

东拼西凑PBR：PBR基础

by 杨超 (wantnon)

2018年1月27日第一次修订

qq群：物理渲染 (697412576)

基于经验的渲染模型

例子：

Blinn-Phong: $ambientColor + diffColor * \max(0, dot(n, l)) + specColor * \max(0, dot(n, h))^{shininess}$

其中 $h = \frac{l + v}{|l + v|}$ (半角向量)

基于物理的渲染模型 (PBR)

表面反射

辐射测量学

BRDF

微表面模型

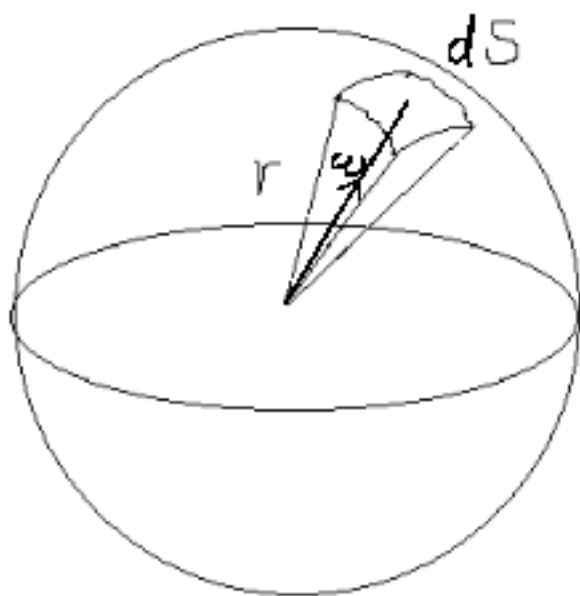
渲染方程求解方案举例

金属 workflow

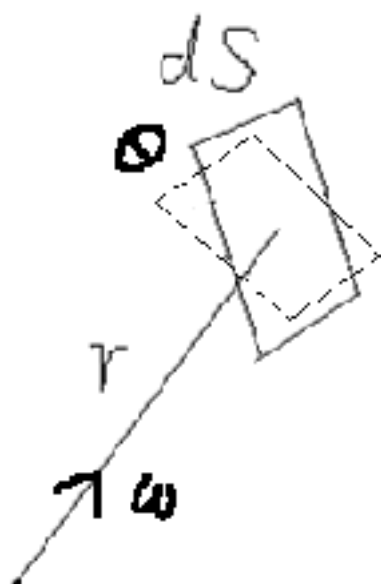
次表面散射

体散射

立体角 (solid angle)

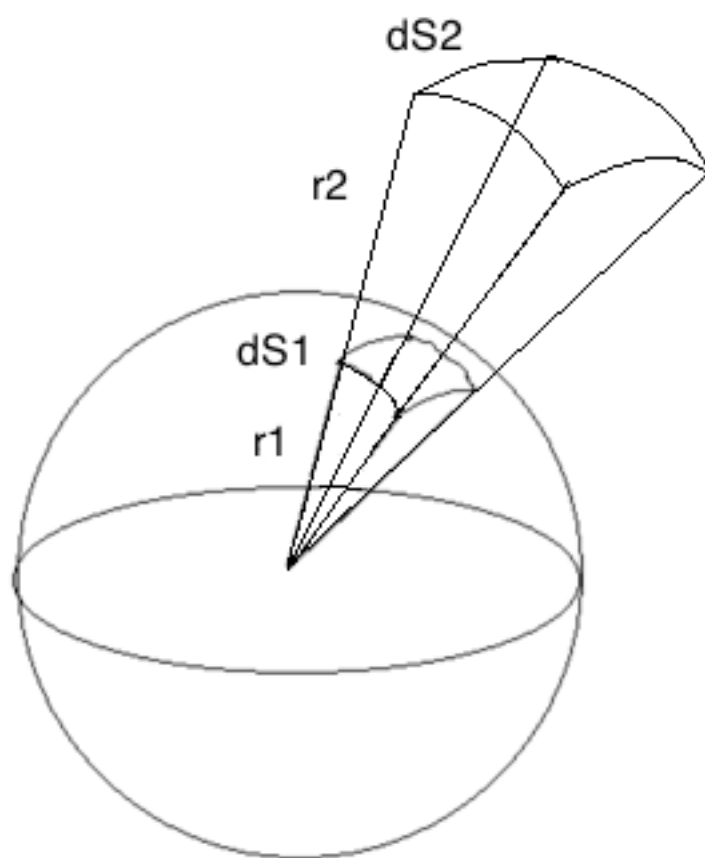


$$d\omega = \frac{dS}{r^2}$$



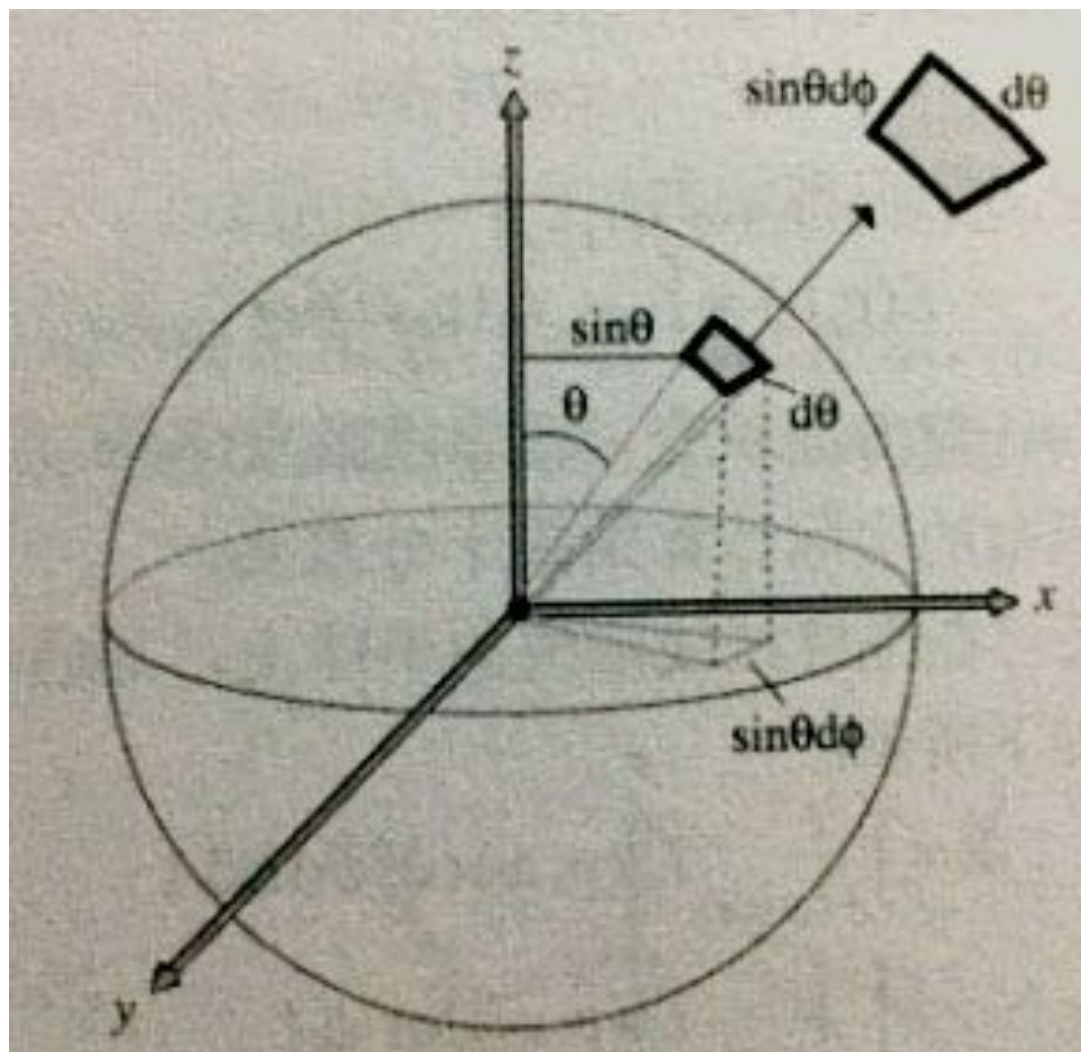
$$d\omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$$

立体角本质：立体角相等，则锥顶角相等



$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

球面积分



$$d\omega = \sin\theta * d\theta * d\phi$$

例子：

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi \quad (\Omega \text{为半球面})$$

$$\int_{\Omega} \cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi$$

辐射测量学物理量

光通 (flux) 单位时间通过截面的能量，单位:W

$$\Phi$$

照度 (irradiance) 单位面积光通，单位： W/m^2

$$E = \frac{d\Phi}{dA}$$

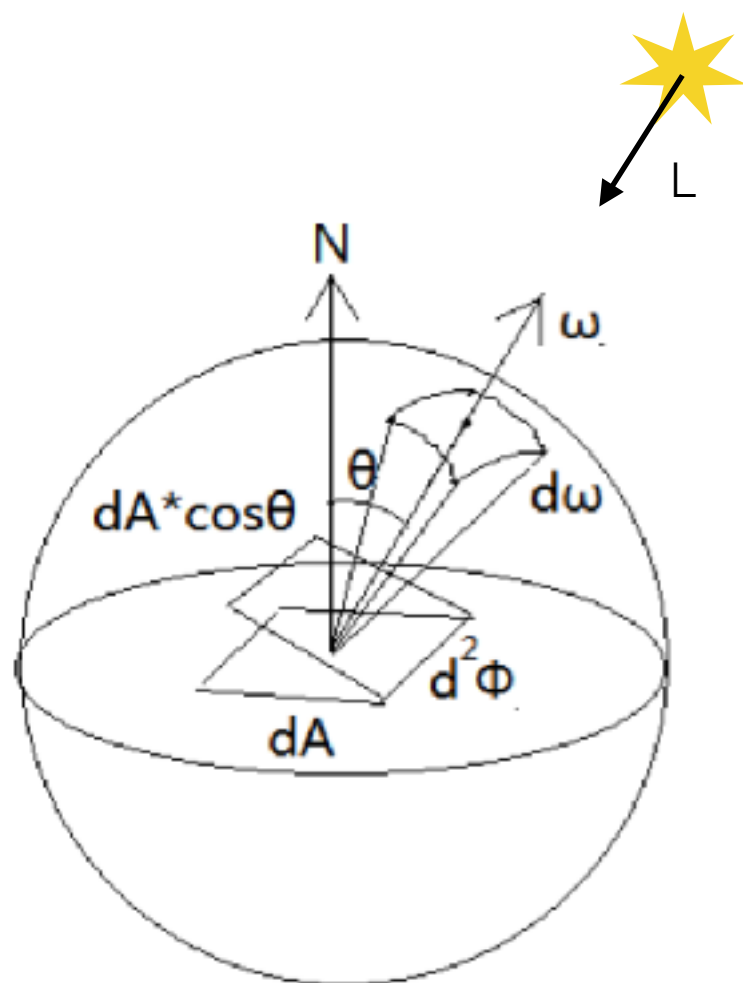
光强 (indensity) 单位立体角光通，单位W/sr

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

亮度 (radiance) 单位立体角单位投影面积光通，单位W/m^2/sr

$$L = \frac{d\Phi}{d\omega * dA * \cos\theta}$$

亮度 (radiance)



不强调微分阶数时 $d^2\Phi$ 也可写为 $d\Phi$

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega * dA \cos\theta}$$

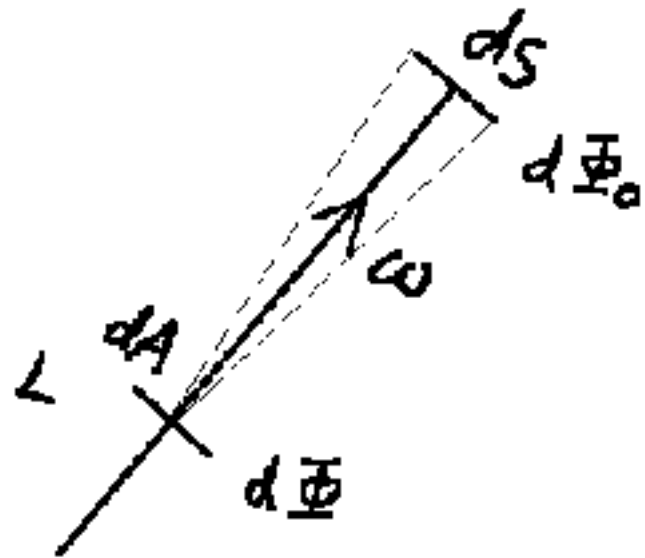
对于斜射情况，要让面元接收到同等能量，需要更大的亮度L

亮度与照度的关系

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega * dA \cos\theta} = \frac{dE}{d\omega * \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad E = \int_{\Omega} L * \cos\theta * d\omega$$

光在真空中传播，亮度不变（与距离无关）的证明

仅对发射面与接收面垂直的情况为例



收到的能量与距离平方成反比，与接收面面积成正比

$$L = \frac{d\Phi}{dA * d\omega} \propto \frac{\frac{d\Phi_0}{r^2} dA}{dA \frac{dS}{r^2}} = \frac{d\Phi_0}{dS} \quad (\text{与} r \text{ 无关})$$

dS : 发射面（光源） ← 辐射理论中一切光源皆面光源。

dA : 接收面（亮度测量仪）

亮度概念为何重要

亮度与发射面面积、角度、接收面面积、角度无关。

光在真空中传播，亮度不变（与距离无关）。

排除一切外部干扰因素，
体现光本身属性

亮度与（HDR）颜色直接对应

应用很方便！

辐射理论观点

一切物体皆光源

一切光源皆面光源

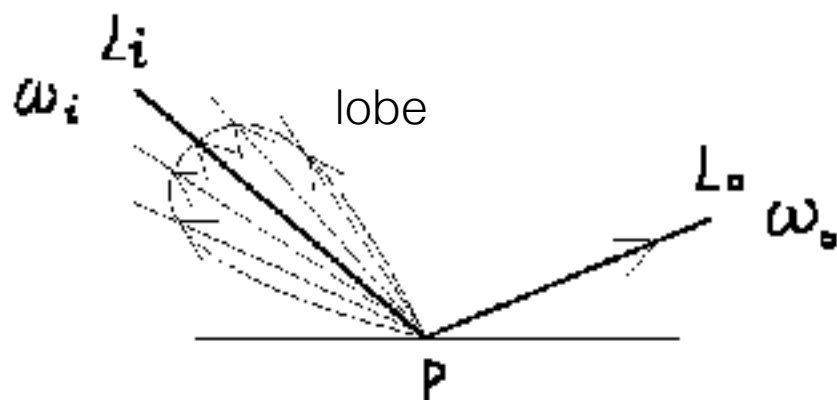
BRDF

BRDF: bidirectional reflectance distribution function

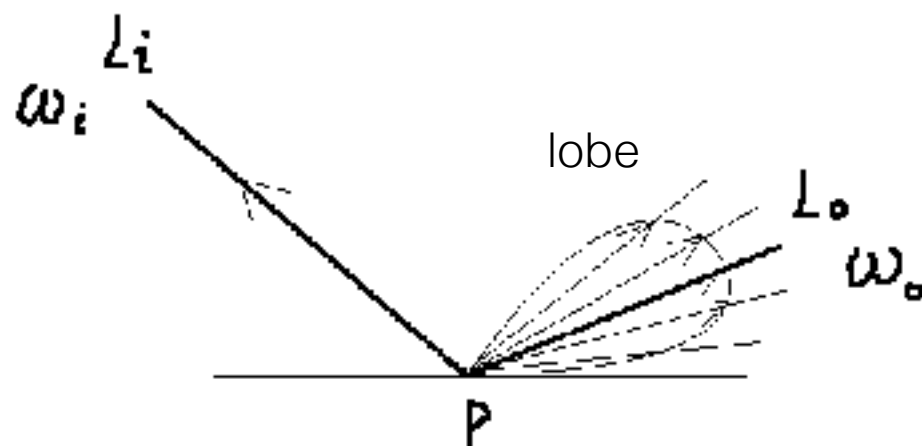
$$f(p, \omega_i, \omega_o) = \frac{dL_o}{dE_i} = \frac{dL_o}{L_i \cos \theta_i d\omega_i}$$

ω_i 方向入射照变化引起的 ω_o 方向出射亮度变化

两种理解都对:



体现不同入射方向对特定出射方向的贡献。



体现特定入射方向对不同出射方向的贡献。

能量守恒

能量守恒条件: $\forall \omega_i, \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o \leq 1$

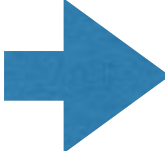
证明: 设 ω_i 方向发射面元为 σ

$$E_i = \int_{\sigma} L_i \cos \theta_i d\omega_i = L_i \cos \theta_i \int_{\sigma} d\omega_i \quad (\sigma \text{覆盖的立体角很小, 此范围内} L_i \text{和} \theta_i, \text{故可提出})$$

$$L_o = \int_{\sigma} f(\omega_i, \omega_o) L_i \cos \theta_i d\omega_i = f(\omega_i, \omega_o) L_i \cos \theta_i \int_{\sigma} d\omega_i = f(\omega_i, \omega_o) E_i$$

$$E_o = \int_{\Omega} L_o \cos \theta_o d\omega_o = \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) E_i \cos \theta_o d\omega_o = E_i \int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o$$

$$E_o \leq E_i$$


$$\int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o \leq 1$$

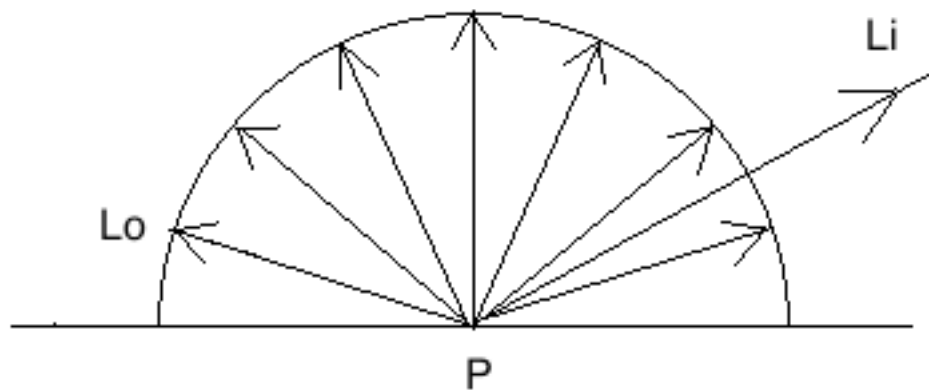
参考: https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional_reflectance_distribution_function

渲染方程

$$L_o = \int_{\Omega} f(p, \omega_i, \omega_o) L_i \cos \theta_i d\omega_i \quad (\text{由BRDF定义立得})$$

不同渲染技术，就是对此方程的不同求解方法。

漫反射 (lambert) BRDF



$$f_{Lambert}(l, v) = \frac{albedo}{\pi}$$

← 漫反射率, 即固有色

证明: 设单位面积上入射能量转化为出射能量的比例为Albedo

注: 其实应该是 $albedo = \text{折出能量} / \text{折入能量}$, 但因lambert表面所有入射光线全部折射, 故上面直接叙述为 $albedo = \text{出射能量} / \text{入射能量}$ 了.

$$Albedo = \frac{E_o}{E_i}$$

$$E_o = \int_{\Omega} L_o \cos \theta_o d\omega_o = L_o \int_{\Omega} \cos \theta_o d\omega_o = \pi L_o$$

理想漫反射各方向出射亮度相等, L_o 可提出

$$LambertBRDF = \frac{L_o}{E_i}$$



$$LambertBRDF = \frac{Albedo}{\pi}$$

漫反射本质：忽略了出入点间距离的次表面散射

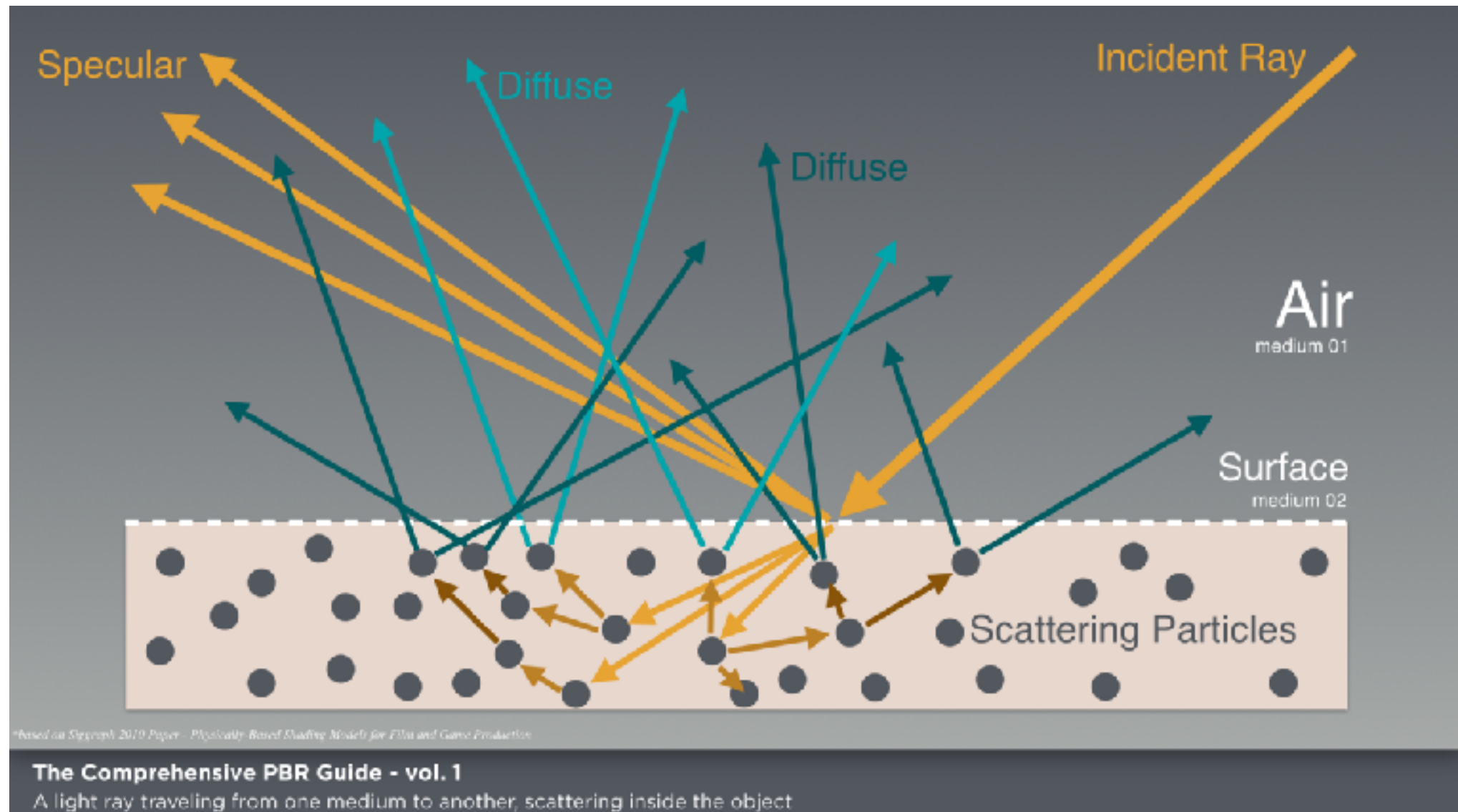
折入又折出

因表面下散射，折出方向随机

出入点之间距离可忽略

注意：漫反射不是反射

金属没有漫反射（光线折入表面即吸收）



高光（反射）BRDF

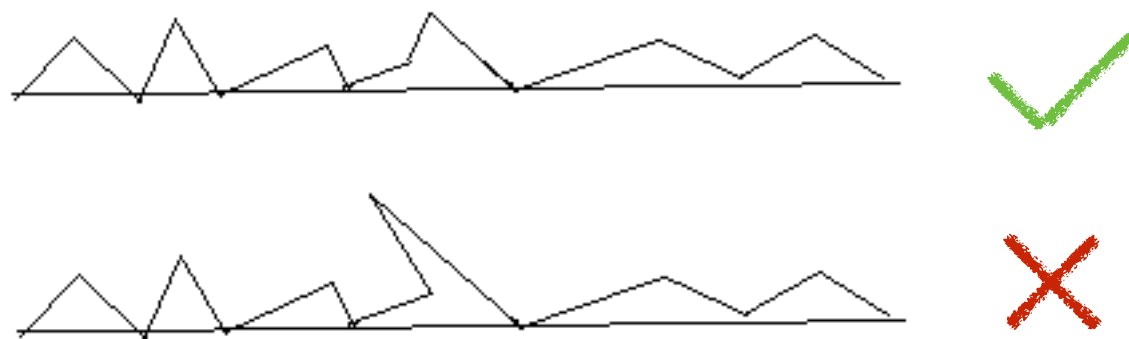
绝对光滑表面高光相对简单：反射角等于入射角，清晰映射周围环境，亮度遵循菲涅尔。

粗糙表面高光比较复杂，不同粗糙程度，高光范围和亮度不同。如何建模？

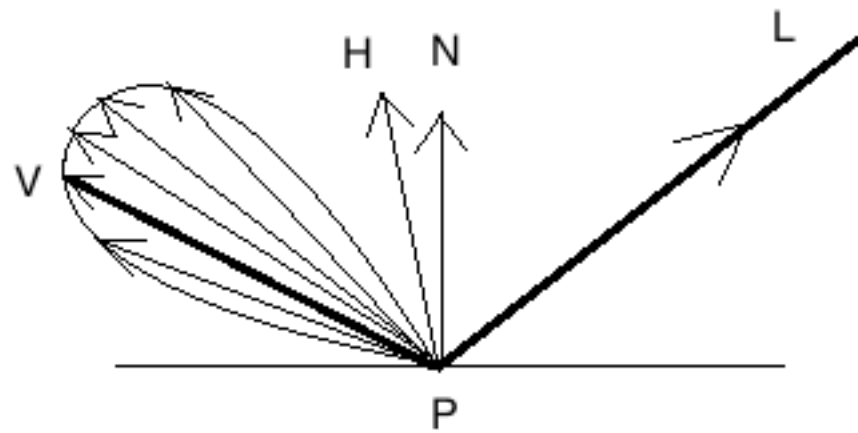
Cook-Torrance微表面模型：

将粗糙表面看作由无数绝对光滑的微表面构成，微表面朝向越混乱，相应宏表面越粗糙。

height field简化假设：



cook-Torrance BRDF反射项表达式



所以，所有反射都是菲涅尔反射

微表面菲涅尔系数 微表面几何遮挡 微表面法向分布

$$f_{\text{Cook-Torrance}}(l, v) = \frac{F(v, h)G(l, n, v)D(h)}{4(n \cdot l)(n \cdot v)}$$

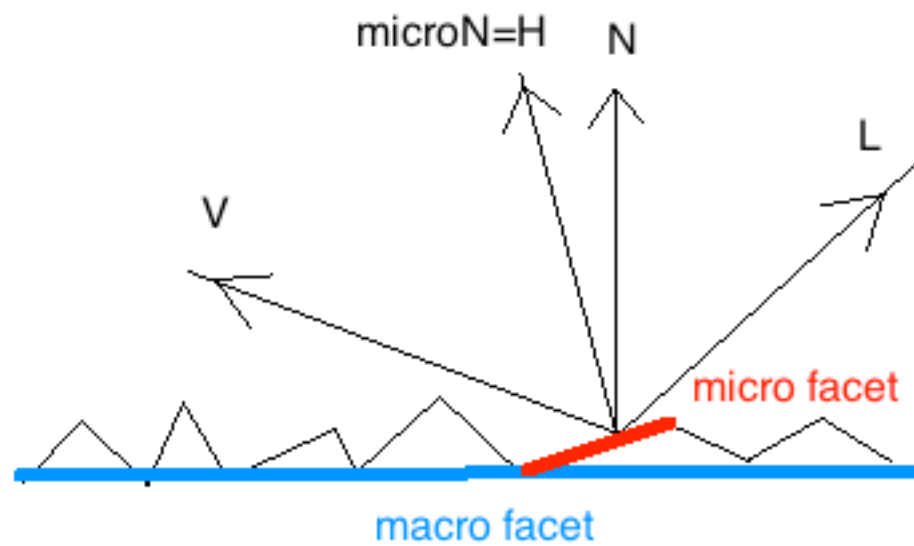
是一个框架，F,G,D函数可自行选取

推导过程见：《physically based rendering from theory to implementation(third edition)》，p545

高光和反射是一回事

所有反射都是菲涅尔反射

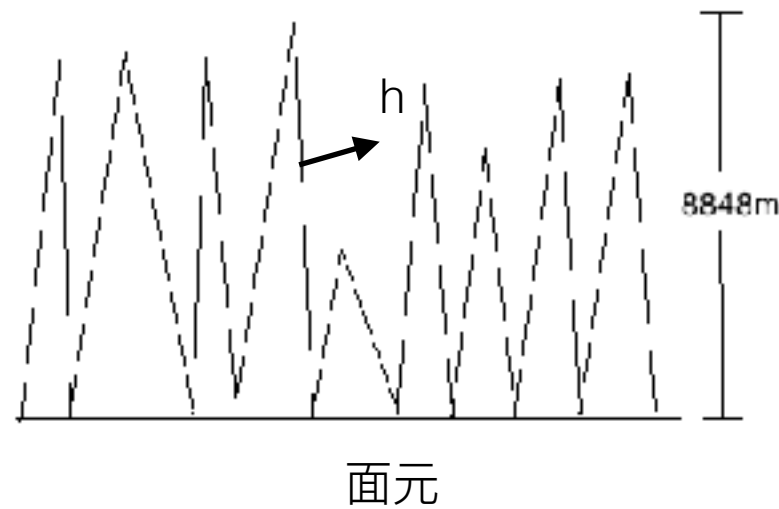
微表面法向分布 $D(h)$



$D(h)$ 含义：单位宏表面上法向量等于 h 的微表面总面积

因为只有法向量等于 h 的微表面才会把光反射到眼睛里（ v 方向上），故只需考虑这部分微表面

$D(h)$ 可以无限大



$D(h)$ 满足归一化约束

$$\int_{\Omega} D(h) \cos \theta_h d\omega_h = 1 \quad (\text{由height field假设立得})$$

对于光滑表面

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x = n \\ 0 & x \neq n \end{cases}$$

D函数举例：

Normalized Blinn-Phong Distribution

满足归一化约束 $\int_{\Omega} D(h) \cos \theta_h d\omega_h = 1$

高光越小越亮、越大越暗，从能量守恒角度讲更合理

e越大高光亮度越大

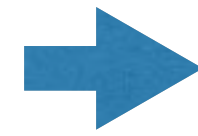
e越大高光点儿越小(越光滑)

$$D(h) = \frac{e+2}{2\pi} (h \cdot n)^e$$

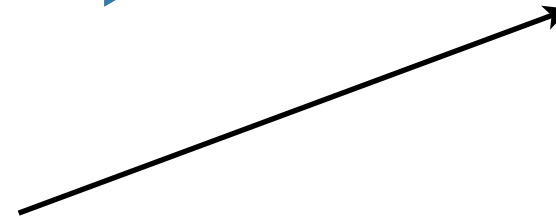
验证：

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{e+2}{2\pi} (h \cdot n)^e \cos \theta_h d\omega_h \\ &= \frac{e+2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta_h)^e \cos \theta_h \sin \theta_h d\theta_h \\ &= \frac{e+2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos \theta_h)^{e+1} d(\cos \theta_h) \\ &= \frac{e+2}{2\pi} 2\pi \int_1^0 -u^{e+1} du \\ &= \frac{e+2}{2\pi} 2\pi \left(-\frac{u^{e+2}}{e+2} \Big|_1^0 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

归一化有利于能量守恒
归一化约束基于height field假设



height field假设有利于能量守恒 ???

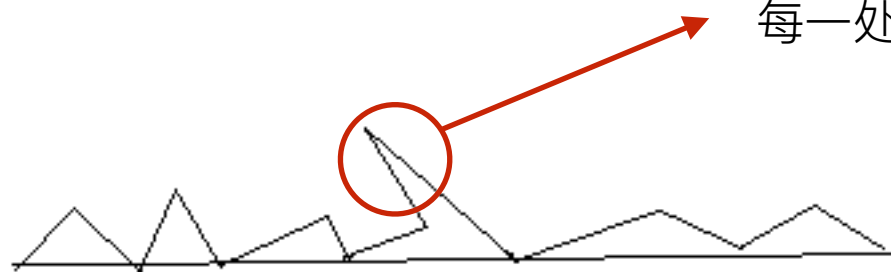


此结论似有问题，height field假设只是个简化假设，维持能量守恒怎能靠它？

应该这样理解：

在有height field简化假设的情况下，主要靠归一化约束维护能量守恒，几何遮挡起辅助作用。

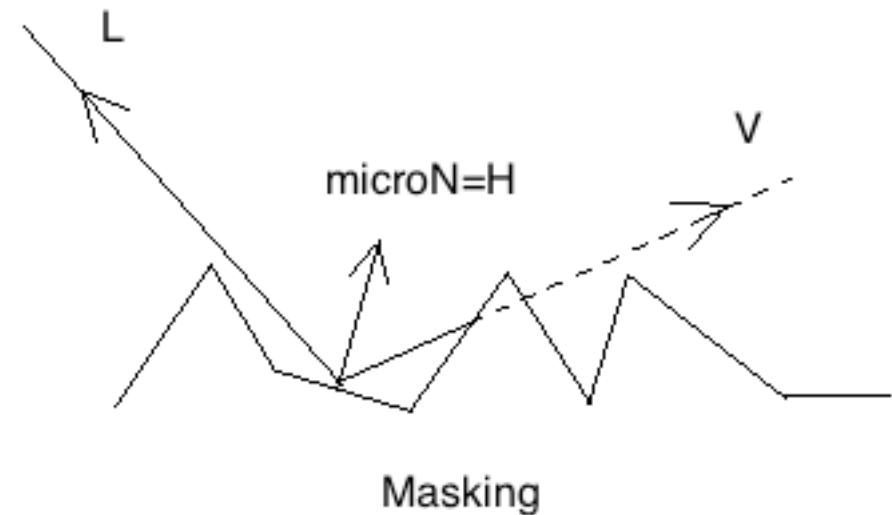
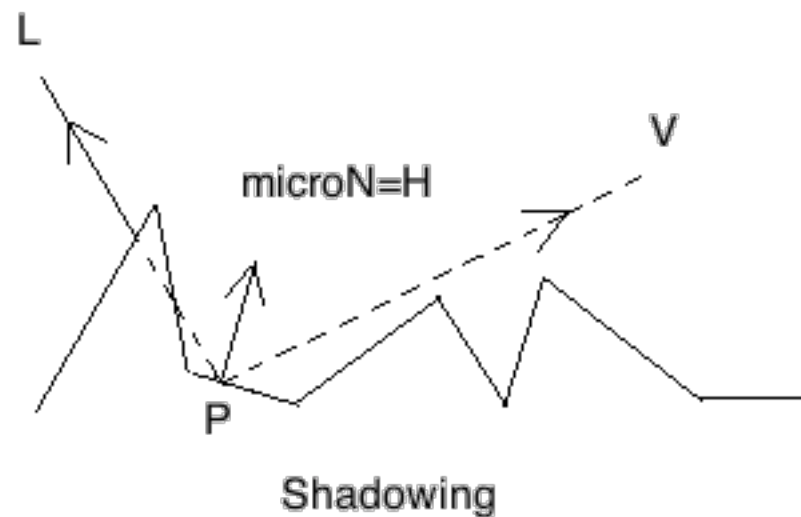
对于更一般（没有height field假设）的模型，几何遮挡将剧增（如图），此时几何遮挡将成为维护能量守恒的主力。



每一处不符合height field的地方，都将产生一个更大的几何遮挡

微表面几何遮挡 $G(l,n,v)$

由于微表面对光线或视线的遮挡，使进入眼睛的亮度减少



对于光滑表面 $G(l,n,v)=1$

G函数举例：

$$G(l,n,v) = \min\{1, G_{masking}, G_{shadowing}\} = \min\left\{1, \frac{2(n \cdot h)(n \cdot v)}{v \cdot h}, \frac{2(n \cdot h)(n \cdot l)}{l \cdot h}\right\}$$

此式推导依赖于height field假设

推导过程见：《3D游戏与计算机图形学中的数学方法(第3版)》 P124

微表面菲涅尔 (Fresnel) 系数 $F(v, h)$

$F(v, h)$ 含义：法向量等于 h 的微表面反射率

实时渲染中通常使用Schlick近似公式：

$$F_{Schlick}(v, n) = F_0 + (1 - F_0)(1 - n \cdot v)^5$$

参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Schlick%27s_approximation

光滑表面掠角(gazing angle)为完美镜面

金属高光可能有颜色 (F_0 有颜色)，非金属高光无颜色 (F_0 为灰度)

参考：https://www.allegorithmic.com/system/files/software/download/build/PBR_Guide_Vol.1.pdf

漫反射与反射配比

$$f(l, v) = f_{Lambert}(l, v)(1 - F_{macro}(v, n)) + f_{Cook-Torrance}(l, v)$$

用 1-宏表面菲涅尔 作为漫反射比例

$$F_{macro}(v, n) = \frac{\int_{\Omega} F(v, microN) D(microN) d\omega_{microN}}{\int_{\Omega} D(microN) d\omega_{microN}}$$

对于光滑表面而言，microN=n，D(microN)=D(n)=1，退化为：

$$F_{macro}(v, n) = F(v, n)$$

出于简化，往往粗糙表面也近似使用此式。

BRDF最终表达式

$$f_{Lambert}(l, v) = \frac{albedo}{\pi}$$

$$f_{Cook-Torrance}(l, v) = \frac{F(v, h)G(l, n, v)D(h)}{4(n \cdot l)(n \cdot v)}$$

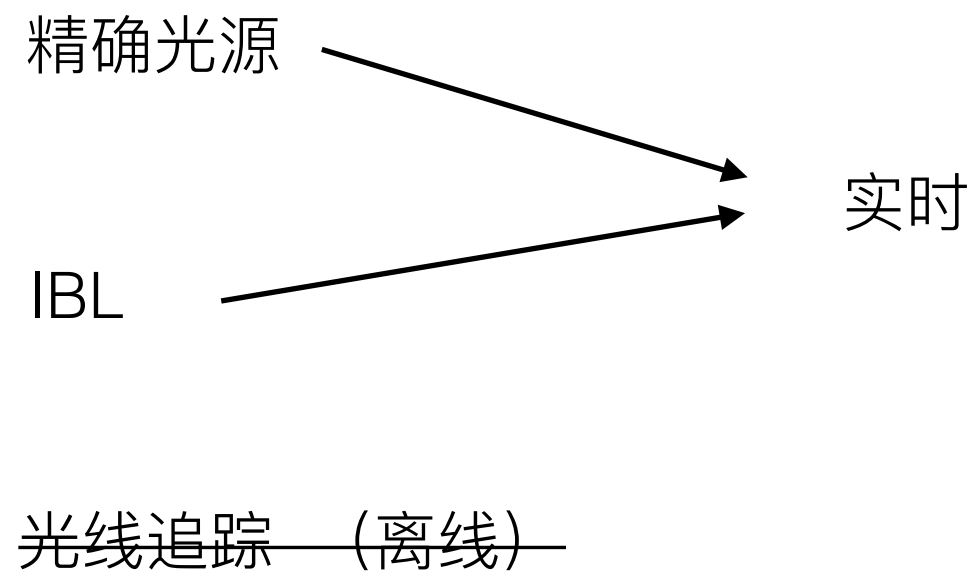
$$F_{macro}(v, n) \approx F(v, n)$$

$$f(l, v) = f_{Lambert}(l, v)(1 - F_{macro}(v, n)) + f_{Cook-Torrance}(l, v)$$

即：

$$f(l, v) = \frac{Albedo}{\pi}(1 - F(v, n)) + \frac{F(v, h)G(l, n, v)D(h)}{4(n \cdot l)(n \cdot v)}$$

渲染方程求解方案举例



精确光源(Punctual Light Sources)

传统光源类型，如directional light，在辐射理论中该如何表示？

精确光源：

面积无限小，亮度无限大，贡献有限亮度的发光面。

其渲染方程为

$$L_o = \pi c_{light} f(l, v) (n \cdot l)$$

终于不再带有积分符号，可以写进shader了！

推导：

精确光源颜色定义为垂直照射固有颜色为白色的lambert表面，表面被染成的颜色：

$$c_{light} = \int_{\sigma} \frac{white}{\pi} L d\omega = \frac{white}{\pi} \int_{\sigma} L d\omega$$

所以：

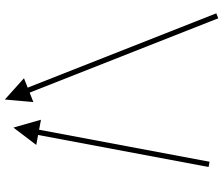
$$\begin{aligned} L_o &= \int_{\sigma} f(l, v) L (n \cdot l) d\omega \\ &= f(l, v) (n \cdot l) \int_{\sigma} L d\omega \quad (\sigma \text{覆盖的立体角很小，此范围内 } l \text{ 不变，故可提出}) \\ &= f(l, v) (n \cdot l) \pi c_{light} \end{aligned}$$


参考：http://renderwonk.com/publications/s2010-shading-course/hoffman/s2010_physically_based_shading_hoffman_a_notes.pdf

基于图像的光照 (IBL)

用环境贴图充当渲染方程 $L_o = \int_{\Omega} f(p, \omega_i, \omega_o) L_i \cos \theta_i d\omega_i$ 中的 Ω , 进行照明

求解方法:

离线  ~~暴力计算: 直接计算球面积分。~~
~~重要性采样: 按lobe进行采样, 即对出射方向贡献大的入射方向采样密集, 贡献小的采样稀疏。~~

实时  预过滤 (prefiltering):

漫反射和高光分开过滤。

漫反射过滤结果可存到cubemap。近似充当环境光(ambient)。

高光预过滤结果维数较高, 需做诸多近似才能存入cubemap。

预过滤可使用 暴力计算、重要性采样 等离线方法, 也可以使用廉价blur近似。

通常将对应不同粗糙度的过滤结果存到cubemap的不同mipmap level中。

金属 workflow (workflow)

导体 绝缘体/电介质
可表现 金属 到 非金属 大部分材质

两种 \swarrow metallic/roughness workflow
 \searrow specular/glossiness workflow



metallic/roughness workflow



metallic

金属度，可取 $[0,1]$ 中任意值。

metallic=0表示非金属，metallic=1表示金属

非金属F0变化范围较小，通常在0.02~0.05之间（宝石(Gemstones)除外，在0.05~0.17之间）
metallic/roughness workflow中通常将其写死为一个固定值，如0.04

base color

baseColor中存非金属的diffuseColor或金属的F0两类信息。

对于非金属(metallic为0): diffuseColor=baseColor, $F0=0.04$ 。

对于金属(metallic为1): diffuseColor=black, $F0=baseColor$ 。

对于中间状态: diffuseColor=lerp(baseColor,black,metallic), $F0=lerp(float3(0.04), baseColor)$ 。

roughness

粗糙度，取值范围 $[0,1]$ ，roughness越大高光越模糊

specular/glossiness workflow



diffuse

baseColor中存金属或非金属的diffuseColor
由于金属无漫反射，所以金属部分diffuseColor为黑色

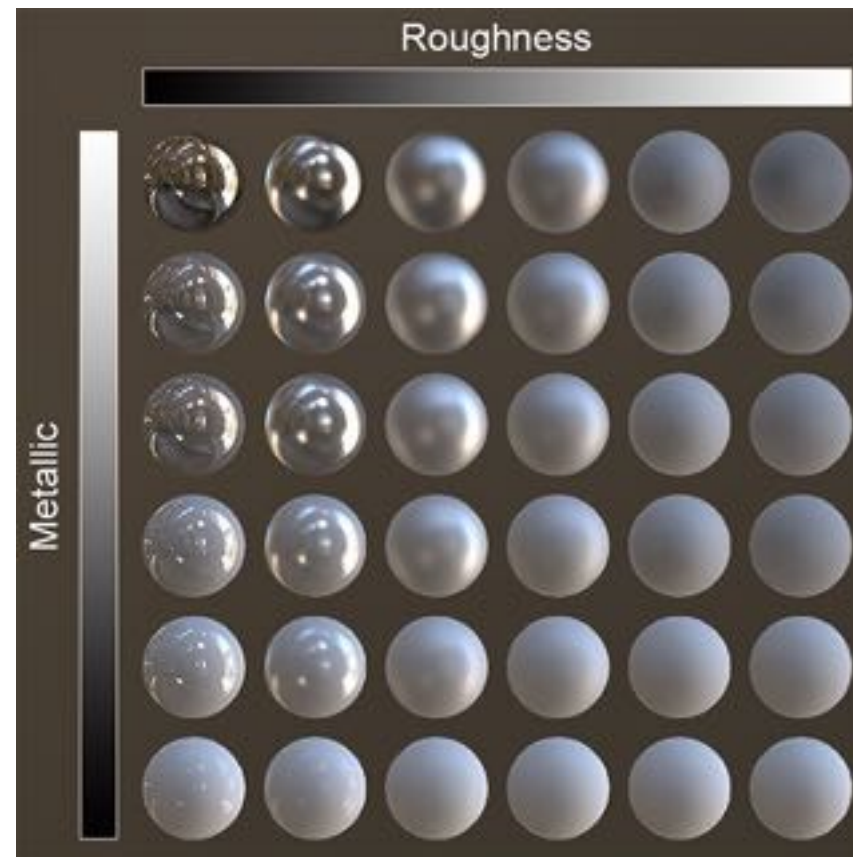
specular

金属或非金属的F0，
由于金属的F0可能有颜色，所以specular map需为彩图。
specular/glossiness workflow中非金属F0无需写死。

glossiness

光泽度，等于 $1 - \text{roughness}$

metallic/roughness效果图



取自：http://manual.reallusion.com/Character_Creator_2/ENU/2.0/15_Multiple_Channel_Texture_Mapping/PBR/PBR.htm

后记

本篇为第一篇，主要讲PBR基础。

一些高级主题如 次表面、体渲染 等未展开，

一些偏离线的内容如 光线追踪、重要性采样 等未展开，

一些较复杂的证明省略了（有的附了参考链接），

希望未来能在其它篇里展开。

另外水平所限可能包含错误，欢迎斧正、探讨，
我会在本文后续版本中进行修正。