉树的基本操作

2.5.1 前置说明

在学习二叉树的基本操作前，需先要创建一棵二叉树，然后才能学习其相关的基本操作。由于现在大家对二叉树结构掌握还不够深入，为了降低大家学习成本，此处手动快速创建一棵简单的二叉树，快速进入二叉树操作学习，等二叉树结构了解的差不多时，我们反过头再来研究二叉树真正的创建方式。

这里只是以穷举的方式创建一个二叉树，递归定义现在还是有一点难度

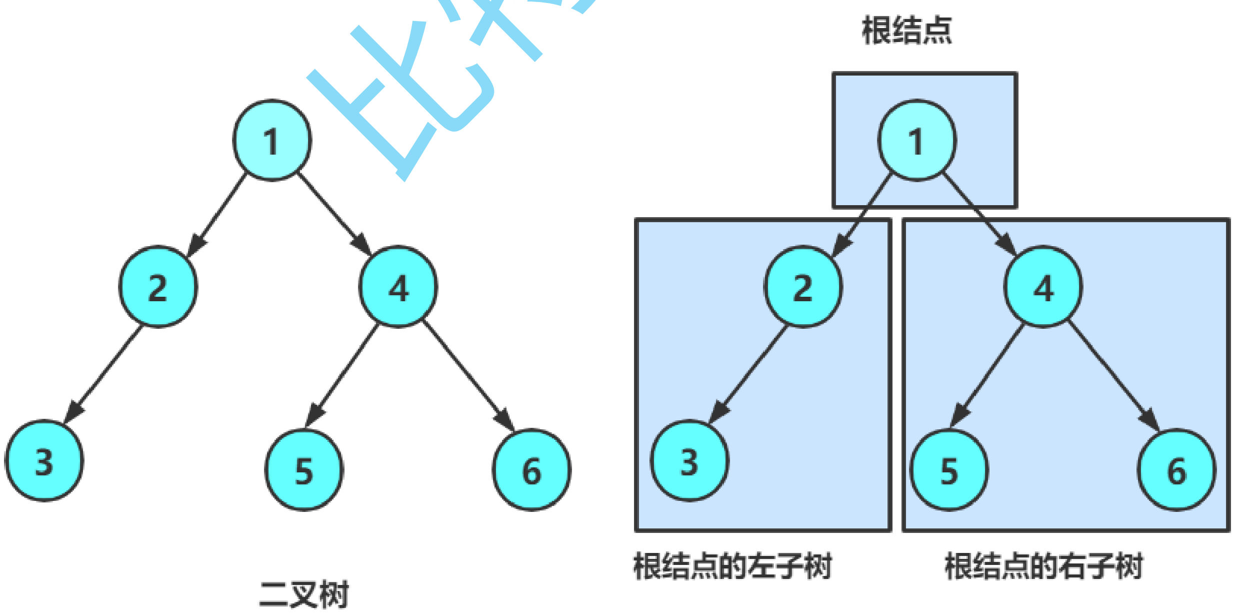
```
public class BinaryTree{
    public static class BTNode{
        BTNode left;
        BTNode right;
        int value;
```

```
        BTNode(int value){
            this.value = value;
        }
    }

    private BTNode root;

    public void createBinaryTree(){
        BTNode node1 = new BTNode(1);
        BTNode node1 = new BTNode(2);
        BTNode node1 = new BTNode(3);
        BTNode node1 = new BTNode(4);
        BTNode node1 = new BTNode(5);
        BTNode node1 = new BTNode(6);

        root = node1;
        node1.left = node2;
        node2.left = node3;
        node1.right = node4;
        node4.left = node5;
        node5.right = node6;
    }
}
```

注意：上述代码并不是创建二叉树的方式，真正创建二叉树方式后序详解重点讲解。

再看二叉树基本操作前，再回顾下二叉树的概念，**二叉树是：**

1. **空树**
2. **非空：根节点，根节点的左子树、根节点的右子树组成的。**



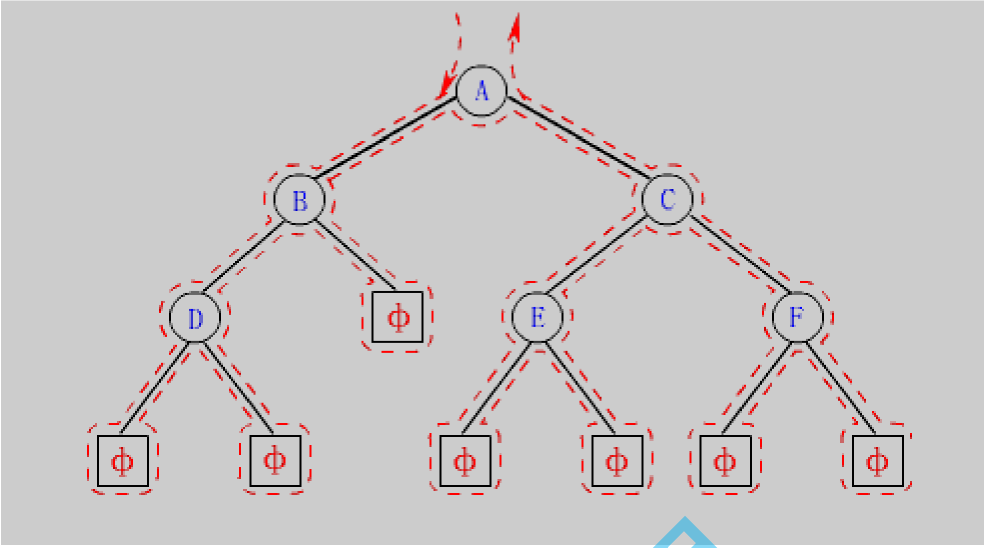
从概念中可以看出，二叉树定义是递归式的，因此后序基本操作中基本都是按照该概念实现的。

2.5.2 二叉树的遍历

前序：根节点 -》左子树 -》右子树
中序：左子树 -》根节点 -》右子树
后序：左子树 -》右子树 -》根节点
层序：从左往右，按层遍历

1. **前中后序遍历**

学习二叉树结构，最简单的方式就是遍历。所谓**遍历(Traversal)是指沿着某条搜索路线，依次对树中每个结点均做一次且仅做一次访问。访问结点所做的操作依赖于具体的应用问题(比如：打印节点内容、节点内容加1)。** 遍历是二叉树上最重要的操作之一，是二叉树上进行其它运算之基础。

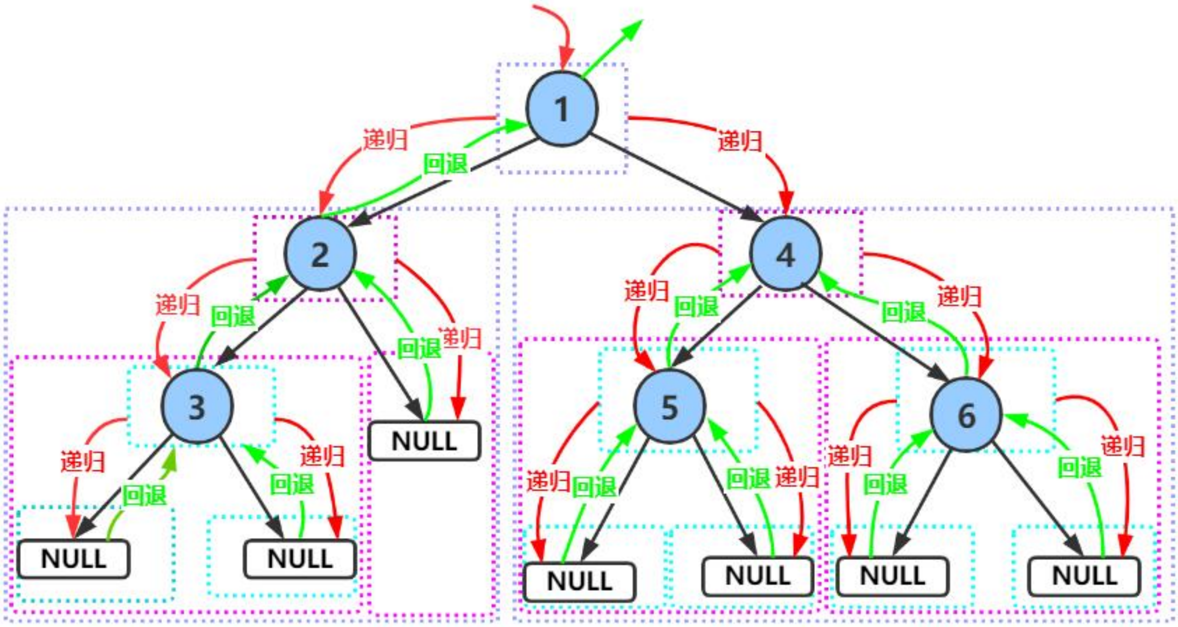


在遍历二叉树时，如果没有进行某种约定，每个人都按照自己的方式遍历，得出的结果就比较混乱，**如果按照某种规则进行约定，则每个人对于同一棵树的遍历结果肯定是相同的。** 如果N代表根节点，L代表根节点的左子树，R代表根节点的右子树，则根据遍历根节点的先后次序有以下遍历方式：

- NLR：前序遍历(Preorder Traversal 亦称先序遍历)——访问根结点--->根的左子树--->根的右子树。
- LNR：中序遍历(Inorder Traversal)——根的左子树--->根节点--->根的右子树。
- LRN：后序遍历(Postorder Traversal)——根的左子树--->根的右子树--->根节点。

```
// 前序遍历
void preOrder(Node root);

// 中序遍历
void inOrder(Node root);

// 后序遍历
void postOrde(Node root);
```


下面主要分析前序递归遍历，中序与后序图解类似，同学们可自己动手绘制。



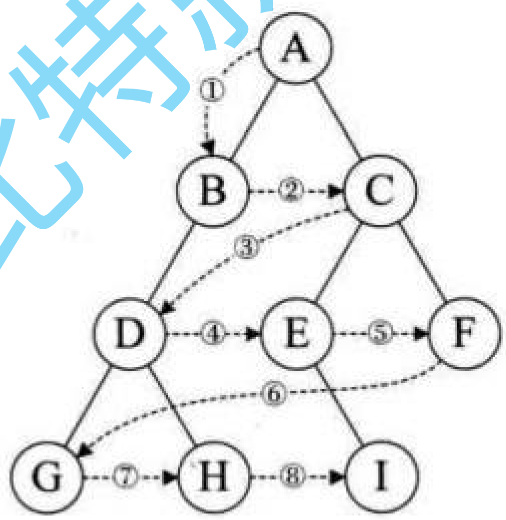
前序遍历结果：1 2 3 4 5 6

中序遍历结果：3 2 1 5 4 6

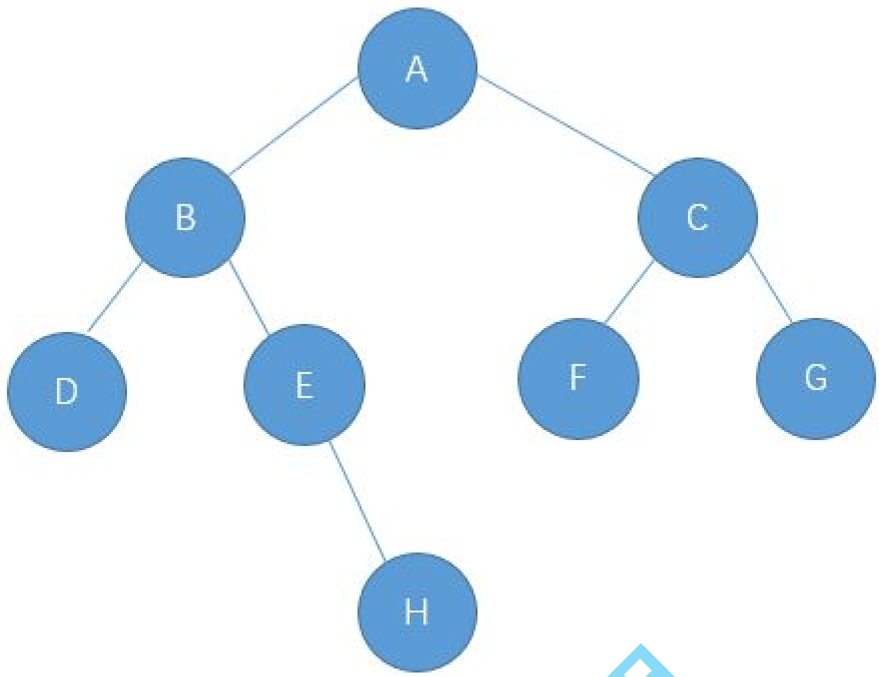
后序遍历结果：3 1 5 6 4 1

2. **层序遍历**

层序遍历：除了先序遍历、中序遍历、后序遍历外，还可以对二叉树进行层序遍历。设二叉树的根节点所在层数为1，层序遍历就是从所在二叉树的根节点出发，首先访问第一层的树根节点，然后从左到右访问第2层上的节点，接着是第三层的节点，以此类推，自上而下，自左至右逐层访问树的结点的过程就是层序遍历。



【**练习**】请同学们根据以上二叉树的三种遍历方式，给出以下二叉树的：



选择题 根据前序，后序遍历无法创建一个二叉树，无法确定左右子树

1.某完全二叉树按层次输出（同一层从左到右）的序列为 ABCDEFGH 。该完全二叉树的前序序列为() A
A: ABDHECFG B: ABCDEFGH C: HDBEAFCG D: HDEBFGCA

2.二叉树的先序遍历和中序遍历如下：先序遍历：EFHIGJK;中序遍历：HFIEJKG.则二叉树根结点为() A
A: E B: F C: G D: H

3.设一课二叉树的中序遍历序列：badce，后序遍历序列：bdeca，则二叉树前序遍历序列为() D
A: adbce B: decab C: debac D: abcde

4.某二叉树的后序遍历序列与中序遍历序列相同，均为 ABCDEF ，则按层次输出(同一层从左到右)的序列为() A
A: FEDCBA B: CBAFED C: DEFCBA D: ABCDEF

【参考答案】 1.A 2.A 3.D 4.A

2.5.3 二叉树的基本操作

```
// 获取树中节点的个数
int size(Node root);

// 获取叶子节点的个数
int getLeafNodeCount(Node root);

// 子问题思路-求叶子结点个数

// 获取第K层节点的个数
int getKLevelNodeCount(Node root);

// 获取二叉树的高度
int getHeight(Node root);
```

```
// 检测值为value的元素是否存在
Node find(Node root, int val);

//层序遍历
void levelOrder(Node root);

// 判断一棵树是不是完全二叉树
boolean isCompleteTree(Node root);
```

2.6 二叉树相关oj题

1. 检查两颗树是否相同。OJ链接
2. 另一颗树的子树。OJ链接
3. 二叉树最大深度 OJ链接
4. 判断一颗二叉树是否是平衡二叉树。OJ链接
5. 对称二叉树。OJ链接
6. 二叉树的构建及遍历。OJ链接
7. 二叉树的分层遍历 。OJ链接
8. 给定一个二叉树, 找到该树中两个指定节点的最近公共祖先 。OJ链接
9. 二叉搜索树转换成排序双向链表。OJ链接
10. 根据一棵树的前序遍历与中序遍历构造二叉树。 OJ链接
11. 根据一棵树的中序遍历与后序遍历构造二叉树（[课堂不讲解，课后完成作业]）。OJ链接
12. 二叉树创建字符串。OJ链接
13. 二叉树前序非递归遍历实现 。OJ链接
14. 二叉树中序非递归遍历实现。OJ链接
15. 二叉树后序非递归遍历实现。OJ链接