به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

استاد راهنما

دکتر ایمان شریفی

عنوان پروژه:

ربات پرنده بدون سرنشین (UAV)

هدف پروژه:

تحلیل عملکرد و طراحی کنترلر برای یک کوادکوپتر (کوادروتور)

اعضای گروه:

امیر آزاد 9823004

بنیامین بهبودی 9823016

محمدرضا سرشار 9823047

عماد صدیقی 9823056

فهرست محتوایی:

الف) معرفی سیستم

1. پیش‌گفتار:

کوادکوپتر یا کوادروتور یک نمونه از هلیکوپتر که با چهار موتور یا (روتور) پرواز میکند. کواد کوپترها به دلیل داشتن قدرت مانور فوق‌العاده و پروازهایی با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده برخوردارند.

این وسایل پرنده که خود زیر مجموعه ی دسته مالتی رتور ها قرار می گیرتد دارای ۶ درجه آزادی حرکت و ۴ ورودی کنترلی هستند و قابلیت های بسیار خوبی برای انجام مانور های پیچیده را دارا هستند . این وسایل دارای ساختاری شبه صلیبی می باشند که چهار ملخ در چهار گوشه ی آن قرار داشته و با تغییر سرعت ملخ ها باعث کمتر یا بیشتر شدن اختلاف فشار به وجود آمده می شوند .

در این پژوهش به مدلسازی **غیرخطی** مدل کامل دینامیکی کوادروتور پرداخته می شود. طرز کار کوادکوپتر بر أساس برخاستن و نشستن به صورت عمودی است و با رسیدن به یک وضعیت پایدار موقعیت پرواز خود را ثابت نگه دارد که این کار با کنترل و موازنه ی نیروهای تولیدی(roll , pitch , yaw) توسط چهار روتور نصب شده روی بدنه قابل انجام است. اما معادلات کنترلی و دینامیکی این وسیله کاملا رفتار های غیرخطی ای داشته است که باید آن ها را برای تحلیل ساده تر به یک رفتار ساده ی خطی تبدیل کنیم و سپس برای تامین شرایط مطلوبمان باید کنترل کننده ها یا (جبران ساز) های مناسبی برای سیستمان طراحی کنیم.

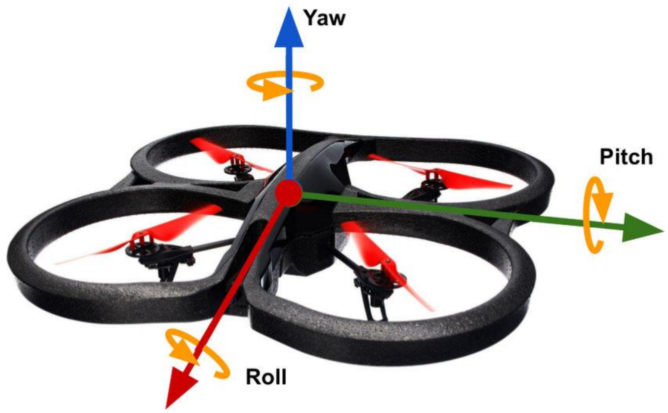
تشریح طرز کار کوادکوپتر به طور کلی:

کوادکوپتر ها همانند بسیاری دیگر از محصولات پروازی از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می کنند . در هلیکوپتر ها این وظیفه بر عهده ی ملخ اصلی است اما در کوادکوپتر ها ۴ ملخی که دارای زوایای متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند شرایط را برای بلند شدن دستگاه فراهم می کنند . کوادروتورها با بهره گیری از ۴ موتور و ملخ مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتور ها نیروی گشتاور های ایجاد شده را خنثی می کنند و همین اختلاف فشار نیروی لازم جهت برخاستن دستگاه را فراهم می کند . در واقع طراحی مهندسی محصول و قرارگیری صحیح ملخ ها باعث می شود تا این مدل پروازی این چنین نرم و پایدار پرواز کند.

نحوه ی هدایت و کنترل یک کوادکوپتر بسیار جالب توجه است بدین صورت که به عنوان مثال برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن اختلاف فشار به وجود آمده می‌شود.

برای چرخش کواد کوپتر به دور خود و به صورت درجا ، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و اختلاف فشار همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا کواد کوپتر در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد.

برای حرکت کواد کوپترها در جهت‌های مختلف (عقب ، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورها کواد کوپتر را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند .



2. کاربردهای عملی:

امروزه مولتی روتور ها و به خصوص کوادکوپتر های 4 پره به شهرت بسیار زیادی رسیده اند به گونه ای که در بسیاری از مصارف و اهداف از آن ها بهره برداری می شود . به عنوان مثال می‌توان به کاربردهای گسترده تصویر برداری هوایی ، نقشه برداری ، امور نظامی ، تفریحی ، پایش خطوط انرژی ، امداد و نجات و ... اشاره نمود.

امروزه کمتر فیلم سینمایی و یا تلویزیونی را می توان مشاهده کرد که در آن از تصاویر هوایی (هلی شات) استفاده نشده باشد . این تصاویر برای مخاطبان بسیار لذت بخش است . قبل از ظهور این محصولات بواسطه ی هلی کوپتر از بالا با یک دوربین عکاسی و فیلم برداری می شده که مشقت های بسیار زیادی نیز داشته است .

امروزه برای بسیاری از مصارف از جمله پایش ، حراست و نگهبانی ، مرزبانی ، نقشه برداری ، ساخت تیزر و فیلم ، عکاسی هوایی و ... از کوادکوپتر های دوربین دار استفاده می شود . جالب است که امروزه نظریه های مختلفی دال بر جابه جایی غذا ، وسایل و انسان ها توسط کوادکوپتر ها نیز مطرح شده که در دست آزمایش و بررسی است . از جمله کاربرد های کوادکوپتر می توان به موارد ذیل به صورت گسترده اشاره کرد :

- **موارد نظامی و اجرای قانون**
- **عکاسی**
- **روزنامه نگاری**
- **تحویل و حمل و نقل**
- **امداد و نجات**

از ویژگی هایی که باعث میشود از کوادکوپتر در موارد بالا استفاده شود میتوان به موارد زیر اشاره کرد :

1. ظرفیت حمل بار
2. سادگی ساختار وسیله

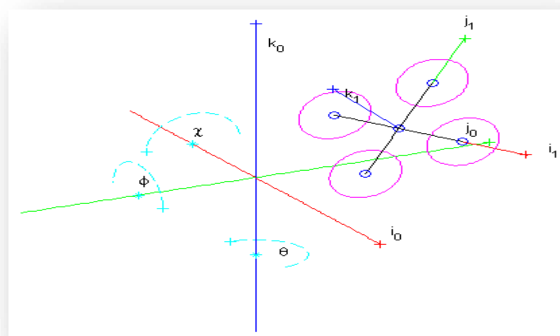
3. قابلیت مانور پذیری بالا
4. داشتن قیود کم در حرکت
5. هزینه کم تعمیر و نگهداری

3. خطی‌سازی معادلات حول نقطه تعادل:

تشکیل معادلات غیرخطی:

- **حرکت انتقالی**

x ، y و z بردارهای مکان مرکز ثقل کوادروتور هستند.



1. $\ddot{x} = \frac{\cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\chi)\sin(\theta)}{m} U1$

2. $\ddot{y} = \frac{\sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\chi)\cos(\theta)}{m} U1$

3. $\ddot{z} = -g + \frac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U1$

- **حرکت چرخشی**

4. $\ddot{\phi} = -\cos(\chi)\dot{\chi}\dot{\theta} + \frac{Ty}{I}$

5. $\ddot{\theta} = -\cos(\chi)\dot{\chi}\dot{\phi} + \frac{-\cos(\chi)\sin(\phi)\,Tx + \sin(\chi)Ty + \cos(\phi)\cos(\chi)Tz}{I}$

6. $\ddot{\chi} = -\cos(\chi)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} + \frac{\cos(\phi)\,Tx + \sin(\phi)Tz}{I}$

از رابطه 4 نتیجه می‌گیریم که در نقطه تعادل $Ty = 0$ است.

از آن جایی که چندین نقطه تعادل برای این سیستم وجود دارد؛ خطی‌سازی معادلات را می‌توان در شرایط مختلف پرواز انجام داد. (در مقاله {1} درباره شرایط مختلف پرواز و خطی‌سازی‌های مختلف به‌طور کامل بحث شده.)

فرض اولیه: $\theta = 0$

به عبارتی $\sin(\theta) = 0$

باید سمت راست 6 معادله غیرخطی صفر شود تا نقطه تعادل به‌دست آید.

1. $\frac{\sin(\phi)}{m} U1 = 0$
2. $\frac{-\cos(\phi)\sin(\chi)}{m} U1 = 0$
3. $-g + \frac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U_1 = 0$
4. $Ty=0$
5. $\frac{-\sin(\phi)\cos(\chi)Tx+\sin(\chi)Ty+\cos(\phi)\cos(\chi)Tz}{I} = 0$
6. $\frac{\cos(\phi)Tx+\sin(\phi)Tz}{I} = 0$

از این معادلات نتیجه می‌شود که در نقطه تعادل: $\sin(\chi) = 0$, $\sin(\phi) = 0$ و $U1=mg$, $Tx=Ty=Tz=0$

در نتیجه با فرض $\theta = 0$ به $\phi = 0$ و $\chi = 0$ رسیدیم و نقطه تعادل ما نقطه ی $(0,0,0)$ برای پارامتر های زاویه ای شد.

ماتریس ژاکوبین:

$$J_{14} = \frac{\cos\theta\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\sin\chi}{m} U_1$$

$$J_{15} = \frac{-\sin\theta\sin\phi + \cos\phi\cos\theta\sin\chi}{m} U_1$$

$$J_{16} = \frac{\cos\phi\cos\chi\sin\theta}{m} U_1$$

$$J_{24} = \frac{\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\sin\chi\cos\theta}{m} U_1$$

$$J_{25} = \frac{U_1}{m}(\cos\theta\sin\phi + \cos\phi\sin\chi\sin\theta)$$

$$J_{26} = \frac{U_1}{m}(-\cos\chi\cos\phi\cos\theta)$$

$$J_{34} = \frac{U_1}{m}(-\sin\phi\cos\chi)$$

$$J_{36} = \frac{U_1}{m}(-\sin\chi\cos\phi)$$

$$J_{45} = -(\cos\chi)\dot{\chi}\ddot{\theta}$$

$$J_{46} = -\dot{\theta}(-(\sin\chi)\dot{\chi} + \ddot{\chi}\cos\chi) = \dot{\theta}(\sin\chi)\dot{\chi} - \dot{\theta}\ddot{\chi}\cos\chi$$

$$J_{54} = -\ddot{\phi}(\cos\chi)\dot{\chi} + \frac{-\cos\chi\cos\phi\, Tx - \sin\phi\cos\chi\, T_z}{I}$$

$$J_{56} = \dot{\phi}(\sin\chi)\dot{\chi} - \dot{\phi}\ddot{\chi}\cos\chi + \frac{\sin\chi\sin\phi\, Tx + \cos\chi\, T_y - \cos\phi\sin\chi\, T_z}{I}$$

$$J_{64} = -\cos\chi\,\ddot{\phi}\dot{\theta} + \frac{-\sin\phi\, T_x + \cos\phi\, T_z}{I}$$

$$J_{65} = -\cos\chi\,\dot{\phi}\ddot{\theta}$$

$$J_{66} = \sin\chi\,\dot{\theta}\dot{\phi}$$

معادلات خطی‌سازی شده:

$$1.\ \ddot{x} = \frac{U1}{m}(\phi + \theta)$$

$$2.\ \ddot{y} = -\frac{U1}{m}\chi$$

$$3.\ \ddot{z} = -mg + U1$$

$$4.\ \ddot{\varphi} = \frac{Ty}{I}$$

$$5.\ \ddot{\theta} = \frac{Tz - Tx\,\varphi + Ty}{I}$$

$$6.\ \ddot{\chi} = \frac{Tx + \varphi Tz}{I}$$

4. تابع تبدیل و فضای حالت:

تبدیل لاپلاس معادلات خطی:

$$X(s) = \frac{U1}{m} \times \frac{1}{S^2}\big(\varphi(s) + \theta(s)\big)$$

$$Y(s) = -\frac{U1}{m} \times \frac{\chi(s)}{s^2}$$

$$Z(s) = \frac{-g + \frac{U1}{m}}{s^2}$$

$$\varphi(s) = \frac{\frac{Ty}{I}}{s^2}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tz}{I} - \frac{Tx}{I}\phi(s) + \frac{Ty}{I}\chi(s)\right)$$

$$\chi(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx}{I} + \frac{Tz}{I}\phi(s)\right)$$

$$\chi(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx}{I} + \frac{Ty}{I} \times \frac{Ty}{s^2 I}\right) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tx\, I\, s^2 + TzTy}{I^2 s^2}\right) = \frac{\boldsymbol{(Tx\, I)s^2 + Tz\, Ty}}{\boldsymbol{I^2 s^4}}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{Tz}{I} - \frac{Tx}{I} \times \frac{Ty}{I\, s^s} + \frac{Ty}{I}\left(\frac{(Tx\, I)s^2 + Tz\, Ty}{I^2 s^4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} \times \frac{(Tz\, I^2)s^4 - (Tx\, Ty)s^2 + (Ty\, Tx\, I)s^2 + Tz\, Ty^2}{I^3 s^4}$$

$$\boldsymbol{\theta(s) = \frac{(Tz\, I^2)s^4 + (Tx\, Ty(I-1))s^2 + Tz\, Ty^2}{I^3 s^6}}$$

$$\boldsymbol{\phi(s) = \frac{Ty}{I\, s^2}}$$

$$Z(s) = \frac{-g + \frac{U1}{m}}{s^2}$$

$$\boldsymbol{Y(s)} = -\frac{U1}{m} \times \frac{1}{s^2} \times \left(\frac{(Tx\, I)s^2 + TzTy}{I^2 s^4}\right) = \boldsymbol{\left(\frac{Tx\, I\, s^2 + TzTy}{-mI^2 s^6}\right) U1}$$

$$\boldsymbol{X(s)} = \frac{U1}{m} \times \frac{1}{s^2} \times \left(\frac{Ty}{Is^2} \times \frac{(Tz\, I^2)s^4 + (Tx\, Ty(I-1)s^2 + Tz\, Ty^2}{I^3 s^6}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{X(s)} = \boldsymbol{\left(\frac{(Ty + Tz)I^2 s^4 + (Tx\, Ty(I-1))s^2 + Tz\, Ty^2}{m\, I^3 s^8}\right) U1}$$

به دلیل پیچیدگی تحلیل متغیر ها ما در اینجا تنها به بررسی $\boldsymbol{\phi}$ و **Z** میپردازیم و در واقع حالت خاصی از آزادی عمل برای کواد کوپتر را در نظر میگیریم (توانایی جابه‌جایی در راستای **Z** و چرخش حول محور **y**)

توابع تبدیل مورد بررسی: (دقت شود که در بررسی تابع تبدیل شرایط اولیه را صفر میگیریم)

کنترل Z:

تابع تبدیل: $Hz(s) = \frac{1}{s^2}$ ← این را به عنوان ورودی به سیستم میگیریم $Z(s) = \frac{-g+\frac{U1}{m}}{s^2} \rightarrow \boldsymbol{v} = -g + \frac{U1}{m}$

و برای فضای حالت مدل زیر را می توان ارائه داد :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_{z\text{-}eq} \qquad , \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

درنتیجه مقادیر مورد نیازمان از سیستم به شرح زیر در می آید :

<u>مقادیر ویژه</u> : $\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 0$

<u>صفر ها</u> : سیستم صفری ندارد .

<u>قطب ها</u> : $s_1 = s_2 = 0$

<u>نوع سیستم</u> : نوع دوم

<u>وجود تاخیر</u> : بدون تاخیر (تابع تبدیل مولفه نمایی ندارد)

<u>کمینه فاز بودن</u> : مینیمم فاز (صفر و در نتیجه صفر سمت راست نداریم پس نامینیمم فاز نیست)

کنترل $\boldsymbol{\phi}$:

تابع تبدیل : $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{Ty}}{\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{s}^2} \rightarrow \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{s}) = (\frac{\frac{1}{I}}{s^2})\boldsymbol{Ty} \rightarrow H\phi(s) = \frac{14705.88}{s^2}$

مقدار I از مرجع (1) برداشته شده است.

و برای فضای حالت زوایا، رابطه ی زیر را بدست می آوریم:

$$\mathbf{u} = [\theta\ ,\chi\ ,\phi\ ,\dot{\theta}, \dot{\chi}\ , \dot{\phi}\ ]$$

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} O(3\times3) & I(3\times3) \\ O(3\times3) & O(3\times3) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} & O(3\times3) & \\ 0 & 0 & 5.5 \\ 11.11 & 0 & 0 \\ 0 & 11.11 & 0 \end{bmatrix} T = 0$$

$$y = [\, I(3\times3)\,,\, O(3\times3)\,]\, u$$

بدین ترتیب سایر مقادیر مورد نیازمان از سیستم به صورت زیر خواهد بود :

مقادیر ویژه : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$

صفر ها : سیستم صفری ندارد .

قطب ها : $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0$

نوع سیستم : نوع دوم

وجود تاخیر : بدون تاخیر(تابع تبدیل مولفه نمایی ندارد)

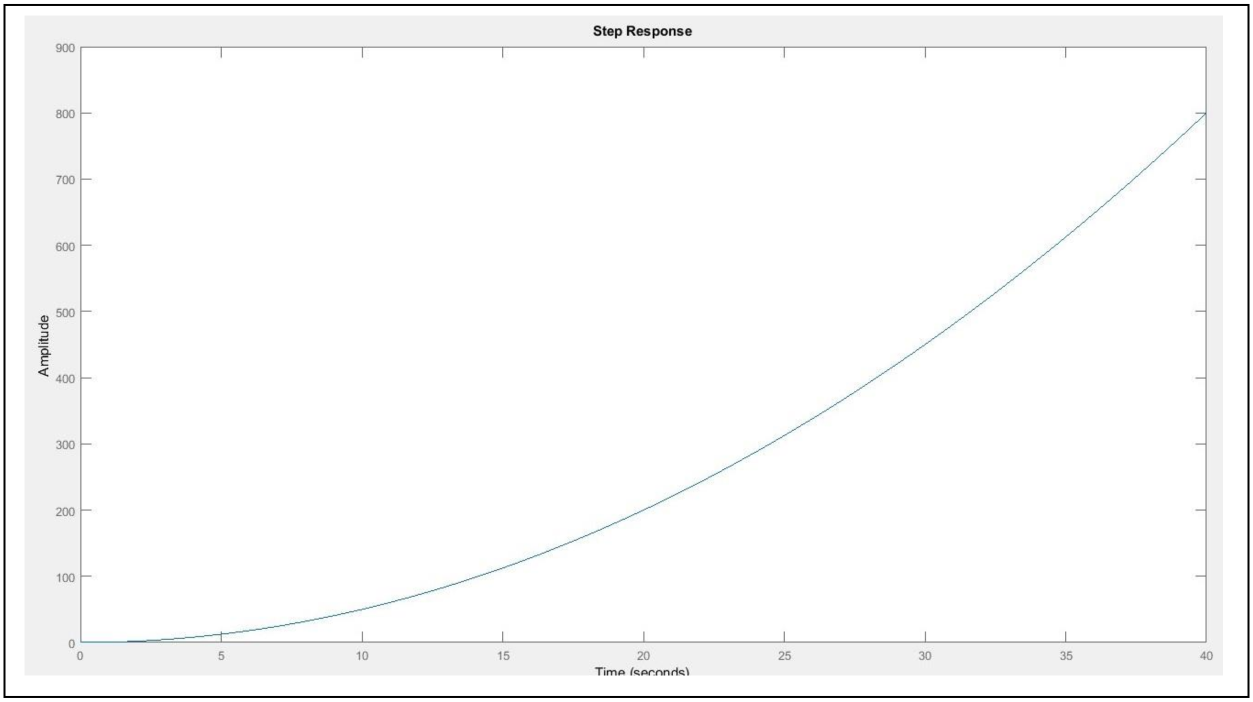
کمینه فاز بودن : مینیمم فاز(صفر و در نتیجه صفر سمت راست نداریم پس نامینیمم فاز نیست)

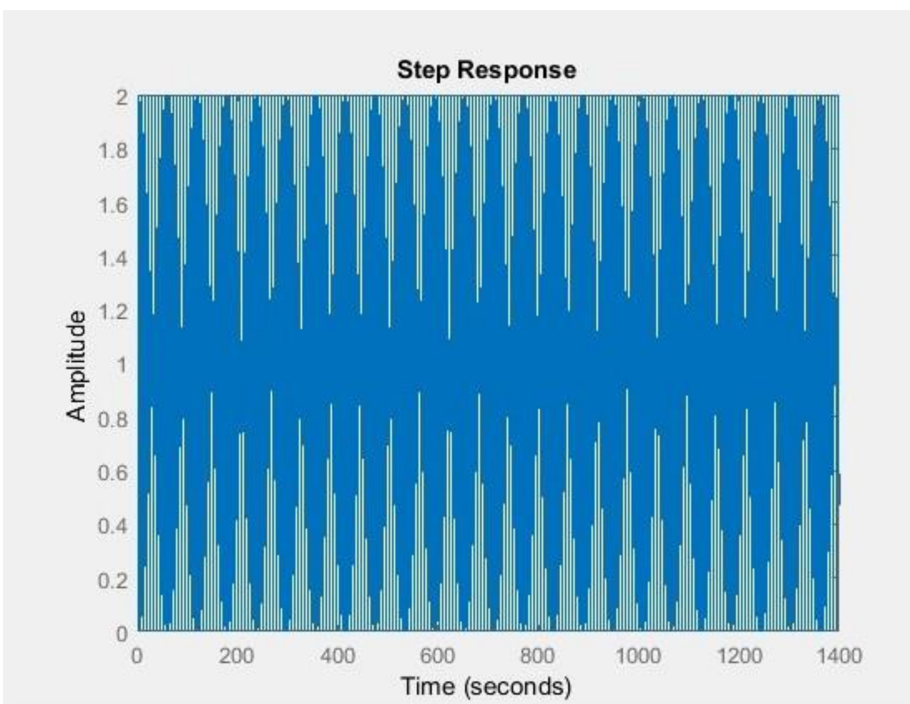
5. بررسی سیستم در حوزه زمان:

سیستم دارای تاخیر نیست، پس به تقریب پاده نیز نیاز نداریم.

پاسخ حالت ماندگار پله، شیب و سهمی بی‌نهایت می‌شود زیرا قطب مکرر روی مبدا داریم و سیستم ناپایدار است.

اگر سیستم را در فیدبک واحد قرار بدهیم، سیستم نوسانی می‌شود زیرا دوقطب ناپایدار روی محور موهومی داریم. پس بررسی سیستم در حوزه زمان را به بعد از گذاشتن کنترل‌کننده PID موکول می‌کنیم.





6. کاهش مرتبه

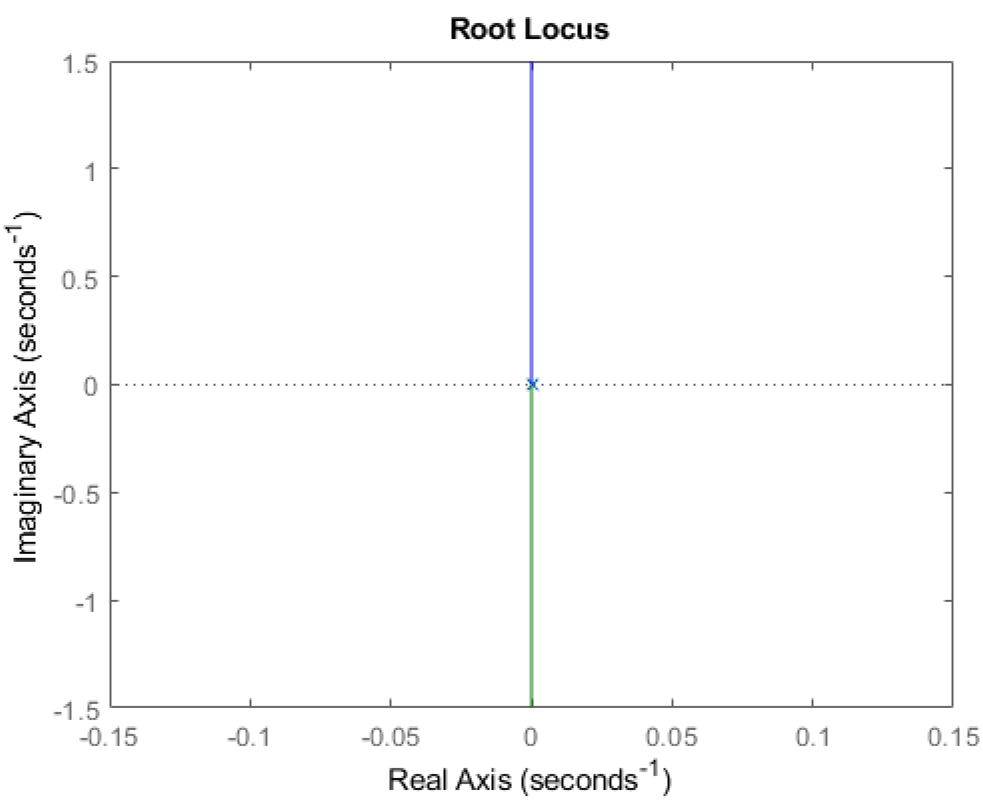
با توجه به مرتبه دو بودن سیستم ما، نیازی به کاهش مرتبه نیست.

7. مکان هندسی

رسم مکان هندسی:

Plots for Z

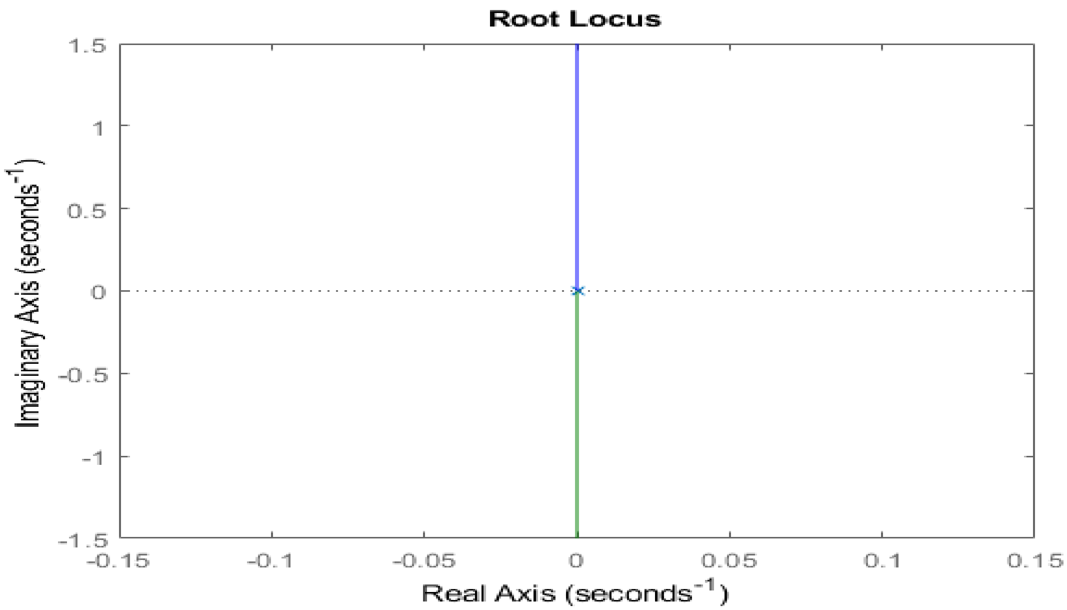
```
s = tf('s');
G1 = 1/s^2;
% F=feedback(G1,1);
% Root Locus
figure(1)
rlocus(G1);
```



Plots for phi

```
s = tf('s');
G2 = 14705.88/s^2;
% F=feedback(G2,1);
% Root Locus
```

```
figure(2)
rlocus(G2);
```



همان طور که مشاهده میشود، مکان هندسی رسم شده هم برای کنترل Z و هم برای کنترل ϕ یکسان می باشد . چون دارای تابع تبدیل های مشابهی می باشند .

محدوده پایداری:

سیستم حلقه باز به دلیل داشتن دو قطب(ریشه مکرر) روی محور موهومی(مبداء) ناپایدار است و باید در ادامه با بررسی حالت فیدبک دار این موارد را بررسی کنیم.

- ✓ در پاسخ به این سوال که « آیا می توان کنترل کننده ای طراحی کرد که سیستم را تحت هر شرایطی پایدار کند ؟» باید گفت که هدف نهایی پروژه طراحی جبرانساز ها به منظور کنترل سیستم و پایدار نگه داشتن آن در کنار برآورده کردن ویژگی های مدنظر است. در نتیجه بستگی به هر شرایطی که مد نظر باشد و طبق بده بستان هایی که با توجه به کاربرد ما تعیین میشوند میتوان کنترل کننده مناسب طراحی کرد تا سیستم پایدار باشد.

8. پارامتر های حوزه زمانی

فعلا برای این سیستم این بررسی بی فایده خواهد بود زیرا مقدار خطا بی نهایت است، در نتیجه ما پس از بررسی حالت فیدبک این مقادیر را بدست خواهیم آورد.

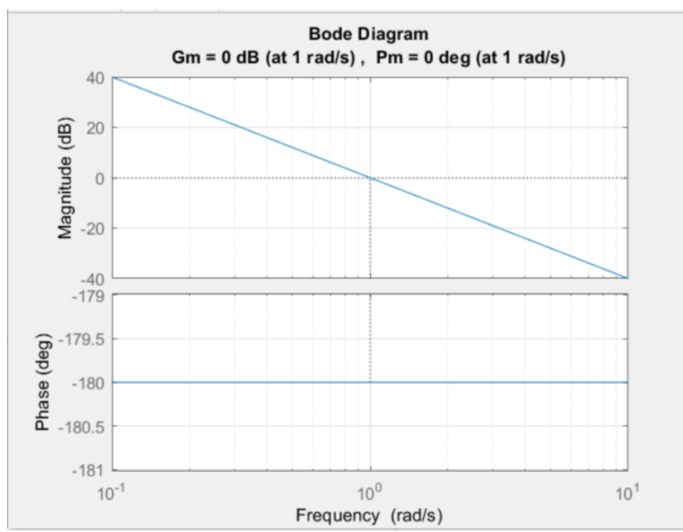
9 –و 10. نمودار بودی و نایکوئیست

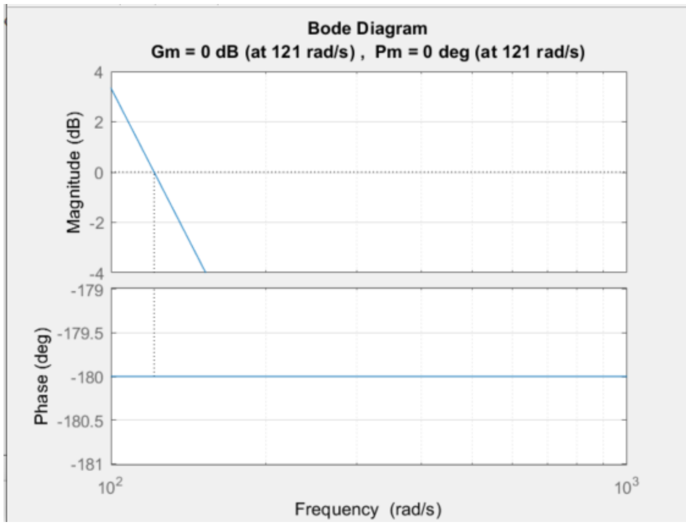
نمودار بودی :

Bode for Z and phi

```
s=tf('s')

T_phi=14705.88/s^2;
T_z=1/s^2;

%z Bode Diagram
margin(T_z)
grid on

figure(2)
%phi Bode Diagram
margin(T_phi)
grid on
```

Z Bode Diagram





phi Bode Diagram

از روی نمودار های بود بالا مقادیر حاشیه فاز(PM) و حاشیه بهره(GM) به صورت زیر بدست می آید:

1)برای کنترل z:

PM= صفر , GM=صفر

2)برای کنترل ∅:

PM= صفر , GM=صفر

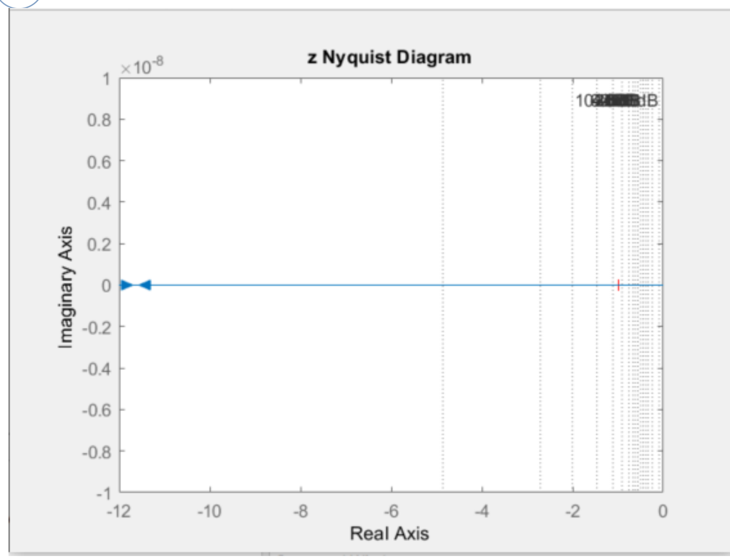
پس نتیجه میگیریم که در تابع تبدیل حلقه بسته سیستم پایدار نیست و هنگامی که در فیدبک واحد قرار میگیرد به پایداری مرزی می رسیم

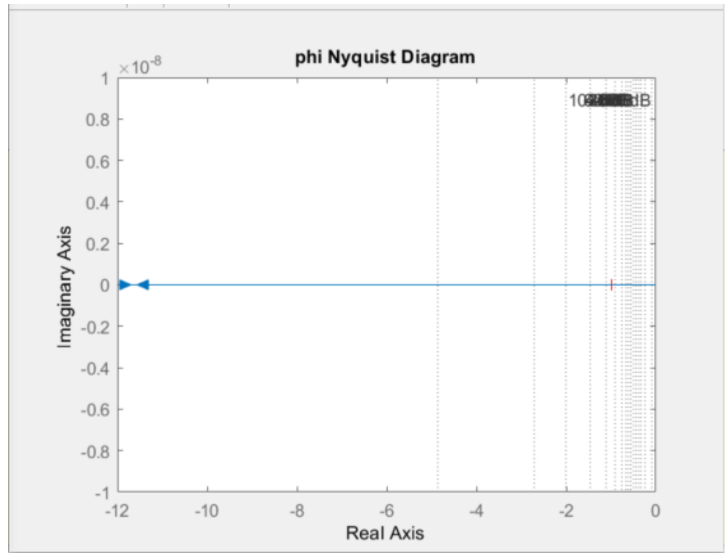
نمودار نایکوئیست :

Nyquist for z and phi

```
s=tf('s')
T_phi=14705.88/s^2;
T_z=1/s^2;

figure(3)
nyquist(T_z)
title('z Nyquist Diagram')
grid on
```

```
figure(4)
nyquist(T_phi)
title('phi Nyquist Diagram')
grid on
```



بررسی رفتار سیستم در فرکانس های بالا و پایین:

در رفتار فرکانسی همان طوری که در نمودار ها هم مشاهده کردیم سیستم در فرکانس های بالا به خوبی عبور نمی دهد و اگر معیار 3db را هم در نظر بگیریم کامل مشاهده می شود که سیستم ما رفتار پایین گذری از خود نشان می دهد.

و چون پارامتر ها را قرار است بعد از فیدبک بررسی کنیم آنجا دقیق تر بررسی میکنیم

11. کنترل‌کننده PID

هدف از گذاشتن این کنترل‌کننده ایجاد پایداری برای سیستم است.

قطب مطلوب را با شرایط زمان نشست کمتر از 0.8 ثانیه و زاویه 45 درجه می‌یابیم. به نقطه s=-5+5j می‌رسیم.

ورودی پله در نظر می‌گیریم.

در ابتدا کنترل‌کننده PD را طراحی می‌کنیم.

$C_1(s) = K_D\ (s+Z_{PD})$

دو صفر در مبدا داریم. اعمال شرط زاویه برای قطب $-5+5j$

$\theta_z - 2(135) = -180 \quad \rightarrow \quad \theta_z = 90 \quad \rightarrow \quad Z_{PD} = 5 \quad \rightarrow \quad C_1(s)=K_D(s+5)$

اعمال شرط اندازه:

$|G_z(s)\ C_1(s)| = 1 \quad (s = -5 + 5j) \quad \rightarrow \quad \frac{5\,K}{50} = 1 \quad \rightarrow \quad K_D = 10$

$\rightarrow \quad C_1(s) = K_D\ (s+Z_{PD}) = \mathbf{10\ (\ s + 5\ )}$

حالا می‌خواهیم کنترل‌کننده PD را به کنترل‌کننده PID تبدیل کنیم.

$C_1(s) = K_D\ (s+Z_{PD})$

ابتدا یک قطب در مبدا قرار می‌دهیم و سپس شرط زاویه را برای پیدا کردن صفر جدید اعمال می‌کنیم.

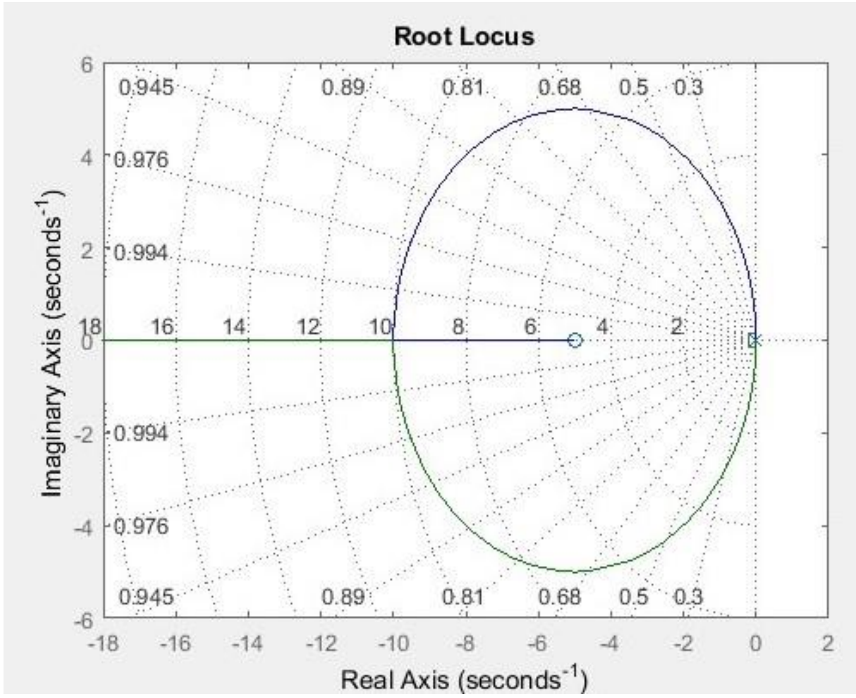
$\theta_z\ \ -3(135) + 90 = 180 \quad ➔ \quad \theta_z\ \ = 135$

صفر کنترل‌کننده روی قطبش افتاد و این یعنی عملا اضافه‌کردن کنترلر PI بی‌فایده است. این نتیجه کاملا مطابق انتظار بود زیرا سیستم ما دو انتگرال‌گیر دارد و دیگر نیازی به افزایش نوع آن وجود ندارد.

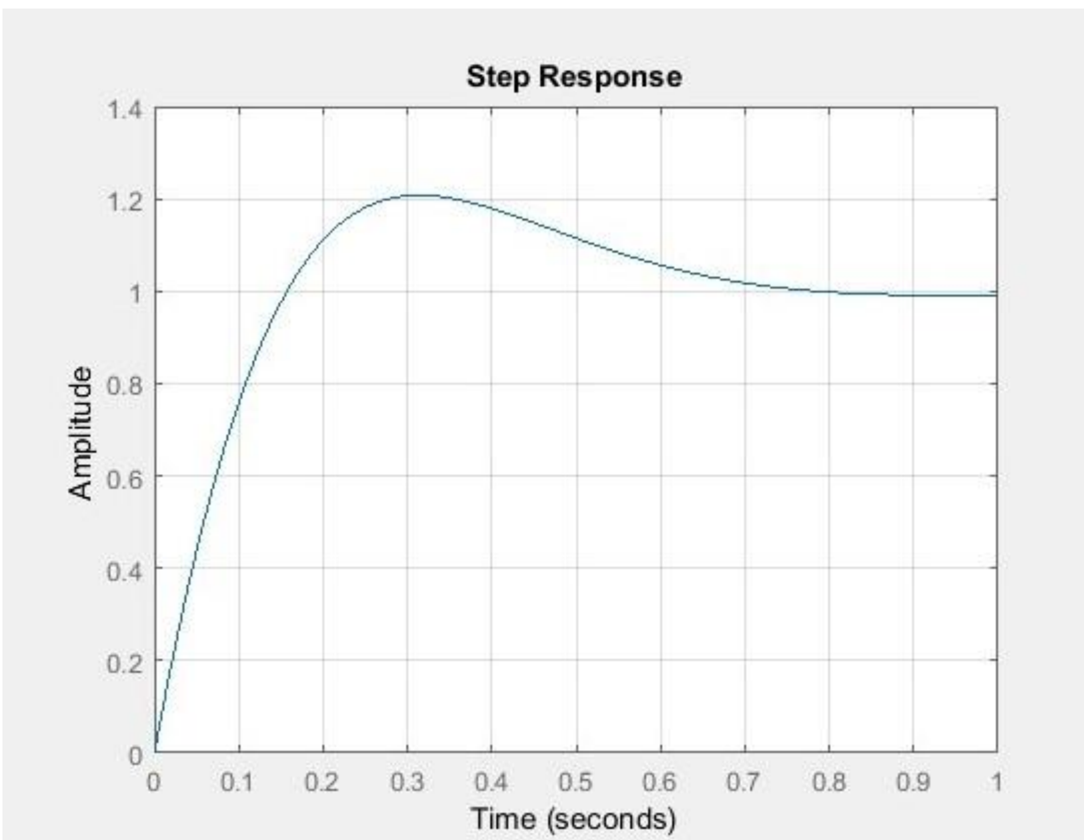
طبق شکل‌های صفحه بعد:

اورشوت = 21 درصد

زمان نشست = 0.73 ثانیه



part11 RootLocus for PID



part11 step response PID

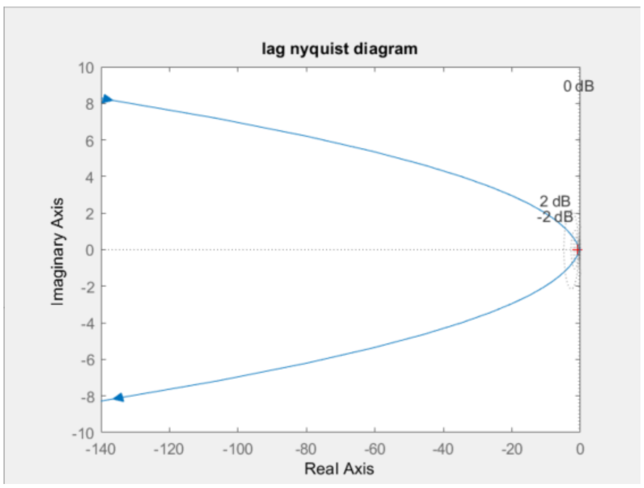
```
close all;
```

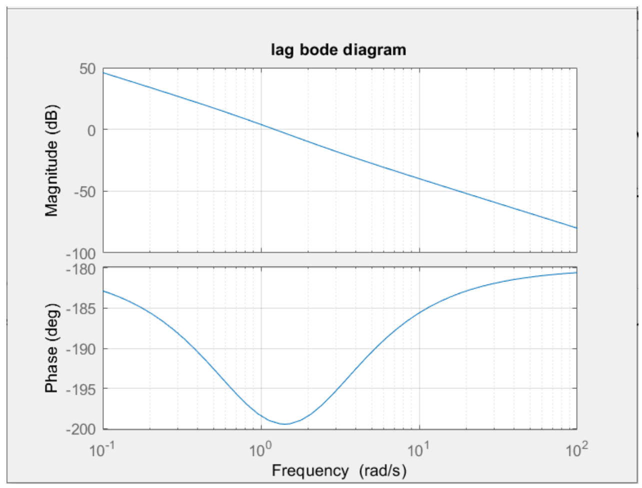
```
clear all;
clc;

s=tf('s');
g=(1)/(s)^2;
c=(s+5);

k1=1;
k2=10;

figure;
rlocus(k1*g);
grid on

figure;
rlocus(k2*g*c);
grid on

T1=k1*g/(1+k1*g)
figure;
step(T1);

T2=k2*c*g/(1+k2*c*g)
figure;
step(T2);
grid minor
```

12. بررسی کنترل‌کننده موردنیاز با کمک نمودار نایکوئیست و بودی

در قسمت 9 نمودار های بود و نایکویست را مشاهده کردیم و از بررسی نمودار نایکوئیست که نقطه(-1.0) را یکبار در جهت ساعتگرد دور میزند دریافتیم که سیستم ناپایدار است.

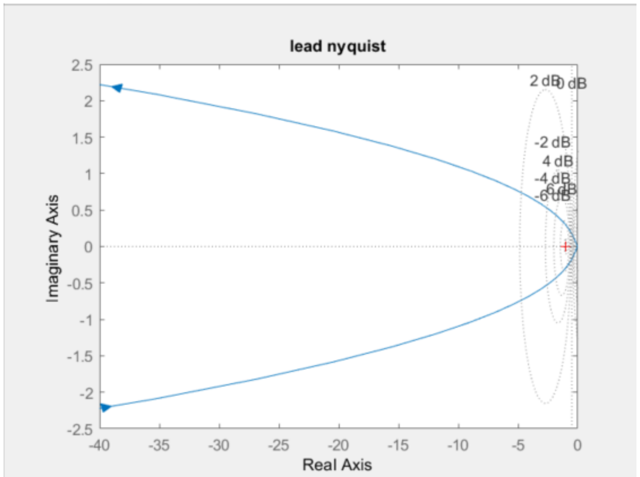
اگر ما در سیستم ، یک کنترل کننده lag قرار بدهیم نمودار نایکوئیست همچنان نقطه (-1.0) را یکبار در جهت ساعتگرد دور میزند و برای بود هم میخواهیم که حاشیه بهره و فاز مثبت شوند(برای سیستم پایدار حاشیه فاز و بهره هر دو مثبت است) ولی کنترلر lag باعث منفی شدن حاشیه فاز می شود. مثلا اگر یک کنترلر lag $\frac{s+2}{s+1}$ قرار بدهیم نمودار نایکوئیست و بود آن به صورت زیردر می آید:

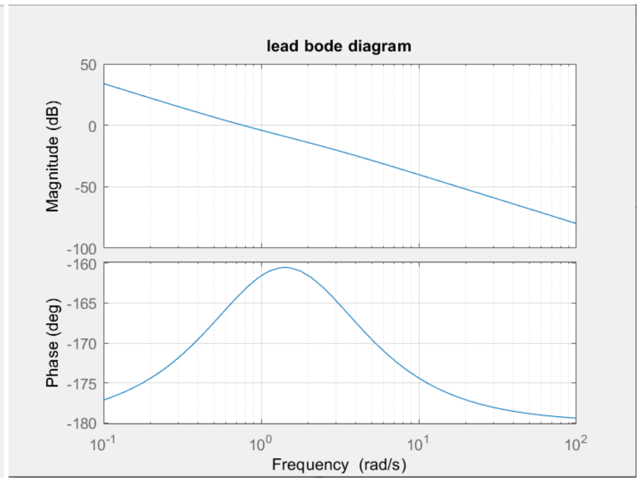





```
%% lag controller

s=tf('s')

G=1/s^2;
c=(s+1)/(s+2);

nyquist(G*c)
grid on

figure(2)
bode(G*c);
grid on
```

اما اگر در سیستم یک کنترل کننده lead قرار دهیم نمودار نایکویست ما نقطه (-1.0) را در جهت ساعتگرد دورنمی زند و نمودار فاز بود آن یک پیک به سمت مثبت بالا میزند که باعث مثبت شدن حاشیه فاز ما می شود:






```
%% lead controller
s=tf('s')

G=1/s^2;
c=(s+1)/(s+2);

figure(3)
nyquist(G*c)
title('lead nyquist')
figure(2)
bode(G*c);
title('lead bode diagram')
grid on
```

پس طبق بررسی های بالا باید از کنترل کننده lead استفاده کنیم و چند دلیل دیگر هم برای استفاده کنترلرlead هم عبارت است از:

1. سیستم ما به صورت$\frac{1}{s^2}$ است که یعنی داخل سیستم ما دوتا انتگرال گیر داریم و پس نیازی به کنترلر lag نداریم

2. در قسمت قبل دیدیم که کنترل کننده PD تمام نیاز های ما را برآورده کرد و از طرفی می دانیم که کنترلر PD نوع خاصی از کنترلر های lead است که قطب آن در بی نهایت قرار دارد پس کنترلر مورد نیاز ما در اینجا از بین lead , lag , lead-lag قطعا lead است.

3. باز هم در قسمت قبل دیدیم که سیستم ما ناپایدار است و وقتی فیدبک واحد به آن اعمال می‌کنیم به پایداری مرزی با نوسانات زیاد و اورشوت 100 درصد در نوسان میرسیم و یکی از کار های اصلی ما در کنار پایدار کردن کم کردن درصداورشوت(o.p.) است که این نیاز ما را کنترل کننده lead برآورده می کند

13. فیدبک حالت:

حال برای رسیدن به سرعت مناسب (زمان نشست کمتر از 0.8 ثانیه) و با کمک مدل دینامیکی و مدل فضای حالت سیستم ، یک فیدبک حالت برای سیستم طراحی می کنیم .

برای کنترل z طبق شرایط خواسته شده قطب های سیستم را به - 5.71 + 3.9i **انتقال می دهیم . در نتیجه تابع تبدیل جدید سیستم به صورت زیر در می آید :**

GK(s) = s^2 + 11.4*s + 47.8

از روی تابع تبدیل جدید سیستم می توان مقادیر فیدبک حالت و ماتریس حالت جدید سیستم را به شرح زیر درآورد :

فیدبک حالت (K) = [47.8, 11.4] و ماتریس حالت جدید: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -47.8 & -11.4 \end{bmatrix}$

For z

```
clc
clear
close all
syms s;

A=[0,1;0,0];
B=[0;1];
C=[1,0];
phi=(s*eye(2)-A)^-1
% CM=phi*B
% CM1=simplify(CM)
TF=C*phi*B
% myctrb1=[B,A*B]
myctrb=ctrb(A,B)
rctrb=rank(ctrb(A,B))
```

```
phi =

[ 1/s, 1/s^2]
[   0,   1/s]


TF =
 1/s^2


myctrb =

     0     1
     1     0


rctrb =

     2
```

so it is full rank and as a result controlable

p.o.

```
clc
syms zi w s
A1=100*exp((-zi*pi)/(sqrt(1-zi^2))); % if you want "p.o" so you should use this eq by yourself in command window
B1=solve(A1==1,zi);
c=vpa(B1,3) % c = zita
```

Desired poles

```
Ts= .7; % settling time
zita_omega_n = 4/Ts; % 2 percent standard
w=vpa(zita_omega_n/c(1),3)
desired_s=vpa(-zita_omega_n+j*w*sqrt(1-c(1)^2),3)
```

```
w =

6.92


desired_s =

- 5.71 + 3.9i

- 5.71 - 3.9i
```

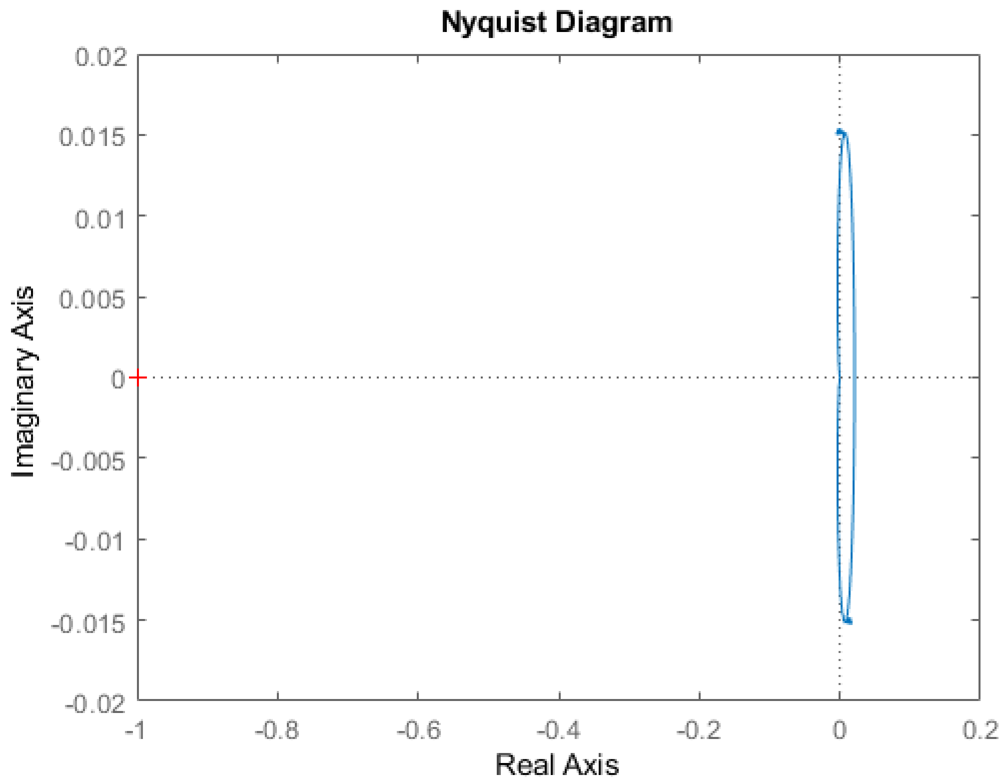
ackermann's formula

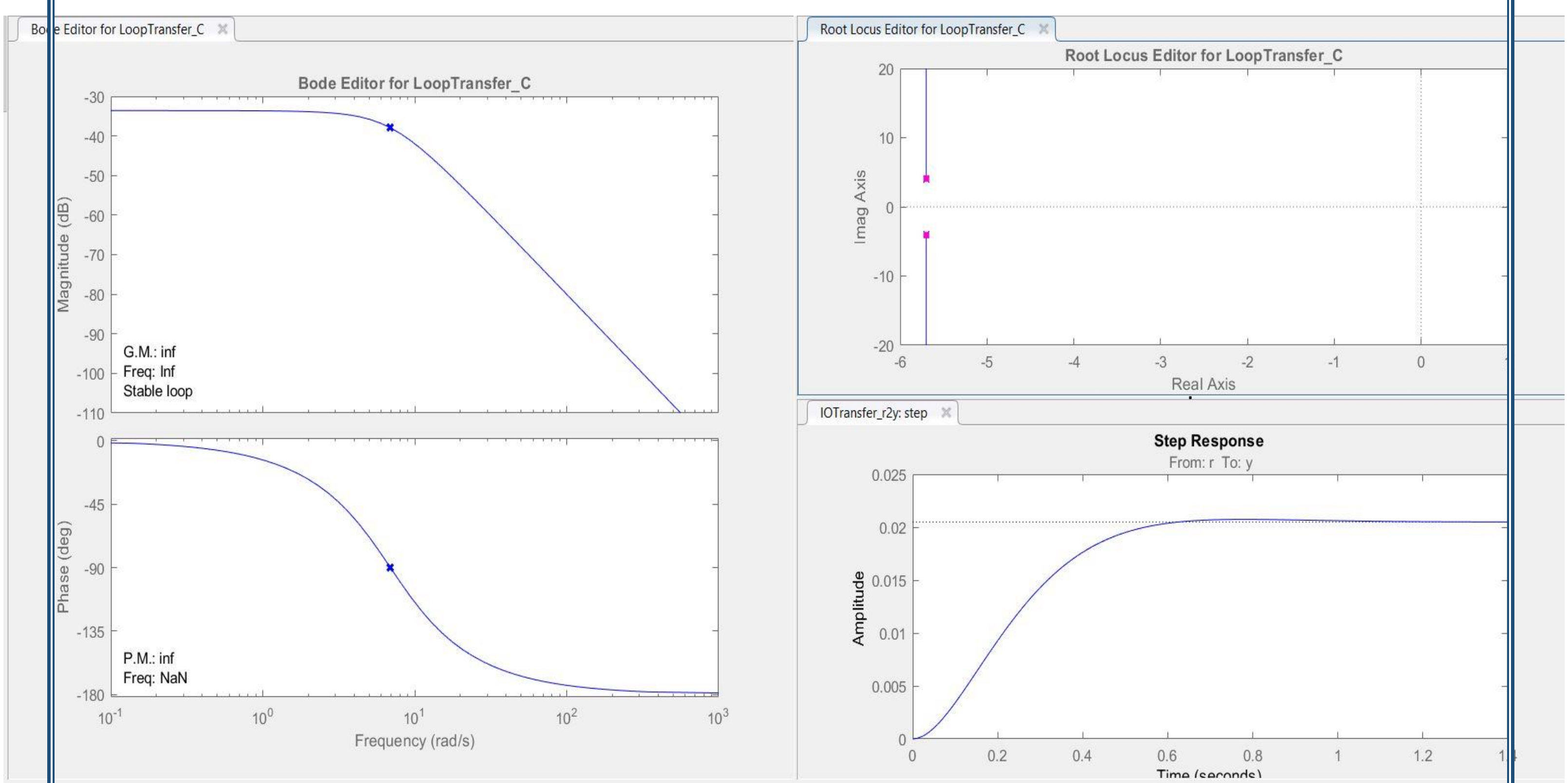
```
delta=vpa(s^2+2*c(1)*w*s+w^2,3)
co=vpa(fliplr(coeffs(delta)),3);
delta_prime=vpa(co(1)*(A^2)+co(2)*A+co(3)*eye(2),3);
% delta_prime = subs(delta,s,A);
k=vpa([0 1]*((myctrb)^-1)*delta_prime,3)  % ackerman's formula
```

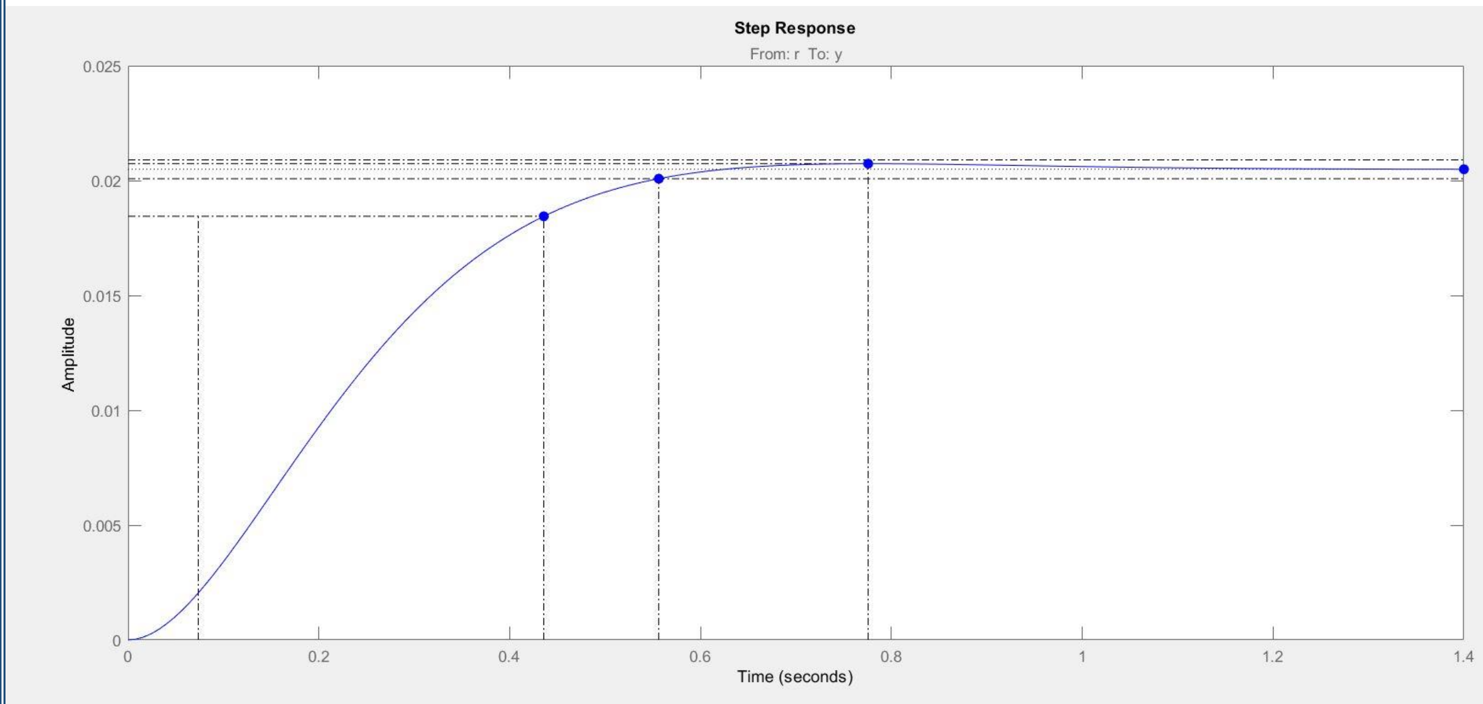
```
delta =

s^2 + 11.4*s + 47.8


k =

[ 47.8, 11.4]
```

Related plots

```
s=tf('s');
tfn=1/(s^2 + 11.4*s + 47.8);
figure(1)
nyquist(tfn)
% sisotool(tfn)
```


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2


Bode Editor for LoopTransfer_C
Magnitude (dB)
G.M.: inf
Freq: Inf
Stable loop
Phase (deg)
P.M.: inf
Freq: NaN
Frequency (rad/s)
Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
IOTransfer_r2y: step
Step Response
From: r To: y
Amplitude



درصد فراجهش (P.O.) : 1.19%

زمان اوج (T_r) : 0.362 s به مقدار نهایی خود می رسد .

زمان نشست (T_s) : 0.556 s

خطای حالت دائم (e_{ss}) : 98%

2) برای کنترل $\boldsymbol{\phi}$ با استفاده از فیدبک حالت ، مقادیر ویژه ی سیستم را به $[-10 \quad -10 \quad -10 \quad -15 \quad -15 \quad -15]$ تبدیل می کنیم .

ماتریس فیدبک حالت:

$$(K_a) = \begin{bmatrix} 0 & 13.5 & 0 & 0 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 13.5 & 0 & 0 & 2.25 \\ 27.03 & 0 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب تابع تبدیل پس از فیدبک حالت به صورت زیر در می آید :

$$G_K(s) = \frac{5.55s^4+277.5s^3+5134s^2+41620s+124900}{s^6+75s^5+2325s^4+38130s^3+348000s^2+1680000s+3370000}$$

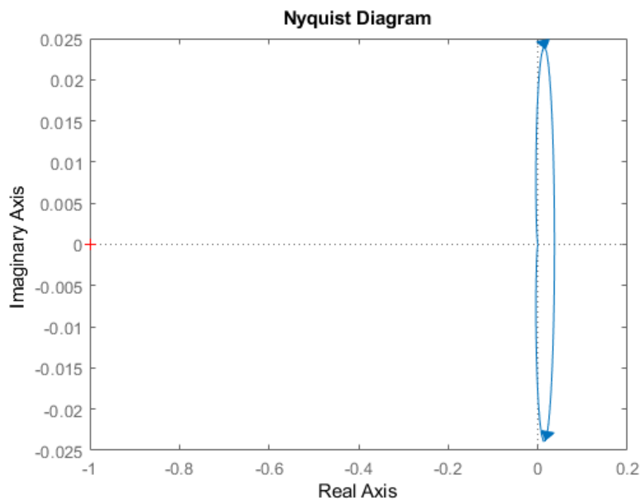
For phi

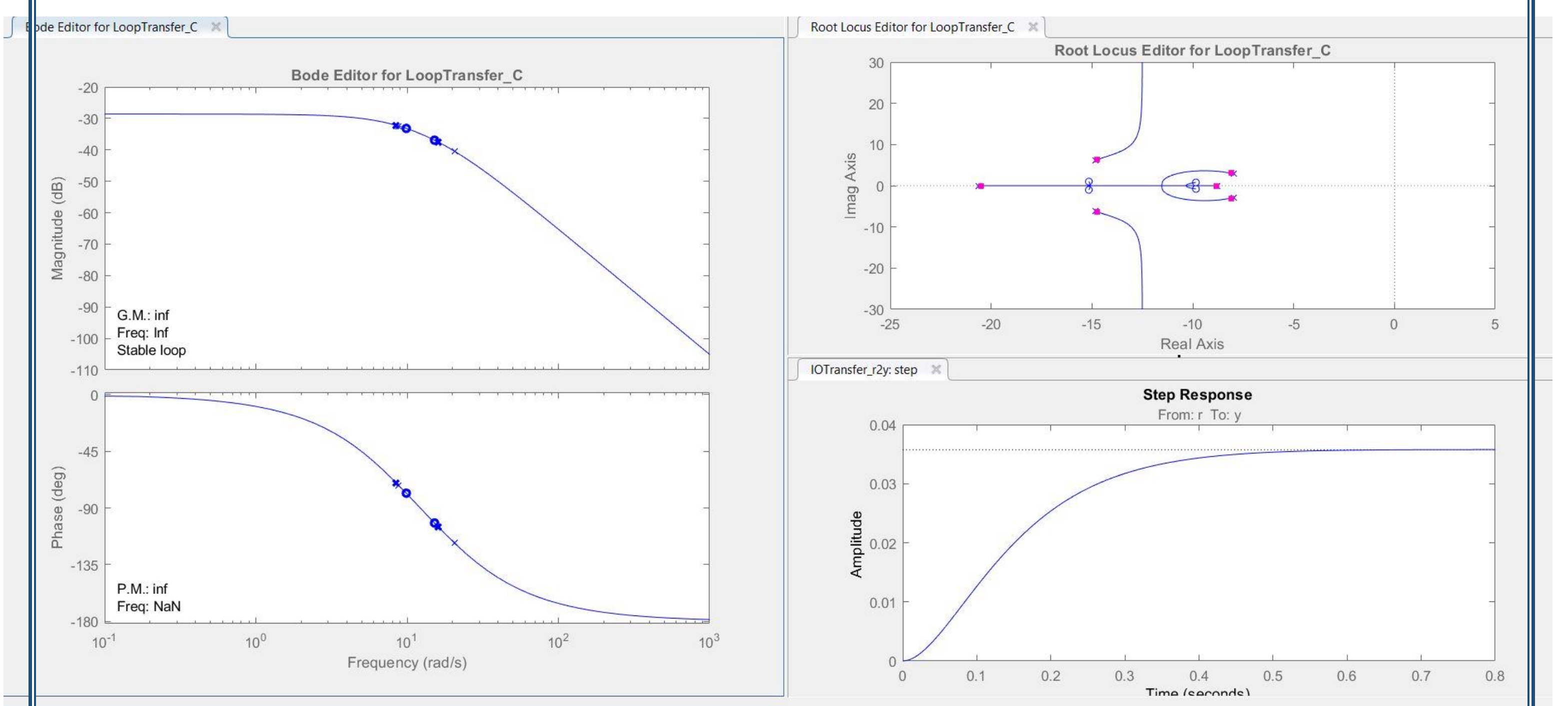
```
clc
clear
close all
syms s;
A=[zeros(3),eye(3);zeros(3),zeros(3)];
B=[zeros(3);0,0,5.5;11.11,0,0;0,11.11,0];
C=[eye(3),zeros(3)];
phi=(s*eye(6)-A)^-1;
TF=C*phi*B;
myctrb=ctrb(A,B)
rctrb=rank(ctrb(A,B))
```

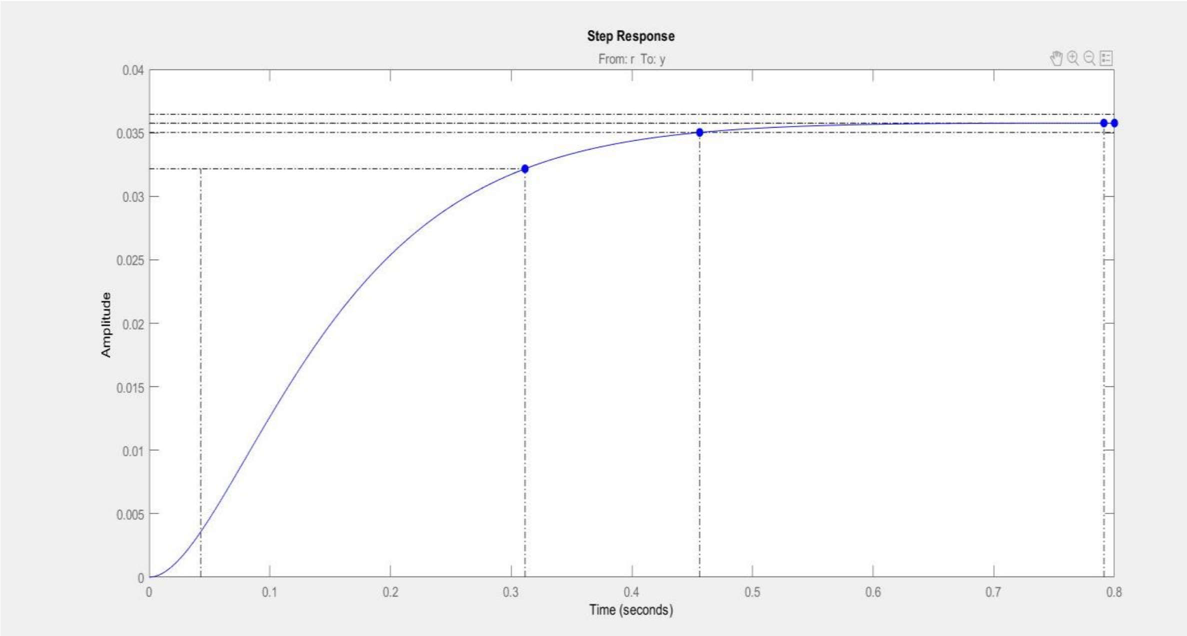
```
myctrb =

  Columns 1 through 7

         0         0         0         0         0    5.5000         0
         0         0         0   11.1100         0         0         0
         0         0         0         0   11.1100         0         0
         0         0    5.5000         0         0         0         0
   11.1100         0         0         0         0         0         0
         0   11.1100         0         0         0         0         0

  Columns 8 through 14

         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 15 through 18

         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0


rctrb =

     6       % so it is full rank and as a result controlable then we can say that there exist a k
```

Related plots

```
s=tf('s');
tfn=(5.55*s^4 + 277.5*s^3 + 5134*s^2 + 41620*s + 124900)/(s^6 + 75*s^5 + 2325*s^4 + 38130*s^3
+348000*s^2 + 1680000*s + 3370000);
figure(1)
nyquist(tfn)
% sisotool(tfn)
```







درصد فراجهش (.P.O) : 0.07%

زمان اوج (T_r) : 0.269 s به مقدار نهایی خود می رسد .

زمان نشست (T_s) : 0.456 s

خطای حالت دائم (e_{ss}) : 96.4%

طراحی جبرانساز های لازم برای فیدبک حالت را پس از بررسی جبرانساز برای *lead , lag* انجام میدهیم.

14و 15 . طراحی کنترل‌کننده Lead

- مشخصات مطلوب:

1. **T_s < 0.8**
2. **PM > 45**
3. **GM > 12(dB)**
4. **Steady-State Err < 1%**
5. **Overshoot < 5%**

شرط اورشوت کمتر از **5** درصد را خودمان اضافه کردیم زیرا کوادکوپتر در کاربردهای حساس نظامی استفاده می‌شود و هم‌چنین در فیلم‌برداری‌های غیرنظامی هم اورشوت بالا قابل قبول نیست. در واقع هیچ لرزشی قابل قبول نیست اما ما به وسیله کنترلر نمی-توانیم آن را به صفر برسانیم و در عمل از لرزه گیر هم برای دوربین کوادکوپترها استفاده می‌شود تا لرزش به صفر میل کند.

$$\left.\begin{array}{l} \text{زمان نشست } \xi\omega > 5 \\ \text{شرط اورشوت } \theta < 45^\circ \end{array}\right\} \quad S=-5+5j \rightarrow Z_{Lead} = -5$$

$$90 - 2 \times 135 - \theta p = -180$$

$$C1(S) = K\frac{s+5}{s+200}$$

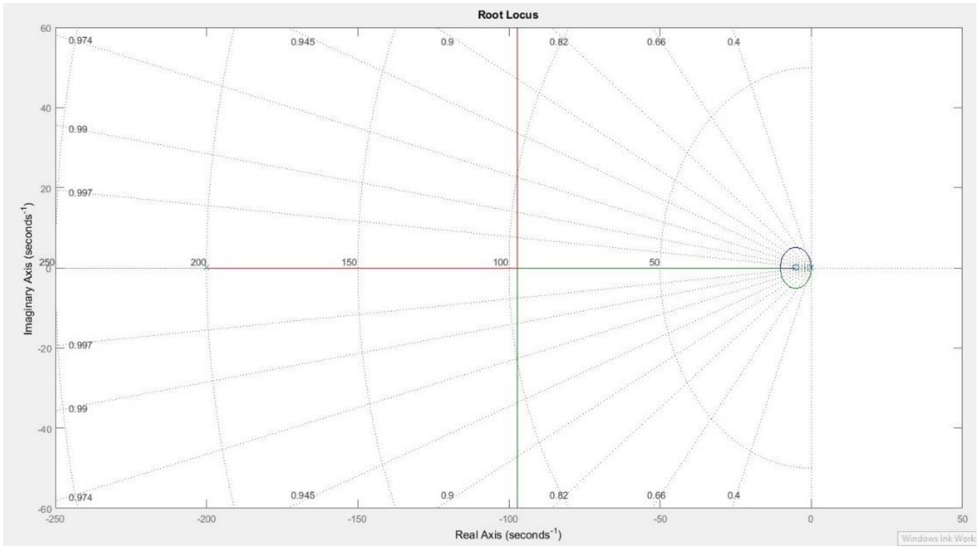
$$|G(s)C1(s)| = 1 \,, s = -5+5j \rightarrow \frac{5k}{195.064} \times \frac{1}{50} = 1 \rightarrow k = 1950.64$$

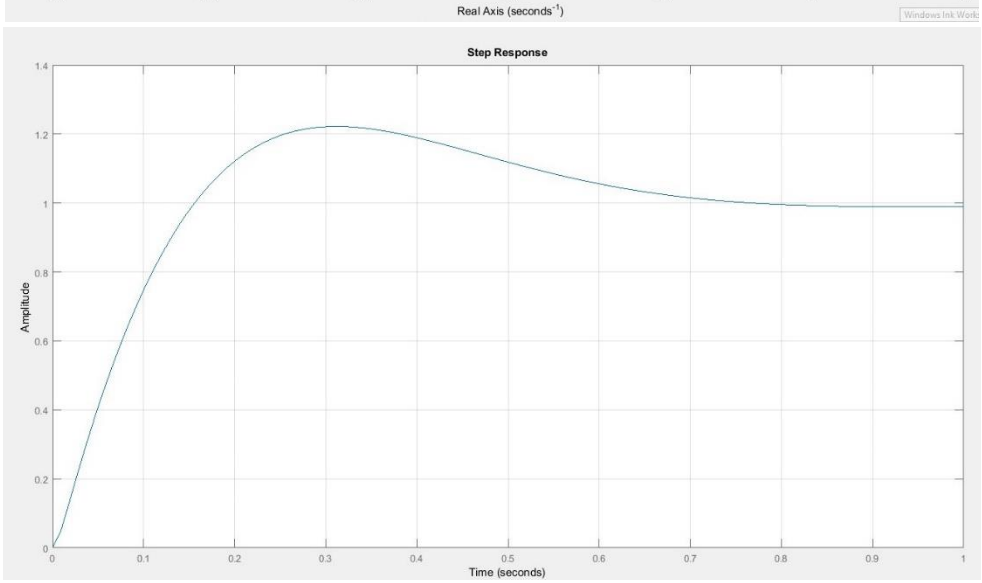
$$G(s)C1(s) = 1950.64\,\frac{s+5}{(s+200)s^2}$$

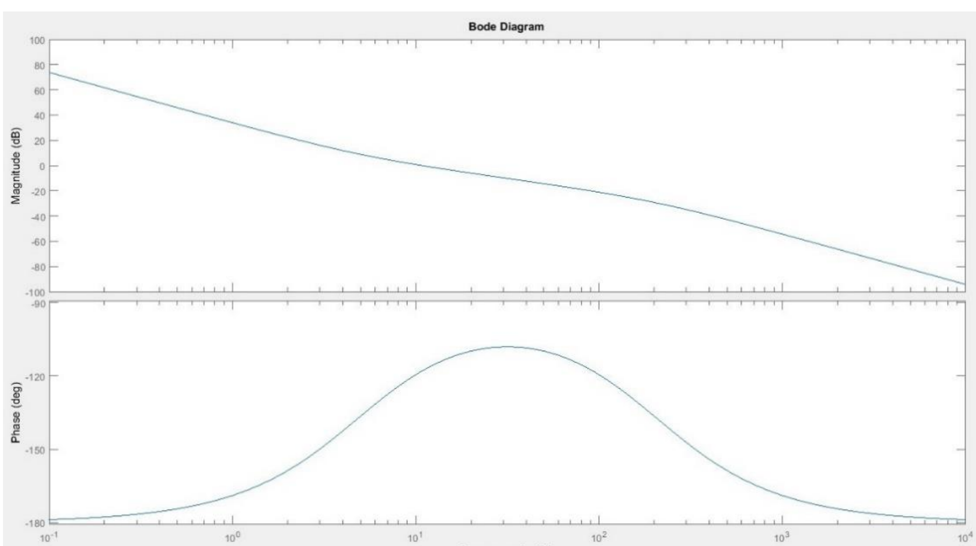
$O.P. = 22\% \,, Gm = +\infty \,, Pm = 62 \rightarrow Stable \rightarrow$ با فیلتر پایین نگذر$(\omega > 10^{-1})$

طبق نمودارهای صفحه بعد، شرط 1 تا 4 برآورده‌شده اما اورشوت 17 درصد بیشتر از حالت مطلوب است.

از لحاظ حاشیه فاز، مطلوب ما این است که نمودار اندازه زمانی 0 دسی‌بل را قطع کند که فاز حدود -108 درجه باشد تا حاشیه فاز تقریبا 72 بشود. با اضافه شدن لید اول، شیب منفی نمودار اندازه به صورت مقطعی کم شد و دیرتر به صفر رسید ولی هم‌چنان به بهینه‌ترین حالت نرسیده است.


Root Locus
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)
0.974
0.945
0.9
0.82
0.66
0.4
0.99
0.997
250
200
150
100
50
60
40
20
0
-20
-40
-60
-250
-200
-150
-100
-50
0
50


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-90
-120
-150
-180

طراحی کنترل‌کننده دوم:

✓ **برای بهبود اورشوت نیاز به بهبود ξ داریم پس $C_2(s)$ را با θ کمتری طراحی میکنیم :**

برای مثال ← s=-6+3j

$$90 - 2 \times 150 + 108.43 - 0.88 - \theta p = -180 \rightarrow \theta p = 77.55°$$

$$\rightarrow (tan\theta = 4.5)\ ,p = -6 - \frac{3}{4.5} = -6.67$$

$$C2(s) = K2\frac{s+6}{s+6.67} \rightarrow K'\ \frac{(s+5)(s+6)}{s^2(s+6.67)(s+200)} = 1\ ,s = -6+3j$$

$$\rightarrow K' = 2825.08$$

O.P.=17% ← درصورت افزایش k ، پاسخ حالت ماندگار خراب میشود.

در نتیجه باید شروع به اصلاح کنترل‌کننده‌ها بکنیم:

- **اصلاح لید اول Lead 1**

Z_{Lead} = -5 , p=400

$$C1(s) = k\frac{s+5}{s+400}$$

$$|G(s)C1(s)| = 1\ ,s = -5+5j\ \rightarrow \frac{5k}{50(397)} = 1\ \rightarrow k = 3970$$

1٪ بهبود اورشوت ← از همان قبلی استفاده میکنیم زیرا تامین این بهره در عمل دشوار است و فایده چندانی هم ندارد.

- **تلاش اول اصلاح لید دوم Lead 2**

S= -25+25j زاویه قطب مطلوب را تغییر نمیدهیم.

$$90 - 2 * 135 + 128.65 - 0.07 - \theta p = -180\ \rightarrow \theta p = 128.6$$

← صفر را خیلی به چپ بردیم و این کنترل کننده ، عملی نیست.

- **تلاش دوم اصلاح لید دوم Lead 2**

S=-6+2j

$$90 - 2 * 161.56 + 116.56 - 0.6 - \theta p = -180 \rightarrow \theta p = 62.84$$

$$\rightarrow p = -6 - \frac{2}{\tan(62.84)} = -7$$

$$C2(s) = K2\frac{s+6}{s+7}, s = -6 + 2j$$

$$K'\frac{(s+5)(s+6)}{s^2(s+7)(S+200)} = 1 \rightarrow K' = 3880 \rightarrow Mp = 13\%$$

- **اصلاح سوم لید دوم Lead 2**

$$s = -6 + 1j$$

$$90 - 2 * 170.53 + 135 - \theta p = -180 \rightarrow \theta p = 63.94 \rightarrow p = -8$$

$$C2(s) = K2\frac{s+6}{s+8}, s = -6 + j1$$

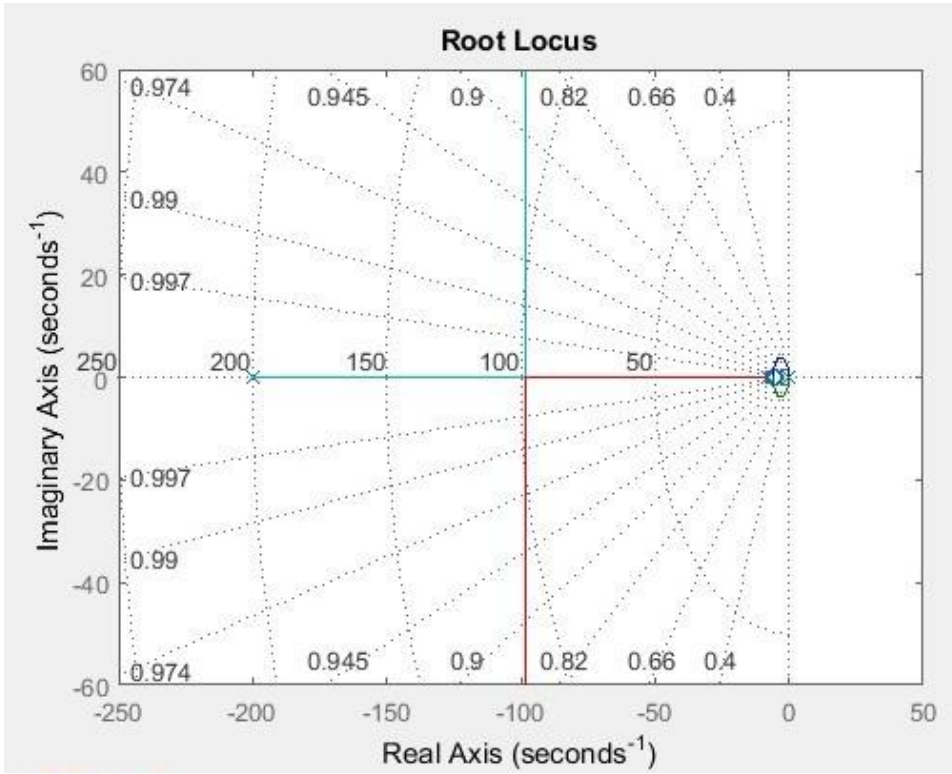
$$C2(s = -6 + j1) = 1 \rightarrow K' = 11349.4$$

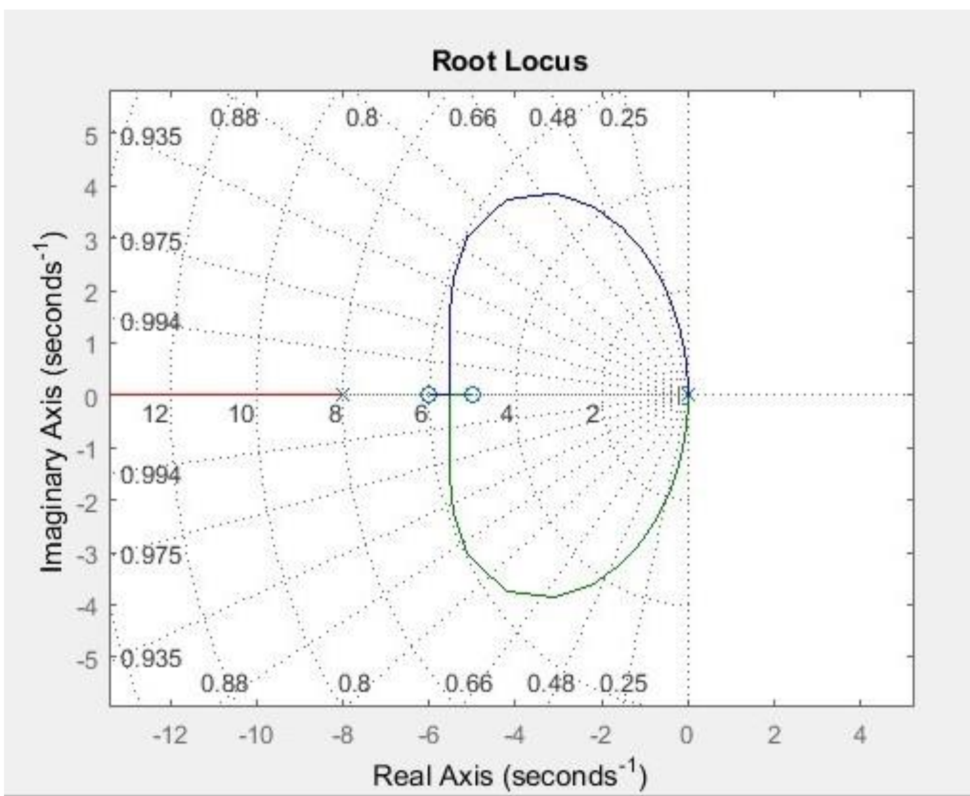
مشخصات سیستم با کنترل کننده:

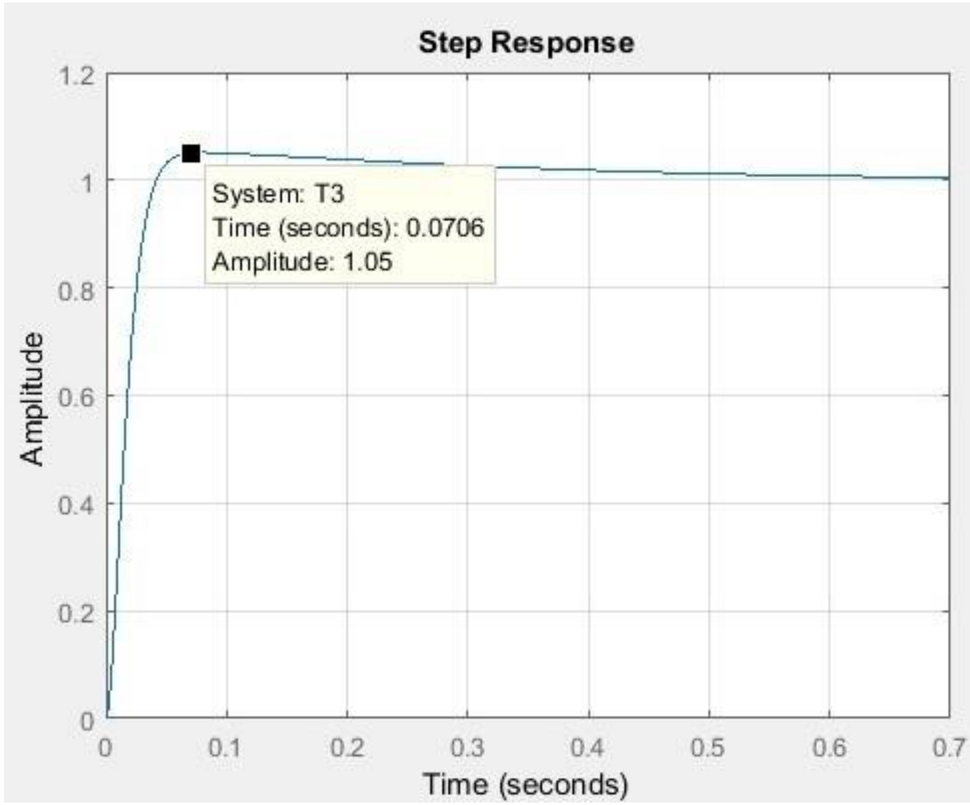
$C_{Lead1}\ C_{Lead2} = 11349.4\ \left(\frac{(s+5)(s+6)}{(s+200)(s+8)}\right)$

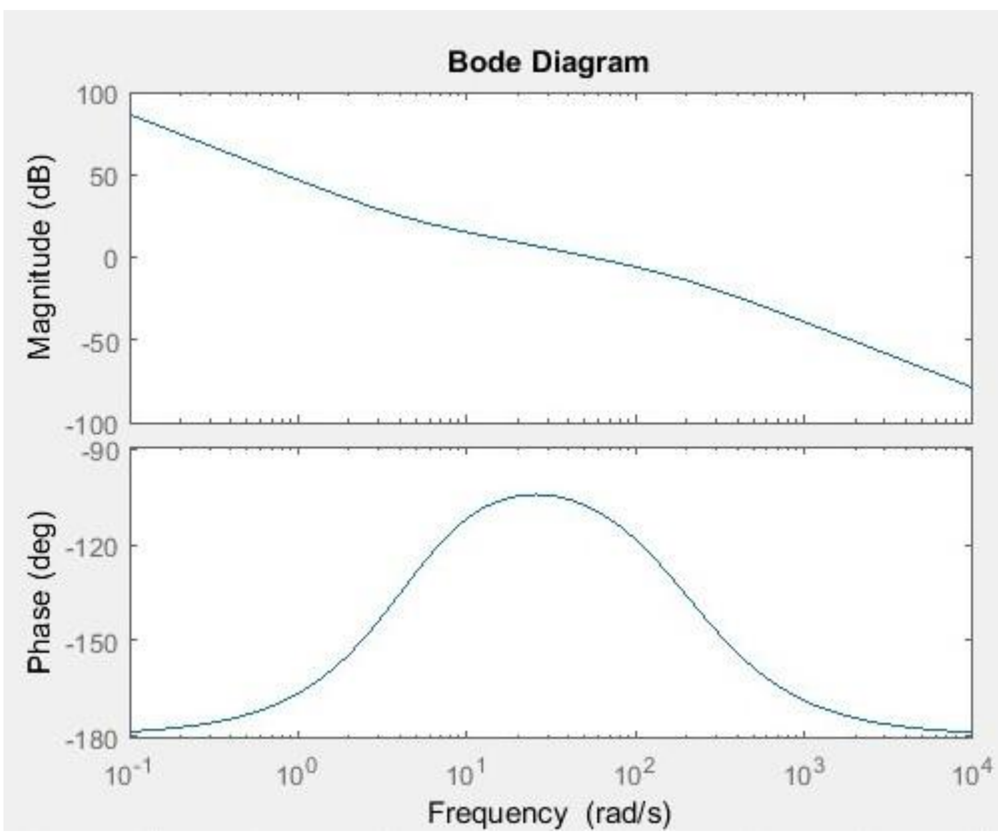
- ✓ **T_s = 0.32**
- ✓ **PM = 71.5**
- ✓ **GM = inf**
- ✓ **Steady-State Err < 1%**
- ✓ **Overshoot = 5%**

نمودارها پس از اعمال کنترل‌کننده و حصول نتایج مطلوب:






Step Response
System: T3
Time (seconds): 0.0706
Amplitude: 1.05
Amplitude
Time (seconds)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
100
50
0
-50
-100
-90
-120
-150
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

16 . اعمال کنترل‌کننده به سیستم غیرخطی

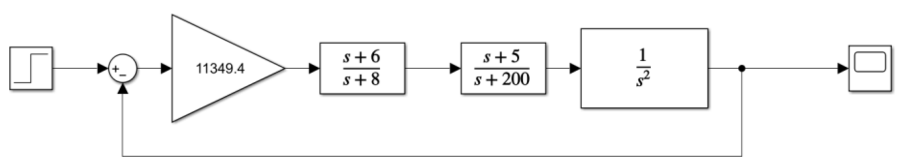
$$1.\ \ddot{z} = -g + \frac{\cos(\phi)\cos(\chi)}{m} U1$$

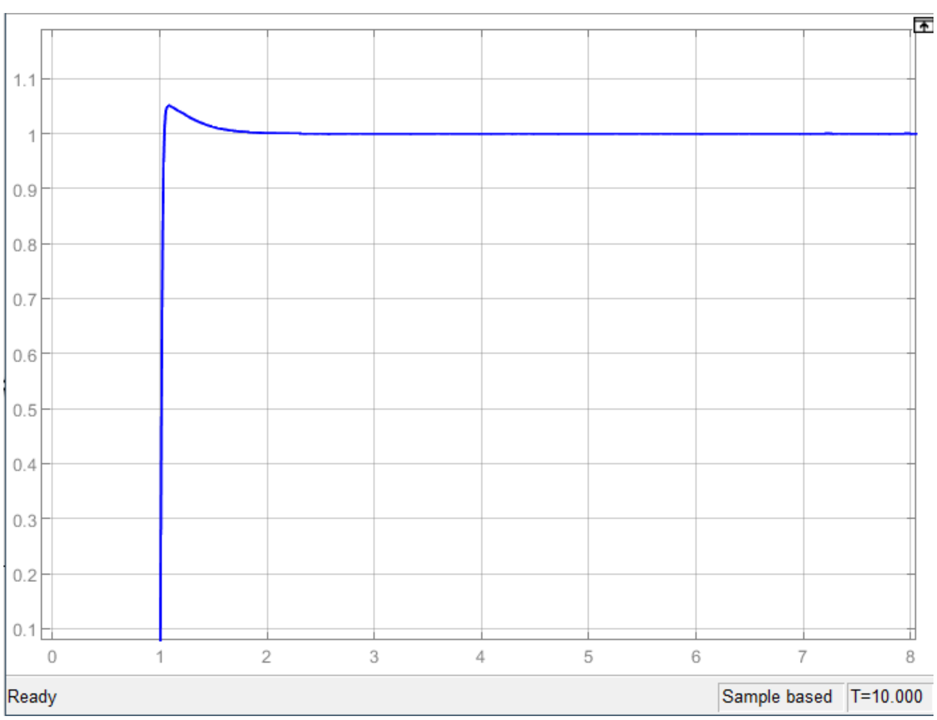
تفاوت این معادله با معادله سیستم خطی در $\cos(\phi)\cos(\chi)$ است. این دو متغیر که چرخش حول محور x و y هستند توسط ورودی‌ها و به صورت مستقل از حرکت عمودی تعیین می‌شوند. در نتیجه فقط نیاز به افزایش بهره با توجه به مقدار کوسینوس‌هاست و در اصل، گین کلی همان است که به‌دست آوردیم.

$K = 11349.4$

$$G_{(s)}\ CLead1\ C_{Lead2} = 11349.4\left(\frac{(s+5)(s+6)}{(s+200)(s+8)s^2}\right)$$

حال کنترل کننده ی طراحی شده را به صورت Block diagram در سمیولینک اجرا میکنیم و نتیجه را مشاهده میکنیم:





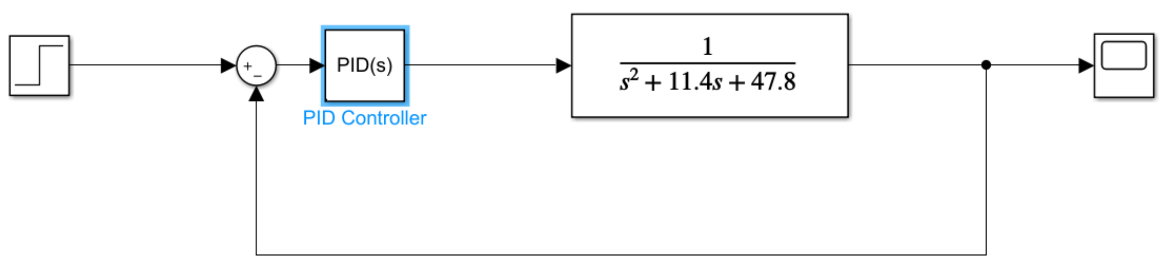
بررسی جبرانساز برای فیدبک حالت:

1) برای کنترل z ابتدا از یک کنترل کننده PI استفاده می کنیم که اگر نیاز نبود دیگر سراغ PD نرویم چون پاسخ گذرا مطلوب است.

علت : سیستم مورد بررسی از ابتدا پاسخ ماندگار خوبی نداشت و خطای بالایی داشت .

← قطب های غالب : $s_1 = -9 + 5j$ (طبق ویژگی های سیستم خواسته شده)

ما در اینجا از سیمولینک متلب استفاده کردیم:



Controller Parameters

	Tuned	Block
P	95.5624	1
I	486.5622	1
D	4.4359	0
N	957.7468	100

Performance and Robustness

	Tuned	Block
Rise time	0.187 seconds	107 seconds
Settling time	0.534 seconds	189 seconds
Overshoot	7.35 %	0 %
Peak	1.07	1
Gain margin	Inf dB @ Inf rad/s	Inf dB @ Inf rad/s
Phase margin	64.5 deg @ 8.38 rad/s	90.9 deg @ 0.0209 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

پس برای جبرانساز داریم که :

$$G_c(s) = 95.56 + \frac{486.56}{s} + \frac{(4252.4)s}{s+957.75}$$

2) برای کنترل ϕ از یک کنترل کننده PID استفاده می کنیم .

علت : مشابه کاری که در کنترل z انجام دادیم صورت پذیرفت با این تفاوت که این بار با یک تابع تبدیل سنگین رو به رو بودیم . ابتدا کنترل کننده PI قرار داده شد ولی مقدار فراجهش بالا بود . بدین منظور یک کنترل کننده ی PD به طراحی اضافه شد تا با استفاده از این کنترل کننده PID ، هم پاسخ گذرا و هم پاسخ ماندگار قابل قبول گردند .

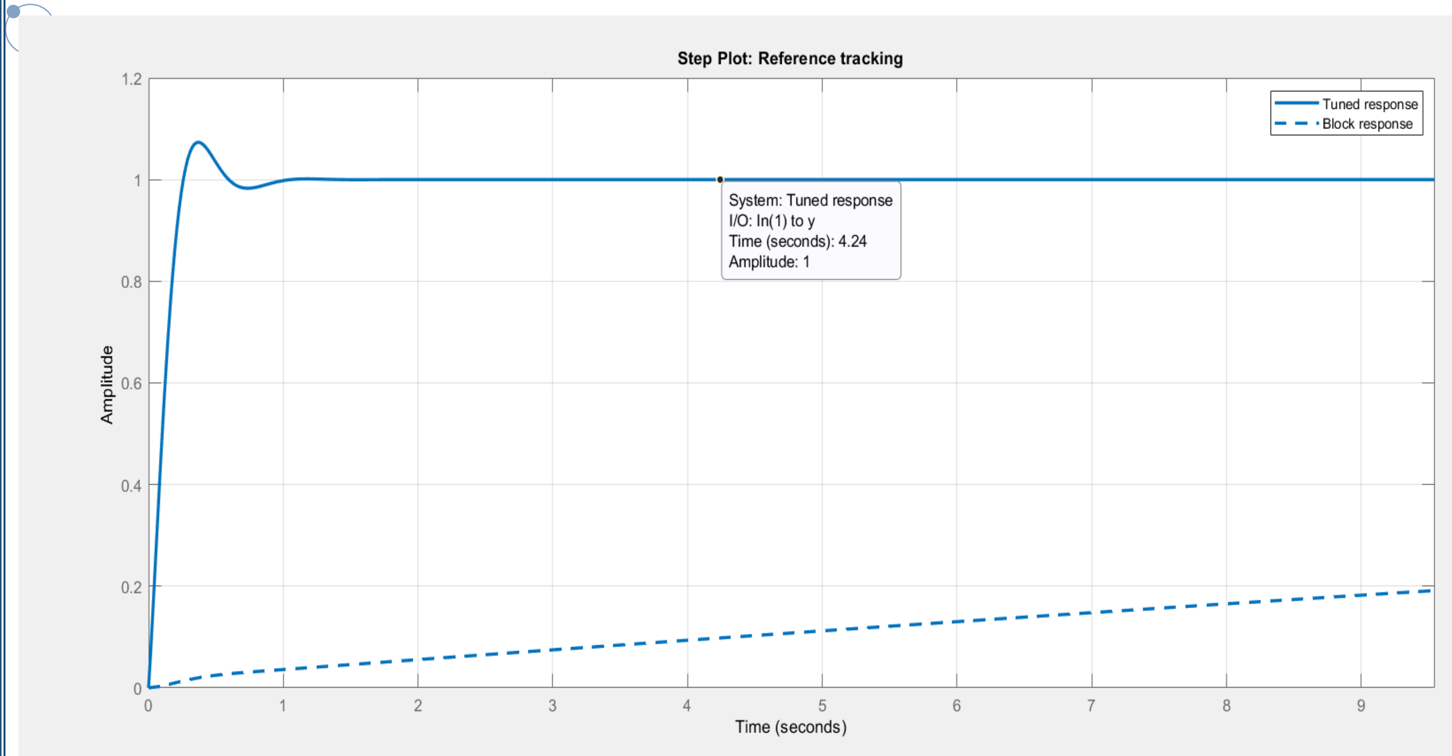
PD → $s_1 = -13 + 2j$, $G_1(s) = 22.66 + 0.97s$

PI → $s_1 = -9 + 4j$, $G_2(s) = 4.95 + \frac{41}{s}$

بدین ترتیب $G_c(s) = 4.82\ (s + 23.3)\ (1 + \frac{8.3}{s})$ به دست می آید .

اعمال به سیستم خطی:

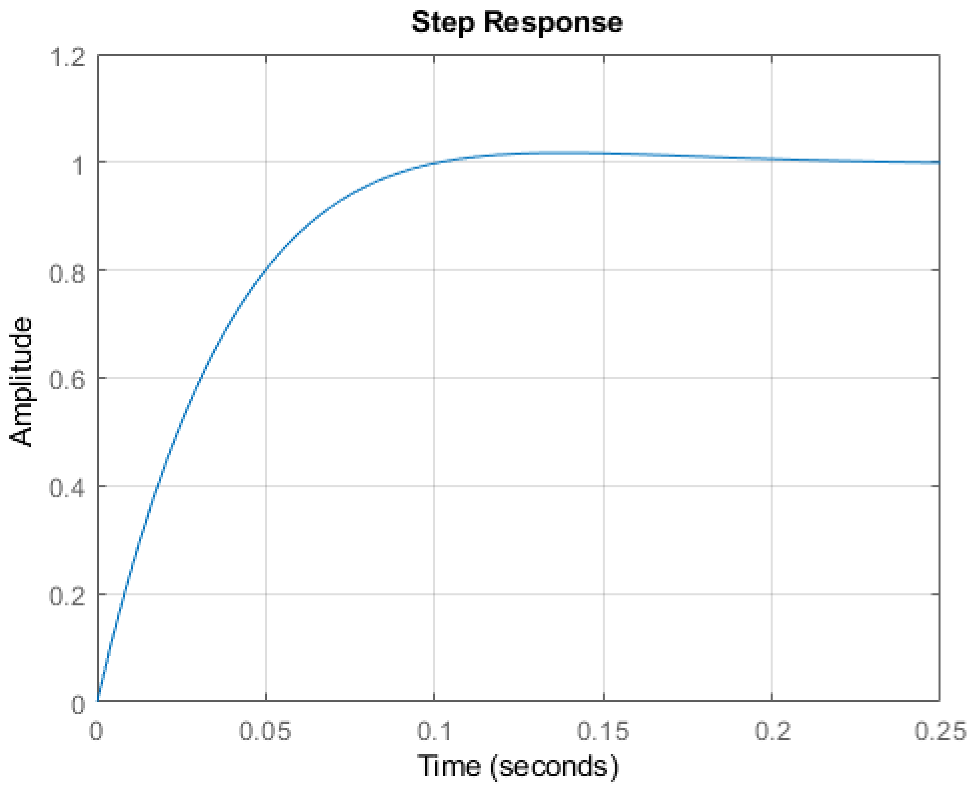
برای z



برای ϕ

Control of phi

```
clc
clear
close all
s=tf('s');
G = (5.55*s^4 + 277.5*s^3 + 5134*s^2 + 41620*s + 124900)/(s^6 + 75*s^5 + 2325*s^4 + 38130*s^3
+348000*s^2 + 1680000*s + 3370000);
G_c = 4.82*(s + 23.29)*(1 + 8.3/s);         % Controller

T = G*G_c/(1 + G*G_c);          % Closed Loop Transfer Function
step(T)
grid minor;
```



جمع‌بندی

در این پروژه به حرکت یک کوادکوپتر(کوادروتور) را بررسی کردیم و بنا به اقتضای نوع معادلات فرض کردیم که کوادکوپتر ما تنها در جهت Z و گردش حول محور Y حرکت کند. برای این که حرکت واقعی‌تری از کوادکوپتر را داشته باشیم باید بقیه معادلات هم تحلیل و کنترل شوند که خارج از بحث این پروژه است.

برای کنترل حرکت هم دیدیم که حول نقطه تعادل کوادکوپتر و معادلات خطی سازی شد، رفتار سیستم به هیچ عنوان قابل قبول نبود پس با توجه به شرایط مختلف و کاربرد های مختلف میتوان از کنترلر PD و یا دو کنترلر lead استفاده کرد و نتایج قابل قبول و حتی می شود گفت که نتایج عالی، در خروجی ها ظاهر شود.

مراجع

[1] M. Walid, N. Slaheddine, A. Mohamed, and B. Lamjed, “Modeling and control of a quadrotor uav,” in Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2014 15th International Conference on, pp.343–348, IEEE, 2014

[2] M. Costandin, P. Dobra, B. Costandin, “Nonlinear Model and Control of a Quadcopter” in System Theory, Control and Computing (ICSTCC),2017 (21st) International Conference on

[3] A.Shirsat ,” Modeling and Control of a Quadrotor UAV” Applied Project Presented in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree Master of Science, 2015

[4] D. Dube and R. Munje, “Modeling and control of unmanned aerial vehicle,” in Energy Systems and Applications, 2015 International Conference on, pp.641–644, IEEE, 2015.

[5] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, Modern Control Systems, Twelfth edition. Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2010

[6] https://blog.faradars.org/eigenvalues-and-eigenvectors

[7]https://fa.wikipedia.org/wiki/%DA%A9%D9%88%D8%A7%D8%AF%DA%A9%D9%88%D9%BE%D8%AA%D8%B1

[8] https://www.jahanrc.com/blog/what-is-quadcopter/

[9] https://www.mathworks.com