

---

# Método do Caminho Crítico

---

## TRABALHO REALIZADO POR:

JOÃO FIGUEIREDO MARTINS PEIXE DOS SANTOS

FRANCISCO ALVES ANDRADE

LUÍS FILIPE CRUZ SOBRAL

PAULO SILVA SOUSA

MERIEM KHAMMASSI



A89520  
João Santos



A89474  
Luís Sobral



A85829  
Meriem Khammassi



A89465  
Paulo Sousa



A89513  
Francisco Andrade

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Parte 0</b>	<b>1</b>
1.1	Determinação da lista de atividades . . . . .	1
1.2	Diagrama de Gaant . . . . .	2
1.2.1	Variáveis de Decisão . . . . .	2
1.2.2	Função Objetivo . . . . .	2
1.2.3	Restrições . . . . .	2
1.2.4	Input . . . . .	2
1.2.5	Output e Resultados . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Parte 1</b>	<b>4</b>
2.1	Descrição do Problema . . . . .	4
2.2	Objetivo . . . . .	4
2.3	Variáveis de Decisão . . . . .	4
2.4	Função Objetivo . . . . .	5
2.5	Restrições . . . . .	5
2.6	Input . . . . .	6
2.7	Output e Resultados . . . . .	7
2.8	Diagrama de Gaant . . . . .	8
2.9	Validação do Resultado . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>8</b>

---

# 1 Parte 0

## 1.1 Determinação da lista de atividades

Sendo que o nosso número de aluno mais alto é A89520, vamos remover as atividades 2 e 0.

Após removermos a atividade 0, os seus sucessores (atividades 1 e 4) passaram a ter como precedência a atividade ini.

Da mesma forma, ao removermos a atividade 2, o seu sucessor passa a ter como precedência a sua precedência, ou seja, a atividade 3 passa a ter como precedência a atividade 1.

Assim, o grafo associado a este projeto é o seguinte:

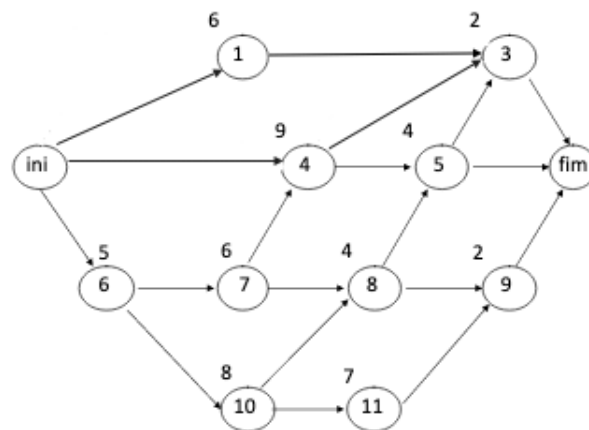


Figura 1: Atividades

Deste modo, as actividades e as relações de precedência são as seguintes:

Atividade	Duração	Precedências
1	6	-
3	2	1,4,5
4	9	7
5	4	4,8
6	5	-
7	6	6
8	4	7,10
9	2	8,11
10	8	6
11	7	10

Tabela 1: Atividades e Relações de precedência

---

## 1.2 Diagrama de Gaant

O problema apresentado em cima foi resolvido no LPSolve, de modo a criar o Diagrama de Gaant e descobrir a duração do projeto.

### 1.2.1 Variáveis de Decisão

$t_j$ : tempo de início da atividade  $j$ ,  $j = i, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, f$

### 1.2.2 Função Objetivo

O objetivo deste problema é minimizar o tempo de execução do projeto, respeitando, ao mesmo tempo, as restrições de precedência. Assim, a nossa função objetivo é a seguinte:

$$\min : t_f$$

### 1.2.3 Restrições

As restrições que aplicamos no nosso problema foi a de uma atividade  $j$  apenas poder começar após uma atividade  $k$  (que é sua precedência) ter terminado. Assim, a restrição é:

$$t_j \geq t_k + d_k$$

### 1.2.4 Input

O ficheiro de input do LPSolve foi o seguinte:

```
/* Objective function */
min: tf;

/* Variable bounds */
arco_i1: t1>=ti+0;
arco_13: t3>=t1+6;
arco_3f: tf>=t3+2;
arco_i4: t4>=ti+0;
arco_43: t3>=t4+9;
arco_45: t5>=t4+9;
arco_53: t3>=t5+4;
arco_5f: tf>=t5+4;
arco_i6: t6>=ti+0;
arco_67: t7>=t6+5;
arco_74: t4>=t7+6;
arco_78: t8>=t7+6;
arco_85: t5>=t8+4;
arco_89: t9>=t8+4;
arco_9f: tf>=t9+2;
arco_610: t10>=t6+5;
arco_108: t8>=t10+8;
arco_1011: t11>=t10+8;
arco_119: t9>=t11+7;
```

Figura 2: Input LPSolve

### 1.2.5 Output e Resultados

O ficheiro de output e os resultados são os seguintes, respetivamente:

```
Model name: 'LPSolver' - run #1
Objective: Minimize(R8)

SUBMITTED
Model size: 19 constraints, 12 variables, 38 non-zeros.
Sets: 0 GUB, 0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Optimal solution 26 after 12 iter.

Relative numeric accuracy ||*|| = 0

MEMO: lp solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 12, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 12.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(8) had 20 NZ entries, 1.0x largest basis.
The constraint matrix inf-norm is 1, with a dynamic range of 1.
Time to load data was 0.004 seconds, presolve used 0.014 seconds,
... 0.031 seconds in simplex solver, in total 0.049 seconds.
```

Figura 3: Output

Variables	result
t6	26
t1	0
t0	0
t3	24
t4	11
t5	20
t6	0
t7	5
t8	13
t9	20
t10	5
t11	13

Figura 4: Resultados

Assim, convertemos os resultados num diagrama de Gaant, e chegamos à conclusão que o nosso projeto tem uma duração de 26 unidades.

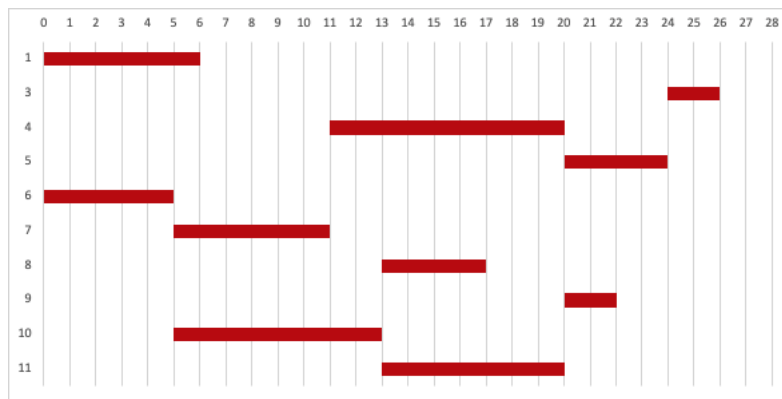


Figura 5: Diagrama de Gaant

---

## 2 Parte 1

### 2.1 Descrição do Problema

Aumentando os recursos aplicados, com custos suplementares, nesta parte do trabalho, consideramos que seria assim possível reduzir a duração de uma atividade .

Ficamos assim com a tabela de relações entre os custos e as reduções dependendo das características das atividades, podendo ser não linear.

Nesta tabela, apresentamos cinco parâmetros para cada atividade: O custo normal, o valor de C1(o custo suplementar de reduzir a duração da atividade de uma unidade de tempo), o valor da máxima redução de tempo a um custo C1, o valor de C2( equivalente ao C1 após a aplicação da redução máxima) e o valor da máxima redução de tempo a um custo C2.

Atividade	Custo Normal	C1	Redução C1	C2	Redução C2
1	1000	600	1	300	1
3	300	200	0.5	100	0.5
4	2000	800	2	400	1
5	1000	1600	0.5	800	0.5
6	800	180	1	90	1
7	900	300	5	1100	4
8	600	200	0.5	100	0.5
9	300	200	1	400	0
10	1600	1000	0.5	500	0.5
11	1400	600	1	300	1

Tabela 2: Tabela de relações entre custos e reduções

### 2.2 Objetivo

O objetivo deste problema é minimizar a duração de uma atividade, aumentando os recursos aplicados e com custos suplementares, de modo a realizar o projeto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

### 2.3 Variáveis de Decisão

Em relação ao problema anterior, acrescentamos 4 variáveis. Acrescentamos  $r_{j1}$ ,  $r_{j1}^{max}$ ,  $c_j$  e  $r_{j2}$ .  $c_j$  é uma variável binária, que impede realizarmos uma redução aplicada a custo 2 sem realizarmos o limite de reduções aplicadas a custo  $c_1$ .

Assim, as nossas variáveis de decisão são as seguintes:

$t_j$  - tempo em que se inicia a atividade j

$r_{j1}^{max}$  - redução máxima aplicada a custo 1 à atividade j

$r_{j1}$  - redução aplicada a custo 1 à atividade j

$r_{j2}$  - redução aplicada a custo 2 à atividade j

$c_j$  - 1, se o numero máximo de reduções aplicados a custo 1 foi atingida, 0, caso contrário

$$\forall j \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

---

## 2.4 Função Objetivo

Tendo por base o objetivo do problema, tencionamos minimizar os custos de reduções, obtendo, assim, a seguinte função objetivo.

$$\min : \sum_j (c_{1j}r_{1j} + c_{2j}r_{2j})$$

$\forall j \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Onde  $c_{1j}$  é o custo da redução 1 e  $c_{2j}$  é o custo da redução 2.

## 2.5 Restrições

Relativamente ao problema com o qual nos deparamos, houve um acréscimo de restrições, face ao problema anterior, tendo em conta as dependências de reduções. Isto deveu-se ao facto de, neste problema, termos de verificar se  $c_1$  já atingiu o seu limite, pois só aí poderemos efetuar reduções a custo  $c_2$ .

Tendo em conta os limites máximos das reduções relativas aos custos  $c_1$  e  $c_2$ , foram impostas restrições. No caso particular das reduções a custo  $c_1$ , a restrição a utilizar pode ser a apresentada anteriormente, já que estas reduções são independentes.

$$r_{1j} \leq r_{1j}^{max}$$

Desta forma, necessitamos de encontrar uma forma de calcular o limite máximo das reduções a custo  $c_1$ . Vamos então usar uma variável binária  $c_i$ , com o objetivo de efetuar o controlo dessa redução e a respetiva possibilidade ou impossibilidade de ela continuar. Formolou-se assim uma restrição que calcula a diferença entre o valor da máxima redução de tempo a um custo  $c_1$  e a redução aplicada a custo  $c_1$  à atividade  $i$ , na qual obtemos um valor maior que zero se a redução ainda não tiver terminado, e o valor zero se já tiver terminado.

$$c_j \geq r_{1j}^{max} - r_{1j}$$

Desenvolvimento das restrições relativas a custo  $c_2$ :

$$r_{2j} \leq r_{2j}^{max}(1 - c_j)$$

Assim, na eventualidade da redução a custo  $c_1$  da atividade  $i$  atingir o limite, será atribuído o valor 0 à variável binária  $c_i$ , alcançando a restrição  $r_{2j} \leq r_{2j}^{max}$ , permitindo assim a iniciação da redução. Por outro lado, na eventualidade de a redução a custo  $c_1$  não atingir o limite, será atribuído o valor 1 à variável binária  $c_i$ , alcançando a restrição  $r_{2j} \leq 0$ , impossibilitando a redução de unidades de tempo a custo  $c_2$ .

---

## 2.6 Input

O ficheiro de input do LPSolve foi o seguinte:

```
1 /* Objective function */
2 min: 600r11 + 300r12 + 200r31 + 100r32 + 800r41 +
3       400r42 + 1600r51 + 800r52 + 180r61 + 90r62 + 300r71 + 1100r72 +
4       200r81 + 100r82 + 200r91 + 400r92 + 1000r101 + 500r102 + 600r111 + 300r112;
5
6 tf <= 23;
7
8 /* Variable bounds */
9 arco_11: t1>=ti+0;
10 arco_13: t3>=t1+6-r11-r12;
11 arco_3f: tf>=t3+2-r31-r32;
12 arco_14: t4>=ti+0;
13 arco_43: t3>=t4+9-r41-r42;
14 arco_45: t5>=t4+9-r41-r42;
15 arco_53: t3>=t5+4-r51-r52;
16 arco_5f: tf>=t5+4-r51-r52;
17 arco_16: t6>=ti+0;
18 arco_67: t7>=t6+5-r61-r62;
19 arco_74: t4>=t7+6-r71-r72;
20 arco_78: t8>=t7+6-r71-r72;
21 arco_85: t5>=t8+4-r81-r82;
22 arco_89: t9>=t8+4-r81-r82;
23 arco_9f: tf>=t9+2-r91-r92;
24 arco_610: t10>=t6+5-r61-r62;
25 arco_108: t8>=t10+8-r101-r102;
26 arco_1011: t11>=t10+8-r101-r102;
27 arco_119: t9>=t11+7-r111-r112;
28
29 r11m=1;
30 r31m=0.5;
31 r41m=2;
32 r51m=0.5;
33 r61m=1;
34 r71m=5;
35 r81m=0.5;
36 r91m=1;
37 r101m=0.5;
38 r111m=1;
```

Figura 6: Input(1)

```
40 r11<=1;
41 r31<=0.5;
42 r41<=2;
43 r51<=0.5;
44 r61<=1;
45 r71<=5;
46 r81<=0.5;
47 r91<=1;
48 r101<=0.5;
49 r111<=1;
50
51 c1>=r11m - r11;
52 c3>=r31m - r31;
53 c4>=r41m - r41;
54 c5>=r51m - r51;
55 c6>=r61m - r61;
56 c7>=r71m - r71;
57 c8>=r81m - r81;
58 c9>=r91m - r91;
59 c10>=r101m - r101;
60 c11>=r111m - r111;
61
62 r12<=1-c1;
63 r32<=0.5-0.5c3;
64 r42<=1-c4;
65 r52<=0.5-0.5c5;
66 r62<=1-c6;
67 r72<=4-c7;
68 r82<=0.5-0.5c8;
69 r92<=0-0c7;
70 r102<=0.5-0.5c10;
71 r112<=1-c11;
72
73 bin c1, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10, c11;
```

Figura 7: Input(2)



## 2.7 Output e Resultados

Introduzindo no LPSolve, obtemos o seguinte output e os respectivos resultados.

Variables	MILP	result
	2000	2000
r11	0	0
r12	0	0
r31	0	0
r32	0	0
r41	1	1
r42	0	0
r51	0	0
r52	0	0
r61	0	0
r62	0	0
r71	4	4
r72	0	0
r81	0	0
r82	0	0
r91	0	0
r92	0	0
r101	0	0
r102	0	0
r111	0	0
r112	0	0
u	23	23
v	0	0
u	0	0
u3	21	21
u4	7	7
u5	17	17
u6	0	0
u7	5	5
u8	13	13
u9	20	20
u10	5	5
u11	13	13
r11m	1	1
r31m	0.5	0.5
r41m	2	2

Figura 8: Resultado(1)

r51m	0,5	0,5
r61m	1	1
r71m	5	5
r81m	0,5	0,5
r91m	1	1
r101m	0,5	0,5
r111m	1	1
c1	1	1
c3	1	1
c4	1	1
c5	1	1
c6	1	1
c7	1	1
c8	1	1
c9	1	1
c10	1	1
c11	1	1

Figura 9: Resultado(2)

```

Model name: 'LPSolver' - run #1
Objective: Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:      39 constraints,      52 variables,      119 non-zeros.
Sets:           0 GUB,              0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Relaxed solution      2000 after      25 iter is B&B base.
Feasible solution      2000 after      29 iter,      4 nodes (gap 0.0%)
Optimal solution      2000 after      29 iter,      4 nodes (gap 0.0%).
Relative numeric accuracy ||*|| = 7.10543e-016

```

Figura 10: Output

Após executarmos o LPSolve, verificamos que o tempo de duração do projeto baixou para o tempo pretendido (23). Isso foi possível através da redução de 4 UT na atividade 7 a custo 1 e da redução de 1 UT na atividade 4, também a custo 1.

---

## 2.8 Diagrama de Gaant

Com base nos resultados que obtivemos no LPSolve, aqui se encontra o nosso plano de execução através de um Diagrama de Gaant.

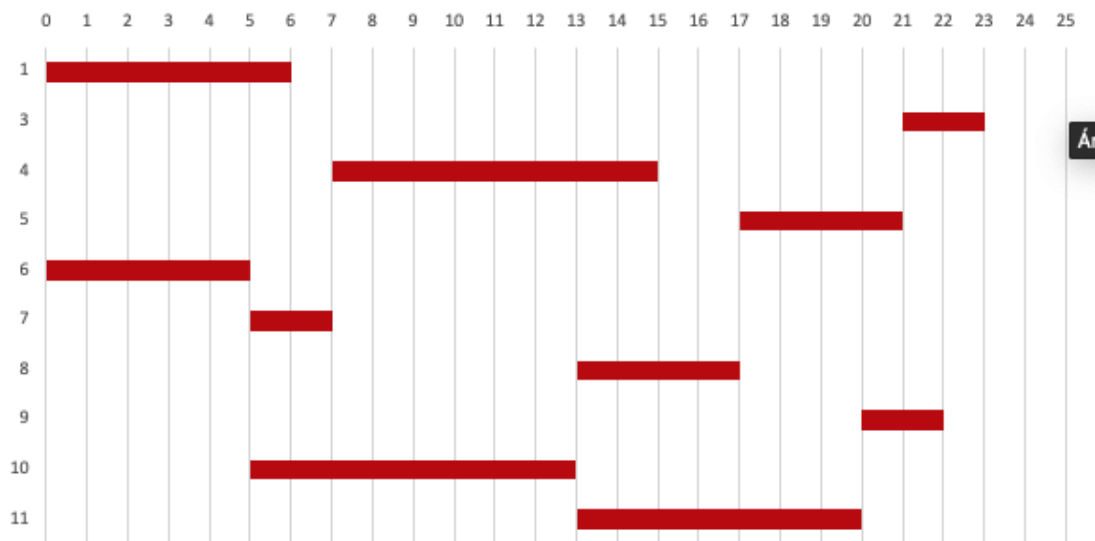


Figura 11: Diagrama de Gaant

## 2.9 Validação do Resultado

Observando o diagrama de Gaant acima(11), verificamos que a duração da nova solução tem a duração de 23 U.T.. Esta solução revela-se lógica, uma vez que reduzimos 4 U.T. na atividade 7 (que fazia parte do caminho crítico) e 1 U.T. na atividade 4.

Relativamente ao custo das reduções, verificamos a sua validação já que reduzir 4 U.T. à atividade 7 tem um custo de  $300 \times 4 = 1200$  e reduzir 1 U.T. à atividade 4 tem um custo de 800. Isto resulta num custo total de  $1200 + 800 = 2000$ , como está representado no output.

## 3 Conclusão

O presente trabalho prático permitiu a consolidação da matéria dada nas aulas, nomeadamente sobre o método do caminho crítico.

Em suma, o grupo considera que este trabalho prático foi um bom meio de estudo e uma experiência positiva para a avaliação e consolidação de conhecimentos relativamente à UC de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional.