Department of
Electrical Engineering

کواد کوپتر

- امیر آزاد ۹۸۲۳۰۰۴
- بنیامین بهبودی ۹۸۲۳۰۱۶
- محمدرضا سرشار ۹۸۲۳۰۴۷
- عماد صدیقی ۹۸۲۳۰۵۶

پروژه سیستم های کنترل خطی

عنوان پروژه : ربات پرنده بدون سرنشین(UAV)

هدف از انجام پروژه :

بررسی شاخص های عملکردی سیستم انتخابی و کنترل آن

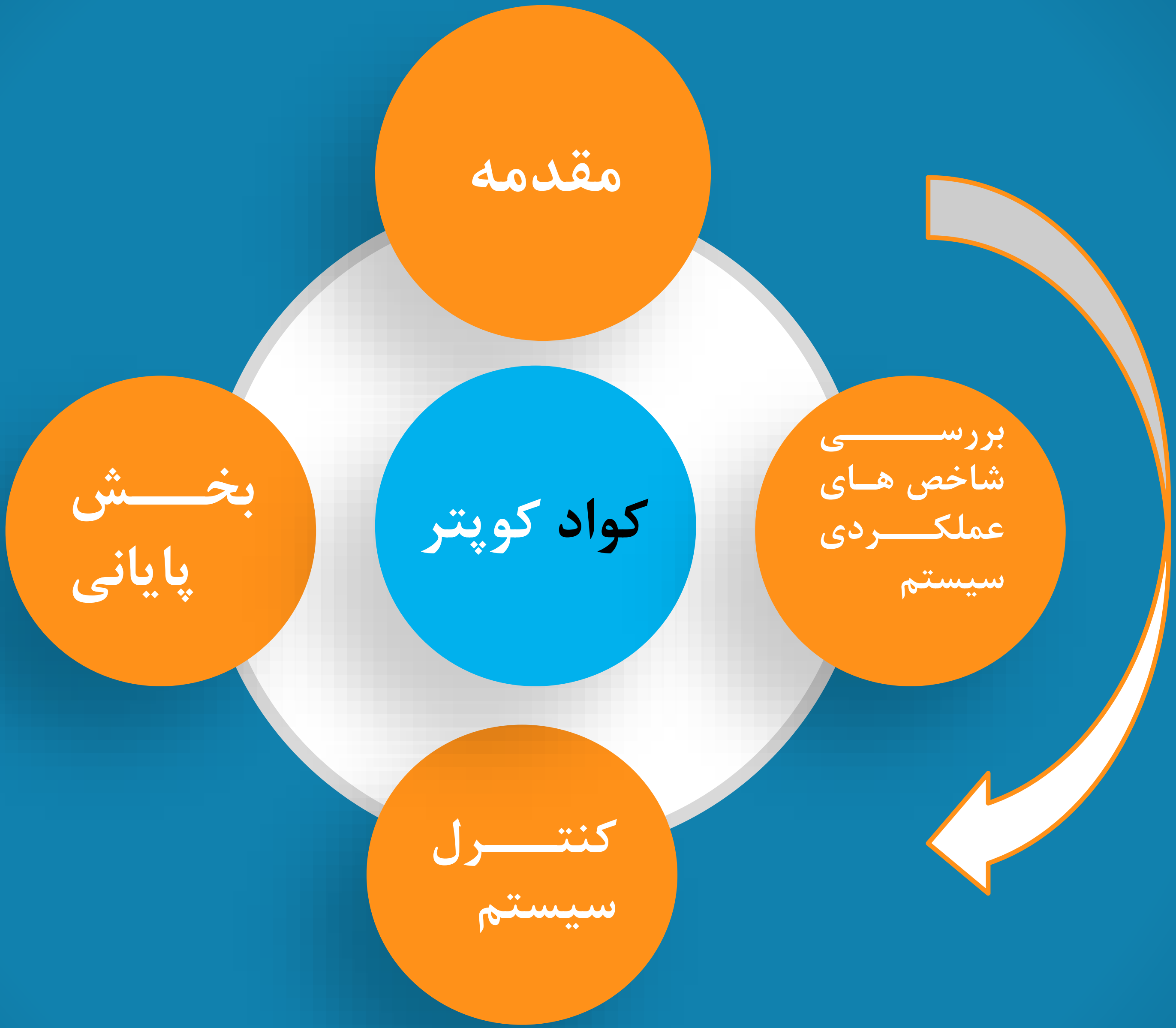
فهرست ارائه و محور های تحقیق

معرفی سیستم
- پیش گفتار
- کاربرد های عملی
- مدل خطی سازی شده از سیستم حول نقطه ی تعادل
- بررسی تابع تبدیل و مدل فضای حالت

بررسی شاخص های عملکردی سیستم
- رسم مکان هندسی سیستم خطی سازی شده
- پارامتر های حوزه زمانی سیستم
- رسم نمودار بودی و نایکوئیست سیستم
- بررسی پارامتر های پایداری سیستم

کنترل سیستم
- کنترل سیستم و پایدار کردن آن
- طراحی فیدبک حالت سیستم
- اعمال کنترل کننده به سیستم
- انتخاب کنترل کننده مورد نیاز سیستم
- طراحی کنترل کننده مورد نیاز سیستم

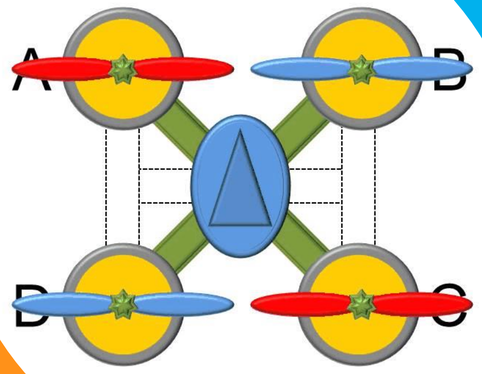
بخش پایانی
- جمع بندی
- منابع


کواد کوپتر
مقدمه
بررسی شاخص های عملکردی سیستم
کنترل سیستم
بخش پایانی

پیش گفتار

- ✓ کوادکوپتر یا کوادروتور یک نمونه از هلیکوپتر که با چهار موتور یا (روتور) پرواز میکند.
- ✓ کواد کوپترها به دلیل داشتن قدرت مانور فوق‌العاده و پروازهایی با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده برخوردارند.
- ✓ در این پژوهش به مدلسازی غیرخطی مدل کامل دینامیکی کوادروتور پرداخته می شود. طرز کار کوادکوپتر بر أساس برخاستن و نشستن به صورت عمودی است و با رسیدن به یک وضعیت پایدار موقعیت پرواز خود را ثابت نگه دارد که این کار با کنترل و موازنه ی نیروهای تولیدی (**yaw , pitch , roll**)توسط چهار روتور نصب شده روی بدنه قابل انجام است.

تشـــریح طـــرز کـــار کوادکوپتر



- کوادکوپتر ها همانند بسیاری دیگر از محصولات پروازی از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می کنند .

- نحوه ی هدایت و کنترل یک کوادکوپتر بسیار جالب توجه است بدین صورت که به عنوان مثال برای تغییر ارتفاع از کم یا زیـاد کردن سرعت چرخش همه موتورهـا اسـتفاده می‌شـود و باعـث کمتر یا زیاد تر شدن اختلاف فشار به وجود آمده می‌شود

کاربرد عملی:

- امروزه مولتی روتور ها و به خصوص کوادکوپتر های ۴ پره به شهرت بسیار زیادی رسیده اند به گونه ای که در بسیاری از مصارف و اهداف از آن ها بهره برداری می شود .
- از جمله کاربرد های کوادکوپتر می توان به موارد ذیل به صورت گسترده اشاره کرد :
  - ✓ موارد نظامی و اجرای قانون
  - ✓ عکاسی
  - ✓ روزنامه نگاری
  - ✓ تحویل و حمل و نقل
  - ✓ امداد و نجات

- از ویژگی هایی که باعث میشود از کوادکوپتر در موارد بالا استفاده شود میتوان به موارد زیر اشاره کرد :

۱- ظرفیت حمل بار
۲- سادگی ساختار وسیله
۳- قابلیت مانور پذیری بالا
۴- داشتن قیود کم در حرکت
۵- هزینه کم تعمیر و نگهداری

بازگشت
به فهرست

خطی‌سازی معادلات حول نقطه تعادل:

- ابتدا معادلات غیرخطی را تشکیل میدهیم:

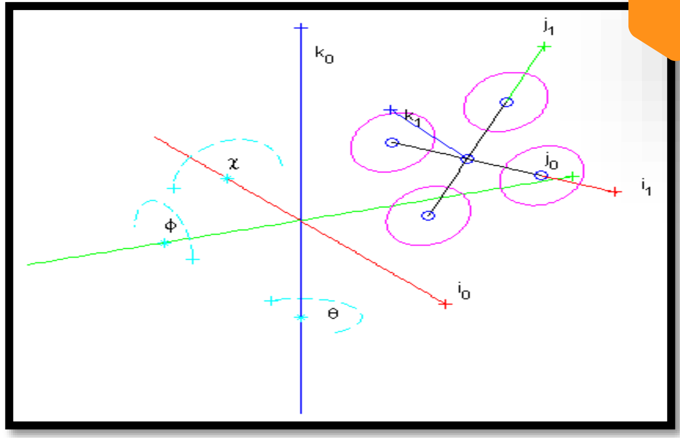
- **حرکت انتقالی**

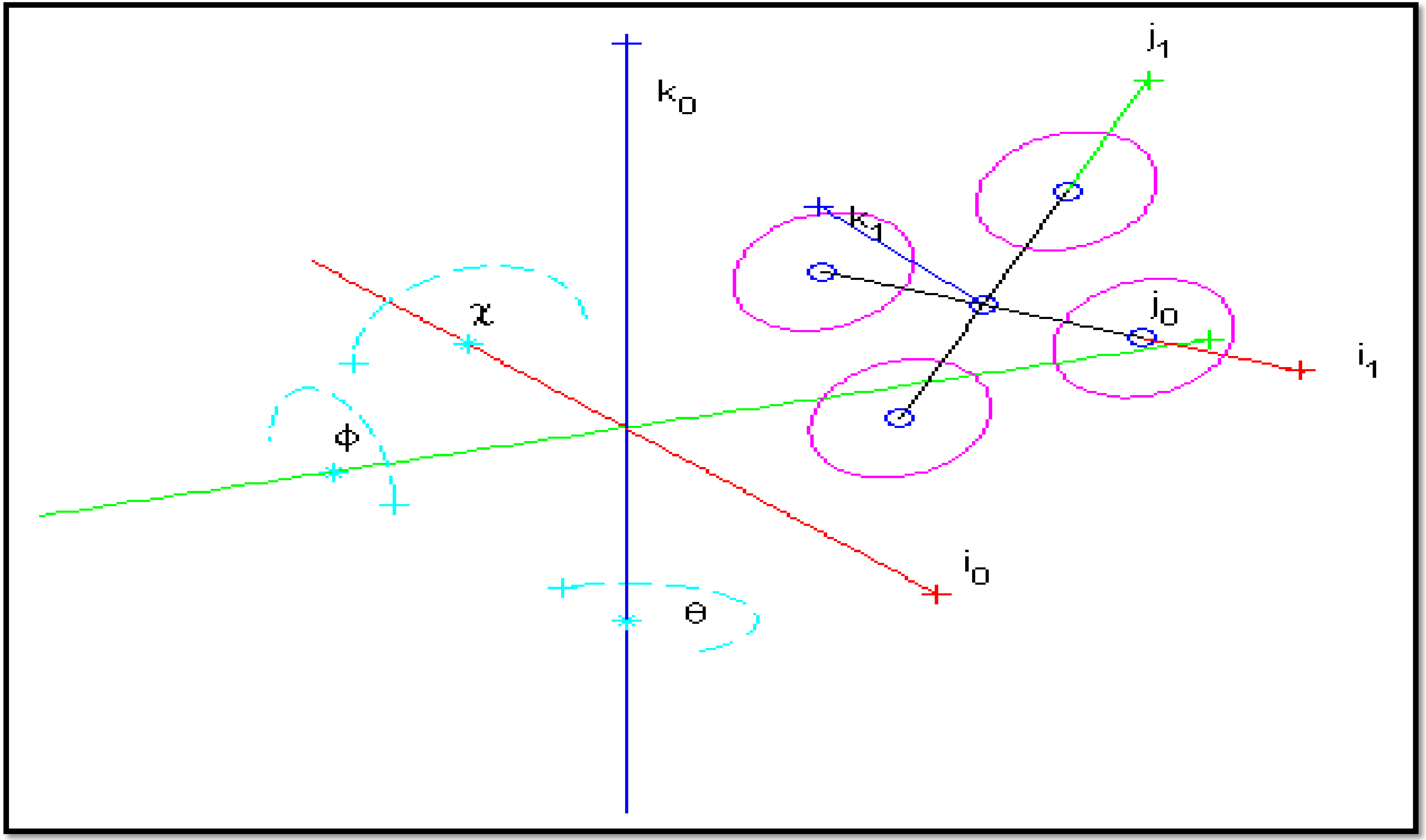
x، y و z بردارهای مکان مرکز ثقل کوادروتور هستند.

1. $\ddot{\mathbf{x}} = \dfrac{\cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\chi)\sin(\theta)}{m} U1$

2. $\ddot{\mathbf{y}} = \dfrac{\sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\chi)\cos(\theta)}{m} U1$

3. $\ddot{\mathbf{z}} = -g + \dfrac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U1$





k_0
j_1
k_1
j_0
i_1
χ
ϕ
i_0
θ

- حرکت چرخشی

$$4.\ \ddot{\phi} = -\cos(\chi)\dot{\chi}\dot{\theta} + \frac{Ty}{I}$$

$$5.\ \ddot{\theta} = -\cos(\chi)\dot{\chi}\,\dot{\phi} + \frac{-\cos(\chi)\sin(\phi)\,Tx + \sin(\chi)Ty + \cos(\phi)\cos(\chi)Tz}{I}$$

$$6.\ \ddot{\chi} = -\cos(\chi)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} + \frac{\cos(\phi)\,Tx + \sin(\phi)Tz}{I}$$

در نقطه تعادل: $\chi = \phi = \theta = 0$ و $Tx=Ty=Tz=0$, $U1=mg$

از آن جایی که چندین نقطه تعادل برای این سیستم وجود دارد؛ خطی‌سازی معادلات را می‌توان در شرایط مختلف پرواز انجام داد.

(در مقاله {۱} درباره شرایط مختلف پرواز و خطی‌سازی‌های مختلف به‌طور کامل بحث شده.)

فرض اولیه: $\theta = 0$ به عبارتی $\sin(\theta) = 0$

باید سمت راست ۶ معادله غیرخطی صفر شود تا نقطه تعادل به‌دست آید.

1. $\frac{\sin(\phi)}{m} U1 = 0$
2. $\frac{-\cos(\phi)\sin(\chi)}{m} U1 = 0$
3. $-g + \frac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U_1 = 0$
4. $Ty=0$
5. $\frac{-\sin(\phi)\cos(\chi)Tx+\sin(\chi)Ty+\cos(\phi)\cos(\chi)Tz}{I} = 0$
6. $\frac{\cos(\phi)Tx+\sin(\phi)Tz}{I} = 0$

از این معادلات نتیجه می‌شود که در نقطه تعادل: $\sin(\chi) = 0$, $\sin(\phi) = 0$ و $Tx=Ty=Tz=0$, $U1=mg$

در نتیجه با فرض $\theta = 0$ به $\phi = 0$ و $\chi = 0$ رسیدیم و نقطه تعادل ما نقطه ی $(0,0,0)$ برای پارامتر های زاویه ای شد.

معادلات خطی سازی شده

1. $\ddot{x} = \frac{U1}{m}(\phi + \theta)$

2. $\ddot{y} = -\frac{U1}{m}\chi$

3. $\ddot{z} = -mg + U1$

4. $\ddot{\phi} = \frac{Ty}{I}$

5. $\ddot{\theta} = \frac{Tz - Tx\,\phi + Ty}{I}$

6. $\ddot{\chi} = \frac{Tx + Tz\phi}{I}$

۴. تابع تبدیل و فضای حالت

تبدیل لاپلاس معادلات خطی:

$$X(s)=\frac{U1}{m}\times\frac{1}{S^2}\left(\varphi(s)+\theta(s)\right)$$

$$Y(s)=-\frac{U1}{m}\times\frac{\lambda(s)}{s^2}$$

$$Z(s)=\frac{-g+\frac{U1}{m}}{s^2}$$

$$\varphi(s)=\frac{\frac{Ty}{I}}{s^2}$$

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{Tz}{I}-\frac{Tx}{I}\phi(s)+\frac{Ty}{I}\chi(s)\right)$$

$$\chi(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx}{I}+\frac{Tz}{I}\phi(s)\right)$$

$$Y(s) = -\frac{U1}{m} \times \frac{1}{s^2} \times \left(\frac{(Tx\,I\,)s^2 + TzTy}{I^2 s^4} \right) = \left(\frac{Tx\,I\,s^2 + TzTy}{-mI^2 s^6} \right) U1$$

$$\rightarrow X(s) = \left(\frac{(Ty + Tz)I^2 s^4 + (Tx\,Ty(I-1))s^2 + Tz\,Ty^2}{m\,I^3 s^8} \right) U1$$

$$\chi(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx}{I} + \frac{Ty}{I} \times \frac{Ty}{s^2 I} \right) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx\,I\,s^2 + TzTy}{I^2 s^2} \right) = \frac{(Tx\,I)s^2 + Tz\,Ty}{I^2 s^4}$$

$$\theta(s) = \frac{(Tz\,I^2)s^4 + (Tx\,Ty(I-1))s^2 + Tz\,Ty^2}{I^3 s^6}$$

$$\phi(s) = \frac{Ty}{I\,s^2}$$

$$Z(s) = \frac{-g + \frac{U1}{m}}{s^2}$$

- به دلیل پیچیدگی تحلیل متغیر ها ما در اینجا تنها به بررسی $\boldsymbol{\phi}$ و **Z** میپردازیم و در واقع حالت خاصی از آزادی عمل برای کواد کوپتر را در نظر میگیریم (توانایی جابه‌جایی در راستای **Z** و چرخش حول محور **y**)
- توابع تبدیل مورد بررسی: (دقت شود که در بررسی تابع تبدیل شرایط اولیه را صفر میگیریم.)

کنترل Z :

تابع تبدیل : $Hz(s) = \frac{1}{s^2}$ → این را به عنوان ورودی به سیستم میگیریم $\boldsymbol{v} = -g + \frac{U1}{m}$ → $Z(s) = \frac{-g+\frac{U1}{m}}{s^2}$

و برای فضای حالت مدل زیر را می توان ارائه داد :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{Fz-eq} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

درنتیجه مقادیر مورد نیازمان از سیستم به شرح زیر در می آید :

مقادیر ویژه :, $\lambda 1 = 0$ $\lambda 2 = 0$

صفر ها : سیستم صفری ندارد .

قطب ها : $s1 = s2 = 0$

نوع سیستم : نوع دوم

وجود تاخیر : بدون تاخیر (تابع تبدیل مولفه نمایی ندارد)

کمینه فاز بودن : مینیمم فاز (صفر و در نتیجه صفر سمت راست نداریم پس نامینیمم فاز نیست)

کنترل ϕ :

$$\boldsymbol{\phi(s)} = \frac{\boldsymbol{Ty}}{\boldsymbol{I\, s^2}} \rightarrow \boldsymbol{\phi(s)} = \left(\frac{\frac{1}{I}}{s^2}\right)\boldsymbol{Ty} \rightarrow H\phi(s) = \frac{14705.88}{s^2}$$

بازگشت
به فهرست

و برای فضای حالت زوایا، رابطه ی زیر را بدست می آوریم:

$$\mathbf{u} = [\phi\ ,\ \theta\ ,\ \chi\ ,\ \dot{f}\ ,\dot{q}\ ,\dot{c}\ ]$$

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} O(3\times3) & I(3\times3) \\ O(3\times3) & O(3\times3) \end{bmatrix} \mathbf{u} + \left[O(3\times3)\ , \begin{matrix} 0 & 0 & 14705.88 \\ 29411.76 & 0 & 0 \\ 0 & 29411.76 & 0 \end{matrix}\right] \mathbf{T} = 0$$

$$\mathbf{y} = [\ I(3\times3)\ ,\ O(3\times3)\ ]\ \mathbf{u}$$

بدین ترتیب سایر مقادیر مورد نیازمان از سیستم به صورت زیر خواهد بود :

مقادیر ویژه : $\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 0\ ,\ \lambda_3 = 0\ ,\ \lambda_4 = 0\ ,\ \lambda_5 = 0\ \ \lambda_6 = 0$

صفر ها : سیستم صفری ندارد .

قطب ها : $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0$

نوع سیستم : نوع دوم

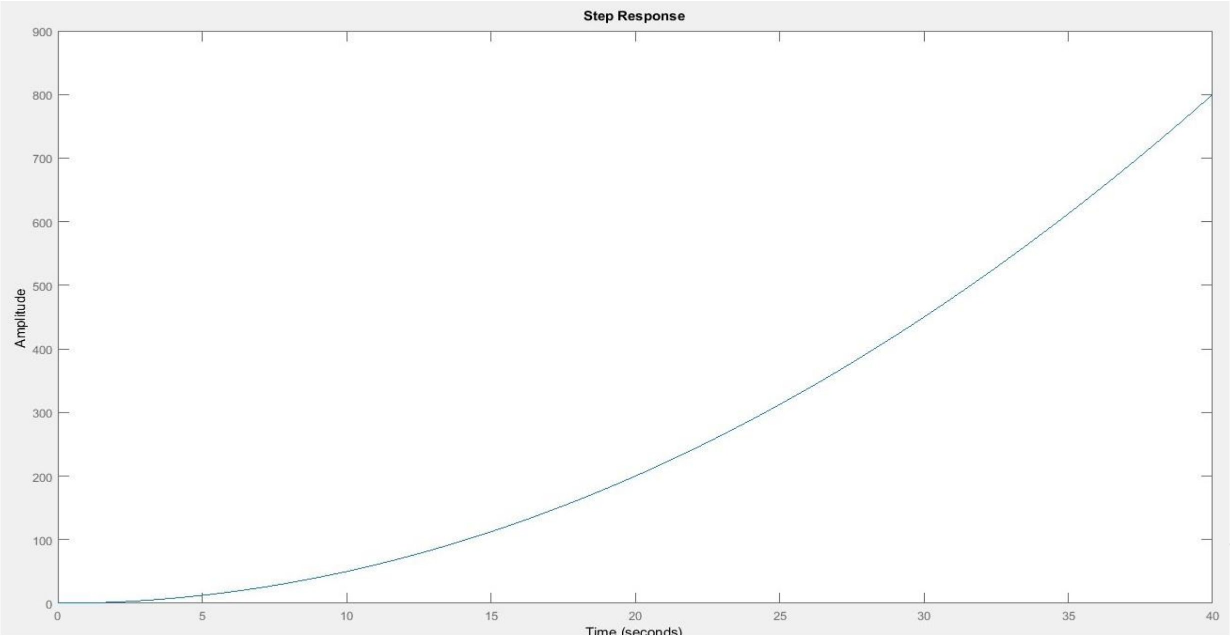
وجود تاخیر : بدون تاخیر(تابع تبدیل مولفه نمایی ندارد)

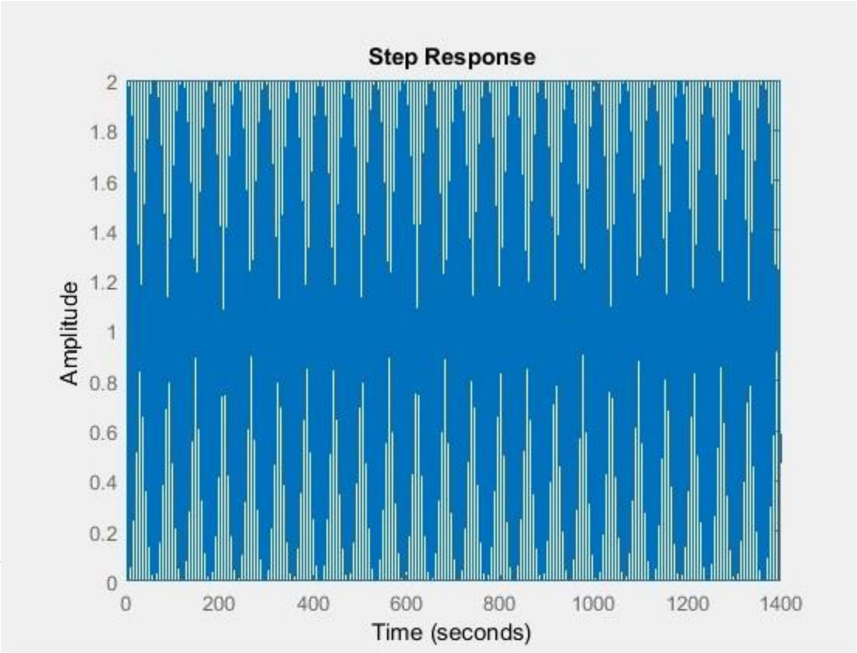
کمینه فاز بودن : مینیمم فاز(صفر و در نتیجه صفر سمت راست نداریم پس نامینیمم فاز نیست)

۵. بررسی سیستم در حوزه زمان:

پاسخ حالت ماندگار پله، شیب و سهمی بی‌نهایت می‌شود زیرا قطب مکرر روی مبدا داریم و سیستم ناپایـدار است.

اگر سیستم را در فیدبک واحد قرار بدهیم، سیستم نوسانی می‌شود زیرا دوقطب ناپایدار روی محور موهـومی داریم. پس بررسی سیستم در حوزه زمان را به بعد از گذاشتن کنترل‌کننده PID موکول می‌کنیم.





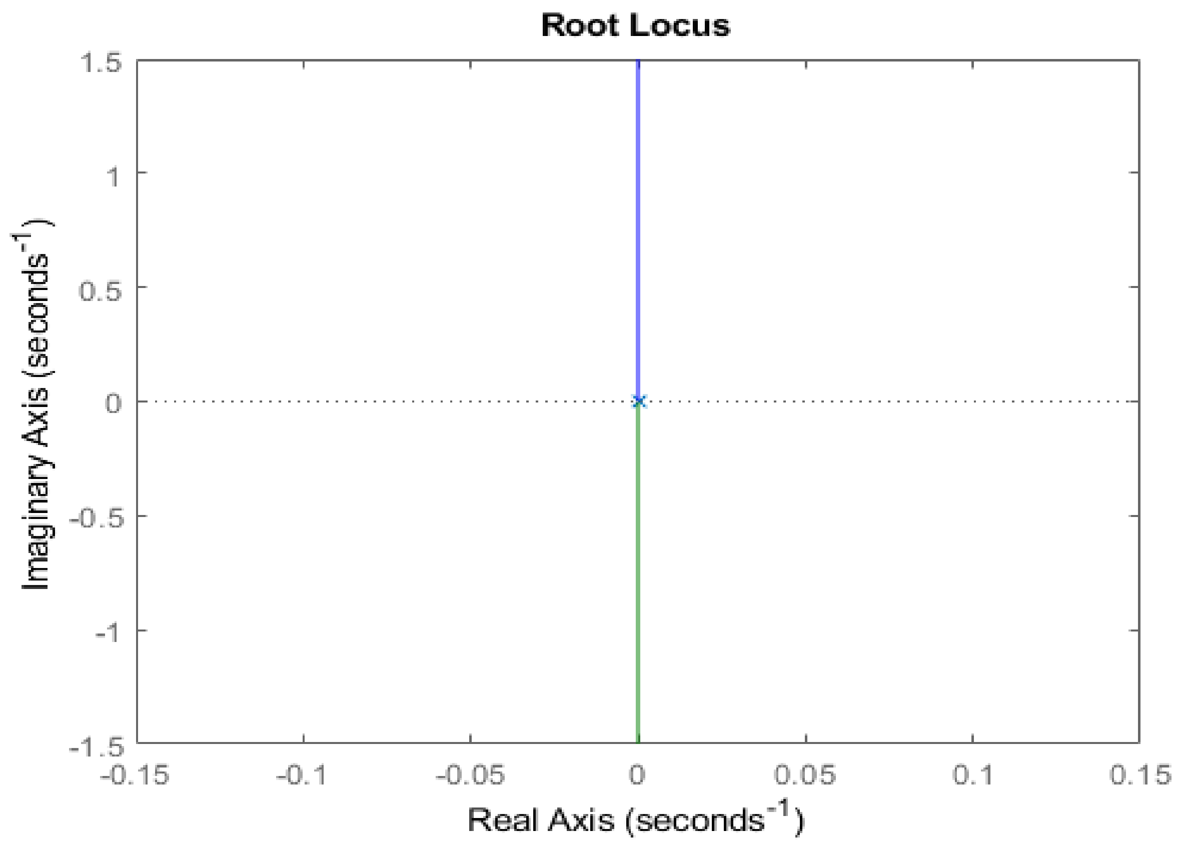
۶. کاهش مرتبه

با توجه به مرتبه دو بودن سیستم ما، نیازی به کاهش مرتبه نیست.

۷. رسم مکان هندسی:

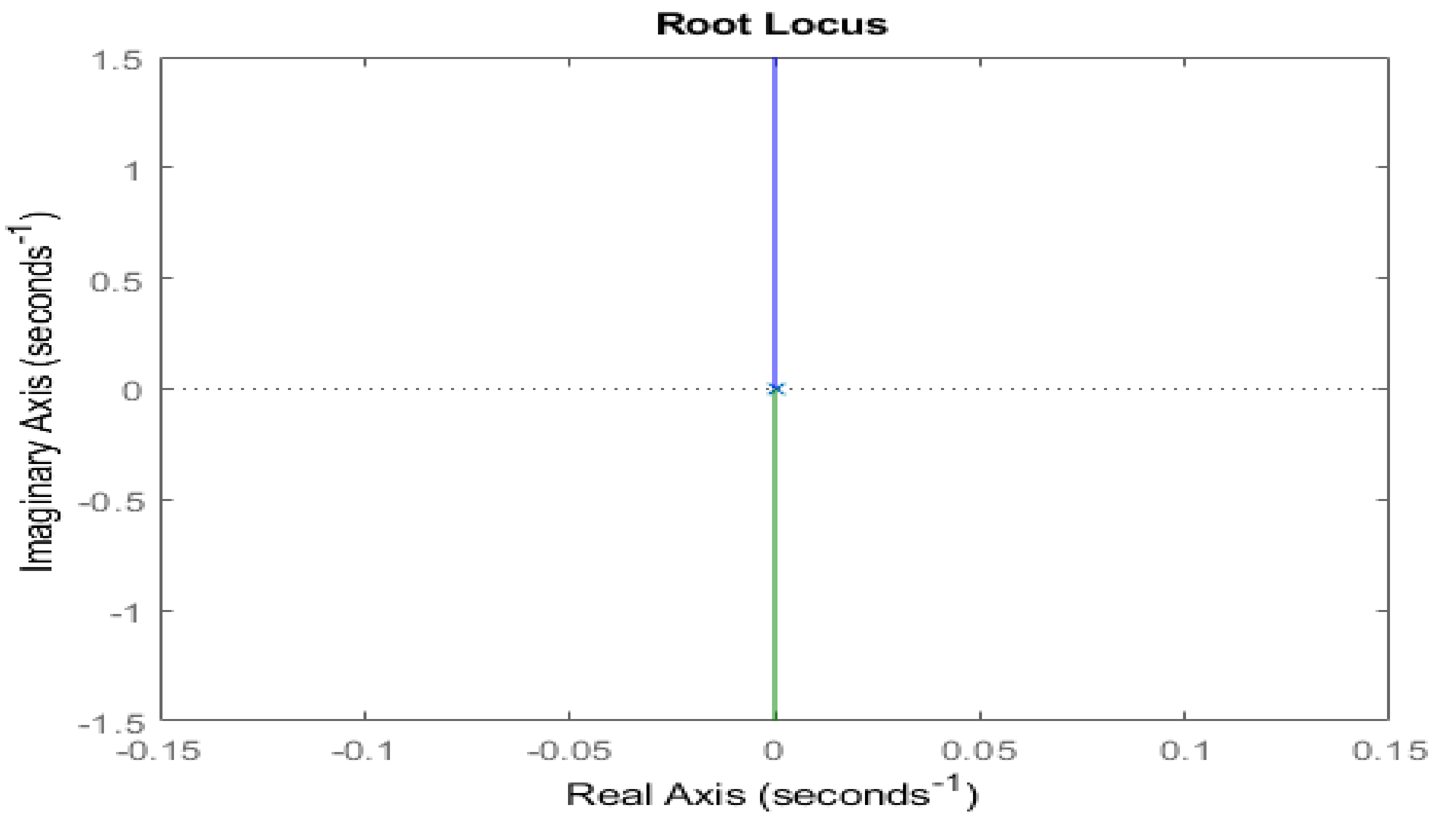
Plots for Z

```
s = tf('s');
G1 = 1/s^2;
% F=feedback(G1,1);
% Root Locus
figure(1)
rlocus(G1);
```



Plots for phi

```
s = tf('s');
G2 = 14705.88/s^2;
% F=feedback(G2,1);
% Root Locus
figure(2)
rlocus(G2);
```



همان طور که مشاهده میشود، مکان هندسی رسم شده هم برای کنترل Z و هم برای کنترل ϕ یکسان می باشد . چون دارای تابع تبدیل های مشابهی می باشند .

محدوده پایداری:

سیستم حلقه باز به دلیل داشتن دو قطب(ریشه مکرر) روی محور موهومی(مبداء) ناپایدار است و باید در ادامه با بررسی حالت فیدبک دار این موارد را بررسی کنیم.

- ✓ در پاسخ به این سوال که « آیا می توان کنترل کننده ای طراحی کرد که سیستم را تحت هر شرایطی پایدار کند ؟» باید گفت که هدف نهایی پروژه طراحی جبرانساز ها به منظور کنترل سیستم و پایدار نگه داشتن آن در کنار برآورده کردن ویژگی های مدنظر است. در نتیجه بستگی به هر شرایطی که مد نظر باشد و طبق بده بستان هایی که با توجه به کاربرد ما تعیین میشوند میتوان کنترل کننده مناسب طراحی کرد تا سیستم پایدار باشد.

۸. پارامتر های حوزه زمانی

فعلا برای این سیستم این بررسی بی فایده خواهد بود زیرا مقدار خطا بی نهایت است، در نتیجه ما پس از بررسی حالت فیدبک دار و افزودن کنترلر PID و کنترلرهای دیگر این مقادیر را بدست خواهیم آورد.

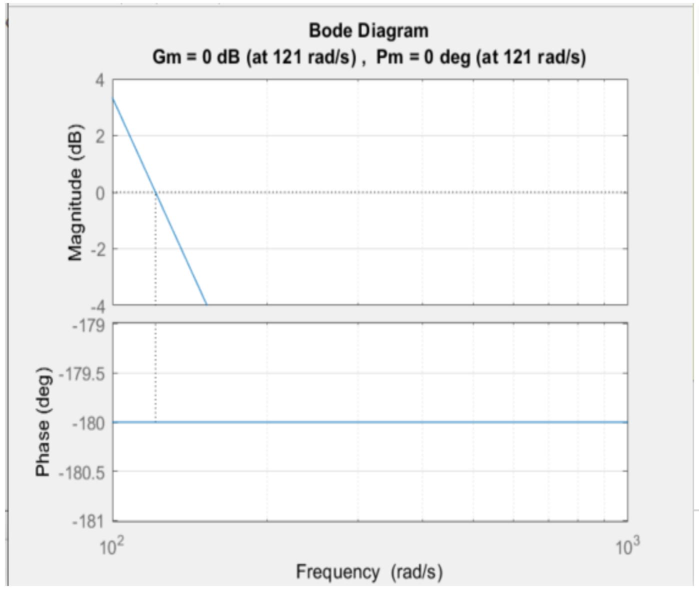
نمودار بود :

۹و ۱۰ . نمودار بودی و نایکوئیست

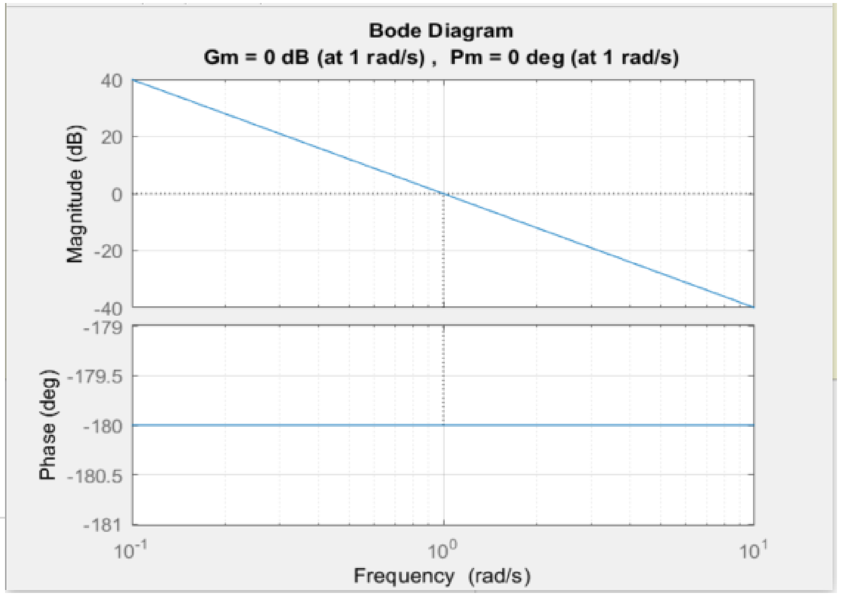
Bode for Z and phi

```
s=tf('s')

T_phi=14705.88/s^2;
T_z=1/s^2;

%z Bode Diagram
margin(T_z)
grid on

figure(2)
%phi Bode Diagram
margin(T_phi)
grid on
```

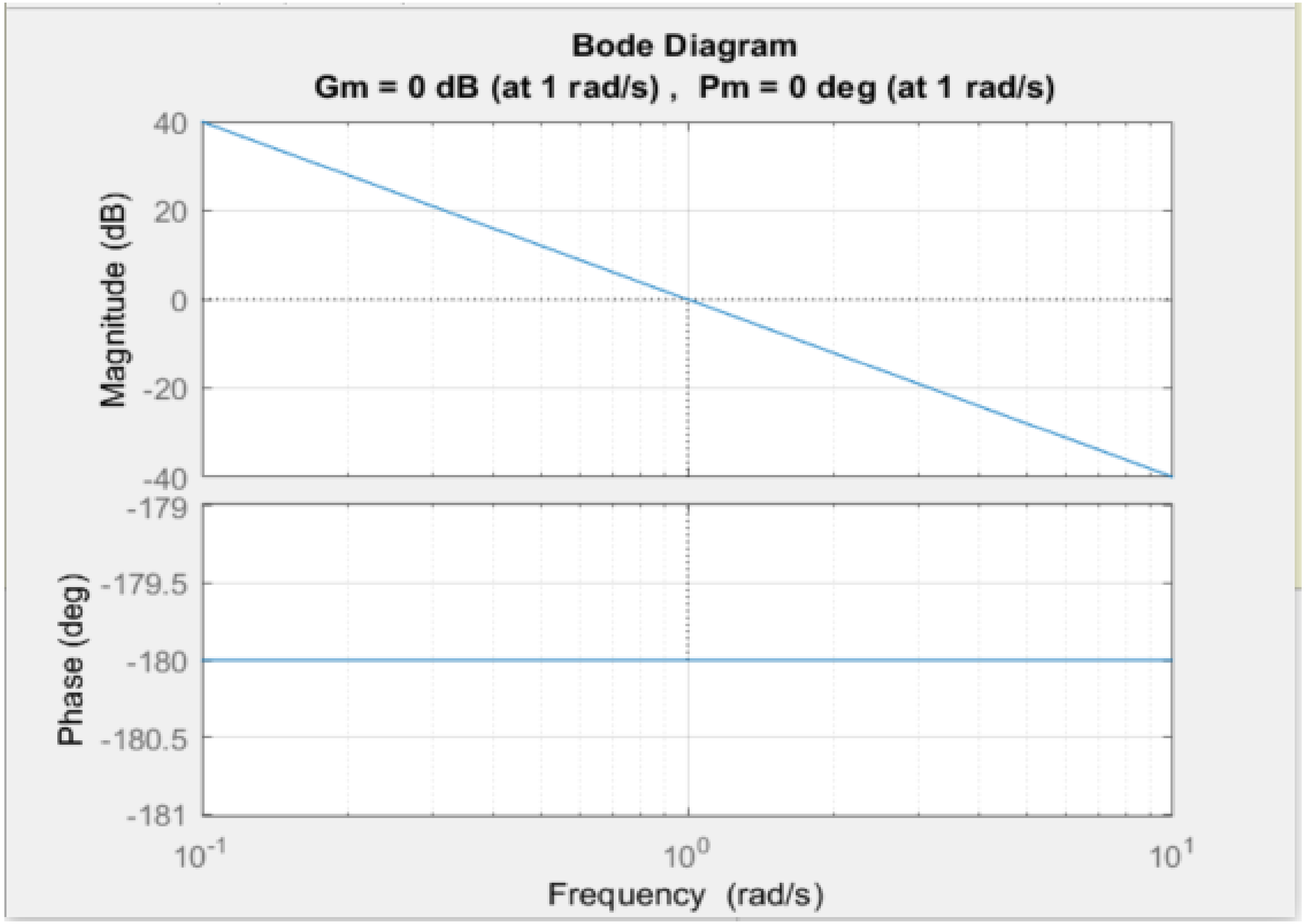
phi Bode Diagram

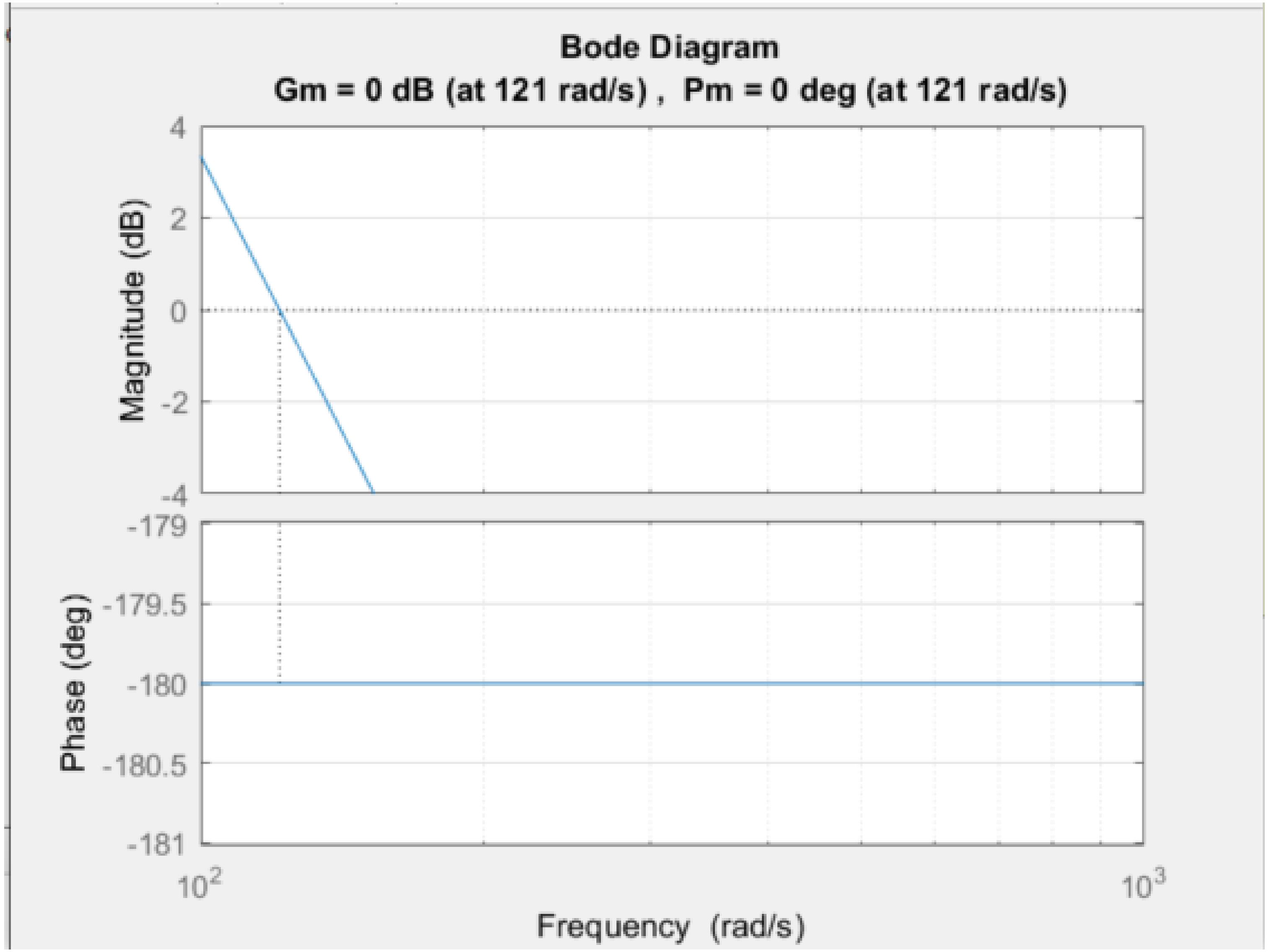


Z Bode Diagram



Z Bode Diagram





phi Bode Diagram

از روی نمودار های بود دو اسلاید قبلی مقادیر حاشیه فاز(PM) و حاشیه بهره(GM) به صورت زیر بدست می آید:

۱)برای کنترل z:

PM= 0 , GM= 0

۲)برای کنترل ø:

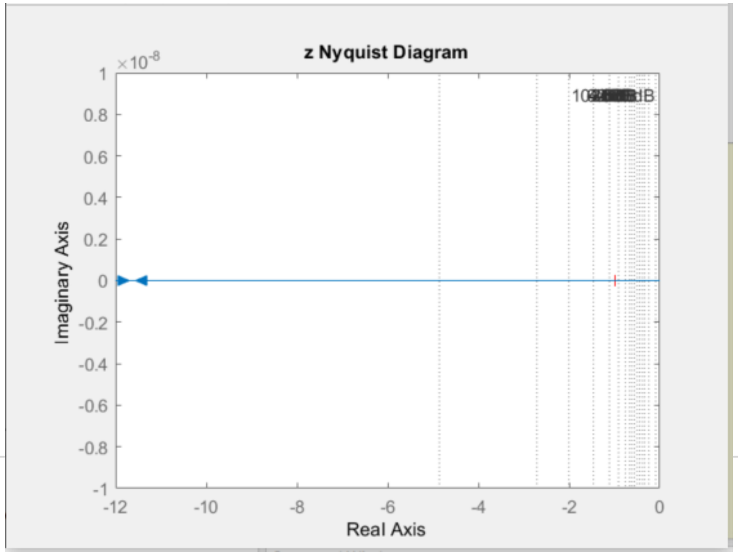
PM= 0 , GM= 0

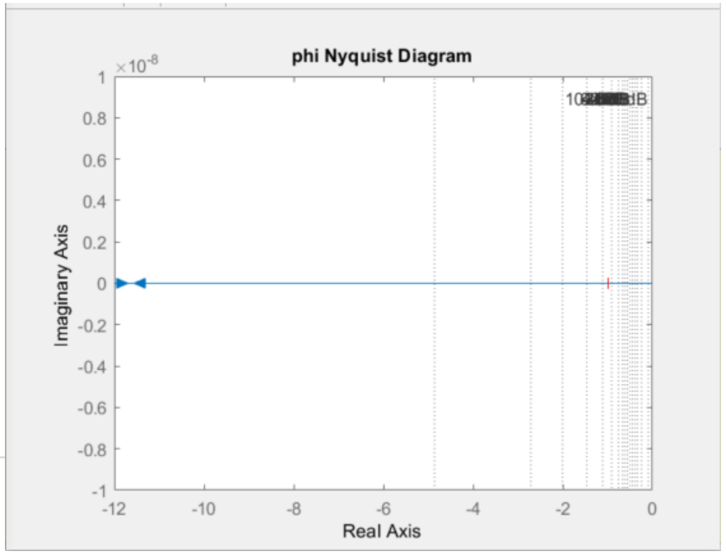
پس نتیجه میگیریم که در تابع تبدیل حلقه بسته سیستم پایدار نیست و هنگامی که در فیدبک واحد قرار میگیرد به پایداری مرزی می رسیم.

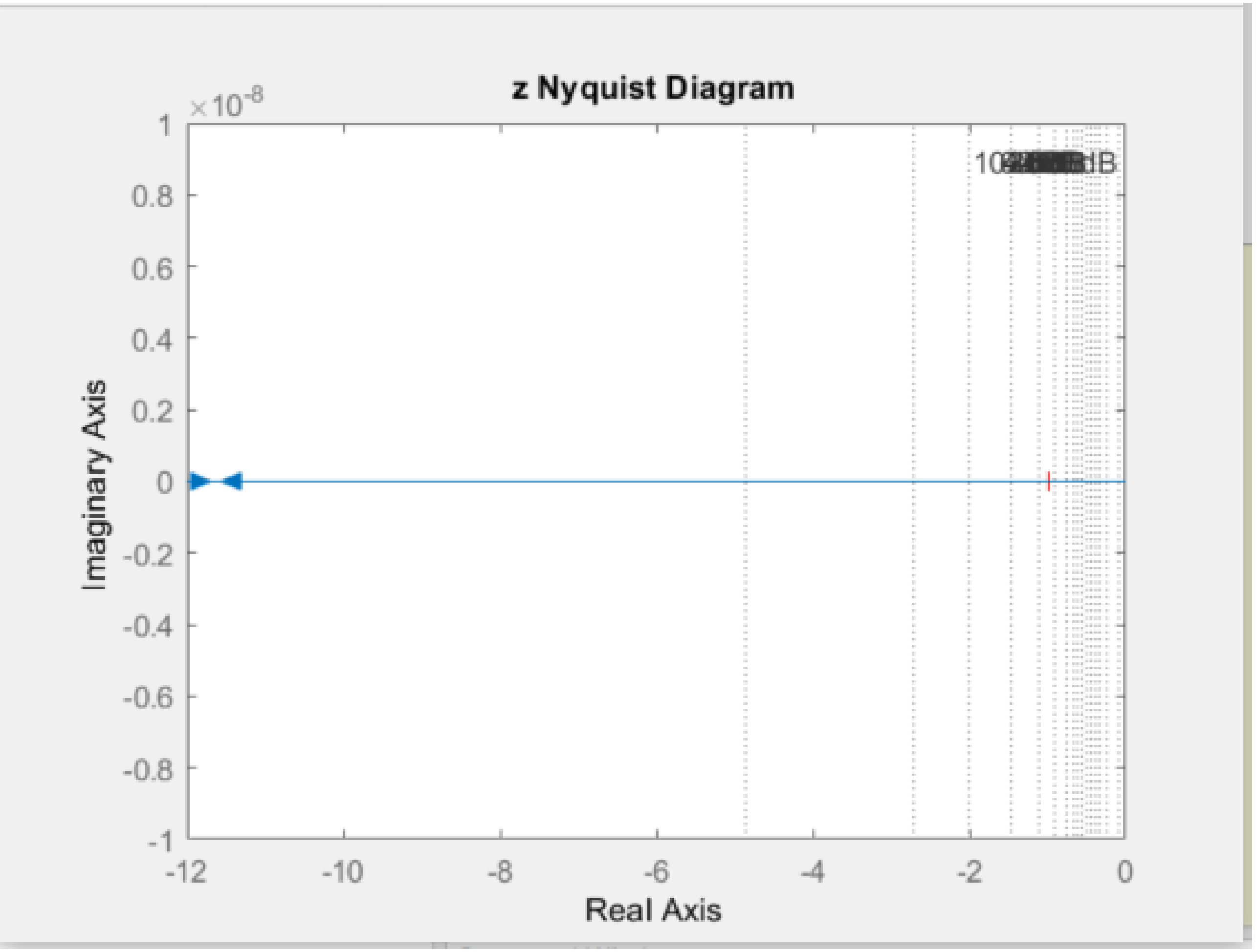
Nyquist for z and phi

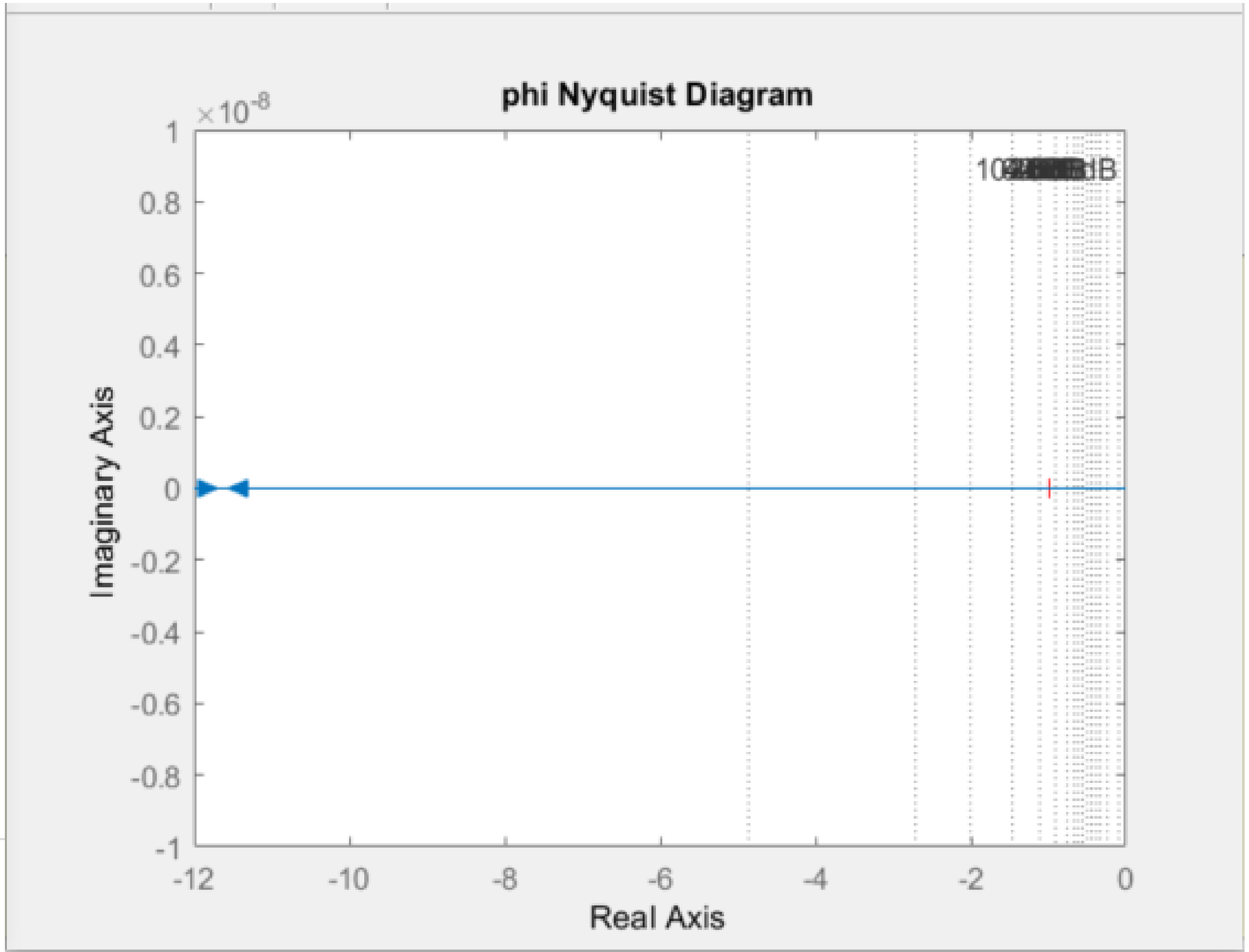
نمودار نایکوئیست :

```
s=tf('s')
T_phi=14705.88/s^2;
T_z=1/s^2;

figure(3)
nyquist(T_z)
title('z Nyquist Diagram')
grid on

figure(4)
nyquist(T_phi)
title('phi Nyquist Diagram')
grid on
```






z Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis


phi Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis

بررسی رفتار سیستم در فرکانس های بالا و پایین:

در رفتار فرکانسی همان طوری که در نمودار ها هم مشاهده کردیم سیستم در فرکـانس های بالا به خوبی عبور نمی دهد و اگر معیار 3db را هم در نظر بگیـریم کامـل مشـاهد می شود که سیستم ما رفتار پایین گذری از خود نشان می دهد.

و چون پارامتر ها را قرار است بعد از فیدبک بررسی کنیم آنجا دقیق تر بررسی میکنیم

۱۱. کنترل‌کننده PID

هدف از گذاشتن این کنترل‌کننده ایجاد پایداری برای سیستم است.

قطب مطلوب را با شرایط زمان نشست کمتر از ۰.۸ ثانیه و زاویه ۴۵ درجه می‌یابیم. به نقطه $s=-5+5j$ می‌رسیم.

ورودی پله در نظر می‌گیریم.

در ابتدا کنترل‌کننده PD را طراحی می‌کنیم.

$C_1(s) = K_D\,(s+Z_{PD})$

- دو صفر در مبدا داریم. اعمال شرط زاویه برای قطب -5+5j

$\theta_z - 2(135) = -180 \;\rightarrow\; \theta_z = 90 \;\rightarrow\; Z_{PD} = 5$

$\rightarrow\; C_1(s)=K_D(s+5)$

- اعمال شرط اندازه:

$|G_z(s)\,C_1(s)| = 1 \quad (s = -5 + 5j) \rightarrow \quad \frac{5\,K}{50} = 1$

$\rightarrow\; K_D = 10 \;\rightarrow\; C_1(s) = K_D\,(s+Z_{PD}) = 10\,(\,s + 5\,)$

حالا می‌خواهیم کنترل‌کننده PD را به کنترل‌کننده PID تبدیل کنیم.

$\mathbf{C_1(s) = K_D\,(s+Z_{PD})}$

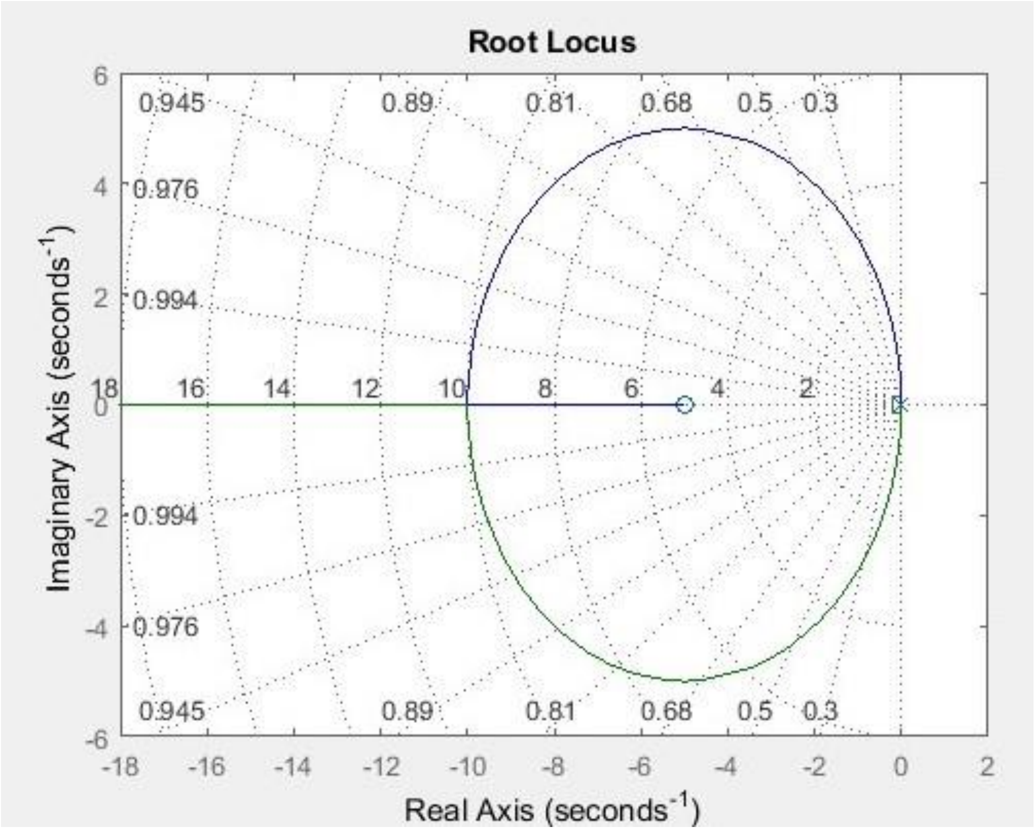
- ابتدا یک قطب در مبدا قرار می‌دهیم و سپس شرط زاویه را برای پیدا کردن صفر جدید اعمال می‌کنیم.

θ_z -3(135) + 90 = 180 ➔ θ_z = 135

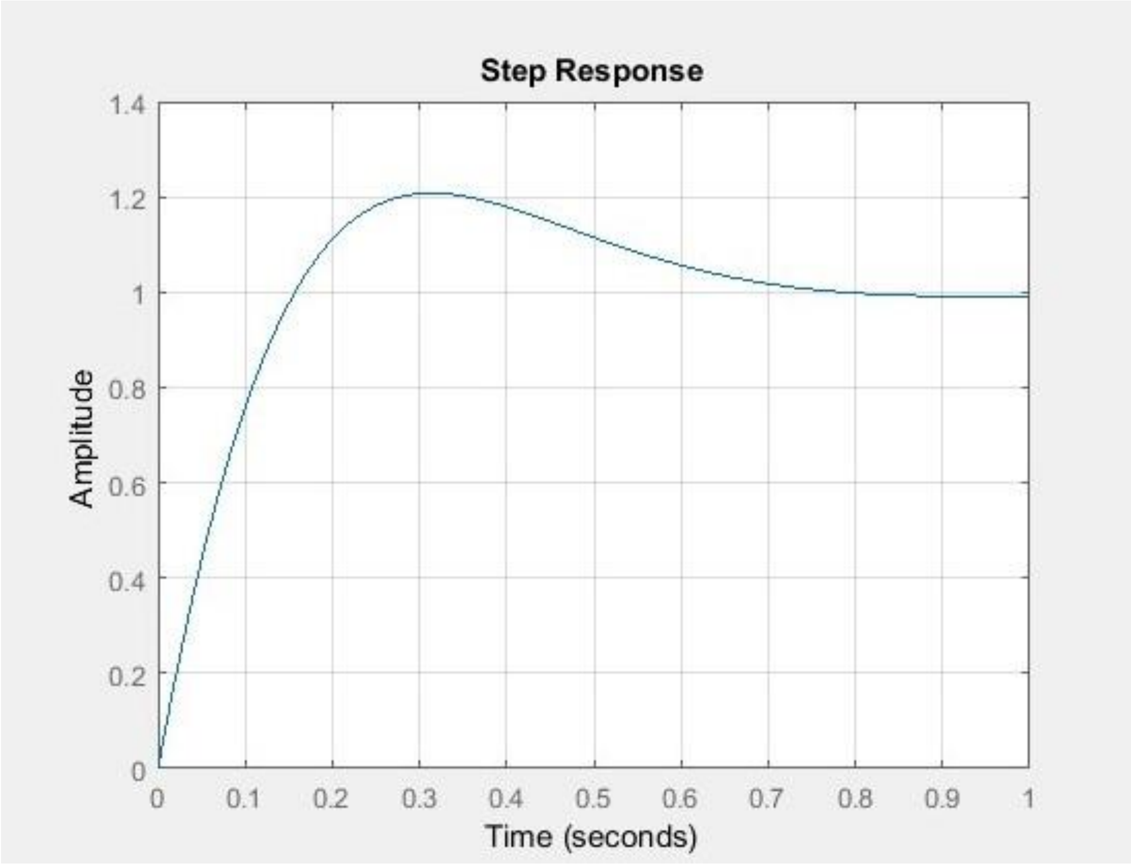
صفر کنترل‌کننده روی قطبش افتاد و این یعنی عملا اضافه‌کردن کنترلر PI بی‌فایده است. این نتیجه کاملا مطابق انتظار بود زیرا سیستم ما دو انتگرال‌گیر دارد و دیگر نیازی به افزایش نوع آن وجود ندارد.

طبق شکل‌های صفحه بعد:

- اورشوت = ۲۱ درصد
- زمان نشست = ۰.۷۳ ثانیه



part11 RootLocus for PID



part11 step response PID

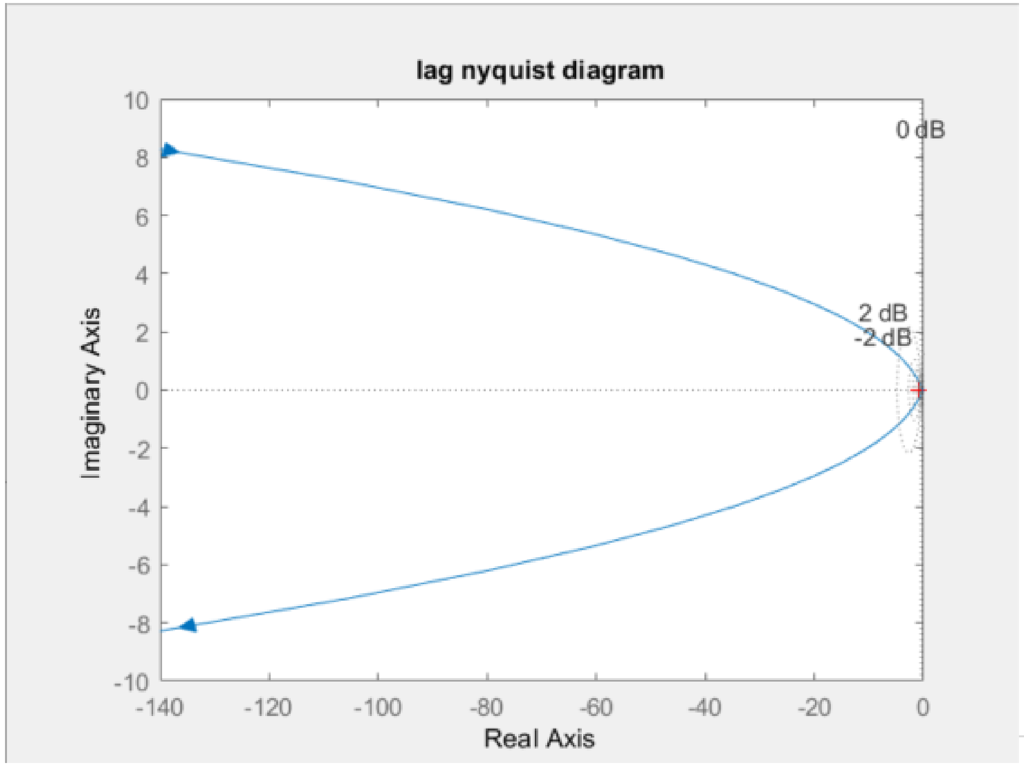
کد متلب:

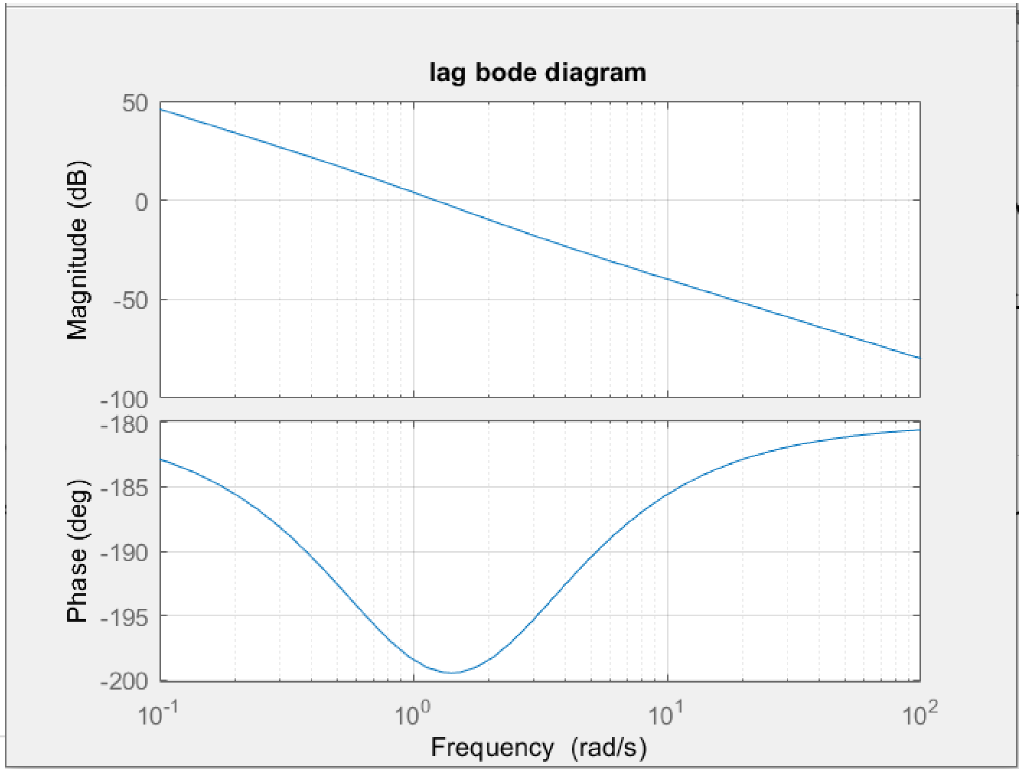
```
close all;
clear all;
clc;

s=tf('s');
g=(1)/(s)^2;
c=(s+5);

k1=1;
k2=10;

figure;
rlocus(k1*g);
grid on

figure;
rlocus(k2*g*c);
grid on

T1=k1*g/(1+k1*g)
figure;
step(T1);

T2=k2*c*g/(1+k2*c*g)
figure;
step(T2);
grid minor
```

۱۲. بررسی کنترل‌کننده موردنیاز با کمک نمودار نایکوئیســـت و بودی

در قسمت ۹ نمودار های بود و نایکویست را مشاهده کردیم و از بررسی نمودار نایکوئیست کـــه نقطـــه$(-1,0)$را یکبـــار در جهت ساعتگرد دور میزند دریافتیم که سیستم ناپایدار است.

اگر ما در سیستم ، یک کنترل کننده lag قرار بدهیم نمودار نایکوئیست همچنان نقطه *1,0-* را یکبار در جهت ساعتگرد دور میزند و برای بود هم میخواهیم که حاشیه بهره و فاز مثبت شوند(برای سیستم پایدار حاشیه فاز و بهره هر دو مثبت است) ولی کنترلر lag باعث منفی شدن حاشیه فاز می شود. مثلا اگر یک کنترلر $\frac{s+2}{s+1}$ lag قرار بدهیم نمودار نایکوئیست و بود آن به صورت زیردر می آید:





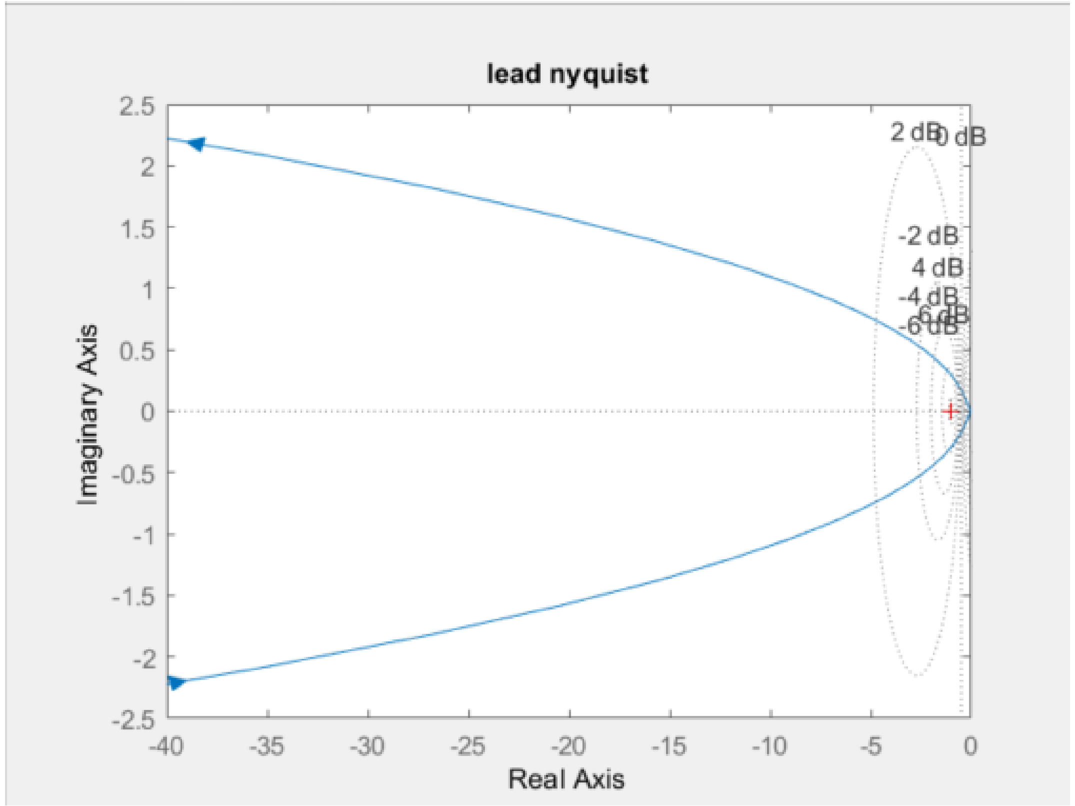
```
%% lag controller

s=tf('s')

G=1/s^2;
c=(s+1)/(s+2);

nyquist(G*c)
grid on

figure(2)
bode(G*c);
grid on
```

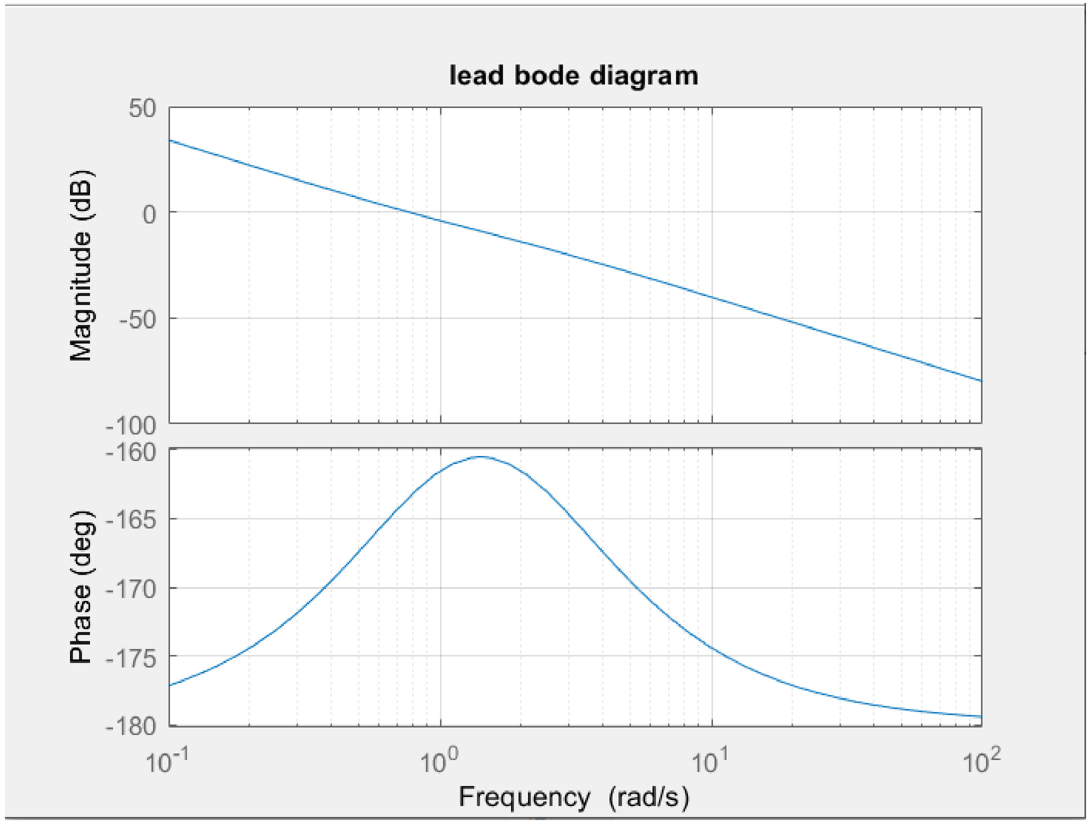
کنترل کننده lead:

نمودار نایکویست ما نقطه (۰و-۱) را در جهت ساعتگرد دورنمی زند.

نمودار فاز بود یک پیک مثبت میزند 🡸 حاشیه فاز مثبت

در نمودار اندازه شیب منفی به صورت مقطعی کم می شود 🡸 حاشیه فاز به پیک نزدیک می شود.





```
%% lead controller
s=tf('s')

G=1/s^2;
c=(s+1)/(s+2);

figure(3)
nyquist(G*c)
title('lead nyquist')
figure(2)
bode(G*c);
title('lead bode diagram')
grid on
```

پس طبق بررسی های بالا باید از کنترل کننده lead استفاده کنیم و چند دلیل دیگر هم برای استفاده کنترلر lead هم عبارت است از:

۱. سیستم ما به صورت $\frac{1}{s^2}$ است که یعنی داخل سیستم ما دوتا انتگرال گیر داریم و پس نیازی به کنترلر lag نداریم

۲. در قسمت قبل دیدیم که کنترل کننده PD تمام نیاز های ما را برآورده کرد و از طرفی می دانیم که کنترلر PD نوع خاصی از کنترلر های lead است که قطب آن در بی نهایت قرار دارد پس کنترلر مورد نیاز ما در اینجا از بین lead , lag , lead-lag قطعا lead است.

۳. باز هم در قسمت قبل دیدیم که سیستم ما ناپایدار است و وقتی فیدبک واحد به آن اعمال می‌کنیم به پایداری مرزی با نوسانات زیاد و اورشوت ۱۰۰ درصد در نوسان میرسیم و یکی از کار های اصلی ما در کنار پایدار کردن کم کردن درصداورشوت(p.o.) است که این نیاز ما را کنترل کننده lead برآورده می کند.

۱۳. فیدبک حالت:

حال برای رسیدن به سرعت مناسب (زمان نشست کمتر از ۰.۸ ثانیه) و با کمک مدل دینامیکی و مدل فضای حالت سیستم ، یک فیدبک حالت برای سیستم طراحی می کنیم .

برای کنترل z طبق شرایط خواسته شده قطب های سیستم را به 3.9i + 5.71 - انتقال می دهیم . در نتیجه تابع تبدیل جدید سیستم به صورت زیر در می آید :

GK(s) = s^2 + 11.4*s + 47.8

از روی تابع تبدیل جدید سیستم می توان مقادیر فیدبک حالت و ماتریس حالت جدید سیستم را به شرح زیر درآورد :

فیدبک حالت (K) = [47.8, 11.4] و ماتریس حالت جدید: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -47.8 & -11.4 \end{bmatrix}$

For z

```
clc
clear
close all
syms s;
A=[0,1;0,0];
B=[0;1];
C=[1,0];
phi=(s*eye(2)-A)^-1
% CM=phi*B
% CM1=simplify(CM)
TF=C*phi*B
% myctrb1=[B,A*B]
myctrb=ctrb(A,B)
rctrb=rank(ctrb(A,B))
```

```
phi =

[ 1/s, 1/s^2]
[   0,   1/s]


TF =
 1/s^2


myctrb =

     0     1
     1     0


rctrb =

     2
```

so it is full rank and as a result controlable

p.o.

```
clc
syms zi w s
A1=100*exp((-zi*pi)/(sqrt(1-zi^2))); % if you want "p.o" so you should use this eq by yourself in command window
B1=solve(A1==1,zi);
c=vpa(B1,3) % c = zita
```

Desired poles

```
Ts= .7; % settling time
zita_omega_n = 4/Ts; % 2 percent standard
w=vpa(zita_omega_n/c(1),3)
desired_s=vpa(-zita_omega_n+j*w*sqrt(1-c(1)^2),3)
```

```
w =

6.92


desired_s =

- 5.71 + 3.9i

- 5.71 - 3.9i
```

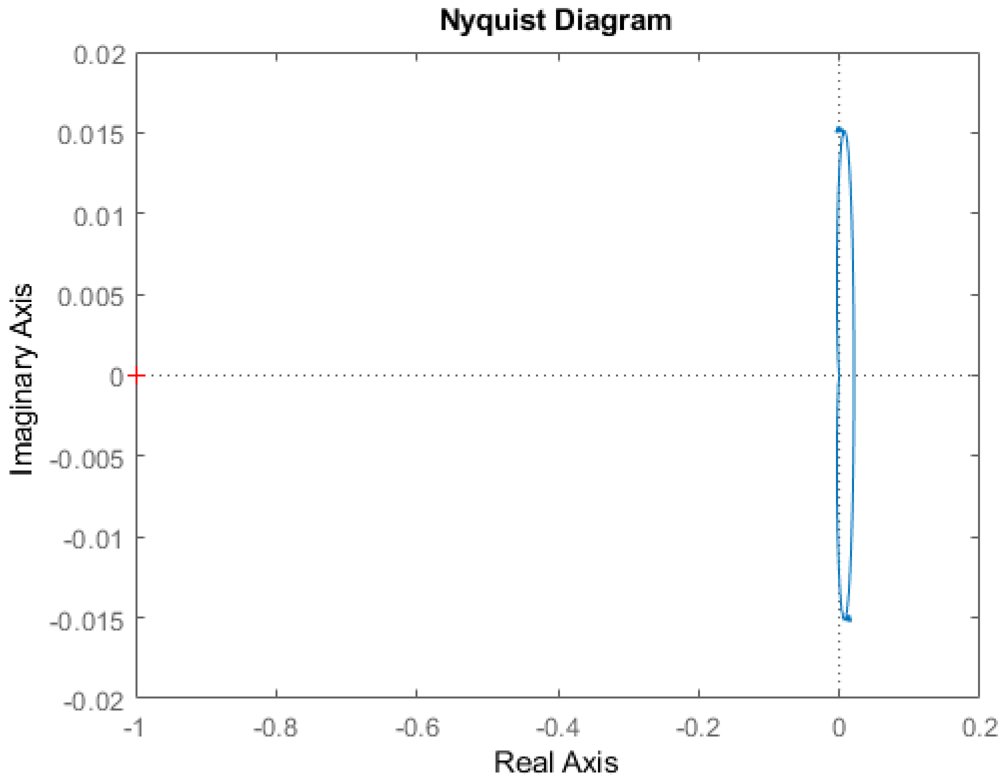
ackermann's formula

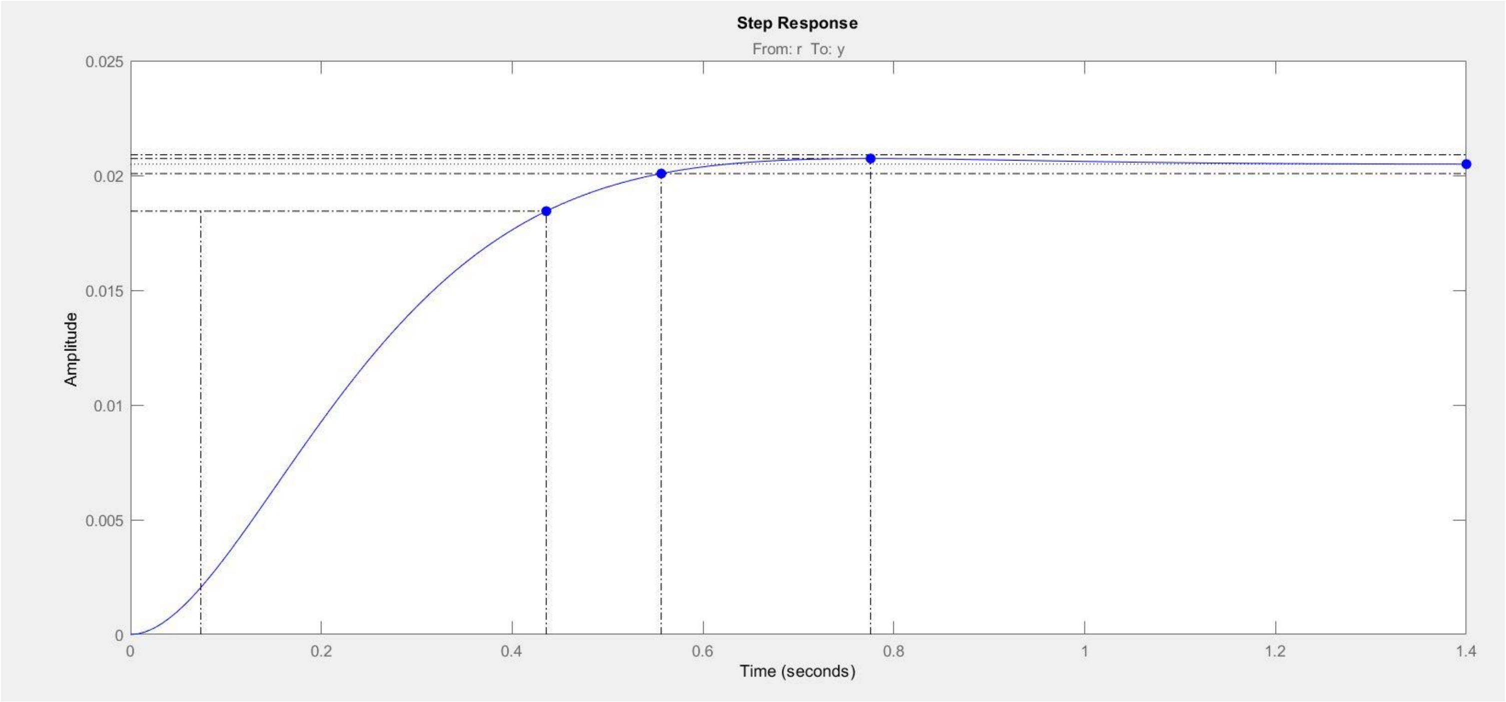
```
delta=vpa(s^2+2*c(1)*w*s+w^2,3)
co=vpa(fliplr(coeffs(delta)),3);
delta_prime=vpa(co(1)*(A^2)+co(2)*A+co(3)*eye(2),3);
% delta_prime = subs(delta,s,A);
k=vpa([0 1]*((myctrb)^-1)*delta_prime,3)  % ackerman's formula
```

```
delta =

s^2 + 11.4*s + 47.8


k =

[ 47.8, 11.4]
```

Related plots

```
s=tf('s');
tfn=1/(s^2 + 11.4*s + 47.8);
figure(1)
nyquist(tfn)
% sisotool(tfn)
```





- درصد فراجهش (.P.O) : 1.19%
- زمان اوج (T_r) : 0.362 s به مقدار نهایی خود می رسد .
- زمان نشست (T_s) : 0.556 s
- خطای حالت دائم (e_{ss}) : 98%

۲) برای کنترل ϕ با استفاده از فیدبک حالت ، مقادیر ویژه ی سیستم را به $[-10 \quad -10 \quad -10 \quad -15 \quad -15 \quad -15]$ تبدیل می کنیم .

ماتریس فیدبک حالت:

$$(K_a) = \begin{bmatrix} 0 & 13.5 & 0 & 0 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 13.5 & 0 & 0 & 2.25 \\ 27.03 & 0 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب تابع تبدیل پس از فیدبک حالت به صورت زیر در می آید :

$$G_K(s) = \frac{5.55s^4+277.5s^3+5134s^2+41620s+124900}{s^6+75s^5+2325s^4+38130s^3+348000s^2+1680000s+3370000}$$

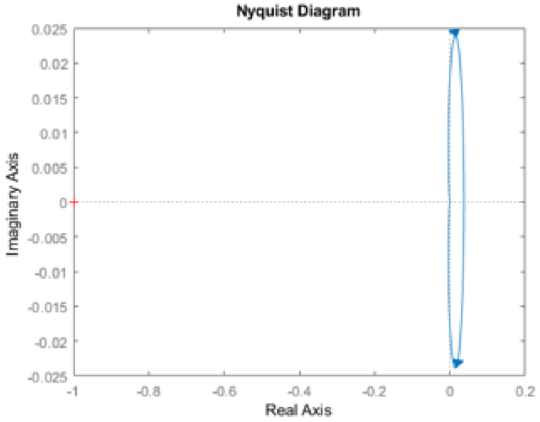
For phi

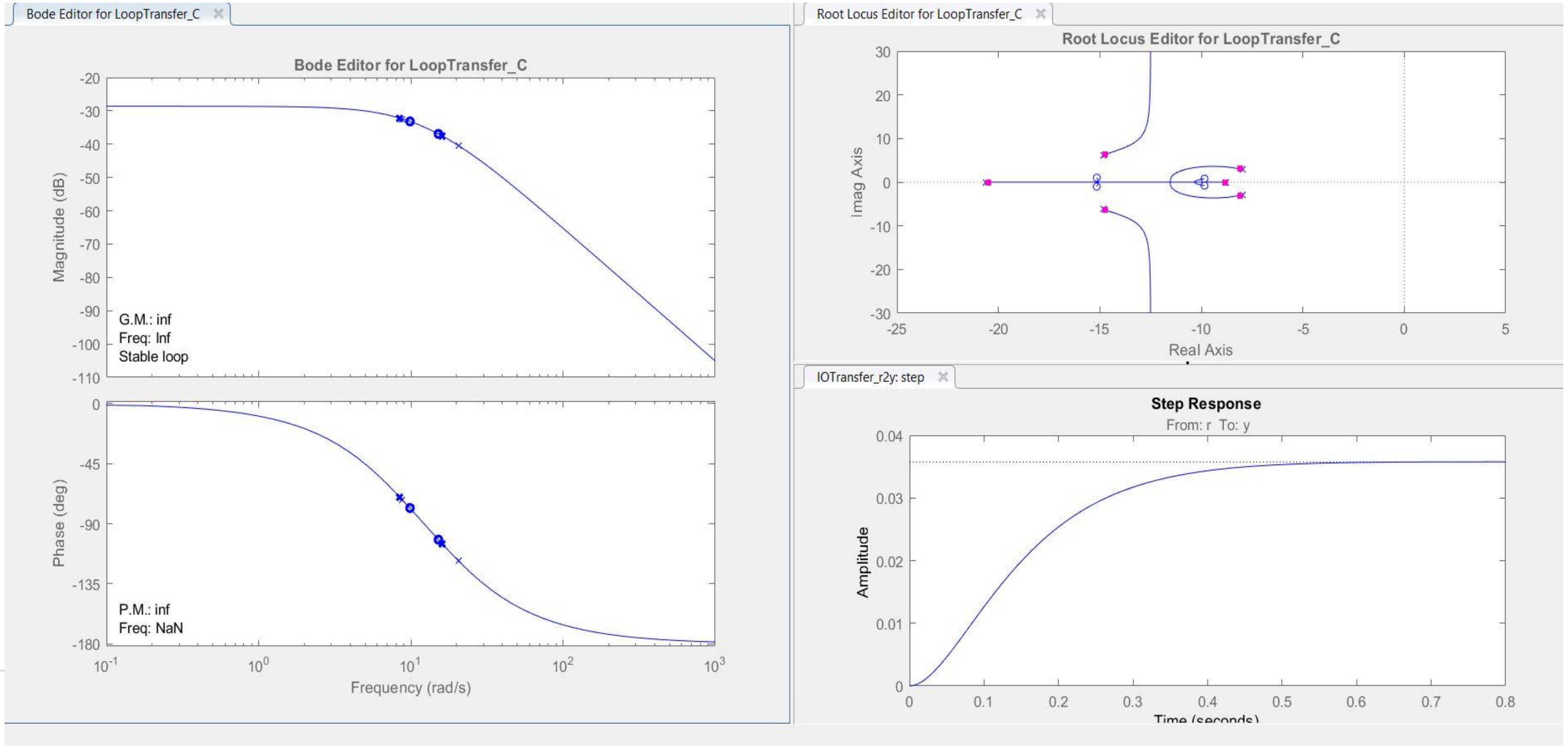
```
clc
clear
close all
syms s;
A=[zeros(3),eye(3);zeros(3),zeros(3)];
B=[zeros(3);0,0,5.5;11.11,0,0;0,11.11,0];
C=[eye(3),zeros(3)];
phi=(s*eye(6)-A)^-1;
TF=C*phi*B;
myctrb=ctrb(A,B)
rctrb=rank(ctrb(A,B))
```

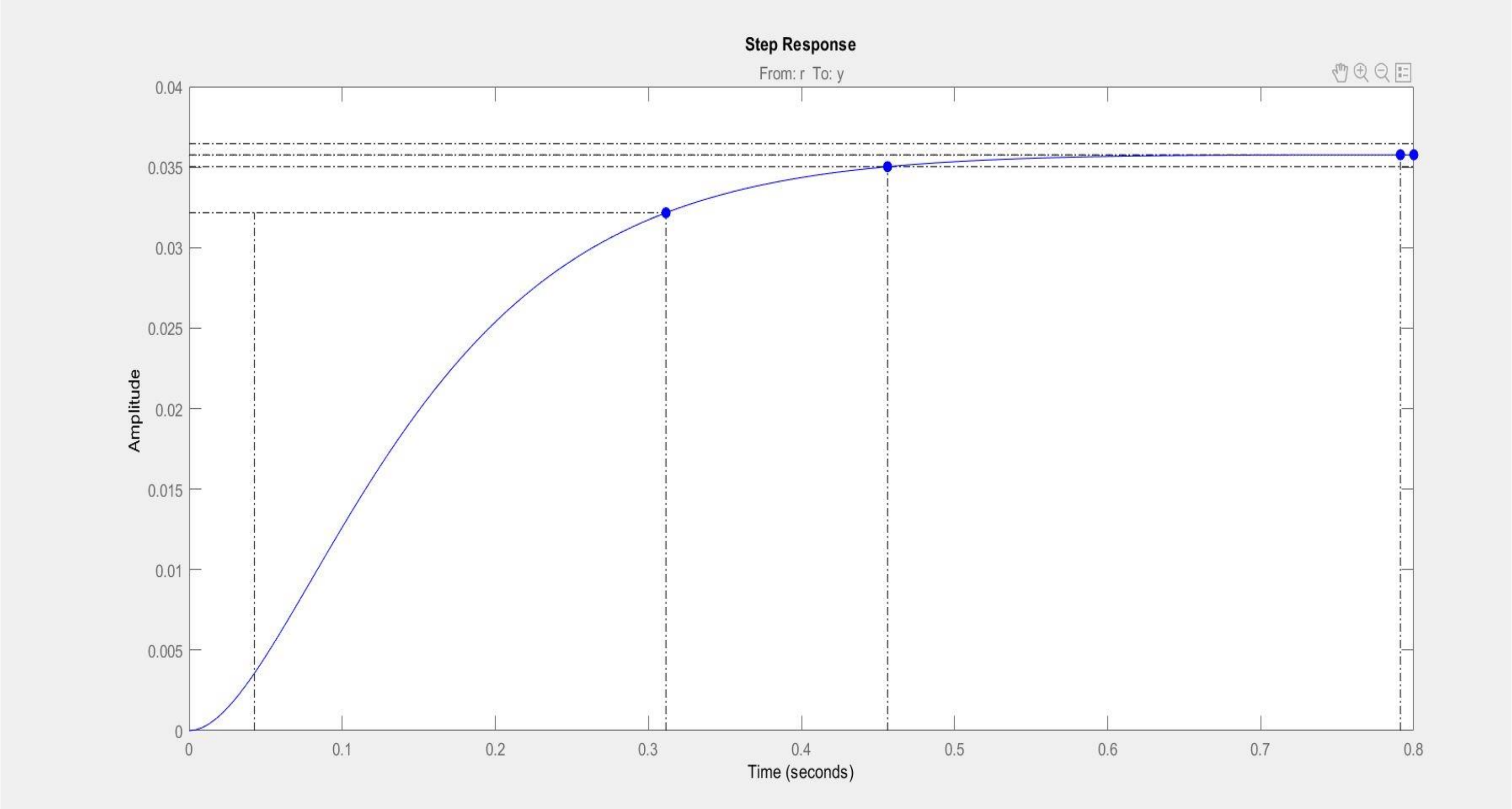
```
myctrb =

  Columns 1 through 7

         0         0         0         0         0    5.5000         0
         0         0         0   11.1100         0         0         0
         0         0         0         0   11.1100         0         0
         0         0    5.5000         0         0         0         0
   11.1100         0         0         0         0         0         0
         0   11.1100         0         0         0         0         0

  Columns 8 through 14

         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 15 through 18

         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0


rctrb =

     6      % so it is full rank and as a result controlable then we can say that there exist a k
```

Related plots

```
s=tf('s');
tfn=(5.55*s^4 + 277.5*s^3 + 5134*s^2 + 41620*s + 124900)/(s^6 + 75*s^5 + 2325*s^4 + 38130*s^3
+348000*s^2 + 1680000*s + 3370000);
figure(1)
nyquist(tfn)
% sisotool(tfn)
```







- درصد فراجهش (P.O.) : %۰.۰۷
- زمان اوج (T_r) : 0.269 s به مقدار نهایی خود می رسد .
- زمان نشست (T_s) : 0.456 s
- خطای حالت دائم (e_{ss}) : 96.4%
- طراحی جبرانساز های لازم برای فیدبک حالت را پس از بررسی جبرانساز برای *lead , lag* انجام میدهیم.

۱۴و ۱۵ . طراحی کنترل‌کننده Lead

- مشخصات مطلوب:

1. $T_s < 0.8$
2. PM > 45
3. GM > 12(dB)
4. Steady-State Err < 1%
5. Overshoot < 5%

شرط اورشوت کمتر از ۵ درصد را خودمان اضافه کردیم زیرا کوادکوپتر در کاربردهای حساس نظامی استفاده می‌شود و هم‌چنین در فیلم‌برداری‌های غیرنظامی هم اورشوت بالا قابل قبول نیست. در واقع هیچ لرزشی قابل قبول نیست اما ما به وسیله کنترلر نمی‌توانیم آن را به صفر برسانیم و در عمل از لرزه گیر هم برای دوربین کوادکوپترها استفاده می‌شود تا لرزش به صفر میل کند.

$\xi\omega > 5$ زمان نشست

$\theta < 45°$ شرط اورشوت

S=-5+5j → Z_{Lead} = -5

$$90 - 2 \times 135 - \theta p = -180$$

$$C1(S) = K\frac{s+5}{s+200}$$

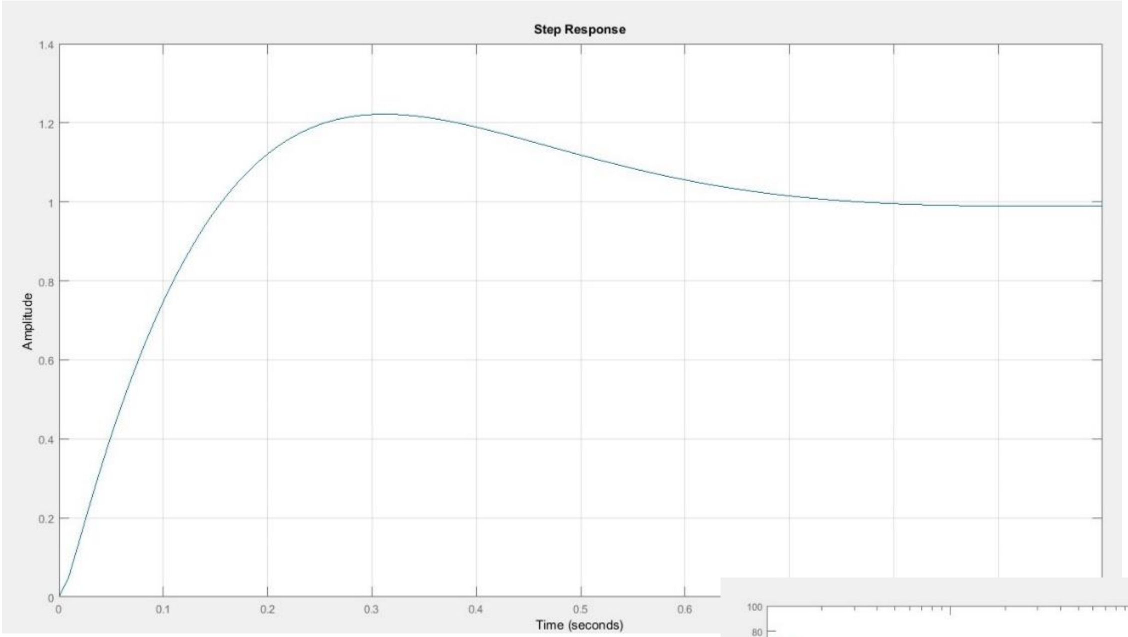
$$|G(s)C1(s)| = 1\,, s = -5+5j \rightarrow \frac{5k}{195.064} \times \frac{1}{50} = 1 \rightarrow k = 1950.64$$

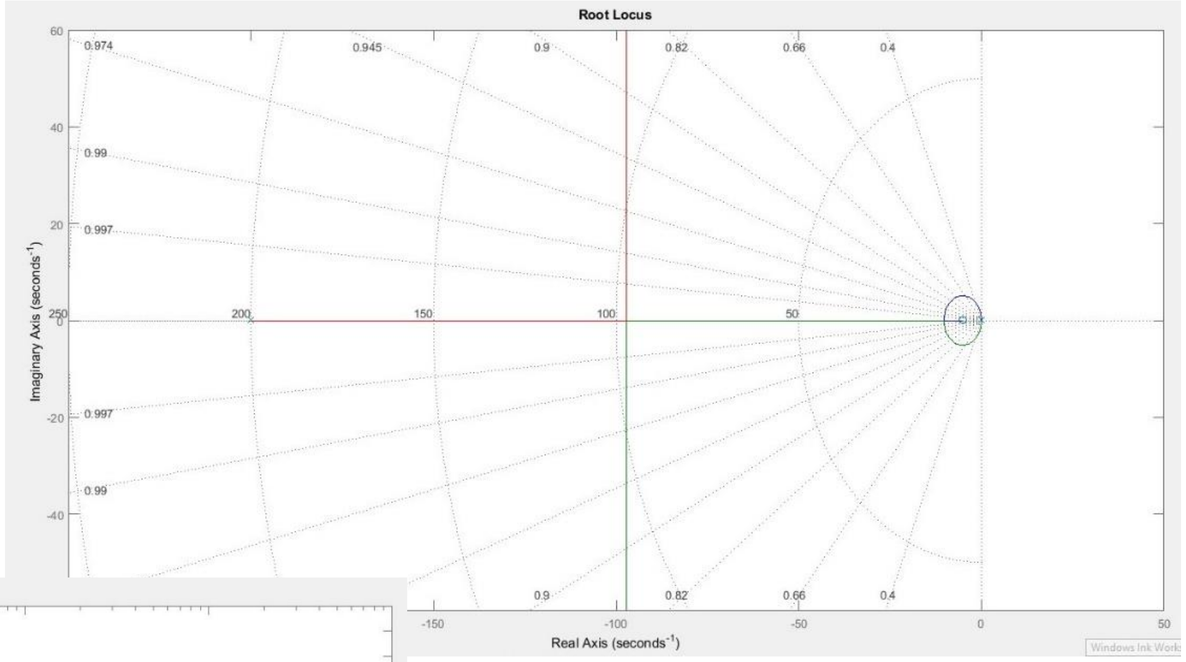
$$G(s)C1(s) = 1950.64\ \frac{s+5}{(s+200)s^2}$$

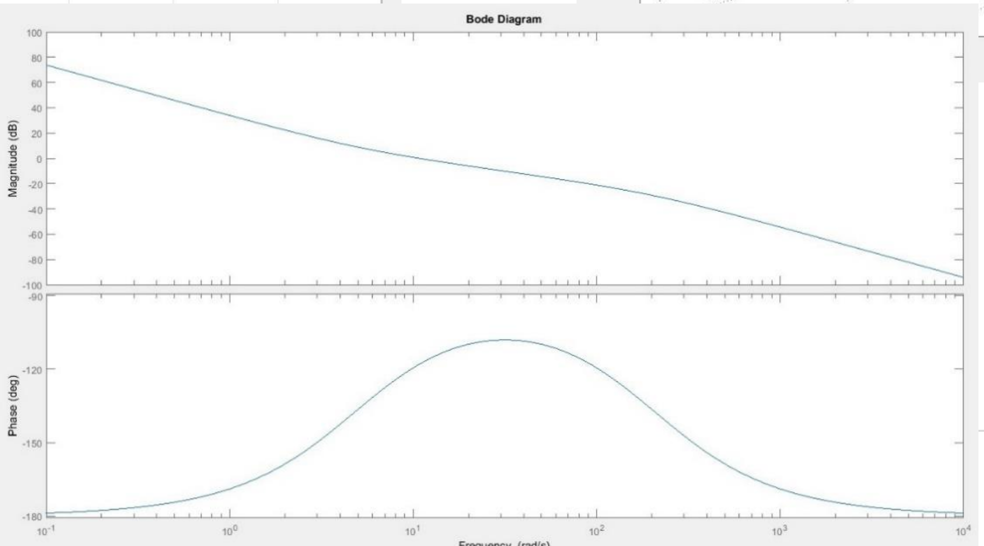
$O.P. = 22\%\,, Gm = +\infty\,, Pm = 62 \rightarrow Stable \rightarrow (\omega > 10^{-1})$ فیلتر پایین نگذر

طبق نمودارهای صفحه بعد، شرط ۱ تا ۴ برآورده‌شده اما اورشوت ۱۷ درصد بیشتر از حالت مطلوب است.

از لحاظ حاشیه فاز، مطلوب ما این است که نمودار اندازه زمانی زمانی ۰ دسی‌بل را قطع کند کــه فــاز حــدود ۱۰۸- درجه باشد تا حاشیه فاز تقریبا ۷۲ بشود. با اضافه شدن لید اول، شیب منفی نمودار انــدازه بــه صورت مقطعی کم شد و دیرتر به صفر رسید ولی هم‌چنان به بهینه‌ترین حالت نرسیده است.







طراحی کنترل‌کننده دوم:

- ✓ برای بهبود اورشوت نیاز به بهبود ξ داریم پس $C_2(s)$ را با θ کمتری طراحی میکنیم :

برای مثال ← s=-6+3j

$$90-2\times 150+108.43-0.88-\theta p=-180 \;\rightarrow\; \theta p=77.55°$$

$$\rightarrow (tan\theta=4.5)\;\; ,p=-6-\frac{3}{4.5}=-6.67$$

$$C2(s)=K2\frac{s+6}{s+6.67}\rightarrow K'\;\frac{(s+5)(s+6)}{s^2(s+6.67)(s+200)}=1\,,s=-6+3j$$

$$\rightarrow K'=2825.08$$

O.P.=17% ← درصورت افزایش k ، پاسخ حالت ماندگار خراب میشود.

در نتیجه باید شروع به اصلاح کنترل‌کننده‌ها بکنیم:

- **اصلاح لید اول Lead 1**

Z_{Lead} = -5 , p=400

$$C1(s) = k\frac{s+5}{s+400}$$

$$|G(s)C1(s)| = 1\,, s = -5+5j \;\rightarrow \frac{5k}{50(397)} = 1 \;\rightarrow k = 3970$$

۱٪ بهبود اورشوت ← از همان قبلی استفاده میکنیم زیرا تامین این بهره در عمل دشوار است و فایده چندانی هم ندارد.

- تلاش اول اصلاح لید دوم Lead 2

زاویه قطب مطلوب را تغییر نمیدهیم. S= -25+25j

$$90-2*135+128.65-0.07-\theta p=-180 \rightarrow \theta p=128.6$$

صفر را خیلی به چپ بردیم و این کنترل کننده ، عملی نیست.

- تلاش دوم اصلاح لید دوم **Lead 2**

S=-6+2j

$$90-2*161.56+116.56-0.6-\theta p=-180 \ \rightarrow \theta p=62.84$$

$$\rightarrow p=-6-\frac{2}{\tan(62.84)}=-7$$

$$C2(s)=K2\frac{s+6}{s+7}\ ,s=-6+2j$$

$$K'\frac{(s+5)(s+6)}{s^2(s+7)(S+200)}=1\rightarrow \ K'=3880 \ \rightarrow \color{red}{Mp=13\%}$$

- اصلاح سوم لید دوم **Lead 2**

$$s = -6 + 1j$$

$$90 - 2 * 170.53 + 135 - \theta p = -180 \ \rightarrow \theta p = 63.94 \rightarrow p = -8$$

$$C2(s) = K2\frac{s+6}{s+8} \ , s = -6 + j1$$

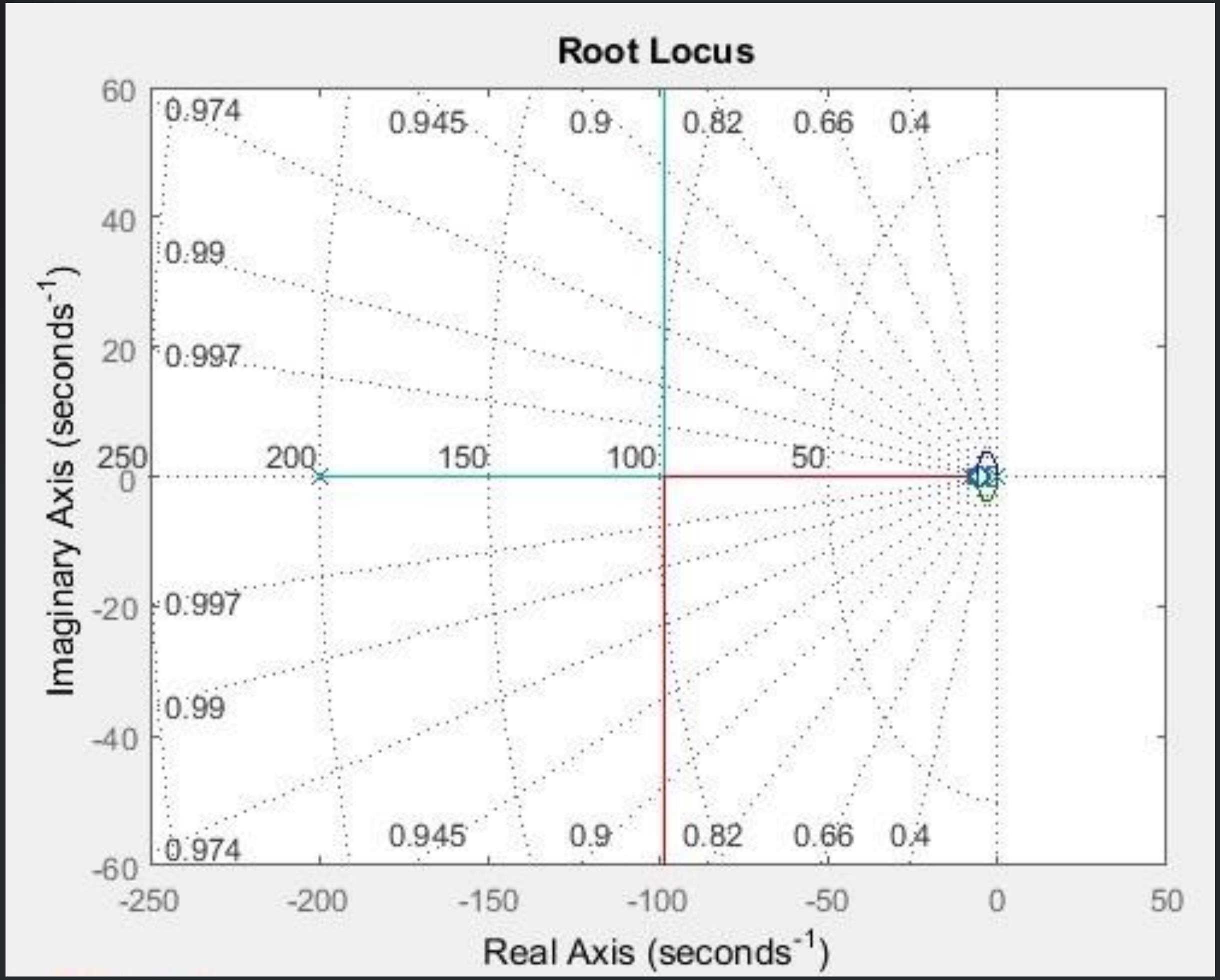
$$C2(s = -6 + j1) = 1 \ \rightarrow K' = 11349.4$$

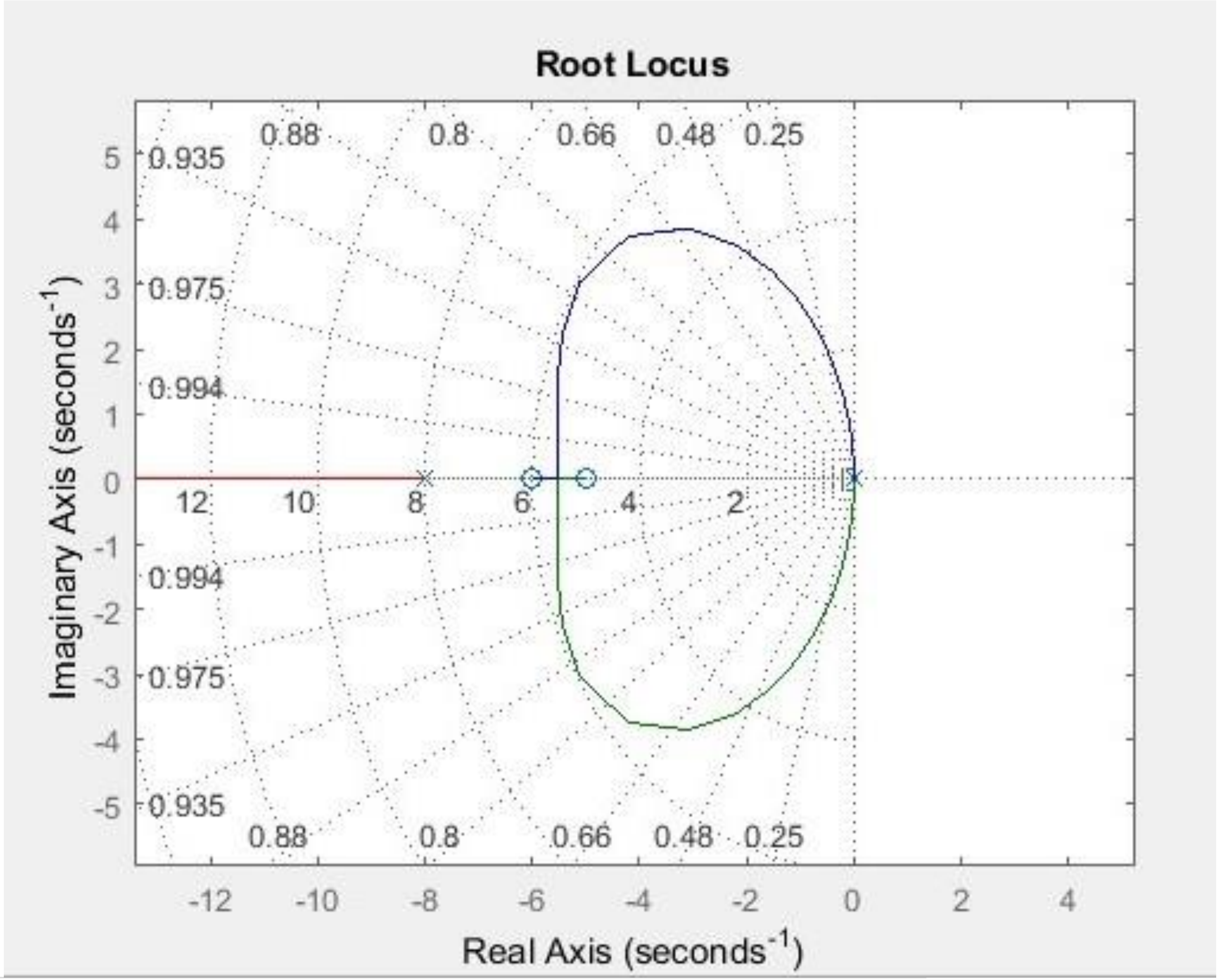
مشخصات سیستم با کنترل کننده:

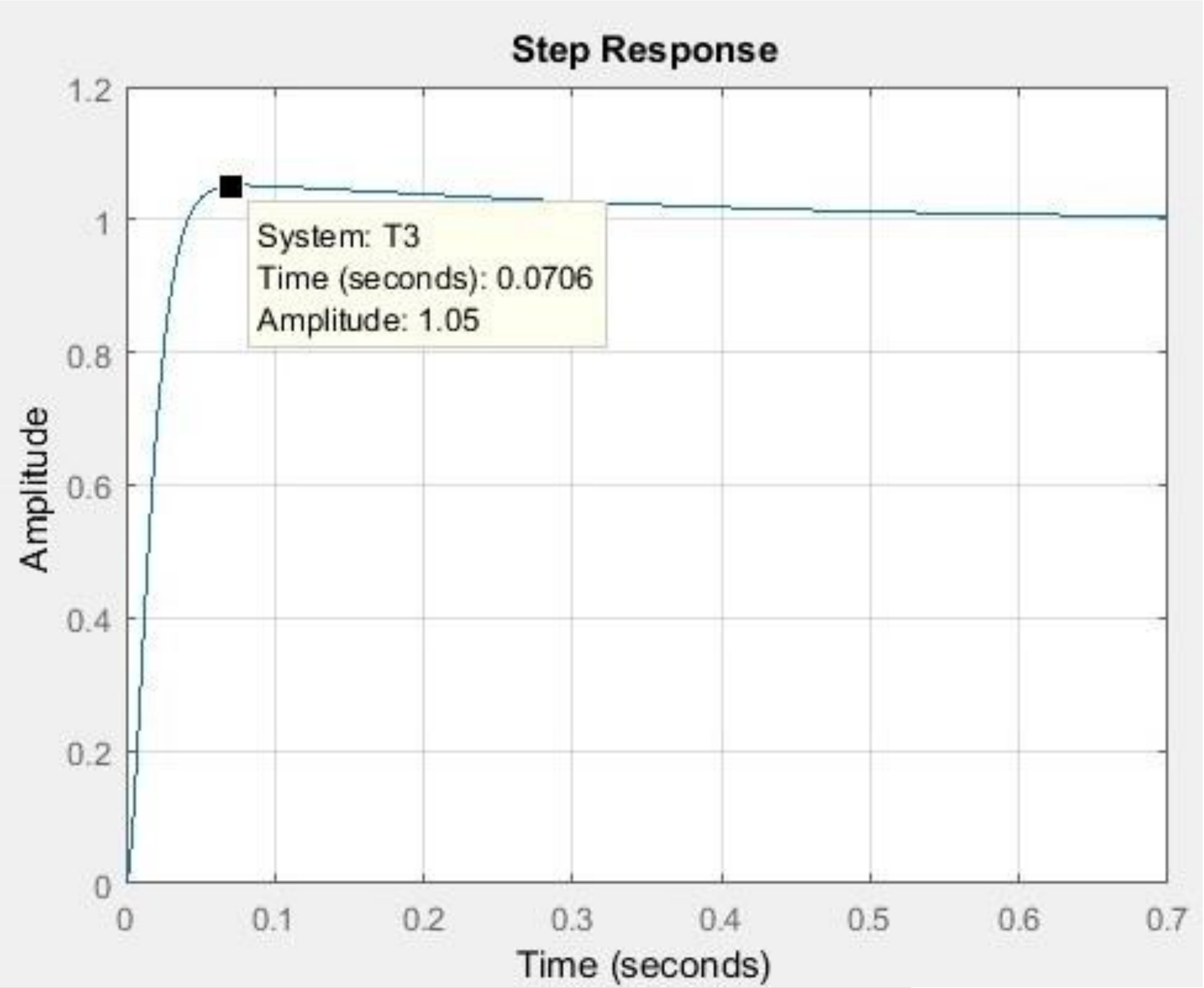
$C_{Lead1}\ C_{Lead2} = 11349.4\ \left(\frac{(s+5)(s+6)}{(s+200)(s+8)}\right)$

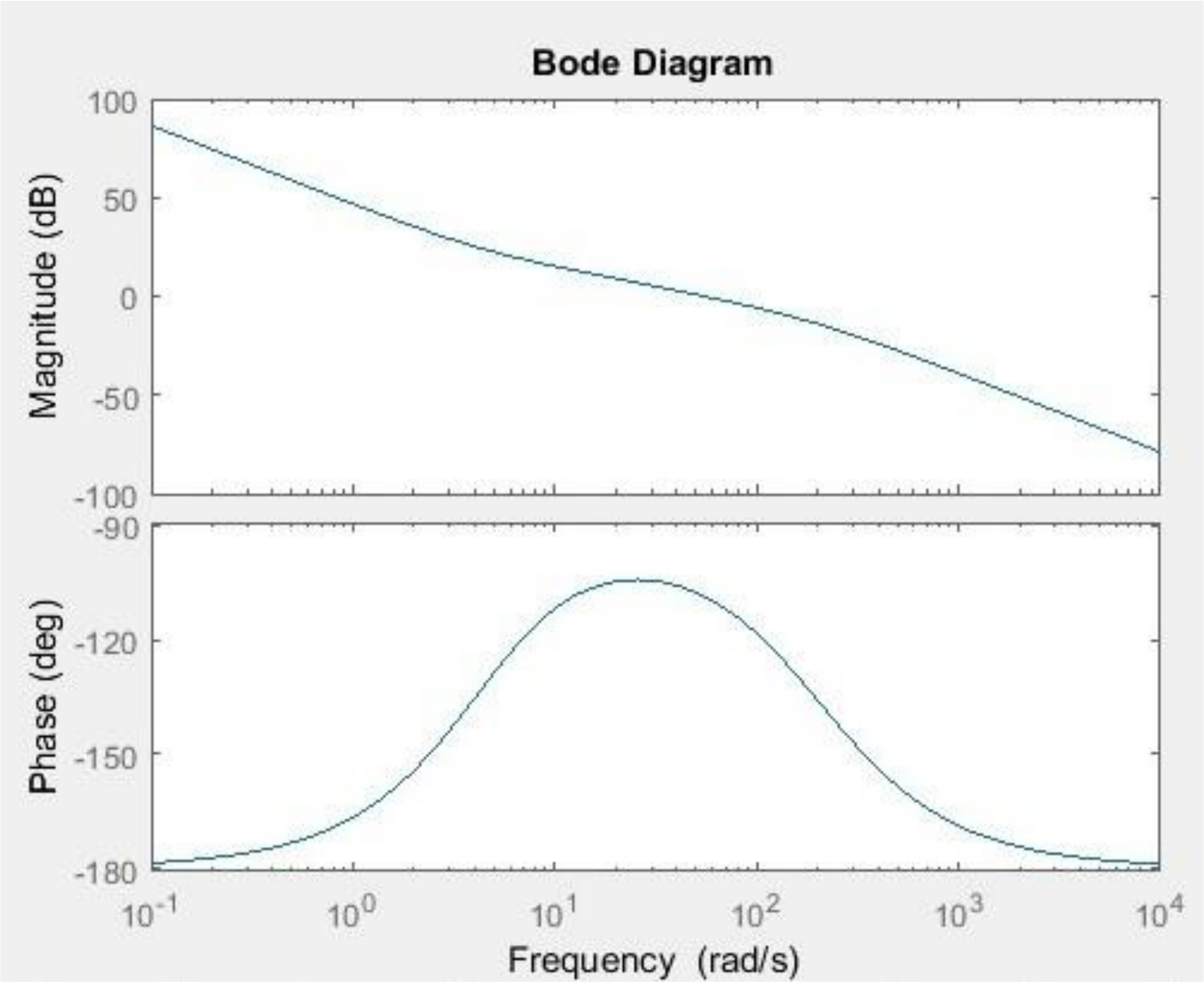
- ✓ $T_s = 0.32$
- ✓ PM = 71.5
- ✓ GM = inf
- ✓ Steady-State Err < 1%
- ✓ Overshoot = 5%

نمودارها پس از اعمال کنتـــرل‌کننـــده و حصـــول نتایج مطلوب:




Root Locus
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
0.88
0.8
0.66
0.48
0.25
0.935
0.975
0.994
12
10
8
6
4
2
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4


Step Response
System: T3
Time (seconds): 0.0706
Amplitude: 1.05
Amplitude
Time (seconds)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7



Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-120
-150
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)

۱۶ . اعمال کنترل‌کننده به سیستم غیرخطی

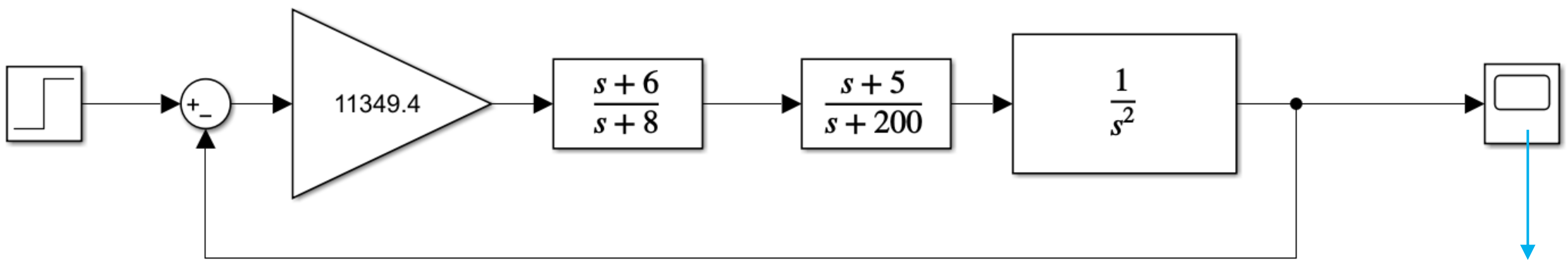
1. $\ddot{z} = -g + \frac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U1$

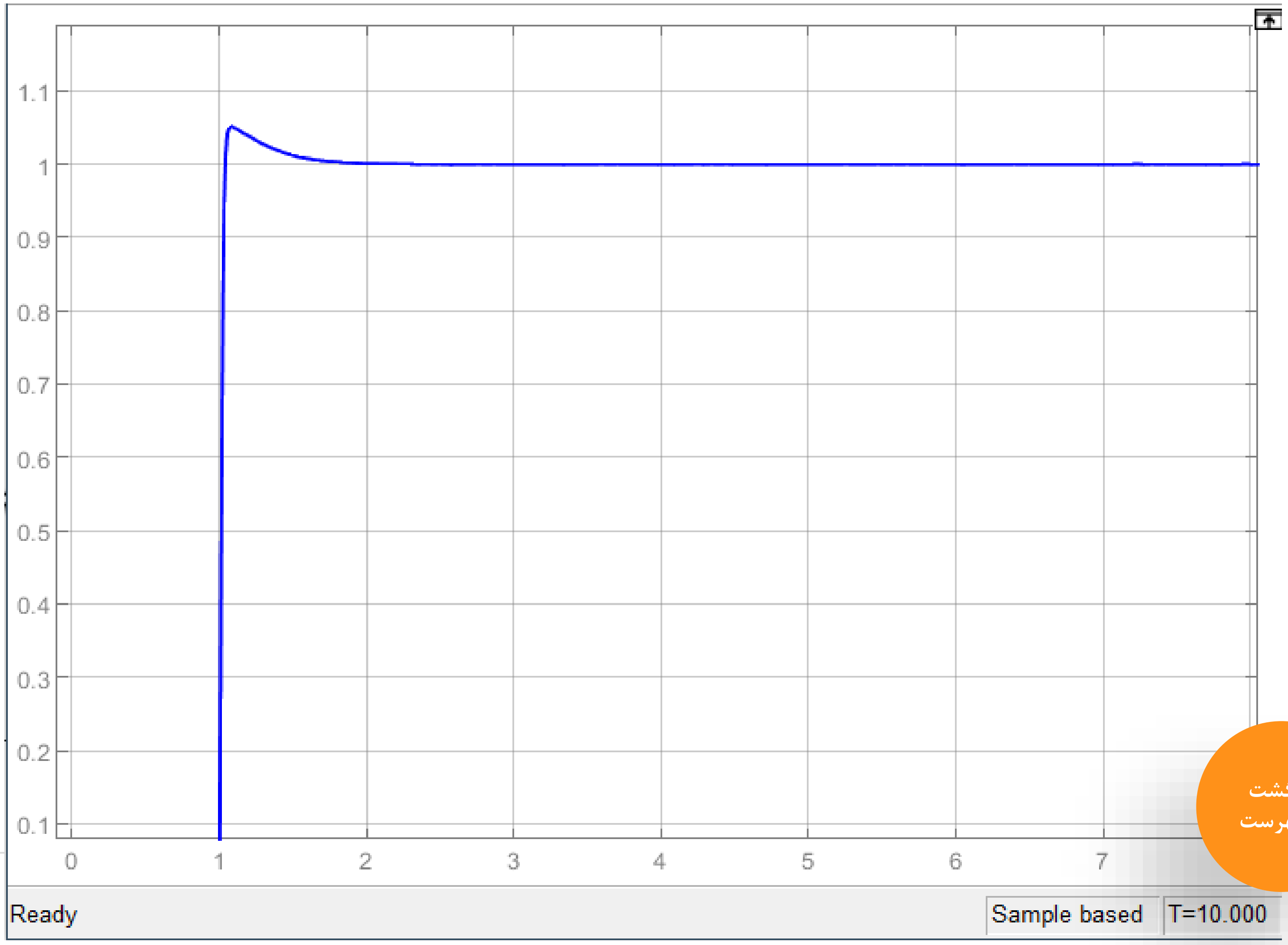
تفاوت این معادله با معادله سیستم خطی در $\cos(\phi)\cos(\chi)$ است. این دو متغیر که چرخش حول محـور x و y هستند توسط ورودی‌ها و به صورت مستقل از حرکت عمودی تعیین می‌شوند. در نتیجه فقط نیاز به افـزایش بهره با توجه به مقدار کوسینوس‌هاست و در اصل، گین کلی همان است که به‌دست آوردیم.

$K = 11349.4$

$$G_{(s)}\ CLead1\ C_{Lead2} = 11349.4\left(\frac{(s+5)(s+6)}{(s+200)(s+8)s^2}\right)$$

حال کنترل کننده ی طراحـــی شـــده را بـــه صـــورت Block diagram در ســـمیولینک اجرا میکنیم و نتیجه را مشاهده میکنیم:





بازگشت
به فهرست

بررسی جبرانساز برای فیدبک حالت:

برای کنترل z ابتدا از یک کنترل کننده PI استفاده می کنیم که اگر نیاز نبود دیگر سراغ PD نرویم چون پاسخ گذرا مطلوب است.

علت : سیستم مورد بررسی از ابتدا پاسخ ماندگار خوبی نداشت و خطای بالایی داشت .

← قطب های غالب : $s_1 = -9 + 5j$ (طبق ویژگی های سیستم خواسته شده)

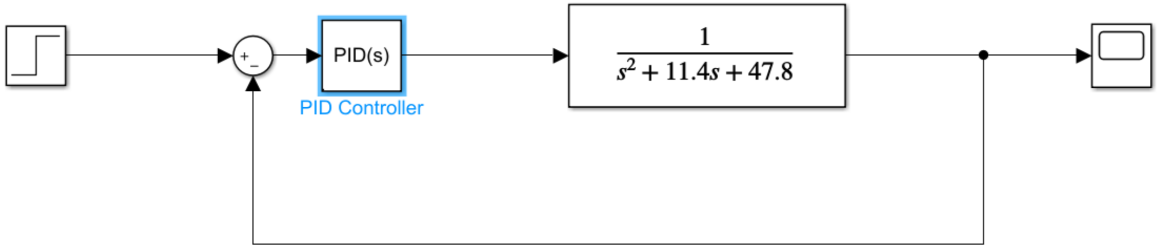
ما در اینجا از سیمولینک متلب استفاده کردیم:

Controller Parameters

	Tuned	Block
P	95.5624	1
I	486.5622	1
D	4.4359	0
N	957.7468	100

Performance and Robustness

	Tuned	Block
Rise time	0.187 seconds	107 seconds
Settling time	0.534 seconds	189 seconds
Overshoot	7.35 %	0 %
Peak	1.07	1
Gain margin	Inf dB @ Inf rad/s	Inf dB @ Inf rad/s
Phase margin	64.5 deg @ 8.38 rad/s	90.9 deg @ 0.0209 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable



پس برای جبرانساز داریم که :

$$G_c(s) = 95.56 + \frac{486.56}{s} + \frac{(4252.4)s}{s+957.75}$$

۲) برای کنترل ϕ از یک کنترل کننده PID استفاده می کنیم .

علت : مشابه کاری که در کنترل z انجام دادیم صورت پذیرفت با این تفاوت که این بار با یک تابع تبدیل سنگین رو به رو بودیم . ابتدا کنترل کننده PI قرار داده شد ولی مقدار فراجهش بالا بود . بدین منظور یک کنترل کننده ی PD به طراحی اضافه شد تا با استفاده از این کنترل کننده PID ، هم پاسخ گذرا و هم پاسخ ماندگار قابل قبول گردند .

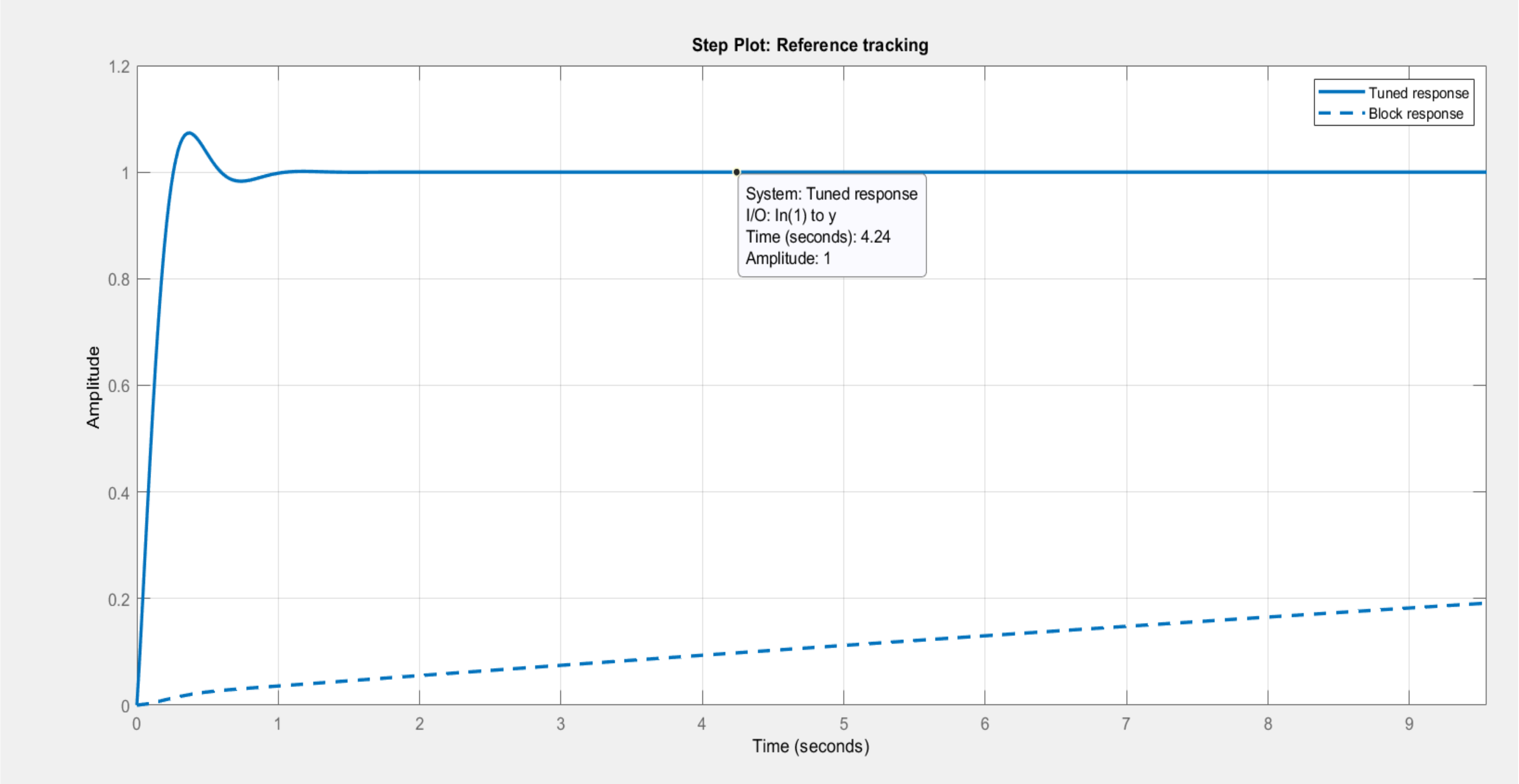
PD → $s_1 = -13 + 2j$, $G_1(s) = 22.66 + 0.97s$

PI → $s_1 = -9 + 4j$, $G_2(s) = 4.95 + \frac{41}{s}$

بدین ترتیب $G_c(s) = 4.82\,(s + 23.3)\,(1 + \frac{8.3}{s})$ به دست می آید .

اعمال به سیستم خطی:

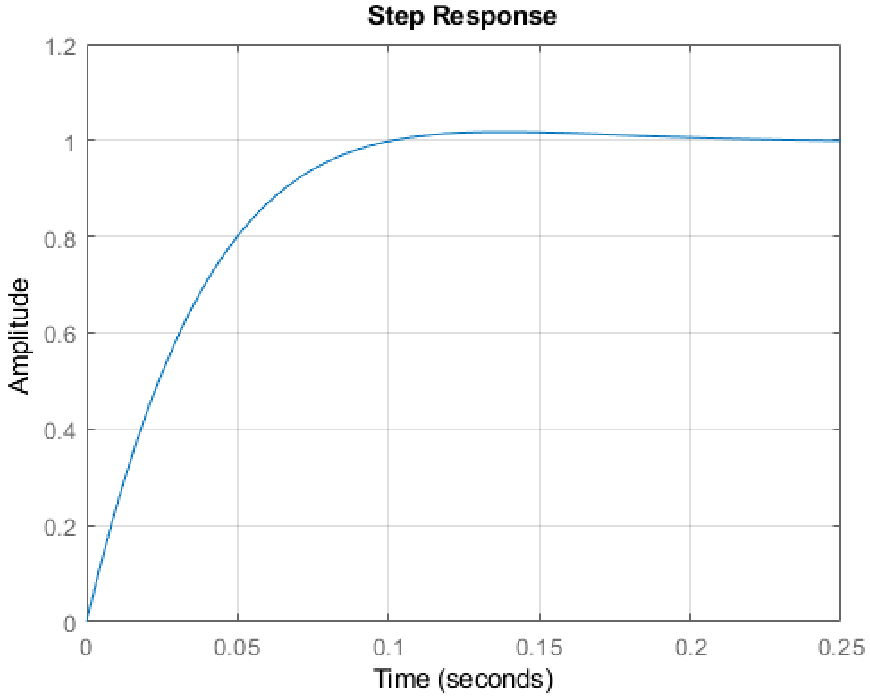
برای z



برای ϕ

Control of phi

```
clc
clear
close all
s=tf('s');
G = (5.55*s^4 + 277.5*s^3 + 5134*s^2 + 41620*s + 124900)/(s^6 + 75*s^5 + 2325*s^4 + 38130*s^3
+348000*s^2 + 1680000*s + 3370000);
G_c = 4.82*(s + 23.29)*(1 + 8.3/s);          % Controller

T = G*G_c/(1 + G*G_c);          % Closed Loop Transfer Function
step(T)
grid minor;
```



جمع‌بندی

در این پروژه به حرکت یک کوادکوپتر(کوادروتور) را بررسی کردیم و بنا به اقتضای نوع معادلات فرض کردیم که کوادکوپتر ما تنها در جهت Z و گردش حول محور X حرکت کند. برای این که حرکت واقعی‌تری از کوادکوپتر را داشته باشیم باید بقیه معادلات هم تحلیل و کنترل شوند که خارج از بحث این پروژه است.

برای کنترل حرکت هم دیدیم که حول نقطه تعادل کوادکوپتر و معادلات خطی سازی شد، رفتار سیستم به هیچ عنوان قابل قبول نبود پس با توجه به شرایط مختلف و کاربرد های مختلف میتوان از کنترلر PD و یا دو کنترلر lead استفاده کرد و نتایج قابل قبول و حتی می شود گفت که نتایج عالی، در خروجی ها ظاهر شود.

مراجع

[1] M. Walid, N. Slaheddine, A. Mohamed, and B. Lamjed, "Modeling and control of a quadrotor uav," in Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2014 15th International Conference on, pp.343–348, IEEE, 2014

[2] M. Costandin, P. Dobra, B. Costandin, "Nonlinear Model and Control of a Quadcopter" in System Theory, Control and Computing (ICSTCC),2017 (21st) International Conference on

[3] D. Dube and R. Munje, "Modeling and control of unmanned aerial vehicle," in Energy Systems and Applications, 2015 International Conference on, pp.641–644, IEEE, 2015.

مراجع

[4] D. Dube and R. Munje, “Modeling and control of unmanned aerial vehicle,” in Energy Systems and Applications, 2015 International Conference on, pp.641–644, IEEE, 2015.

[5] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, Modern Control Systems, vol.13. Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2010.

[6] https://blog.faradars.org/ /eigenvalues-and-eigenvectors

[7] https://fa.wikipedia.org/wiki/%DA%A9%D9%88%D8%A7%D8%AF%DA%A9%D9%88%D9%BE%D8%AA%D8%B1

[8] https://www.jahanrc.com/blog/what-is-quadcopter/

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

- امیر آزاد
- بنیامین بهبودی
- عماد صدیقی
- محمدرضا سرشار

- Department of Electrical Engineering

Thanks for your attention.